RESUMEN ANALÍTICO DE EDUCACIÓN-RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	El proceso de conjeturación a través de viñetas animadas.
Autor(es)	Velandia Carvajal, Manuel Alejandro Miranda Guerrero, Leidy Alejandra
Director	Molina Jaime, Oscar Javier
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2014, 62 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Sketch, conjeturación, acciones del estudiante, acciones del profesor, actividad demostrativa.

2. Descripción
Fundamentados en la necesidad del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G), del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), de producir material divulgativo para la formación inicial y continuada de profesores, sobre la aproximación metodológica que se utiliza en espacios académicos de la línea de Geometría del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UPN, hemos decidido orientar nuestro proyecto de grado al diseño de viñetas animadas (o Sketches) que ilustren acciones de estudiantes y profesor en el momento de enfrentarse a situaciones que requieran actividad demostrativa, en el marco de la aproximación metodológica antes mencionada. En tal sentido, se ha tomado como pretexto un escenario de clase virtual de grado noveno en el que se pretende abordar un problema relativo a cuadriláteros y se han producido 5 sketches con sus respectivas descripciones atendiendo a los marco de referencia utilizados.

3. Fuentes

Los referentes teóricos de este trabajo se clasifican en dos: utilidad de los sketches en los procesos de aprendizaje-enseñanza y referentes matemáticos en torno a la actividad demostrativa.

De los referentes teóricos relativos a los sketch se resaltan artículos concernientes a la utilidad de los comics en los procesos de enseñanza de Herbst, P. (2011); Chazan, D.; Ling Chen, C.; Weiss, M.; Vu-Minh Chieu. (2010) y Llinares (2007). En cuanto a los matemáticos se hace uso de dos diferentes tipos de referentes, los primeros en torno a la actividad demostrativa que son: Perry, Samper, Molina, Camargo (2014), Camargo (2010), Perry P, Samper C, Camargo L, Molina O. (2007), los segundos enfocados en las acciones de los estudiantes y del profesor en la actividad demostrativa sustentados por la tesis para título de magister de Luque, C.; Robayo, L. (2010); y un Conjunto de acciones del profesor propuestas por el grupo de investigación Æ•G de la Universidad Pedagógica Nacional, según el trabajo de investigación *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase* (2011).

4. Contenidos

El escrito inicia con una justificación en la que se resalta la utilidad de este trabajo. Posteriormente, se presenta el objetivo general y los objetivos específicos que subyacen de él. Después se expone el capítulo que contiene los referentes teóricos que soportan el estudio realizado; así, se ilustra brevemente la utilidad de los comics en los procesos de enseñanza – aprendizaje en cursos de formación inicial o continuada de profesores, una conceptualización del constructo actividad demostrativa del grupo *Æ•G* y una descripción de la aproximación metodológica para la enseñanza del mismo grupo. El capítulo siguiente revela, las cinco fases que tuvieron lugar para la ejecución del estudio, con sus respectivas descripciones. A continuación se encuentra el capítulo en el que se describe cada uno de los sketches realizados, teniendo como fundamento las bases teóricas expuestas en la sección referentes teóricos. Por último, se exponen las conclusiones del estudio realizado.

Al escrito se le adjunta un CD con los cinco sketches llamados, respectivamente, Sketch 1, Sketch 2, Sketch3, Sketch 4 y Sketch 5.

5. Conclusiones

- Se considera que los objetivos propuestos en el estudio, se han alcanzado. Muestra de esto es que se diseñó y describió cada uno de los sketches utilizando de una manera satisfactoria los referentes teóricos, intentado ilustrar aspectos relevantes de la

aproximación metodológica para la enseñanza propuesta por el grupo Æ•G, del proceso de conjeturación de la Actividad Demostrativa y de acciones de los actores en el marco de tal aproximación y dicha actividad. • Se estima que el material creado es apto para estudiantes en formación inicial o continuada de profesores que quieran tener un referente respecto de un ambiente virtual, que puede ser real, de una clase donde se quiere abordar asuntos de geometría en un contexto donde se quiere valorar la formulación de conjeturas.

Elaborado por:	Manuel Alejandro Velandia Carvajal. Leidy Alejandra Miranda Guerrero.
Revisado por:	Molina Jaime, Oscar Javier

Fecha de elaboración del Resumen:	15	07	2014

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

EL PROCESO DE CONJETURACIÓN A TRAVÉS DE VIÑETAS ANIMADAS

REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR EL TITULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

MANUEL ALEJANDRO VELANDIA CARVAJAL, ALEJANDRA MIRANDA GUERRERO

21/07/2014

Fundamentados en la necesidad del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G), del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), de producir material divulgativo para la formación inicial y continuada de profesores, sobre la aproximación metodológica que se utiliza en espacios académicos de la línea de Geometría del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UPN, se orientar este proyecto al diseño de Sketches que ilustren acciones de estudiantes y profesor en el momento de enfrentarse a situaciones que requieran actividad demostrativa, en el marco de la aproximación metodológica antes mencionada.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es diseñar viñetas animadas que ilustren acciones de estudiantes y profesor en el momento de enfrentarse a situaciones que requieran actividad demostrativa, en el marco de la aproximación metodológica del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional. En tal sentido, se ha tomado como pretexto un escenario de clase virtual de grado noveno en el que se pretende abordar un problema relativo a cuadriláteros. Para ilustrar la manera como se llevó a cabo el trabajo y por ende, la manera como se intentó lograr el propósito expuesto, a continuación se presenta la estructura de este documento.

El escrito inicia con una justificación en la que se resalta la utilidad de este trabajo para los profesores del espacio académico "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría", y seminarios de la Maestría en Docencia de las Matemáticas. Posteriormente, se presenta el objetivo general del trabajo, y con él, los objetivos específicos que subyacen de él. Después se expone el capítulo que contiene los referentes teóricos que soportan el estudio realizado; así, se ilustra brevemente la utilidad de los comics en los procesos de enseñanza – aprendizaje en cursos de formación inicial o continuada de profesores, una conceptualización del constructo actividad demostrativa del grupo Æ•G y una descripción de la aproximación metodológica para la enseñanza del mismo grupo. El capítulo siguiente revela, a manera de aspecto metodológico, las cinco fases que tuvieron lugar para la ejecución del estudio, con sus respectivas descripciones. A continuación se encuentra el capítulo en el que se describe cada uno de los sketches realizados, teniendo como fundamento las bases teóricas expuestas en la sección referentes teóricos. Por último, se exponen las conclusiones del estudio realizado.

2. JUSTIFICACIÓN

Fundamentados en la necesidad del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G), del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), de producir material divulgativo para la formación inicial y continuada de profesores, sobre la aproximación metodológica[1] que se utiliza en espacios académicos[2] de la línea de Geometría del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UPN, hemos decidido orientar nuestro proyecto de grado al diseño de viñetas animadas (o sketches) de situaciones de clase que pretenden ilustrar acciones tanto de estudiantes como de profesores en el marco de tal aproximación.

Los sketches están asociados a sesiones de clases (filmadas) de los espacios académicos referenciados, con el fin de mostrar en la práctica elementos de la aproximación metodológica para la enseñanza y cómo éstos pueden favorecer o no aspectos relevantes de la actividad demostrativa en la que se pretende, los estudiantes se involucren.

Con lo anterior, específicamente buscamos diseñar un material de apoyo a los profesores del espacio académico "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría", y seminarios de la Maestría en Docencia de las Matemáticas ("Didáctica de la Geometría", y "Conceptos y Procesos de Geometría Escolar"), que puedan usar con el objetivo de destacar algunas formas de gestionar la Aproximación Metodológica antes nombrada en la práctica y cómo se puede lograr involucrar a los estudiantes en procesos de la Actividad Demostrativa con sus respectivas acciones.

Consideramos que usando bondades del material multimedia mediante la combinación de texto, color, gráficas, animaciones, video y sonido en un mismo entorno, es posible optimizar episodios de clase para el fin expuesto. La literatura (e.g. Herbst, Chazan,

[1]Esta aproximación metodológica busca vincular a los estudiantes en la actividad demostrativa.
[2] Los espacios son Elementos de Geometría, Geometría Plana y Geometría del Espacio

LingChen, Weiss, Vu-Minh Chieu, (2011) considera, por ejemplo, que una sesión de clase video-grabada aun estando editada, puede conservar defectos técnicos (si no está filmada desde un principio por expertos y con la infraestructura pertinente) e incluir aspectos irrelevantes que puedan desviar la atención de la audiencia (para este caso, de los estudiantes) de aquello que se quiere ilustrar. Ello se puede evitar en la medida que se diseñen viñetas animadas en la que medien objetivos específicos y claros. Ese es el propósito central de este trabajo de grado.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar material de apoyo (sketches) para espacios académicos relativos a la didáctica de la geometría de los distintos programas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que enfaticen en la gestión de algunos elementos de la Aproximación Metodológica del grupo de investigación Æ•G para favorecer el involucramiento de estudiantes en acciones de la actividad demostrativa.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Escoger episodios de clases de geometría plana y sobre ellos material fílmico que sea ilustrativo sobre elementos de la Aproximación Metodológica e involucramiento de estudiantes en acciones de la actividad demostrativa.
- Diseñar Sketches con base en los episodios escogidos con anterioridad.
- Identificar referentes teóricos que fundamenten la realización de material de apoyo como el que se pretende realizar.
- Realizar un documento que describa los Sketches diseñados desde los referentes “Aproximación Metodológica”, acciones de los estudiantes y profesor en el marco de tal Aproximación y “Actividad Demostrativa”.

4. MARCO TEÓRICO

Este capítulo pretende mostrar la perspectiva conceptual que sustenta el presente trabajo, el cual tiene por objeto, como ya se ha mencionado, la elaboración de sketches como material de apoyo para el profesor, en espacios académicos relativos a la didáctica de la geometría de los distintos programas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que enfaticen en algunos elementos de la Aproximación Metodológica del grupo de investigación Æ•G. Para la elaboración de dichos sketches se ha tenido en cuenta grabaciones de video de una clase de Geometría Plana, cuya metodología para la enseñanza es la Aproximación Metodológica referenciada.

Con la anterior perspectiva, los referentes del estudio se centran en tres asuntos: (i) la utilización de comics como herramienta útil en los procesos de enseñanza – aprendizaje en cursos de formación inicial o continuada de profesores; (ii) el constructo actividad demostrativa del grupo Æ•G y (iii) la aproximación metodológica para la enseñanza del mismo grupo.

4.1 UTILIDAD DE LOS SKETCHES EN PROCESOS DE ENSEÑANZA–APRENDIZAJE EN CURSOS DE FORMACIÓN INICIAL O CONTINUADA DE PROFESORES

Esta sección tiene el propósito de dar a conocer la postura de diferentes autores sobre la utilidad de los sketches en el proceso de formación de docentes. Para iniciar, se presenta una definición de las palabras "comic" y "sketch"; luego se expone la postura de diversos autores, para con ello ilustrar el objetivo de usar sketches en el presente trabajo.

En la RAE (consultado en línea el 04 de Febrero de 2014) se define *cómic* como "Serie o secuencia de viñetas con desarrollo narrativo.", o "Libro o revista que contiene estas viñetas.", entendiendo por viñeta a "cada uno de los recuadros de una serie en la que con dibujos y texto se compone una historieta". A su vez, la RAE define *historieta* como una "serie de dibujos que constituye un relato cómico, dramático, fantástico, policíaco, de aventuras, etc., con texto o sin él…".

Como se infiere del párrafo anterior, se puede entender por *cómic* una secuencia de recuadros en la que con dibujos y texto se compone un relato de cualquier índole. En el inglés, la palabra comic tiene el mismo significado al expuesto por la RAE. No obstante lo anterior, en este idioma se suele usar la palabra *sketch* en un sentido similar a la de cómic pero con un ingrediente más: secuencia de recuadros en la que con dibujos y texto se compone un relato de cualquier índole dando las características esenciales sin los detalles. Precisamente, asumiendo esta última definición, y poniendo tal objeto en términos de su uso, Umberto Eco (Consultado en línea el 08 de febrero 2014) asegura que los *sketches* pueden reflejar los elementos esenciales de una situación que atiende a un contexto determinado.

En un sentido similar, Herbst (2011) concibe los *sketches* como un conjunto de símbolos que se pueden usar en un contexto educativo, específicamente en la formación docente. Argumenta lo anterior a partir de los siguientes asuntos:

- Permite analizar detalladamente una situación de enseñanza- aprendizaje.
- Aísla totalmente el entorno deseado de todos los posibles distractores que existan en dicha situación en tiempo real.
- Es de carácter secuencial, lo que permite un mejor análisis.
- Permite que se estudie una y otra vez.
- El lenguaje del cómic ayuda a entender mejor la realidad y el entorno cotidiano ya que surge de una necesidad en particular y por tanto se diseña según los requerimientos de la misma.
- Permite hacer estudios personalizados de algún aspecto de su contenido.

Llinares (2008) complementa la funcionalidad de los sketches de la siguiente manera. Específicamente el autor menciona que estos permiten:

- Determinar el potencial de una situación matemática.
- Explorar las posibilidades matemáticas de una situación problema.
- Centrar la atención en la relación entre lo matemático y lo didáctico.
- Comprender y reflexionar sobre aspectos de las “matemáticas escolares”.
- Analizar diferentes procesos de resolución que los estudiantes usan ante los diferentes problemas.
- Examinar los procedimientos usados por estudiantes y conjeturar sobre la comprensión matemática puesta de manifiesto.
- Identificar qué otras tareas necesitan ser presentadas y cuáles preguntas pueden formularse para optimizar la comprensión matemática de los estudiantes.
- Ampliar su propia comprensión de las matemáticas escolares y del potencial de las diferentes tareas para el aprendizaje de las matemáticas.
- Identificar sus propias concepciones sobre el aprendizaje matemático, la enseñanza, su papel como profesores y las situaciones matemáticas como instrumentos de aprendizaje.

- Expresar sus propias ideas didácticas y desarrollarlas cuando interpretan los procesos de aprendizaje matemático de los estudiantes.
- Mirar las situaciones de enseñanza con el propósito de comprender lo que sucede, lo que los estudiantes parecen estar pensando sobre las matemáticas o cómo influyen las cuestiones planteadas por el profesor en el pensamiento matemático de los alumnos.
- Fomentar la capacidad de indagación sistemática.

Dado el panorama anterior sobre los *sketches* y su utilidad en la formación de estudiantes para profesor, se puntualiza que en el presente trabajo este tipo de artefacto se elaborará a manera de videos de dibujos animados temáticos (cinco en total) en los que se pretende ilustrar las experiencias de un grupo de estudiantes de grado noveno en el marco de una clase donde se ha desarrollado un ambiente de actividad demostrativa. Específicamente se muestran momentos de clase en donde: (i) los estudiantes se involucran en el proceso de conjeturación a partir de la búsqueda de solución de un problema de geometría con el uso de un software de geometría dinámica, (ii) grupos de estudiantes socializan sus producciones (proceso de construcción, exploración y conjeturación), y (iii) se ilustran acciones de mediación por parte de la profesora en el marco de la aproximación metodológica que favorece la actividad demostrativa. Esté trabajo se enfoca exclusivamente en el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa que se expondrá en la sección siguiente.

4.2 ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Para describir la actividad demostrativa, se tomará como referencia el esquema de la ilustración 1 hecho por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional. Dicho esquema pretende ilustrar que la actividad demostrativa es un conjunto de acciones encadenadas, distribuidas en dos procesos, que permiten la construcción de la demostración matemática de un enunciado que se conjetura. La actividad demostrativa tiene como principio que todo lo que se conjetura debe ser justificado. Los dos procesos a los que se hace referencia son el de conjeturación y el de justificación.

Ilustración 1. Esquema actividad demostrativa.

El esquema resalta acciones de carácter heurístico que se encuentran trasversalmente en tales procesos; entre estas acciones está la *visualización* y la *exploración*.

Perry, Samper, Molina, Camargo (2014) aseguran que mediante la *visualización* se consigue información geométrica de una figura, identificando los elementos que la componen y algunas configuraciones que se pueden formar con ellos (de dimensión igual o menor que la de la figura inicial) o de una figura con información geométrica consignada mediante símbolos, con el ánimo de encontrar relaciones geométricas subyacentes. Requiere establecer nexos entre la figura y el saber previo para identificar, aislar y enfocar elementos de interés por medio de la vista, detectar o descubrir propiedades que inicialmente pasan desapercibidas, o evocar propiedades geométricas.

Arzarello y Arsac (2007 y 1978 respectivamente, en Camargo, 2010) determinan que la *exploración* hace referencia a la actividad empírica de tipo investigativo que busca propiedades que puedan ser generalizadas mientras se resuelve un problema abierto. Esta actividad fluye a través de construcciones geométricas, (representaciones) bien sea en papel o en software y sirven como puente entre la intuición y el concepto formal de la geometría, sin estas representaciones según Mariotti, (1997, 2005; citado en Camargo, 2010), se corre el riesgo de realizar una actividad carente de significado.

Descritas someramente algunas acciones heurísticas de la actividad demostrativa, nos adentramos en la descripción de los procesos que la componen.

4.2.1 PROCESO DE CONJETURACIÓN

Este proceso tiene por finalidad la formulación de un enunciado condicional de la forma "si entonces", obtenido gracias a la observación, evidencias empíricas y regularidades halladas en un objeto matemático explícito, cuyo valor de verdad no está definido (aunque posea un alto nivel de certeza), pero que, teniendo a la mano una axiomática determinada, puede llegar a demostrarse y de esta manera, tener validez dentro de un sistema teórico determinado. De este proceso se desglosan las siguientes acciones:

- ***Detectar propiedades***: acción que se lleva a cabo por medio de la exploración empírica de la situación dada, que conlleva a la identificación de una propiedad invariante, es decir, una característica que no varía bajo un conjunto determinado de condiciones.
- ***Verificar propiedades***: cobra sentido después de haber detectado las propiedades invariantes inducidas. Consiste en hacer una nueva exploración pero ahora con sentido de comprobación de estas propiedades.
- ***Formular conjetura***: para llegar a esta acción es ideal haber ejecutado las primeras dos acciones, por lo menos la primera de ellas. Consiste en hacer la formulación de un enunciado condicional que reporte la propiedad inducida como consecuencia de las condiciones impuestas en la exploración.
- ***Corroborar la conjetura***: Permite determinar si las propiedades dadas en el antecedente basta para tener como consecuencia necesaria las propiedades que se indican en el consecuente de la conjetura, y si este contiene todas las conclusiones posibles.

4.2.2 PROCESO DE JUSTIFICACIÓN

La justificación matemática es un razonamiento deductivo en el cual se enlazan argumentos[3] dependientes entre sí para justificar la validez de la conjetura antes establecida. Las acciones que componen este proceso son:

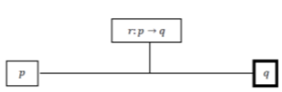
- Selección de elementos teóricos o empíricos: en esta acción se escogen los elementos que podrían sustentar la justificación.
- Construcción de argumentos: en esta acción se organizan los elementos escogidos anteriormente de manera deductiva.
- Formulación de la justificación: en esta acción se redacta de manera formal (haciendo uso del formato y la notación establecida) los argumentos construidos anteriormente.

Vale la pena precisar que las garantías de los argumentos son de diversa índole; esta diferenciación provoca a su vez diversidad en los tipos de justificación. Para este caso consideramos tres: la explicación de validación, la prueba y la demostración.

- *La explicación de validación* es una justificación cuyas garantías[4] provienen de fuentes no teóricas (empíricas, de autoridad, rituales, de convicción personal), en particular se trabaja con argumentos deductivos[5]

[3]"Un *argumento* es un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y conclusión) y una general (garantía)" existen tres tipos de argumento inductivo, deductivo y abductivo. Para ello revisar Perry, Samper, Molina, Camargo (2014).

[4] Garantía: Entiéndase *garantía* como aquel enunciado que permite conectar los *datos* con la *conclusión*. En un curso cuyo propósito es que los estudiantes aprendan a demostrar, se pretende que dicho enunciado sea una condicional que pertenezca al sistema teórico con el que cuenta la comunidad de la clase. En el proceso de justificación de la actividad demostrativa, se pretende que un argumento conformado por la terna *datos*, *garantía*, *conclusión* (y que hace parte de la demostración de una proposición) sea deductivo; esto es, teniendo un dato p, y una garantía $p \rightarrow q$, se pueda concluir q mediante un esquema de razonamiento válido (Modus Ponendo Ponens).

[5]esquema de un argumento deductivo 

- En *la prueba* las garantías son teóricas pero no todas son elementos del sistema teórico (local o global) dentro del cual se trabaja. En este tipo de justificación también puede ocurrir que no se incluyen explícitamente todas las afirmaciones esenciales.

- La *demostración* es la justificación en la cual toda garantía proviene del sistema teórico con el que se cuenta e incluye todos los argumentos esenciales.

Para concluir, decimos que el producto de la actividad demostrativa es un teorema matemático entendido este "como un sistema conformado por un enunciado, su demostración y la teoría que la guía y enmarca".

Para el trabajo de grado que acá nos convoca, nos interesa solo el proceso de Conjeturación de la Actividad Demostrativa. Específicamente, los videos que se diseñan tienen como propósito ilustrar acciones de los estudiantes que tienen que ver con dicho proceso. Más adelante se precisará el referente que se tendrá en cuenta para explicitar tales acciones y su relación con las acciones del proceso de conjeturación.

4.3 APROXIMACIÓN METODOLÓGICA

Dado que los comics pretenden ilustrar momentos de clases en donde se llevan a cabo acciones de la Actividad Demostrativa ilustradas en la sección anterior, consideramos necesario mostrar no solamente producciones de los estudiantes en relación con ello sino también presentar la aproximación metodológica para la enseñanza diseñada por el grupo Æ•G para favorecer la actividad demostrativa de los estudiantes en clase. Para ello, en esta sección primero describimos, groso modo, las características de tal aproximación metodológica. Enseguida, para especificar las acciones que pueden llevar a cabo los estudiantes durante el proceso de conjeturación, usamos como referente el trabajo de grado de maestría "Emergencia de un ambiente de actividad demostrativa con estudiantes en edad extraescolar" realizado por los estudiantes Carolina Luque y

Luis Robayo (2011). Finalmente, para precisar acciones que puede realizar un profesor en el marco de tal aproximación metodológica usamos el estudio de investigación del grupo Æ•G "Conjeturas y organización del contenido matemático en clase" de 2011.

4.3.1 DESCRIPCIÓN GENERAL

Al estudiar el entorno de una clase, se puede fácilmente verificar que hay una pequeña comunidad conformada por el profesor y los estudiantes; dicha comunidad tiene un objetivo común, construir colectivamente un sistema axiomático local. Este sistema axiomático local, no es más que el conjunto de los conceptos o conocimientos geométricos que son necesarios y que van surgiendo a medida que la clase se va desarrollando. Los conocimientos geométricos son definiciones, postulados y teoremas que nacen en el contexto de la clase y que son necesarios para justificar conjeturas o hipótesis acerca de las propiedades de las figuras geométricas que se estén estudiando en el momento.

En ese sentido, el enfoque metodológico para la enseñanza de la demostración en geometría plana se sumerge en una perspectiva sociocultural en donde los estudiantes, participan en la ampliación del sistema axiomático local en dos aspectos, proponiendo conjeturas o involucrándose en la demostración de las mismas.

En la aproximación propuesta por el grupo de investigación Æ•G sobresalen tres elementos que permiten que exista un entorno favorable para aprender a demostrar, a saber: las situaciones problema propuestas a los estudiantes, la interacción social de la clase y el uso de la geometría dinámica.

Las situaciones problema son planteadas por el profesor, procurando que le permitan desarrollar al estudiante la acción de conjeturación del constructo actividad demostrativa del grupo de investigación Æ•G. En los sketches, el problema que dará origen a toda esa actividad demostrativa es el siguiente:

> Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad "una diagonal biseca a la otra". Provea el proceso de construcción, el proceso de exploración, formule una conjetura y justifíquela.

La interacción social tiene lugar en dos momentos diferentes. El primero de ellos (estudiante-estudiante) cuando los estudiantes hacen su trabajo en equipo dando a conocer sus ideas y construcciones en torno al enunciado. El segundo (estudiante-profesor) que a su vez se manifiesta en dos ocasiones, una cuando el profesor da la instrucción de la actividad y dos, cuando socializan con el profesor su experiencia frente a la situación dada anteriormente poniendo al descubierto sus ideas y los posibles enunciados que logaron construir. Para nuestro caso, el primero de estos momentos se hace evidente en el segundo y tercer sketch; el segundo momento se ilustrará en el primero, cuarto y quinto sketch.

El tercer elemento de la aproximación es el uso de la geometría dinámica que se constituye en la herramienta que apoya el desarrollo de la acción de conjeturación y la socialización de la misma. A continuación se hará énfasis en la importancia del software para el presente trabajo.

El software de geometría dinámica que se utiliza es Geogebra, que cuenta con las aplicaciones necesarias para la realización de los diferentes procesos de la actividad demostrativa. Según Camargo (2010), el software de geometría dinámica, sirve como mediador importante en la enseñanza experimental porque:

- Permite entender el papel que cumplen todas las condiciones del antecedente de un enunciado de la forma si-entonces.
- Apoya la interpretación de relaciones geométricas que pueden quedar 'ocultas' bajo enunciados que esconden la generalidad de la situación.
- Propicia la creatividad, a través de construcciones auxiliares, para elaborar argumentos que llevan a la demostración de teoremas.
- Crea situaciones que dan lugar a suficientes resultados para poder construir una porción del sistema axiomático.

- Determina la validez de conjeturas formuladas.
- Favorece descubrir relaciones geométricas entre las partes de figuras, que se podrían involucrar en la demostración.

A su vez Laborde (2000, citada por Camargo, 2010), asegura que el software permite articular procesos de visualización y formulación de enunciados geométricos, a través de la acción de arrastre.

En los sketches diseñados, pretendemos ilustrar el uso que estudiantes pueden hacer del software Geogebra para solucionar el problema antes expuesto. Como se ha dicho en lo escrito anteriormente, los sketches pretenden ilustrar los tres elementos de la Aproximación Metodológica. En tal sentido, para efecto de la comprensión de los lectores, utilizaremos los mismos elementos como parte de los descriptores de los videos. En el capítulo cuarto precisaremos tal descripción.

4.4 ACCIONES DE LOS ESTUDIANTES EN EL MARCO DE UN PROCESO DE CONJETURACIÓN

Anteriormente se dijo que para especificar las acciones que pueden llevar a cabo los estudiantes durante el proceso de conjeturación usamos como referente el trabajo de grado de maestría "Emergencia de un ambiente de actividad demostrativa con estudiantes en edad extraescolar" realizado por Carolina Luque y Luis Robayo en 2010. Este trabajo de grado usa como referente las fases que propone Boero para construir un teorema; utilizamos este trabajo con el propósito de describir las acciones de los estudiantes en términos de la actividad demostrativa. Luque y Robayo (2010) proponen seis fases, tres de ellas relativas a la conjeturación y las restantes dedicadas al proceso de justificación. Como el presente trabajo se dedicará al proceso de conjeturación se hará uso exclusivo de dos de las tres primeras fases[4]. Estas son:

[4] Las fases para la construcción de un teorema que sugieren Luque y Robayo (2010) son: I)reconocimiento de las propiedades invariantes, II)formulación del enunciado de la conjetura de acuerdo con convenciones culturales compartidas, III)exploración del contenido de la conjetura y los límites de la validez de la misma, IV)selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva, V)organización de la cadena de argumentos en la forma de prueba que es

I. Reconocimiento de la propiedad invariante [FI].

II. Formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidas [FII].

Cada fase está conformada por indicadores y cada indicador por las acciones de los estudiantes que es lo que propiamente nos incumbe; ahora bien, a continuación se hará una descripción de cada fase y de la relación que existe entre ella y la actividad demostrativa que se evidenciará en los sketches.

4.4.1 FASE I: Reconocimiento de la propiedad invariante (FI)

Consiste en la búsqueda y hallazgo de una generalización o regularidad en torno a la situación planteada, los indicadores que la componen son:

1. *Indicador:* Interpretación de la situación

Hace referencia a la forma como el estudiante entiende el enunciado de la situación problema a tratar respecto a sus condiciones y a la pregunta que se expone, en este caso "Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad "una diagonal biseca a la otra".

2. *Indicador*: Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema

Se refiere a la construcción de figuras geométricas. Para el presente caso, las construcciones pueden ser robustas (no se modifican sus condiciones bajo la opción de arrastre) o blandas (se llega a la figura geométrica deseada bajo la opción de arrastre) pues habrá ocasiones en las que los estudiantes partan del cuadrilátero para detectar propiedades y otras en las que construyan las diagonales de tal manera que se bisequen y en torno a ello empiecen a buscar los diferentes tipos de cuadriláteros.

aceptable desde el punto de vista de los estándares de matemáticas vigentes y por último VI) aproximación a la prueba formal.

3. *Indicador: Verificación de la construcción*

Después de obtener la construcción de la figura geométrica sobre la que se debe trabajar, el estudiante utiliza las herramientas propias del software con el fin de corroborar que dicha construcción satisface las condiciones de la situación dada. Se establece la relación de este indicador con la acción de visualización de la actividad demostrativa, ya que se requiere hacer un reconocimiento de las partes que componen la figura geométrica.

4. *Indicador: exploración de la construcción*

La relación que existe entre esta acción y la acción de exploración de la actividad demostrativa es indudable, pues se requiere una actividad empírica de tipo investigativo que busque propiedades que puedan ser generalizadas mientras se resuelve un problema abierto.

A continuación se presenta una tabla que reúne todos los elementos de la fase I. Esto es, sus respectivos indicadores con algunas de las acciones específicas que los estudiantes pueden llevar a cabo; demás, cada indicador, es relacionado con acciones de la Actividad Demostrativa; se aclara que la fase uno está directamente relacionada con la acción "detectar propiedades" de la actividad demostrativa.

INDICADORES	POSIBLES ACCIONES DE LOS ESTUDIANTES	ACCIÓN DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA
Interpretación de la situación.	Identifica objetos geométricos involucrados en las situaciones propuestas.	
	Reconoce y señala qué es dado o qué se pide resolver.	
	Manifiesta implícita o explícitamente posibles estrategias o hipótesis de solución.	
	Realiza representaciones gráficas en Geogebra teniendo en cuenta las condiciones y propiedades invariantes de los objetos involucrados.	

Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema.	Realiza la construcción evocando procedimientos de construcción previos.	Exploración empírica de la construcción para detectar propiedades.
	Realiza construcciones que atienden a las propiedades de los objetos geométricos involucrados pero que no mantienen las propiedades ante la acción de arrastre.	
	Construye representaciones de las situaciones con base en las propiedades de los objetos geométricos involucrados logrando que dichas propiedades se mantengan ante la acción de arrastre.	
Verificación de la construcción.	Usa herramientas de medición, arrastre y propiedades específicas, para verificar el cumplimiento de las condiciones de la situación o las relaciones entre los objetos geométricos involucrados en la misma.	
	Compara el enunciado de la situación con la construcción realizada para verificar la correspondencia entre las dos representaciones.	Exploración empírica de la construcción para detectar propiedades.
	Corrige errores de la construcción.	
	Complementa elimina u oculta objetos geométricos y etiquetas de la construcción con miras a mejorar la interpretación de la misma.	
Exploración de la construcción.	Utiliza herramientas en Geogebra para determinar propiedades específicas (paralelismo, perpendicularidad...) de la representación gráfica.	Exploración empírica de la construcción para detectar propiedades.
	Comprueba resultados obtenidos al manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante.	

Tabla 1: Fase uno, reconocimiento de la propiedad invariante.

4.4.2 FASE II: Formulación del enunciado de la conjetura de acuerdo con convenciones culturales compartidas (FII)

Consiste en dar cuerpo a todas o algunas de las acciones hechas en la categoría anterior, por medio de un enunciado que atienda a la estructura y al lenguaje que se ha institucionalizado en el aula de clases; en dicho enunciado se distingue el antecedente del consecuente aunque aún no posea una estructura de la forma "*si entonces*". Los indicadores y las acciones que conforman esta categoría son expuestos en el trabajo que aquí se ha referenciado de la siguiente forma:

<table>
<tr><th>INDICADORES</th><th>POSIBLES ACCIONES DE LOS ESTUDIANTES</th><th>ACCIÓN DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Verificación del invariante enunciado en la conjetura.</td><td>Utiliza el arrastre o toma medidas con miras a verificar el invariante encontrado.</td><td rowspan="2">Verificar propiedades.</td></tr>
<tr><td>Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Estructura del enunciado.</td><td>Identifica y hace explícita la relación entre antecedente y consecuente aludiendo a su dependencia en el momento de formular la conjetura.</td><td rowspan="5">Formular conjetura.</td></tr>
<tr><td>Utiliza el formato condicional "si…entonces" en la escrituras de la conjetura, haciendo explícito el antecedente y el consecuente.</td></tr>
<tr><td>Explicita el antecedente y el consecuente pero no escribe la conjetura en el formato condicional.</td></tr>
<tr><td>Tiene en cuenta las convenciones establecidas en la clase en términos del lenguaje y notación al nombrar objetos geométricos involucrados.</td></tr>
<tr><td>Usa definiciones o hechos geométricos del marco referencial para describir la conjetura.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente en la conjetura.</td><td>Reconocer la relación entre antecedente y condiciones impuestas en la situación.</td><td rowspan="2">Formular conjetura.</td></tr>
<tr><td>Reconoce la relación entre consecuente e invariantes encontrados.</td></tr>
</table>

Verificación de la formulación de la conjetura.	Identifica y explicita sí sobran o faltan propiedades o palabras para escribir correctamente el enunciado.	Corroborar conjetura.
	Corrobora que las condiciones dadas estén en el antecedente y las propiedades invariantes encontradas en el consecuente.	

Tabla 2: Fase dos, formulación del enunciado de la conjetura de acuerdo con convenciones culturales.

Los sketches pretenden ilustrar un ambiente de clase escolar con estudiantes de grado noveno en el que ya existe un lenguaje y una axiomática institucionalizada y en el que se espera se den algunas (si no son todas) de las acciones aquí mencionadas en el momento de verificar, estructurar y formular la conjetura.

4.5 ACCIONES DEL PROFESOR

Como se dijo anteriormente, en los sketches se ilustran momentos de clase en los que intervienen el docente y los estudiantes; esta sección se dedicará a describir las acciones del profesor tendientes a favorecer actividad demostrativa en el marco de la aproximación específica.

El grupo de investigación Æ•G, ha detectado un conjunto de acciones del profesor en torno a varios asuntos. Para este trabajo se tendrán en cuenta los siguientes: la conceptualización de objetos y relaciones, la comprensión y el uso del enunciado condicional, y la conjetura como solución al problema propuesto.

Esto, puesto que son los asuntos que se relacionan con lo que se desea ilustrar en los comics. Vale la pena aclarar que lo que se pretende es dar a conocer las pautas que permiten caracterizar al profesor en un ambiente de actividad demostrativa, ellas son:

De la conceptualización de objetos y relaciones se tienen en cuenta:

- Enunciar o pedir el enunciado de una proposición de manera sintética usando el término asignado dentro del sistema teórico en construcción.
- Explicitar o destacar qué elementos del sistema teórico están involucrados en lo que se afirma.

- Promover que las representaciones hechas con el artefacto estén supeditadas al sistema teórico disponible.
- Indagar acerca del significado personal de un concepto. Preguntar por el significado personal de un objeto o relación de índole matemática.

De la comprensión y el uso del enunciado condicional se resaltan las siguientes:

- **Artefacto-antecedente y consecuente**: promover la determinación de la relación entre el "objeto geométrico", el antecedente y el consecuente.
- **Identificación-antecedente y/o consecuente:** Identificar o solicitar la identificación de condiciones construidas y las propiedades encontradas.
- **Dependencia-conjetura:** Utilizar lo hecho y obtenido con el objeto geométrico como referencia para evaluar si la conjetura expresa la dependencia que dicho objeto exhibe.
- **Conjetura-condicional:** Pedir que el enunciado se escriba en el formato "si entonces".

De la conjetura como solución al problema propuesto se resaltan:

- **Problema-control teórico:** Dominar el universo teórico en que se va a trabajar para asegurar que los elementos matemáticos que subyacen a las propuestas de solución del problema estén enmarcados en el sistema teórico con que se cuenta o permitan la ampliación del sistema teórico local en el que se enmarca el problema.
- **Síntesis-foco de atención**: Promover una lluvia de ideas entre los estudiantes, en la que se resalten los elementos útiles para producir la conjetura.
- **Indagar sobre signos:** indagar sobre los signos producidos por los estudiantes.
- **Abordar imprecisiones:** abordar imprecisiones (suprimir o destacar) matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablada).

5. FASES DEL ESTUDIO

Esta sección pretende describir el proceso metodológico llevado a cabo para desarrollar el estudio. Para ello, precisamos las fases que permitieron orientar su estructuración y por ende, el documento mismo. Las fases son: i) revisión y decantación de bibliografía que guarda relación con los propósitos del estudio, ii) construcción del referente teórico en el que se puntualiza la utilidad de la bibliografía revisada en la fase anterior, iii) descripción del proceso de selección de insumos para la elaboración de los sketches animados y elaboración de los mismo iv) descripción del contenido de cada uno de los sketches con base en elementos del referente teórico, y v) formulación de conclusiones generales respecto al trabajo realizado y realización del documento final. A continuación se hace una descripción de las fases mencionadas.

5.1 FASE UNO. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En esta fase del estudio, centramos la revisión de literatura en relación con tres asuntos específicos. El primero de ellos corresponde a bibliografía referente a la actividad demostrativa y a los procesos y acciones que pueden caracterizarla; para ello se tuvieron en cuenta el Capítulo uno del libro "Geometría plana: un espacio de aprendizaje" (Perry, Samper, Camargo, y Molina, 2014), y la tesis de doctorado "Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria"(Camargo, 2010).

El segundo apuntó a extraer la información sobre la utilidad de Sketches en la Educación Matemática, para lo cual se tuvo como referente los artículos: "Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas" (Llinares, Valls y Roig, 2008), y "Using comics-based representations of teaching, and technology." (Herbst, 2011).

El tercero está directamente relacionado con acciones de los estudiantes y docentes en un ambiente de actividad demostrativa. Para ello, se contó con la tesis de pregrado de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN "Cabri, un camino para propiciar unidad cognitiva: un estudio de casos" (Delgado y Peña, 2010), la tesis de Maestría en Docencia de las Matemáticas "Emergencia de un ambiente de actividad demostrativa con estudiantes en edad extraescolar" (Luque y Robayo, 2011) y el estudio de investigación del grupo Æ•G "Conjeturas y organización del contenido matemático en clase" de 2011.

5.2 FASE DOS. CONSTRUCCIÓN DEL MARCO TEORICO

Para la elaboración del referente teórico del estudio se tuvieron en cuenta asuntos sobre los cuales se hizo la búsqueda de la literatura descrita antes. Específicamente, los referentes teóricos presentan, en su orden, i) una descripción con la utilidad de los sketches en los procesos de enseñanza– aprendizaje en cursos de formación inicial o continuada de profesores, ii) una caracterización de la actividad demostrativa con sus respectivos procesos, conjeturación y justificación, haciendo énfasis en el primero dado que es este el que se pretende ilustrar en los sketches; y iii) una descripción de la aproximación metodológica para la enseñanza propuesta por el grupo Æ•G dado que de esta se desprenden sugerencias de acciones de los estudiantes y los docentes en el marco de los proceso de la actividad demostrativa.

5.3 FASE TRES. DECANTACIÓN Y RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN PARA DISEÑO DE SKETCHES

Para el desarrollo de esta fase, en primera instancia se contó con grabaciones de episodios de clases de un espacio académico de Geometría Plana del segundo semestre del 2007 de la Universidad Pedagógica Nacional. De estos videos se extrajo información valiosa para diseñar los escenarios de clase, y comportamientos de los estudiantes y el profesor frente en la actividad demostrativa en el marco de la aproximación metodológica.

Paralelo a ello, se tomaron decisiones en cuanto al tipo de programas a usar para evidenciar las acciones del proceso de conjeturación (la actividad matemática) y a los que se usarían para la realización de las animaciones (sketches). Para lo primero, se decidió trabajar con el software Geogebra por su fácil utilidad y variedad de herramientas que facilitan la intervención de los estudiantes; para lo segundo, se hizo uso del software Flash Adobe, Premiere y Corel. Vale la pena precisar que se contó con personas reales (actores) cuya performance sobre el software se grabó con el programa de captación de pantalla "Camtasia"; este programa permitió grabar también las voces de los actores (i.e. voces de los personajes) en aquellos momentos.

Después de decidir los software con los que se trabajó, se empezó a seleccionar el contenido de cada uno de los videos. Para ello, en primera instancia se precisó que el proceso de la actividad demostrativa que se quería ilustrar era el de Conjeturación (abordar el proceso de justificación desbordaba el tiempo que se tuvo presupuestado para la elaboración del trabajo); a su vez, se seleccionó el problema de geometría que daría lugar a dicha actividad y que por ende los estudiantes (i.e., los personajes) abordarían. De igual manera, se determinaron las formas de exploración con el software que cada grupo de estudiantes realizaría para solucionar el problema; en total, se precisaron tres maneras de exploración y con ellas tres distintas soluciones al problema (ver capítulo cuatro). Lo anterior permitió precisar las acciones del profesor y de los estudiantes (con base en los referentes teóricos y en información primordial provista por el profesor Oscar Molina quien tiene experiencia en orientar el curso de Geometría Plana de la Universidad Pedagógica Nacional) que los personajes deberían enfatizar a la hora de actuar. Luego de lo anterior, se diseñó el libreto para cada sketches de tal forma que se correspondiera con aquellos elementos que se querían resaltar en cada uno de ellos, es decir: acciones de los estudiantes en el proceso de conjeturación, acciones del profesor en la presentación de la producción de cada grupo de estudiantes, aspectos de la aproximación metodológica, entre otros.

Después de elaborados los libretos, se iniciaron las grabaciones del audio de cada uno de los sketches; se construyó cada uno de los personajes teniendo en cuenta sus características particulares y se diseñó el entorno de clase. Finalmente se reunió todo lo mencionado anteriormente para formar una a una las animaciones, la primera de ellas orientada a la presentación de la situación y a las instrucciones de la clase por parte de la profesora; las dos siguientes enfatizando en la actividad por grupos de estudiantes (trabajo autónomo) y las últimas dos focalizadas en la interacción entre los diferentes grupos de estudiantes y el docente.

A continuación se hace una breve descripción de los pasos que se siguen para construir cada sketch:

Descripción de la realización de los sketches:

- Se escoge un programa de animación, en principio se decidió trabajar con el software llamado "Flash" de la suit Adobe.

- Se efectúa el diseño de los personajes, se pueden realizar aunque también se pueden hacer en Flash, se decidió realizarlo en "Corel Draw", como el programa no tiene ningún tipo de rostros o personajes prediseñados, todo se realiza desde la imaginación; también es posible tomar como base algún dibujo animado ya creado de internet, o de cualquier otra fuente.

- Después de tener los personajes diseñados, se procede a realizar el bosquejo del salón de clase, haciendo uso del mismo programa, se pueden utilizar imágenes ya existentes de fondo.

- Se decidió realizar las animaciones sobre unos videos anteriormente creados y grabados en donde se capturaba la construcción hecha en geogebra con un software llamado "Camtasia".Este último programa permite capturar lo realizado en el computador y además las voces de las personas que iban ejecutando el proceso de exploración.

- Luego de tener los videos de las construcciones y las voces, se procede a realizar la animación de las partes móviles de los cuerpos de cada personaje, para ello, el movimiento de la boca y de los brazos debe estar ajustado a las voces. Para el movimiento de los ojos, las manos y la boca, se deben dibujar al menos tres o cuatro posiciones diferentes que se verán mover y cambiar al reproducir la animación.

- Al realizar las animaciones, encontramos otro programa llamado "Swish max 2" que facilitaba la animación pero era muy lento en el momento de ver toda el sketch debido a que no permitía detenerlo para poder ver con exactitud las modificaciones. Por ello se decidió recortar los videos grabados en tres o cuatro partes para poder agilizar la animación en el último software mencionado.

- Por otro lado en "Power Point" se realizaron las imágenes que aparecen al principio y al final de cada Sketch.

- Por último en un programa llamado "Premier", que también pertenece a la suit de Adobe, se encapsulan todas las partes que conforman el sketch.

5.4 FASE CUATRO. DESCRIPCIÓN DE LOS VIDEOS

Después de hechos los sketches, se centró la atención en la descripción detallada de cada uno de ellos, teniendo como referencia los elementos descritos en el referente teórico (Ver capítulo 3 – 3.4). Para lo relativo a las acciones del estudiantes, se tuvo en cuenta el trabajo de grado de Luque y Robayo (2011), y para las acciones del profesor, la investigación "Conjeturas y organización del contenido matemático en clase" del grupo Æ•G (2011).

5.5 FASE CINCO. ELABORACIÓN DEL ESCRITO FINAL

Para dar por terminado el trabajo, se escribieron las conclusiones finales del mismo en relación con los objetivos planteados y se hacen algunos comentarios personales sobre la elaboración del mismo. Se consolidó un escrito que documenta el trabajo realizado.

6. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS SKETCHES

Este capítulo se centra en la descripción y breve análisis de cada uno de los cinco sketches diseñados, teniendo en cuenta elementos del marco referencial presentado en el capítulo dos. El primer sketch se enfoca en el papel del profesor en el momento de plantear a los estudiantes la tarea que el grupo debe abordar. Los tres siguientes se centran en la actividad de los estudiantes cuando abordan el problema; en este sentido, se pretende poner de manifiesto acciones que tienen que ver con i) las construcciones que ellos hacen en torno al enunciado propuesto por el profesor, ii) las respectivas exploraciones para establecer propiedades invariantes en tales construcciones y iii) la enunciación de tales conjeturas. El sketch restante se focaliza en la presentación de la producción de los estudiantes ante todos los miembros de la clase y en las acciones del profesor en el marco de tal actividad.

Específicamente, la descripción de cada uno de los sketches se presenta de la siguiente manera: en primera instancia, se expone una descripción general de lo que sucede en el sketch con el fin de contextualizar al observador del mismo. Luego, mediante una tabla de tres columnas para los sketch dos y tres, y cinco para el tres y el cuatro, se presenta una descripción mucho más concreta a la luz de los aspectos que se comentaron en el párrafo anterior; respecto al primer sketch la descripción se hará en torno a la acción instructiva del docente por lo que para este no se encontrará tabla. En este sentido, para el segundo y tercer sketches, las columnas de las tablas ilustran información concerniente a la *producción de los estudiantes*; la *fase e indicador* –según la propuesta de Luque y Robayo (2011), *y acciones de la actividad demostrativa*, que se corresponden con tal producción, y la *representación gráfica asociada* del sketch en el que tiene lugar dicha producción. Para el cuarto y quinto sketches, las columnas de la tabla informan sobre las acciones de los estudiantes y *la gestión del profesor, la acción* *del profesor* –a la luz de la propuesta del grupo Æ•G- asociada a tal gestión y el momento del sketch en el que esta gestión sucede.

6.1 DESCRIPCIÓN DEL SKETCH UNO

En este sketch se muestra como la profesora presenta e introduce la tarea que deben realizar los estudiantes, cuyo enunciado es:

Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca la otra", aclara que deben proveer el proceso de construcción y de exploración y por último formular una conjetura y justificarla. [0.00-0.23].

Específicamente, en este sketch, la profesora pone de manifiesto diferentes momentos o asuntos que deben suceder en el marco de una clase que pretende utilizar la aproximación metodológica para la enseñanza ya referenciada. Esto es (en los corchetes, se pode el periodo de tiempo en el sketch donde tiene lugar cada uno de estos):
Precisar que para el abordaje de la tarea se debe contar con definiciones como la definición de cuadrilátero, de cuadriláteros especiales y de bisecar, las cuales ya han sido construidas en la clase y consignadas en sus cuadernos [0.24-0.35].

Explicitar que para su abordaje se debe hacer uso del software de geometría dinámica Geogebra y que la producción de cada grupo debe ser diligenciada en el formato terminado para ello; en este formato se pregunta por el proceso de construcción y exploración, el enunciado de la(s) conjetura(s) formulada(s) y la justificación de la(s) misma(s) [0.37-0.44].

Manifestar a los estudiantes que la tarea debe hacerse en grupos de tres estudiantes [0.44-0.46].
Precisar que el tiempo con el que cuentan para la realización de la Tarea por grupos es de 30 minutos y que una vez hecho esto, cada grupo tendrá la oportunidad de presentar

su producción, de manera tal que todos los miembros de la clase tengan espacio de refutar, validar o complementar ideas propias o de otros [0.48-1.00].

6.2 DESCRIPCIÓN DEL SKETCH DOS

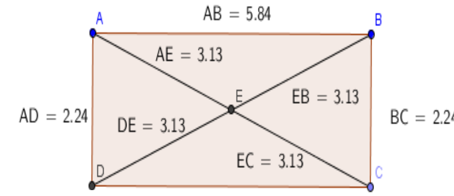
Este sketch ilustra una de las formas en la que un grupo de tres estudiantes (Lizeth, Adriana y Alejandra) aborda el problema[5]. Específicamente, (Alejandra) empieza por leer el enunciado del problema; el grupo lo interpreta y sus miembros aclaran lo que significa bisecar. Luego, se focalizan en determinar la manera en que van a abordar el problema; deciden realizar distintos tipos de cuadriláteros especiales. Empiezan por construir robustamente un rectángulo $ABCD$ y sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; enseguida toman las medidas de $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{AD}$ y creen haber descubierto un invariante, por lo que usan la herramienta de arrastre y determinan que se cumple en los rectángulos. Posteriormente, deciden investigar lo que sucede con un cuadrado; para esto arrastran uno de los vértices del rectángulo inicial hasta que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$ y se percatan que el invariante encontrado para los rectángulos también se cumple en los cuadrados. Hecho esto, deciden construir un rombo $ABCD$; para ello, recurren a la definición de rombo que está consignada en sus cuadernos y lo construyen de manera robusta usando circunferencias; trazan sus diagonales, miden los $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ hasta darse cuenta que el patrón hallado también se cumple para estos cuadriláteros. Hechas estas construcciones y sus respectivas exploraciones, se centran en precisar la conjetura que corresponde; en tal sentido, escriben: "en los rectángulos y en los rombos las diagonales se bisecan".

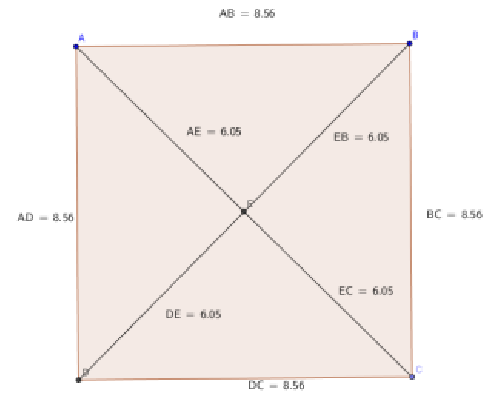
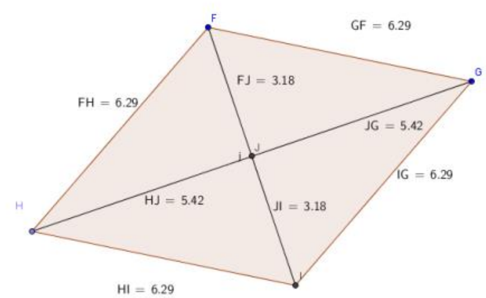
A continuación, se presenta la tabla específica de las acciones de las estudiantes asociadas a la producción que anteriormente se describió de manera general; en dicha tabla se usan las siguientes convenciones:

[5] El enunciado del problema es *Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad una diagonal biseca a la otra. Provea el proceso de construcción, el proceso de exploración, formule una conjetura y justifíquela*.

- ***A.D:*** Acciones de la actividad demostrativa.
- ***F.U:*** Fase uno.
- ***F.D:*** Fase dos.
- ***I:*** Indicador.
- ***A.E:*** Acciones de los estudiantes.

En negrilla, entre corchetes ([ ]) se destaca el intervalo de tiempo del video en donde tiene lugar lo que se describe.

ACCIÓN DEL ESTUDIANTE	ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA, FASE, INDICADOR Y ACCION(ES)	CONSTRUCCIÓN ASOCIADA
[0.15,0.28] Definen que es bisecar.	***F.U*** ***I:*** interpretación de la situación. ***A.E:*** Identifica objetos geométricos involucrados en las situaciones propuestas.	
[0.35,2.14] Deciden construir de manera robusta el cuadrilátero especial: rectángulo $ABCD$, trazan sus diagonales $ACyBD$ y toman las medidas de los lados y de los segmentos $AE, BE, CE\ y\ DE$.	***F.U*** ***I:*** construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema. ***A.E:*** Realiza la construcción evocando procesos de construcción previos.	 Fig. 4.2
[2.15,2.28] Identifican que $\overline{AE} \cong \overline{CE}\ y\ \overline{BE} \cong \overline{DE}$ por lo que deciden arrastrar un vértice del rectángulo con el objetivo de identificar si dicha congruencia se va a dar en todos los rectángulos. Hallan el invariante: las diagonales de un rectángulo se bisecan.	***A.D*** • Exploración empírica para detectar propiedades. • Detectar propiedad. ***F.U*** ***I:*** exploración de la construcción. ***A.E*** • Utiliza herramientas en Geogebra para determinar propiedades específicas. • Comprueba resultados obtenidos al manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante.	

[2.29,2.49] A partir del rectángulo construyen un cuadrado bajo el argumento: “un cuadrado es un rectángulo”, con el objetivo de verificar si la congruencia $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ y $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ se mantiene.	***A.D:*** Verificar propiedades. ***F.D*** ***I:*** verificación del invariante encontrado. ***A.E:*** Utiliza el arrastre o toma medidas con miras a verificar el invariante encontrado.	
[2.50,3.02] Anuncia la conjetura “entonces podemos ya decir que en los cuadrados y en los rectángulos las diagonales se bisecan”.	***A.D:*** Formular conjetura. ***F.D*** ***I:*** estructura del enunciado. ***A.E:*** identifica y manifiesta la relación entre antecedente y consecuente aludiendo a su dependencia en el momento de formular la conjetura.	
[3.20,5.27] Usando circunferencias construyen un rombo al que le trazan las diagonales y las miden con el objetivo de verificar si el invariante también se cumple.	***A.D:*** Verificar propiedades. ***F.D*** ***I:*** verificación del invariante encontrado. ***A.E:*** Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse.	

[5.27,5.43] Usan la opción de arrastre con el fin de verificar si el invariante se cumple en todos los rombos.	***A.D:*** Verificar propiedades. ***F.D*** ***I:*** verificación del invariante enunciado en la conjetura. ***A.E:*** Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse.	
[5.45,6.18] Formulan la conjetura: "en los rectángulos y en los rombos las diagonales se bisecan"	***A.D:*** Formular conjetura. ***F.D*** ***I:*** Estructura del enunciado. ***A.E:*** Explicita el antecedente y el consecuente pero no escribe la conjetura en el formato condicional.	

6.3 DESCRIPCIÓN DEL SKETCH TRES

Este sketch ilustra otra de las formas en la que un grupo de tres estudiantes (Johana, Laura y Manuel) aborda el problema anteriormente mencionado. Específicamente, (Laura) empieza por leer el enunciado del problema; el grupo lo interpreta y sus miembros aclaran lo que significa bisecar. Luego, se focalizan en determinar la manera en que van a abordar el problema; hacen una construcción cuasi robusta y para ello trazan un $\overline{AB}$ con su punto medio C, dicho segmento será tomado como la diagonal, posteriormente construyen una recta que pase por C y sobre ella notan el segmento DE con el objetivo de construir el cuadrilátero $ABEF$, toman las medidas de los segmentos $\overline{AE}, \overline{EB}, \overline{BF}, \overline{AF}, \overline{AB}$ y $\overline{EF}$ y al notar que no sucede algo especial (congruencias) arrastran un vértice del cuadrilátero para hacer que sus diagonales se bisequen, enseguida hacen que las diagonales sean congruentes, ante esto comentan que puede ser un rectángulo, leen la definición que tienen registrada en su cuaderno, miden dos ángulos opuestos del cuadrilátero y concluyen que dicho cuadrilátero es un rectángulo, por lo que hacen su primera conjetura: "en un rectángulo sus diagonales se bisecan y son congruentes". Hecho esto, verifican si sus diagonales son perpendiculares y al encontrar que no es así, usan la herramienta de arrastre para detectar qué tipo de cuadrilátero se obtiene cuando dicha perpendicularidad exista dejando de lado si las propiedades anteriormente encontradas se mantienen. Ante esto, encuentran que el cuadrilátero tiene todos los lados congruentes y aunque sus diagonales se siguen bisecando no son congruentes, de esta manera identifican que se trata de un rombo por lo que concluyen: "en un rombo las diagonales se bisecan y son perpendiculares".

Es de notar que la conjetura que formula el grupo de estudiantes no se corresponde con la construcción y la exploración realizadas, pues aunque lo que formulan como conjetura es un hecho geométrico cierto, no es producto del proceso realizado por los estudiantes; es decir, parten del hecho de que las diagonales se bisequen, las diagonales sean congruentes y las diagonales sean perpendiculares, pero en el momento de formular la conjetura usan estos mismos hechos como consecuente y no como antecedente. De la misma manera en la construcción, después de haber condicionado las diagonales, detectan el tipo de cuadrilátero que satisface dichas condiciones, no obstante en el momento de formular la conjetura asumen el tipo de cuadrilátero como antecedente; los enunciados que se esperaría que concluyeran son: "si en un cuadrilátero las diagonales se bisecan y son perpendiculares entonces el cuadrilátero es un rombo" y "si en un cuadrilátero las diagonales se bisecan y son congruentes entonces el cuadrilátero es un rectángulo".

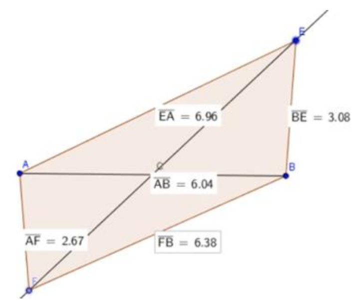
A continuación se presenta la tabla específica de las acciones de las estudiantes asociadas a la producción que anteriormente se describió de manera general.

<table>
<tr><th>ACCIÓN DEL ESTUDIANTE</th><th>ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA, FASE, INDICADOR Y ACCION(ES)</th><th>CONSTRUCCIÓN ASOCIADA</th></tr>
<tr><td>[0.27,0.36]

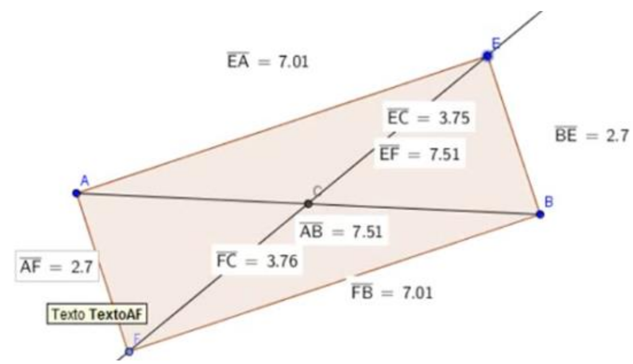
Recuerdan la definición de bisecar.</td><td>F.U
I: Interpretación de la situación.

A.E: Identifica objetos geométricos involucrados en las situaciones propuestas.</td><td></td></tr>
<tr><td>[0.37,1.35]

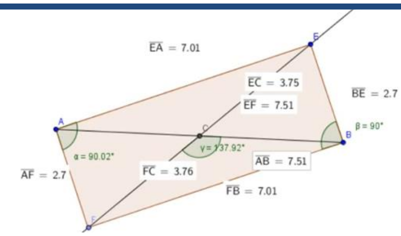
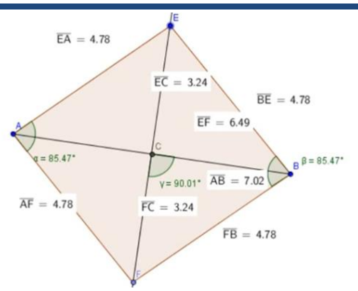
Deciden construir $\overline{AB}$ tranzan su punto medio C y una recta que contiene dicho punto. Construyen$\overline{DE}$ contenido en tal recta y luego el cuadrilátero $AEBF$. Miden $\overline{AE}, \overline{EB}, \overline{BF}, \overline{AF}, \overline{AB}y\overline{EF}$</td><td>F.U
I: Interpretación de la situación.
A.E: Manifiesta implícita o explícitamente posibles estrategias o hipótesis de solución.

I: Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema.
A.E: Realiza representaciones gráficas en Geogebra teniendo en cuenta las condiciones y propiedades invariantes de los objetos involucrados.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>[1.34,3.52]
Al no encontrar un cuadrilátero especial inmediatamente después de construcción, proponen hacer que $\overline{AB}$ biseque a $\overline{EF}$, para ello toman las medidas de $\overline{EC}$ y $\overline{CF}$ y arrastran F hasta lograr el objetivo.
Posteriormente identifican que lo obtenido tras la acción anterior no evidencia algún cuadrilátero especial, por lo que proponen hacer que las diagonales sean congruentes y se bisequen usando la herramienta de arrastre.</td><td>A.D
Exploración empírica para detectar propiedades.

F.U
I: Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema.

A.E
• Construyen representaciones de las situaciones con base en las propiedades de los objetos geométricos involucrados, logrando que dichas propiedades se mantengan ante el arrastre, para este caso, que una diagonal biseque a la otra.
• Realiza construcciones que atienden a las propiedades de los objetos involucrados (una diagonal biseque a la otra) y bajo el arrastre obligan el cumplimiento de otras propiedades (que la diagonales se bisequen y sean congruentes)</td><td>
</td></tr>
</table>

[3.53,4.26] Observan que los lados opuestos son congruentes y advierten que puede tratarse de un rectángulo; con el ánimo de verificarlo leen la definición consignada en sus cuadernos y proceden a verificar si los ángulos del cuadrilátero son rectos.	***A.D*** Exploración empírica para detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Verificación de la construcción. ***A.E:*** • Usa herramientas de medición, arrastre y propiedades específicas, para verificar el cumplimiento de las condiciones de la situación o las relaciones entre los objetos geométricos involucrados en la misma. • Utiliza herramientas en Geogebra para determinar propiedades específicas de la representación gráfica. • Comprueba resultados obtenidos al manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante.	
[4.20,4.28] Concluyen que se trata de un rectángulo y que en este tipo de cuadriláteros las diagonales se bisecan y son congruentes.	***A.D*** detectar propiedades. ***F.U*** Reconocen una propiedad invariante propiedad invariante. ***I***: Exploración de la construcción. ***A.E:*** Comprueba resultados obtenidos al manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante.	

[4.29,4.47] Deciden medir el ángulo que forman las diagonales con el fin de verificar si es recto.	***A.D*** Exploración empírica para detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Exploración de la construcción. ***A.E:*** Utiliza herramientas en Geogebra para determinar propiedades específicas de la representación gráfica.	
[4.48,5.53] Después de identificar que las diagonales no son perpendiculares proponen hacer que dicha perpendicularidad exista con el objetivo de identificar qué tipo de cuadrilátero se obtiene; ante esto, notan que los lados del cuadrilátero son congruentes y que las diagonales aunque se siguen bisecando no necesariamente tienen la misma medida.	***A.D*** Exploración empírica para detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** exploración de la construcción. ***I:*** construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema. ***I:*** verificación del invariante. ***A.E:*** • Comprueba resultados obtenidos al manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante. • Realiza construcciones que atienden a las propiedades de los objetos geométricos involucrados (una diagonal biseca la otra) y bajo el arrastre obligan el cumplimiento de otras propiedades (que la diagonales se bisequen y sean perpendiculares).	
[5.54,6.23] Consideran que el cuadrilátero obtenido puede corresponderse con un cuadrado o un rombo; para ello consultan la definición de cuadrado y rombo. Al darse cuenta que no es un cuadrado por no tener los ángulos (ya los habían medido) rectos, identifican que el polígono es	***A.D*** Detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Verificación de la construcción. ***A.E:*** Compara el enunciado de una definición con la construcción realizada para verificar la correspondencia entre las dos representaciones.	

un rombo ya que todos sus lados son congruentes.		
[6.24,7.10] Llegan a las siguientes conclusiones: • En un rectángulo las diagonales son congruentes y se bisecan. • En un rombo las diagonales se bisecan y son perpendiculares.	***A.D*** Formular conjeturas. ***F.D*** ***I:*** estructura del enunciado. ***A.E:*** explicita el antecedente y el consecuente pero no escribe la conjetura en el formato condicional.	
Es necesario aclarar que aunque los estudiantes explicitan el antecedente y el consecuente de sus conjeturas, estas no se corresponden con sus procesos de construcción y exploración. Nos pareció importante hacer una ejemplificación de este caso, por cuanto es usual que grupos de estudiantes cometan tal yerro. Es importante presentarlo, para que profesores en formación se percaten que ello puede presentarse para así tenerlos en cuenta en sus planeaciones de clase.		

6.4 DESCRIPCIÓN DEL SKETCH CUATRO

Este sketch muestra otra de las formas en que un grupo de tres estudiantes (Maury, Diego y Juan Carlos) aborda la situación mencionada por la profesora. Comienzan leyendo el enunciado y manifiestan no haber entendido algo, por lo que deciden leer de nuevo; ante esto, Maury propone usar la expresión "tipos de cuadriláteros" del enunciado para hacer una construcción blanda de un cuadrilátero $ABCD$ sin alguna propiedad especial. Enseguida trazan sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ cuyo punto de intersección es E. Diego plantea arrastrar un vértice hasta lograr que una diagonal biseque a la otra, y aclarando lo que significa bisecar, ponen medidas a $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ con el propósito de compararlas. Enseguida arrastran hasta encontrar que los segmentos son casi congruentes e inmediatamente se cuestionan sobre la clase de cuadrilátero que en ese momento se estaba formando; al no tener una respuesta precisa, llaman a la profesora para que ella les sugiera alguna idea. Específicamente, ella les propone tener en cuenta otras propiedades para las diagonales. En ese sentido, Maury propone considerar que las diagonales sean congruentes, toman sus medidas y al ver que no son iguales, arrastran hasta obtener que lo sean; ante esto, consideran que el polígono construido parece un rectángulo (esto sucedería si además de la congruencia entre las diagonales se diera que las dos se bisecan, propiedad que parece no tienen en cuenta en ese momento); para asegurar su parecer consultan la definición de rectángulo y miden uno de los ángulos y al ver que es recto creen haber confirmado su sospecha. Es de notar que al tomar solo una de las medidas de los ángulos los estudiantes no están garantizando que el cuadrilátero sea un rectángulo debido a que un cuadrilátero es un rectángulo si tiene cuatro ángulos rectos. Tras dicha construcción y exploración precisan el siguiente enunciado: "si las diagonales se bisecan y tienen igual medida, entonces es un rectángulo". Vale la pena resaltar que aunque los estudiantes están llegando a un enunciado correcto, su construcción y exploración no son suficientes para ello, porque en ningún momento garantizan que las diagonales se bisequen, en cambio sí garantizan que una diagonal biseca a la otra, es decir los estudiantes no distinguen entre las relaciones: "una diagonal biseca a la otra" y "las diagonales se bisecan". Posteriormente, Diego propone seguir explorando la construcción en busca de más propiedades; ante esto Maury plantea explorar el ángulo que se forma entre las diagonales, al ver que el ángulo que se forma no posee ninguna medida especial, arrastran hasta lograr que las diagonales sean perpendiculares (claro, manteniendo las siguientes propiedades: una diagonal biseca a la otra y las diagonales son congruentes) y de esta manera determinan que el polígono parece haberse convertido en un cuadrado. Para verificarlo, consultan la definición de cuadrado y observan las medidas (de los lados y la de un ángulo del cuadrilátero) que tienen en las pantallas y concluyen la siguiente conjetura: "si las diagonales se bisecan, tienen la misma medida y son perpendiculares entonces es un cuadrado".

Se aclara que este grupo de estudiantes no trabajó con medidas exactas, es decir, todas sus conclusiones las obtuvieron de medidas con diferencias de décimas o centésimas; a continuación se ilustra en la tabla paso a paso, las acciones llevadas a cabo por los estudiantes en su proceso de solución del problema.

ACCIÓN DEL ESTUDIANTE	ACCIÓN DEL PROFESOR	CLASIFICACIÓN SEGÚN GRUPO $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$	ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA, FASE, INDICADOR Y ACCION(ES)	CONSTRUCCIÓN ASOCIADA
[0.05,2.27] • Manifiestan no haber comprendido el enunciado por lo que deciden volverlo a leer. Del enunciado resaltan la expresión “tipos de cuadriláteros”. • Construyen el cuadrilátero $ABCD$ sin alguna condición especial con sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, las cuales se intersecan en el punto$E$. • Proponen arrastrar hasta que una diagonal biseque a la otra.			***F.U*** ***I:*** Interpretación de la situación. ***A.E:*** • Identifica objetos geométricos involucrados en las situaciones propuestas. • Manifiesta implícita o explícitamente posibles estrategias o hipótesis de solución. ***I:*** Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema. ***A.E:*** Realiza representaciones gráficas en Geogebra teniendo en cuenta las condiciones de los objetos involucrados en la situación.	
[1.08,1.18] Consultan apuntes personales para precisar el significado de bisecar.			***F.U*** ***I:*** Interpretación de la situación. ***A.E:*** Identifica objetos geométricos involucrados en las situaciones propuestas.	

[0.45,2.49] Arrastran hasta que $\overline{DB}$ biseca a $\overline{AC}$.			***F.U*** ***I:*** Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema. ***A.E:*** Realiza construcciones que atienden a las propiedades de los objetos geométricos involucrados pero que no mantienen las propiedades ante la acción de arrastre.	
[2.50,3.01] Al observar la figura y notar que no hay algo especial acuden a la profesora para que les indique que más se puede hacer.	**[2.57,3.31]** Propone caracterizar las diagonales y pregunta ¿Cómo se relacionan las diagonales?, ¿Qué se le puede hallar a un segmento?, ¿Qué se le puede hallar a una diagonal?	Indagar acerca del significado personal de un concepto. Preguntar por el significado personal de un objeto o relación de índole matemática.		
[3.39,5.18] Plantean tomar medidas a las diagonales para determinar si son congruentes y al ver que esto no se cumple utilizan la herramienta de arrastre hasta conseguirlo manteniendo como condición que una diagonal biseca a la otra.			***A.D:*** Exploración empírica de la construcción para detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Interpretación de la situación. ***A.E:*** Manifiesta implícita o explícitamente posibles estrategias o hipótesis de solución. ***I:*** **C**onstruye una representación gráfica asociada a la situación problema. ***A.E:*** Realiza representaciones gráficas en Geogebra teniendo en cuenta las condiciones y	

			propiedades invariantes de los objetos involucrados. ***I:*** Exploración de la construcción. ***A.E:*** Utiliza herramientas en Geogebra para determinar propiedades específicas de la representación gráfica.	
[5.20,5.58] Notan que el polígono obtenido parece un rectángulo, para verificarlo buscan en su cuaderno la definición, miden uno de sus ángulos internos y concluyen que el polígono es un rectángulo.			***A.D:*** Detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Verificación de la construcción. ***A.E:*** Usa herramientas de medición, arrastre y propiedades específicas, para verificar el cumplimiento de las condiciones de la situación o las relaciones entre los objetos geométricos involucrados en la misma.	
[5.59,6.05] Concluyen lo siguiente: "si las diagonales miden lo mismo y se bisecan entonces es un rectángulo".			***A.D:*** Formular conjetura. ***F.D*** ***I:*** Estructura del enunciado. ***A.E:*** • Identifica y manifiesta la relación entre antecedente y consecuente aludiendo a su dependencia en el momento de formular la conjetura. • Utiliza el formato condicional "si…entonces" en la escritura de la conjetura, haciendo explícito el antecedente y el consecuente. ***I:*** Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente en la conjetura.	

			A.E: Reconoce la relación entre consecuente e invariante encontrados.	
[6.06,7.23] Siguen buscando propiedades en la misma construcción, miden el ángulo que se forma entre ellas, al no ver algo especial hacen que sean perpendiculares pero mantienen propiedades ya establecidas.			***A.D:*** Exploración empírica para detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema. ***A.E:*** Construye representaciones de las situaciones con base en las propiedades de los objetos geométricos involucrados logrando que dichas propiedades se mantengan ante la acción de arrastre.	
[7.24,7.55] Aseguran que el polígono resultante parece un cuadrado. Para verificarlo recurren primero a la definición de cuadrado, observan las medidas de los lados y de los ángulos y concluyen que el polígono efectivamente es un cuadrado.			***A.D:*** detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Verificación de la construcción. ***A.E:*** Usa herramientas de medición, arrastre y propiedades específicas, para verificar el cumplimiento de las condiciones de un objeto o relaciones entre los objetos geométricos involucrados.	

[7.56,8.12] Formulan la siguiente conjetura luego de la última exploración "si las diagonales se bisecan, tienen la misma medida y forman un ángulo de noventa grados, entonces es un cuadrado".			***A.D:*** Formular conjetura. ***F.D*** ***I:*** Estructura del enunciado. ***A.E:*** • Identifica y manifiesta la relación entre antecedente y consecuente aludiendo a su dependencia en el momento de formular la conjetura. • Utiliza el formato condicional "si…entonces" en la escrituras de la conjetura, haciendo explícito el antecedente y el consecuente. ***I:*** Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente en la conjetura. ***A.E:*** Reconoce la relación entre consecuente e invariante encontrados.	
Se aclara que las medidas con las que trabajó este grupo de estudiantes fueron aproximadas.				

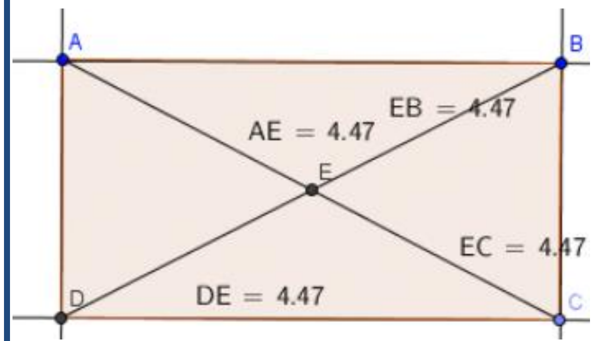
6.5 DESCRIPCIÓN DEL SKETCH CINCO

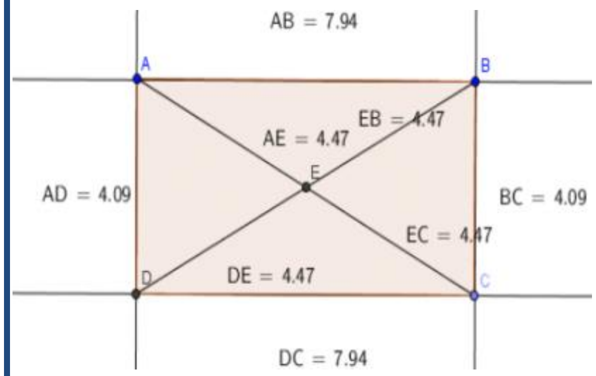
El objetivo de este sketch es mostrar un momento de la aproximación metodológica en el que tienen lugar una interacción Profesor – Estudiante – Estudiante cuando una estudiante (Lizeth) expone la producción de su grupo ante la petición de la profesora. En medio de su intervención, tiene lugar la participación de estudiantes (Alexander y Adriana) para complementar o aclarar ideas y la orientación de la profesora para coordinar la interacción.

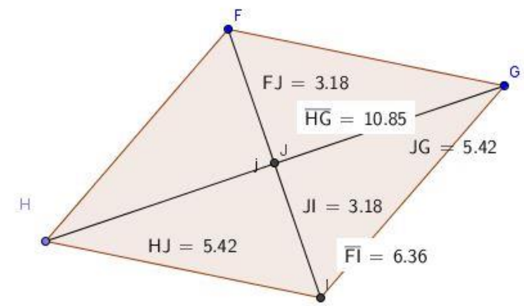
El profesor anuncia que el tiempo para explorar la situación ha terminado y solicita de los estudiantes alguno que desee compartir el trabajo realizado por su grupo, Lizeth (estudiante que participó en el sketch numero dos) es voluntaria e inicia su trabajo acercándose con su memoria USB al equipo del profesor con el objetivo de describir lo realizado. Cuenta que en su grupo se trabajó con dos tipos de cuadriláteros; en ese momento, a solicitud del docente, Lizeth muestra y cuenta el protocolo de construcción de manera precisa iniciando con la construcción robusta del rectángulo $ABCD$ con sus respectivas diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y medidas e identifican lo que en su grupo es el primer invariante encontrado "en los rectángulos las diagonales se bisecan", recurriendo a la definición de rectángulo argumenta que un cuadrado es un rectángulo y que por lo tanto en los cuadrados las diagonales también se bisecan; posterior a ello, describe la construcción del rombo en el que comprueban si el invariante también se cumple, al verificar que sí sucede, concluye que en los rectángulos y en los rombos las diagonales se bisecan; finalizada la participación de Lizeth, la profesora pregunta al resto de los estudiantes si en su producción se hizo algo diferente a lo expuesto por la estudiante. Alexander (otro estudiante de la clase) interviene argumentando que la conjetura hecha por su compañera está incompleta; ante ello, la docente le solicita ser más específico y Alexander asegura que en su grupo se encontró que en un cuadrado las diagonales además de bisecarse son congruentes y perpendiculares. Al escuchar el aporte del estudiante, la profesora solicita a Lizeth que utilice las herramientas necesarias del software para determinar si lo que dice Alexander también corresponde a invariantes. Después de comprobar que se cumplen en un cuadrado, Lizeth propone verificar si dichas propiedades se dan en los rectángulos y en los rombos; hechas las modificaciones necesarias a la construcción que tiene en ese momento para lograr tales tipos de cuadriláteros, la estudiante concluye de manera informal que en los *rombos las diagonales se bisecan y son perpendiculares*, *en los cuadrados los diagonales son congruentes, perpendiculares y se bisecan*, y, *en los rectángulos las diagonales se bisecan y son congruentes*. Por último, la profesora solicita a sus estudiantes consolidar lo que se detectó en su cuaderno, por lo que pide a Lizeth que dicte los enunciados usando el formato condicional. De esta manera, se da por terminado el sketch.

A continuación se puntualizan, en una tabla, las acciones del profesor en el marco de la interacción anteriormente descrita de manera general. Para ello se exponen, grosso modo, las acciones de tal grupo descritas por Lizeth y las intervenciones de Alexander, que dan lugar a la gestión específica de la profesora.

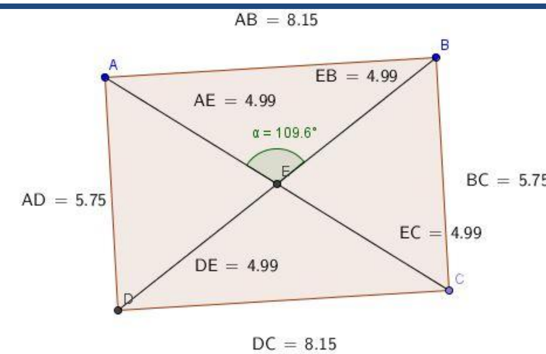
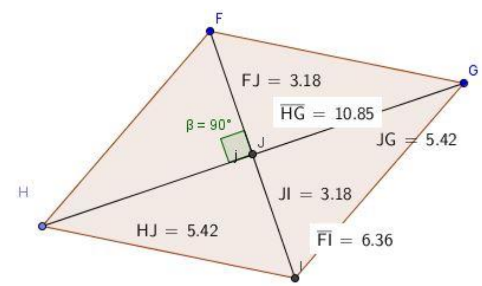
ACCIÓN DEL PROFESOR	CLASIFICACIÓN SEGÚN GRUPO $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$	ACCIÓN DE LOS ESTUDIANTES	ACCIONES DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA FASE, INDICADOR Y ACCION(ES)	CONSTRUCCIÓN ASOCIADA
[0.05,0.22] Convoca a los estudiantes a dar por terminado el trabajo e invita a alguno a compartir lo realizado en torno a la solución del problema planteado.	Indagar sobre las construcciones y enunciados conjetura producidos por los estudiantes.			
[0.38,0.48] La profesora sugiere que se abra el protocolo de construcción en Geogebra y que a partir de este, se describa de manera detallada lo hecho por el grupo.	Indagar sobre las construcciones, enunciados y conjetura producidos por los estudiantes.	**[0.25,0.37]** Cuenta que construyeron dos tipos diferentes de cuadriláteros y que analizaron lo que sucedía con sus diagonales.	***F.U*** ***I:*** Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema. ***A.E:*** Realiza la construcción evocando procedimientos e construcción previos.	

[1.23,1.26] Pregunta al resto de los estudiantes si la palabra “iguales” está correctamente usada. Pide que se use el término asignado dentro de lo que han construido del sistema teórico.	Abordar imprecisiones (suprimir o destacar) matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablada). Enunciar o pedir el enunciado de una proposición de manera sintética usando el término asignado dentro del sistema teórico en construcción.	**[0.48,1.22]** Describe los pasos que siguieron para construir el rectángulo $ABCD$ con sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Menciona que después de tomar medidas a los $\overline{AE}, \overline{EC}, \overline{BE}$ y $\overline{ED}$ notan que los pares de segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$ y $\overline{BE}$ y $\overline{ED}$ son iguales.	***A.D:*** Exploración empírica para detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema. ***A.E:*** Realiza la construcción evocando procedimientos o construcciones previas. Utiliza herramientas en Geogebra para determinar propiedades específicas de la representación gráfica.	
		[1.26,1.27] Responden al unísono que no se dice “iguales sino congruentes”.	Estudiantes precisan lenguaje adecuado según el contexto	

[1.50,1.53] Pregunta al grupo de estudiantes si la expresión “los rectángulos son cuadrados” es verdadera, con el objetivo de hacer claridad y corregir lo dicho por la estudiante.	• Abordar imprecisiones (suprimir o destacar) matemáticas en el signo (afirmación escrita o hablada). • Indagar sobre los enunciados conjetura producidos por los estudiantes. • Enunciar o pedir el enunciado de una proposición de manera sintética usando el término asignado dentro del sistema teórico en construcción.	**[1.28,1.50]** Toma medidas de los lados del cuadrilátero para concluir que en los rectángulos las diagonales se bisecan; a su vez menciona que como los rectángulos son cuadrados, entonces en los cuadrados las diagonales se bisecan.	***A.D:*** Exploración empírica para detectar propiedades. ***F.U*** ***I:*** Verificación de la construcción. ***A.E:*** Usa herramientas de medición, arrastre y propiedades específicas, para verificar el cumplimiento de las condiciones de la situación o las relaciones entre los objetos geométricos involucrados en la misma.	
[2.16,2.17] La profesora valida participación de los estudiantes	La profesora valida participación de los estudiantes	**[1.53,2.16]** Interviene otro estudiante (Alexander) asegurando que lo que es correcto decir es que los cuadrados son rectángulos, porque los cuadrados cumplen con la condición de tener todos sus ángulos rectos. Ante esto, se hace la corrección y la estudiante concluye	***F.D*** ***I:*** Estructura del enunciado. ***A.E:*** Usa definiciones o hechos geométricos del marco referencial para describir la conjetura.	

		que en los cuadrados las diagonales también se bisecan.		
[2.58,3.02] Aclara que en la conjetura establecida por el grupo basta con decir "en los rectángulos y en los rombos las diagonales se bisecan", esto porque los cuadrados son rombos y también son rectángulos.	Identificar o solicitar identificación de condiciones construidas y propiedades encontradas.	**[2.18,2.57]** Describe los pasos de la construcción del rombo$FGIH$ y sus diagonales$\overline{FI}$ y $\overline{GH}$, toma medidas de $\overline{FJ},\overline{JI},\overline{GJ}$ y $\overline{HJ}$ y detectan las congruencias entre $\overline{FJ}$ y $\overline{JI}$ y $\overline{GJ}$ y $\overline{HJ}$. Por último concluye que en los rombos, cuadrados y rectángulos las diagonales se bisecan.	***A.D:*** Formula conjetura. ***F.D*** ***I:*** Verificación del invariante enunciado en la conjetura. ***A.E:*** Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse.	
[3.02,3.07] Pregunta al resto de los grupos de estudiantes si en su producción se hizo algo diferente a lo expuesto por Lizeth	• Indagar sobre las construcciones o enunciados conjetura producidos por los estudiantes.			
[3.26,3.29] Cuestiona al estudiante respecto a lo que dice y hace, para que este se dé cuenta que la conjetura no está incorrecta si no incompleta.	• Abordar imprecisiones (suprimir o destacar) matemáticas en la afirmación escrita o hablada.	**[3.08,3.25]** Otro estudiante (Alexander) manifiesta que la conjetura hecha por el grupo de la estudiante que participo está incorrecta.		

[3.49,3.59] Solicita a la estudiante que está manejando el software comprobar si lo que dice su compañero es cierto.	• Propone una lluvia de ideas de los estudiantes en la que se les encause a resaltar los elementos útiles para producir la conjetura	**[3.30,3.48]** Alexander asegura que aunque la conjetura es correcta, la misma se puede complementar diciendo que en los cuadrados las diagonales son congruentes y perpendiculares.	***A.D:*** Corroborar dicha conjetura. ***F.D*** ***I:*** Verificación de la formulación de la conjetura. ***A.E:*** Identifica y explicita que sobran o faltan propiedades o palabras para escribir correctamente el enunciado.	
[5.15,5.18] Recuerda a los estudiantes que el objetivo es verificar si en los cuadrados las diagonales son congruentes y perpendiculares.	• En esta acción el profesor determina si la relación entre el "objeto geométrico" (artefacto), el antecedente y el consecuente se corresponden entre sí.	**[4.00,6.13]** Mediante la opción de arrastre, la estudiante construye un cuadrado a partir del rectángulo que se tenía construido. Después de construir el cuadrado, concluye que lo que su compañero mencionó es verdadero y propone explorar los rectángulos y los rombos con el fin de verificar si también cumplen dichas propiedades.	***A.D*** Corroborar dicha conjetura. ***F.D*** ***I:*** Verificación del invariante enunciado en la conjetura. ***A.E:*** Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse.	

[6.31,6.42] Solicita concluir lo que se ha detectado hasta el momento: “en los rectángulos las diagonales de bisecan y son congruentes”, “en los cuadrados las diagonales se bisecan, son congruentes y perpendiculares”.	• Identificar o solicitar identificación de condiciones construidas y propiedades encontradas.	**[6.14,6.30]** Verifica que en los rectángulos las diagonales son congruentes pero no perpendiculares.	***A.D*** Corroborar dicha conjetura. ***F.D*** ***I:*** Verificación del invariante enunciado en la conjetura. ***A.E:*** Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse.	
[7.08,7.10] Pregunta ¿Por qué en los cuadrados y en los rombos las diagonales son perpendiculares?	• Explicitar o destacar qué elementos del sistema teórico están involucrados en lo que se afirma.	**[6.43,7.32]** Verifica que en los rombos las diagonales sean perpendiculares pero no congruentes.	***A.D*** Verifica propiedades. ***F.D*** ***I:*** Verificación del invariante enunciado en la conjetura. ***A.E:*** Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse.	
[7.16,7.19] Manifiesta que esta propiedad no se cumple en los dos por casualidad sino porque los cuadrados son un subconjunto de los rombos.	Explicitar o destacar qué elementos del sistema teórico están involucrados en lo que se afirma.	**[7.11,7.15]** Responde que en los cuadrados las diagonales son perpendiculares porque los cuadrados son rombos y en los rombos, las diagonales son perpendiculares	***F.D*** ***I:*** Estructura del enunciado. ***A.E:*** Usa definiciones o hechos geométricos del marco referencial para describir la conjetura.	

[7.44,7.54] Solicita enunciar explícitamente las conjeturas.	• Identificar o solicitar identificación de condiciones construidas y propiedades encontradas. • Indagar sobre los enunciados conjetura producidos por los estudiantes.	**[7.23,7.28]** Concluye que: • En los rombos las diagonales se bisecan y son perpendiculares. • En los cuadrados las diagonales son congruentes, se bisecan y son perpendiculares. • En los rectángulos las diagonales son congruentes y se bisecan.	***A.D*** Formular conjetura. ***F.D*** ***I:*** Estructura del enunciado. ***A.E:*** Explicita el antecedente y el consecuente pero no escribe la conjetura en el formato condicional.	
Al ver que la estudiante inicia dictándolas de manera informal pregunta a todos los estudiantes cuál es el formato que se ha establecido para escribir las conjeturas. Para la segunda conjetura añade que la expresión: "las diagonales son perpendiculares" es más apropiada que la expresión: "forman un ángulo recto", esta última fue la que	Pedir que el enunciado se escriba en el formato condicional. Poner la respectiva acción: • Abordar imprecisiones (suprimir o destacar) matemáticas en la afirmación escrita o hablada.	**[7.54,9.16]** Los estudiantes responden "si…entonces". En ese sentido, Lizeth dice las conjeturas siguientes: • Si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo entonces las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes y se bisecan. • Si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado entonces las diagonales$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes, se	***A.D*** Corroborar dicha conjetura. ***F.D*** ***I:*** Estructura del enunciado. ***A.E:*** • Utiliza el formato condicional "si…entonces", en la escritura de la conjetura haciendo explicito el antecedente y el consecuente. • Tiene en cuenta las convenciones establecidas en la clase en términos del lenguaje y notación al	

inicialmente uso la estudiante.		bisecan y forman un ángulo recto. Después de la intervención de la profesora dicta de nuevo la conjetura dejándola así: • Si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado entonces las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes, se bisecan y son perpendiculares. • Si el cuadrilátero FGIH es un rombo entonces las diagonales $\overline{FI}$ y $\overline{GH}$ se bisecan y son perpendiculares.	momento de nombrar objetos geométricos involucrados. ***I:*** Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura. ***A.E:*** • Reconoce la relación entre antecedente y condiciones impuestas en la situación. • Reconoce la relación entre consecuente e invariantes encontrados. ***I:*** Verificación de la formulación de la conjetura. ***A.E:*** Identifica que sobran o faltan propiedades o palabras para escribir correctamente el enunciado.	

7. CONCLUSIONES

En el presente capítulo se presentan las conclusiones del trabajo realizado en relación con tres asuntos: i) los objetivos propuestos, ii) una reflexión respecto de los aportes académicos y personales que nos dejó el estudio y que consideramos, enriquecen nuestra formación como futuros profesores y iii) aspectos que creemos pueden desarrollarse teniendo como precedente este trabajo.

Respecto al primero de tales asuntos, se considera que los objetivos propuestos en el estudio, se han alcanzado. Muestra de esto es que se diseñó y describió cada uno de los sketches utilizando de una manera satisfactoria los referentes teóricos, intentado ilustrar aspectos relevantes de la aproximación metodológica para la enseñanza propuesta por el grupo Æ•G, del proceso de conjeturación de la Actividad Demostrativa y de acciones de los actores en el marco de tal aproximación y dicha actividad. Además, se estima que el material creado es apto para estudiantes en formación inicial o continuada de profesores que quieran tener un referente respecto de un ambiente virtual, que puede ser real, de una clase donde se quiere abordar asuntos de geometría en un contexto donde se quiere valorar la formulación de conjeturas.

Cabe resaltar que durante la descripción de los sketches, surgió la necesidad de crear dos acciones emergentes, es decir, acciones que no habían sido contempladas en los referentes teóricos (En ninguno de los referentes tomados para la descripción de los sketches se encuentran), pero que sí demandaba la actividad ilustrada en ellos; estas son:

- Acción del estudiante: precisar lenguaje adecuado según contexto. Esta acción hace referencia al uso adecuado del lenguaje en el marco de la axiomática establecida.
- Acción del profesor: validar participación de los estudiantes.

Con respecto al asunto ii), queremos manifestar que, llevar a cabo este trabajo de grado, nos aportó en los siguientes aspectos:

- Fue un incentivo para desarrollar habilidades con las que no se contaba antes de iniciar el estudio, tales como manejar software de animación, edición de videos y capturación de pantalla.
- Definitivamente, nos exigió desarrollar habilidades de escritura y lectura.
- Nos permitió conocer algo del mundo de la investigación en educación matemática. El hecho de tener que decantar datos, manipularlos en los términos de lo que exigía el objetivo del trabajo (diseñar sketches) y hacer una descripción de los mismos a la luz de una teoría, sin duda son competencias que aluden a la labor como investigador y que hemos tenido la oportunidad de experimentar inmersos en este estudio.
- Nos ofreció una mirada más profunda en términos del *qué hacer* de los estudiantes y del profesor mismo, en el marco de la actividad demostrativa, más precisamente en el proceso de conjeturación, y de una aproximación metodológica específica para la enseñanza.
- Nos ilustró que el uso de software de geometría dinámica no solo es una herramienta para hacer representaciones gráficas sino que además es una herramienta que favorece la exploración y la formulación de conjeturas en geometría. Además, nos incita a volverla parte de nuestras futuras planeaciones de clase, por cuanto se ve su utilidad para la enseñanza en términos de la comunicación (ver sketch 5) y de conocer la forma en que los estudiantes razonan frente a un problema abierto de conjeturación (ver sketches 2, 3 y 4).
- Nos enseñó sobre la riqueza en la exploración de una situación, que puede tener lugar en pequeños grupos de estudiantes, que quizá puede pasar desapercibida.
- Aprendimos a valorar la riqueza, no solo en conocimientos disciplinares si no como persona, que posee un PROFESOR de matemáticas como lo es el asesor de este trabajo.

Para terminar, en relación con el aspecto iii), queremos manifestar que somos conscientes que los sketches realizados son susceptibles de mejorarse tanto en aspectos técnicos de edición (no somos expertos en el manejo de los software y como lo dijimos, antes, en el transcurso del desarrollo de trabajo de grado aprendimos lo suficiente para hacer lo que finalmente presentamos), como en asuntos de contenido (definitivamente, 8 minutos no son suficientes para mostrar todo lo que se hubiese podido ilustrar respecto de i) acciones del proceso de conjeturación de la actividad demostrativa, e.g., otras formas de exploración –uso de la herramienta traza-, dificultades a la hora de formular una conjetura, dificultades en el uso del software, etc.; y ii) momentos de interacción posibles entre profesor y estudiantes para ilustrar más acciones del primero en términos de su mediación). De otro lado, como ha sido claro a lo largo del texto, nosotros no centramos en un solo proceso de la actividad demostrativa (la conjeturación); se hace evidente entonces un trabajo análogo a este pero referido al proceso de justificación.

8. BIBLIOGRAFÍA

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis doctoral. Universitat de Valéncia, Valencia, España.

Delgado, L y Peña, F (2010).*Cabri, un camino para propiciar unidad cognitiva: un estudio de casos.* Tesis de licenciatura en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Grupo *Æ•G* (2011) *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase*. Proyecto financiado por el CIUP. UPN.

Herbst, Chazan, Chen, Chieu, Weiss (2011). *Using comics-based representations of teaching, and technology, to bring practice to teacher education courses.*ZDM Mathematics Education (2011).

Luque y Robayo (2010). E*mergencia de un ambiente de actividad demostrativa con estudiantes en edad extraescolar.* Tesis de magister en docencia de las matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia*.*

Llinares, Valls, Roig (2008). *Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas.* Educación Matemática, Vol. 20, Núm. 3, Santillana. México.

Perry, Samper, Molina, Camargo (2014) *Capítulo 1. Innovación en un aula de geometría de nivel universitario.* En Geometría plana: un espacio de aprendizaje. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.