

**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR ALGUNOS  
CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL A PARTIR DEL  
ANÁLISIS DE LA GEOMETRÍA DE MINKOWSKI**

LEIDY TATIANA ACOSTA CUENCA  
COD: 2010146001

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
BOGOTA D.C

2017

**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR ALGUNOS  
CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL A PARTIR DEL  
ANÁLISIS DE LA GEOMETRÍA DE MINKOWSKI**

LEIDY TATIANA ACOSTA CUENCA

COD: 2010146001

Trabajo de grado para optar  
al título de Licenciada en Física

Asesor  
Yesid Javier Cruz Bonilla  
Prof. Departamento de Física

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
BOGOTA D.C

2017

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco primeramente a Dios por cada día que me permitió vivir y disfrutar en este recorrido por la universidad.

A mi hijo Matías por ser la motivación más grande para culminar este proceso y ser mejor cada día.

A mis padres Marina y Néstor por todo su amor, apoyo y formación que me llevaron a ser la persona que soy.


A mi esposo Rubén quien me apoya siempre en mis decisiones.

A Karina por ser una consejera y amiga incondicional que me dio un impulso cuando lo necesitaba.

Al profesor Yesid Cruz por su colaboración y asesoría en el desarrollo del trabajo.

Al Departamento de Física que me brindó la formación necesaria para ser una buena profesional y dar un aporte a este país.

A todos ellos, muchas gracias.

 <b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <small>Educación de calidad</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 91	

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Diseño de una secuencia didáctica para introducir algunos conceptos fundamentales de la relatividad especial a partir del análisis de la geometría de Minkowski
<b>Autor(es)</b>	Acosta Cuenca, Leidy Tatiana
<b>Director</b>	Yesid Javier Cruz Bonilla
<b>Publicación</b>	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 54 p
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	RELATIVIDAD ESPECIAL, ESPACIO-TIEMPO, DIAGRAMA DE MINKOWSKI, GEOMETRÍA, SIMULTANEIDAD, CAUSALIDAD, SECUENCIA DIDÁCTICA

<b>2. Descripción</b>
<p>En el presente trabajo se presenta una investigación en el ámbito de la enseñanza de la relatividad especial, cuyo propósito es brindar al docente una secuencia didáctica que permita introducir conceptos fundamentales de la relatividad especial, como lo son la dilatación y contracción del espacio-tiempo, la simultaneidad y la causalidad, de una manera gráfica y geométrica, para favorecer la comprensión de éstos, haciéndolos más evidentes a partir de diagramas de Minkowski y conos de luz. Para esto se realiza un análisis geométrico de cada una de las consecuencias de la relatividad especial y posteriormente se presentan las actividades planteadas junto con las recomendaciones al docente para que su implementación sea más apropiada.</p>

### 3. Fuentes

- Aleman, R. A., & Pérez, J. F. (2001). Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 335-343.
- Alemañ Berenguer, R., & Selles, P. (2000). Enseñanza por cambio conceptual: De la física clásica a la relatividad. Barcelona.
- Arriasecq, I., & Greca, I. (2004). Enseñanza de la teoría de la relatividad especial en el ciclo polimodal: dificultades manifestadas por los docentes y textos de uso habitual. *Revista electronica de enseñanza de las ciencias*, 3(2), 221-227.
- Carvajal Córdoba, F. R. (2012). Implicaciones del tratamiento de los conceptos de masa y masa relativista. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Einstein, A. (1905). On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, 2.
- Gil, D., Senent, F., & Solbes, J. (1986). Análisis crítico de la introducción de la física moderna en la enseñanza media. *Revista de enseñanza de la física*, 16-21.
- Hewson, P. (1982). A case study of conceptual change in special relativity: the influence of prior knowledge in learning. *European journal of research in science education*(4(1)), 61 - 78.
- kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. (A. Contín, Trad.) Mexico: Fondo de cultura económica.
- López Posada, Y. c. (2012). Problematicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la teoría especial de la relatividad con respecto a los maestros en formación de la licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia. Tesis de pregrado, Universidad de Antioquia, Medellin.
- Maxwell, J. (1873). *A Treatise on electricity and magnetism*. Oxford: Clarendon press.
- Michelson, A., & Morley, E. (1887). On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *the American Journal of science*, 333-345.
- Pérez Celada, H. (2003). *La teoría de la relatividad y su didáctica en el bachillerato: análisis de dificultades y una propuesta de tratamiento*. Valencia: Universidad de Valencia.
- Pérez Quimbayo, D. M. (2009). Diseño de una herramienta virtual para la enseñanza de la relatividad especial. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Pérez, H., & Solbes, J. (2003). Algunos problemas en la enseñanza de la relatividad. *Enseñanza de las ciencias*, 21(1), 135-146.
- Pérez, H., & Solbes, J. (2006). Una propuesta sobre enseñanza de la relatividad en el bachillerato como motivación para el aprendizaje de la física. *Enseñanza de las ciencias*, 24(2), 269-284.

- Posner, G., Strike, K., Hewson, P., & Gertzog, W. (1982). Accomodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 211-217.
- Restrepo, G. (2011). *Relatividad especial: fundamentos y propuesta didáctica para su enseñanza en la escuela secundaria*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia sede Medellin, Medellin.
- Sánchez Ron, J. M. (1983). *El origen y desarrollo de la relatividad*. Madrid: Alianza editorial.
- Sepúlveda, A. (2011). *Geometría de Minkowsky*. Universidad de Antioquia, Medellin.
- Vargas Durango, M. A. (2009). *Caracterización del espacio-tiempo de Minkowski*. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Velez Pardo, J. A. (2013). *Apuntes sobre la teoría del cambio conceptual*. Tesis de maestría, Universidad nacional de Colombia, Facultad de ciencias, Medellin.
- Villani, A., & Pacca, J. (1987). students spontaneous ideas about speed of light. *Internacional journal of science education*(1), 55-66.
- Young, T. (1804). Experiments and calculations relative to physical optics. *Philosophical transactions of the royal society*, 1-14.

#### 4. Contenidos

La estructura del documento se realizó en cuatro capítulos que se presentan a continuación:

##### **CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En este capítulo se contextualiza al lector sobre la problemática que presenta la enseñanza de la relatividad actualmente y las razones que dan pie a la investigación.

##### **CAPITULO II: CAMBIO CONCEPTUAL EN LA ENSEÑANZA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL**

Allí se presenta la teoría de cambio conceptual como la más apropiada en el proceso de enseñanza de la relatividad especial y se establece la aplicabilidad de ésta en los conceptos específicos que abordará la secuencia didáctica.

### **CAPITULO III: CONCEPTOS ESENCIALES DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA**

En este capítulo se contextualiza la problemática que se presentó a finales del siglo XIX con la física, por la cual se dio origen a la teoría de la relatividad especial. Además, se expondrán los principales conceptos de dicha teoría desarrollados desde una mirada geométrica propuesta por H. Minkowski, estudio que será pertinente para diseñar las actividades.

### **CAPITULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

Aquí se relata el enfoque metodológico que se siguió en el desarrollo de la investigación; dentro del cual se establece la población y se presenta la secuencia didáctica como resultado de esta investigación junto con el documento de recomendaciones al docente.

#### **5. Metodología**

La metodología de esta investigación se sustenta en un enfoque cualitativo, pues su principal característica es que busca comprender un fenómeno a profundidad con el fin de tomar decisiones, transformarlo y desarrollar conocimiento (Sadín Esteban, 2003). De acuerdo con lo anterior, el propósito de esta investigación es realizar una aproximación interpretativa de la situación que presenta la enseñanza de la relatividad especial e identificar sus dificultades a partir de una revisión bibliográfica, también se realiza un estudio formal de la geometría de Minkowski,

recopilando y reconstruyendo los conceptos fundamentales de la relatividad especial a partir de un análisis geométrico, con el fin de construir apropiadamente las actividades. Luego se propone una secuencia didáctica fundamentada en la geometría de Minkowski como herramienta alternativa.

Teniendo en cuenta lo anterior se construyó la siguiente metodología:

- Revisión bibliográfica acerca de la enseñanza de la relatividad especial
- Aplicación de la teoría del aprendizaje más pertinente, al proceso de conceptualización de la relatividad especial.
- Estudio formal de la geometría de Minkowsky.
- Elaboración de la secuencia didáctica.
- Consideraciones finales.

## 6. Conclusiones

- La secuencia didáctica diseñada presenta los principales conceptos de la relatividad especial desde un enfoque geométrico, siendo una herramienta innovadora y alternativa a las metodologías existentes actualmente para abordar la teoría.
- El proceso de elaboración y diseño de las actividades planteadas requiere de una comprensión profunda de los conceptos a abordar, pues, no se puede correr el riesgo de proponer actividades que generen confusiones en la comprensión de los conceptos, o que no se genere un proceso de asimilación o acomodación adecuado.



- para aplicar la secuencia didáctica, los estudiantes requieren unos conocimientos previos acerca del movimiento y su representación gráfica desde la perspectiva newtoniana.
- el docente juega un papel fundamental en la implementación de la secuencia didáctica, pues este cumple una labor de orientador que enfoca a los estudiantes en el cumplimiento de los objetivos.
- la propuesta realizada queda sujeta a implementación y este documento se plantea como referente para posteriores estudios que aporten al desarrollo de la enseñanza de la relatividad especial.

<b>Elaborado por:</b>	<b>Leidy Tatiana Acosta Cuenca</b>
<b>Revisado por:</b>	<b>Yesid Javier Cruz Bonilla</b>

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	<b>06</b>	<b>06</b>	<b>2017</b>
--	-----------	-----------	-------------

## Contenido

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO I.....</b>	<b>3</b>
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Descripción y formulación del problema.....</b>	<b>3</b>
1.2 Investigaciones en torno a la enseñanza de la relatividad especial .....	6
1.2.1 Antecedentes internacionales .....	6
1.2.2 Antecedentes nacionales .....	9
1.2.3 Antecedentes en la universidad pedagógica nacional.....	11
1.3 Objetivos de la investigación .....	15
1.3.1 Objetivo general.....	15
1.3.2 Objetivos específicos.....	15
<b>CAPITULO II .....</b>	<b>16</b>
<b>2. CAMBIO CONCEPTUAL EN LA ENSEÑANZA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL</b>	<b>16</b>
2.1 Teoría del cambio conceptual.....	16
2.2 Aplicación del cambio conceptual en la enseñanza de la relatividad especial.....	20
<b>CAPITULO III.....</b>	<b>24</b>
<b>3. CONCEPTOS ESENCIALES DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL DESDE UNA</b>	<b>24</b>
<b>PERSPECTIVA GEOMÉTRICA .....</b>	<b>24</b>
3.1 Nociones generales.....	24
3.1.1 Origen de la relatividad especial.....	24
3.1.3 Transformaciones de Lorentz .....	29
3.2 Espacio-tiempo de Minkowski: perspectiva geométrica de la TER .....	33
3.2.1 Intervalo relativista .....	33
3.2.2 Construcción de diagramas de Minkowski .....	35
3.2.3 Dilatación del tiempo y contracción del espacio .....	38
3.2.4 Conos de luz, herramienta para comprender la simultaneidad y causalidad relativista....	40
<b>CAPITULO IV .....</b>	<b>44</b>
<b>4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>44</b>
4.1 Metodología.....	44
4.2 Población.....	46

4.3	Secuencia didáctica.....	46
4.3.1	Sesión 1: Representando el espacio-tiempo.....	46
4.3.2	Sesión 2: midiendo la longitud y el tiempo.....	47
4.3.3	Sesión 3: ¿La simultaneidad y causalidad son relativas? .....	48
4.4	Recomendaciones al docente .....	48
	<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>50</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>52</b>
	<b>ANEXOS.....</b>	<b>54</b>

## LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

Tabla 1. Investigaciones internacionales.....	7
Tabla 2. Investigaciones nacionales.....	10
Tabla 3. Investigaciones realizadas en la U.P.N.....	12
Figura 1. Condiciones para la acomodación.....	19
Figura 2. Procesos de cambio conceptual en la TER.....	22
Figura 3. Sistemas de referencia inerciales.....	29
Figura 4. Construcción de diagrama de Minkowski.....	35
Figura 5. Calibración de los ejes $x'$ y $x_0'$ .....	37
Figura 6. Contracción de la longitud.....	38
Figura 7. Dilatación del tiempo.....	39
Figura 8. Cono de luz.....	41
Figura 9.1 Diagrama clásico de pasado, presente y futuro.....	42
Figura 9.2 Diagrama relativista de pasado, presente y futuro.....	42
Figura 10. Diagrama de simultaneidad relativa.....	43

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la física moderna no ha presentado suficiente importancia en las instituciones educativas del país, tanto así que no se encuentra reflejada en los estándares curriculares, por lo cual solo algunas instituciones la abordan. Esta situación ha sido de gran preocupación para algunos investigadores en enseñanza de las ciencias, pues definitivamente trabajar en el aula las teorías vinculadas a la física moderna trae consigo muchos beneficios como, acercar a los estudiantes a la realidad científica existente hoy en día, involucrarse en el desarrollo de nuevas tecnologías a partir de la aplicación de estas teorías, etc.

Por lo anterior es totalmente pertinente abordar la enseñanza de la relatividad especial en la educación media. Pero, también es bien sabido que este tópico de la enseñanza no ha sido muy investigado, lo cual se hace evidente en las metodologías y estrategias pedagógicas que se utilizan en el aula de clase, las cuales en su mayoría presentan un enfoque procedimental, algebraico y poco reflexivo, que dificulta el proceso de aprendizaje de los estudiantes debido a su falta de aplicación evidente en situaciones de la vida cotidiana.

Es por esta razón que se da origen a esta investigación, cuyo propósito es brindar al docente una secuencia didáctica que permita introducir conceptos fundamentales en la relatividad especial, como lo son la dilatación y contracción del espacio-tiempo, la simultaneidad y la causalidad, de una manera gráfica y geométrica, para favorecer la comprensión de éstos, haciéndolos más evidentes a partir de diagramas de Minkowski y conos de luz.

En el primer capítulo del documento se contextualiza al lector sobre el planteamiento del problema que dio origen a esta investigación y los objetivos que se establecieron.

Para diseñar la secuencia didáctica se hace necesario realizar un análisis de la teoría de cambio conceptual, que se ha escogido como referente de la investigación, y su pertinencia en la enseñanza de la relatividad especial. Lo anterior se presenta en el segundo capítulo de este trabajo.

También se hace preciso realizar un análisis de los conceptos esenciales de la relatividad especial dando una interpretación geométrica a partir del uso de diagramas de Minkowski, lo cual se encuentra en el tercer capítulo del documento.

El cuarto capítulo presenta la metodología de investigación utilizada, descripción de la secuencia didáctica y recomendaciones al docente.

Por último, se presentan las conclusiones de la investigación y los anexos en donde se encuentran las actividades de la secuencia didáctica y el apartado de recomendaciones al docente. De esta manera se determina la estructura del documento.

## CAPITULO I

### 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 1.1 Descripción y formulación del problema

Actualmente la enseñanza de las teorías modernas de la física, específicamente de la relatividad, se encuentra un poco relegada del aula de clase. En el contexto nacional esto sucede debido a que dichas temáticas no están incluidas dentro de los estándares planteados por el Ministerio de Educación, por lo cual da la autonomía para que algunas instituciones aborden estos temas sin mayor profundidad y otras ni si quiera los consideren, pues muchas se excusan en que estos tópicos no se tratan en las pruebas saber, por lo cual se pierde su importancia.

Cabe resaltar que esta problemática se presentó también a nivel internacional, pues como lo presenta Gil, Senent, & Solbes, (1986), al realizar un estudio sobre la introducción de la física moderna en la secundaria en Argentina, se evidencia que la enseñanza de los aspectos más modernos de la física se hace de una forma poco estructurada y sin dar claridad a las dificultades que se presentaron en la física clásica para dar inicio a la física moderna. También se indicó que existen abundantes errores conceptuales en los textos y se concluye que los estudiantes no alcanzan una mínima comprensión de los conceptos de la física moderna. Estudios con resultados similares se realizaron en diferentes partes del mundo, por ejemplo, (Hewson, 1982) o (Villani & Pacca, 1987), con lo que se dio pie a un movimiento de renovación para introducir en los planes de aula estos tópicos, considerando que la enseñanza de la relatividad proporciona una visión más realista de cómo se desarrollan las ciencias, muestra la importancia de la física moderna en la sociedad por sus desarrollos tecnológicos así como su influencia en el pensamiento y la cultura de su época, promueve el interés y curiosidad por la explicación de fenómenos relativistas que son llamativos

por su comportamiento contra intuitivo, promueve una mejor comprensión de la física clásica al establecer sus términos de validez y las diferencias entre la física clásica y moderna, entre otros argumentos expuestos en (Pérez & Solbes, 2003).

Ahora bien, aunque progresivamente se ha introducido la relatividad en los currículos escolares, se ha presentado una gran dificultad en su enseñanza, careciendo, además, de investigación didáctica en este campo. Algunas dificultades se deben a que la relatividad requiere una nueva forma de concebir términos tan fuertes como los son el espacio y el tiempo, que están muy arraigados a la mente humana e influenciados también por la visión newtoniana que se les ha impartido a los estudiantes durante toda su trayectoria escolar; como lo describe Pérez y Solbes “... Los conceptos de tiempo, espacio y sus propiedades, así como los distintos sistemas de referencia, se introducen ya desde los niveles inferiores de la secundaria de forma inconexa, acrítica y poco reflexiva. La enseñanza de la teoría de la relatividad se realiza de forma poco clarificadora, sin tener en cuenta las preconcepciones de los alumnos, y sin resaltar su posición en la estructura de la física. En consecuencia, el aprendizaje es escasamente significativo y no se consolidan las nuevas concepciones en los estudiantes. ...” (Pérez & Solbes, 2003) . A esto hay que añadir que es difícil que el estudiante pueda remitirse a experiencias cotidianas para dar explicación a este campo, y tras una explicación formal por parte del profesor es habitual que, como lo menciona Pérez y Solbes “... a) los nuevos conceptos de la relatividad especial no desplacen a los anteriores de la física clásica, sino que se unan a ellos en una interacción compleja; b) El aprendizaje de contenidos específicos es más bien superficial, sin anclajes firmes que permitan resolver situaciones fuera de aquellas desarrolladas en la instrucción formal. ...” (Pérez & Solbes, 2006).



Teniendo en cuenta lo anterior, es evidente que el docente se encuentra inmerso en un gran reto al enseñar la relatividad y por consiguiente requiere de un gran esfuerzo en el que las herramientas didácticas utilizadas juegan un papel importante en la construcción del conocimiento, pues, si estas herramientas tienen limitaciones con respecto a la significación de algunos conceptos relativistas, es claro que el docente también las adoptará, por lo cual, los estudiantes no tendrán un entendimiento profundo del tema.

Por ejemplo se puede evidenciar que en varios libros de texto que sirven de referencia al maestro, en los cuales se hace uso de un enfoque procedimental y algebraico de la relatividad especial, no se genera una claridad de los conceptos, como lo menciona Arriasecq y Greca “...Rodríguez y Pietrocola (1999), analizaron el resultado de la transposición didáctica de la TER en libros de física para el nivel medio de enseñanza y encontraron que, en el momento del estudio, sólo dos obras brasileñas abordaban el tema, en los cuales parecería que los autores toman como referencia para el contenido a artículos de divulgación y textos universitarios. Además, los autores señalan que, como la TER no está contemplada en los contenidos curriculares, en los textos se la suele presentar como un anexo y que un tratamiento superficial de la misma podría generar en los lectores conceptos científicamente inadecuados...” (Arriasecq & Greca, 2004). También, según el análisis realizado por Pérez y Solbes en el cual revisan 30 libros de texto que contienen la relatividad especial, se muestra que “... Los libros de texto utilizados en los niveles inferiores de la secundaria que se han analizado no presentan adecuadamente los conceptos de *tiempo* y *espacio*. En 2º de bachillerato, la enseñanza de la teoría de la relatividad se plantea de forma poco clarificadora, sin tener en cuenta las preconcepciones de los alumnos y sin resaltar su posición en la estructura de la física. Se apoya esta afirmación en datos tales como que el estudio del principio de relatividad galileano no se realiza en más del 80% de los textos de primer nivel, o que en los

textos de 2º de bachillerato se da una importante presencia de la masa relativista (en el 82% de los textos) y muy diversos y contradictorios enfoques sobre su significado. ...” (Pérez & Solbes, 2003).

Estos resultados pueden ser debido al tratamiento superficial de la teoría y a la falta de representaciones gráficas y geométricas, el escaso uso de diagramas de Minkowski, los cuales servirían al estudiante para relacionar los conceptos de una forma más amigable con su experiencia y permitirían contemplar la estructura fundamental de la relatividad especial con mayor profundidad.

Teniendo conciencia de la problemática existente actualmente en la enseñanza de la relatividad especial que se ha mencionado, surge la siguiente pregunta problema, que se toma como punto de partida al desarrollo de la investigación: *¿Qué características se deben tener en cuenta para elaborar una secuencia didáctica, que permita introducir el concepto de espacio-tiempo y algunas de sus consecuencias en la relatividad especial, partiendo del análisis y aplicación de la geometría de Minkowski?*

## **1.2 Investigaciones en torno a la enseñanza de la relatividad especial**

### **1.2.1 Antecedentes internacionales**

Se realizó una revisión de algunas investigaciones producidas fuera del país, en las cuales se pudo evidenciar que la problemática concerniente a la enseñanza de la relatividad se ha presentado en diversos países a causa de la ausencia de la física moderna en los currículos escolares, sin embargo, en algunos países se ha logrado obtener una inclusión de dicha temática a los grados más avanzados del bachillerato. Gracias a esto se han empezado a desarrollar varias

investigaciones en torno a la enseñanza adecuada de la relatividad, a pesar de los pocos estudios en didáctica que se tienen para este campo.

En la tabla 1 se presentan las investigaciones en torno a la enseñanza de la relatividad a nivel internacional, además, se puede evidenciar que España es uno de los países que presentan mayor interés en la investigación en didáctica de este tópico y como factor común de los trabajos analizados se muestra que las prácticas tradicionales de enseñanza han aportado a la dificultad de aprendizaje de los estudiantes, pues no se logra la consolidación de las nuevas concepciones de términos usados frecuentemente como espacio y tiempo.

*Tabla 1: investigaciones internacionales.*

<b>Título</b>	<b>Autor</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Propuesta</b>	<b>Conclusiones</b>
Enseñanza por cambio conceptual: De la física clásica a la relatividad	Alemañ Berenguer, Rafael Andrés y Pérez Selles. (2000) España	Exponer la pertinencia de la teoría de cambio conceptual en la enseñanza de la relatividad	Se plantearon los principales aspectos de este modelo pedagógico para justificar su uso en la enseñanza de la relatividad y luego se planteó un ejemplo práctico vinculado a la transición de la física clásica y la relatividad.	Dado el alto grado de abstracción de los conceptos manejados en esta experiencia didáctica, no ha sido posible efectuar una enseñanza por descubrimiento del alumno, pero la intervención puntual del profesor para introducir los conceptos difíciles, o animar el debate, bien ha valido la pena. El aprendizaje significativo de los alumnos, conforme se desarrollan intelectualmente y acceden a conocimientos más complejos, parece darse por un proceso de cambio conceptual sucesivo en el que un marco intelectual es subsumido por otra visión del mundo.

Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato	Alemañ Berenguer & Pérez Selles (2001) España	Realizar una propuesta para solventar los malentendidos que persisten en la docencia de la relatividad, mejorando las unidades didácticas que se han usado hasta el momento y tomando como base el planteamiento geométrico de Minkowski.	Se desarrolló una unidad didáctica de tres etapas. <i>Inicial:</i> contextualizar avances científicos con bibliografía. <i>Innovación:</i> introducción de conceptos relativistas mediante lectura del artículo de Einstein de 1905. <i>Aplicaciones:</i> el alumno concibe repercusiones de la relatividad en las CTS.	El procedimiento más aconsejable para abordar este ensayo parece que es la detección de las ideas previas del alumno, la modificación de dichas ideas mediante aporte dirigido por el profesor de nueva información y, finalmente, el refuerzo de los conocimientos adquiridos (contracción de longitudes, dilatación de periodos, composición de velocidades, espacio-tiempo de Minkowski y masa y energía relativista) por medio de ejemplos numéricos sencillos. Si bien los resultados numéricos son casi siempre idénticos, el punto de vista conceptual es radicalmente distinto entre el planteamiento espacio-temporal y el tradicional.
La teoría de la relatividad y su didáctica en el bachillerato: análisis de dificultades y una propuesta de tratamiento	Pérez Héctor (2003) España Tesis doctoral	estudiar las características de la enseñanza que se realiza de los fundamentos de la Teoría de la Relatividad en el bachillerato y sentar las bases de una propuesta razonada, que introduzca con mayor eficacia este tema.	se diseñaron instrumentos variados y convergentes (cuestionarios para docentes y estudiantes y análisis de libros de texto) y con ese resultado se realiza una propuesta basada en el modelo de aprendizaje por investigación y el manejo de situaciones problemáticas.	Los alumnos que siguen una enseñanza tradicional, como consecuencia de la misma, muestran un aprendizaje escasamente significativo y se consolidan poco las nuevas concepciones en los estudiantes. Tampoco desarrollan significativamente actitudes positivas hacia la ciencia y su aprendizaje. Los textos utilizados en bachillerato no presentan adecuadamente los conceptos de espacio y tiempo, además, la teoría de la relatividad se presenta de forma poco clarificadora, sin tener en cuenta las preconcepciones de los alumnos, y sin resaltar su posición en la estructura de la física.

De estas investigaciones se pueden destacar como aportes a la presente investigación que la aplicación de la teoría de cambio conceptual tiene grandes ventajas en la enseñanza de la relatividad especial, debido a su carácter poco intuitivo y difícil de comprobar mediante experiencias de la vida cotidiana, por lo cual se hace necesario cambiar las concepciones que muchas veces se han generado debido al sentido común y vivencia de situaciones cotidianas.

También se contempla la gran inconformidad con el tratamiento que hacen los libros de texto sobre la relatividad especial de una forma poco clarificadora e inadecuada al introducir conceptos de espacio y tiempo, lo que motiva al desarrollo de esta investigación con el propósito de dar un tratamiento diferente y alternativo de dicha teoría, precisamente para contrarrestar estas dificultades.

### **1.2.2 Antecedentes nacionales**

La tabla 2 presenta las investigaciones realizadas a nivel nacional que anteceden el desarrollo de este trabajo. Estas investigaciones son muestra de la preocupación existente en la comunidad académica y docente acerca de la dificultad al enseñar las teorías de la física moderna, en especial de la relatividad.

Tabla 2: investigaciones nacionales.

Titulo	Autor	Objetivo	Propuesta	Conclusiones
Relatividad especial: fundamentos y propuesta didáctica para su enseñanza en la escuela secundaria	Restrepo Gabriel (2011) Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Tesis de maestría	hacer un recorrido breve sobre los antecedentes históricos de la Teoría de la Relatividad Especial de Albert Einstein y proponer una didáctica para su enseñanza en la Escuela secundaria.	Se plantearon los fundamentos de la relatividad especial y a continuación se presentó una didáctica para su enseñanza, planteando actividades para que los docentes las adopten.	Se logró desarrollar un recuento de los fundamentos históricos de la Teoría de la Relatividad Especial abordándola desde un punto de vista epistemológico y respaldado por procedimientos matemáticos. Además, se sugirieron algunas pautas para la enseñanza. En efecto, en varios capítulos se presentaron ejemplos que pueden ser empleados por el profesor para hacer más atractivo el aprendizaje de la Relatividad.
Problemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la teoría especial de la relatividad con respecto a los maestros en formación de la licenciatura en matemáticas y física de la universidad de Antioquia	López Posada Yuli Cristina (2012) Universidad de Antioquia. Tesis de pregrado	Analizar las problemáticas relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los maestros en formación pertenecientes a la Licenciatura en Matemáticas y Física con respecto a la teoría especial de la relatividad.	Se realiza un análisis de los resultados obtenidos de la investigación acerca de las dificultades de la enseñanza de la relatividad en docentes en formación. Luego se realiza una propuesta de enseñanza para introducir la relatividad.	Los estudiantes expresan la necesidad de un cambio en la metodología que se emplea en el curso, con el fin de mejorar los procesos de apropiación y conceptualización de la física moderna y en particular de la TER.  Ante una nueva propuesta de enseñanza se encontró que los estudiantes participantes no sólo demuestran mayor disposición, sino que además su grado de asimilación conceptual mejora en comparación con los conocimientos iniciales

De la investigación presentada por Gabriel Restrepo (2011), se toma como sustento importante en el desarrollo de la secuencia didáctica que se presentará en este trabajo, el tratamiento geométrico que se presenta sobre las consecuencias de la relatividad y todo desarrollo conceptual que se desglosa en dicha investigación sobre la relatividad especial.

El trabajo que presenta López (2012) Afirma la postura de esta investigación de generar una metodología alternativa a las tradicionales para la enseñanza de la relatividad, y evidencia que los estudiantes tienen buena disposición e interés ante nuevas propuestas, lo cual es algo muy favorable en el proceso de comprensión de dicha teoría.

### **1.2.3 Antecedentes en la universidad pedagógica nacional**

A continuación, se muestra una sinopsis de los trabajos realizados en la Universidad Pedagógica Nacional, que sirven como referencia para la presente investigación. En estos trabajos se puede ver que existe un gran interés en la inclusión de la relatividad en el currículo escolar del país y al igual que en los antecedentes mostrados anteriormente se ratifican las dificultades que tiene la enseñanza de dicha teoría debido a las metodologías usadas, por lo cual plantean distintas herramientas y propuestas didácticas para subsanar este problema existente.

Tabla 3: Investigaciones realizadas en la U.P.N.

Titulo	Autor	Objetivo	Propuesta	Conclusiones
Implicaciones del tratamiento de los conceptos de masa y masa relativista.	Carvajal Córdoba Fabián Ricardo (2012), Tesis de pregrado.	Realizar una discusión frente a los conceptos de masa y masa relativista mostrando las dificultades y problemáticas que trae el concepto de masa entre la mecánica clásica y la relatividad especial.	Se realiza una discusión acerca del concepto de masa relativista desarrollando el problema de los conceptos científicos. Luego se presentan una serie de instrumentos, aplicados en el aula, que mostrarán las incidencias principales de abordar la teoría cuando no se hace un tratamiento conceptual como el descrito en este trabajo.	Hacer discusiones en clase frente a la naturaleza de la masa en mecánica clásica y relatividad especial puede ser muy bien aprovechada por parte del docente para mejorar la didáctica de clase y la comprensión de las teorías abordadas. Sin duda también para pensar en que la relatividad no está ajena del currículo y que puede ser una oportunidad para traer a colación más elementos trasversales como la historia, la filosofía, la matemática y por supuesto la física misma. Se concluye claramente que hay un fuerte llamado de atención hacia la didáctica en la enseñanza de la física moderna, pues se muestra que un análisis y un tratamiento de las definiciones conceptuales, por ejemplo en la masa, deben ser diferentes a las tratadas hasta ahora, pues como lo han mencionado muchos autores citados, la enseñanza de la física moderna presenta más dificultades que ventajas.
Caracterización del espacio-tiempo de Minkowski	Vargas Durango Mauricio Andrés (2009), tesis de pregrado	Realizar una caracterización del espacio-tiempo de Minkowski partiendo de las concepciones clásicas de la física para evidenciar las rupturas epistemológicas que trajo consigo la teoría de la relatividad.	Se muestra por medio de un estudio epistemológico los conceptos de espacio y tiempo en las concepciones clásicas y modernas de la física; más concretamente dentro de la física clásica y la teoría	-La ruptura epistemológica se lleva en el momento en que se establece que la simultaneidad no es necesariamente absoluta, sino que es relativa cuando las coordenadas espaciales son diferentes. -La geometría de Minkowski es un instrumento geométrico especialmente adaptado para la explicación geométrica de los fenómenos relativistas, de acuerdo con la hipótesis



			<p>de la relatividad. Se realiza un análisis de los momentos cruciales de la ruptura epistemológica que conlleva a cambios en la estructura causal que se reflejan en puntos de vista, creencias, ideologías científicas y condiciones de producción del discurso involucradas en la evolución de estos conceptos.</p>	<p>Einsteniana de la relatividad de la simultaneidad.</p> <p>-El Espacio-tiempo de Minkowski pone de manifiesto de una forma bastante intuitiva la unificación de las coordenadas Espacio-tiempo. Esta unificación fue puesta de manifiesto analíticamente por Einstein, pero la consideración geométrica al suponer que el tiempo es un eje en el mismo plano epistemológico que los ejes espaciales añade un elemento importante desde el punto de vista pedagógico.</p>
<p>Diseño de una herramienta virtual para la enseñanza de la relatividad especial</p>	<p>Pérez Quimbayo Diego Mauricio (2009). Tesis de pregrado.</p>	<p>Diseñar una Herramienta pedagógica que permita una mejor comprensión el concepto de espacio y tiempo, y su posterior transformación a una única estructura cuatridimensional enmarcada en el paradigma epistemológico de la teoría especial de la relatividad desarrollada por Einstein.</p>	<p>Se presentan cada una de las teorías que han sido relevantes para la construcción del concepto de espacio-tiempo. Posteriormente se muestra la importancia que tiene el profundizar en el campo de la enseñanza de teorías complejas, como es el caso de la relatividad. En consecuencia, se muestra la herramienta pedagógica que permitirá dar un enfoque diferente, pero no equivocado, sobre cada uno de los conceptos en</p>	<p>- Se debe reconocer que el desarrollo que ha tenido la tecnología ha influenciado los procesos de enseñanza-aprendizaje, y por ende, ha generado interpretaciones erróneas sobre los conceptos. En consecuencia, la labor docente no debe ser ajena a esta realidad y debe adaptarse a ella con el fin de crear herramientas que permitan una adecuada interpretación de los fenómenos.</p> <p>- El diseño de una herramienta virtual, en este caso enfocado especialmente al análisis de algunos fenómenos inscritos en el marco de la relatividad especial, no debe centrarse únicamente en la simulación parcial o total de dichos fenómenos, sino que debe ser acompañado por un proceso pedagógico que permita, en conjunto con el software, una</p>

			<p>cuestión, y las repercusiones que ha traído la transformación de éstos. Finalmente se realiza el análisis de la herramienta pedagógica, queriendo con esto aportar en la conceptualización de algunos elementos importantes de la teoría de la Relatividad.</p>	<p>correcta interpretación de los fenómenos.</p> <p>- El diseño de una herramienta virtual deja abierta la posibilidad de recrear ambientes que, por un lado, se enfocan a la mejor interpretación de los fenómenos que no son cercanos a la experiencia cotidiana, y por otro, despiertan el interés por el estudio de teorías modernas en las cuales se presentan situaciones tan interesantes como las que proporciona la Teoría Especial de la Relatividad.</p>
--	--	--	--	---

Los anteriores trabajos son de gran aporte para el desarrollo de esta investigación, pues muestran una de las grandes dificultades de la enseñanza en la relatividad especial que es el tratamiento inadecuado de términos relativistas, como lo expone Carvajal (2012) específicamente con la masa relativista, pero que se puede extender su argumento a los demás conceptos como el espacio-tiempo y los efectos relativistas. Por otro lado, Vargas (2009) presenta un trabajo que sirve como referente en cuanto al desarrollo epistemológico que se hace del concepto de espacio-tiempo, totalmente acorde con esta investigación para establecer adecuadamente los conceptos que se quieren abordar y la importancia que tiene el espacio-tiempo de Minkowsky en esta conceptualización. Por último, en el trabajo de Pérez (2009) se ratifica la pertinencia de elaborar metodologías de enseñanza de la relatividad alternas a las tradicionales, evidenciando las ventajas que tiene una herramienta virtual en cuanto a su facilidad de recrear ambientes que generan una mejor interpretación de fenómenos, además de despertar mayor interés por parte de los estudiantes hacia las teorías modernas de la física. Lo anterior se adopta en esta investigación considerando especialmente el carácter gráfico que posee la herramienta virtual, de manera que aunque no se

pretende diseñar una en esta investigación, es indiscutible que el carácter geométrico y visual es uno de los más importantes en el desarrollo y diseño de la secuencia de actividades que se propone.

### **1.3 Objetivos de la investigación**

#### **1.3.1 Objetivo general**

Diseñar una secuencia didáctica a partir de actividades que permitan introducir el concepto de espacio-tiempo y algunas de sus consecuencias en la relatividad especial, tomando como fundamento el análisis de la geometría de Minkowski.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

- Identificar una teoría de aprendizaje pertinente al proceso de conceptualización de la relatividad especial en los estudiantes y establecer su aplicación en los conceptos involucrados.
- Realizar un análisis de la dilatación del tiempo, contracción del espacio, simultaneidad y causalidad relativista, desde la geometría de Minkowski.
- Plantear unas recomendaciones de aplicación de la secuencia didáctica como apoyo para el docente.

## CAPITULO II

### 2. CAMBIO CONCEPTUAL EN LA ENSEÑANZA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

#### 2.1 Teoría del cambio conceptual

Al considerar los problemas que se mencionan en el anterior capítulo tales como la introducción poco reflexiva y acrítica de los conceptos de espacio y tiempo, la poca importancia que se le atribuye a las ideas previas del estudiante y el tratamiento inadecuado de algunos conceptos de la teoría que se muestra en los libros de texto, se evidencia que las metodologías de enseñanza no han sido las más adecuadas para abordar la relatividad especial, por lo que se sugiere tomar en consideración la teoría del aprendizaje por cambio conceptual como fundamento para la construcción de una herramienta didáctica que permita introducir los conceptos más relevantes de la TER en la educación media.

El aprendizaje por cambio conceptual surgió debido a la recurrente existencia de concepciones erradas de ciencias en estudiantes que previamente tuvieron un proceso de enseñanza aprendizaje al respecto<sup>1</sup>, lo cual dio lugar a realizar diferentes investigaciones desarrolladas desde finales de los años 70. En dichas investigaciones se encontraron varios aspectos importantes como los que se mencionan a continuación: Las ideas erradas están relacionadas con el conocimiento intuitivo y la frecuente abstracción de experiencias de la vida cotidiana, reestructurar u olvidar

---

<sup>1</sup> Para conocer el análisis de estas concepciones erradas se sugiere revisar el numeral 1.1 de “Apuntes sobre la teoría del cambio conceptual” (Velez Pardo, 2013).

conceptos que se forman en la infancia y que son aparentemente fáciles de sustituir, es una labor de gran dificultad. Las concepciones erradas son resultado de un aprendizaje previo ya sea dado por la experiencia cotidiana o un proceso de instrucción, o como lo menciona Vélez en su trabajo *apuntes sobre la teoría del cambio conceptual*: “En general podría afirmarse que las malas concepciones consisten en aplicar conceptos, si no válidos, por lo menos perfectamente funcionales y satisfactorios para el individuo en un contexto, a contextos diferentes en los que su aplicación conduce al error.” (Velez Pardo, 2013).

Consolidando estas investigaciones, en el año 1982 Posner, Strike, Hewson y Gertzog publicaron un artículo titulado “*La acomodación de un concepto científico: hacia una teoría del cambio conceptual*”. Allí se establece lo que se conoce como la teoría clásica del cambio conceptual. En esta teoría se concibe que el aprendizaje se da a través de una interacción entre lo que el sujeto ya sabe y lo que se le enseña, además, enfatiza que el aprendizaje es una actividad racional, lo que quiere decir que aprender es fundamentalmente comprender y aceptar ideas porque parecen inteligibles y racionales, y dicho proceso de aprendizaje requiere de la indagación. En el aprendizaje por cambio conceptual se establecen dos procesos denominados asimilación<sup>2</sup> y acomodación<sup>3</sup>, que convenientemente coinciden con conceptos propuestos por Piaget ya que de allí provienen, sin comprometer el resto de la teoría.

Cuando el cambio conceptual se genera por *asimilación* lo que ocurre es que el estudiante construye conocimiento tomando como base los conceptos ya aceptados, de forma que no necesita desecharlos porque están acordes con el nuevo concepto, es decir, la nueva idea puede simplemente

---

<sup>2</sup> Piaget plantea la asimilación indicando que ninguna conducta implica un comienzo absoluto, siempre parte de estructuras anteriores, por lo cual equivale a asimilar nuevos elementos a estas estructuras ya conocidas.

<sup>3</sup> Para Piaget los elementos generan resistencia a ser asimilados, por lo cual, la persona debe modificar su estructura de conocimiento para que pueda dar cuenta de nuevos elementos, Esta modificación es lo que se llama acomodación.

añadirse a lo que ya está establecido a su estructura cognitiva generando una ampliación de las creencias del estudiante. Para este proceso de asimilación se puede establecer una analogía con los periodos de desarrollo de “ciencia normal” que propone Kuhn<sup>4</sup>, que básicamente indica que en el progreso científico se dan continuos periodos en los cuales se genera desarrollo por acumulación de conocimiento, en donde la actividad científica se forma de manera muy similar a la creada con las anteriores teorías aceptadas, utilizando sus mismos métodos y creencias que han sido aprobados previamente por la comunidad científica.

Si los conceptos disponibles en la estructura cognitiva del estudiante no son suficientes para que él logre construir adecuadamente nuevo conocimiento, se da paso al proceso de **acomodación**. Este proceso es más radical que la asimilación, pues al no tener compatibilidad entre las ideas previas y las nuevas ideas se hace necesario generar un cambio en la estructura interna del estudiante, de manera que las ideas previas pierdan validez y sean remplazadas por nuevas ideas, que permitan dar explicaciones validas a los conceptos que no las tenían desde las ideas previas.

Para que se genere con éxito el proceso de acomodación en un estudiante, se hace necesario tener en cuenta las condiciones relacionadas en la figura 1 que se sustenta en el numeral 2.2 de (Velez Pardo, 2013).

---

<sup>4</sup> Este concepto lo desarrolla en su obra “*La estructura de las revoluciones científicas*” (kuhn, 1971)

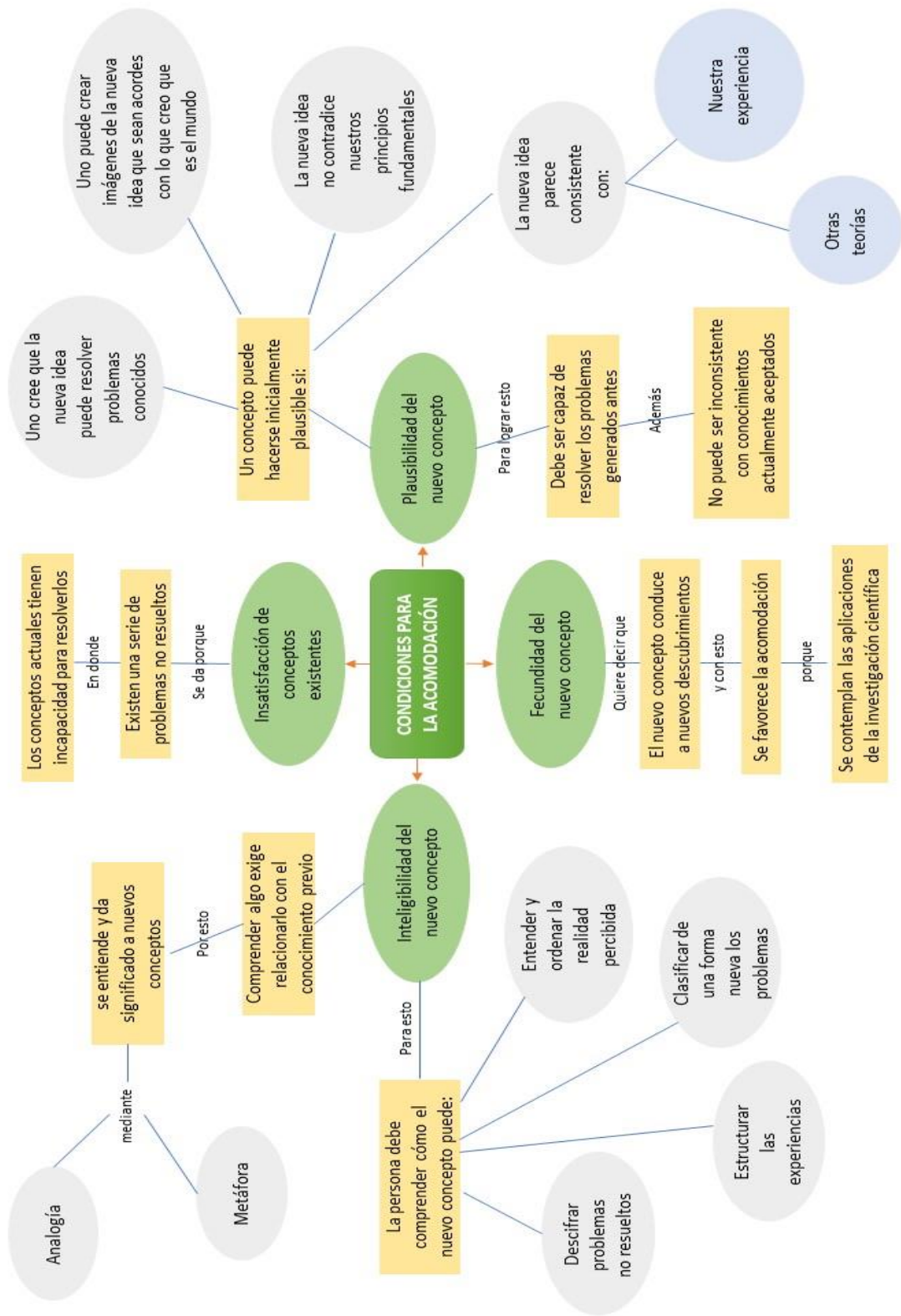


Figura 1. Condiciones para la acomodación

## 2.2 Aplicación del cambio conceptual en la enseñanza de la relatividad especial

Considerando las características del cambio conceptual anteriormente presentadas, se puede identificar la afinidad de dicha teoría con la enseñanza de algunos conceptos de la relatividad especial. A continuación, se mencionarán estas relaciones que serán totalmente pertinentes para el planteamiento de la propuesta de enseñanza que responde al objetivo principal este trabajo.

Las significaciones de espacio y tiempo que los estudiantes de secundaria han elaborado durante su proceso de aprendizaje tienen concordancia con una visión mecanicista, en la cual, ambos conceptos hacen referencia a magnitudes universales, continuas, uniformes y homogéneas, que no se ven alteradas por la presencia de cuerpos y son independientes de los observadores. Debido a esta postura el estudiante asume como real únicamente los valores de longitud y tiempo medidos tomándose a sí mismo como marco de referencia, pues, de lo contrario solo admite que las mediciones para espacio y tiempo ‘parecen’ diferentes, pero en realidad son absolutas y tienen un único valor real (Pérez & Solbes, 2003).

Al confrontar este concepto con el propuesto por la teoría de la relatividad se puede generar un conflicto, ya que en ésta se propone un espacio-tiempo como un nuevo escenario geométrico en donde las dos magnitudes pasan a ser una sola, por lo cual dependen una de la otra, además no se consideran independientemente definitivas e irrefutables, pues, la presencia de un observador las transforma, sin embargo, las medidas obtenidas por diferentes observadores inerciales para longitud y tiempo, se estiman igual de reales y válidas. En otras palabras, como lo menciona Alonso Sepúlveda en su trabajo *Geometría de Minkowski* “Espacio y tiempo por separado no son absolutos pero el espacio-tiempo es un absoluto” (Sepúlveda, 2011).



Este conflicto permite un cambio conceptual en donde se genere un proceso de acomodación, pues, evidentemente la asimilación no aplicaría en este caso debido a que los conceptos disponibles en la estructura cognitiva del estudiante son insuficientes para construir el nuevo conocimiento y no tienen coherencia ni continuidad uno con otro. Se hace necesaria la acomodación ya que el estudiante debe remplazar sus ideas centrales para lograr la exitosa construcción de esta nueva idea.

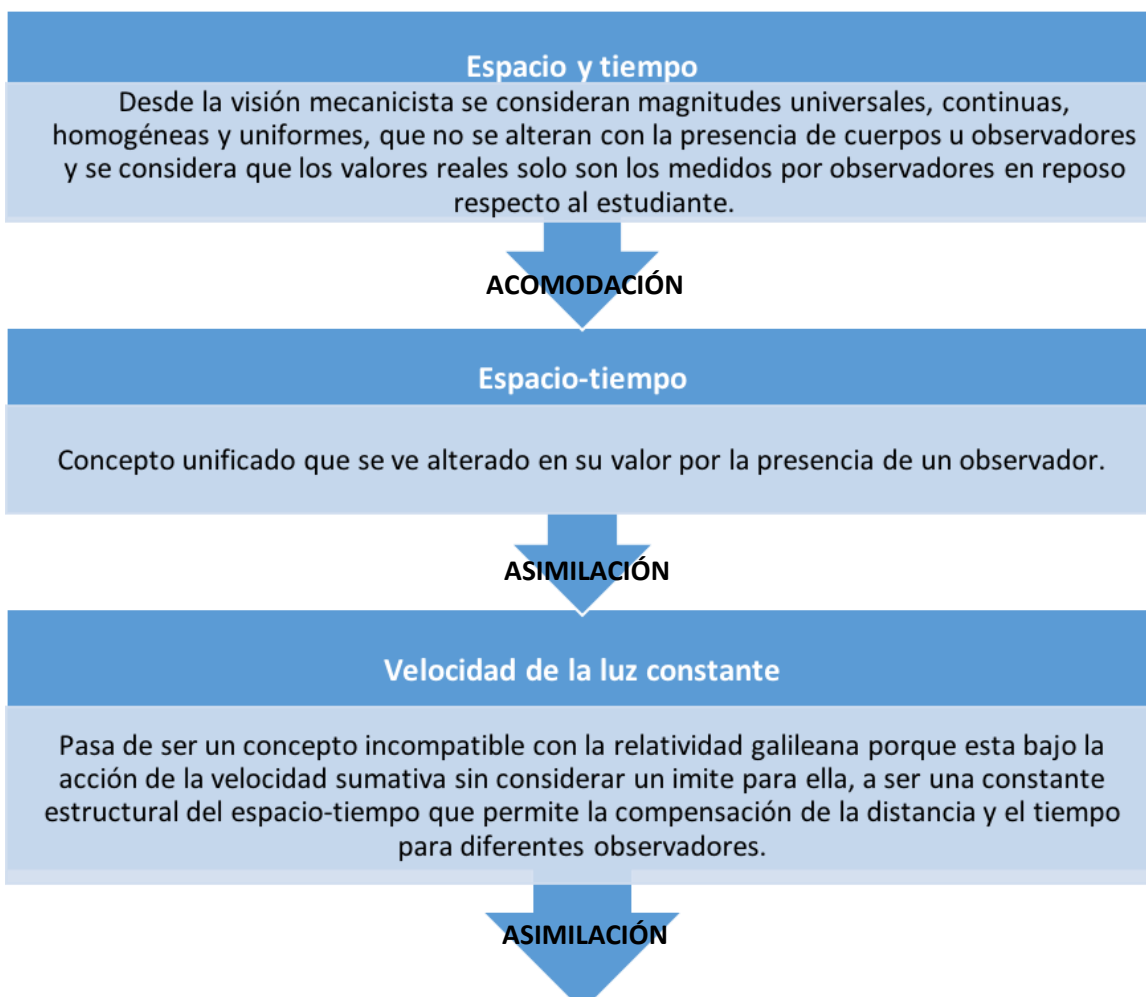
La constancia de la velocidad de la luz es otra idea que requiere de un proceso de asimilación, pues los estudiantes, aunque admiten este concepto, consideran que dicho valor no tiene alteración, incluso si la luz se está propagando en diferentes medios (Pérez & Solbes, 2003). Por lo anterior es importante complementar esta idea en los estudiantes y determinar los límites de validez de este concepto.

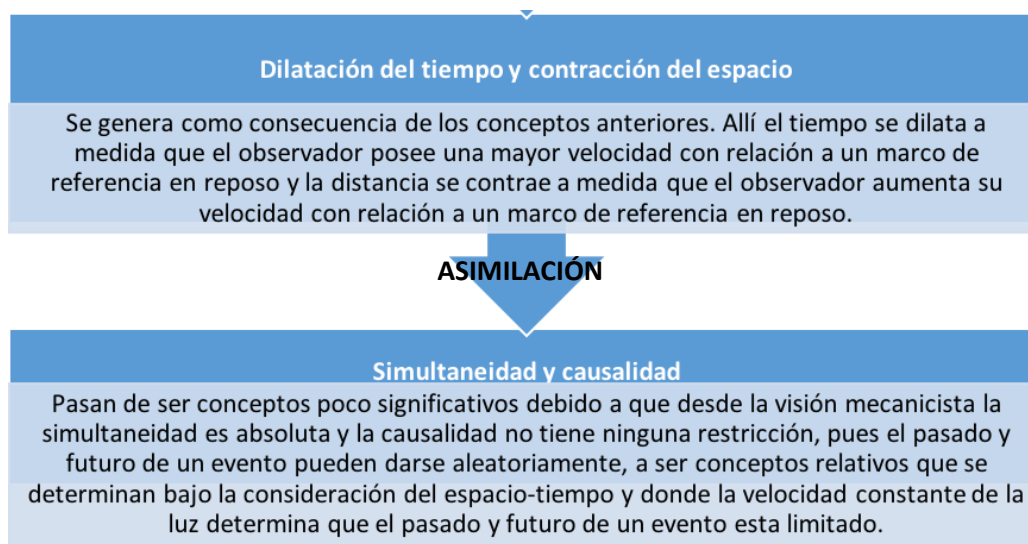
La dilatación del tiempo y contracción del espacio son consecuencias directas de los conceptos de espacio-tiempo y constancia de la velocidad de la luz, por ende, los procesos de cambio conceptual anteriormente mencionados permitirán realizar una correcta asimilación de estas nuevas ideas como algo real y medible, a diferencia de las concepciones que se presentan actualmente en estudiantes, en donde plantean que estos conceptos pueden ser causados por distorsiones en la percepción del observador (Aleman & Pérez, 2001).

Por último se pueden destacar, también, los conceptos de simultaneidad y causalidad, ya que actualmente los estudiantes consideran indistintamente que la simultaneidad de diversos eventos es común para cualquier observador y que varios eventos simultáneos tendrán siempre las mismas posibilidades para su pasado y futuro en el espacio y en el tiempo, pero siguiendo la continuidad del proceso de cambio conceptual se replantearán estas concepciones mediante un proceso de asimilación, pues, teniendo clara la naturaleza del espacio-tiempo y los conceptos de

dilatación del tiempo y contracción de la longitud, se podrá establecer que la simultaneidad y causalidad terminan siendo conceptos relativos a la velocidad del marco de referencia inercial que se esté considerando.

En la figura 2 se presenta el proceso de cambio conceptual que se puede generar en los estudiantes mediante herramientas didácticas, en este caso puntual a partir del desarrollo de las actividades que se plantearán en la secuencia didáctica, junto con un buen acompañamiento del docente para lograr la construcción de algunos conceptos fundamentales de la relatividad especial.





*figura 2. procesos de cambio conceptual en la TER*

Como se pudo observar, la teoría del cambio conceptual es totalmente pertinente para la enseñanza de la TER en la educación media, esto debido al carácter abstracto de la TER y de difícil comprobación en situaciones de la vida cotidiana. Dicho lo anterior, es importante desarrollar procesos de asimilación y acomodación correctamente para no generar confusiones en la conceptualización del estudiante, y que a su vez estas ocasionen ideas temporales y faltas de significado.

## CAPITULO III

### 3. CONCEPTOS ESENCIALES DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

En este capítulo se contextualiza la problemática que se presentó a finales del siglo XIX con la física, por la cual se dio origen a la teoría de la relatividad especial. Además, se expondrán los principales conceptos de dicha teoría desarrollados desde una mirada geométrica propuesta por H. Minkowski, estudio que será pertinente para desarrollar la investigación.

#### 3.1 Nociones generales

##### 3.1.1 Origen de la relatividad especial

A partir del 1881 el estadounidense A. Michelson realizó varios experimentos ópticos en los cuales medía el tiempo que gastaba un rayo de luz en desplazarse de un punto a otro sobre la superficie terrestre, dichos tiempos deberían variar si el rayo se desplazaba en el mismo sentido del movimiento de la tierra o en el sentido contrario, pero, extrañamente los resultados que arrojaron los experimentos eran siempre los mismos, es decir, que no se evidenciaba diferencia alguna en los tiempos tomados en ambos sentidos<sup>5</sup>. Dichos resultados condujeron a la llamada crisis de la física clásica pues no coincidían con las posturas aceptadas hasta el momento propuestas por Fresnel y Young en donde se consideraba la existencia del llamado éter luminífero,

---

<sup>5</sup> Para profundizar en la realización de este importante experimento realizado por A. Michelson y E. Morley en 1887 se sugiere revisar (Michelson & Morley, 1887)

el cual generaba una pequeña o nula resistencia, por lo que dependiendo del sentido que tuviera el rayo de luz, los tiempos medidos debería ser diferentes.

Inicialmente el primero que trato de resolver esta crisis fue el físico H. Lorentz, considerando ciertas expresiones matemáticas para las que utilizó valores auxiliares carentes de significado experimental.

Pero, estos problemas no solamente estaban presentes en la óptica, pues también se encontraban muchas dificultades para dar explicación a los fenómenos electromagnéticos, no se tenía un criterio definido acerca de los principios teóricos que debían tenerse en cuenta para desarrollar una electrodinámica, por lo cual se presentaban muchas versiones, que aportaron en alguna medida al desarrollo de la teoría de Maxwell.

Inspirado principalmente en los trabajos de Faraday, Maxwell propone su teoría electromagnética<sup>6</sup>, en la cual considera un éter que permea todo el espacio como el medio en común de los fenómenos ópticos y electromagnéticos, además se presenta claramente la luz como un fenómeno electromagnético más. En esta teoría se establece la relación entre la óptica y la electrodinámica dando pie a tratar los problemas anteriormente mencionados desde una perspectiva electromagnética.

Esta teoría de Maxwell presento algunos inconvenientes, pues, aunque propuso las llamadas “ecuaciones de Maxwell” que describían la variación del campo electromagnético (en este caso también denominado éter), no logro hacer una propuesta satisfactoria alrededor de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. Tampoco dedujo los resultados de Fresnel, pues él

---

<sup>6</sup> Presenta una teoría unificada de los fenómenos eléctricos y magnéticos que cambia radicalmente el estado de la investigación que se tenía en el momento acerca de estos fenómenos. Los trabajos más importantes al respecto los aborda en *A Treatise on electricity and magnetism* (Maxwell, 1873)

contemplaba la materia como una modificación del éter que difería únicamente en algunos valores como el de permeabilidad magnética, lo cual implicaba que el éter y la materia se movían unánimemente por lo que no tendría sentido un coeficiente de arrastre.

En 1892 el físico H. Lorentz presenta sus desarrollos alrededor de la electrodinámica con su artículo "*La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*". Allí daba gran importancia al significado del éter, para lo cual expresaba que el éter no era afectado por la materia, era inamovible y desprovisto de propiedades físicas. Para Lorentz, las ecuaciones de Maxwell no podían desligarse del éter, ya que éstas eran válidas solamente en un sistema de referencia en reposo con relación al éter.

Allí convergía el inconveniente de la teoría de Maxwell a la cual dio solución Lorentz, pues su interés radicaba en lograr una expresión de dichas ecuaciones de forma tal que fueran válidas para un sistema de referencia que estuviese en movimiento con respecto al éter, o dicho de otra forma, que se ajustara al sistema de referencia que más utilizaban en sus mediciones, éste es la tierra. Al realizar sus desarrollos matemáticos, Lorentz introduce una transformación para la coordenada temporal que difería de la planteada por la mecánica newtoniana, Aunque dicha transformación no contenía ningún significado físico, simplemente la utilizo como una herramienta matemática que facilitaría la solución de las ecuaciones.

Esta teoría que desarrollo Lorentz daba resultados satisfactorios pero no completos, ya que seguían existiendo dificultades para explicar el experimento de Michelson y Morley, por lo cual siguió sus estudios presentando un nuevo artículo ese mismo año titulado "*the relative motion of the earth and the ether*" (Lorentz, 1892) en el cual daba a conocer su hipótesis de que la longitud de los cuerpos en movimiento a través del éter se contraía en la dirección del movimiento y en

congruencia con lo planteado tiempo atrás por Fitzgerald, atribuía este efecto a las fuerzas intermoleculares que se veían influenciadas con respecto al éter.

Estas ideas y teorías que llevaron años de desarrollo fueron la base para establecer tiempo después una teoría que sin lugar a duda fue revolucionaria, pues daría solución a todos estos inconvenientes que se presentaban con las teorías clásicas sin necesidad de recurrir a la existencia de un medio (o éter) del que no se había podido obtener mayor información y que también presentaba una serie de dificultades al tratar de explicar sus características.

En 1905 el físico Albert Einstein publica su artículo titulado “*On the electrodynamic of moving bodies*” (Einstein, 1905), en el cual presenta la solución a todos los conflictos planteados anteriormente y que la física clásica no habría obtenido de ninguna manera, dando un giro total a sus concepciones, pues, como lo menciona en su artículo:

La introducción de un “éter luminoso” resultará superflua, en cuanto que la interpretación a desarrollar no trata de un “espacio en reposo absoluto” dotado de propiedades particulares, ni le asigna vector velocidad al punto del espacio vacío donde acontecen los procesos electromagnéticos.

La teoría a desarrollar se apoya - como cualquier otra electrodinámica - sobre la cinemática del cuerpo rígido, ya que los enunciados de cada una de tales teorías se refieren a relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos.

En la insuficiente consideración de esta circunstancia está la raíz de las dificultades con que actualmente debe luchar la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. (Einstein, 1905, pág. 2)

### 3.1.2 Postulados de la relatividad especial

A partir del trabajo de Einstein se establecen los dos principios fundamentales de la relatividad que se presentan a continuación:

1. Las leyes fundamentales de la física deben tener la misma forma en todos los marcos inerciales.

Cuando se asume que las leyes físicas no cambian en su forma al pasar de un marco inercial a otro, quiere decir que estas leyes deben ser covariantes respecto al sistema de transformaciones empleado. Además, implica que no existe un marco de referencia absoluto con respecto al cual se puedan comparar todos los movimientos, así como lo planteaba la física clásica (La mecánica con el espacio absoluto y el electromagnetismo con el éter), es decir, no es posible distinguir el movimiento uniforme si no se compara con un marco de referencia, en este sentido, todos los marcos de referencia inerciales son válidos para describir cualquier fenómeno físico.

2. La luz se propaga en el vacío siempre con una velocidad  $c$ , independiente de la velocidad de la fuente que la emite y del observador.

Este postulado es la ruptura de la relatividad clásica, pues contradice el principio de adición de velocidades de Galileo en el cual sí era posible obtener valores mayores a la velocidad de la luz. Al aceptar este postulado se da fácilmente explicación al problema que presentaba el experimento de Michelson y Morley, pues no habrá una diferencia de tiempos en la llegada de las señales luminosas a causa del movimiento de la tierra.



### 3.1.3 Transformaciones de Lorentz

Como se mencionaba en el apartado anterior, los resultados nulos de los diferentes experimentos que se hicieron para determinar el efecto producido por el movimiento de translación de la tierra y la no covarianza de las ecuaciones de Maxwell ante las transformaciones galileanas, llevaron a los físicos de la época a sugerir un replanteamiento de los conceptos que fundamentaban la teoría electromagnética. Para esto se podría proseguir de dos maneras: Se modificaban las ecuaciones de Maxwell para que cumplieran con la covarianza ante las transformaciones de Galileo, o se corregían dichas transformaciones de forma que permitieran la covarianza de las ecuaciones del electromagnetismo y además la velocidad de la luz fuera constante para cualquier marco de referencia inercial. Einstein eligió la segunda opción, aunque fue Lorentz el primero que descubrió las transformaciones adecuadas, pero sin darse cuenta que éstas contenían un cambio trascendental en las concepciones de tiempo y espacio que había hasta ese momento.

A continuación, se presenta una deducción de este nuevo sistema de ecuaciones:

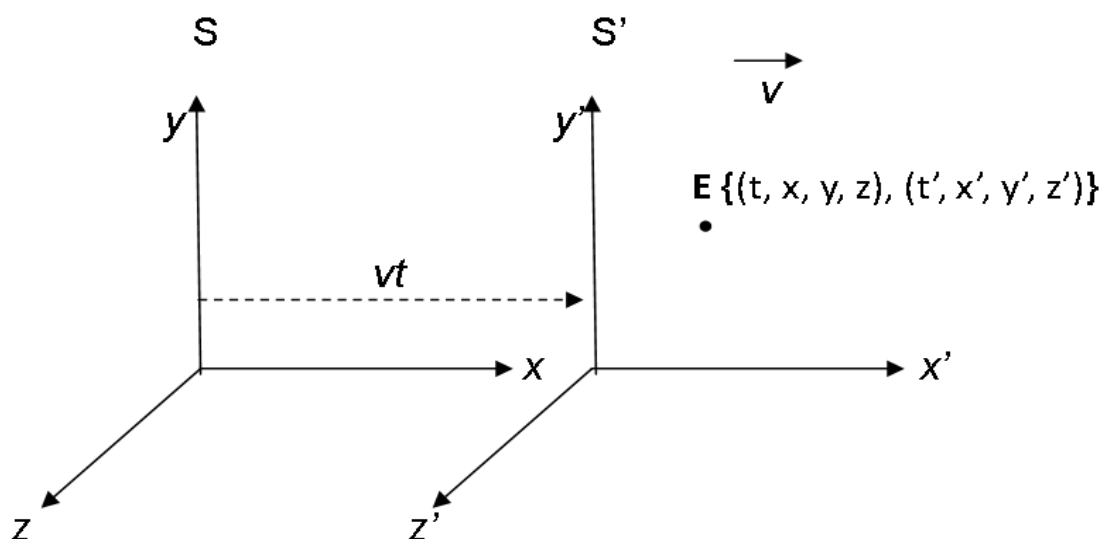


Figura 3: Sistemas de referencia inerciales.

En la figura 3 se observan dos sistemas de referencia para un evento E, en donde S' se mueve con velocidad  $v$  respecto a S. Las coordenadas de un evento E serán  $(t, x, y, z)$  en S y  $(t', x', y', z')$  en S'.

Por facilidad se considera que S' solo se moverá en la dirección  $x$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned}y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{1}$$

Partiendo del hecho que la relación entre los dos sistemas de referencia es lineal, consideramos:

$$x' = Ax + By + Cz + Dt + E\tag{2}$$

En un instante determinado S marca  $t$ , en ese momento el origen de S' está en  $x = vt$  respecto a S y en  $x' = 0$  respecto a S'. Reemplazando estos valores en (2) se obtiene:

$$\begin{aligned}0 &= A(vt) + By + Cz + Dt + E \\(By + Cz + Dt + E) &= -A(vt)\end{aligned}\tag{3}$$

Ahora reemplazamos (3) en (2) para llegar a:

$$\begin{aligned}x' &= Ax - A(vt) \\x' &= A(x - vt)\end{aligned}\tag{4}$$

Es importante mencionar que los sistemas de referencia son simétricos, es decir si S' se mueve hacia la derecha tendrá una velocidad de  $v$  con respecto a S, pero si se mueve en sentido contrario tendrá una velocidad de  $-v$ , Por lo cual esta condición también se verá reflejada en las ecuaciones de transformación, en donde es suficiente cambiar el signo de la velocidad para pasar de un sistema a otro. Teniendo en cuenta esto, se tiene:

$$x = A(x' + vt') \quad (5)$$

Ahora es necesario hallar el valor de A que se denotará luego como el factor de Lorentz ( $\gamma$ ). Para esto será necesario considerar el segundo postulado de la TER (constancia de la velocidad de la luz).

Si se piensa en la distancia que recorre un haz de luz que viaja en la dirección del eje x, se tiene que para S será  $x = ct$  y para S' será  $x' = ct'$ . Con lo anterior se realiza el siguiente procedimiento para S':

$$x' = ct'$$

$$\gamma(x - vt) = ct'$$

$$\gamma(ct - vt) = ct' \quad (6)$$

Y para S:

$$x = ct$$

$$\gamma(x' + vt') = ct$$

$$\gamma(ct' + vt') = ct \quad (7)$$

Si se toman (6) y (7) y se multiplican entre sí con el fin de encontrar el valor de  $\gamma$ :

$$\gamma t(c - v)\gamma t'(c + v) = (ct')(ct)$$

$$\gamma^2 tt'(c - v)(c + v) = c^2 t't$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{(c^2 - v^2)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (8)$$

Por último, se encontrará la transformación correspondiente al tiempo. Se toma (5), se reemplaza (4) en ella y se prosigue de la siguiente forma:

$$x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt']$$

$$\frac{x}{\gamma^2} = (x - vt) + \frac{vt'}{\gamma}$$

$$x \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (x - vt) + \frac{vt'}{\gamma}$$

$$\frac{-xv^2}{c^2} = -vt + \frac{vt'}{\gamma}$$

$$\frac{-xv}{c^2} + t = \frac{t'}{\gamma}$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \quad (9)$$

Y por simetría se tiene:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right) \quad (10)$$

Estas transformaciones propuestas inicialmente por Lorentz traen consigo un cambio en la concepción de espacio y tiempo, pues la velocidad de la luz se introduce en estas transformaciones, de manera que las velocidades medidas desde cualquier observador nunca van a sobrepasar este valor, por lo cual se refutan las transformaciones galileanas que no presentan ningún límite para las velocidades medidas desde cualquier marco de referencia. Lo anterior implica que el espacio y

el tiempo experimentan un cambio, pues debe existir una contracción del espacio o una dilatación del tiempo para que sea posible respetar este límite.

### **3.2 Espacio-tiempo de Minkowski: perspectiva geométrica de la TER**

En el año 1908 el matemático Hermann Minkowski presenta una conferencia ante la asamblea de científicos naturales en colonia titulada “Espacio-tiempo”. Allí propone que la relatividad especial se puede entender mejor a través de una geometría no euclidiana, a partir de esto presenta un nuevo escenario geométrico de cuatro dimensiones que le denomino espacio-tiempo.

La geometría del espacio-tiempo responde a cuatro ejes de coordenadas espaciales, pues en los diagramas de Minkowski será usual representar el eje temporal como  $ct$ , es decir, el tiempo se podrá medir en las mismas unidades de distancia. Lo anterior facilitará la calibración de los mismos.

La velocidad de la luz es una constante estructural de esta geometría, pues la línea de universo de un haz de luz tendrá la mayor pendiente con relación a la línea de universo de cualquier otro objeto, lo cual se debe a que dicha velocidad es un límite en el universo. Asimismo, al considerar el segundo postulado de la TER se marcará una radical diferencia entre las concepciones absolutas del tiempo y el espacio que se concebían desde una mirada clásica, de forma que en cualquier caso  $c$  sea siempre constante, como se mencionó en el apartado anterior.

#### **3.2.1 Intervalo relativista**

Se definen dos marcos de referencia inerciales A y A' en los cuales viaja un rayo de luz de un punto  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  a un punto  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ ; si se considera que la distancia espacial entre dichos puntos medida desde A es  $r$ , se tiene que:

$$r = c(t_2 - t_1)$$

Ahora, si se tiene en cuenta el teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2; \text{ Por lo cual}$$

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$$

Si se realiza el mismo procedimiento para establecer la distancia medida desde A' se obtiene

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0; \text{ En donde}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2$$

Como se puede observar esta expresión es un invariante ante cualquier marco de referencia inercial y se conoce como el intervalo relativista así:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2 \quad (11)$$

Dicho intervalo representaría físicamente un diferencial de espacio-tiempo, el cual determinará la métrica del Minkowsky y será de gran utilidad para calibración de los ejes coordenados en los diagramas de espacio-tiempo que se presentarán a continuación.

Si se toman los ejes  $y$  y  $z$  como constantes desde los diferentes marcos de referencia inerciales la expresión (11) se reducirá a:

$$ds^2 = dx^2 - (cdt)^2 \quad (12)$$

### 3.2.2 Construcción de diagramas de Minkowski

A continuación, se presenta la construcción de los diagramas de Minkowski que será la herramienta principal que se utilizará en la secuencia didáctica, ya que dichos diagramas permiten representar gráficamente eventos que suceden en el espacio-tiempo relativista. La figura 4 muestra un diagrama de Minkowski o también llamado de espacio-tiempo, en donde el eje horizontal representa una coordenada del espacio y el eje vertical representa la coordenada relacionada al tiempo que, para poder ser medida en las mismas unidades de distancia  $x_0 = ct$ , allí  $c$  es la constante de la velocidad de la luz. La línea de universo de un haz de luz se representa con la recta cuya ecuación es  $x = ct$  lo que indica que estará a  $45^\circ$  del eje  $x$ , según esto cualquier línea de universo de algún cuerpo que viaje con velocidad constante en el tiempo debe tener un ángulo mayor a  $45^\circ$  con respecto a  $x$ , esto se debe a que dicha línea de universo estará descrita por  $x = vt$ , en donde  $v < c$  lo que se da a propósito del segundo postulado de la TER.

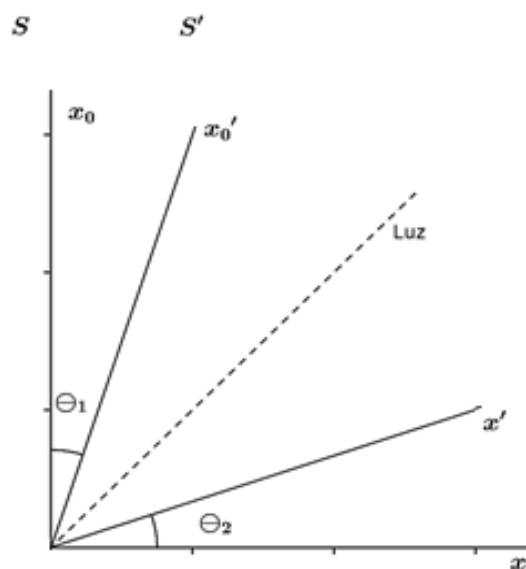


Figura 4. Construcción de diagrama de Minkowski.

Para la construcción de un diagrama de Minkowski con sistemas de referencia en movimiento uniforme S y S' se tiene en cuenta que el eje  $x_0'$  será la línea de universo de un objeto que se mueve con velocidad constante  $v$  y cuya ecuación es:

$$x = vt$$

Para ponerlo en términos de los ejes  $x$  y  $x_0$  consideramos que  $\beta = v/c$ , por lo cual:

$$x = \beta x_0 \quad (13)$$

Ahora, el eje  $x'$  serán todos los sucesos que se dan con  $t'=0$  así que para encontrar la ecuación correspondiente a este eje se retoma (9) así:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{xv}{c^2} \right) = 0$$

$$t = \frac{xv}{c^2}$$

$$ct = \beta x$$

$$x_0 = \beta x \quad (14)$$

Si se analizan los ángulos que forman los ejes de S' con sus correspondientes en S, se evidencia que:

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{x_0}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (13), se obtiene

$$\theta_1 = \tan^{-1} \beta \quad (15)$$

Por otro lado

$$\tan\theta_2 = \frac{x_0}{x}$$

Y considerando la ecuación del eje  $x'$  (14), se consigue

$$\theta_2 = \tan^{-1} \beta \quad (16)$$



Con lo anterior se deduce que en la construcción de los diagramas de Minkowski para observadores en movimiento uniforme  $\theta_1 = \theta_2$ .

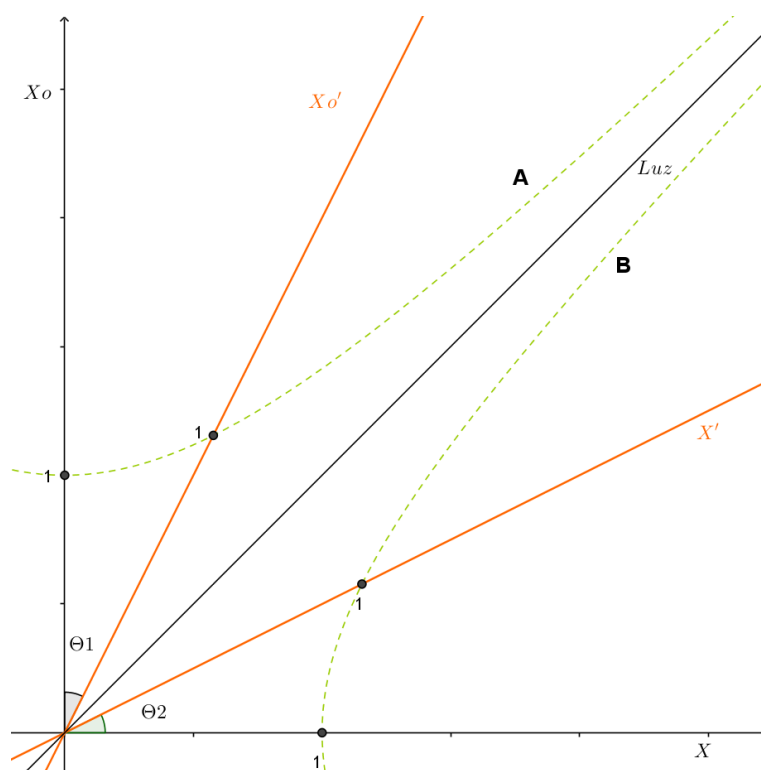


Figura 5. Calibración de los ejes  $x'$  y  $x_0'$

En la figura 5 se muestra que para calibrar la unidad en cada eje se recurre a la hipérbola descrita por el intervalo relativista (12). Así, la intersección de A que corresponde a  $x^2 - x_0^2 = 1$ , con  $x_0 = 0$  determina la unidad en el eje  $x$ , y como se tiene que  $x^2 - x_0^2 = x'^2 - x_0'^2$ , entonces la intersección de dicha hipérbola con  $x_0' = 0$  define la unidad para  $x'$ . De esta misma forma se calibran los ejes  $x_0$  y  $x_0'$ , solo que en este caso se utilizará la hipérbola B<sup>7</sup> que corresponde a  $x_0^2 - x^2 = 1$ .

<sup>7</sup> Se puede comprobar que  $x_0^2 - x^2 = x_0'^2 - x'^2 = -ds^2$  simplemente realizando una transposición de términos al intervalo relativista lo cual no alterará su invariancia.

### 3.2.3 Dilatación del tiempo y contracción del espacio

En el espacio-tiempo relativista se produce un fenómeno de dilatación del tiempo y contracción del espacio a medida que la velocidad del marco de referencia se acerca más a  $c$ . Lo anterior se produce debido a que la velocidad de la luz en el vacío es una constante estructural de este escenario geométrico, por lo cual, para que ninguna partícula supere dicho valor, a pesar de la velocidad del marco de referencia, el espacio-tiempo sufre una deformación en donde se compensan los cambios en el tiempo y en el espacio.

A continuación, se muestra una varilla que se encuentra en reposo en el marco  $S'$ :

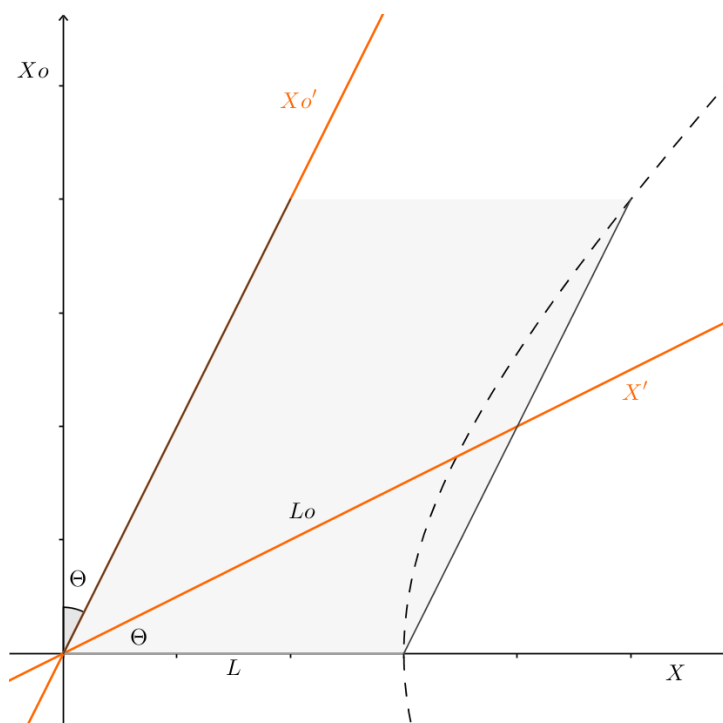


Figura 6. Contracción del espacio.

Para este caso la longitud de la varilla medida desde  $S'$  se le conoce como longitud propia  $L_0$ , pues, es la longitud que mide el observador que se encuentra en reposo respecto a la varilla, en este sentido la longitud medida desde  $S$  será la longitud impropia  $L$ .

En la figura 6 se puede observar que  $L$  y  $L_0$  tienen diferentes valores, pues en  $S$  la longitud medida, es decir  $L$ , vale 3 unidades de longitud, a diferencia de la longitud medida por  $S'$ , pues, considerando la curva de calibración, la longitud  $L_0$  es mayor a 3 unidades de longitud. De lo anterior se puede inferir que  $L$  sufre una contracción respecto a  $L_0$ . Esta contracción se puede expresar matemáticamente por la siguiente expresión denominada la contracción de Lorentz<sup>8</sup>:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (17)$$

Ahora se mostrará una partícula que se encuentra en reposo para el marco  $S'$ :

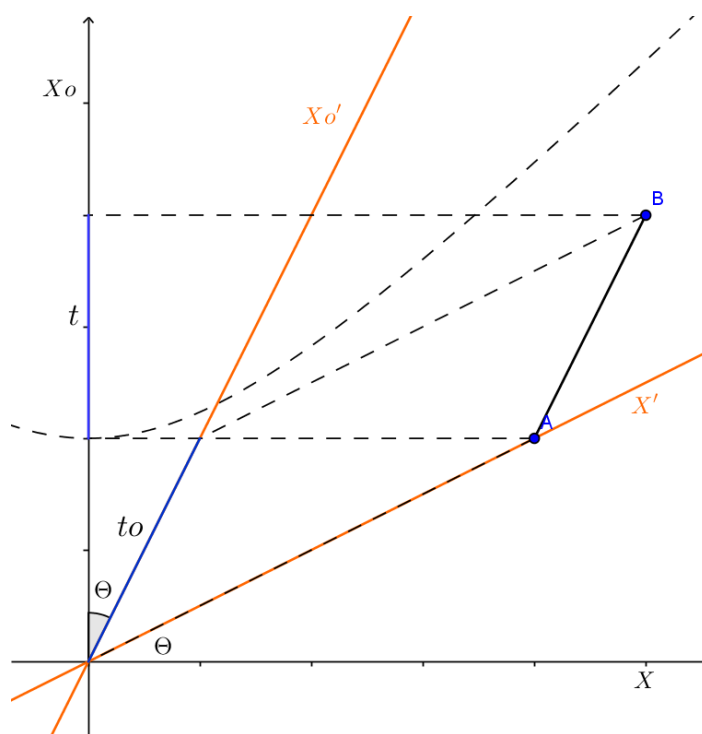


Figura 7. Dilatación del tiempo.

<sup>8</sup> Si se desea revisar la deducción de esta transformación de la longitud, así como la transformación del tiempo, se sugiere revisar (Sepúlveda, 2011, págs. 31-34).

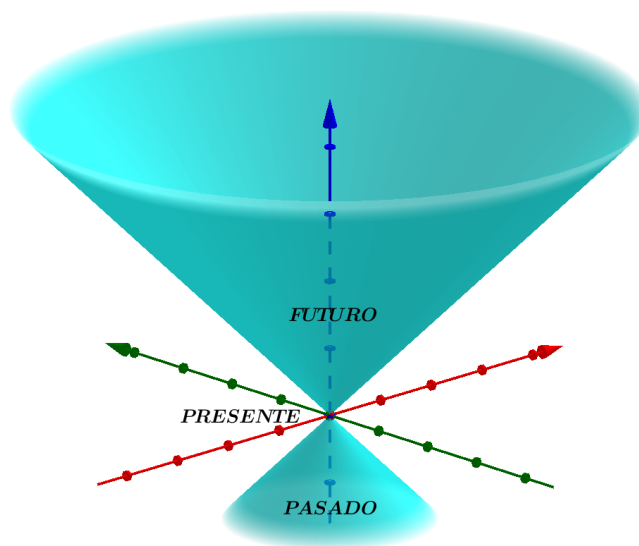
Aquí el intervalo de tiempo medido desde S' será el tiempo propio  $t_o$ , considerando que la partícula está en reposo respecto a este marco de referencia, por lo tanto, el intervalo de tiempo medido desde S será el tiempo impropio  $t$ .

De la figura 7 se puede deducir que existe una diferencia entre los intervalos de tiempo  $t$  y  $t_o$ , pues se puede observar que  $t$  toma un valor de 2 unidades de longitud, y considerando la curva de calibración se evidencia que  $t_o$  tiene un valor menos a las 2 unidades. De lo anterior se deduce que  $t$  sufre una dilatación con respecto a  $t_o$ , la cual se expresa matemáticamente por la siguiente expresión de dilatación del tiempo propuesta por Lorentz:

$$t_o = t \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (18)$$

### **3.2.4 Conos de luz, herramienta para comprender la simultaneidad y causalidad relativista**

Al representar dos líneas de universo de la luz, una viajando en sentido positivo y otra en sentido negativo se puede notar que en el diagrama de Minkowski se genera una región cónica (figura 8), lo cual se denomina como los conos de luz. Estos conos de luz permiten evidenciar la naturaleza de la simultaneidad y causalidad en la TER.



*Figura 8. Cono de luz.*

Los conos de luz limitan la región en la que se puede encontrar el pasado y el futuro de un evento, pues como se mencionó anteriormente no es posible que un evento en el presente se conecte con un evento en el futuro si la línea de universo que genera tiene una pendiente mayor a la del haz de luz. Se marca entonces una gran diferencia con la concepción euclideana de la causalidad, pues allí la región pasada y futura de un evento no tenía ningún límite, por lo cual dos eventos simultáneos tendrían el mismo pasado y futuro, discrepando del caso relativista, como se presenta en las figuras 9.1 y 9.2.

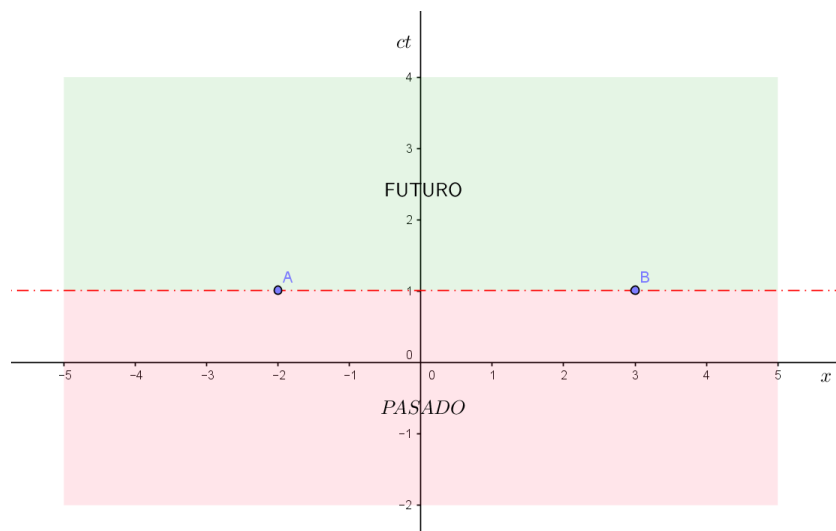


Figura 9.1. diagrama clásico del pasado, presente y futuro.

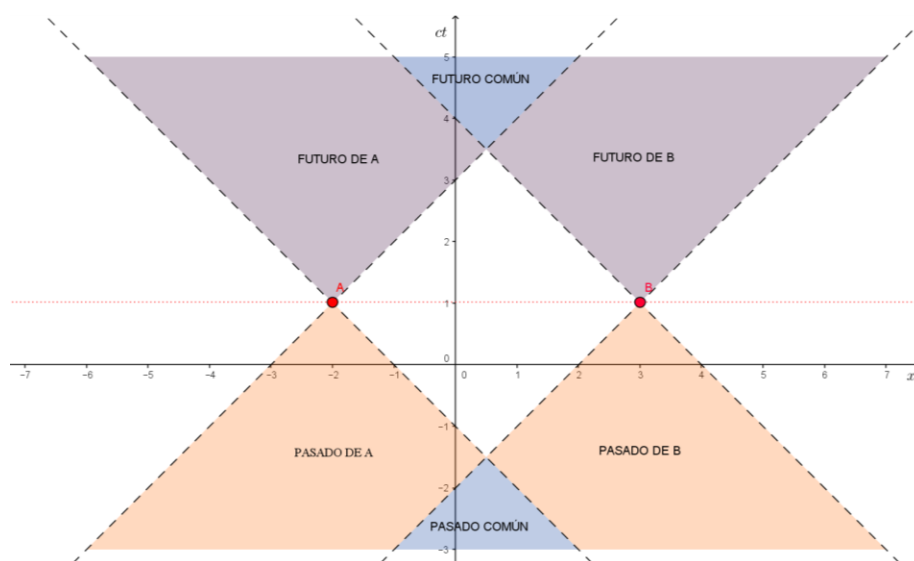


Figura 9.2. diagrama relativista del pasado, presente y futuro.

Así mismo los diagramas de Minkowski permiten evidenciar de una forma muy gráfica la simultaneidad en la relatividad cuando se consideran dos eventos simultáneos en un sistema de referencia inercial, y se contrasta con otro sistema de referencia con velocidad constante.

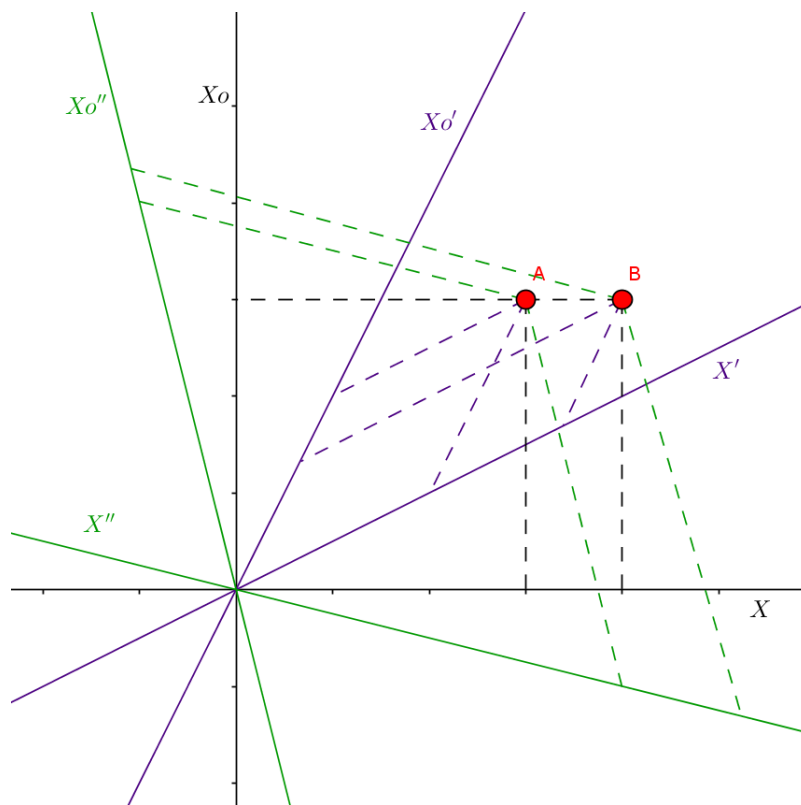


Figura 10. Diagrama de simultaneidad relativa.

En la figura 10 se pueden observar dos eventos A y B que son simultáneos en el marco de referencia S, pero si se observan las proyecciones en los marcos en movimiento  $S'$  y  $S''$  ya dejan de ser simultáneos. En el marco  $S'$  que se desplaza hacia la derecha con respecto a S se evidencia que B sucede primero que A, y en el marco  $S''$  que viaja hacia la izquierda con relación a S, el evento A sucede antes que B, por lo que se puede evidenciar que la simultaneidad no es un fenómeno absoluto sino que depende del marco que se tome como referencia.

## CAPITULO IV

### 4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

#### 4.1 Metodología

A raíz de las investigaciones que se han mencionado a lo largo de este documento, en las que se evidencia claramente las dificultades que presenta hoy en día la enseñanza de la relatividad especial, surgió la necesidad de diseñar una secuencia de actividades que permitan al docente introducir los elementos más importantes de dicha teoría como lo son: el espacio-tiempo, la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud, la simultaneidad y la causalidad de eventos. Dichas actividades se diseñaron basadas en la geometría Minkowskiana y haciendo uso de los diagramas de espacio-tiempo que permiten acercar al estudiante a las concepciones relativistas por medio de representaciones visuales y gráficas, esto con el fin de brindar una alternativa de enseñanza diferente a las prácticas tradicionales, que en gran parte abordan la teoría por transmisión verbal y la comprensión de los conceptos se complementa con la realización de problemas numéricos de forma algorítmica que se caracteriza por la falta de reflexión cualitativa previa (Pérez Celada, 2003), por lo cual, es de gran dificultad para el estudiante lograr una comprensión real de los conceptos de por si complejos y abstractos con escasa utilidad práctica en la vida cotidiana.

La metodología de esta investigación se sustenta en un enfoque cualitativo, ya que su propósito fundamental no se centra en realizar una comprobación de verdades ni medir la eficacia de los resultados o validez de hipótesis.



La investigación cualitativa tiene como principal característica que busca comprender un fenómeno a profundidad con el fin de tomar decisiones, transformarlo y desarrollar conocimiento (Sadín Esteban, 2003). Además, las metodologías cualitativas se rigen bajo algunos criterios que competen a esta investigación como los que menciona Rodríguez y Valdeoriola (2009) “Reflexionar sobre los aspectos esenciales que caracterizan el fenómeno. Describir el fenómeno mediante el arte de escribir y reescribir”. De acuerdo con lo anterior, el propósito de esta investigación es realizar una aproximación interpretativa de la situación que presenta la enseñanza de la relatividad especial e identificar sus dificultades a partir de una revisión bibliográfica. Además, se propone una secuencia didáctica fundamentada en la geometría de Minkowski como herramienta alternativa y diferente a las estrategias tradicionales, para abordar los conceptos esenciales de la relatividad especial, aclarando que no se pretende descalificar los trabajos ya realizados al respecto, ni legitimar la eficiencia de la propuesta; ya que este documento se plantea como referente para posteriores estudios.

Es importante señalar que la investigación cualitativa tiene un carácter abierto, plural y flexible, teniendo en cuenta la gran complejidad que concierne a los fenómenos humanos. Dicho esto, en el desarrollo de este trabajo investigativo también se realiza un estudio formal de la geometría de Minkowski, recopilando y reconstruyendo los conceptos fundamentales de la relatividad especial a partir de un análisis geométrico, con el fin de construir apropiadamente la secuencia didáctica.

Teniendo en cuenta lo anterior se construyó la siguiente metodología:

- Revisión bibliográfica acerca de la enseñanza de la relatividad especial
- Aplicación de la teoría del aprendizaje más pertinente, al proceso de conceptualización de la relatividad especial.

- Estudio formal de la geometría de Minkowsky.
- Elaboración de la secuencia didáctica.
- Consideraciones finales.

## **4.2 Población**

La secuencia didáctica ha sido diseñada para aplicarse en estudiantes que se introducen en el estudio de la relatividad especial, principalmente estudiantes de educación media que cursan grado undécimo, teniendo en cuenta que en este nivel es donde se abordan algunos temas de la física moderna.

## **4.3 Secuencia didáctica**

La secuencia didáctica se compone de 3 sesiones, en donde cada una da respuesta a un objetivo alrededor de un concepto fundamental de la relatividad especial. Cada sesión cuenta con una serie de actividades que buscan dar un acercamiento a dicho concepto de manera gráfica, visual y reflexiva (estas sesiones se encuentran en los anexos).

Se propone que el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes se realice de forma individual, de manera que el docente al finalizar cada actividad realice una socialización de los resultados propuestos y los estudiantes consoliden las nuevas ideas, bien sea argumentando o refutando la validez de sus respuestas.

### **4.3.1 Sesión 1: Representando el espacio-tiempo**

La primera sesión tiene como objetivo principal introducir el concepto de espacio-tiempo en los estudiantes, de manera que puedan identificar sus características; Para esto se desarrollan 3 actividades:

En la primera actividad se pretende realizar una comparación entre la representación espacial de eventos desde la mirada clásica y desde la mirada relativista para dar cuenta de la unificación del espacio y el tiempo.

En la segunda actividad se establecen las características de la herramienta que se utilizará de ahí en adelante que son los diagramas de Minkowsky, y la intención es que el estudiante elabore un diagrama de Minkowsky, pues en este proceso identificará la importancia de la velocidad de la luz y el uso del intervalo relativista.

En la tercera actividad el estudiante representará las líneas de universo de varias situaciones considerando la imposibilidad de superar el valor de la velocidad de la luz en el vacío que es representado por el cono de luz.

#### **4.3.2 Sesión 2: midiendo la longitud y el tiempo**

La segunda sesión tiene como objetivo que los estudiantes reconozcan el fenómeno relativista de la dilatación del tiempo y contracción del espacio que se presenta cuando un evento es medido desde diferentes marcos de referencia inerciales. Para esto se presenta una actividad en donde la elaboración de un diagrama de Minkowsky con dos marcos inerciales de diferentes velocidades y la representación de eventos en este diagrama, permitirá comprobar que las medidas que tienen los diferentes observadores de los mismos eventos son diferentes, verificando en qué caso son menores las mediciones y en qué caso mayores para establecer la dilatación del tiempo y contracción del espacio.

### **4.3.3 Sesión 3: ¿La simultaneidad y causalidad son relativas?**

La tercera sesión de esta secuencia está enfocada a deducir el carácter relativista de los conceptos de la simultaneidad y causalidad a partir de los diagramas de Minkowsky y los conos de luz. Para lograr esto se proponen 3 actividades:

La primera actividad muestra la diferencia existente entre la causalidad presentada desde la mecánica clásica y la relatividad, en donde se afianza la idea de que la velocidad de la luz determina si dos eventos pueden tener el mismo futuro y pasado.

La segunda actividad pretende mostrar el carácter relativo de la simultaneidad, mediante la comparación de los tiempos medidos por varios marcos de referencia inerciales para los mismos eventos.

La tercera actividad tiene como fin que el estudiante entienda la idea de que, aunque la simultaneidad y causalidad son fenómenos relativos, cuando existe una conexión causal no es posible romperla desde ningún marco de referencia, y es por esto que no se puede viajar al pasado.

### **4.4 Recomendaciones al docente**

Junto con la secuencia didáctica se diseñó una guía al docente (que se encuentra en los anexos) en donde se brindan sugerencias pertinentes al desarrollo de las actividades. También se relacionan algunos conceptos que se deben abordar con los estudiantes, se proponen ideas importantes que el docente podrá profundizar a medida que se realizan las actividades, como también los pasos a seguir en la aplicación de la secuencia.

Esta guía se propone con el fin de brindar una herramienta completa para el docente y dar a entender el importante papel que él cumple en la aplicación de herramientas didácticas, que aunque son de gran aporte en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier contenido, no

reemplazan la función del docente, pues este adquiere el rol de mediador y facilitador de conocimiento, pero, también de orientador, ya que de no ser adecuada y constante la orientación al proceso, se corre el riesgo de que el estudiante pierda el enfoque que se quiere dar a las actividades.

De esta manera se ha presentado la secuencia didáctica sugerida al docente, para introducir la teoría de la relatividad especial en el aula de clase, la cual tiene como particularidad el énfasis que se da a la construcción y utilización de diagramas de Minkowski como herramienta potencialmente enriquecedora en el proceso interpretativo de dicha teoría.

Las actividades que se realizaron tienen la intencionalidad de promover el análisis de los diagramas por parte del estudiante, de manera que haga inferencias acerca del comportamiento del espacio-tiempo a partir de la representación geométrica de diferentes situaciones planteadas. Lo anterior permite dar a conocer una herramienta didáctica innovadora y prometedora en el ámbito de la enseñanza de la relatividad, que servirá como complemento tanto de las metodologías existentes actualmente, como de todo el rigor matemático que esta teoría conlleva.

## CONCLUSIONES

La secuencia didáctica diseñada presenta los principales conceptos de la relatividad especial desde un enfoque geométrico, siendo una herramienta innovadora y alternativa a las metodologías existentes actualmente para abordar la teoría. De esta manera cumple su principal propósito, facilitando el proceso de aprendizaje, ya que permite una visualización de los efectos relativistas, que difícilmente podemos evidenciar en situaciones de la vida cotidiana. Además, fortalece la significación de los conceptos trabajados estableciendo relaciones entre la mecánica clásica y la relatividad especial, ya que de esta manera se da la importancia que merecen las ideas previas como elementos fundamentales para generar un adecuado cambio conceptual, ya sea por procesos de asimilación o acomodación según sea el caso.

El proceso de elaboración y diseño de las actividades planteadas requiere de una comprensión profunda de los conceptos a abordar, pues, no se puede correr el riesgo de proponer actividades que generen confusiones en la comprensión de los conceptos, o que no se genere un proceso de asimilación o acomodación adecuado. Por lo tanto, este proceso suscitó un estudio profundo y reflexivo de las consecuencias de la relatividad especial.

Se hace pertinente aclarar que, para aplicar la secuencia didáctica, los estudiantes requieren unos conocimientos previos acerca del movimiento y su representación gráfica desde la perspectiva newtoniana, además, que es necesario el acompañamiento y orientación de parte del docente, pues, a lo largo de las actividades el presentará algunos conceptos importantes.

Tanto en el análisis de la geometría de Minkowski que se realizó en la investigación, como en el diseño de la secuencia, se potencia la interpretación de los diagramas de Minkowski para inferir las consecuencias del espacio-tiempo y se obtuvo como resultado personal un adecuado razonamiento sobre la conceptualización de la relatividad especial, que, además, suscitó un interés más profundo en el estudio de dicha teoría.

Es de resaltar que el docente juega un papel fundamental en la implementación de la secuencia didáctica, pues esta es una herramienta que se propone como complemento a estrategias utilizadas en el aula para la enseñanza de la relatividad, pero que no es autosuficiente, ni reemplaza la labor del maestro; por el contrario, es necesario contar con una persona que cumpla una labor de orientador que enfoque a los estudiantes. Dicho lo anterior se concluye que es totalmente pertinente y acertado el documento de recomendaciones al docente que se elaboró.

El desarrollo del presente trabajo cumplió satisfactoriamente los objetivos planteados inicialmente, tanto en el ámbito personal como académico. Fue el argumento necesario para fomentar un crecimiento académico importante en mi carrera, pues, me llevó a adoptar una disciplina investigativa y propositiva que aporta día a día en mi labor profesional de una manera oportuna y acertada.

Para finalizar, la propuesta realizada queda sujeta a implementación y este documento se plantea como referente para posteriores estudios que aporten al desarrollo de la enseñanza de la relatividad especial.

## BIBLIOGRAFÍA

- Aleman, R. A., & Pérez, J. F. (2001). Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 335-343.
- Alemañ Berenguer, R., & Selles, P. (2000). *Enseñanza por cambio conceptual: De la física clásica a la relatividad*. Barcelona.
- Arriasecq, I., & Greca, I. (2004). Enseñanza de la teoría de la relatividad especial en el ciclo polimodal: dificultades manifestadas por los docentes y textos de uso habitual. *Revista electronica de enseñanza de las ciencias*, 3(2), 221-227.
- Carvajal Córdoba, F. R. (2012). *Implicaciones del tratamiento de los conceptos de masa y masa relativista*. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Einstein, A. (1905). On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, 2.
- Gil, D., Senent, F., & Solbes, J. (1986). Análisis crítico de la introducción de la física moderna en la enseñanza media. *Revista de enseñanza de la física*, 16-21.
- Hewson, P. (1982). A case study of conceptual change in special relativity: the influence of prior knowledge in learning. *European journal of research in science education*(4(1)), 61 - 78.
- kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. (A. Contín, Trad.) Mexico: Fondo de cultura económica.
- López Posada, Y. c. (2012). *Problemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la teoría especial de la relatividad con respecto a los maestros en formación de la licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia*. Tesis de pregrado, Universidad de Antioquia, Medellín.
- Maxwell, J. (1873). *A Treatise on electricity and magnetism*. Oxford: Clarendon press.
- Michelson, A., & Morley, E. (1887). On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *the American Journal of science*, 333-345.
- Pérez Celada, H. (2003). *La teoría de la relatividad y su didáctica en el bachillerato: análisis de dificultades y una propuesta de tratamiento*. Valencia: Universidad de Valencia.
- Pérez Quimbayo, D. M. (2009). *Diseño de una herramienta virtual para la enseñanza de la relatividad especial*. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Pérez, H., & Solbes, J. (2003). Algunos problemas en la enseñanza de la relatividad. *Enseñanza de las ciencias*, 21(1), 135-146.
- Pérez, H., & Solbes, J. (2006). Una propuesta sobre enseñanza de la relatividad en el bachillerato como motivación para el aprendizaje de la física. *Enseñanza de las ciencias*, 24(2), 269-284.
- Posner, G., Strike, K., Hewson, P., & Gertzog, W. (1982). Accomodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 211-217.



- Restrepo, G. (2011). *Relatividad especial: fundamentos y propuesta didáctica para su enseñanza en la escuela secundaria*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, Medellín.
- Sánchez Ron, J. M. (1983). *El origen y desarrollo de la relatividad*. Madrid: Alianza editorial.
- Sepúlveda, A. (2011). *Geometría de Minkowsky*. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Vargas Durango, M. A. (2009). *Caracterización del espacio-tiempo de Minkowski*. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Velez Pardo, J. A. (2013). *Apuntes sobre la teoría del cambio conceptual*. Tesis de maestría, Universidad nacional de Colombia, Facultad de ciencias, Medellín.
- Villani, A., & Pacca, J. (1987). students spontaneous ideas about speed of light. *Internacional journal of science education*(1), 55-66.
- Young, T. (1804). Experiments and calculations relative to physical optics. *Philosophical transactions of the royal society*, 1-14.

## **ANEXOS**

### **RECOMENDACIONES AL DOCENTE Y SECUENCIA DIDÁCTICA**

## RECOMENDACIONES AL DOCENTE

La secuencia didáctica presentada esta diseñada para introducir las principales características de la relatividad especial; allí se trabajarán cinco conceptos fundamentales que son: el espacio-tiempo, la dilatación del tiempo, la contracción del espacio, la simultaneidad y la causalidad relativistas.

Es importante mencionar que la secuencia por si misma sería una herramienta incompleta, pues el papel del docente en su implementación es lo que dota de significado todas las actividades planteadas, de manera que guie al estudiante y no permita que se desvíe del objetivo principal que se propone en cada sesión.

A continuación, se plantearán las recomendaciones pertinentes y aspectos que el docente debe tener en cuenta para la aplicación de cada una de las sesiones y sus correspondientes actividades:

### SESIÓN 1: REPRESENTANDO EL ESPACIO-TIEMPO

#### ACTIVIDAD 1:

En esta actividad se realiza una comparación sobre la representación espacial de situaciones desde las teorías clásica y relativista. Por lo cual es importante que antes de comenzar se haga un breve recuento sobre que es un diagrama  $x$  vs  $y$  (diferente a una figura o dibujo) y como se representan espacialmente algunos movimientos desde la visión clásica sin tener en cuenta el tiempo.

En las representaciones relativistas se quiere mostrar que el tiempo está totalmente vinculado a cualquier suceso, es por esto que no se puede graficar solo  $X$  vs  $Y$ , sino que debe incluirse el eje temporal y dar énfasis a que un movimiento no solo se realiza cambiando la posición, sino que el tiempo a su vez va avanzando.

Al finalizar las representaciones los estudiantes socializarán los resultados que obtuvieron. Es allí donde el docente debe rescatar las representaciones adecuadas, pedir al estudiante que justifique su procedimiento y complementar dicha justificación para que los demás puedan adoptar esta posición y comprendan por qué es la más adecuada y qué ventajas tiene sobre las otras posiciones.

## ACTIVIDAD 2:

En esta actividad se busca que el estudiante aprenda a elaborar diagramas de Minkowsky y perciba la importancia que tiene la velocidad de la luz y el intervalo relativista en la construcción de estos.

Es necesario que el docente previamente de una explicación de cómo se construye una hipérbola a partir del uso de compás, pues, de allí depende la calibración de los ejes. Si lo requiere en el siguiente link se encuentra paso a paso la construcción de una hipérbola a partir de regla y compás:

<https://www.youtube.com/watch?v=RwRcdgxNcDc>

A medida que los estudiantes van realizando la construcción, el docente debe ir asesorándolos en la correcta utilización de los instrumentos de medida como el compás, regla y transportador. También debe recalcar la importancia de realizar los trazos y medidas con la mayor exactitud posible, pues las diferencias pueden ser considerables.

Para trazar el marco de referencia en movimiento el docente debe hacer caer en cuenta a los estudiantes que  $x_0'$  es una recta que corresponde a  $x = vt$  en donde  $v$  corresponde a la velocidad del marco inercial  $S'$ , entonces tendrá que escoger un punto de  $x$  y calcular  $t$ , luego, el valor obtenido de  $t$  multiplicarlo por  $c$  para poder ubicar la coordenada en  $x_0$  y de esta manera trazar  $x_0'$ .

Al socializar los resultados el docente aclarará la importancia del intervalo relativista en la medida de la escala, lo que hace gráficamente evidente que para diferentes marcos inerciales la unidad en la escala de los ejes es diferente.

## ACTIVIDAD 3:

Esta actividad requiere que el estudiante tenga claridad en la forma de representar los diferentes movimientos en un diagrama de  $x$  vs  $t$ , en especial es importante hacerle caer en cuenta que un movimiento rectilíneo uniforme se representa mediante una línea recta con alguna inclinación y un movimiento acelerado siempre será representado por una curva.

Es importante que se haga especial énfasis en que la pendiente de las líneas de universo que se trazan, en todos sus puntos, representa la velocidad del suceso, por

lo cual, para los movimientos con aceleración que se representan con curvas, no es suficiente trazar cualquier línea que este dentro de la región del cono de luz, sino que la curva en todos sus puntos debe cumplir con el límite de la velocidad de la luz.

## SESIÓN 2: MIDIENDO LA LONGITUD Y EL TIEMPO

### ACTIVIDAD 1:

Esta actividad permitirá evidenciar la contracción de la longitud y la dilatación del tiempo a partir de la medida de las coordenadas de un suceso desde diferentes marcos de referencia.

Aquí se debe precisar al estudiante que trazar las coordenadas de un evento en un marco inercial significa trazar rectas paralelas a los ejes de manera que pasen por el evento, en este sentido en un sistema de referencia con velocidad diferente de cero, las rectas para obtener las coordenadas no son perpendiculares entre sí, a diferencia del caso euclidiano o de un marco de referencia en reposo.

El docente expondrá a los estudiantes el significado de tiempo propio e impropio, así como longitud propia e impropia, lo que es relevante para establecer cuál es el marco de referencia en reposo con respecto al suceso.

Cuando los estudiantes vayan a realizar la medición de las longitudes y tiempos propios e impropios se debe aclarar que dichas medidas deben estar acorde a la escala que tiene cada marco de referencia y no solamente medir con la regla su magnitud.

Al socializar los resultados, probablemente cada estudiante obtendrá diferentes valores, porque esto va a depender de cada construcción del diagrama, pero lo más importante es mostrar evidencia de que a pesar de las medidas obtenidas, el tiempo impropio siempre es mayor al tiempo propio y la longitud impropia siempre es menor que la longitud propia. Lo cual se puede concluir por parte del docente anunciando la dilatación del tiempo y contracción de la longitud que plantea la relatividad especial, y comentando que este efecto se hace más evidente a medida que el marco de referencia tiene una velocidad más cercana a la de la luz, por lo cual nosotros no lo evidenciamos en la vida cotidiana, pues las velocidades manejadas son muy pequeñas con relación a  $c$ .

### SESIÓN 3: SIMULTANEIDAD Y CAUSALIDAD RELATIVAS

#### ACTIVIDAD 1:

En esta actividad se realiza una comparación entre las teorías clásica y relativista para representar el presente, pasado y futuro de dos eventos. El docente deberá guiar a sus estudiantes para que infieran que en la teoría clásica no existe una velocidad límite, por lo cual, el pasado y el futuro de los dos eventos coincidirá totalmente para ambos; a diferencia del caso relativista, en donde cada evento tiene unas regiones establecidas para su pasado y futuro, que las determina el cono de luz generado por cada evento, por esta razón desde la relatividad existen zonas en común, pero también zonas que no son accesibles para uno o para el otro y, además, zonas del "presente" que son inaccesibles a los dos eventos.

#### ACTIVIDAD 2:

Aquí se busca que el estudiante infiera que dos eventos simultáneos en un marco inercial pueden no serlo en otro marco de referencia. Por lo tanto, en la primera parte el docente centra la atención en que los estudiantes comparen las coordenadas del tiempo medidas en  $S$ ,  $S'$  y  $S''$  para ambos eventos, estableciendo en qué condiciones  $A$  sucede primero que  $B$  y en cuáles  $B$  sucede primero que  $A$ . Es necesario que el docente mencione que el marco inercial  $S''$  representa un marco de referencia que presenta  $v$  menor que  $c$ , pero que viaja hacia la izquierda.

Para la parte b el docente recomendará trazar las líneas de universo de la luz en ambas direcciones izquierda y derecha, así como las líneas de universo de ambas puertas en cada caso. Para el segundo diagrama sugerir que se representen dos marcos de referencia  $S$  y  $S'$  y las puertas estarán en reposo respecto a  $S'$ . También que los puntos en donde se intersecan las líneas de universo de la luz y de las puertas, indicarán el momento en que éstas se abrirán, por lo cual hay que comparar las coordenadas temporales de estos puntos para poder sacar alguna inferencia.

#### ACTIVIDAD 3:

Para esta actividad se hace pertinente definir que dos eventos están conectados causalmente cuando la línea de universo que existe desde el primer evento hasta el segundo tiene una pendiente menor que la de la línea de universo de la luz.

En la parte a el docente motivará al estudiante para que identifique las coordenadas temporales de ambos eventos y pueda inferir que siempre se respeta la causalidad, es decir N es antes que M en cualquier marco de referencia sin importar su dirección o velocidad.

En la parte b se podrá comprobar que la causalidad ya no se cumple, pues en algunos marcos es posible que M sea antes que N, así que el docente debe llevar al estudiante a argumentar que esto sucede porque N y M no tienen conexión causal ya que su línea de universo tiene una velocidad mayor que la de la luz.

Después de lograr esta argumentación el docente puede cerrar concluyendo que dos eventos conectados causalmente siempre respetarán su causalidad, a diferencia de dos eventos desconectados; Y es por este motivo que nunca puede ser posible que la muerte de una persona suceda antes que su nacimiento. Esta afirmación puede dar pie a discusiones sobre la posibilidad de viajar al pasado.

# Sesión 1

## REPRESENTANDO EL ESPACIO-TIEMPO

### OBJETIVO:

Identificar las características del espacio-tiempo relativista, reconociendo la importancia de la constancia de la velocidad de la luz y determinando la diferencia entre las concepciones mecanicista y relativista del espacio-tiempo.

### Duración:

Aproximadamente 120 minutos.



### Actividad 1:

La forma de representar la trayectoria de diferentes objetos da evidencia de la concepción que se tiene del espacio y el tiempo.

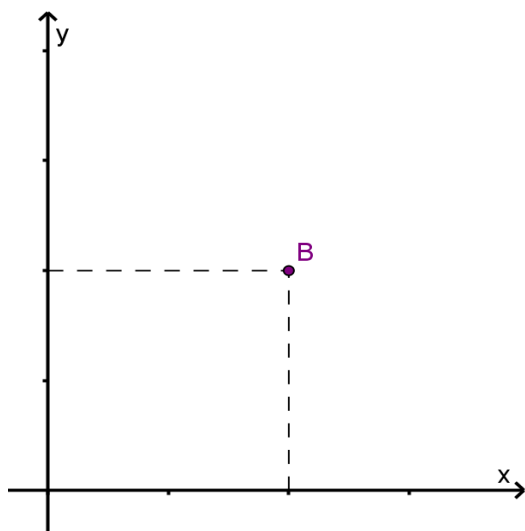
En la teoría de la relatividad los conceptos de espacio y tiempo no se pueden concebir independientemente, pues allí se propone el espacio-tiempo como un nuevo escenario geométrico en donde las dos magnitudes dependen una de la otra, además, ninguna de estas se considera absoluta. Por otro lado, en la visión mecanicista ambos conceptos hacen referencia a magnitudes universales, continuas, uniformes y homogéneas, que no se ven alteradas por la presencia de cuerpos y son independientes de los observadores.

A continuación, se puede observar la forma de representar desde la visión clásica la trayectoria espacial y desde la visión relativista la trayectoria espaciotemporal de algunas situaciones:

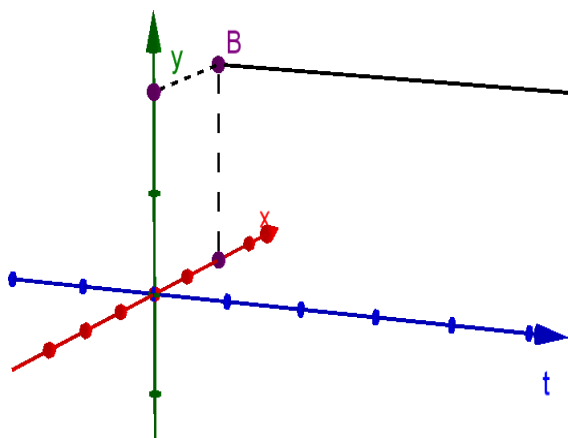


- ❖ Un objeto que permanece en el mismo lugar del espacio.

*VISIÓN CLÁSICA*

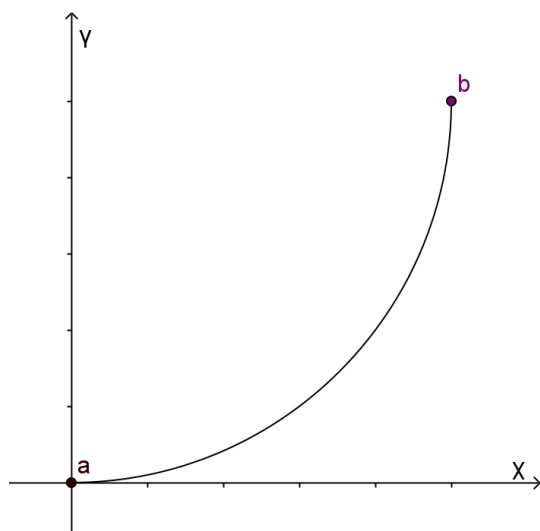


*VISIÓN RELATIVISTA*

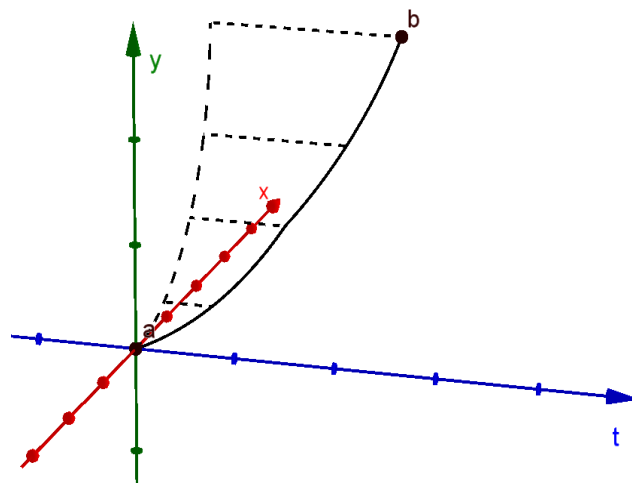


- ❖ Un carro que da una curva con rapidez constante.

*VISIÓN CLÁSICA*



*VISIÓN RELATIVISTA*



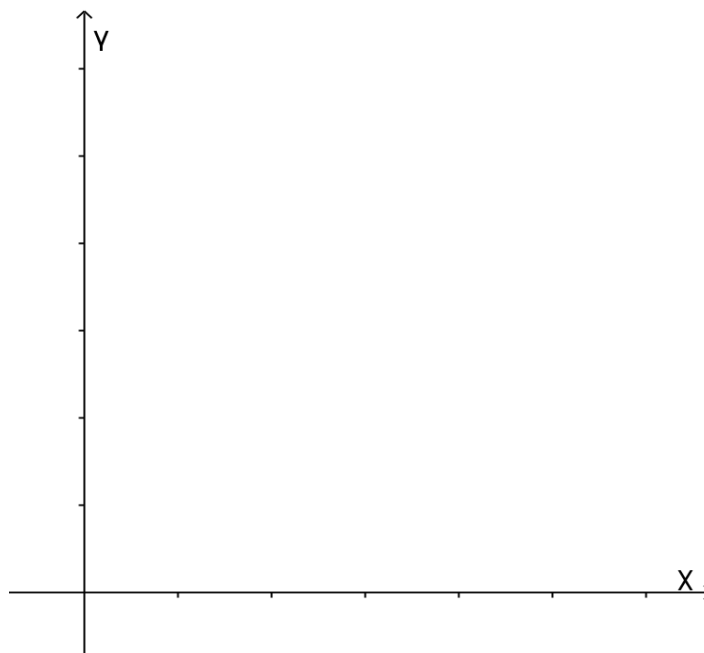
En los ejemplos anteriores se observa que en la visión clásica es posible representar la trayectoria solamente en el espacio, sin tener en cuenta el tiempo, a diferencia de la visión relativista, en la cual es necesario involucrar la dimensión temporal.

Ahora realice la representación gráfica de las siguientes situaciones:

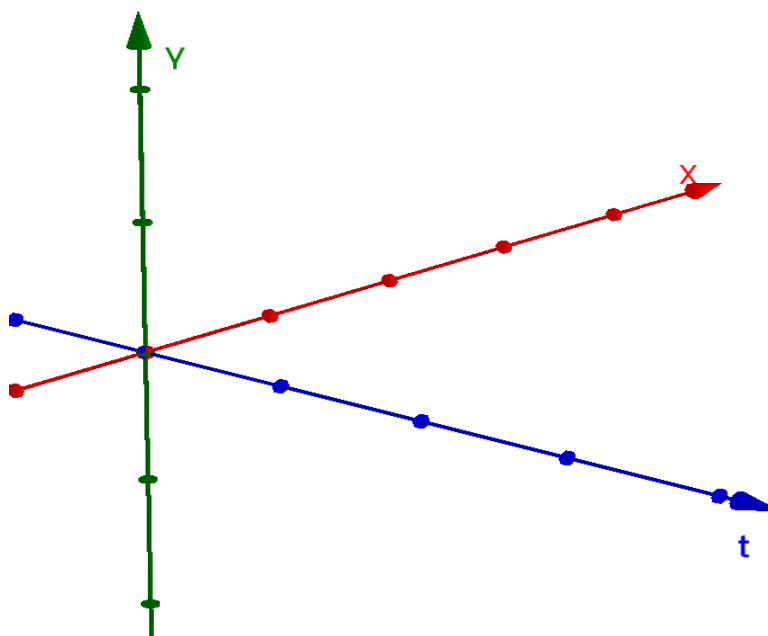
(ayuda: en la visión relativista procure primero trazar la trayectoria en el plano X,Y y luego algunos puntos de esta trayectoria desplácelos en el tiempo teniendo en cuenta que entre más avanza en el espacio, más tiempo tarda)

a) Un objeto que se mueve con movimiento parabólico

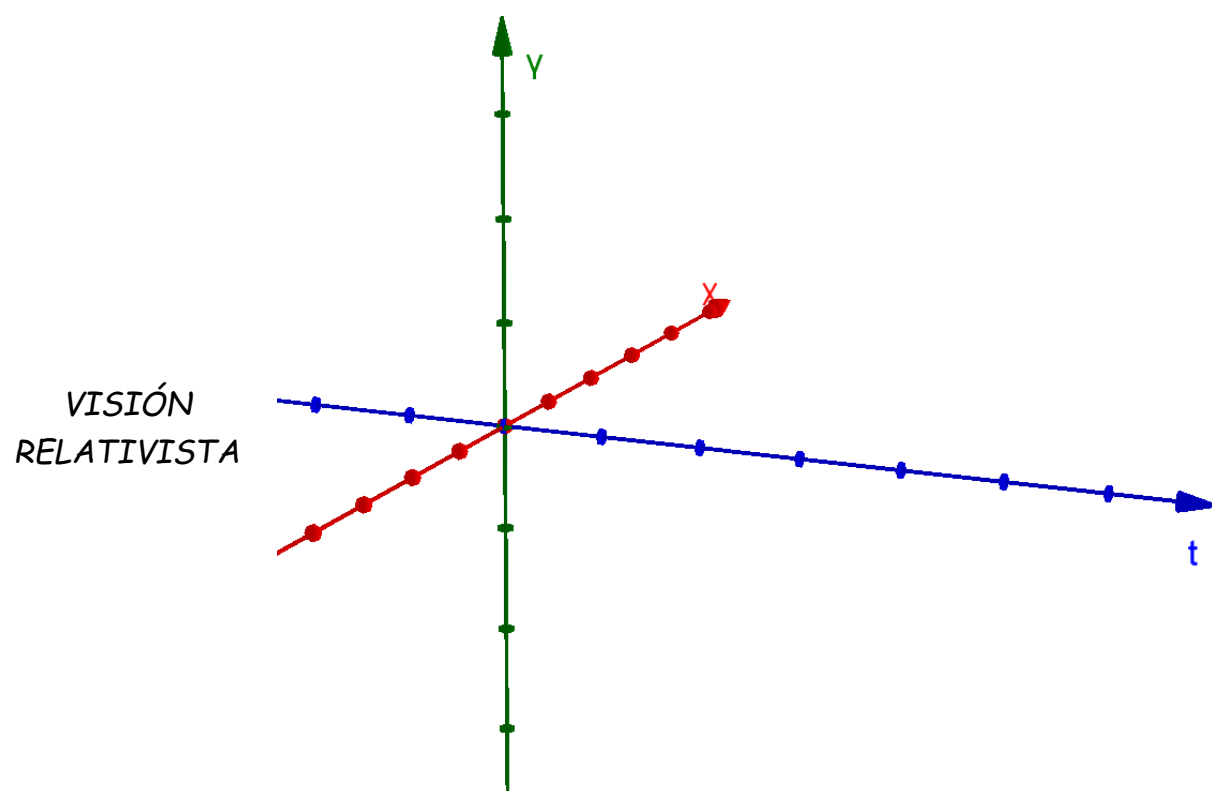
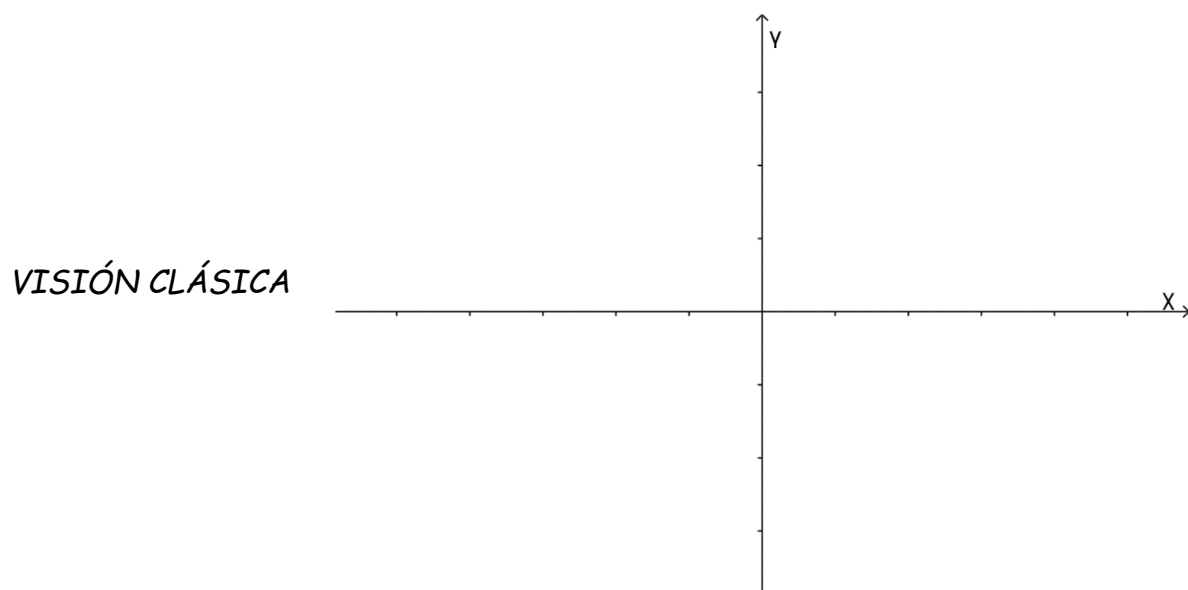
*VISIÓN CLÁSICA*



*VISIÓN RELATIVISTA*



b) Un objeto que se mueve con un movimiento circular uniforme



c) Socialice sus resultados con la clase y explique para usted que es el espacio-tiempo.

---



---



---



---



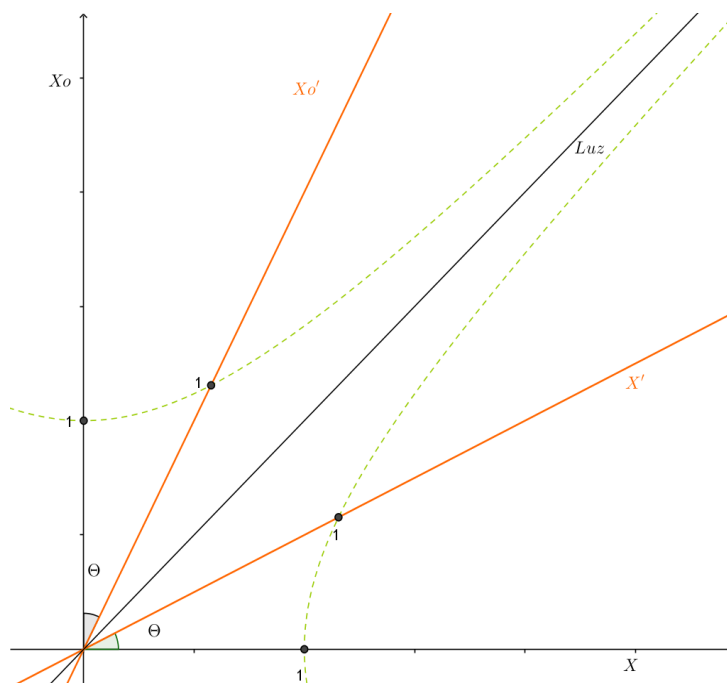
---



---

### Actividad 2:

Hermann Minkowski brindó un aporte muy importante para la teoría de la relatividad ya que planteó una representación geométrica para el espacio-tiempo mediante una herramienta llamada diagrama de Minkowski o diagrama de espacio-tiempo los cuales incluyen las dimensiones espaciales y una dimensión espacial que relaciona el tiempo. Para facilidad en la representación consideraremos solamente un eje espacial  $x$  y el eje espacial que relaciona el tiempo  $x_0$  que significa  $ct$ .



De ahora en adelante se encontrará el término "suceso" o "evento", por lo cual a continuación se indican su significado:

#### EVENTO Ó SUCESO:

Es la ubicación espaciotemporal en que se encuentra una partícula u objeto. Se indica usualmente con sus coordenadas en el espacio-tiempo.

Las características de los diagramas de espacio-tiempo son las siguientes:

- ✓ A diferencia del caso clásico, el eje temporal  $x_0$  se representa verticalmente y el eje  $x$  se representa horizontalmente.
- ✓ El eje temporal se mide en unidades espaciales, pues, en el eje vertical no se indica  $t$  sino  $ct$  en donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío, esto con el fin de que la trayectoria de la luz se represente siempre como la función identidad.
- ✓ Al representar un sistema inercial con velocidad  $v$ , el ángulo entre  $x_0$  y  $x_0'$  es el mismo ángulo que hay entre  $x$  y  $x'$ .
- ✓ El eje  $x_0$  indica la trayectoria de un suceso a velocidad constante  $v$ .
- ✓ El intervalo relativista  $x^2 - x_0^2 = 1$  que describe una hipérbola, me permite calibrar los ejes de  $S$  y  $S'$  mediante los puntos de corte que serán la unidad de los ejes coordenados. Esto es posible gracias a su invariancia ante cualquier marco inercial.

a) Partiendo de lo expuesto anteriormente realice el siguiente procedimiento utilizando papel milimetrado, para construir y calibrar un diagrama de espacio-tiempo con dos sistemas de referencia inerciales  $S$  y  $S'$ :

- Elabore un diagrama de espacio-tiempo con un marco  $S$  en reposo cuya escala este hasta 7m.
- Represente en el mismo diagrama, un marco inercial  $S'$  que tenga una velocidad de  $v=1 \times 10^8$  m/s. (tenga en cuenta que  $x_0'$  es la trayectoria descrita por  $v= x / t$ )
- Indique en el diagrama la trayectoria que tienen dos haces de luz que parten del origen (0,0) y viajan uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha.
- Utilizando el método del compás trabajado previamente con el profesor, elabore las hipérbolas correspondientes al intervalo relativista para cada eje  $x^2 - x_0^2 = 1$  y  $x_0'^2 - x^2 = 1$ , las cuales a su vez determinarán la escala para  $S'$  considerando que el punto de intersección indica la unidad. (Tenga en cuenta que el vértice de las hipérbolas es 1, el foco es  $\sqrt{2}$  y las asíntotas corresponden a las líneas de universo de la luz)
- Establezca la escala de los ejes  $x'$  y  $x_0'$

**¡Listo! Has aprendido a elaborar un diagrama de Minkowsky.**

- b) Socializa con tu clase el trabajo que realizaste y comenta que diferencias puedes ver en esta representación con relación a los diagramas que usualmente utilizas para representar alguna situación.

---

---

---

---

---

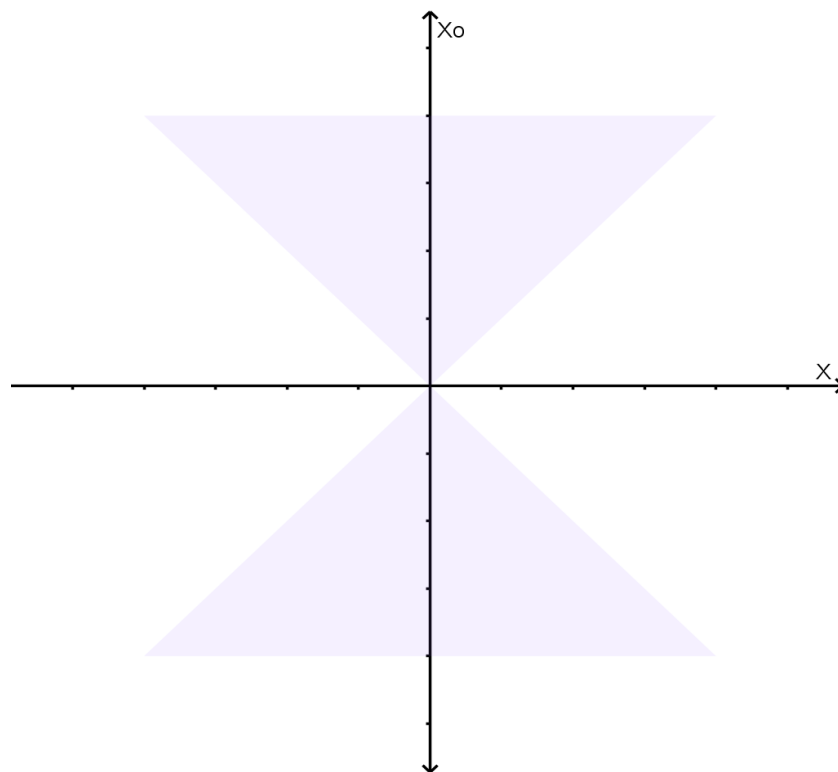
---

---

### Actividad 3:

En los diagramas de Minkowski la representación de la trayectoria de un suceso se denomina línea de universo, y al considerar la velocidad de la luz en el vacío  $c=3 \times 10^8$  m/s como una constante estructural del espacio-tiempo que no puede ser superada, se forman los llamados conos de luz, que delimitan la región del posible pasado y futuro de un evento y en donde todo evento que se encuentra fuera del cono es inalcanzable, pues requeriría de una velocidad mayor a  $c$  para que estuvieran conectados ambos eventos.

- c) Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente representa en el diagrama las siguientes situaciones, suponiendo que el presente de todas es el origen del diagrama de espacio-tiempo:
- La historia de un árbol que siempre se encontrará en el mismo lugar.
  - Un joven montando bicicleta con movimiento rectilíneo uniforme.
  - Un carro que se mueve con un movimiento acelerado.
  - Un avión que viene viajando desde el día anterior con velocidad constante y aterriza en el presente.



- d) Socializa tus resultados con tu clase y analiza cuál de sus representaciones esta mejor elaborada.

## Sesión 2

# MIDIENDO LA LONGITUD Y EL TIEMPO

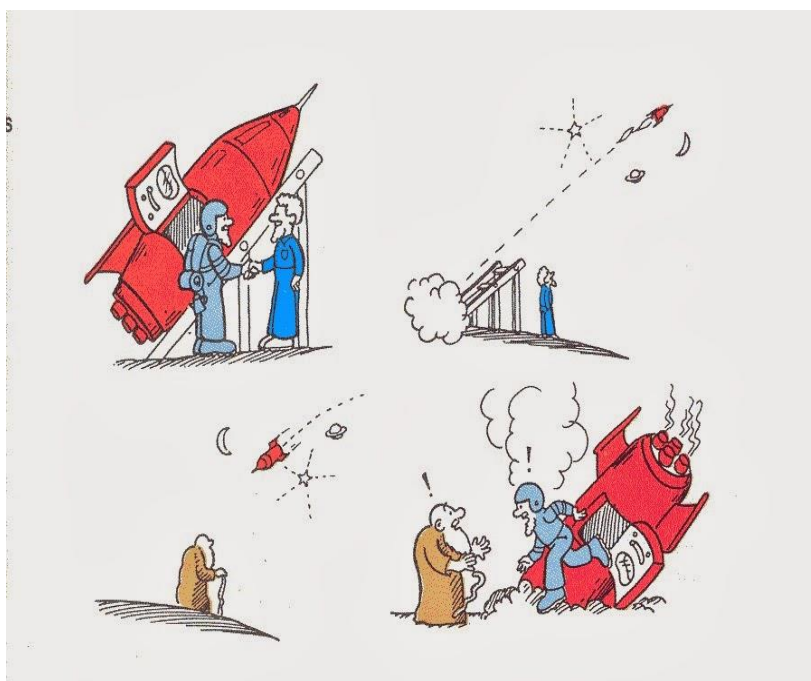
**OBJETIVO:** Reconocer el fenómeno relativista de la dilatación del tiempo y contracción de la longitud cuando es medido desde diferentes marcos de referencia inerciales.

### Duración:

Aproximadamente 60 minutos.

### Actividad 1:

En el espacio-tiempo relativista se produce un fenómeno de dilatación del tiempo y contracción del espacio a medida que la velocidad del marco de referencia se acerca más a  $c$ . Lo anterior se produce debido a que la velocidad de la luz en el vacío es una constante estructural de este escenario geométrico, por lo cual, para que ninguna partícula supere dicho valor a pesar de la velocidad del



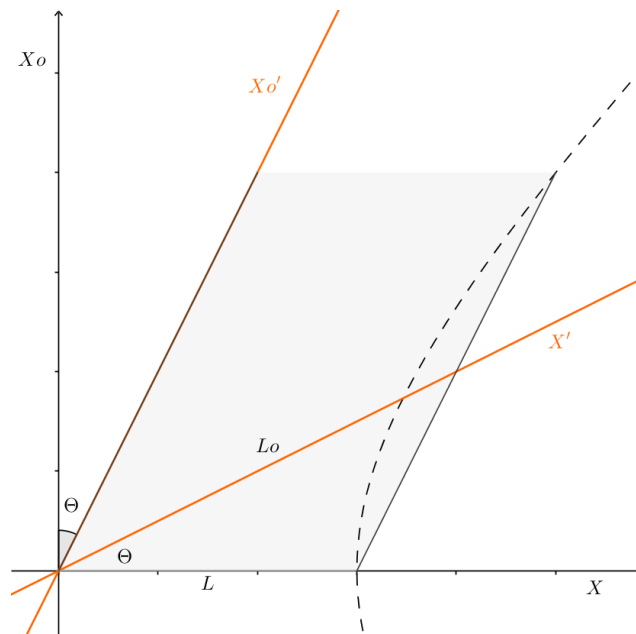
marco de referencia, el espacio-tiempo sufre una deformación en donde se compensan los cambios en el tiempo y en el espacio.



La siguiente imagen muestra una varilla que se encuentra en reposo en el marco  $S'$ :

Para este caso la longitud de la varilla medida desde  $S'$  se le conoce como longitud propia  $L_0$ , pues, es la longitud que mide el observador que se encuentra en reposo respecto a la varilla. En este sentido la longitud de la varilla medida desde  $S$  será la longitud impropia  $L$ .

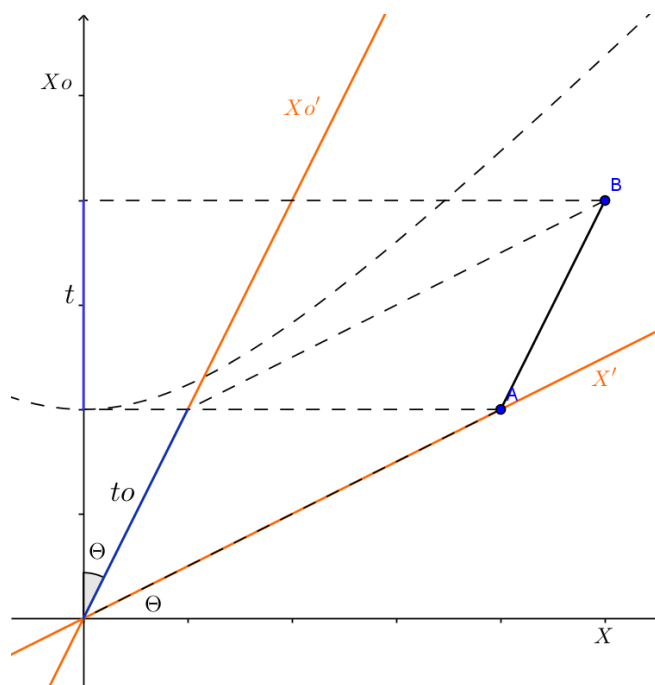
En la imagen se puede observar por medio de la curva de calibración, que  $L$  es menor que  $L_0$ , por lo cual se dice que  $L$  sufre una contracción respecto a  $L_0$ .



Ahora se mostrará una partícula que se encuentra en reposo para el marco  $S'$ :

Aquí el intervalo de tiempo medido desde  $S'$  será el tiempo propio  $t_0$ , considerando que la partícula está en reposo respecto a este marco de referencia, por lo tanto, el intervalo de tiempo medido desde  $S$  será el tiempo impropio  $t$ .

De esta imagen se puede deducir mediante la curva de calibración, que  $t$  mide 2 unidades, mientras  $t_0$  mide menos de estas 2 unidades, por lo tanto se dice que  $t$  sufre una dilatación con respecto a  $t_0$ .



a) Para dar cuenta del fenómeno mencionado anteriormente realice el siguiente procedimiento:

- En papel milimetrado elabore un diagrama espacio-tiempo que tenga dos marcos de referencia inerciales  $S$  y  $S'$  y calibre respectivamente sus ejes realizando las hipérbolas correspondientes al intervalo relativista con el método del compás, de manera que la escala del eje  $S$  vaya de  $0m$  a  $3m$ .
- En el diagrama represente dos eventos  $A$  y  $B$  que suceden en el mismo lugar con respecto al sistema  $S$  y que tengan una diferencia de tiempo de  $1m$  también medidos en  $S$ . Luego determine las coordenadas de espacio y tiempo para cada evento en los dos sistemas de referencia.
- De acuerdo con las coordenadas obtenidas indique cual es el tiempo impropio entre  $A$  y  $B$ , teniendo en cuenta que  $S'$  será el sistema en el cuál los eventos no tienen la misma posición.

¿Qué inferencia puede realizar de los resultados obtenidos para los tiempos propio e impropio entre  $A$  y  $B$ ?

---



---



---



---



---



---



---

- Ahora indique cual es la longitud impropia entre  $A$  y  $B$ .

¿De acuerdo a las longitudes propias e impropias entre  $A$  y  $B$  que obtuvo, que puede concluir?

---



---



---



---



---



---

b) Realice un nuevo diagrama de espacio-tiempo con dos sistemas  $S$  y  $S'$ , en donde  $S'$  tenga una velocidad mayor que la velocidad de  $S$  en el diagrama anterior, igualmente calibre sus ejes realizando las hipérbolas correspondientes al intervalo relativista con el método del compás, de manera que la escala del eje  $S$  vaya de  $0m$  a  $3m$ .

- Con este nuevo diagrama, al igual que en el caso anterior, represente dos eventos  $C$  y  $D$  que suceden en el mismo lugar con respecto al sistema  $S$  y que tengan una diferencia de tiempo de  $1m$  también medidos en  $S$ . Luego determine las coordenadas de espacio y tiempo para cada evento en los dos sistemas de referencia.
- De acuerdo con las coordenadas obtenidas, determine el tiempo propio e impropio existente entre  $C$  y  $D$ .
- Así mismo, determine la longitud propia e impropia entre  $C$  y  $D$ .
- Complete la siguiente tabla en donde se comparan los resultados obtenidos entre  $A$  y  $B$ , y  $C$  y  $D$ .

	Longitud propia	Longitud impropia	Tiempo propio	Tiempo impropio
Entre $A$ y $B$				
Entre $C$ y $D$				

- ¿En que afecta el aumento de la velocidad de  $S'$ ? y ¿Qué puede concluir acerca de los resultados obtenidos en la tabla anterior?

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

## Sesión 3

# ¿LA SIMULTANEIDAD Y CAUSALIDAD SON RELATIVAS?

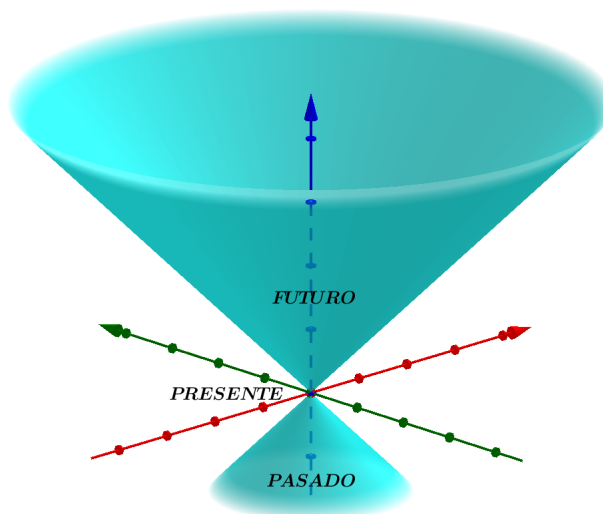
**OBJETIVO:** Deducir el carácter relativista de la simultaneidad y causalidad en eventos a partir del uso de diagramas de Minkowsky y conos de luz.

**Duración:**

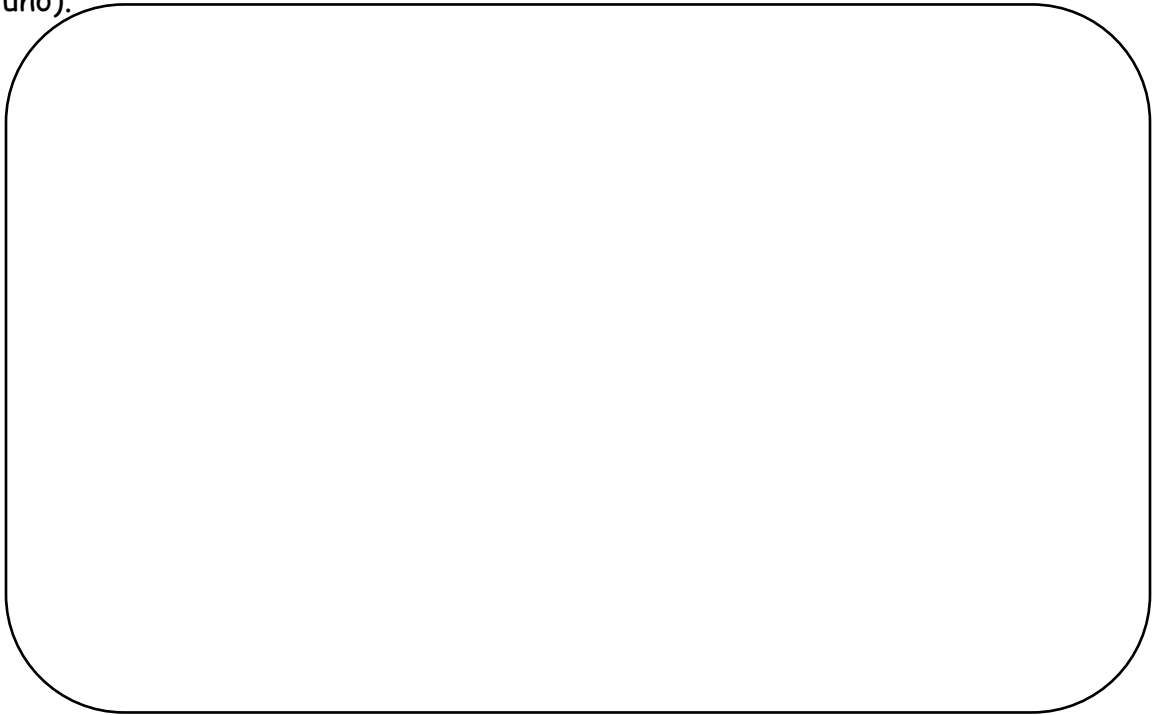
Aproximadamente 120 minutos.

**Actividad 1:**

- Realice un diagrama de Minkowsky en el que represente dos eventos que son simultáneos para el mismo marco de referencia en reposo, e identifique las zonas posibles para su pasado y su futuro consideradas desde la mecánica clásica. (Tenga en cuenta que la visión clásica no considera ninguna velocidad límite)



- b) Elabore un diagrama de Minkowsky en el que represente los dos eventos simultáneos y las zonas posibles para el pasado y el futuro de cada evento consideradas desde la relatividad especial. (Ayuda: utilice los conos de luz que genera cada evento para establecer el límite del pasado y futuro para cada uno).



- c) Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, ¿Qué diferencias encuentras entre las zonas de un diagrama y del otro?

---

---

---

---

---

---

---

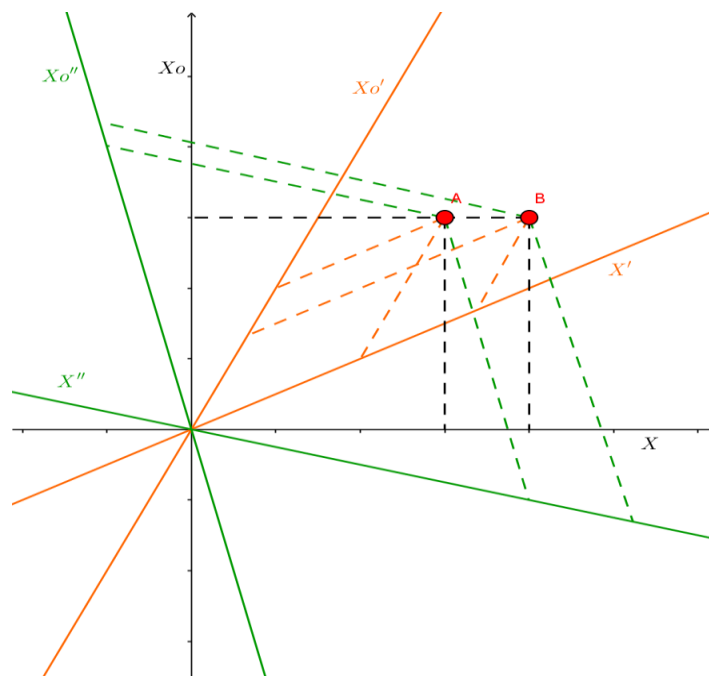
---

---

---

### Actividad 2:

- a) La simultaneidad relativa de dos eventos A y B se puede representar mediante el siguiente diagrama de Minkowsky con tres marcos de referencia inerciales  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ , en donde  $S$  se encuentra en reposo,  $S'$  viaja con velocidad constante hacia la derecha respecto a  $S$ , y  $S''$  viaja con velocidad constante hacia la izquierda respecto a  $S$ .



¿Qué inferencias puede realizar acerca de la distancia y el tiempo medido en cada marco de referencia  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ ?

---



---



---



---



---



---



---



---

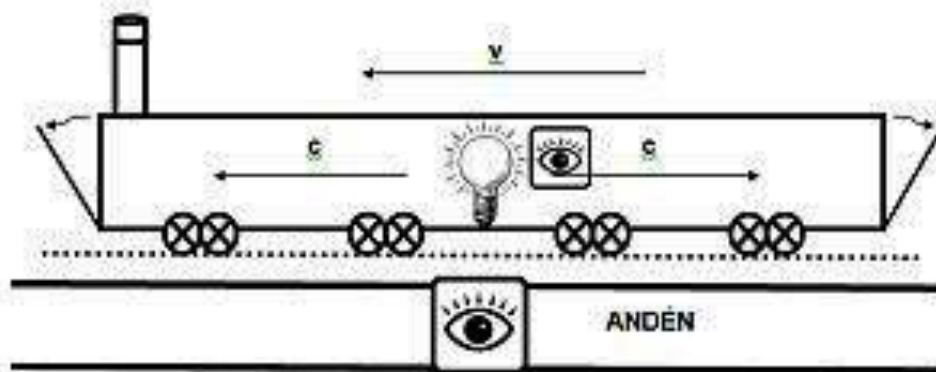


---



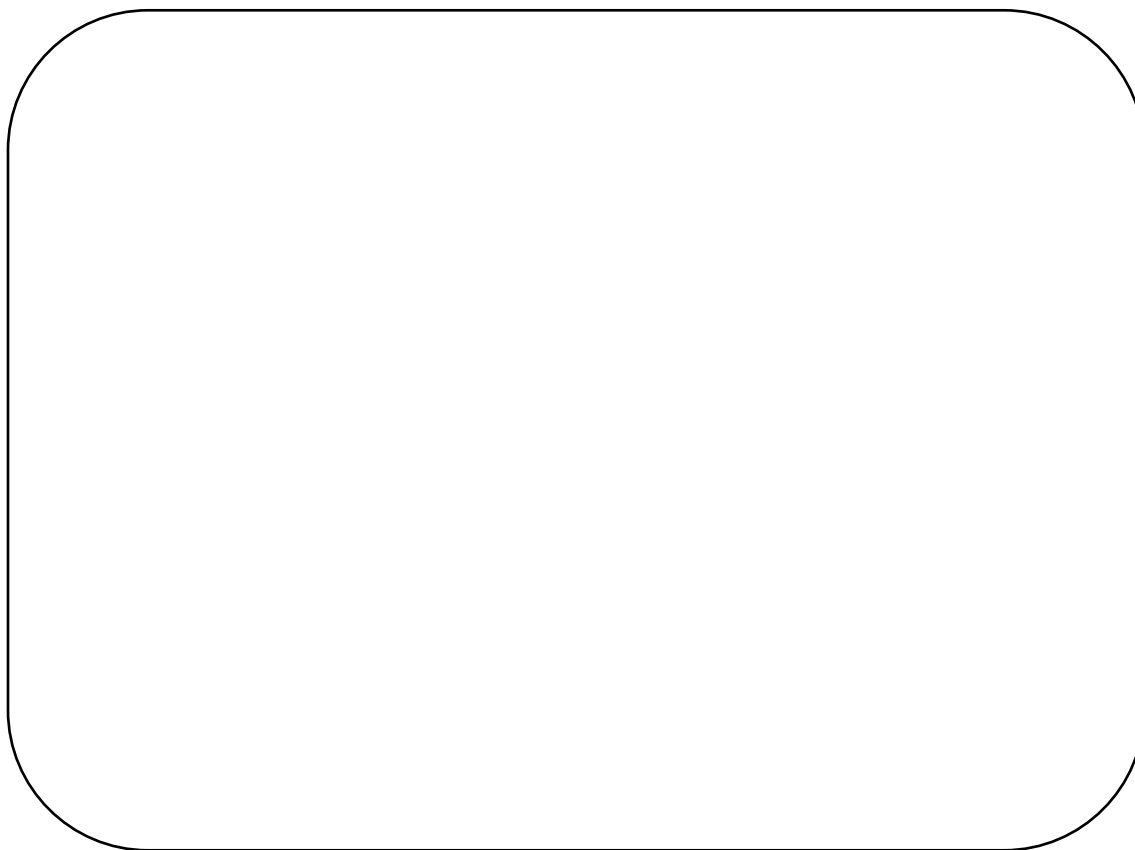
---

- b) Considere el siguiente experimento mental que propuso Einstein: "en un vagón del tren que se mueve a velocidad constante con respecto a un observador externo, se encuentra un pasajero en el punto medio del vagón y enciende una lámpara. El tren cuenta con un mecanismo en el que al alcanzar la luz cada pared, en dichas paredes se abre una puerta".

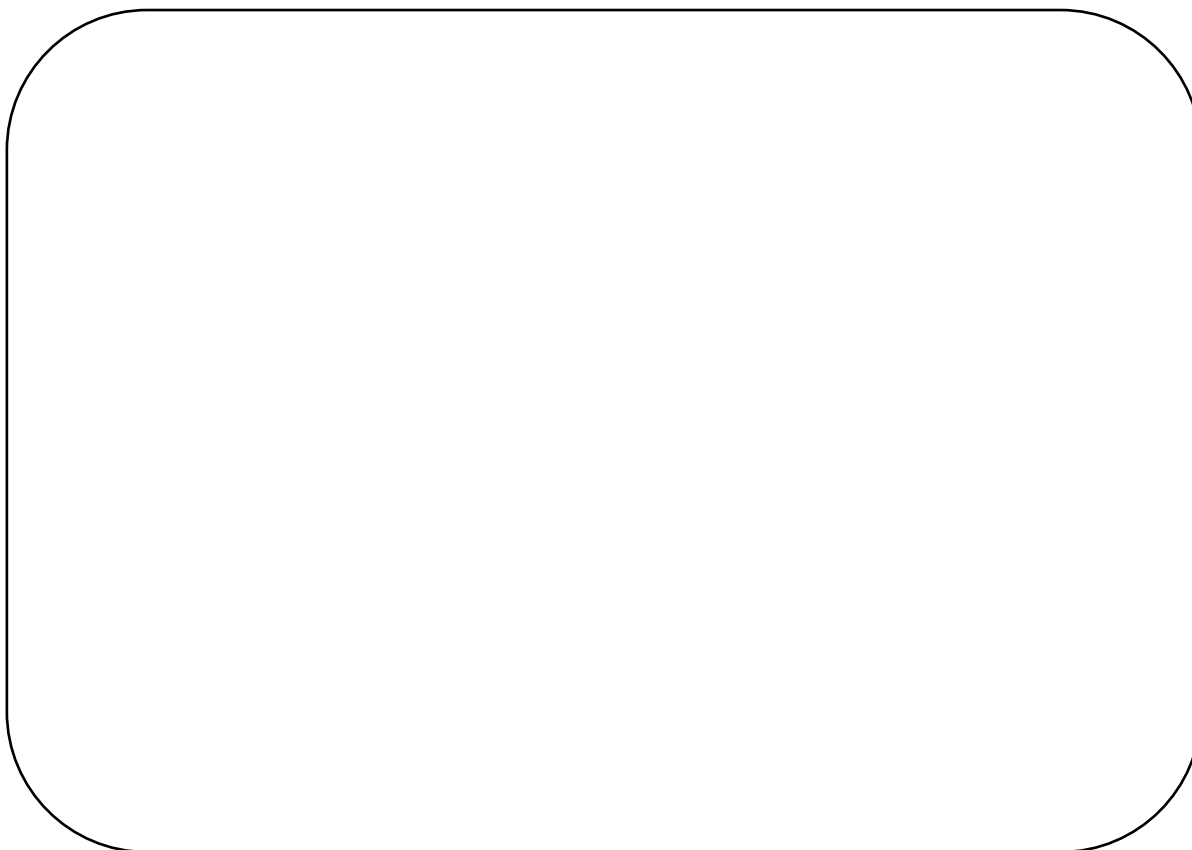


Según lo anterior:

- Represente en un diagrama de espacio-tiempo la situación para el pasajero que se encuentra dentro del tren teniendo en cuenta que, para él, el sistema se encuentra en reposo.



- Ahora Realice la representación en un diagrama espacio-tiempo para el observador externo, quien ve el tren moviéndose a velocidad constante  $v$ .



- ¿Qué podría decir acerca de la simultaneidad en las aperturas de las puertas para ambos casos?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

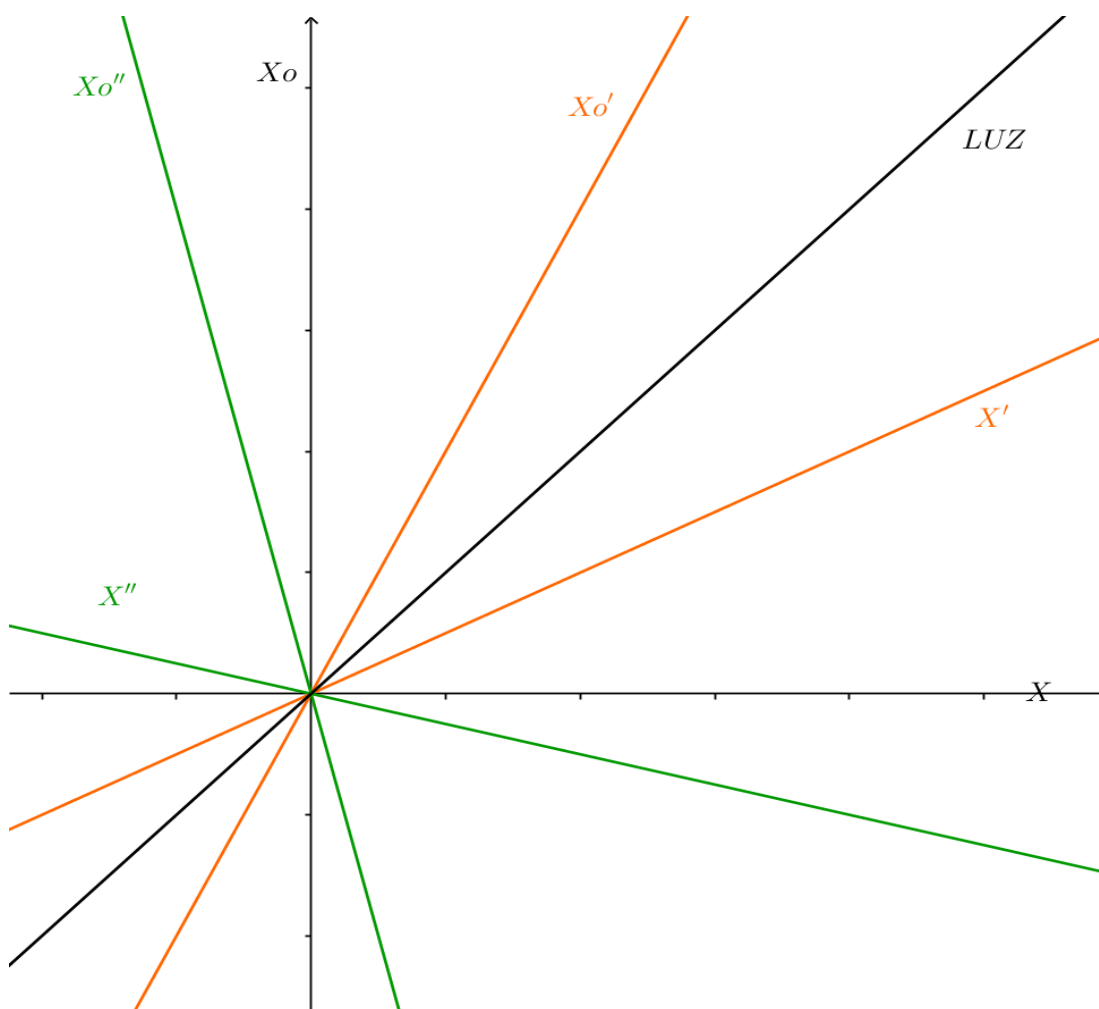
---



### Actividad 3:

La vida de una persona inicia en su nacimiento  $N$  y termina en su muerte  $M$ , dichos eventos están conectados causalmente.

- a) Represente en el diagrama de espacio-tiempo la línea de tiempo de esta persona suponiendo que viajó a lo largo de su vida con una velocidad constante  $v$  menor que la velocidad de la luz y mayor a la velocidad de  $S'$  (la velocidad de la persona puede ser cualquiera que cumpla los parámetros mencionados). Luego señale los eventos  $N$  y  $M$  e indique en el diagrama sus coordenadas para cada marco inercial  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ . (No se requiere determinar el valor numérico, basta con indicar las coordenadas en el diagrama)



- b) Teniendo en cuenta el carácter relativo de la simultaneidad y causalidad de dos eventos, y de acuerdo al resultado de la representación anterior, ¿puede

ser en algún marco de referencia la muerte  $M$  antes que el nacimiento  $N$ ? Explique su respuesta.

---



---



---



---



---

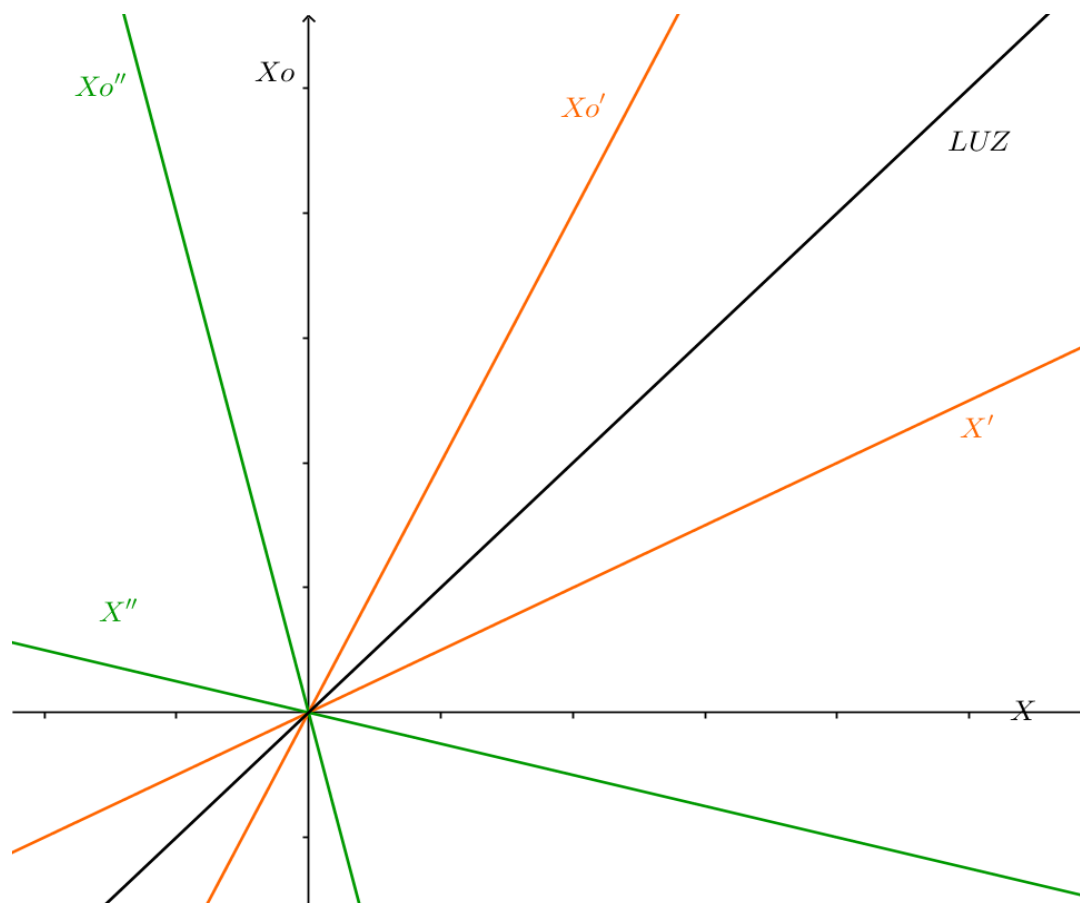


---



---

- c) Ahora represente en el siguiente diagrama de espacio-tiempo la línea de tiempo de ésta persona suponiendo que viajó a lo largo de su vida con una velocidad constante  $v$  mayor que la velocidad de la luz (caso que no es posible en la vida real) y señale los eventos  $N$  y  $M$ , y al igual que en el caso anterior, indique sus coordenadas en el diagrama para cada marco inercial  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ .



- d) Teniendo en cuenta las dos representaciones anteriores de N y M, ¿qué puede concluir acerca de la causalidad para eventos que están conectados causalmente como el nacimiento y muerte de las personas?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**HAS FINALIZADO LAS ACTIVIDADES**

**¡FELICITACIONES!**

**AHORA PODRÁS HABLAR DE MANERA MÁS ACERTADA SOBRE  
LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL.**