



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

**SOBRE LA ESTRUCTURA NUCLEAR: EL MODELO DE YANG –MILLS
COMO UNA EXPLICACIÓN A SU ESTABILIDAD.**

Carlos Stiven Camelo Oliveros

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
Facultad de Ciencia y Tecnológica, Departamento Física
Bogotá, Colombia

2018

©

**SOBRE LA ESTRUCTURA NUCLEAR: EL MODELO DE YANG –MILLS
COMO UNA EXPLICACIÓN A SU ESTABILIDAD.**

Carlos Stiven Camelo Oliveros

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Licenciado en Física

Director:
Mauricio Rozo Clavijo

Línea de Investigación:
La enseñanza de la Física y la relación Física-Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física
Bogotá, Colombia

2018

©

DEDICATORIA

A Dios por darme salud y sabiduría para dar este primer pasó en mi carrera profesional. A la persona más importante de mi vida, mi mama, por brindarme sus buenos deseos, motivaciones, consejos en mi formación como persona.

"Physical law should have mathematical beauty"

Paul Dirac

"Todos somos muy ignorantes. Lo que ocurre es que no todos ignoramos las mismas cosas".

"Nunca consideres el estudio como una obligación sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber"


Albert Einstein

"Las personas tranquilas y silenciosas son las que tienen las mentes más fuertes y ruidosas".

Stephen Hawking

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Pedagógica Nacional por haberme dado la oportunidad de dar este primer pasó en mi carrera profesional. Al personal administrativo y humano (Dirección, Secretarías, Centro de documentación, laboratorio, sala de informática etc.) del departamento de física. A los profesores, quienes compartieron su conocimiento y experiencia con humildad y rigor para mi formación. Al profesor Mauricio Rozo Clavijo por su tiempo y paciencia para la construcción del trabajo de grado. A los jurados por su tiempo y correcciones al trabajo. A los compañeros con los que tuve la oportunidad de compartir en las aulas de clase y fuera de ella. A familiares que aportaron un grano de arena para la consolidación de este gran pasó en mi vida.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela Superior de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 5	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Sobre la estructura del nuclear: El modelo de Yang – Mills como una explicación a su estabilidad.
Autor(es)	Camelo Oliveros , Carlos Stiven
Director	Rozo Clavijo, Mauricio
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2018. 76 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ESTABILIDAD, NÚCLEO, INVARIANCIA GAUGE, SIMETRÍA, ISOSPÍN, NUCLEÓN, PROTÓN, NEUTRÓN, QUANTUM, LAGRANGIANO, ACOPLAMIENTO, INTERACCIÓN.

2. Descripción
<p>El tratamiento tradicional que se le ha dado a las modernas teorías fenomenológicas de las interacciones de la naturaleza, resultado de la aplicación de la idea gauge o simetría gauge, en libros especializados tales como la Griffiths, Greiner, Quigg etc. ha sido netamente abstracta, es decir, se parten de ideas poco dicientes para el estudiante. En caso particular, el modelo de Yang- Mills se aborda a partir de ideas tales como invariancia gauge local, simetría interna, regla de acoplamiento mínimo etc., las cuales son confusas para la estructura cognitiva del estudiante.</p> <p>En el presente trabajo de grado se realiza a través de un análisis histórico - crítico una estructura conceptual que permita apreciar desde una dimensión histórica, formal y fenomenológica el modelo de los pensadores Cheng Ning Yang y Robert Mills planteado en el artículo "Conservation Isotopic Spin and Invariance Gauge Isotopic" para explicar la estabilidad nuclear destacando sus alcances y limitaciones.</p>

3. Fuentes

- Bélendez, A. (2008). La unificación de luz, electricidad y magnetismo: La "síntesis electromagnética" de Maxwell. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 30(2), 2601-1-20.
- C. Giancoli, D. (2009). *Física para ciencias e ingeniería con física moderna*. (V. Campos Holguin, & V. Robledo Rella, Trads.) Mexico: Mexico.
- Calahorra, C. V. (1995). *Química general - Introducción a la Química Teórica*. España: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Clavijo, M. R. (2016). Sobre la dinámica de una partícula en rotación. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, XL(157), 585-589.
- G. Hewitt, P. (2007). *Física conceptual* (Décima ed.). (V. Flores Flores, Trad.) Mexico: Pearson.
- Garzón, J. (2010) Sobre la estructura nuclear del átomo: el isospín como una explicación de la estabilidad del núcleo (trabajo de grado). Universidad pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Sanchez, L. (2014) ¿Qué es una teoría gauge? (trabajo de grado). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.
- Morales, R. (2006) Soluciones clásicas a teorías de Yang-Mills SU (2) (trabajo de grado) Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- García Castañeda, M., & Ewert De - Geus, J. (2003). *Introducción a la física moderna* (Tercera ed.). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- García Prada, O. (2011). Existencia de Yang - Mills y salto de masa. *Jornadas sobre los problemas del milenio*, (págs. 23-58). Barcelona.
- Griffiths, D. (2004). *Introduction to elementary particles* (Primera ed.). WILEY-VCH.
- Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to electrodynamics* (Cuarta ed.). EE. UU: Pearson.
- Leonard Mlodinow, S. H. (2010). *El gran diseño*. (D. Jou i Mirabent, Trad.) España: Critica.
- Manrique, M. M. (2006). Los análisis histórico críticos y la recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades. *Pro-Posiciones*, 27 - 31.
- McMahon, D. (2008). *Quantum Field Theory*. EE.UU: Mc Graw Hill.
- N, Q., & Molina, F. (2009). Una descripción sencilla de las Teorías Gauge. *Tumbagaga*, 19-29.
- Navarro Vives, J. (2000). El neutrón de Chadwick y su interpretación. *Cronos*, III(2), 273-293.

- Ning Yang, C., & L. Mills, R. (1954). Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, *XCVI*(1), 191-195.
- Quigg, C. (1997). *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic*. Advanced Book Classics. Westview Press.
- Rupérez, F. L. (1994). *Mas allá de las partículas y ondas: una propuesta de inspiración epistemológica para la educación*. España: Ministerio de Educación Cultura y Deporte, Centro de Investigación y Documentación Educativa.
- Wiechowsk, S. (1969). *Historia del átomo* (Tercera ed.). Barcelona: Labor.

4. Contenidos

CAPITULO I: SOBRE LA ESTRUCTURA NUCLEAR: UNA MIRADA HISTÓRICA

En este capítulo se muestran, a grandes rasgos, los precedentes históricos y circunstanciales de interés que precedieron al establecimiento de *la idea gauge* y al modelo fenomenológico propuesto por Yang y Mills como una explicación a la estabilidad nuclear, destacando la teoría electromagnética clásica como una primera unificación de la interacciones de la naturaleza y donde de forma indirecta, sin ser reconocida, aparece inmersa la simetría gauge.

CAPITULO II: SOBRE LA IDEA GAUGE

En este capítulo se muestra el contexto que dio lugar a la *idea gauge* y se desarrollan didácticas con el objetivo que el estudiante haga una comprensión con sentido y significado. Apreciándose como una manera, en principio, abstracta pero novedosa de describir los fenómenos que acontecen en la naturaleza, específicamente aquellos que ocurren a escala atómica. Esto se hace analizando situaciones concretas de la mecánica y la electrodinámica clásica, siendo estos contextos los más familiares para el estudiante. Adicionalmente, se hace uso de la formulación lagrangiana específicamente del *Lagrangiano de Dirac asociado a un electrón libre de interacciones* para justificar la importancia que juega el *factor de acoplamiento mínimo* en el contexto de la teoría cuántica de campos.

CAPITULO III: SOBRE LA ESTRUCTURA NUCLEAR: EL MODELO DE YANG – MILLS UNA EXPLICACIÓN A SU ESTABILIDAD.

En este capítulo se configura el eje central de la presente investigación. Se aborda el problema de la estabilidad nuclear mediante un análisis histórico-crítico sobre el artículo "*Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*" , publicado por los pensadores Yang y Mills en 1954 en donde se plantea la problemática y el enfoque a implementar para resolverla, permitiendo identificar sus alcances en la comprensión sobre la estructura nuclear y las preguntas que resultaron e influyeron de forma significativa en el desarrollo de esquemas descriptivos de la física de partículas, tales como el *modelo de quartz*, el modelo electro-débil y el modelo estándar, basado en ciertos grupos especiales

de simetría, $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$, los cuales permiten hacer una descripción de tres de las cuatro interacciones de la naturaleza de forma conjunta.

5. Metodología

El presente trabajo se desarrolló a partir de un análisis histórico crítico o recontextualización de saberes científicos alrededor de la propuesta fenomenología de los pensadores Cheng Ning Yang y Robert Mills sobre la estabilidad nuclear.

Los análisis histórico críticos se inscriben en procesos de recontextualización de saberes científicos (Ayala, 2016). Es un proceso mediante el cual a partir de análisis sobre originales se busca consolidar una estructura conceptual que permita al estudiante comprender con sentido y significado un tópico en particular de la física.

En ese sentido, se propone una estructura basada en tres ejes: Histórica, formal y fenomenológica a partir del artículo "*Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*", en el cual se configura en una manera de explicar la estabilidad nuclear bajo el marco de la simetría gauge. Lo anterior permitiéndole al estudiante tener las bases teóricas para entender las teorías actuales y modernas de las interacciones de la naturaleza tales como el modelo de Salam – Weinberg, el modelo estándar etc.

6. Conclusiones

- El descubrimiento de los rayos X, la radioactividad y el electrón, hacia finales del siglo XX, indujeron a pensar sobre una estructura para el átomo, representado, en principio, como distribuciones esféricas de carga positiva y en su interior los electrones (Modelo de Thompson), el cual por ser inadecuado para explicar algunos hechos experimentales fue remplazado por el modelo planetario de Ernest Ruthenford y Niels Bohr basado en la idea de los estados estacionarios.
- Dada la explicación alrededor de la estructura del átomo surge la pregunta si el núcleo tiene una estructura y si la tiene de que estaba compuesta. En este sentido, W. Heinsenberg, H. Yukawa y Yang – Mills proponen modelos encaminados a explicar su estabilidad a partir de una estructura nuclear compuesta por protones y neutrones.
- La idea gauge surge por el intento de unificar la teoría electromagnética y la teoría general de la relatividad bajo una perspectiva geométrica gracias a los trabajos de Hermann Weyl.
- La manera de proceder de Yang - Mills para proponer su modelo es análoga a como se procede desde el contexto de la electrodinámica clásica en su forma covariante,

configurándose en un marco conceptual pertinente pero limitado para entender la estabilidad nuclear.

- Bajo el modelo de Yang-Mills las interacciones entre nucleones se dan a partir de la existencia de un campo gauge cuyo quantum posee tres estados de carga a diferencia del caso electromagnético.
- La propuesta fenomenológica de los pensadores Yang y Mills se configura en el génesis del modelo estándar, sus limitaciones justificaron el desarrollo de propuestas tales como la de Salam - Weinberg, en la cual se hace una unificación de las interacciones débil y electromagnética.
- El análisis histórico - crítico realizado sobre el artículo " Conservation of Isotopic Spin and Invariance Gauge Isotopic" de Yang y Mills permitió apreciar la estabilidad nuclear, configurándose en un aporte pedagógico para entender con sentido y significado el valor que ha jugado la simetría en la construcción de explicaciones en torno a la naturaleza.
- El principio gauge se configura como una manera útil de construir esquemas teóricos alrededor de las interacciones de la naturaleza haciendo uso del esquema lagrangiano, permitiendo por un lado, que el lagrangiano asociado a un sistema sea invariante bajo transformación de Lorentz, lo que significa que cumple con la relatividad especial y por otro, que sea invariante bajo una transformación gauge obteniendo términos de interacción entre los campos involucrados, lo cual significa que la simetría implica dinámica.

Elaborado por:	Camelo Oliveros, Carlos Stiven
Revisado por:	Mauricio Roza Clavijo

Fecha de elaboración del Resumen:	07	06	2018
--	----	----	------

ÍNDICE GENERAL

RAE

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTOS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN.....	1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
PREGUNTA PROBLEMA.....	5
OBJETIVO GENERAL.....	5
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	6
SOBRE LA ESTRUCTURA NUCLEAR: UNA MIRADA HISTÓRICA.....	7
1.1 LA NATURALEZA.....	7
1.2 SOBRE LA ESTRUCTURA DE LA MATERIA.....	11
1.2.1 LOS MODELOS ATÓMICOS.....	11
1.2.1.1 MODELO DE THOMPSON.....	12
1.2.1.2 MODELO DE RUTHERFORD.....	13
1.2.1.3 MODELO DE BOHR.....	14
1.2.2 SOBRE EL PROBLEMA DE LA ESTABILIDAD NUCLEAR.....	17
1.2.2.1 MODELO DE HEINSEBERG: ISOSPÍN.....	17
1.2.2.2 MODELO DE YUKAWA: MESONES.....	19
SOBRE LA IDEA GAUGE: EL CASO DE LA ELECTRODINÁMICA CLÁSICA Y EL LAGRANGIANO DE DIRAC.....	21
2.1 LA SIMETRÍA EN CONTEXTO.....	21
2.2 EL GÉNESIS DE LA IDEA GAUGE.....	21
2.3 INVARIANCIA GAUGE LOCAL Y GLOBAL.....	23
2.4 LA MECÁNICA CLÁSICA: POTENCIAL GRAVITACIONAL Y ELECTRICO.....	26

2.5 LA ELECTRODINÁMICA CLÁSICA: ECUACIONES DE MAXWELL	27
2.6 EL LAGRANGIANO DE DIRAC: DERIVADA COVARIANTE.....	30
EL MODELO DE YANG MILLS COMO UNA EXPLICACIÓN A LA ESTABILIDAD NUCLEAR	34
3.1 CONSIDERACIONES GENERALES.....	34
3.2 SOBRE LA PROPUESTA.....	35
3.3 CAMPOS DE YANG MILLS: UNA EXTENSIÓN DE LA QED	39
3.4 LA ESTABILIDAD NUCLEAR BAJO ESTA PERSPECTIVA	44
CONCLUSIONES.....	48
BIBLIOGRAFÍA.....	50
APÉNDICE A: TEOREMAS VECTORIALES	52
APÉNDICE B: TENSOR DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.....	54
APÉNDICE C: INVARIANCIA GAUGE LOCAL DEL LAGRANGIANO DE LA QED ..	55
APÉNDICE D: TENSOR DE INTENSIDAD DEL CAMPO DE YANG MILLS	57
APÉNDICE E: INVARIANCIA GAUGE LOCAL DEL LAGRANGIANO DE YANG MILLS.	60

TABLA DE FIGURAS

1.1 Tales de Mileto (624 a.C – 546 a. C).....	20
1.2 Leucipo (Siglo V a.C) y Demócrito (460 a.C – 370 a.C).Filósofos de la antigua Grecia.....	21
1.3 Empédocles (495 a.c – 444 a.c) y Aristóteles (384 a.C – 322 a. C) consideraban la materia como producto de la combinación de los cuatro elementos.....	22
1.4 Representación de los átomos dada por John Dalton en su obra A New System of Chemical Philosophy.....	22
1.5 Galileo Galilei (1564-1642). Fundador del método científico y el experimento	23
1.6 Modelo de Thompson.....	25
1.7 Modelo de Rutherford. Distribución de carga positiva en el núcleo y electrones girando a su alrededor.....	26
1.8 Electrón colapsando.....	27
1.9 Modelo de Bohr: Un núcleo cargado positivamente y electrones girando alrededor en ciertas orbitas permitidas.....	28
1.10 Cosmovisión de Prout acerca de la constitución de los átomos.....	28
1.11 Propuesta de electrones en el núcleo.....	29
1.12 Modelo del átomo tomando en cuenta la existencia de los neutrones.....	29
1.13 Isospín protón y neutrón.....	30
1.14 (a) Interacción neutrón – protón mediada por el electrón. (b) Interacción protón-neutrón mediada por el positrón	31
1.15 Interacciones protón-neutrón, protón – neutrón y neutrón- protón	32
2.1 La longitud del vector desplazamiento es invariante bajo una transformación gauge de la posición final y inicial.....	37
2.2 Transformación global por conjugación entre pelotas negras y grises obteniéndose una organización estructural equivalente a la inicial.....	38
2.3 Transformación local por conjugación entre pelotas negras y grises obteniéndose una organización estructural diferente.....	38
2.4 Interacción entre dos electrones mediada por fotones.....	46

3.1	<i>Chen Ning Yang y Robert Mills.....</i>	48
3.2	<i>(a) Despreciando la carga eléctrica de los constituyentes del núcleo, el protón y el neutrón son iguales. (b) Al elegir una orientación del isospín para cada nucleón debe ser respetada en todos los puntos del espacio. (c) Realizar una transformación isotópica sobre el sistema nuclear se obtiene la misma cantidad de protones y neutrones, es invariante.....</i>	50
3.3	<i>Desde el punto de vista local, cada observador esta en la libertad de elegir una orientación del isospin representado por un estado del nucleón en donde tambien se debe satisfacer el requerimiento de invariancia.....</i>	51
3.4	<i>(a) Interacción entre nucleones mediante el propagador asociado al campo de Yang - Mills análogo a la QED. (b) y (c) autointeracciones no lineales entre los campos gauge de Yang – Mills.....</i>	56
3.5	<i>Interacción de protones y neutrones vía campo de Yang – Mills.....</i>	57
3.6	<i>Interacción entre nucleones a partir del propagador a asociado al campo de Yang – Mills.....</i>	58
3.7	<i>Antes de realizar una medida el nucleon es un estado de superposición determinado por el protón y el neutrón.....</i>	59

INTRODUCCIÓN

Una de las actividades del hombre ha sido la incesante búsqueda de explicaciones acerca de los fenómenos que acontecen en el Universo. En ese proceso y antes de la llegada del paradigma cuántico, hacia finales del siglo XIX, su modo de proceder consistía en la construcción de modelos compatibles con la experiencia sensible.

Con el descubrimiento del efecto fotoeléctrico, la radiación de cuerpo negro, a principios del siglo XX, esta manera de conocer mostro ser limitada, el conjunto de predicciones que esta daba lugar no coincidían con la realidad misma de los fenómenos, conduciendo a la aparición de ideas contra - intuitivas claves para la comprensión de los fenómenos atómicos.

Los primeros intentos por hacer una comprensión sobre la naturaleza giraron en torno a la estructura de la materia, *¿Qué es la materia?* dando lugar a intensos debates por parte de los pensadores de la *antigua Grecia*, estableciéndose dos escuelas de pensamiento: *La atomista y la continuista*.

La atomista, propuesta por Leucipo y Demócrito, postulaba a la materia compuesta por átomos y la continuista, fundada por Empédocles y Aristóteles, la consideraba como producto de una cierta combinación de los cuatro elementos: agua, tierra, fuego y aire, siendo la primera reconocida solo hasta el siglo XVII con los trabajos del químico inglés John Dalton. Dos siglos después con el descubrimiento de los rayos X, la radioactividad y el electrón, el átomo representado como unidad material carente de estructura tuvo que ser reformulada, pasando a ser una entidad compuesta por otras partículas.

A principios del siglo XX Rutherford y Bohr, basándose en los trabajos de Röntgen, Becquerel, Thompson, Planck, Geiger, Marsden etc., orientaron sus esfuerzos a desarrollar modelos o representaciones del átomo, generando nuevas y profundas problemáticas de orden conceptual debido a que sus supuestos y planteamientos inducían a predicciones que no correspondían al "*campo de efectos observados*", es decir, con los resultados experimentales.

Establecido el modelo planetario de Rutherford de los átomos: *Electrones girando alrededor de un núcleo cargado positivamente*, afloraron ciertos cuestionamientos relacionados a su estructura y estabilidad. Al estar toda la carga positiva en el núcleo ¿tendrá esta estructura? Y si la tiene de que está compuesta.

Desarrollos posteriores indicaban que el núcleo, en principio, estaba compuesto por protones existiendo una extenuante y fuerte repulsión eléctrica entre ellos. De ser así, entonces este debía ser inestable, sin embargo, se observaba que la materia, en general, era estable. Lo anterior hizo que una serie de pensadores tales como Heisenberg, Yukawa y Yang - Mills propusieran modelos encaminados a explicar su estabilidad.

A su vez la noción de simetría, apreciada originalmente desde un contexto puramente geométrico, empezó a ser un camino promisorio para explicar los fenómenos cuánticos, convirtiendo largos y engorrosos desarrollos algebraicos en simples expresiones matemáticas, cuyas consecuencias físicas han trascendido en la manera de ver y explicar los acontecimientos del mundo natural.

Por ejemplo, Dirac cuya filosofía consistía que las leyes de la física debían tener belleza matemática, logro con su ecuación describir algunas propiedades difusas del electrón y predecir la existencia de las antipartículas. W. Heisenberg reconociendo las cercanas similitudes entre el protón y el neutrón proporciono una primera explicación a la estabilidad del núcleo atómico, la cual resultó infructuosa. Finalmente, Yang y Mills, implementando la idea gauge planteada por Hermann Weyl en 1918, introduciendo el grupo de simetría no abeliano más simple $SU(2)$ y procediendo de forma análoga a la "*electrodinámica cuántica*" lograron describir de forma aproximada la fuerza fuerte responsable de la cohesión nuclear. Hechos que significaron la génesis del modelo estándar, cuyas predicciones teóricas se encuentran ampliamente verificadas por la actividad empírica desarrollada en centros de investigación como el CERN y el FERMILAB.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A pesar de los grandes avances que ha tenido la ciencia, el tratamiento que se le ha dado a los recientes modelos teóricos de las interacciones de la naturaleza, producto de la aplicación de los denominados grupos de *simetría gauge*, tales como el de Yang-Mills, el electro-débil de Salam - Weinberg y el modelo estándar en textos especializados (Griffiths, Greiner etc.) ha sido netamente algebraica y poco dicente, es decir, a un nivel en el que sobre el estudiante privilegia la incertidumbre y el sosiego, generando a su vez que desconozca el conjunto de problemáticas y discusiones que dieron lugar a su establecimiento e impidiendo que lo puedan incorporar en su contexto con sentido y significado.

En caso particular, el modelo de *Yang-Mills* no se aborda desde un contexto fundamental (Griffiths, 2004), se parten de ideas tales como *invariancia gauge*, *grupos no conmutativos con simetría local*, *densidad lagrangiana*, las cuales son confusas, en principio, para la manera de conocer del estudiante.

Por otra parte, la manera de enseñar los contenidos de la física en el contexto universitario no ha sufrido mayores transformaciones, se sigue haciendo desde una perspectiva cronológica, generando una serie de problemáticas. Una es la resistencia por parte de los estudiantes de comprender los fundamentos sobre los cuales se sustentan esta manera de pensar la estructura de la materia.

En el contexto colombiano los estándares proporcionados por el MEN (*Ministerio de Educación Nacional*) no plantean objetivos encaminados hacia la enseñanza de la física moderna.

Los programas de formación de Licenciados en Física no son ajenos a esta problemática. Dentro de sus planes de carrera no se disponen de cursos obligatorios introductorios que les permitan fortalecer sus competencias de enseñanza y de investigación relacionadas a teorías modernas y actuales de la física tales como la relatividad general, la teoría cuántica de campos y la teoría de cuerdas etc. Es decir, desde un marco más humano y accesible sin que se omitan elementos que afecten la rigurosidad en su estudio.

Lo anterior hace que los estudiantes y maestros en formación hallen ciertas dificultades en la comprensión sobre las ideas modernas de la física debido a

que sus planteamientos van en contravía con el sentido común, generando que reduzcan cualquier explicación del *mundo natural* a un modelo mecánico. En el caso del Modelo de Bohr los libros de texto tales como la Sears, la Tripler, Giancoli lo plantean a partir de ideas clásicas generando malas interpretaciones y limitaciones en su proceso de aprendizaje.

Por ejemplo, al referirse al núcleo atómico y a su estabilidad se limita a planteamientos *a posteriori*, es decir, recae en la existencia de una fuerza cuya naturaleza es distinta a la eléctrica caracterizada por ciertos aspectos particulares, desconociéndose otros puntos de vista menos ortodoxos como el de Yang- Mills basado en la noción de simetría, el cual no solo permite explicar el objeto de estudio sino también apreciar nuevas dificultades determinadas principalmente en el terreno de la física teórica tal como el problema de la masa de las partículas, resuelto por Peter Higgs, François Englert y Robert Brout en los años 1960.

Por este motivo, se analiza la estabilidad desde este enfoque prestando especial atención al conjunto de problemáticas y motivaciones que dieron lugar a su aparición y las que surgieron a partir de él, tal que le permita a los estudiantes consolidar bases conceptuales suficientes para construir una comprensión de éste y los actuales modelos fenomenológicos de las interacciones de la naturaleza en donde se hace un uso robusto de las teorías gauge. Esto, se hace a partir de un análisis histórico- crítico alrededor de la propuesta fenomenológica de los pensadores Chen Ning Yang y Robert Mills.

Los análisis histórico - críticos se configura en un proceso de recontextualización de saberes científicos, es decir, consiste en construir un esquema propicio que le permita al estudiante apreciar desde otra mirada una problemática dada de la física, en este caso alrededor de la estabilidad nuclear (Ayala, 2006).

En ese sentido, en el capítulo I se muestra de forma general los precedentes históricos y circunstanciales de interés que precedieron al establecimiento de *la idea gauge* y al modelo fenomenológico propuesto por Yang y Mills como una explicación a la estabilidad nuclear, destacando la teoría electromagnética clásica como una primera unificación de la interacciones de la naturaleza y donde de forma indirecta, sin ser reconocida, aparece inmersa la simetría gauge.

En el capítulo II, se muestra el contexto que dio lugar a la idea gauge y se desarrollan didácticas con el objetivo que el estudiante haga una comprensión con sentido y significado. Apreciándose como una manera, en principio, poco ortodoxa pero novedosa de describir los fenómenos que acontecen en la naturaleza, específicamente aquellos que ocurren a escala atómica. Esto, se hace analizando situaciones concretas de la mecánica y la electrodinámica clásica, siendo estos contextos los más familiares para el estudiante. Adicionalmente, se hace uso de la formulación lagrangiana específicamente del Lagrangiano de Dirac asociado a un electrón libre de interacciones para justificar la importancia que juega el factor de acoplamiento mínimo en el contexto de la teoría cuántica de campos.

Finalmente, en el capítulo III se configura el eje central de la presente investigación. En este se aborda el problema de la estabilidad nuclear mediante un análisis histórico-crítico sobre el artículo "*Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*", publicado por los pensadores Yang y Mills en 1954 en donde se plantea la problemática y el enfoque a implementar para resolverla, permitiendo identificar sus alcances en la comprensión sobre la estructura nuclear y los cuestionamientos que resultaron e influyeron de forma significativa en el desarrollo de esquemas descriptivos de la física de partículas, tales como el *modelo de quarks*, el modelo electro-débil y el modelo estándar, basado en ciertos grupos especiales de simetría, $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$, los cuales permiten hacer una descripción de tres de las cuatro interacciones de la naturaleza de forma conjunta.

PREGUNTA PROBLEMA

¿Cómo a partir de un análisis histórico crítico del modelo de Yang-Mills se puede dar una explicación sobre la estabilidad nuclear de tal forma que permita a los estudiantes una mejor interpretación?

OBJETIVO GENERAL

Realizar un análisis histórico - crítico sobre la fenomenología propuesta por Yang-Mills entorno a la estructura nuclear del átomo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Indagar el contexto problemático que dio origen al modelo de Yang-Mills como una explicación a la estabilidad nuclear.
- Implementar la idea gauge dentro del contexto de la mecánica clásica y el electromagnetismo clásico con el propósito de hacer de ella una mejor comprensión.
- Plantear el modelo de Yang-Mills como una primera explicación a la estabilidad nuclear bajo el esquema gauge mostrando sus alcances y limitaciones.

ESTADO DEL ARTE

A partir de la búsqueda sobre trabajos referentes a la problemática planteada se encontró a nivel local una monografía denominada: *Sobre la estructura nuclear del átomo: el isospín como explicación de la estabilidad del núcleo* de Jenny Alexandra Garzón Villalba. Se aborda desde un contexto histórico el concepto de isospín y su utilidad en el intento por dar una explicación a su la estabilidad nuclear.

A nivel nacional se encontró una monografía que lleva como título:

- *Soluciones Clásicas a Teorías Yang-Mills en SU(2)* de Ricardo Morales Betancourt. Allí se abordan algunos de los resultados más importantes del modelo de Yang-Mills asociados al grupo Gauge SU(2). En donde se aborda desde una perspectiva cronológica y geométrica algunos de los resultados más importantes de la simetría gauge en el proceso de construcción de teorías fenomenológicas de la naturaleza prestando especial importancia a la electrodinámica cuántica y la de Yang - Mills.

A nivel internacional se hará uso del trabajo de grado titulado:

- *¿Qué es una Teoría Gauge?* de Luis Sánchez- Tejerina San José. En este se plantea lo que es una Teoría Gauge partiendo de los acontecimientos que conllevaron de alguna u otra forma a su establecimiento y sus resultados más importantes, los cuales han influenciado de forma significativa en nuestra comprensión del universo.

CAPITULO I

SOBRE LA ESTRUCTURA NUCLEAR: UNA MIRADA HISTÓRICA

1.1 LA NATURALEZA

Uno de los objetivos del hombre ha sido explicar el mayor número de observaciones con la menor cantidad de principios fundamentales. Originalmente lo hizo a partir de sus creencias, mitos y leyendas. (Hawking y Mlodinow, 2010). Los movimientos de los cuerpos celestes, por ejemplo, eran descritos en términos de acciones divinas de seres sobrenaturales y celestiales. Durante muchos años este fue el modo predominante de explicar los fenómenos de la naturaleza, sin embargo, Tales de Mileto en el V a.C (ver figura 1.1) instauro una manera objetiva de hacerlo.

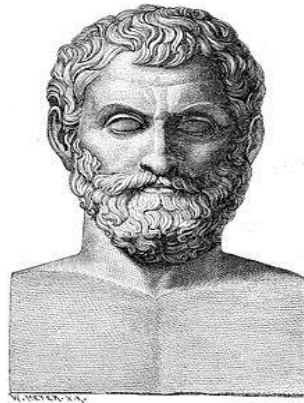


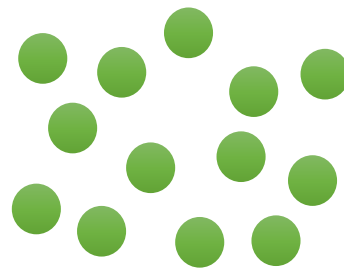
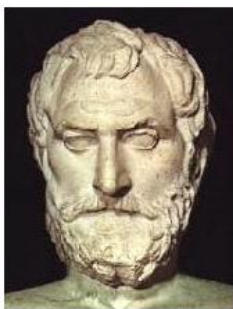
Figura 1.1. Tales de Mileto (624 a.C – 546 a. C). Imagen tomada y copiada de https://es.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto.

Tales de Mileto considero que la naturaleza seguía regularidades expresables en leyes y principios, las cuales a partir de su sistematización brindaba la posibilidad de entender cualquier acontecimiento del universo. (Hawking y Mlodinow, 2010). Este momento se considera el génesis de la ciencia tal cual como la conocemos hoy en día. Una empresa dedicada a organizar en un modelo permisible, adecuado y útil las observaciones que el sujeto realiza sobre su entorno con el propósito de comprenderlas.

Establecida esta manera de conocer el hombre se empezó a indagar sobre la materia *¿Que es la materia?* Por ser un aspecto fundamental para entender la naturaleza en su totalidad, dando lugar a dos líneas de pensamiento: *la atomista y la continuista*.

La atomista, fundada por Leucipo y seguida por Demócrito en el siglo V a.C, proponía que la materia era discreta, estaba compuesta de átomos¹ (Ver figura 1.2 (b)), los cuales se distinguían por su forma, posición y orden, siendo el vacío² parte de su constitución. (Wiechowsk, 1969) “*Como resultado de esta distinción su unión era producto de su adherencia y cruce recíproco hasta que una fuerza, proveniente del exterior, indujera o produjera su separación*” (Wiechowsk, 1969).

La idea de átomo fue una manera de concebir la materia, admitiendo la existencia de una estructura fundamental, la cual bajo ciertos supuestos, permitía explicar un amplio volumen de fenómenos hasta ese momento conocidos de un modo más o menos trivial (Wiechowsk, 1969).



(a)

(b)

Figura 1.2. Leucipo (Siglo V a.C) y Demócrito (460 a.C – 370 a.C). Filósofos de la antigua Grecia. Imagen tomada y copiada de <http://epitomeclasica.blogspot.com.co/2012/01/atomistas-leucipo-y-democrito.html>. (b) Cosmovisión discreta griega de la materia, los átomos como parte constitutiva de la materia.

La continuista, fundada por Empédocles y seguida por Aristóteles en el siglo IV a.C, presumiendo de la existencia de un límite planteaba que todo era resultado de una combinación de los cuatro elementos, aire, fuego, agua y tierra (Hawking y Mlodinow, 2010) y (Wiechowsk, 1969) (Ver figura 1.3). Siendo estas consideradas sustancias primeras del Universo o como cualidades distintas de una misma base material (Wiechowsk, 1969).

¹ El término átomo proviene del vocablo griego “*átomon*” que significa sin división y empezó a ser utilizado por los griegos para referirse a estructuras materiales muy pequeñas fundamentales carentes de estructura y en permanente movimiento.

² “*Tales cuerpos visibles contienen espacios vacíos entre sus partículas elementales, espacios que se disponen de distinta forma según el tipo de composición*” (Wiechowsk, 1969).

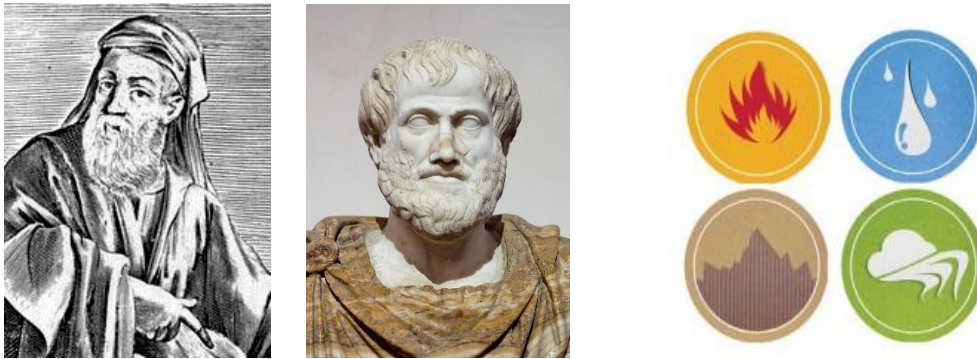


Figura 1.3. Empédocles (495 a.c – 444 a.c) y Aristóteles (384 a.C – 322 a. C) consideraban a la materia como producto de la combinación de los cuatro elementos. Imagen tomada y copiada de <http://www.philosimply.com/philosopher/empeocles> y <https://es.wikipedia.org/wiki/Arist%C3%B3teles>.

Las ideas aristotélicas³ acerca de la naturaleza perduraron por casi veinte siglos como consecuencia que se consideraban innegables y porque se adecuaban con la experiencia sensible (Hewitt, 2007).

La idea de átomo solo fue nuevamente reconocida y valorada por el químico inglés John Dalton en el siglo XVI en su propuesta de un modelo químico (ver figura 1.4). En este, las relaciones de peso que daban lugar a reacciones químicas encontraron justificación (Wiechowsk, 1969). Su uso sistemático en el campo de la física solo fue hacia finales del siglo XIX con los trabajos sobre rayos X, la radioactividad y los rayos catódicos.

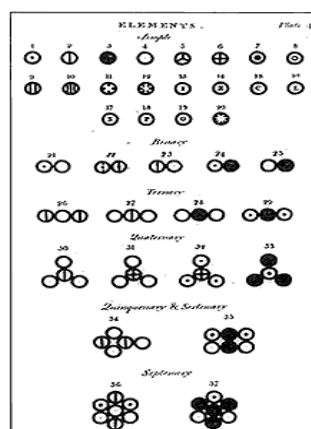


Figura 1.4. Representación de los átomos dada por John Dalton en su obra *A New System of Chemical Philosophy*. Imagen tomada y copiada de [https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo at%C3%B3mico de Dalton](https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B3mico_de_Dalton)

³ La ciencia como actividad humana solo estaba a cargo de algunos pocos y no se basaba específicamente de consensos, siendo un periodo de poca productividad.

Actualmente se considera la materia compuesta por átomos, los cuales a su vez se componen de otras estructuras más fundamentales, quarks y leptones, que interactúan entre sí por los denominados bosones gauge cuya existencia se encuentra ampliamente verificada por la actividad empírica desarrollada en los últimos 50 años. El presente trabajo toma como punto de partida esta concepción sobre la materia siendo el núcleo del átomo la estructura a analizar.

En el siglo XVII Galileo Galilei planteo una tercera manera de conocer. Reconoció la importancia del método científico y el experimento en el proceso de acopio de conocimiento sobre los fenómenos naturales marcando el inicio de la *ciencia moderna*. Su uso en el terreno de la física fundamental y en general de la ciencia ha permitido ahondar de forma significativa en la comprensión de la materia y el universo.



Figura 1.5. Galileo Galilei (1564-1642). Fundador del método científico y el experimento. Imagen tomada y copiada de https://es.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

Asimismo, el hombre en su afán por comprender la naturaleza ha buscado la manera de unificar las interacciones que gobiernan el universo. La electrodinámica clásica y el modelo estándar han sido los más recientes intentos en esa dirección. En este sentido, la electrodinámica clásica, desarrollada a mediados del siglo XIX, explica y describe los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos desde una perspectiva unificada, influyendo en el desarrollo teorías como la electrodinámica cuántica (QED) y la teoría cuántica de campos. Su desarrollo se remonta desde los griegos hasta la publicación del trabajo de investigación denominado "*A dynamical Theory of the Electromagnetic Field*" del

pensador James Clerk Maxwell a mediados del siglo XIX, quien sintetizó en un conjunto de cuatro ecuaciones su teoría:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ,$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ,$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Asimismo, estas ecuaciones son invariantes bajo un grupo de transformaciones permitiendo así, como veremos en el capítulo II, apreciarla como una teoría gauge, siendo pertinente para entender la idea gauge propuesta en 1918 por el alemán Hermann Weyl en su intento fallido de unificar las interacciones hasta ese momento conocidas, la gravitacional y la electromagnética.

1.2 SOBRE LA ESTRUCTURA DE LA MATERIA

Hasta el siglo XVIII la idea de átomo postulada en la antigua Grecia había sido implementada por los pensadores Dalton, Avogadro, Prout etc. en el terreno de la química para explicar algunos hechos relacionados a reacciones entre sustancias y al comportamiento de los gases. Sin embargo, su uso en el terreno de la física solo se dio a partir del descubrimiento de los rayos X (1892), la radioactividad (1895) y el *electrón* (1897) induciendo a la consolidación de los primeros modelos de átomo.

1.2.1 LOS MODELOS ATÓMICOS

Los modelos han desempeñado un rol importante en la consolidación de las teorías físicas. En el caso de la teoría cuántica han sido indispensables para entender y explicar los comportamientos atómicos. Al someter un gas a una diferencia de potencial no hay forma de estudiar la dinámica de las partículas que lo componen haciendo uso de nuestros sentidos, sin embargo, el análisis de la distribución espectral apreciada a través de un espectroscopio brinda la posibilidad de conocer el conjunto de transiciones energéticas del gas, las cuales pueden ser calculadas y justificadas con el modelo de Bohr. En este sentido, un modelo es una representación que tiene como propósito relacionar lo que es

accesible para el observador e incorporarla en una estructura de análisis familiar que permita comprender con cierto grado de precisión los procesos que allí ocurren (Giancoli, 2009).

Durante el estudio de la materia se han desarrollado diferentes modelos. Originalmente basados en la intuición y posteriormente producto de la experimentación. Los modelos desarrollados por Thompson, Rutherford y Bohr surgieron a partir de la necesidad de explicar algunos fenómenos propios sobre los constituyentes básicos de la materia, cuyas descripciones eran difusas desde esquemas clásicos. A continuación, se exponen a grandes rasgos, algunas características y limitaciones de cada uno de ellos con el propósito de justificar el problema al cual se enfrentaba los pensadores hacia principios del siglo XX.

1.2.1.1 MODELO DE THOMPSON

Hacia finales del siglo XIX usando un tubo de rayos catódicos el físico inglés J.J Thompson descubre los electrones. Observó que los rayos que emergían del cátodo dentro de un tubo al vacío se desviaban en presencia de campos magnéticos. Analizando las desviaciones producto de las interacciones con ese campo y calculando su relación carga/masa dedujo que se trataban de partículas con carga negativa (Castañeda & Ewert, 2003).

A partir de este descubrimiento se empezó a indagar alrededor de una estructura atómica compuesta, en principio, por electrones. Thompson, reconociendo este resultado, postulo un primer modelo del átomo considerándolo como una distribución esférica de carga positiva y los electrones en su interior (Castañeda & Ewert, 2003) (Ver figura 1.6).

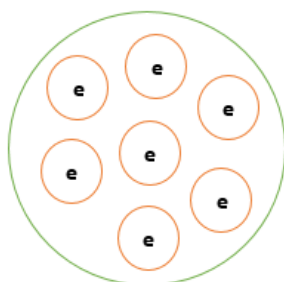


Figura 1.6. Modelo de Thompson.

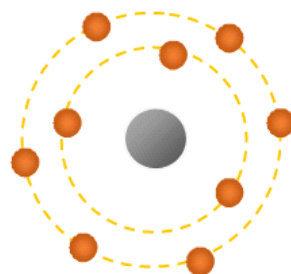
Más tarde, Ernest Rutherford, estudiante de Thompson, en su intento por encontrar una base experimental en apoyo a esta representación decide

proponer otro experimento haciendo colisionar partículas alfa provenientes de una fuente radioactiva (polonio) sobre una lámina de oro, situando un detector por detrás de ésta. Al realizar mediciones en compañía de sus colaboradores Marsden y Geiger (1911) se encontró que en general estas (átomos de Helio sin dos electrones) se desviaban tenuemente respecto a la normal de la fuente radioactiva como lo predecía Thompson, sin embargo, una cantidad de ellas reculaban, es decir, se dispersaban en ángulos de hasta 180 grados (Castañeda & Ewert, 2003), indicando que *el átomo no es una distribución uniforme de carga positiva sino que por el contrario ésta se sitúa en un núcleo.*

Conocidos las distribuciones espectrales de algunos gases y el fenómeno prescindido por Rutherford el modelo de Thompson tuvo que ser modificado generando la aparición de un nuevo modelo del átomo (Castañeda & Ewert, 2003).

1.2.1.2 MODELO DE RUTHERFORD

Ernest Rutherford basado en los hechos experimentales propone un nuevo modelo del átomo (1911), una estructura compuesta de un núcleo cargado positivamente y electrones girando a su alrededor (Ver figura 1.7), logrando justificar la dispersión no coherente de las partículas alfa. Al estar confinada toda la carga positiva allí existe un fuerte campo eléctrico provocando que las partículas α se desviarán (Castañeda & Ewert, 2003).



● : Carga positiva

● : Electrones

Figura 1.7. Modelo de Rutherford. Distribución de carga positiva en el núcleo y electrones girando a su alrededor.

A pesar de ajustarse con los resultados experimentales de Hans Geiger, Ernest Marsden y el mismo Rutherford mostro ser limitado. Suponía que las orbitas seguidas por los electrones alrededor del núcleo eran circulares. Al ser orbitas

de este tipo, el átomo debía ser inestable, debido a que al encontrarse las partículas con carga negativa sujetas a una fuerza centrípeta⁴ aceleran dando lugar a una emisión de energía, la cual al no ser restaurada por una fuente externa girarían en órbitas cada vez más estrechas (Castañeda & Ewert, 2003) (Ver figura 1.8).

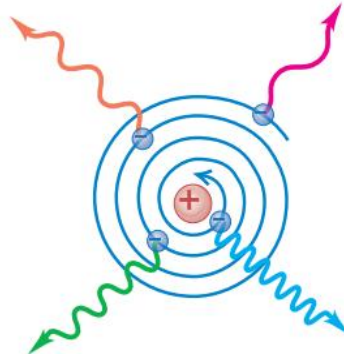


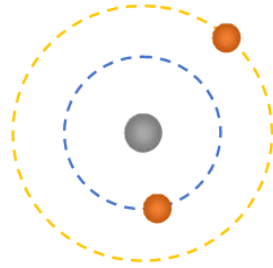
Figura 1.8. Electrón colapsando. Imagen tomada y copiada de Física universitaria Volumen II, Sears y Zemansky edición 12.

1.2.1.3 MODELO DE BOHR

Niels Bohr en 1913 motivado por resolver el problema sugirió un nuevo modelo del átomo. Mientras los electrones giren alrededor del núcleo en una órbita dada no emiten energía, solo lo hacen cuando pasan de una a otra, producto de su interacción con una fuente externa de energía (Castañeda & Ewert, 2003). Acepto el modelo nuclear de Rutherford y considero a los electrones girando en órbitas cuya energía estaba previamente establecida y no cambiaba en el tiempo (Ver figura 1.9).

Lo anterior configura un momento de gran importancia en la comprensión sobre la estructura atómica, debido a que lograba predecir las distribuciones espectrales de los diferentes elementos químicos y era compatible con las predicciones contenidas del modelo de Rutherford.

⁴ Es un tipo de fuerza que actúa en todo movimiento circular responsable de cambiar en cada instante la dirección de la velocidad.



● : Carga positiva

● : Electrones

Figura 1.9. Modelo de Bohr: Un núcleo cargado positivamente y electrones girando alrededor en ciertas orbitas permitidas.

A partir de estos resultados los pensadores se empezaron a indagar sobre la estructura del núcleo. En este sentido, en el siglo XVIII se había sugerido al hidrogeno como parte constitutiva de los demás elementos químicos, es decir, la masa de cualquier elemento era múltiplo entero de éste (*Hipótesis de Prout*). Con la modernización de las técnicas de medición de los pesos atómicos en el siglo XX se empezó a dilucidar que dicha propuesta no era adecuada (Wiechowsk, 1969). La masa del helio, por ejemplo, era cuatro veces mayor que la del Hidrogeno y no el doble (*Ver figura 1.10*).

Con el propósito de justificar la masa de los diferentes átomos bajo el marco de Prout, había dos posibilidades. La primera, propuesta por Rutherford y Bohr, sugería una cantidad adicional de protones en el núcleo y electrones, los cuales contrarrestaban el efecto de la carga adicional positiva (Wiechowsk, 1969) y (Navarro, 2000). En este sentido, el Helio debía estar compuesto por 4 protones y 2 electrones nucleares⁵ (*Ver figura 1.11*).

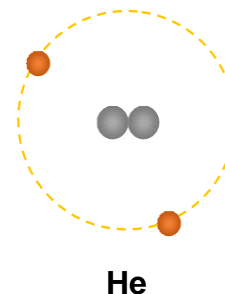
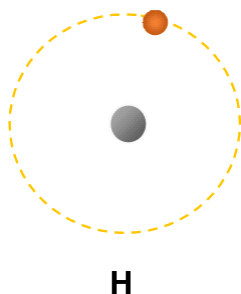


Figura 1.10. Cosmovisión de Prout acerca de la constitución de los átomos.

⁵ Al aceptar la existencia de electrones en el núcleo la carga asociada a los dos protones adicionales era compensada siendo compatible con los datos empíricos. Esta idea no fue recibida con escepticismo debido a que se conocía el fenómeno de la radioactividad, en el cual ocurrían emisión de electrones.

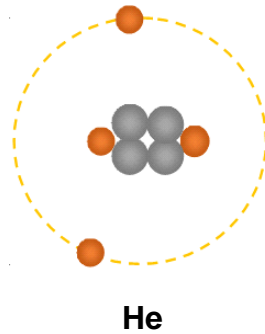
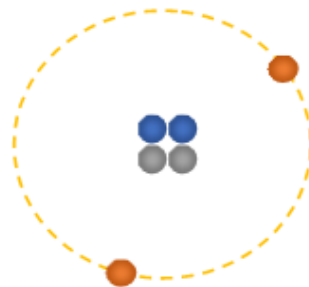


Figura 1.11. Propuesta de electrones en el núcleo.

La segunda versaba en que hubiera una partícula parecida al protón, pero sin carga eléctrica. (Navarro, 2000). En 1932 James Chadwick, interpretando los resultados experimentales obtenidos por H. Bothe y W. Becker en 1930, descubrió que la radiación penetrante producto de la interacción entre las partículas α y berilio eran neutrones cuya masa era cercana a la del protón (Navarro, 2000). A partir de este hallazgo los átomos pasaron a ser considerados como entes físicos constituidos por un núcleo, *compuesto de protones y neutrones* en torno al cual giraban los electrones (Ver figura 1.12). Wiechowsk (1969) afirma:

A partir del descubrimiento del neutrón se considera, según formulación de Heisenberg, que en el núcleo no existen << electrones nucleares >> de Rutherford y Bohr, sino que las partículas constitutivas del núcleo son el protón y el neutrón; los electrones solamente se encuentran en la nube de electrones que rodea el núcleo (p.92).



● : Protones

● : Neutrones

● : Electrones

Figura 1.12. Modelo del átomo tomando en cuenta la existencia de los neutrones.

1.2.2 SOBRE EL PROBLEMA DE LA ESTABILIDAD NUCLEAR

En las primeras tres décadas del siglo XX la actividad empírica había confirmado de forma directa que los *átomos* no eran las unidades últimas de la materia sino estaban compuestas por otras partículas, el electrón, el protón y el neutrón, generando la aparición de una serie de preguntas asociadas a la estabilidad del núcleo. Si los protones se encuentran confinados allí con los neutrones *¿Que genera su estabilidad?* De acuerdo a la electrodinámica clásica entre cada par protón – protón existe una fuerte repulsión eléctrica suficiente para conducir al núcleo a su colapso.

En el intento por conseguir una respuesta a esta pregunta pensadores tales como Heisenberg (1932), Yukawa (1935) y Yang- Mills (1954) dedicaron sus esfuerzos a desarrollar modelos que permitieran describir esta nueva fuerza de la naturaleza, conocida en la actualidad como "*interacción fuerte*" responsable de la cohesión nuclear.

1.2.2.1 MODELO DE HEINSENBURG: ISOSPÍN

Werner Heisenberg en 1932 propone un primer modelo para explicar la estabilidad nuclear. Al ser la masa del protón y el neutrón aproximadamente iguales, consideró a éstas como estados diferentes de una misma partícula, el nucleón⁶ (Griffiths, 1987). Para diferenciar los posibles estados del nucleón, introduce una propiedad similar al espín denominándola isospín⁷ (**I**) para describir la interacción entre nucleones de la misma manera que la carga eléctrica lo era para las interacciones entre cargas (Ver figura 1.13).



Figura 1.13. Isospín protón y neutrón.

⁶ La masa de estos dos estados del nucleón era igual a $938.3 \text{ MeV} / c^2$ y $939.6 \text{ MeV} / c^2$ respectivamente.

⁷ **I** es un vector definido en un espacio abstracto "*espacio de isospín*" con componentes I_1, I_2, I_3 . El nucleón tiene $I = 1/2$ pero dos valores distintos de I_3 $1/2$ y $-1/2$ correspondientes al protón y el neutrón. (Griffiths,1987)

A partir de estas consideraciones, la estabilidad nuclear resulta de la acción de una fuerza⁸ de naturaleza distinta a la eléctrica en la que el isospín es la propiedad asociada contrarrestando la repulsión eléctrica entre cada par protón – protón contenido en el núcleo.

Por otro lado, surge la siguiente pregunta: *¿Bajo qué mecanismo ocurren las interacciones entre nucleones?* Heisenberg propone que la estabilidad nuclear se debe a la continua transmutación de protones en neutrones y viceversa mediada por electrones (Wiechowsk, 1969). En este sentido, un neutrón emite un electrón, convirtiéndose en un protón, el cual al ser absorbido por el protón se transforma en un neutrón. Del mismo modo el protón puede emitir un positrón, convirtiéndose en un neutrón, el cual al ser absorbido por el neutrón se transforma en un protón⁹ (Wiechowsk, 1969) como se muestra en la figura 1.14. Heisenberg denominó a esto "*fuerzas de intercambio*" debido a que son los electrones los que transportan la interacción en términos de energía y momentum.

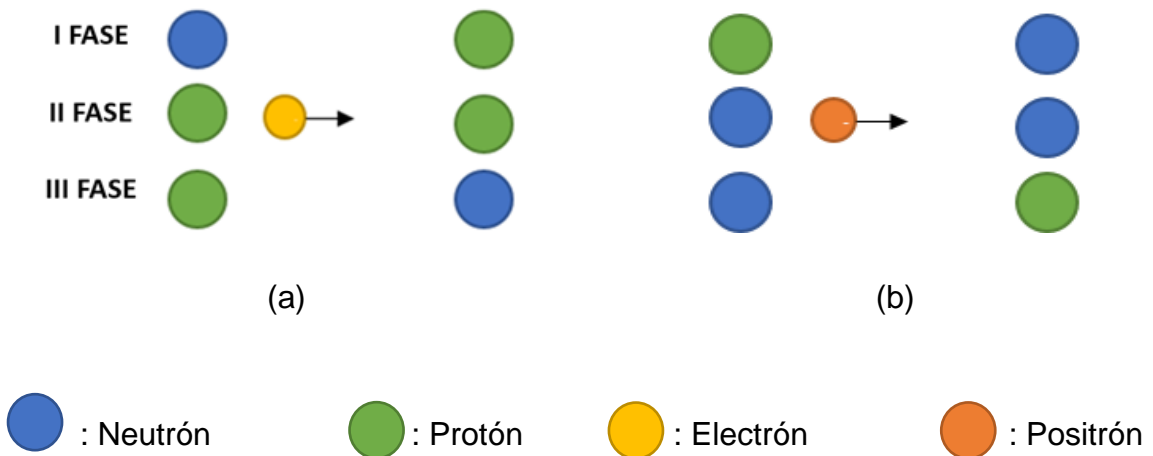


Figura 1.14. (a) Interacción neutrón - protón mediada por el electrón. (b) Interacción protón – neutrón mediada por el positrón.

A pesar de explicar la estabilidad nuclear se encontró con serias limitaciones. Era solamente útil para describir interacciones protón- neutrón y sugería que la

⁸ En el contexto de la teoría de grupos se dice que la fuerza responsable de la cohesión nuclear es invariante bajo rotaciones de 180° en el espacio de isospín, lo que garantiza su conservación en esta clase de interacciones a partir del teorema de Noether. (Griffiths, 2004)

⁹ Este modelo, con ciertos reparos, fue útil más adelante para explicar el fenómeno de la radioactividad.

interacción responsable era de largo alcance¹⁰. Siendo los electrones o los positrones las partículas emitidas durante el proceso de transmutación de los nucleones, las interacciones protón-protón y neutrón- neutrón no podían ser justificadas (Valenzuela, 1995).

1.2.2.2 MODELO DE YUKAWA: MESONES

Una vez entendidas las limitaciones que presentaba el modelo de Heisenberg para explicar la estabilidad nuclear el físico japonés Hideki Yukawa en 1932 decidió tomar un enfoque diferente. Al ser el fotón la partícula portadora de la interacción electromagnética debía existir otra partícula que mediara las interacciones entre nucleones cuya masa debía ser mayor a la del electrón y menor a la del protón, un mesón (Giancoli, 2009). Carl Anderson, quien años atrás había descubierto las antipartículas, estudiando los productos de las interacciones entre los rayos cósmicos y la atmosfera terrestre con una cámara de niebla, detecto una partícula cuya masa era parecida a la predicha por Yukawa, $106 \text{ Mev} / C^2$, la cual por no ajustarse a ciertos criterios de selección fue finalmente descartada. Sin embargo en 1947 C. F. Powell y G. Occhialini hallaron finalmente evidencias del mesón π ¹¹ (Giancoli, 2009).

En ese sentido las interacciones entre nucleones se encontraban mediadas por algún estado de carga del π , las cuales en un diagrama de Feynmann¹² quedan representadas de la siguiente manera

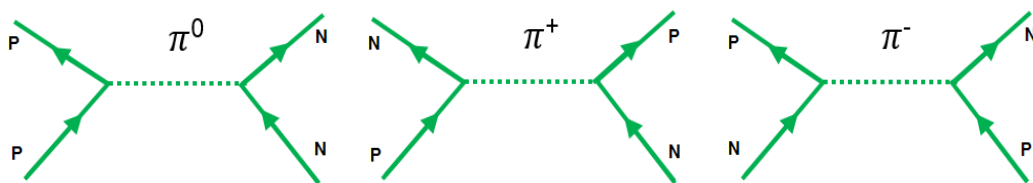


Figura 1.15. Interacciones protón-neutrón, protón – neutrón y neutrón-protón.

¹⁰ Al ser la masa del electrón ($0.511 \text{ Mev}/C^2$) aproximadamente igual a la del fotón implicaría que esta interacción de la naturaleza seria de largo alcance tal como sucede con la electromagnética.

¹¹En la naturaleza se distingue tres clases de piones en función de su carga eléctrica π^+, π^-, π^0 . Sus masas son $139.2 \text{ MeV} / C^2$ y $135.0 \text{ MeV} / C^2$, son muy inestables y tienen periodos de tiempo muy pequeños decayendo en otras partículas.

¹² Los diagramas de Feynman fueron propuestos por Richard Feynmann hacia finales de la década de los años 1940, los cuales permiten representar de una forma simple interacciones entre partículas.

En este orden de ideas, la manera como Heisenberg y Yukawa asumieron el reto de explicar la estabilidad nuclear se diferenci6 respecto a la part6cula que la mediaba, los electrones, positrones y los mesones π respectivamente, siendo esta 6ltima aceptada por tomar en cuenta su naturaleza de corto alcance y describir las interacciones prot6n-prot6n, neutr6n-neutr6n y prot6n-neutr6n, consolidando un cambio de paradigma en el modo de explicar la interacci6n entre dos cuerpos.

Mientras en el siglo XVII Sir. Isaac Newton lo hizo bajo el concepto de "*acci6n a distancia*" en la actualidad se considera que la interacci6n es en si misma transportada por part6culas, bosones gauge. El fot6n para el caso del electromagnetismo, los bosones W y Z para interacci6n d6bil y los gluones para la interacci6n fuerte. La cual originalmente surgi6 producto de la formulaci6n cu6ntica del electromagnetismo cl6sico iniciada por Paul Dirac y seguida por otros pensadores como Heisenberg, Yukawa. Oppenheimer, Yang, Mills, Salam, Weinberg etc.

Se6alado el contexto hist6rico que indujo a pensar en una estructura nuclear, el conjunto de problem6ticas que de all6 afloraron y los principales modelos orientados para resolverlo se proceder6 a analizar algunos conceptos tales como *invariancia gauge, libertad gauge etc.*, los cuales ser6n 6tiles en el cap6tulo III para entender la propuesta fenomenol6gica desarrollada por los pensadores Chen Ning Yang y Robert Mills en el a6o 1954 alrededor de la estabilidad nuclear.

CAPITULO II

SOBRE LA IDEA GAUGE: EL CASO DE LA ELECTRODINÁMICA CLÁSICA Y EL LAGRANGIANO DE DIRAC

2.1 LA SIMETRÍA EN CONTEXTO

La simetría ha sido apreciada y valorada en diferentes contextos de la sociedad. En el arte se asocia a la armonía, orden y equilibrio presente en una obra de arte matizada por ciertos aspectos particulares. En la geometría se relaciona a transformaciones de tipo geométrico en la que los elementos que la definen no cambian, tal como sucede con un cuadrado bajo rotaciones de 90°. En la física se refiere a entidades formales (leyes naturales) invariantes bajo transformaciones (Rupérez, 1994). Las leyes de Newton, por ejemplo, son invariantes respecto al grupo de transformaciones de Galileo y las leyes de Maxwell bajo transformaciones de Lorentz. *“La invariancia de las leyes físicas es sinónimo de equivalencia entre sistemas de referencia o, si se prefiere y siguiendo a Einstein, de equivalencia de “puntos de vista”* (Balibar, 1986).

En el contexto científico, su uso ha permitido convertir largos y engorrosos cálculos en simples expresiones matemáticas, cuyas consecuencias son difíciles de imaginar y parecen conducir a una teoría unificada del universo. Entre sus triunfos más importantes se encuentran: El *“Teorema de Noether”* formulado por Emmy Noether en 1915, la formulación de la ecuación de Dirac por Paul Dirac en 1929, el establecimiento de la electrodinámica cuántica, la cromodinámica cuántica y el modelo estándar de la física de partículas, siendo estos últimos producto de la aplicación de la idea gauge.

2.2 EL GÉNESIS DE LA IDEA GAUGE

Establecida la teoría electromagnética clásica, a mediados del siglo XIX, y la teoría general de la relatividad¹³ en 1915 se inició la búsqueda de una estructura geométrica que unificara estas dos grandes revoluciones del pensamiento humano (Rozo, 2016). Albert Einstein, su proponente, y Herman Weyl dedicaron sus esfuerzos a conseguirlo, sin tener éxito.

¹³ Esta reducía los efectos gravitacionales a una deformación del tejido espacio - temporal.

En 1918 Weyl en su intento por encontrar una métrica¹⁴ que describiera los fenómenos electromagnéticos y gravitacionales propuso la idea gauge o simetría gauge partiendo de una generalización del concepto de medida basado en el hecho que las medidas en física son relativas (Rozo, 2016). Por ejemplo, cada observador puede medir de una manera distinta las coordenadas inicial y final entre dos eventos, sin embargo, de acuerdo a Weyl, el valor del intervalo al cuadrado representado por Δs^2 será el mismo para cada uno de ellos (Rozo, 2016) como se muestra a continuación.

Sea Δs^2 el intervalo al cuadrado entre dos eventos que ocurren en el espacio dado por

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad . \quad (1)$$

Donde,

$$(X_f - X_i)^2 = \Delta x^2 \quad ; \quad (Y_f - Y_i)^2 = \Delta y^2 \quad ; \quad (Z_f - Z_i)^2 = \Delta z^2$$

Cada observador puede recalibrar la posición inicial y final adicionando una constante arbitraria C. De modo que $\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2$ se calcula como

$$\left[\left((X_f + C) - (X_i + C) \right)^2 \right] = \Delta x^2 ,$$

$$\left[\left((Y_f + C) - (Y_i + C) \right)^2 \right] = \Delta y^2 ,$$

$$\left[\left((Z_f + C) - (Z_i + C) \right)^2 \right] = \Delta z^2 ,$$

obteniéndose un mismo valor para Δs^2

$$\Delta s^2 = \Delta s^2 \quad . \quad (2)$$

Bajo esta consideración Weyl sugiere que a partir de una recalibración determinada por $f(x)$ aplicada a la métrica de la relatividad general se podrá obtener una descripción geométrica de la interacción electromagnética (García, 2011).

$$G'_{\mu\alpha} = f(x) G_{\mu\alpha} \quad . \quad (3)$$

¹⁴ Es un objeto matemático que permite medir distancias entre dos puntos localizados en el espacio.

Por no ajustarse esta propuesta a ciertas consecuencias físicas, que no mencionaremos en este trabajo, fue finalmente descartada (Garcia, 2011). Con el advenimiento de la teoría cuántica, la cual reducía toda descripción física de las partículas a una función de onda, la idea gauge cobro nuevamente importancia, esta vez en términos de una transformación contenida en el grupo de simetría unitario de las fases U (1).

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = e^{iq\theta} \varphi . \quad (4)$$



Hermann Weyl (1885 - 1955)

2.3 INVARIANCIA GAUGE LOCAL Y GLOBAL

La idea gauge consiste en el proceso mediante el cual cada observador elige una manera de medir cantidades de interés físico, cuyos resultados son iguales o invariantes entre sí. Con el propósito de profundizar en su comprensión se plantean dos ejemplos particulares de la mecánica y electrodinámica clásica haciendo uso de dos cantidades físicas familiares, el desplazamiento y la diferencia de potencial entre dos puntos del espacio.

Consideremos posiciones consecutivas de un móvil que se mueve sobre el eje de las x en dos instantes de tiempo t y t'. La diferencia entre la posición final y inicial indica su desplazamiento¹⁵.

Por lo tanto,

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \vec{i}_1 + \Delta y \vec{i}_2^0 + \Delta z \vec{i}_3^0,$$

¹⁵ Es una cantidad vectorial, cuya magnitud indica la distancia comprendida entre un objeto respecto a un marco de referencia, independiente de la trayectoria seguida por el objeto.

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \vec{i}_1 .$$

De acuerdo a Weyl , existen infinitas maneras de obtener un valor de Δx a partir de una recalibración aditiva arbitraria de las posiciones inicial y final determinada por una constante C. En otras palabras, la forma de medir las posiciones inicial y final no está unívocamente determinada, cualquiera que sea el valor de C implementada en la recalibración el valor del desplazamiento será el mismo como se muestra a continuación (Ver figura 2.1).

Sea $|\Delta x|$ la magnitud del desplazamiento sobre el eje de las X dada por

$$(5) \quad |\Delta x| = X_2 - X_1 ,$$

al recalibrar las posiciones inicial y final mediante una constante C arbitraria

$$X_1' = X_1 + C \quad ; \quad X_2' = X_2 + C$$

$$|\Delta x'| = X_2' - X_1' ,$$

$$|\Delta x'| = X_2 + C - X_1 - C ,$$

se obtiene que la magnitud del desplazamiento es invariante bajo esa recalibración o transformación gauge

$$|\Delta x'| = X_2 - X_1 = |\Delta x| . \quad (6)$$

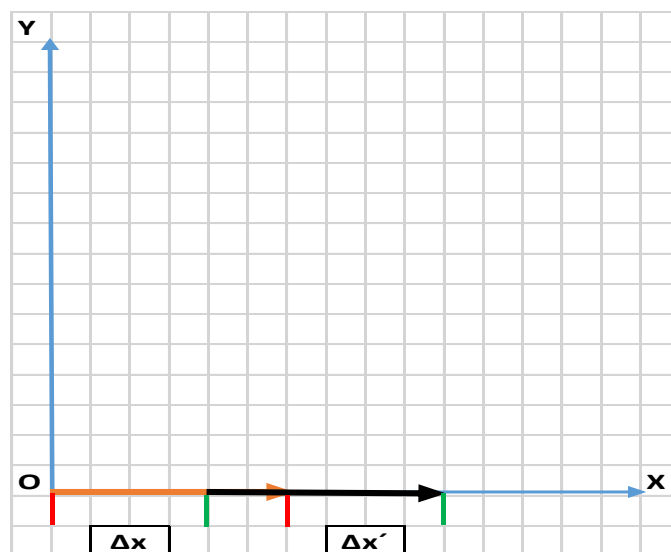


Figura 2.1. La longitud del vector desplazamiento es invariante bajo una transformación gauge de la posición final y inicial.

Aquellas recalibraciones o transformaciones gauge que dejan invariantes a las variables dinámicas que describen a los sistemas físicos pueden ser globales o locales.

Una *transformación gauge global* es aquella que es independiente de cada punto del espacio. Por ejemplo, si tenemos 6 canicas amarillas y 6 grises y se realizan una transformación por conjugación, es decir, negras por grises y estas por negras se obtiene una organización estructural equivalente, es decir, igual cantidad de canicas negras y grises (Ver figura 2.2). La cantidad de pelotas amarillas y grises se conserva.

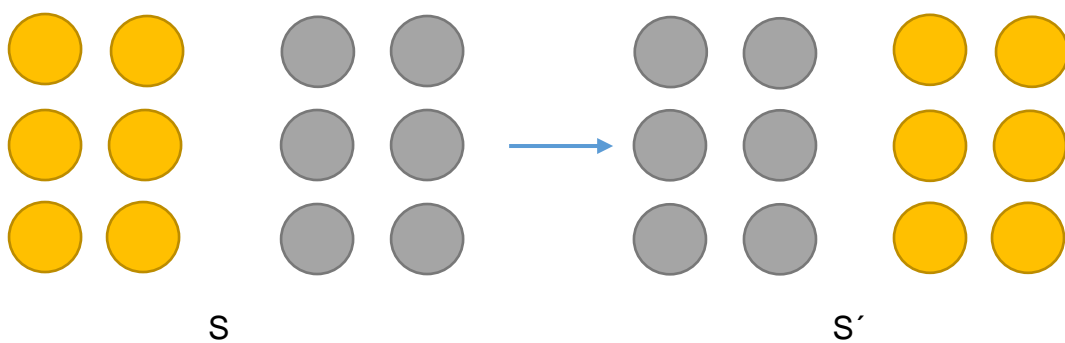


Figura 2.2. Transformación global por conjugación entre pelotas negras y grises obteniéndose una organización estructural equivalente a la inicial.

Por su parte, una *transformación gauge local* es dependiente de cada punto del espacio. La transformación local por conjugación de pelotas negras por grises genera una configuración estructural diferente a la previamente establecida rompiendo la invariancia del sistema, la cantidad de pelotas negras y grises no es el mismo, no se conserva (Ver figura 2.3).

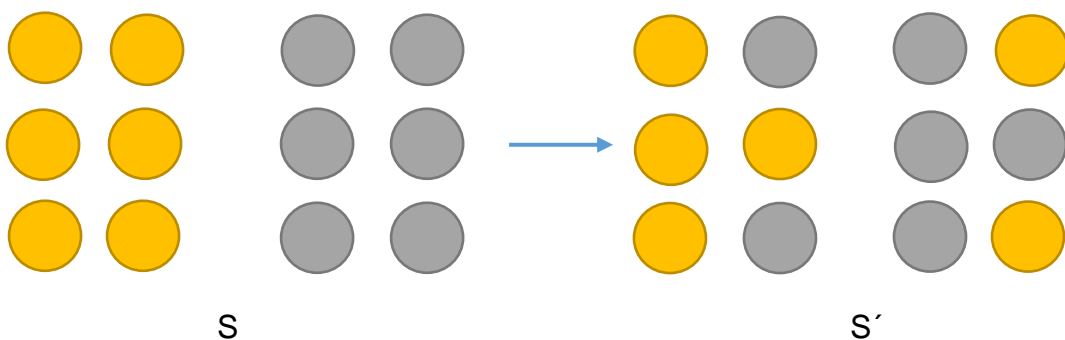


Figura 2.3 Transformación local por conjugación entre pelotas negras y grises obteniéndose una organización estructural diferente.

De acuerdo a lo anterior, el Δs^2 y Δx son invariantes bajo transformaciones gauge globales de la posición inicial y final como se aprecia en (2) y (6), es decir, son invariantes gauge global¹⁶.

2.4 LA MECÁNICA CLÁSICA: POTENCIAL GRAVITACIONAL Y ELECTRICICO

Como segundo ejemplo se aprecia la diferencia de potencial gravitacional entre dos puntos como invariante gauge global y local con el propósito de explicitar sus diferencias.

Sean $V(X_1)$ y $V(X_2)$ el potencial gravitacional en dos puntos del espacio y ∇V la diferencia de potencial dado por:

$$\nabla V = V_2 - V_1 . \quad (7)$$

De acuerdo a lo planteado en la sección anterior existen diferentes maneras de medir los potenciales tal que ∇V sea el mismo a partir de una transformación gauge, la cual puede ser global o local. En el primer caso, todos los observadores implementan una misma constante C como se aprecia a continuación

$$V_1' = V_1 + C \quad ; \quad V_2' = V_2 + C$$

$$\nabla V' = V_2' - V_1' ,$$

$$\nabla V' = (V_2 + C) - (V_1 + C) ,$$

$$\nabla V' = V_2 + C - V_1 - C ,$$

Siendo ∇V invariante bajo una transformación gauge global

$$\nabla V' = V_2 - V_1 = \nabla V . \quad (8)$$

En el segundo caso, cada observador implementa una C arbitraria distinta (Rozo, 2016). Como se muestra a continuación

El primer observador recalibra el potencial mediante una constante C

$$V_1' = V_1 + C ; V_2' = V_2 + C$$

$$\nabla V' = V_2' - V_1' ,$$

$$\nabla V' = (V_2 + C) - (V_1 + C) ,$$

¹⁶ Todos los observadores utilizan la misma transformación gauge, es decir, la misma constante arbitraria.

$$\nabla V' = V_2 - V_1 = \nabla V \quad . \quad (9)$$

Un segundo observador recalibra el potencial mediante una constante C'

$$V_1' = V_1 + C' \quad ; \quad V_2' = V_2 + C'$$

$$\nabla V' = (V_2 + C') - (V_1 + C') \quad ,$$

$$\nabla V' = V_2 - V_1 = \nabla V \quad . \quad (10)$$

Sin embargo, ambos observadores miden el mismo valor de ∇V . En este sentido ∇V es invariante bajo una transformación gauge local.

De acuerdo a lo anterior una invariancia gauge global se presenta cuando un sistema o variable dinámica no cambia bajo transformaciones independientes de cada punto del espacio en caso contrario se dice que existe una invariancia gauge local.

Estas mismas ideas pueden ser implementadas en el "electromagnetismo clásico". La diferencia de potencial entre los bornes de una pila dada por ∇V es invariante bajo transformaciones de los potenciales eléctricos.

2.5 LA ELECTRODINÁMICA CLÁSICA: ECUACIONES DE MAXWELL

La teoría de los fenómenos eléctricos y magnéticos puede ser vista como una teoría gauge. Las ecuaciones que la constituyen son invariantes bajo transformaciones gauge del potencial vectorial y escalar claves para la descripción de estos campos físicos.

Considere las ecuaciones de campo electromagnético dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad (12)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad (13)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad . \quad (14)$$

Por conveniencia se expresa este conjunto de ecuaciones en términos de dos campos, uno vectorial \vec{A} y uno escalar ϕ utilizando dos teoremas del análisis vectorial. En primer lugar, como la divergencia de \vec{B} es igual a 0, de acuerdo al teorema 1 (Ver apéndice A), puede ser expresado como el rotacional de otro campo \vec{A} denominado potencial vectorial

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0, \quad (15)$$

de esta manera la ecuación (13) adquiere la siguiente forma

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}), \quad (16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{(\nabla \times \partial \vec{A})}{\partial t},$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18)$$

Ahora de acuerdo al teorema 2 (Ver apéndice A) la expresión entre paréntesis se puede expresar como el gradiente de un campo escalar ϕ , por lo que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi, \quad (19)$$

Reorganizando se obtiene

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (20)$$

¡Se ha expresado \vec{E} en términos de un campo escalar ϕ y uno vectorial \vec{A} !

Observar que las ecuaciones de los campos físicos \vec{B} y \vec{E} son invariantes bajo transformaciones gauge de los potenciales \vec{A} y ϕ dadas por

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \quad ; \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (21)$$

Como se puede evidenciar a continuación

$$\vec{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t},$$

$$\vec{E}' = -\nabla \left(\phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left((\vec{A} + \nabla \psi) \right),$$

$$\vec{E}' = -\nabla\phi + \frac{\partial\nabla\psi}{\partial t} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial\nabla\psi}{\partial t} ,$$

$$\vec{E} = \vec{E}' .$$

En el caso del potencial vectorial se obtiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}') = 0 ,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi)) = 0 ,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla\psi) = 0 ,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 ,$$

$$\vec{B} = \vec{B}' .$$

Dado que ψ es una función escalar arbitraria se dice que la transformación de los potenciales, como se mencionó anteriormente, no está unívocamente determinada.

Aplicando los resultados obtenidos a las dos ecuaciones de Maxwell restantes (11) y (14) se encuentra la relación de estos dos potenciales con las fuentes de carga ρ y \vec{J} a su vez la condición de medida asociada a las transformaciones de los potenciales (Feynmann, 1972).

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (22)$$

Sustituyendo las expresiones de \vec{B} y \vec{E} en la ecuación (14) resulta

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) ,$$

Despejando el término que contiene la densidad de corriente \vec{J} se obtiene

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla \left((\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} , \quad (23)$$

Para desacoplar este sistema de ecuaciones se debe implementar la siguiente condición.

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 , \quad (24)$$

dando como resultado

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (25)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (26)$$

Se ha obtenido una manera equivalente de expresar las leyes de electromagnetismo en términos de dos campos vectoriales. La ecuación (24) es conocida en la literatura como *condición gauge de Lorentz*, es una restricción relacionada a las transformaciones gauge de los potenciales escalar y vectorial determinadas en (21). Lo anterior dilucida de forma directa una simetría inmersa dentro de las ecuaciones de movimiento, en este caso para aquellas asociadas a los campos electromagnéticos “*La simetría de las leyes físicas no concierne ni a los fenómenos ni tan siquiera a las magnitudes u observables que aquellas relacionan, sino a la estructura formal de las ecuaciones que las definen*” (Rupérez, 1994).

Finalmente, implementando las relaciones del campo \vec{E} y \vec{B} en términos de \vec{A} y ϕ se obtiene el tensor electromagnético (*Ver apéndice B*).

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (27)$$

el cual será útil para construir el término cinético del lagrangiano de Dirac y cuya extensión permite describir las interacciones entre los propagadores gauge asociados al campo de Yang – Mills, el cual bajo la perspectiva de los pensadores Chen Ning Yang y Robert Mills es el responsable de la interacción entre nucleones y por lo tanto de su estabilidad, cuyo tratamiento esquemático se realiza en el capítulo III.

2.6 EL LAGRANGIANO DE DIRAC: DERIVADA COVARIANTE

A pesar que la idea gauge fue recibida con escepticismo por parte de la comunidad científica, fue de gran valor para la consolidación posterior de las teorías modernas de las interacciones de la naturaleza. Esta reinterpretación basada en transformaciones de fase aplicadas sobre la función de onda conduce de forma natural a la *derivada covariante* o *regla de acoplamiento mínimo*, como usualmente se le conoce en la literatura, cuya utilidad recae en restaurar la invariancia del lagrangiano a expensas de la aparición de los denominados *campos gauge* los cuales describen interacciones de la naturaleza. En este

sentido en esta sección se hace uso del lagrangiano de Dirac con el objetivo de analizar su invariancia bajo una transformación unitaria global y local contenida en el grupo abeliano U(1) y las consecuencias físicas que de allí subyacen.

En primer lugar, el lagrangiano de Dirac \mathcal{L} asociado a un electrón libre se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (28)$$

Donde, ψ y $\bar{\psi}$ son los espinores de Dirac y su adjunto respectivamente. ∂_μ es la derivada común relativista y γ^μ las matrices de Dirac.

En primer lugar al someter \mathcal{L}_{Dirac} a una transformación gauge global unitaria sobre ψ y $\bar{\psi}$ dada por

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta} \psi \quad (29)$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\theta} \bar{\psi} \quad (30)$$

Se obtiene que \mathcal{L}_{Dirac} es invariante como se muestra a continuación.

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = (e^{-i\theta} \bar{\psi}) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (e^{i\theta} \psi)$$

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = (e^{-i\theta} \bar{\psi}) [i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta} \psi) + i\gamma^\mu e^{i\theta} \partial_\mu \psi - m e^{i\theta} \psi]$$

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = (e^{-i\theta} \bar{\psi}) [i\gamma^\mu e^{i\theta} \partial_\mu \psi - m e^{i\theta} \psi]$$

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = \bar{\psi} i\gamma^\mu (e^{-i\theta} e^{i\theta}) \partial_\mu \psi - m (e^{-i\theta} e^{i\theta}) \psi = \mathcal{L}$$

De lo anterior, surge la siguiente pregunta *¿Qué sucede cuando el parámetro libre θ es función de las coordenadas?*

En este caso las transformaciones (29) y (30) adquieren la siguiente forma

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta(x)} \psi; \quad (31)$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}. \quad (32)$$

Se verifica que \mathcal{L}_{Dirac} ya no es invariante bajo una transformación local unitaria U(1) como se muestra a continuación

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = (e^{-i\theta} \bar{\psi}) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (e^{i\theta(x)} \psi),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{Dirac} &= (e^{-i\theta}\bar{\psi}) (i\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) - me^{i\theta(x)}\psi), \\
\mathcal{L}'_{Dirac} &= (e^{-i\theta}\bar{\psi}) [i\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) + i\gamma^\mu e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi - me^{i\theta}\psi], \\
\mathcal{L}'_{Dirac} &= (e^{-i\theta}\bar{\psi}) \left[i\gamma^\mu \left(e^{i\theta(x)}\partial_\mu(\theta(x)) \right) \psi + i\gamma^\mu e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi - me^{i\theta}\psi \right], \\
\mathcal{L}'_{Dirac} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \gamma^\mu\partial_\mu(\theta(x))\psi\bar{\psi}, \\
\mathcal{L}'_{Dirac} &= \mathcal{L}_{Dirac} - \gamma^\mu\partial_\mu(\theta(x))\psi\bar{\psi}. \tag{33}
\end{aligned}$$

Aparece un término extra producto de la acción de la derivada común ∂_μ sobre el exponente complejo de la transformación. En efecto, se propone una generalización aditiva de ∂_μ tal que restaure la invariancia de \mathcal{L}_{Dirac} dada por

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + i\mathbf{A}_\mu. \tag{34}$$

Lo anterior se le denominada *regla de acoplamiento mínimo*. Donde \mathbf{A}_μ representa físicamente al campo electromagnético.

De esta manera \mathcal{L}_{Dirac} queda de la siguiente manera.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{35}$$

Como se ha introducido un campo a la derivada común se debe proponer una transformación para el campo gauge \mathbf{A}_μ dada por

$$\mathbf{A}_\mu' = \mathbf{A}_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu(\theta(x)), \tag{36}$$

De esta manera se obtiene \mathcal{L}_{Dirac} con un término de interacción el cual es invariante bajo transformaciones locales de la fase (Ver apéndice C)

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu\mathbf{A}_\mu - m)\psi, \tag{37}$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu e\mathbf{A}_\mu\psi,$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \mathcal{L}_{libre} + \mathcal{L}_{interacción}, \tag{38}$$

donde,

$$\bar{\psi}\gamma^\mu q\psi = \mathbf{J}^\mu. \quad (\text{Densidad de corriente}) \tag{39}$$

Asimismo, se puede verificar que el tensor de intensidad electromagnético dado por (27) es invariante bajo la transformación (36).

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu}' = \partial_\mu A_\nu' - \partial_\nu A_\mu' . \quad (40)$$

De esta manera el lagrangiano de la QED invariante bajo una transformación gauge global y local contenida en el grupo de simetría U(1) está dado por

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \mathbf{J}^\mu \mathbf{A}_\mu . \quad (41)$$

El anterior resultado es conocido en la literatura especializada como el lagrangiano representativo de un electrón inmerso en un campo electromagnético (Ver apéndice D). El primer término describe a los propagadores gauge asociados al campo electromagnético (fotones). El segundo describe a los electrones y el tercero constituye un término de interacción asociado a los electrones y los bosones gauge (Griffths, 2008).

El anterior tratamiento permite dilucidar dos cosas. La simetría como principio dinámico, al exigir que \mathcal{L}_{Dirac} sea invariante bajo una transformación local unitaria dada por (31) y (32) conduce a la aparición de términos de interacción entre los campos de Dirac (electrones y positrones) y el campo electromagnético.

Por su parte la regla de acoplamiento minimal, la cual consiste en convertir la derivada ordinaria a covariante, permite dos cosas: Eliminar los términos extra de \mathcal{L}_{Dirac}' y convertir una invariancia global en local. Planteando la interacción entre partículas con carga como producto de la existencia del campo gauge \mathbf{A}_μ cuyo quantum asociado es el fotón¹⁷ (Ver figura 2.4).



Figura 2.4. Interacción entre dos electrones mediada por fotones bajo la mirada de la electrodinámica cuántica (QED)

¹⁷ En el contexto actual de la física de partículas las partículas mediadoras son conocidas como bosones gauge, debido al hecho que cada interacción de la naturaleza se basa en un tipo particular de simetría gauge. El grupo de las fases U (1) para el caso de la QED siendo el fotón el portador de la interacción electromagnética.

CAPITULO III

EL MODELO DE YANG MILLS COMO UNA EXPLICACIÓN A LA ESTABILIDAD NUCLEAR

3.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Se han establecido los conceptos sobre los cuales se sustentan las teorías gauge, tales como invariancia gauge local y global, libertad gauge etc. A su vez el conjunto de hechos empíricos que condujeron a pensar en una estructura nuclear y posteriormente en una respuesta a su estabilidad, cuyos intentos decantaron en el desarrollo de las teorías gauge no abelianas. Esto, permitiéndole al estudiante comprender con sentido y significado la propuesta fenomenológica desarrollada a mediados de los años 1950 por los pensadores Yang y Mills relacionada a la estabilidad nuclear.

Su discusión se desarrolla en tres partes. En la primera se discute los aspectos claves de la propuesta fenomenológica, en la segunda se hacen algunos desarrollos algebraicos para justificar sus alcances y limitaciones y finalmente se establece un paralelo que permita justificar el modelo de Yang- Mills como una extensión de la electrodinámica clásica.

El modelo de Heisenberg (1932) y Yukawa (1935) fueron maneras de explicar la estabilidad nuclear. El primero de octubre de 1954 los pensadores Chen Ning Yang y Robert Mills en su artículo "*Conservation isotopic spin and Invariance gauge Isotopic*" proponen una nueva manera de abordar aquella problemática, basada en la conservación del isospín, en la simetría gauge y procediendo de forma análoga a la electrodinámica clásica en su forma covariante¹⁸. A pesar de sus esfuerzos resulto ser limitada, predecía la naturaleza de largo alcance de la fuerza responsable de la cohesión nuclear y por lo tanto masa nula para los correspondientes propagadores gauge dando lugar a una serie de controversias que progresivamente se fueron resolviendo con propuestas tales como la de Salam – Weinberg, el mecanismo de Higgs y finalmente el modelo estándar, el

¹⁸ Si bien en el artículo original de los pensadores Yang – Mills no se parte directamente de lo que actualmente conocemos como electrodinámica cuántica (QED), su modelo teórico se puede considerar como una extensión de ella debido a que al pasar de un grupo de simetría abeliano $U(1)$ a uno no abeliano $SU(2)$ se obtiene una descripción aproximadamente ajustada de la interacción entre nucleones, la cual decanta en su estabilidad.

cual brinda una comprensión del 5 % sobre la masa total del universo, cuyo estudio no hace parte del presente trabajo monográfico.



Figura 3.1. Chen Ning Yang y Robert Mills. Imagen Tomada y copiada de <http://publicism.info/science/inner/11.html>

3.2 SOBRE LA PROPUESTA

En primer lugar, Yang y Mills comienzan reconociendo una serie de hechos experimentales relacionados al núcleo y a su estabilidad obtenida hasta principios de los años 1950. Entre los que se encuentran: La masa del protón y el neutrón son aproximadamente iguales. Las interacciones neutrón- neutrón, neutrón- protón y protón - protón son indistinguibles y el espín isotrópico¹⁹ (isospín) como una propiedad intrínseca de los nucleones, la cual se conserva en interacciones nucleón - nucleón. Yang y Mills (1954) afirma:

The conservation of isotopic spin a much discussed concept in recent years. Historically an isotopic spin parameter was first introduced by Heisenberg in 1932 to describe the two charge states (namely neutron and proton) of a nucleon. The idea that the neutron and proton correspond to two states of the same particle was suggest at that the time by the fact that their masses are nearly equal, an the light stable even nuclei contain equal numbers of them. Then in 1937 Breit, Condon, and Present pointed out the approximate equality of p-p and n-p interactions in the S state. It seemed natural to assume that this equality holds also in the other states available to both the n - p and p- p systems. Under such and assumption one arrives at the concept of a total isotopic spin which is conserved in nucleon-nucleon interactions (p.1).

¹⁹ Es un número cuántico, similar al espín, utilizado para describir las interacciones entre los constituyentes del núcleo.

La conservación del isospín, en principio, se considera equivalente a una invariancia determinada por rotaciones simultáneas e iguales sobre un espacio interno²⁰ contenido en cada punto del espacio- tiempo denominado espacio de isospín, el cual brinda la posibilidad de describir las interacciones entre los nucleones. Yang y Mills (1954) afirma:

The conservation of isotopic spin is identical with the requirement of invariance of all interactions under isotopic spin rotation. This means that when electromagnetic interactions can be neglected, as we shall hereafter assume to be the case, the orientation of the isotopic spin is of no physical significance. The differentiation between a neutron and a proton is then a purely arbitrary process (p. 1).

En este sentido, el proceso de llamar protón y neutrón en cada espacio interno es arbitrario porque al despreciarse la carga positiva ambas partículas representan estados de una misma partícula, el nucleón (Ver figura 3.2 (a)). Sin embargo, una vez se realiza se debe, en efecto, aplicar de igual manera en todos los demás puntos del espacio - tiempo como se aprecia en la figura 3.2 (b)), la cual es invariante bajo una transformación isotópica global²¹ representada en la figura 3.2 (c). Yang y Mills (1954) afirma:

...this arbitrariness is subject to the following limitation: once one chooses what to call a proton, what a neutron, at one space-time point, one is then not free to make any choices at other space-time points. (p.2)

²⁰ Al tratarse de SU (2) el grupo de simetría implementado ese espacio interno está representado por una esfera situada en cada punto del espacio. En el caso de la QED la cual es invariante bajo el grupo de simetría U (1) este está representado por círculo compatible con el lugar geométrico de los números complejos.

²¹ Este tipo de transformación consiste en convertir protones en neutrones y estos en protones.

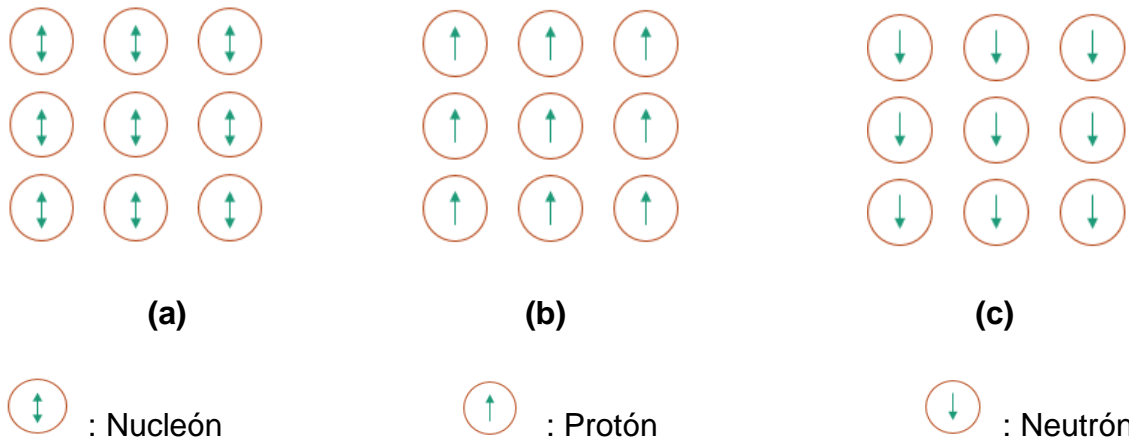


Figura 3.2. (a) Despreciando la carga eléctrica de los constituyentes del núcleo, el protón y el neutrón son iguales. (b) Al elegir una orientación del isospín para cada nucleón debe ser respetada en todos los puntos del espacio. (c) Realizar una transformación isotópica sobre el sistema nuclear se obtiene la misma cantidad de protones y neutrones, es invariante.

La propuesta de los pensadores Yang y Mills consistía en requerir que esta invariancia (conservación del isospín) ocurriera de forma local (Ver figura 3.3), es decir, que las interacciones entre nucleones fueran invariantes bajo transformaciones locales del isospín. En este caso cada observador se encuentra en la libertad de elegir uno de los dos estados²² del nucleón sin restricción alguna en cada punto del espacio-tiempo. Yang y Mills (1954) afirma:

In the present paper we wish to explore the possibility of requiring all interactions to be invariant under *independent rotations* of the isotopic spin at all space- time points, so that the relative orientation of the isotopic spin at two space- time points becomes a physically meaningless quantity (the electromagnetic field being neglected). (p.2)

²² Como se mencionó en el capítulo II cada estado del nucleón está representado por una orientación determinada sobre el eje Z en el espacio del isospín. El protón 1/2 y el neutrón -1/2.

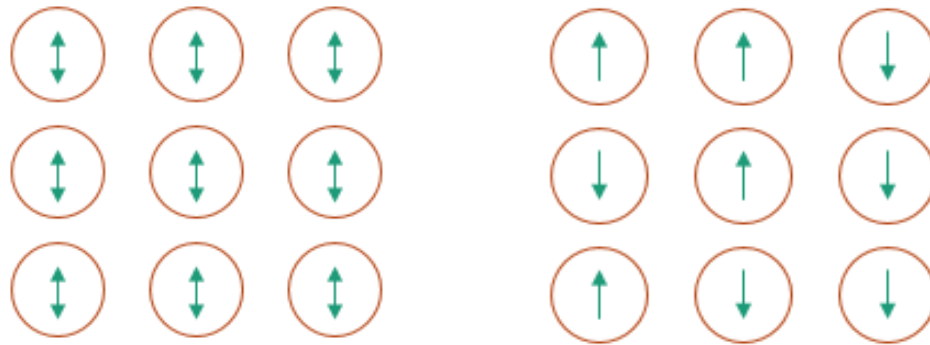


Figura 3.3. Desde el punto de vista local, cada observador está en la libertad de elegir una orientación del isospin representado por un estado del nucleón en donde también se debe satisfacer el requerimiento de invariancia.

Claramente bajo estas condiciones el sistema nuclear no es invariante, para que lo sea se debe proponer un criterio que permita comparar la elección de cada observador tal que se satisfaga el requerimiento planteado. En el caso de la electrodinámica cuántica, cuya discusión se abordó en el capítulo II, fue necesario introducir en la derivada ordinaria el campo gauge A_μ con su respectiva transformación, el cual precisamente representa el campo electromagnético cuyo quantum asociado es el fotón.

En el caso del electromagnetismo clásico al exigir que la transformación unitaria fuera local permite que cada observador implemente una fase distinta asociada al campo de materia ψ contenida en el espacio interno representado por un círculo en cada punto del espacio sin que su descripción física se vea afectada. Yang y Mills (1954) afirma:

We wish to point out that an entirely similar situation arises with respect to the ordinary gauge invariance of a charged field which is described by complex wave function. (p.2)

Para el caso de los nucleones Yang y Mills definen un criterio para comparar las diferentes orientaciones del isospín en cada punto del espacio denominándolo gauge isotópico. Yang y Mills (1954) afirma:

We define isotopic gauge as an arbitrary way of choosing the orientation of the isotopic spin axes at all space- time points, in analogy with the

electromagnetic gauge which represents an arbitrary way of choosing the complex phase factor a charged field at all space- time points. (p.2)

Esta arbitrariedad se relaciona al hecho de que la orientación del isospín no afecta la descripción contenida en la función de onda de cada nucleón. En este sentido, Yang y Mills proponen que la conservación del isospín se dé a partir de transformaciones unitarias locales de isospín contenidas en el grupo no - abeliano SU (2). "*We then propose that all physical processes (not involving the electromagnetic field) be invariant under an isotopic gauge transformation $\psi \rightarrow \psi' = S^{-1}\psi$ where S represent a space- time dependent isotopic spin rotation*" (Ning Yang & L. Mills, 1954).

3.3 CAMPOS DE YANG MILLS: UNA EXTENSIÓN DE LA QED

El objetivo principal de Yang y Mills fue conseguir una teoría que describiera la interacción responsable de la estabilidad nuclear a partir de una generalización de la QED, la cual había resultado tan útil hasta ese momento para describir la interacción electromagnética bajo el paradigma cuántico.

Su trabajo, como se mencionó en la sección anterior, consistió en exigir que el lagrangiano asociado a los dos estados del nucleón fuese invariante bajo rotaciones unitarias isotrópica locales contenidas en el grupo no abeliano SU(2) dadas por

$$\psi \longrightarrow \psi' = S \psi , \quad (42)$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} = S^{-1} \bar{\psi} . \quad (43)$$

Donde,

$$S = e^{-\frac{i}{2} \tau \cdot \alpha(x)} , \quad (44)$$

$$S^{-1} = e^{\frac{i}{2} \tau \cdot \alpha(x)} . \quad (45)$$

Siendo τ las matrices de Pauli o generadores del grupo isospín SU(2) y $\alpha(x)$ un parámetro libre función de cada punto del espacio.

El lagrangiano representativo de los dos estados del nucleón el protón y el neutrón respectivamente es (Quigg, 1997)

$$\mathcal{L}_{nu} = \bar{\psi}_p(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_p + \bar{\psi}_n(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_n , \quad (46)$$

el cual puede ser expresado de una manera más compacta como

$$\mathcal{L}_{nu} = \bar{\psi}_c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_c . \quad (47)$$

Donde $\psi_c = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ es una matriz columna que representa los dos estados del nucleón.

Al someter a (47) a una transformación gauge global isotópica dadas por

$$S = e^{-\frac{i}{2}\tau\cdot\alpha} , \quad (48)$$

$$S^{-1} = e^{\frac{i}{2}\tau\cdot\alpha} , \quad (49)$$

$$\mathcal{L}_{nu} \rightarrow \mathcal{L}_{nu}' ,$$

$$\mathcal{L}_{nu}' = S^{-1}\bar{\psi}_c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S\psi_c ,$$

$$\mathcal{L}_{nu}' = S^{-1}\bar{\psi}_c(i\gamma^\mu S\partial_\mu\psi_c - mS\psi_c) ,$$

$$\mathcal{L}_{nu}' = \bar{\psi}_c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_c ,$$

Se observa que \mathcal{L}_{nu} es invariante

$$\mathcal{L}_{nu} = \mathcal{L}_{nu}' . \quad (50)$$

Análogo a la QED surge la siguiente pregunta ¿Qué sucede cuando α se convierte en una función de las coordenadas?

$$\mathcal{L}_{nu} \rightarrow \mathcal{L}_{nu}' ,$$

$$\mathcal{L}_{nu}' = S^{-1}\bar{\psi}_c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S\psi_c ,$$

$$\mathcal{L}_{nu}' = S^{-1}\bar{\psi}_c(i\gamma^\mu\partial_\mu(S\psi_c) - mS\psi_c) ,$$

$$\mathcal{L}_{nu}' = S^{-1}\bar{\psi}_c(i\gamma^\mu S(\partial_\mu\psi_c) + i\gamma^\mu(\partial_\mu S)\psi_c - mS\psi_c) . \quad (51)$$

\mathcal{L}_{nu} ya no es invariante bajo la transformación. Al examinar $\partial_\mu S$ aporta un nuevo término a \mathcal{L}_{nu}' tal como sucede en la QED. En ese sentido debemos colocar un término adicional a ∂_μ de tal manera que se restaure la invariancia. Para ello

transformamos la derivada común ∂_μ por una derivada covariante de la siguiente manera

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{B}_\mu , \quad (52)$$

donde,

$$\mathbf{B}_\mu = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}_\mu . \quad (53)$$

\mathbf{B}_μ : Elemento del grupo no-abeliano, g : Constante de acoplamiento de las interacciones fuertes, \mathbf{b}_μ : Isovectores definidos en el espacio de isospín.

De esta manera \mathcal{L}_{nu} adquiere la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{nu} = \bar{\psi}_c (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_c . \quad (54)$$

Para garantizar la invariancia de \mathcal{L}_{nu} debemos encontrar una ley de transformación para \mathbf{B}_μ . En este sentido, la invariancia de \mathcal{L}_{nu} exige que

$$D_\mu' \psi' = S(D_\mu \psi), \quad (55)$$

asegurando que el término extra que aparece, producto de la acción de la derivada común sobre la transformación, desaparezca.

Expandiendo el término de la izquierda de (55) se obtiene

$$D_\mu' \psi' = \partial_\mu(S\psi) + ig\mathbf{B}_\mu' S\psi , \quad (56)$$

$$D_\mu' \psi' = S(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu S)\psi + ig\mathbf{B}_\mu' S\psi . \quad (57)$$

Para que se satisfaga (55) el último término de (57) debe ser

$$ig\mathbf{B}_\mu' S\psi = ig\mathbf{B}_\mu \psi - \partial_\mu S \psi . \quad (58)$$

Finalmente la ley de transformación de los campos \mathbf{B}_μ , se obtiene dividiendo (58) por $ig\psi$ y multiplicando por S^{-1} (Ning Yang & L. Mills, 1954) y (Quigg, 1997)

$$\mathbf{B}_\mu' = S\mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} . \quad (59)$$

Por otro lado, el tensor de intensidad asociado al campo de Yang- Mills está dado por

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{iq} [(\partial_\mu + ig\mathbf{B}_\mu), (\partial_\nu + ig\mathbf{B}_\nu)] \quad , \quad (60)$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathbf{B}_\mu - \partial_\mu \mathbf{B}_\nu + ig[\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] \quad , \quad (61)$$

el cual satisface el requerimiento de invariancia (Ver apéndice D).

El conmutador de los campos gauge \mathbf{B}_μ expresa el carácter no - abeliano del grupo unitario SU (2). En este sentido el tensor $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ en forma de componentes queda representado por (Quigg, 1997)

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}^l = \partial_\nu b_\mu^l - \partial_\mu b_\nu^l + g \epsilon_{jkl} b_\mu^j b_\nu^k \quad . \quad (62)$$

Finalmente el lagrangiano de Yang–Mills invariante bajo transformaciones gauge locales de isospín es (Quigg, 1997) (Ver apéndice E).

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} + \bar{\psi}_c (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_c - \frac{g}{2} \mathbf{b}_\mu \cdot \bar{\psi}_c \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \psi_c \quad (63)$$

De acuerdo al resultado anterior al exigir que el lagrangiano asociado a los dos estados del nucleón fuese invariante bajo una transformación local unitaria de isoespín condujo a la aparición de terminos de interacción, los cuales describen precisamente la interacción entre nucleones dando cuenta de la estabilidad nuclear. En este sentido el primer término (término cinético) describe los propagadores gauge del campo de Yang Mills. El segundo describe el campo nuclear (protones y neutrones) y finalmente el tercer termino explicita un termino de interacción asociado a la interacción entre los nucleones a partir del campo gauge de Yang - Mills, cuya partícula mediadora es el quantum \mathbf{b}_μ .

Otra característica particular de esta teoría gauge no abeliana se obtiene al sustituir la forma del tensor de intensidad del campo de Yang – Mills en el término cinético de (63) el cual brinda el siguiente resultado,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial^\mu b_l^\nu - \partial^\nu b_l^\mu)(\partial_\mu b_\nu^l - \partial_\nu b_\mu^l) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ig\gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}_\mu \psi \\ & \epsilon^{jkl} (\partial_\mu b_\nu^l - \partial_\nu b_\mu^l) b_\mu^k b_\nu^j - \frac{g^2}{4} \epsilon^{jkl} \epsilon_{jmn} b_k^\mu b_l^\nu b_\mu^m b_\nu^n \quad , \quad (64) \end{aligned}$$

en donde los primeros 3 terminos son iguales a \mathcal{L}_{YM} . Sin embargo, los terminos no lineales especifican algo que no tiene analogo en la electrodinamica clásica,

los cuales describen autointeracciones triples y cuárticas entre los campos gauge de Yang – Mills, representados por los siguientes diagramas de Feynmann (Ver figura 3.4) (Quigg, 1997).

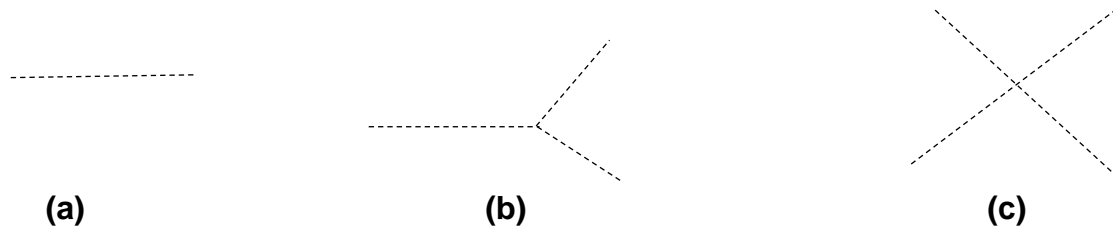


Figura 3.4. (a) Interacción entre nucleones mediante el propagador asociado al campo de Yang - Mills análogo a la QED. (b) y (c) autointeracciones no lineales entre los campos gauge de Yang – Mills.

De acuerdo a lo anterior, la conservación local del isospin exige la aparición de tres campos gauge, compatibles con los generadores del grupo no abeliano $SU(2)$, matrices de Pauli, los cuales describen la interacción entre los constituyentes del núcleo²³ e interactúan en si mismos.

²³ El estudio moderno de las interacciones fuertes contenido en la "Cromodinámica Cuántica" postula a los gluones como las partículas mediadoras, debido a que los protones y los neutrones están compuestos por otras subestructuras, los Quarks (Giancoli, 2009).

3.4 LA ESTABILIDAD NUCLEAR BAJO ESTA PERSPECTIVA

Bajo la mirada de los pensadores Yang y Mills, la interacción entre nucleones se da como consecuencia del continuo intercambio de *quantum* asociados al campo de interacción de Yang- Mills B_μ , los cuales poseen tres estados de carga (+, -, 0) compatibles con los tres generadores del grupo SU (2). "The two states of the nucleon, namely proton and neutron, differ by charge unity. Since they can transform into each other through the emission or absorption of a *b quantum*, the latter must have three charge states with charges $\pm e$ and 0" (Ning Yang & L. Mills, 1954).

Para satisfacer el requerimiento de invariancia del isospín en interacciones fuertes la magnitud del isospín de cada estado de carga de b_μ debe ser igual a 1. "The quanta of the *b field* clearly have spin unity and isotopic spin unity. We know their electric charge too because all the interactions that we proposed must satisfy the law of conservation of electric charge, which is exact." (Ning Yang & L. Mills, 1954).

En este orden de ideas, la estabilidad nuclear se da a partir de la interacción mutua entre protones y neutrones vía campos gauge de Yang Mills cuyo propagador es el quantum b_μ como se muestra en la figura 3.5.

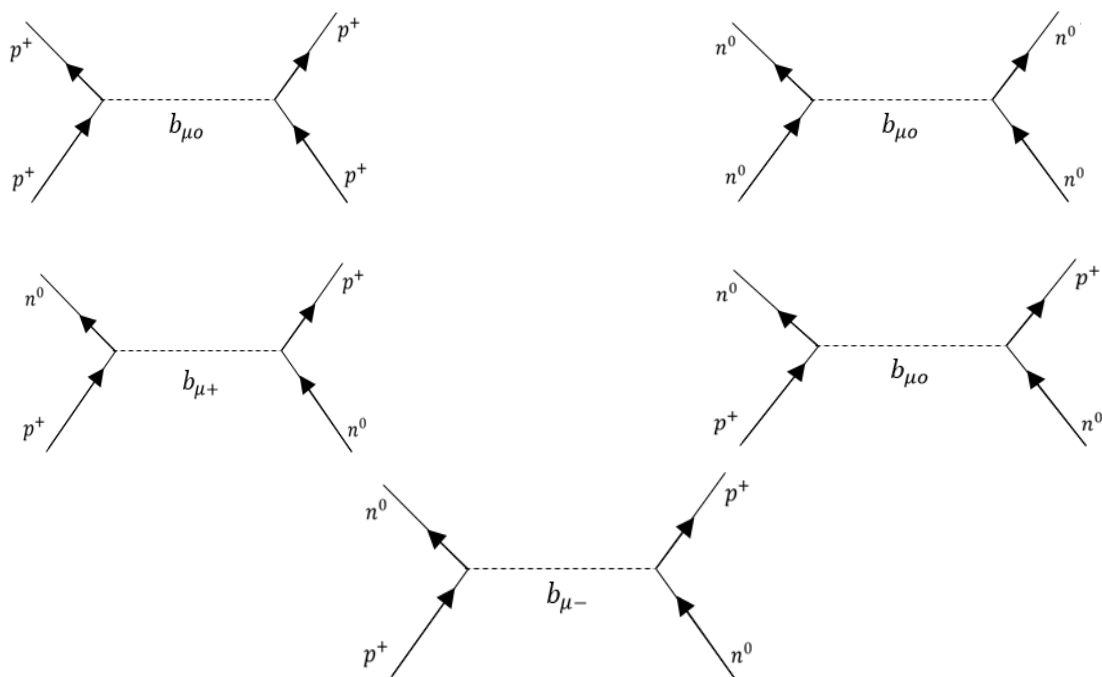


Figura 3.5. Interacción de protones y neutrones vía campo de Yang – Mills.

En este sentido, la interacción protón - protón o neutrón - neutrón se da a partir del intercambio del quantum $b_{\mu+}$, debido a que en el proceso la carga no cambia. La interacción protón - neutrón ocurre a partir del intercambio de algún estado de carga del quantum b_{μ} , como resultado de la diferencia de carga entre ambos estados del nucleón bajo un mecanismo similar al propuesto por Heisenberg, es decir, transmutaciones protón a neutrón y viceversa.

De forma equivalente, sin pérdida de generalidad, se pueden considerar pares de nucleones en interacción mutua mediante el intercambio de algún estado del propagador asociado al campo \mathbf{B} de interacción, como se muestra en la figura 3.6.

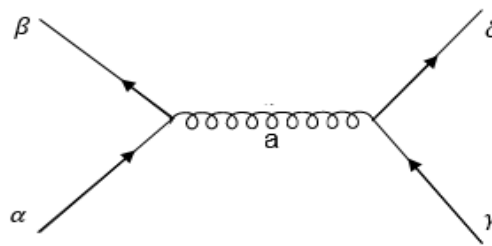


Figura 3.6. Interacción entre nucleones a partir del propagador a asociado al campo de Yang – Mills.

Donde α, γ representa el estado inicial de cada nucleón los cuales a partir del propagador a adquiere otro estado representado por β y δ . (Quigg,1997) *¿Qué significan físicamente los términos no lineales de la ecuación (75)?*

El modelo de Yang- Mills predice auto-interacciones entre los portadores del campo \mathbf{B} , es decir, entre los quantum b_{μ} , estableciendo un clara diferencia respecto a la QED en la que el fotón permite la interacción de campos termiónicos (partículas con espín semientero) pero en ausencia de ellos no existe ninguna clase de interacción. Los principales alcances y limitaciones del modelo de Yang- Mills son:

Considera, en principio, al nucleón como un estado de superposición determinado por el protón y el neutrón, es decir,

$$|N\rangle = |n\rangle + |p\rangle \quad (65)$$

En donde $|N\rangle$ representa al nucleón como el estado de superposición del protón y el neutrón respectivamente. Por otra parte, en el caso de realizarse una medida sobre el sistema ese nucleón puede ser un protón o un neutrón (Ver figura 3.7).



Figura 3.7. Antes de realizar una medida el nucleón es un estado de superposición determinado por el protón y el neutrón.

Explica la estabilidad nuclear a partir de la continua emisión y absorción del $quantum$ b_μ asociado al campo de Yang- Mills, los cuales poseen tres estados de carga (+, -, 0), modelo muy similar al planteado por Yukawa, el cual explica este fenómeno producto de la contigua transmutación de protones en neutrones y viceversa mediada por los mesones π .


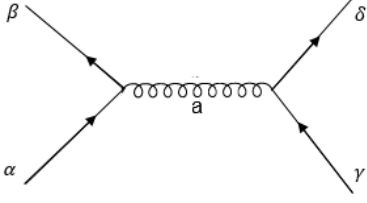
Predice auto - interacciones triples y cuárticas, es decir, interacciones entre los $quantum$ asociados al campo de Yang - Mills diferenciándose de forma significativa con la electrodinámica clásica en la que el fotón no interactúa consigo mismo.

Marco un camino promisorio para la construcción de las modernas teorías fenomenológicas de las interacciones de la naturaleza como el modelo de Salam- Weinberg y el modelo estándar, el cual ha permitido describir de forma conjunta tres de las cuatro interacciones de la naturaleza: la fuerte, la débil y la electromagnética.

Su principal limitación fue que predecía masa nula para los bosones gauge del campo B_μ . Desde el punto de vista teórico se debía a que al introducir términos de masa al lagrangiano de Dirac se rompía explícitamente la simetría propuesta, prediciendo la naturaleza de largo alcance de la fuerza de electromagnética. Sin embargo, al ser así en el caso de Yang - Mills implicaría que la fuerza responsable de la estabilidad nuclear fuera de largo siendo incompatible con la

actividad empírica. Como para ese momento no se conocía a parte del fotón otra partícula sin masa llevo a pensar, entonces, que ninguna partícula debía porque tenerla. Sin embargo, si esto fuera así la constitución de átomos, moléculas, cuerpos y la estructura misma del universo hubiera sido imposible debido a que todas ellas se moverían a la velocidad de la luz evitando cualquier tipo de interacción entre ellas.

Finalmente, el modelo de Yang - Mills es una extensión de la QED producto del uso de un grupo de simetría no abeliano como se muestra en la siguiente tabla.

	QED Vs MODELO DE YANG – MILLS	
	QED	MODELO DE YANG – MILLS
GRUPO DE SIMETRÍA	U(1)	SU (2)
CAMPO GAUGE	A_μ	B_μ
TENSOR DE CAMPO	$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$	$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + ig[B_\mu, B_\nu]$
LAGRANGIANO	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - J^\mu A_\mu$	$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{Dirac} - gJ^\mu b_\mu$
MECANISMO DE INTERACCIÓN		
MASA DE LOS BOSONES GAUGE	CERO	CERO
NATURALEZA DE LA INTERACCIÓN	Largo alcance	Largo alcance

MECANISMO DE INTERACCIÓN	La interacción electromagnética subyace del continuo intercambio de fotones, los cuales corresponden al quantum asociado al campo electromagnético.	Los nucleones interactúan mediante el campo de Yang – Mills, cuyos quantum de interacción pueden tener tres estados de carga +-e y neutro.

CONCLUSIONES

- El descubrimiento de los rayos X, la radioactividad y el electrón, hacia finales del siglo XX, indujeron a pensar sobre una estructura para el átomo, representado, en principio, como distribuciones esféricas de carga positiva y en su interior los electrones (Modelo de Thompson), el cual por ser inadecuado para explicar algunos hechos experimentales fue remplazado por el modelo planetario de Ernest Ruthenford y Niels Bohr basado en la idea de los estados estacionarios.
- Dada la explicación alrededor de la estructura del átomo surge la pregunta si el núcleo tiene una estructura y si la tiene de que estaba compuesta. En este sentido, W. Heinsenberg, H. Yukawa y Yang – Mills proponen modelos encaminados a explicar su estabilidad a partir de una estructura nuclear compuesta por protones y neutrones.
- La idea gauge surge por el intento de unificar la teoría electromagnética y la teoría general de la relatividad bajo una perspectiva geométrica gracias a los trabajos de Hermann Weyl.
- La manera de proceder de Yang - Mills para proponer su modelo es análoga a como se procede desde el contexto de la electrodinámica clásica en su forma covariante, configurándose en un marco conceptual pertinente pero limitado para entender la estabilidad nuclear.
- Bajo el modelo de Yang-Mills las interacciones entre nucleones se dan a partir de la existencia de un campo gauge cuyo quantum posee tres estados de carga a diferencia del caso electromagnético.
- La propuesta fenomenológica de los pensadores Yang y Mills se configura en el génesis del modelo estándar, sus limitaciones justificaron el

desarrollo de propuestas tales como la de Salam - Weinberg, en la cual se hace una unificación de las interacciones débil y electromagnética.

- El análisis histórico - crítico realizado sobre el artículo " Conservation of Isotopic Spin and Invariance Gauge Isotopic" de Yang y Mills permitió apreciar la estabilidad nuclear, configurándose en un aporte pedagógico para entender con sentido y significado el valor que ha jugado la simetría en la construcción de explicaciones en torno a la naturaleza.
- El principio gauge se configura como una manera útil de construir esquemas teóricos alrededor de las interacciones de la naturaleza haciendo uso del esquema lagrangiano, permitiendo por un lado, que el lagrangiano asociado a un sistema sea invariante bajo transformación de Lorentz, lo que significa que cumple con la relatividad especial y por otro, que sea invariante bajo una transformación gauge obteniendo términos de interacción entre los campos involucrados, lo cual significa que la simetría implica dinámica.

BIBLIOGRAFÍA

- Bélendez, A. (2008). La unificación de luz, electricidad y magnetismo: La "síntesis electromagnética" de Maxwell. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 30(2), 2601-1-20.
- C. Giancoli, D. (2009). *Física para ciencias e ingeniería con física moderna*. (V. Campos Holguín, & V. Robledo Rella, Trad.) México: México.
- Calahorra, C. V. (1995). *Química general - Introducción a la Química Teórica*. España: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Clavijo, M. R. (2016). Sobre la dinámica de una partícula en rotación. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, XL(157), 585-589.
- G. Hewitt, P. (2007). *Física conceptual* (Décima ed.). (V. Flores Flores, Trad.) México: Pearson.
- Garzón, J. (2010) Sobre la estructura nuclear del átomo: el isospín como una explicación de la estabilidad del núcleo (trabajo de grado). Universidad pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Sánchez, L. (2014) ¿Qué es una teoría gauge? (trabajo de grado). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.
- Morales, R. (2006) Soluciones clásicas a teorías de Yang-Mills SU (2) (trabajo de grado) Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- García Castañeda, M., & Ewert De - Geus, J. (2003). *Introducción a la física moderna* (Tercera ed.). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- García Prada, O. (2011). Existencia de Yang - Mills y salto de masa. *Jornadas sobre los problemas del milenio*, (págs. 23-58). Barcelona.
- Griffiths, D. (2004). *Introduction to elementary particles* (Primera ed.). WILEY-VCH.
- Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to electrodynamics* (Cuarta ed.). EE. UU: Pearson.
- Leonard Mlodinow, S. H. (2010). *El gran diseño*. (D. Jou i Mirabent, Trad.) España: Crítica.
- Manrique, M. M. (2006). Los análisis histórico críticos y la recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades. *Pro-Posiciones*, 27 - 31.
- McMahon, D. (2008). *Quantum Field Theory*. EE.UU: Mc Graw Hill.

- N, Q., & Molina, F. (2009). Una descripción sencilla de las Teorías Gauge. *Tumbagaga*, 19-29.
- Navarro Vives, J. (2000). El neutrón de Chadwich y su interpretación. *Cronos*, III(2), 273-293.
- Ning Yang, C., & L. Mills, R. (1954). Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, XCVI(1), 191-195.
- Quigg, C. (1997). *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic*. Advanced Book Classics. Westview Press.
- Rupérez, F. L. (1994). *Mas allá de las partículas y ondas: una propuesta de inspiración epistemológica para la educación*. España: Ministerio de Educación Cultura y Deporte, Centro de Investigación y Documentación Educativa.
- Wiechowsk, S. (1969). *Historia del átomo* (Tercera ed.). Barcelona: Labor.

APÉNDICE A: TEOREMAS VECTORIALES

TEOREMA 1: Todo campo vectorial \vec{S} cuyo rotacional sea igual a cero se puede expresar como el gradiente de una función escalar.

$$\vec{S} = \nabla\varphi \quad (\text{A - 1})$$

TEOREMA 2: Todo campo vectorial \vec{S} cuya divergencia sea igual a cero se puede expresar como el rotacional de otro campo vectorial

$$\vec{S} = \nabla \times \vec{G} \quad (\text{A - 2})$$

APÉNDICE B: GRUPOS

Los grupos han jugado un rol importante en la construcción de las teorías fenomenológicas de las interacciones de la naturaleza. Asimismo, en campos tales como el estado sólido, la química y demás ciencias. Por esa razón se exponen sus características más comunes.

¿Qué es?

Un grupo es un conjunto de elementos que junto con una operación interna dada cumplen con las siguientes propiedades:

PROPIEDAD DE CLAUSURA Dos elementos a_1, a_2 del grupo S dan como resultado otro elemento contenido en S

$$a_1 \cdot a_2 = a_3 \quad (\text{B - 1})$$

ASOCIATIVIDAD Los elementos de S satisfacen

$$a_1 (a_2 a_3) = (a_1 a_2) a_3 \quad (\text{B - 2})$$

ELEMENTO NEUTRO: Existe un único elemento neutro tal que

$$a_1 a_0 = a_1 \quad (\text{B - 3})$$

ELEMENTO INVERSO: Cada elemento del grupo tiene un único inverso

$$a^{-1} a = a_0 \quad (\text{B - 4})$$

Adicionalmente, si dos elementos de S conmutan se dice que es abeliano, en caso contrario es no abeliano. El grupo de las fases U(1) es abeliano.

$$U_1 \cdot U_2 = U_2 \cdot U_1 \quad (\text{B - 5})$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i\theta_2} \cdot e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad (\text{B - 6})$$

Por otro lado, el grupo de isospín SU (2) es no abeliano ya que sus elementos no conmutan entre sí.

Sea S el elemento genérico del grupo SU (2)

$$S = e^{-\frac{i}{2}\tau \cdot \alpha} \quad (\text{B - 7})$$

y S_1, S_2, S_3 dados por

$$S_1 = e^{-\frac{i}{2}\tau_1 \cdot \alpha} \quad ; \quad S_2 = e^{-\frac{i}{2}\tau_2 \cdot \alpha} \quad ; \quad S_3 = e^{-\frac{i}{2}\tau_3 \cdot \alpha}$$

Donde τ_1, τ_2, τ_3 son las matrices de Pauli, generadores del grupo de SU(2), y α un parámetro libre. Los generadores son aquellos que a partir de una operación interna dan como resultado cualquier elemento del grupo.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los cuales satisfacen la siguiente regla de conmutación

$$\begin{aligned} [\sigma_1, \sigma_2] &= \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 & (\text{B - 8}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De forma más compacta, los elementos del grupo no abeliano SU (2) satisfacen la siguiente regla de conmutación.

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_k \quad (\text{B - 9})$$

APÉNDICE B: TENSOR DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Teniendo en cuenta que los campos físicos \vec{E} y \vec{B} se pueden expresar en términos de un campo escalar ϕ y uno vectorial \vec{A} se puede obtener la forma del tensor asociado de la siguiente manera

Como \vec{B} está representado por

$$\nabla \times \vec{A} \quad (\text{C -1})$$

Y \vec{E} por

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{C -2})$$

Usando notación contravariante (índices abajo) \vec{B} se puede expresar como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad (\text{C -3})$$

Donde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ representan los vectores de la base. De esta manera

$$= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \mathbf{e}_1 - (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) \mathbf{e}_2 + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \mathbf{e}_3 \quad (\text{C -4})$$

De forma análoga para el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -(\partial_1 \mathbf{e}_1 + \partial_2 \mathbf{e}_2 + \partial_3 \mathbf{e}_3) A_0 - \partial_0 (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \quad (\text{C -5})$$

De esta manera

$$\mathbf{B}_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 ; \mathbf{B}_2 = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 ; \mathbf{B}_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \quad (\text{C -6})$$

$$\mathbf{E}_1 = -\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 ; \mathbf{E}_2 = -\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 ; \mathbf{E}_3 = -\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 \quad (\text{C -7})$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_{23} ; \mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_{13} ; \mathbf{B}_3 = \mathbf{F}_{12} \quad (\text{C -8})$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_{01} ; \mathbf{E}_2 = \mathbf{F}_{02} ; \mathbf{E}_3 = \mathbf{F}_{03} \quad (\text{C -9})$$

Finalmente se obtiene la forma del tensor electromagnético

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{C -10})$$

APÉNDICE C: INVARIANCIA GAUGE LOCAL DEL LAGRANGIANO DE LA QED

El lagrangiano de la QED representado por la ecuación (74) es invariante bajo una transformación gauge local contenida en el grupo abeliano U (1)

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta(x)} \psi \quad (D - 1)$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} \quad (D - 2)$$

$$\mathcal{L}_{QED} \longrightarrow \mathcal{L}_{QED}' \quad (D - 3)$$

$$\mathcal{L}_{QED}' = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu'} \mathbf{F}_{\mu\nu'} + \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' - \bar{\psi}' \gamma^\mu e A_\mu' \psi' \quad (D - 4)$$

Por comodidad evaluaremos la transformación para cada termino de \mathcal{L}

TERMINO DE INTERACCIÓN

$$-\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu'} \mathbf{F}_{\mu\nu'} \quad (D - 5)$$

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \longrightarrow \mathbf{F}^{\mu\nu'} \quad (D - 6)$$

Donde,

$$\mathbf{F}^{\mu\nu'} = \partial^\mu A^{\nu'} - \partial^\nu A^{\mu'} \quad (D - 7)$$

La regla de transformación del campo gauge A^μ y A^ν es

$$A^{\mu'} = A^\mu - \frac{1}{q} \partial^\mu(\theta(x)) \quad ; \quad A^{\nu'} = A^\nu - \frac{1}{q} \partial^\nu(\theta(x)) \quad (D - 8)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F}^{\mu\nu'} = \partial^\mu \left[A^\nu - \frac{1}{q} \partial^\nu(\theta(x)) \right] - \partial^\nu \left[A^\mu - \frac{1}{q} \partial^\mu(\theta(x)) \right] \quad (D - 9)$$

$$\mathbf{F}^{\mu\nu'} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \mathbf{F}^{\mu\nu} \quad (D - 10)$$

De forma similar

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \mathbf{F}_{\mu\nu'} \quad (D - 11)$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu'} = \partial_\mu A_{\nu'} - \partial_\nu A_{\mu'} \quad (D - 11)$$

La regla de transformación del campo gauge A_ν y A_μ es

$$A_{\nu'} = A_\nu - \frac{1}{q} \partial_\nu(\theta(x)) \quad ; \quad A_{\mu'} = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu(\theta(x)) \quad (D - 13)$$

Sustituyendo

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}' = \partial_\mu \left[\mathbf{A}_\nu - \frac{1}{q} \partial_\nu(\theta(x)) \right] - \partial_\nu \left[\mathbf{A}_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu(\theta(x)) \right] \quad (\text{D - 14})$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}' = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{D - 15})$$

De esta manera

$$-\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}' = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \quad (\text{D - 16})$$

ECUACIÓN DE DIRAC

$$\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \longrightarrow \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' \quad (\text{D - 17})$$

$$\mathcal{L}' = (e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (e^{i\theta(x)} \psi)$$

$$\mathcal{L}' = (e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}) (i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta(x)} \psi) - m e^{i\theta(x)} \psi)$$

$$\mathcal{L}' = (e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}) [i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta(x)} \psi) + i\gamma^\mu e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi - m e^{i\theta} \psi]$$

$$\mathcal{L}' = (e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}) [i\gamma^\mu (i e^{i\theta(x)} \partial_\mu(\theta(x)) \psi) + i\gamma^\mu e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi - m e^{i\theta} \psi]$$

$$\mathcal{L}' = (e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}) [-\gamma^\mu e^{i\theta(x)} \partial_\mu(\theta(x)) \psi + i\gamma^\mu e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi - m e^{i\theta} \psi]$$

$$\mathcal{L}' = e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} (-\gamma^\mu e^{i\theta(x)} \partial_\mu(\theta(x)) \psi) + e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} i\gamma^\mu e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi - e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} m e^{i\theta} \psi$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \gamma^\mu \partial_\mu(\theta(x)) \bar{\psi} \psi \quad (\text{D - 18})$$

TERMINO DE INTERACCIÓN

$$-\bar{\psi} \gamma^\mu e A_\mu \psi \longrightarrow -\bar{\psi}' \gamma^\mu e A_\mu' \psi \quad (\text{D - 19})$$

$$-e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} \gamma^\mu q \left[A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu(\theta(x)) \right] e^{i\theta(x)} \psi$$

$$-e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} \gamma^\mu e A_\mu e^{i\theta(x)} \psi + \frac{e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} \gamma^\mu q \partial_\mu(\theta(x)) e^{i\theta(x)} \psi}{q}$$

$$-\bar{\psi} \gamma^\mu e A_\mu \psi (e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)}) + \frac{\bar{\psi} \gamma^\mu q}{q} \partial_\mu(\theta(x)) \psi (e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)})$$

$$-\bar{\psi} \gamma^\mu e A_\mu \psi + \partial_\mu(\theta(x)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{D - 20})$$

Uniendo (D - 16) , (D - 18) y (D - 20) se obtiene

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \gamma^\mu \partial_\mu (\theta(x)) \psi \bar{\psi} - \bar{\psi} \gamma^\mu e A_\mu \psi + \partial_\mu (\theta(x)) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu e A_\mu \psi = \mathcal{L} \quad (\text{D - 20})$$

\mathcal{L} es invariante bajo transformaciones locales de la fase contenidas en el grupo de simetría unitario U (1).

APÉNDICE D: TENSOR DE INTENSIDAD DEL CAMPO DE YANG MILLS

El lagrangiano de la electrodinámica cuántica es invariante bajo el grupo de simetría abeliano U(1). Asimismo, el lagrangiano de Yang – Mills lo es bajo el grupo de simetría no abeliano SU (2). Sin embargo, la forma del tensor de intensidad representativo de cada teoría gauge difiere entre sí.

Se deduce de forma detallada el tensor de intensidad asociado al campo de Yang Mills haciendo uso de algunas propiedades de los grupos unitarios.

En primer lugar se debe garantizar que el tensor de intensidad sea invariante bajo transformaciones unitarias locales de isospín, es decir,

$$F_{\mu\nu}' = S F_{\mu\nu} S^{-1} \quad (\text{E - 1})$$

En el caso de la QED $F_{\mu\nu}$ esta dado por

$$F_{\mu\nu}' = \partial_\mu \mathbf{B}_\nu' - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu' \quad (\text{E - 2})$$

$$F_{\mu\nu}' = \partial_\mu \left[S \mathbf{B}_\nu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\nu S) S^{-1} \right] - \partial_\nu \left[S \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} \right] \quad (\text{E - 3})$$

$$F_{\mu\nu}' = S \partial_\mu \mathbf{B}_\nu S^{-1} - S \partial_\nu \mathbf{B}_\mu S^{-1} + (\partial_\mu S) \mathbf{B}_\nu S^{-1} - (\partial_\nu S) \mathbf{B}_\mu S^{-1} + S \mathbf{B}_\nu \partial_\mu (S^{-1})$$

$$S \mathbf{B}_\mu \partial_\nu (S^{-1}) + \frac{i}{g} [(\partial_\nu S) (\partial_\mu S^{-1}) - (\partial_\mu S) (\partial_\nu S^{-1})] \quad (\text{E - 4})$$

$$F_{\mu\nu}' = S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + (\partial_\mu S) \mathbf{B}_\nu S^{-1} - (\partial_\nu S) \mathbf{B}_\mu S^{-1}$$

$$+ S \mathbf{B}_\nu \partial_\mu (S^{-1}) - S \mathbf{B}_\mu \partial_\nu (S^{-1}) + \frac{i}{g} [(\partial_\nu S) (\partial_\mu S^{-1}) - (\partial_\mu S) (\partial_\nu S^{-1})] \quad (\text{E - 5})$$

El anterior resultado se puede expresar de forma compacta haciendo uso de las siguientes propiedades de los grupos unitarios.

$$SS^{-1} = 1 \quad (\text{E - 6})$$

$$\partial_\mu (SS^{-1}) = 0 \quad (\text{E - 7})$$

$$(\partial_\mu S^{-1}) S = -S^{-1} \partial_\mu S \quad (\text{E - 8})$$

$$(\partial_\mu S) S^{-1} = S(\partial_\mu S^{-1}) \quad (\text{E - 9})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu}' &= S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + S^{-1} (\partial_\mu S) \mathbf{B}_\nu - \mathbf{B}_\nu S^{-1} (\partial_\mu S) - S^{-1} (\partial_\nu S) \mathbf{B}_\mu \\ &\quad + \mathbf{B}_\mu S^{-1} (\partial_\nu S) + \frac{i}{g} [(\partial_\nu S) (\partial_\mu S^{-1}) - (\partial_\mu S) (\partial_\nu S^{-1})] \quad (\text{D - 10}) \end{aligned}$$

Como

$$\partial_\nu S = (\partial_\nu S^{-1}) S = -S^{-1} (\partial_\nu S) \quad (\text{E - 11})$$

$$\partial_\mu S^{-1} = (\partial_\mu S) S^{-1} = S(\partial_\mu S^{-1}) \quad (\text{E - 12})$$

$$\partial_\mu S = (\partial_\mu S^{-1}) S = -S^{-1} (\partial_\mu S) \quad (\text{E - 13})$$

$$\partial_\nu S^{-1} = (\partial_\nu S) S^{-1} = S(\partial_\nu S^{-1}) \quad (\text{E - 14})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu}' &= S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] - [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] \\ &\quad + \frac{i}{g} [-S^{-1} (\partial_\nu S) S (\partial_\mu S^{-1}) + S^{-1} (\partial_\mu S) S (\partial_\nu S^{-1})] \quad (\text{E - 15}) \end{aligned}$$

Operando

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu}' &= S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] - [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] \\ &\quad - \frac{1}{ig} [-S^{-1} (\partial_\nu S) S (\partial_\mu S^{-1}) + S^{-1} (\partial_\mu S) S (\partial_\nu S^{-1})] \quad (\text{E - 16}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu}' &= S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] - [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] \\ &\quad + \frac{1}{ig} [S^{-1} (\partial_\nu S) S (\partial_\mu S^{-1}) - S^{-1} (\partial_\mu S) S (\partial_\nu S^{-1})] \quad (\text{E - 17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu}' &= S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] - [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] \\ &\quad + \frac{1}{ig} S^{-1} [(\partial_\nu S) S (\partial_\mu S^{-1}) + (\partial_\mu S) S (\partial_\nu S^{-1})] S \quad (\text{E - 18}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}' = S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] - [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] + \frac{1}{ig}$$

$$S [(\partial_\mu S^{-1})(\partial_\nu S) - (\partial_\nu S^{-1})(\partial_\mu S)] S^{-1} \quad (\text{E - 19})$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}' &= S (\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu) S^{-1} + S \{ [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] - [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] \} S^{-1} \\ &+ \frac{1}{ig} S [(\partial_\mu S^{-1})(\partial_\nu S) - (\partial_\nu S^{-1})(\partial_\mu S)] S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E - 20})$$

Al cambiar la derivada ordinaria por covariante la invariancia del lagrangiana se restaura, por lo tanto, el tensor de intensidad se puede expresar como

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] \quad (\text{E - 21})$$

Sustituyendo

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [(\partial_\mu + ig \mathbf{B}_\mu), (\partial_\nu + ig \mathbf{B}_\nu)] \quad (\text{E - 22})$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [(\partial_\mu + ig \mathbf{B}_\mu)(\partial_\nu + ig \mathbf{B}_\nu) - (\partial_\nu + ig \mathbf{B}_\nu)(\partial_\mu + ig \mathbf{B}_\mu)] \quad (\text{E - 23})$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [\partial_\mu \partial_\nu + ig \partial_\mu \mathbf{B}_\nu + ig \mathbf{B}_\mu \partial_\nu - g^2 \mathbf{B}_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \partial_\mu - ig \mathbf{B}_\nu \partial_\mu + g^2 \mathbf{B}_\nu \mathbf{B}_\mu]$$

Simplificando

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu + ig (\mathbf{B}_\mu \mathbf{B}_\nu - \mathbf{B}_\nu \mathbf{B}_\mu) \quad (\text{E - 24})$$

Finalmente,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu + ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] \quad (\text{E - 25})$$

Al aplicar la ley de transformación de los campos \mathbf{B}_μ sobre el conmutador se obtiene

$$ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] \rightarrow ig [\mathbf{B}_\mu', \mathbf{B}_\nu'] \quad (\text{E - 27})$$

$$ig [\mathbf{B}_\mu', \mathbf{B}_\nu'] = ig \left[\left(S \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} \right), \left(S \mathbf{B}_\nu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\nu S) S^{-1} \right) \right] \quad (\text{E - 28})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &ig \left[\left(S \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} \right) \left(S \mathbf{B}_\nu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\nu S) S^{-1} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(S \mathbf{B}_\nu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\nu S) S^{-1} \right) \left(S \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} \right) \right] \\ &= ig \left[S \mathbf{B}_\mu S^{-1} S \mathbf{B}_\nu S^{-1} + \frac{i}{g} S \mathbf{B}_\mu S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} S \mathbf{B}_\nu S^{-1} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{i^2}{g^2} (\partial_\mu S) S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1} - S \mathbf{B}_\nu S^{-1} S \mathbf{B}_\mu S^{-1} - \frac{i}{g} S \mathbf{B}_\nu S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} - \\ & \frac{i}{g} (\partial_\nu S) S^{-1} S \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{1}{g^2} (\partial_\nu S) S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E - 29})$$

Simplificando los dos primeros términos

$$\begin{aligned} = & ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - S \mathbf{B}_\mu S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1} - (\partial_\mu S) S^{-1} S \mathbf{B}_\nu S^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1} + \\ & S \mathbf{B}_\nu S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} + (\partial_\nu S) S S^{-1} \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\nu S) S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E - 30})$$

$$\begin{aligned} = & ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - S S^{-1} (\partial_\mu S) \mathbf{B}_\nu S^{-1} + S \mathbf{B}_\nu S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} - S S^{-1} (\partial_\nu S) \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \\ & S \mathbf{B}_\mu S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1} + \frac{1}{ig} (\partial_\mu S) S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\nu S) S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E - 31})$$

Sacando factor común S y S^{-1} de los términos no imaginarios

$$\begin{aligned} = & ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - S [S^{-1} (\partial_\mu S) \mathbf{B}_\nu + \mathbf{B}_\nu S^{-1} (\partial_\mu S)] S^{-1} - S [S^{-1} (\partial_\nu S) \mathbf{B}_\mu - \\ & \mathbf{B}_\mu S^{-1} (\partial_\nu S)] S^{-1} + \frac{1}{ig} (\partial_\mu S) S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\nu S) S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E - 32})$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} = & ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} + S [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - S [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] S^{-1} - \\ & \frac{1}{ig} [(\partial_\nu S) S^{-1} (\partial_\mu S) S^{-1} - (\partial_\mu S) S^{-1} (\partial_\nu S) S^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{E - 33})$$

$$= ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - \frac{1}{ig} [(\partial_\nu S) S S^{-1} (\partial_\mu S^{-1}) - (\partial_\mu S) S S^{-1} (\partial_\nu S^{-1})] \quad (\text{E - 34})$$

$$= ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - \frac{1}{ig} [S (\partial_\mu S^{-1}) (\partial_\nu S) S^{-1} - S (\partial_\nu S^{-1}) (\partial_\mu S) S^{-1}] \quad (\text{E - 35})$$

Finalmente se obtiene la transformación del conmutador asociado al tensor de intensidad.

$$\begin{aligned} = & ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} + S [S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - [S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] S^{-1} - \\ & \frac{1}{ig} S [(\partial_\mu S^{-1}) (\partial_\nu S) (\partial_\nu S^{-1}) (\partial_\mu S)] S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E - 36})$$

APÉNDICE E: INVARIANCIA GAUGE LOCAL DEL LAGRANGIANO DE YANG MILLS.

El lagrangiano de Yang – Mills representado por la ecuación (74) es invariante bajo una transformación gauge local de isospín contenida en el grupo no abeliano SU (2)

$$\bar{\psi}_c \longrightarrow \bar{\psi}'_c = S \bar{\psi}_c \quad ; \quad (\text{F - 1})$$

$$\psi_c \longrightarrow \psi_c = S^{-1} \psi_c \quad , \quad (\text{F - 2})$$

Donde S y S^{-1} esta dadas por

$$S = e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \quad (\text{F - 3})$$

$$S^{-1} = e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \quad (\text{F - 4})$$

$$\mathcal{L}_{YM} \longrightarrow \mathcal{L}'_{YM} \quad (\text{F - 5})$$

$$\mathcal{L}'_{YM} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}' + \bar{\psi}'_c (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_c' - \frac{g}{2} \mathbf{b}_\mu \cdot \bar{\psi}'_c \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \psi_c' \quad (\text{F - 6})$$

Por comodidad evaluaremos la transformaci3n para cada termino de \mathcal{L}_{YM}

TERMINO CINÉTICO

$$-\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}' \quad (\text{F - 7})$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \mathbf{F}'_{\mu\nu} \quad (\text{F - 8})$$

Donde,

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathbf{B}'_\mu - \partial_\mu \mathbf{B}'_\nu + ig [\mathbf{B}'_\mu, \mathbf{B}'_\nu] \quad (\text{F - 9})$$

Tomando en cuenta el resultado del apéndice anterior se obtiene

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu} = \partial_\nu [S \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1}] - \partial_\mu [S \mathbf{B}_\nu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\nu S) S^{-1}] \quad (\text{F - 10})$$

$$\begin{aligned} &= S(\partial_\nu \mathbf{B}_\mu - \partial_\mu \mathbf{B}_\nu) S^{-1} + S\{[S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] - [[S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu]\} S^{-1} \\ &+ \frac{1}{ig} [(\partial_\nu S^{-1}) (\partial_\mu S) - (\partial_\mu S^{-1}) (\partial_\nu S)] + ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} + S[S^{-1} (\partial_\mu S), \mathbf{B}_\nu] S^{-1} - \\ &[S^{-1} (\partial_\nu S), \mathbf{B}_\mu] S^{-1} - \frac{1}{ig} S[(\partial_\mu S^{-1}) (\partial_\nu S) (\partial_\nu S^{-1}) (\partial_\mu S)] S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{F - 11})$$

Finalmente

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu} = S(\partial_\nu \mathbf{B}_\mu - \partial_\mu \mathbf{B}_\nu) S^{-1} + ig [\mathbf{B}_\mu, \mathbf{B}_\nu] S^{-1} = \mathbf{F}_{\mu\nu} \quad (\text{F - 12})$$

De forma análoga se procede para $\mathbf{F}^{\mu\nu}$

ECUACION DE DIRAC

$$\bar{\psi}_c (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_c \quad (\text{F - 13})$$

$$\bar{\psi}_c (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S \bar{\psi}_c \quad (\text{F - 14})$$

$$S^{-1} \bar{\psi}_c (i\gamma^\mu S (\partial_\mu \psi_c) + i\gamma^\mu (\partial_\mu S) \psi_c - m S \psi_c) \quad (\text{F - 15})$$

$$e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \bar{\psi}_c \left[i\gamma^\mu e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} (\partial_\mu \psi_c) + i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)}) \psi_c - m (e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)}) \psi_c \right]$$

$$e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \bar{\psi}_c \left[i\gamma^\mu e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} (\partial_\mu \psi_c) + i\gamma^\mu \psi_c e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x)) - m e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \psi_c \right]$$

$$e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \bar{\psi}_c i\gamma^\mu e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} (\partial_\mu \psi_c) + i e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \bar{\psi}_c \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x))$$

$$- \bar{\psi}_c m e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \psi_c \quad (\text{F - 16})$$

Operando se obtiene

$$\bar{\psi}_c i\gamma^\mu (\partial_\mu \psi_c) + \bar{\psi}_c i\boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x)) - \bar{\psi}_c m \psi_c \quad (\text{F - 17})$$

Reorganizando

$$\bar{\psi}_c i\boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x)) - \bar{\psi}_c m \psi_c + \bar{\psi}_c i\gamma^\mu (\partial_\mu \psi_c) \quad (\text{F - 18})$$

TERMINO DE INTERACCIÓN

$$-\frac{g}{2} \mathbf{b}_\mu \cdot \bar{\psi}_c \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \psi_c \quad \rightarrow \quad -\frac{g}{2} \mathbf{b}_\mu \cdot \bar{\psi}_c \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \psi_c \quad (\text{F - 19})$$

Como

$$\mathbf{B}_\mu = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}_\mu \quad (\text{F - 20})$$

Entonces,

$$-g \mathbf{B}_\mu \bar{\psi}_c \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \psi_c \quad (\text{F - 21})$$

$$-g \left[S \mathbf{B}_\mu S^{-1} + \frac{1}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} \right] (S \psi_c) (S^{-1} \bar{\psi}_c) \boldsymbol{\gamma}^\mu \quad (\text{F - 22})$$

Distribuyendo

$$-g \left[S \mathbf{B}_\mu S^{-1} (S \psi_c) (S^{-1} \bar{\psi}_c) + \frac{1}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} (S \psi_c) (S^{-1} \bar{\psi}_c) \right] \boldsymbol{\gamma}^\mu$$

$$\begin{aligned}
& -g \left[S \mathbf{B}_\mu S^{-1} S \psi_c S^{-1} \bar{\psi}_c + \frac{1}{g} (\partial_\mu S) S^{-1} S \psi_c S^{-1} \bar{\psi}_c \right] \gamma^\mu \\
& -g \left[S \mathbf{B}_\mu \psi_c S^{-1} \bar{\psi}_c + \frac{1}{g} (\partial_\mu S) \psi_c S^{-1} \bar{\psi}_c \right] \gamma^\mu \\
& \text{(F - 23)}
\end{aligned}$$

Operando,

$$\begin{aligned}
& - S \mathbf{B}_\mu \psi_c S^{-1} \bar{\psi}_c \gamma^\mu - (\partial_\mu S) \psi_c S^{-1} \bar{\psi}_c \gamma^\mu \\
& - \mathbf{B}_\mu \psi_c \bar{\psi}_c \gamma^\mu - (\partial_\mu S) \psi_c S^{-1} \bar{\psi}_c \gamma^\mu \\
& - \mathbf{B}_\mu \psi_c \bar{\psi}_c \gamma^\mu - \partial_\mu \left(e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \right) \psi_c \left(e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \right) \bar{\psi}_c \gamma^\mu \\
& - \mathbf{B}_\mu \psi_c \bar{\psi}_c \gamma^\mu - \boldsymbol{\tau} e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x)) \psi_c \left(e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \right) \bar{\psi}_c \gamma^\mu \\
& - \mathbf{B}_\mu \psi_c \bar{\psi}_c \gamma^\mu - \boldsymbol{\tau} \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x)) \psi_c \bar{\psi}_c \gamma^\mu \\
& \text{(F - 24)}
\end{aligned}$$

uniendo (F - 12), (F - 18) y (F - 24) se obtiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} + \bar{\psi}_c i \gamma^\mu (\partial_\mu \psi_c) - \bar{\psi}_c m \psi_c + \bar{\psi}_c \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x)) \\
& - \mathbf{B}_\mu \psi_c \bar{\psi}_c \gamma^\mu - \boldsymbol{\tau} \gamma^\mu \partial_\mu (\boldsymbol{\alpha}(x)) \psi_c \bar{\psi}_c \gamma^\mu \\
& \text{(F - 25)}
\end{aligned}$$

Operando,

$$\mathcal{L}_{\text{YM}'} = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} + \bar{\psi}_c (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_c - \frac{g}{2} \mathbf{b}_\mu \cdot \bar{\psi}_c \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \psi_c = \mathcal{L}_{\text{YM}}. \quad \text{(F - 26)}$$

\mathcal{L}_{YM} es invariante bajo transformaciones locales del isospin.