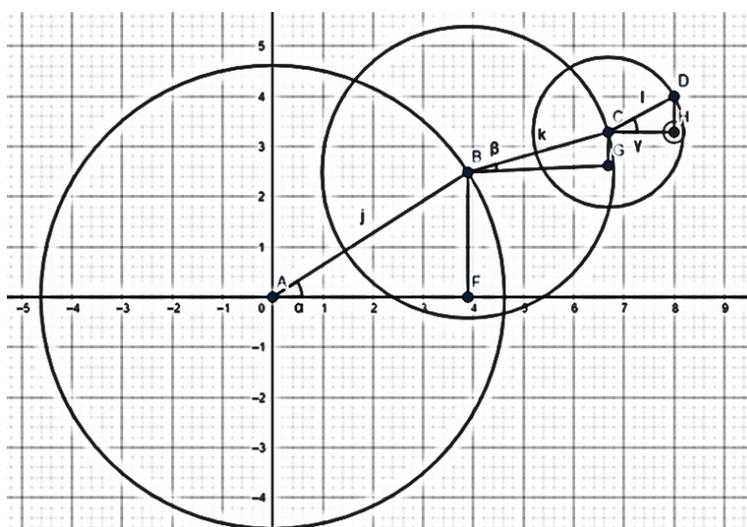


**ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO Y DESARROLLO DE LA FORMALIZACIÓN  
MATEMÁTICA EN LA DEMOSTRACIÓN DE EQUIVALENCIA DE LOS MODELOS  
PLANETARIOS PTOLEMAICO Y KEPLERIANO**



Juan David Andrade García

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencia y Tecnología  
Departamento de Física  
Bogotá D.C.  
2023

**ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO Y DESARROLLO DE LA FORMALIZACIÓN  
MATEMÁTICA EN LA DEMOSTRACIÓN DE EQUIVALENCIA DE LOS MODELOS  
PLANETARIOS PTOLEMAICO Y KEPLERIANO**

Juan David Andrade García

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

**Licenciado en Física**

Director:

Yecid Javier Cruz Bonilla

Línea de investigación:

La enseñanza de la física y la relación Física - Matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C.

2023

**Tabla de Contenido**

Epígrafe.....	5
Abstract.....	6
Planteamiento del Problema .....	8
Objetivos.....	11
General.....	11
Específicos .....	11
Justificación .....	12
CAPÍTULO I La epistemología de los modelos planetarios, geocentrismo y heliocentrismo ....	15
Geocentrismo .....	15
Ptolomeo .....	17
Bóveda celeste .....	18
Modelo copernicano.....	25
Nuevo modelo del mundo.....	25
Los movimientos de la tierra.....	30
Traslación.....	30
Rotación .....	30
Precesión.....	31
Johannes Kepler .....	41
Caracterización matemática de las leyes de Kepler .....	45
CAPÍTULO II El problema de la relatividad en el planteamiento del problema .....	64
La relatividad copernicana.....	64
La relatividad de galileo.....	68
CAPÍTULO III Marco matemático en el planteamiento del problema .....	74
Definiciones .....	75
Axiomas .....	75
Proposiciones .....	75
Lemas.....	77
CAPÍTULO IV Consideraciones geométricas sobre la transformación .....	91
Demostración de la equivalencia a través de argumentos geométricos .....	93

Conclusiones y reflexiones finales.....	101
Anexos .....	103
Ecuaciones de transformación de Galileo.....	103
Ecuaciones de transformación de Lorezt .....	105
Determinación del coeficiente de Lorentz ( $\gamma$ ).....	105
Transformación de la coordenada temporal.....	106

## Epígrafe

A la memoria de Giordano bruno, el más grande espíritu en la historia de la ciencia, quien perdiese la vida al ver más lejos que ningún otro hombre lo ha hecho o lo hará:

Bruno nos hace ver que ninguna muralla encierra el cosmos, y que nuestro sistema solar puede ser uno de los tantos sistemas que pueblan el infinito, bruno nos muestra que la tierra no está en el centro, que el hombre no está en el centro del centro y que la noción de centro absoluto es una mentira, en el universo infinito el centro no existe, porque no está en ningún lugar y por este hecho, puede estar en todas partes, solo podemos hablar de centro en sentido relativo, con la consecuencia de que cambia radicalmente nuestra forma de razonar. La experiencia del centro puede ser vivida únicamente por el individuo singular, no es posible hablar en general de “hombres”. De plantas, de animales, de astros, ¡no! Sino de aquel hombre, animal o astro específico o de aquella planta en particular, en el universo infinito, tanto los agregados atómicos más grandes como los más pequeños gozan de igual dignidad. La más minúscula pulga está en el centro del universo, al mismo nivel que el planeta más grande.

“Mucio Ordine”

## Abstract

El siguiente trabajo presenta de manera sistemática la demostración fisicomatemática de la conjetura que establece una equivalencia entre los modelos planetarios propios de la cosmología clásica (Ptolemaico y Kepleriano) y su compatibilidad con la teoría de la relatividad especial. Esta perspectiva propone una alternativa a la forma tradicional en la que se concibe la mecánica celeste y sugiere una recontextualización de los conceptos de geocentrismo y heliocentrismo. En lugar de considerarlos como dos formas distintas de entender el mundo<sup>1</sup>, se plantea que son dos perspectivas equivalentes de un mismo mecanismo, especialmente en relación con los marcos de referencia asociados.

El camino hacia la demostración de este teorema<sup>2</sup> se presenta en tres etapas:

1. El primer momento consiste en una breve contextualización histórica y epistemológica<sup>3</sup> de la construcción teórica de los modelos geocéntrico y heliocéntrico. Esto proporciona un panorama general de los elementos geométricos involucrados en la obra de Ptolomeo y Copérnico, quienes desarrollaron estos modelos.

2. El segundo apartado presenta una demostración de las leyes de Kepler que es compatible con las leyes de Newton. Además, se realiza un análisis de las ecuaciones diferenciales involucradas, lo que sirve como punto de partida para el desarrollo de la axiomatización. Se muestra cómo las trayectorias de los cuerpos celestes obedecen a secciones cónicas debido a los efectos gravitacionales. También se introduce la teoría de la relatividad

---

<sup>1</sup> En adelante, se utilizará el término "mundo" desde su etimología clásica, que lo define como la perfección y el orden, haciendo referencia a la configuración del universo y las leyes físicas que lo gobiernan.

<sup>2</sup> Dado que el trabajo consiste en la demostración matemática de una conjetura, en adelante se considerará como un teorema. Cambiarlo de categoría implica que quien lo proponga deberá desarrollar y presentar la demostración contraria bajo los mismos axiomas.

<sup>3</sup> El término "epistemología" en este contexto se refiere a los procesos de axiomatización de los modelos físicos. Todo lo que se menciona en este trabajo en relación con la epistemología hace alusión a las relaciones existentes entre los elementos del mundo físico y los procesos de matematización de estos a través de teoremas y postulados. Esta concepción es tomada directamente del trabajo de David Hilbert y sobre el cual no se profundizará puesto que no es el objetivo del trabajo sin embargo se deja una pequeña referencia que contextualiza al lector sobre estas ideas:

“La geometría es la ciencia que se ocupa de las propiedades del espacio... Difiere esencialmente de los campos matemáticos puros, tales como la teoría de los números, el álgebra, o la teoría de funciones. Los resultados de \_estos últimos pueden ser obtenidos a través del pensamiento puro ( .... ) La situación es completamente diferente en el caso de la geometría. No puedo nunca penetrar las propiedades del espacio por pura reflexión, del mismo modo que nunca podré reconocer las leyes básicas de la mecánica, la ley de la gravitación o cualquier otra ley física en este modo. El espacio no es un producto de mis reflexiones. Más bien, me es dado a mí a través de los sentidos”. (Hilbert 2004: p. 22)

especial a través de sistemas binarios y ternarios, junto con el concepto de "marco de referencia" y el papel de la luz en su determinación.

3. El tercer apartado ofrece una demostración matemática de la validez del modelo ptolemaico mediante la axiomatización a través de 10 proposiciones. Estas construcciones muestran cómo el modelo de epiciclos y deferentes se puede expresar mediante series de Fourier y, por lo tanto, pertenecer a un espacio vectorial común con el modelo de Kepler y las secciones cónicas.

Finalmente, todos los elementos previamente mencionados se combinan bajo una estructura lógicamente consistente para demostrar la construcción geométrica de la equivalencia entre los modelos Ptolemaico y Kepleriano. Además, se describe la construcción analítica de esta equivalencia.

## Planteamiento del Problema

La mecánica, entendida como el estudio del movimiento, ha sido uno de los principales objetos de reflexión desde tiempos de Arquímedes en lo que respecta al funcionamiento del mundo o, al menos, de su dimensión física. Fenómenos como la caída de los cuerpos, la aceleración de los objetos, las trayectorias de los planetas, la posición de las estrellas y la transición entre el día y la noche, entre otros, han permitido a la humanidad desarrollar teorías que en cierta medida arrojan luz sobre nuestra comprensión del movimiento.

Sin embargo, el concepto de movimiento, como han demostrado numerosos científicos a lo largo de la historia, no puede considerarse una propiedad absoluta de las cosas. Un objeto en reposo para un observador puede no estarlo para otro. Por esta razón, atribuirle un valor de verdad al estado de movimiento de un cuerpo se convierte en una cuestión de perspectiva. Actualmente, a esta idea se le conoce como relatividad. No obstante, no es un concepto particularmente nuevo, ya que en tiempos de Euclides se conocía este hecho.

Comúnmente, se atribuye la prueba experimental de este fenómeno a Galileo Galilei y su famoso experimento del balde que gotea mientras viaja a bordo de un navío. El observador que se encuentra en el barco junto al balde describe la trayectoria de las gotas como una línea recta, mientras que para un observador que observa el fenómeno desde la costa, las gotas viajan en una trayectoria parabólica.

*“Recuerdo que cien veces, sentado en mi camarote me he preguntado: ¿nos movemos o permanecemos inmóviles? A veces, perdido en mis cábalas, me imaginaba que el navío marchaba en cierta dirección, cuando en realidad iba en sentido contrario. Por eso...estoy completamente convencido de que las supuestas experiencias destinadas a probar la inmovilidad de la Tierra están desprovistas de todo valor. Galileo, Diálogos sobre los principales sistemas del mundo.”* (Fabio Vélez U, 2012, pág. 7).

No obstante, este tipo de experiencias ya fueron mencionadas con detalle en la obra de Nicolás Copérnico, como se verá más adelante. Sin embargo, los primeros modelos matemáticos que describen las transformaciones que concilian las mediciones de los distintos observadores son atribuidos por primera vez a Galileo, conocidas como ecuaciones de transformación.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Muchos de los desarrollos aquí mencionados, como las transformaciones de Galileo, transformaciones de Lorentz y la deducción del factor gamma, entre otros, serán omitidos o agregados a los anexos, ya que se considera que son de dominio del lector y su inclusión aumentaría innecesariamente la longitud del trabajo.

Los estudios posteriores de los fenómenos electromagnéticos realizados por científicos como Fresnel, Faraday, Hertz, Lorentz, entre otros, en relación con la propagación y la velocidad de la luz, demostraron la insuficiencia de estas transformaciones en la descripción del movimiento. Lo más importante aún es que se pone en duda la existencia de un marco de referencia absoluto para todos los cuerpos (el éter).<sup>5</sup>

*“Michelson y Edward W. Morley habían intentado determinar la velocidad de la tierra a través del éter, pero, sorprendentemente, su experimento falló al dar alguna respuesta definitiva. La única forma de dar cuenta de este yerro era suponer un comportamiento muy peculiar de la medida de rodillos y relojes. Medir rodillos en movimiento tenía que estar sujeto a una clase de contracción, llamada la contracción de Lorentz-Fitzgerald. Los relojes debían tener sus marchas más lentas cuando se estaban moviendo.” (DIRAC, 1997, pág. 2)*

Los resultados obtenidos por estos trabajos conllevan al desarrollo de un nuevo sistema de transformaciones (transformaciones de Lorentz) compatibles con la idea de que la velocidad de la luz representa una constante universal independiente del observador, un mecanismo matemático que permite comparar mediciones de espacio y tiempo entre marcos de referencia<sup>6</sup>.

En el año 1905, Albert Einstein publica un artículo en el que, a partir de los elementos mencionados hasta ahora, desarrolla su conocida teoría de la relatividad. En esta teoría, Einstein establece la imposibilidad de un estado de reposo absoluto con respecto al espacio y al tiempo. Esto se debe a que tanto el espacio como el tiempo resultan ser relativos al observador o al marco de referencia desde el cual se realizan las mediciones.

*“(…) Ejemplos de este tipo, junto con los intentos fracasados para descubrir algún movimiento de la Tierra relativo al “medio de la luz,” sugieren que los fenómenos electrodinámicos, como los mecanismos, no poseen propiedades correspondientes a la idea de reposo absoluto. Más bien sugieren que, como ha sido demostrado hasta primer*

---

<sup>5</sup> Los estudios mencionados aquí se centran en la caracterización del éter como un medio de propagación de la luz y, en ese sentido, en la búsqueda de un marco de referencia absoluto. Estos trabajos tenían como objetivo determinar el movimiento de la Tierra en relación con el éter, pero no arrojaron resultados concluyentes hasta la presentación del experimento de Michelson y Morley. En la bibliografía se podrá encontrar los textos estudiados con referencia a esta temática si se desea profundizar en la evolución del concepto de éter.

<sup>6</sup>El concepto de marco de referencia se menciona aquí asumiendo la intuición y el conocimiento del lector, ya que no forma parte de la descripción de cómo se planteó inicialmente el problema. Sin embargo, más adelante se profundizará en este tema en el apartado de la introducción a la relatividad de los modelos planetarios.

*orden en cantidades pequeñas, las mismas leyes de la electrodinámica y la óptica son válidas para todos los sistemas de referencia en los que las ecuaciones de la mecánica funciona.*” (Einstein A. , 1905, pág. 3).

Esta breve contextualización histórica frente a la relatividad del movimiento y su actual percepción, la ausencia de marcos privilegiados de referencia y la constancia de la velocidad de la luz constituyen la base sobre la cual se plantean las preguntas de investigación que impulsan este trabajo:

Si el tradicional modelo heliocéntrico del sistema solar fue desarrollado bajo la idea Newtoniana de un espacio y tiempo absolutos con el sol como un marco de referencia privilegiado, inmóvil en un punto fijo del universo ¿Cómo la teoría de la relatividad interviene en la concepción de movimiento frente a los modelos planetarios como el geocentrismo o el heliocentrismo o cualquier otro marco de referencia arbitrario desde el cual se realice una descripción cinemática?, ¿es posible comparar los modelos heliocéntrico y geocéntrico a través de la trayectoria los rayos de luz?, ¿si son considerados la tierra o el sol como marcos de referencia independientes son los modelos Ptolemaico y Kepleriano equivalentes?. Los esfuerzos del autor por tratar de responder estos cuestionamientos en forma matemática han revelado que, de hecho, la elección de marcos de referencia permite establecer una equivalencia entre el modelo Geocéntrico Ptolemaico y el modelo heliocéntrico de Kepler. Para aclarar un poco más el planteamiento de la idea por desarrollar revisemos la versión de Einstein del experimento de Galileo. En este experimento, se deja caer una piedra en el interior de un vagón en movimiento, y su trayectoria es descrita por dos observadores: uno dentro del vagón y otro fuera, situado en una plataforma.

*“(...) Introduciendo en lugar de «cuerpo de referencia» el concepto de «sistema de coordenadas», que es útil para la descripción matemática, podemos decir: la piedra describe, con relación a un sistema de coordenadas rígidamente unido al vagón, una recta; con relación a un sistema de coordenadas rígidamente ligado a las vías, una parábola.”* (Einstein A. , 1916, pág. 15).

Con el fin de simplificar la descripción, Einstein sustituye el cuerpo (la piedra) y sus características físicas, como forma, tamaño, masa o rotación, por el concepto de sistemas de coordenadas. Esto se hace con el propósito de centrar la atención en la conclusión cinemática y poder así elaborar una descripción matemática. Tanto la parábola como la recta son trayectorias equivalentes y relativas a los observadores. En este trabajo, veremos cómo el experimento de la

pedra y las trayectorias rectas y parabólicas resultan análogos a la Tierra, las elipses y los epiciclos. Más importante aún, exploraremos cómo el mecanismo de epiciclos propuesto por Ptolomeo resulta ser un método general para describir cualquier trayectoria. En otras palabras, este método se convierte en un precursor del análisis de curvas de Fourier y las series para funciones continuas.

Si bien el trabajo no se centra en el modelo copernicano, ya que presenta discrepancias estructurales que lo hacen incompatible con las ideas propuestas aquí, es necesario revisar su concepción geométrica. Esto se debe a que dicha concepción supone los argumentos teóricos sobre los cuales se estableció el cambio de paradigma en la revolución copernicana además de ser un precursor de la relatividad galileana, también sentó las bases para la deducción de las leyes de Kepler y su posterior demostración newtoniana.

*“Sabemos que la diferencia entre una teoría heliocéntrica y una teoría geocéntrica es sólo un movimiento relativo, y que esa diferencia no tiene significado físico”* (Fred Hoyle f).

## **Objetivos**

### ***General***

Desarrollar una formalización de carácter matemático que permita demostrar la equivalencia entre el sistema Ptolemaico y Kepleriano a la luz de las ideas planteadas por la relatividad especial.

### ***Específicos***

- Demostrar analíticamente el modelo geométrico de Ptolomeo y su relación con las trayectorias planetarias.<sup>7</sup>
- desarrollar una simulación computacional de los desarrollos geométricos en la equivalencia de los modelos planetarios que proporcione una ayuda visual en la comprensión de los planteamientos matemáticos propuesto utilizando el programa GeoGebra.

---

<sup>7</sup> Entiéndase aquí que el modelo de epiciclos y deferentes propuesto por Ptolomeo, aunque correcto, carece de una demostración algebraica. Esto se debe a que su demostración requiere el uso del análisis y el álgebra lineal moderna que no estaba disponible para los tiempo de Ptolome. El segundo objetivo de este trabajo es proporcionar dicha demostración.

- realizar un análisis epistemológico de los aspectos más relevantes descritos en las obras originales de Nicolas Copérnico y Johannes Kepler con relación a dichos modelos y extraer los argumentos a favor de su equivalencia.

### **Justificación**

Los procesos mencionados hasta ahora, cuyo objetivo es demostrar la equivalencia de los modelos planetarios clásicos, se derivan de la necesidad de reexaminar los conceptos de la teoría de la relatividad especial a gran escala. Como se ha resaltado en la formulación del problema, el principio de la relatividad del movimiento es fundamental y debe ser aplicable a todos los cuerpos en el universo, incluyendo sistemas planetarios, galaxias y otros sistemas complejos, tal como lo establece el primer axioma de la teoría de Einstein, conocido como el principio de relatividad. Esto se relaciona directamente con el segundo axioma, que establece la constancia de la velocidad de la luz.

Cito un pasaje relevante de Einstein en 1905: "*(...) Elevaremos esta conjetura (que en adelante será llamada el 'Principio de Relatividad') al estatus de un postulado, y también introduciremos otro postulado, que solo en apariencia es irreconciliable con el primero, a saber, que la luz se propaga siempre en el vacío con una velocidad definida  $c$  que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor*" (Einstein, 1905, pág. 1). Esto es, proporcionar al lector material teórico sobre la aplicación de los postulados de la relatividad a los modelos planetarios de Ptolomeo y Kepler.

Por otro lado, en cuanto a la revolución Copernicana, no solo representó la propuesta de un nuevo modelo astronómico, sino que también marcó un cambio radical en la forma de pensar en casi todos los aspectos del conocimiento durante el siglo XVI. Como menciona Kuhn en 1957, "*En su núcleo, constituyó una transformación de la astronomía matemática, aunque implicó también cambios conceptuales en los terrenos de la cosmología, física, filosofía y religión.*" (Kuhn, 1957). Estos cambios conceptuales han dejado una huella significativa en nuestra memoria cultural, marcando un punto de inflexión en el desarrollo de la ciencia y nuestra comprensión del lugar que ocupamos en el universo. No obstante, es común encontrar en la divulgación científica actual, así como en numerosos libros o en términos de texto, referencias a

la revolución copernicana que de alguna manera desvirtúan el modelo que lo precedió mediante frases como: *"el error de Ptolomeo al considerar a la tierra como el centro del universo. El sol no gira en torno a la tierra. Copérnico desmintió el antiguo modelo geocéntrico etc."*<sup>8</sup>

Sin embargo, como se demostrará en el transcurso de este trabajo, estos conceptos resultan imprecisos a la luz de la teoría de la relatividad. En este sentido se busca ofrecer algunos elementos matemáticos que justifiquen en que radican dichas imprecisiones y que ponen de manifiesto como la concepción que se tiene del movimiento aun corresponde a las teorías clásicas, como es mencionado por Einstein, en marcos privilegiados de reposo absoluto. En términos de Thomas Kuhn, resulta difícil considerar una teoría científica actualmente como una verdad definitiva.

*"La civilización occidental contemporánea depende, tanto en su filosofía cotidiana como para obtener su pan y su sal, de los conceptos científicos en un grado mucho más elevado que ninguna otra civilización precedente. Sin embargo, es bastante improbable que las teorías científicas actualmente aceptadas y que tan importante lugar ocupan dentro de nuestra vida cotidiana, se nos revelen como definitivas"* (Kuhn, 1957, pág. 32)

En adición, es importante destacar que la relatividad del movimiento no solo era conocida por físicos del siglo XX, como Einstein o Hoyle, sino que ya en las obras de Copérnico, Galileo y Kepler se mencionaban las primeras nociones sobre este hecho. A pesar de que estos autores eran conscientes de la relatividad del movimiento, no se encuentran evidencias de argumentos matemáticos relacionados con transformaciones o equivalencias en sus obras a escalas planetarias si no únicamente mediante experimentos prácticos de la vida cotidiana. En este sentido, se justifican los desarrollos presentados en este trabajo como una labor teórica, especialmente en el campo de la geometría y el álgebra. En otras palabras, se busca establecer una armonía geométrica entre el geocentrismo, el heliocentrismo y la teoría de la relatividad "especial".

Es importante resaltar el hecho de que en ningún momento se pretende desvirtuar ninguna teoría o hecho histórico frente a la ciencia y su evolución, por el contrario, todos los elementos

---

<sup>8</sup> Estas expresiones son parafraseadas de exposiciones científicas y libros de texto, no se citan puesto que se consideran imprecisas a la luz del desarrollo de este trabajo son tomadas simplemente como un ejemplo de algo con lo que es común encontrarse en lo que a historia de la ciencia se refiere.

históricos y teóricos aquí mencionados respecto a las teorías científicas son unificados bajo la perspectiva de las teorías modernas.

Finalmente, en cuanto al aporte pedagógico del trabajo, se toman elementos de la obra de Thomas Kuhn, la cual nos habla de lo que se conoce como la "persuasión conceptual" o "reeducación cultural". Esto se refiere a un tipo de sentido común inculcado en la juventud a través del conocimiento científico presente en la cultura, y que en general se asume como verdades irrefutables.

*“Antes de ser reeducado, el sentido común nos dice que, si la tierra está en movimiento, el aire, las nubes, los pájaros, en pocas palabras, todo aquello no solidario con ella, debería quedar atrás. Al saltar, un hombre debería caer lejos de su punto de partida, ya que la tierra se ha movido bajo sus pies mientras él volaba por los aires. Árboles y rocas, hombres y animales, se verían arrojados por una tierra en rotación de forma similar a como una honda arroja las piedras. Puesto que no se observa ninguno de los efectos apuntados, la tierra está en reposo. Observación y raciocinio se combinan para probárnoslo. Actualmente, en el mundo occidental, los niños son los únicos que emplean tales argumentaciones, los únicos que creen que la tierra está en reposo. A temprana edad, la autoridad de educadores y padres, así como la de los textos, les persuade de que la tierra es un planeta en movimiento. De esta forma su sentido común sufre una reeducación, y los argumentos nacidos de la experiencia cotidiana pierden su antigua fuerza como pruebas de experiencia concluyentes.” (Kuhn, 1957, pág. 62)*

Esa breve cita permite formarnos una idea del concepto. En el caso de los modelos heliocéntrico y geocéntrico, ocurre exactamente el mismo fenómeno. Para muchas personas, especialmente aquellas cercanas a una comunidad académica o científica, la idea de que la Tierra y los demás planetas giran alrededor del Sol es aceptada como la verdad, sin importar cuánto pueda parecer lo contrario en su experiencia cotidiana. Esto es así no porque el heliocentrismo sea una verdad completamente evidente si no porque en general estamos expuestos a una reeducación en este sentido. Es cierto que este trabajo no busca profundizar en el fenómeno de la persuasión conceptual ni en sus causas y consecuencias. Sin embargo, proporciona material teórico y matemático que puede generar conciencia en el lector sobre la relatividad del movimiento aplicada a los modelos planetarios. Además, brinda una visión más amplia de estos modelos, lo que contribuye a aclarar la concepción que se tiene sobre los marcos de referencia inerciales aplicados a la cosmología y su estructura geométrica, se busca entonces hacer evidente la

equivalencia de los modelos planetarios para que, quien así lo desee, introduzca estos conceptos a su propia percepción del mundo y si es el caso en su forma de enseñarlo.

## CAPÍTULO I

### La epistemología de los modelos planetarios, geocentrismo y heliocentrismo

#### Geocentrismo

La astronomía como campo de conocimiento sistemático tiene sus raíces en el antiguo Egipto hace más de dos mil años. En ese entonces, ya se tenía una comprensión del movimiento de los astros y su relación con la medición del tiempo. Los experimentos realizados por Eratóstenes proporcionaron información sobre la forma de la Tierra y una aproximación a las distancias que nos separan de los cuerpos celestes, utilizando la geometría que se había desarrollado siglos atrás gracias a Euclides, alrededor de 350 años antes.

A pesar de todo el conocimiento acumulado hasta ese momento, determinar el lugar que ocupaba la Tierra en el universo seguía siendo un desafío de gran complejidad y estaba influenciado por sesgos culturales y teológicos. La búsqueda de una teoría que concordara con la idea de un mundo perfecto limitaba el uso de la geometría, y las observaciones no proporcionaban suficiente información debido a las limitaciones tecnológicas de la época. Sin embargo, esto no quiere decir que no se tuviesen tecnologías de medición, en realidad la instrumentación con la que se contaba en la época entregaba resultado mas o menos precisos en función del conocimiento de la época:

*“A finales del segundo milenio antes de nuestra era, y quizás en época muy anterior, babilonios y egipcios ya habían efectuado observaciones sistemáticas del movimiento solar. A este efecto, concibieron un reloj de sol primitivo consistente en una varilla graduada, el gnomon, que se levanta verticalmente sobre un terreno liso y horizontal. Puesto que la posición aparente del sol, la extremidad del gnomon y la extremidad de su sombra están alineados durante todos y cada uno de los instantes de un día despejado, la medición de la longitud y de la dirección de la sombra en un instante dado determinan completamente la dirección del sol”.*

(Kuhn, 1957, pág. 20)

Esta misma tecnología permitió establecer la curvatura de la tierra años más tarde por Eratóstenes, así como la creación de calendarios, este método fue tan eficiente que fue utilizado

por el mismo Copérnico para determinar la oblicuidad de la eclíptica. *(los detalles de la construcción y el uso del Gnomon de Copérnico se pueden encontrar en el capítulo 5 del libro 2 de sobre las revoluciones)* (Copérnico, 1543).

Aunque se había deducido la rotación de la Tierra a partir de las estrellas aparentemente fijas en el cielo, el movimiento aparentemente errático de los planetas dificultaba la comprensión del complejo mecanismo del universo. La comprensión primitiva de la estructura del mundo estaba restringida en gran medida a meras especulaciones filosóficas influenciadas por la teología de la época.

La doctrina aristotélica se convirtió en el punto de partida para analizar el sistema planetario, representando la primera propuesta formal de un sistema de pensamiento que intentaba explicar los movimientos planetarios. Esta doctrina dio origen al geocentrismo, que prevaleció como una verdad incuestionable sobre las leyes de la naturaleza durante más de 1500 años.

*“existieron diversos universos de dos esferas, pero lo importante para nosotros es que una vez impuesto tal esquema puede decirse que casi nunca se puso en discusión su veracidad. Durante casi dos milenios ha guiado la imaginación de todos los astrónomos y de la mayor parte de los filósofos. Tal es el motivo que nos impulsa a comenzar nuestro análisis de la principal tradición astronómica de occidente con un examen del universo de las dos esferas, a pesar de no ser más que un marco de referencia y aun a costa de dejar de lado los diversos dispositivos planetarios propugnados por tal o cual astrónomo a fin de completarlo”* (Kuhn, 1957, pág. 48)

Sin embargo, los planetas, que parecían experimentar movimientos retrógrados, cuestionaron la idea de Aristóteles de que la Tierra se encontraba en el centro y que los demás astros orbitaban a su alrededor en órbitas circulares. La solución a este problema fue propuesta por Claudio Ptolomeo alrededor del año 100 D.C. por medio del modelo geométrico de epiciclos y deferentes que se repasara con mas detalle en el siguiente apartado.

A pesar de que la visión aristotélica del geocentrismo fue ampliamente aceptada durante mucho tiempo, no fue el único modelo propuesto. Alrededor del año 230 a.C., Aristarco de

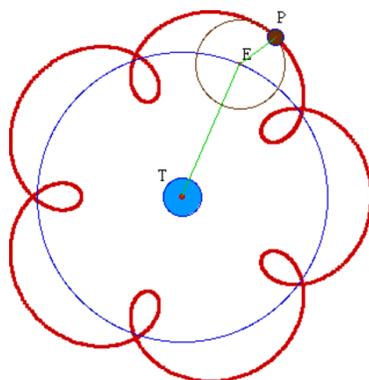
Samos propuso un modelo que situaba al Sol en el centro del sistema solar, aunque dicho modelo no proporcionaba una explicación satisfactoria para el fenómeno de la retrogradación.

### ***Ptolomeo***

Claudio Ptolomeo, en respuesta al desafío planteado por el fenómeno de la retrogradación, desarrolló un modelo explicativo que era compatible con la idea geocéntrica. Este modelo, conocido como "epiciclos", postulaba que los planetas se movían en órbitas secundarias (deferentes) cuyos centros a su vez se desplazaban en órbitas más grandes alrededor de la Tierra. Esta teoría permitía explicar las variaciones aparentes en el movimiento de los planetas y reconciliar sus observaciones con el modelo geocéntrico prevaleciente en esa época.

### **Figura 1**

*Descripción pictórica de los epiciclos<sup>9</sup>:*



*Nota. La tierra (T) en el centro de una circunferencia que determina el primer movimiento, el epiciclo denotado por la letra E que representa un punto fijo que se mueve a lo largo de la circunferencia mayor a la vez que representa el centro de una circunferencia menor, el planeta observado (P) que orbita a (E) se desplaza a su vez en torno a (T) describiendo la trayectoria representada en color rojo, este modelo representa el funcionamiento básico propuesto por Ptolomeo, que en adelante se llamara modelo de epiciclos. Tomado de. Fuente: Pradas, J., 2012, Blogger.com (<https://onx.la/3a1e3>)*

---

<sup>9</sup> En intentos por refinar el modelo Ptolemaico los astrónomos de los siglos XIII y XIV agregaron nuevas circunferencias y epiciclos al punto que los cálculos se volvían demasiado complejos para que pudieran ser realizados por una persona. (Copérnico, 1543)

Desde la perspectiva terrestre, el modelo de epiciclos permitía explicar por qué, en determinados momentos, el movimiento de los planetas parecía avanzar en una dirección y, en otros momentos, retroceder en la dirección opuesta, e incluso por qué a veces parecían estar estacionarios en el cielo. Aunque esta interpretación parecía adecuada en teoría, las observaciones astronómicas presentaban notables discrepancias con este modelo. No lograba predecir con precisión las posiciones de los planetas ni concordaba con los datos recolectados a lo largo de la historia de la astronomía. Si bien el uso del gnomon proporcionaba herramientas de perspectiva y regularidades en cuanto a posiciones relativas, los datos recolectados difícilmente se acomodaban con exactitud al modelo geométrico.

*“en el momento del día en que la sombra del gnomon es más corta, siempre está orientada en la misma dirección. Esta simple regularidad proporciona dos marcos de referencia fundamentales para todas las restantes mediciones astronómicas. La dirección permanente tomada por la sombra más corta en todos y cada uno de los días define el norte y, en consecuencia, nos determina los restantes puntos cardinales. El instante en que la sombra tiene menor longitud define un punto de referencia en el tiempo, el mediodía del lugar, y el intervalo de tiempo que separa en un lugar dado dos mediodías consecutivos define una unidad de tiempo fundamental, el día solar”.*

El modelo de epiciclos resultaba especialmente problemático en el caso de Marte, ya que no se ajustaba de manera precisa a sus movimientos observados. (las “coordenadas” que predecía el modelo de epiciclos para un planeta en particular no correspondían con las trayectorias observadas) En cambio, para Venus, el modelo parecía funcionar con una alta precisión y concordancia con las observaciones. Estas discrepancias y la incapacidad del modelo para proporcionar predicciones precisas de las posiciones planetarias fueron desafíos significativos en la comprensión del sistema solar en esa época.

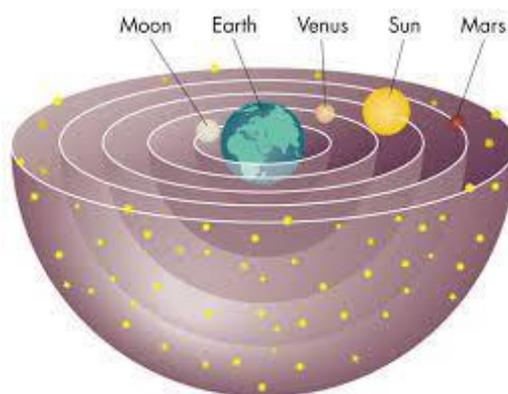
### **Bóveda celeste**

El concepto de la bóveda celeste, inicialmente propuesto por Aristóteles y retomado por Claudio Ptolomeo, describe la idea de que las estrellas fijas están enclavadas en una serie de esferas concéntricas. Además, este modelo sostiene que las órbitas de los planetas se desplazan sobre estas esferas. Este enfoque geométrico se utilizó en el sistema geocéntrico para explicar el movimiento aparente de los astros en el cielo y su posición relativa en relación con la Tierra. La

imagen de la bóveda celeste con sus esferas concéntricas fue una parte central de la cosmología geocéntrica que prevaleció durante siglos en la astronomía antigua y medieval.

## Figura 2

*Modelo del sistema solar formado por esferas concéntricas*



*Nota. La imagen permite tener una referencia visual del modelo aristotélico pero a demás proporciona una idea de la configuración geométrica sobre de los orbes celestes. Tomado de: Materiales: cosmología heliocéntrica. Pradas, J., 2012, Blogger.com (<https://onx.la/3a1e3>).*

Es cierto que el concepto de las esferas celestes, aunque abstracto en cuanto a su naturaleza física puesto que no se le puede atribuir fácilmente una composición material, se convirtió en una herramienta matemática de gran utilidad en la astronomía histórica. Estas esferas al considerarse regulares proporcionaban un marco de referencia útil para la observación, medición y sistematización de datos celestes por medio de sistemas coordenados similares al actual sistema de coordenadas esféricas. El concepto de esfera como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo, en este caso la tierra, era ya bien conocido y ampliamente estudiado por la geometría del momento. Es fundamental destacar que en este trabajo no se asume en ningún momento que las consideraciones filosóficas o metafísicas estén desligadas de los desarrollos matemáticos. Más bien, se reconoce que, en cierta medida, se apela a la tradición griega de unificar el conocimiento, y se defiende la idea de que las disertaciones de naturaleza filosófica proporcionan recursos matemáticos y físicos valiosos. Esto ha sido evidente en los casos de todos los autores mencionados en este trabajo, desde Ptolomeo hasta Einstein. La

interconexión entre la filosofía y las disciplinas científicas es una característica inherente a la búsqueda del conocimiento y la comprensión de la naturaleza<sup>10</sup>.

El sistema de coordenadas esféricas, tal como se conoce en la actualidad, resulta adecuado para determinar la posición de un objeto en relación con el centro de la Tierra. Es particularmente útil para objetos celestes que, desde la perspectiva de un observador en la Tierra, parecen mantener una posición fija en el espacio. Estas estrellas aparentemente fijas en el cielo se pueden describir utilizando solo dos ángulos, lo que simplifica en gran medida la representación de su ubicación en el firmamento. Este enfoque se ajusta a la idea de que las estrellas están ubicadas en esferas concéntricas que rotan alrededor de la Tierra, como se concebía en los sistemas astronómicos antiguos. El concepto de la bóveda celeste resulta como consecuencia de estos modelos antiguos.

### Figura 3

*Cocepción actual de la bobeda celeste con fines astronomicos*

*Esta imagen muestra cómo, desde la perspectiva de la Tierra, las estrellas se pueden ubicar como puntos fijos en una esfera hipotética con el fin de precisar su posición relativa. Esta herramienta facilita las observaciones astronómicas. Aunque no es el mismo modelo que el aristotélico o el ptolemaico, comparte características geométricas similares en cuanto a la esfericidad.*



Nota. Fuente: *Smith, (1851)*. ([Magic Transistor \(tumblr.com\)](https://www.tumblr.com/magic-transistor))

<sup>10</sup> Es importante aclarar al lector que esta obra no emite ningún juicio de valor sobre ninguna de las teorías presentadas. Por el contrario, se reconoce ampliamente la importancia de estas teorías y se busca unificar todos los conocimientos expuestos en el contexto de la ciencia moderna. El propósito principal es analizar y comprender las diferentes perspectivas históricas y filosóficas en relación con los modelos astronómicos, sin pretender desacreditar ninguna de ellas.

Es cierto que la idea de la bóveda celestes, aunque pueda parecer imprecisa en ciertos aspectos, ha perdurado y sigue siendo útil en algunos campos como la navegación y la astronomía, incluso en la actualidad. La simplicidad de imaginar una esfera fija en la que se asignan valores a las estrellas para determinar su posición facilita la caracterización de las constelaciones y permite observar la evolución de los astros a lo largo del tiempo.

La noción de los orbes celestes que contienen a los planetas y estrellas se ajustaba a los recursos matemáticos disponibles en la época de Ptolomeo y proporcionaba un marco conceptual para entender el sistema solar. Este enfoque condujo al desarrollo del primer método matemático para definir el sistema solar conocido. Si bien los conceptos no son los mismos si se encuentran estrechamente relacionados en cuanto a sus propiedades geométricas como veremos a continuación.

Dentro de este contexto, la descripción geométrica era esencial, ya que tanto la Tierra como el universo se consideraban esféricos. Ptolomeo propuso la extensión de algunos teoremas de geometría plana para aplicarlos a las esferas. Era fundamental determinar lugares geométricos en las esferas para poder calcular las posiciones aparentes de los objetos celestes.

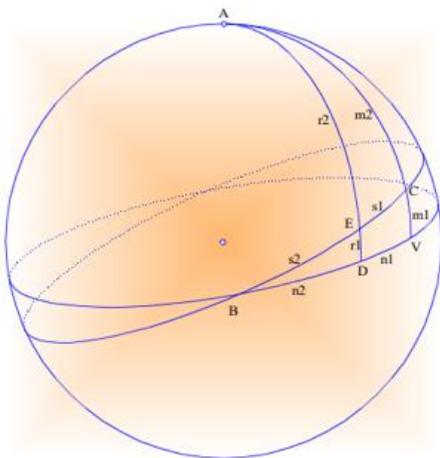
En la figura 4, se muestra cómo la intersección de círculos máximos permite determinar los ángulos y distancias necesarios para calcular las posiciones aparentes de los objetos observados en una superficie esférica. Estos métodos de geometría esférica, basados en una extensión del teorema de Meleno para superficies esféricas, fueron fundamentales en la astronomía de esa época y se refinaron aún más en el trabajo de Copérnico, como se verá en el siguiente apartado.

#### **Figura 4**

*Teorema de Melenao para la esfera*

*El teorema de Melenao establece la proporcionalidad entre los segmentos formados por un Triángulo AVD cuyo lado VD se prolonga hasta el punto B arbitrario, se divide el lado AV en el punto C y se traza el segmento CB. Las proporciones establecidas corresponden a las*

igualdades expresadas al lado derecho de la figura 4<sup>11</sup> el teorema originalmente se estableció para triángulos planos si en embargo aquí se muestra la versión de triángulos esféricos propios de la astronomía.



$$\frac{m}{m1} = \frac{r}{r1} * \frac{s2}{s}$$

$$\frac{r2}{r1} = \frac{m2}{m1} * \frac{n}{n2}$$

$$m = m1 + m2$$

$$m = crd * m2$$

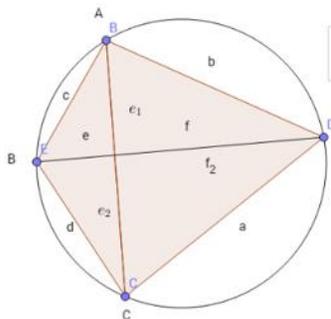
*Nota. Fuente: Arribas, A (2012). Claudio Ptolomeo el señor de los epiciclos*

<http://blogs.mat.ucm.es/shm/wp-content/uploads/sites/17/2012/05/Ptolomeo-2012.pdf>

## Figura 5

*Teorema de Ptolomeo*

*Los puntos A, B, C, D representan la posición de un cuerpo en 4 momentos distintos.*



*Nota. Fuente: Nota. Fuente: Arribas, A (2012). Claudio Ptolomeo el señor de los epiciclos*

<http://blogs.mat.ucm.es/shm/wp-content/uploads/sites/17/2012/05/Ptolomeo-2012.pdf>

$$\frac{c}{a} = \frac{e1}{f2} = \frac{f1}{e2}$$

<sup>11</sup> La demostración de estos primeros teoremas se puede encontrar en una sección anexa, se ha optado por presentar únicamente las demostraciones que son estrictamente necesarias para el desarrollo de las proposiciones propias del planteamiento del problema.

$$\frac{d}{b} = \frac{f_1}{e_1} = \frac{e_2}{f_2}$$

Dada la configuración de puntos sobre una circunferencia de la figura 5 el teorema de Ptolomeo, se establecen las relaciones necesarias entre puntos ubicados en una circunferencia así:

$$\widehat{ACD} = \widehat{ABD}, \widehat{BCD} = \widehat{BAC}, \widehat{BCA} = \widehat{ABD}, \widehat{DBC} = \widehat{DAC}$$

Esto permite la construcción de los epiciclos de acuerdo con observaciones de un cuerpo celeste en cuatro momentos distintos. En este enfoque, Ptolomeo consideraba que el círculo, como figura perfecta, debía ser la única manera de describir los movimientos celestes. Por lo tanto, se basó en todo el conocimiento geométrico disponible hasta la fecha, a pesar de sus limitaciones, para desarrollar su modelo astronómico.

A lo largo de los años, se hicieron evidentes diferencias significativas entre las predicciones del modelo ptolemaico y los datos observacionales, lo que planteó desafíos importantes. Para abordar estas discrepancias, se introdujeron epiciclos adicionales al modelo original. Si bien esto complicaba los cálculos, las aproximaciones resultantes eran mucho más precisas y permitían una mejor concordancia entre la teoría y las observaciones astronómicas.

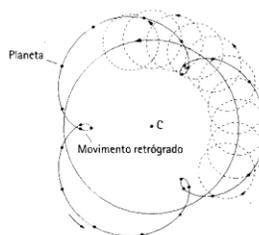
## Figura 6

### *Movimiento de retrogradación*

*La figura muestra la trayectoria de un cuerpo respecto a la tierra, la línea punteada representa el desplazamiento del deferente y los nodos son los puntos en donde el planeta aparentemente cambia su trayectoria y viaja en sentido contrario<sup>12</sup>.*

---

<sup>12</sup> Como se menciona en el planteamiento del problema, el público al que va dirigido este trabajo tiene conocimiento acerca de los modelos planetarios y su geometría. Por lo tanto, no es la intención de este trabajo realizar una explicación especializada. En su lugar, se plantea una breve contextualización que sienta las bases para los desarrollos finales.



*Fuente: (BRAGA; GUERRA; REIS, 2003, p.65)*

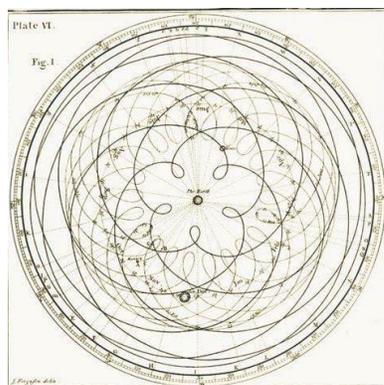
El principal problema inherente a este modelo ptolemaico radicaba en la necesidad constante de añadir nuevos epiciclos cada vez que los nuevos datos observacionales no coincidían con las trayectorias calculadas. Cada nuevo epiciclo agregado al sistema complicaba aún más el modelo y generaba simetrías adicionales en los patrones de movimiento de los astros. Esta práctica de incorporar epiciclos de forma continua se justificaba en parte como una manifestación de la belleza divina de la creación y contribuía a reforzar la aceptación de la teoría.

*“(...) Ptolomeo, que destaca ampliamente sobre los demás por su admirable ingenio y escrupulosidad, llevó toda esta ciencia a su más alto grado mediante observaciones, de manera que durante más de cuatrocientos años parecía no faltar nada que él no hubiera abordado. Sin embargo, vemos que muchas cosas no coinciden con los movimientos que debían seguirse de su enseñanza, ni con algunos otros movimientos, descubiertos después, aún no conocidos para él”* (Copérnico, 1543, pág. 112)

Esta creencia en la belleza y perfección divina de la creación llevaba a los astrónomos y filósofos de la época a buscar explicaciones cada vez más complejas y elaboradas para concordar sus modelos con las observaciones. Aunque esto permitía mejorar la precisión de las predicciones, también complicaba en gran medida la teoría y sus cálculos, lo que eventualmente condujo a una necesidad insostenible de ajustes y correcciones constantes en el modelo ptolemaico.

### **Figura 7**

*Órbitas planetarias descritas por el modelo Ptolemaico Modelo Ptolemaico de las trayectorias superpuestas de los planetas Venus, Marte, Júpiter y Saturno. La figura muestra los patrones formados como consecuencia de los epiciclos calculados geoméricamente*



*Nota. Fuente: Sutori, (s.f).*

Es cierto que la creencia de que el modelo ptolemaico era el único sistema aceptado por la ciencia hasta la llegada de Nicolás Copérnico es una idea que se ha difundido en ciertos contextos, especialmente en el mundo occidental y dentro de las comunidades académicas europeas influenciadas por la Iglesia cristiana y su interpretación de las doctrinas aristotélicas en concordancia con la Biblia. Sin embargo, es importante señalar que esta perspectiva se aplica principalmente a la tradición científica y académica occidental.

En realidad, muchas otras culturas en todo el mundo desarrollaron métodos observacionales avanzados que les permitieron establecer calendarios, sistemas de navegación, agricultura, y teorías propias para explicar los sistemas planetarios. Un ejemplo destacado son las civilizaciones maya, azteca e inca en América, que tenían sistemas calendáricos precisos y desarrollaron complejas observaciones astronómicas.

La diversidad de enfoques y sistemas de conocimiento en diferentes culturas y civilizaciones es un recordatorio importante de que la ciencia y la astronomía no se limitaron a una única perspectiva. Cada cultura tenía sus propios métodos y teorías, y contribuyó de manera única al entendimiento del cosmos. Esto enfatiza la riqueza y la diversidad de la historia de la astronomía en todo el mundo.

## **Modelo copernicano**

### *Nuevo modelo del mundo*

A mediados del siglo XV, Nicolás Copérnico, un astrónomo polaco, propuso una revolucionaria teoría en su obra "Sobre la revolución de las esferas celestes". Esta teoría marcó un cambio radical en el paradigma de la estructura del universo conocido hasta ese momento.

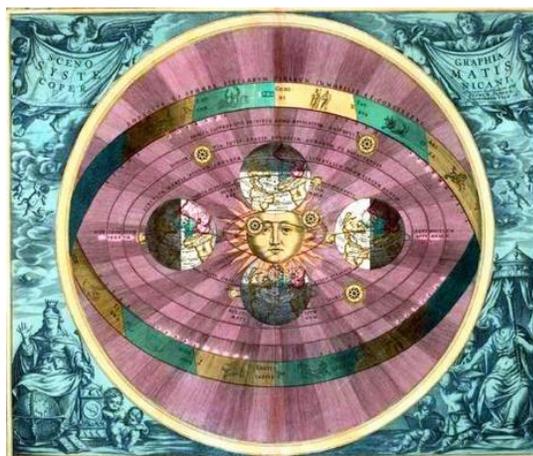
Copérnico postuló que el Sol era el centro inmóvil del sistema solar, en contraste con la visión geocéntrica prevaleciente que situaba a la Tierra en el centro.

La propuesta de Copérnico, conocida como el modelo heliocéntrico, transformó la comprensión del sistema solar y planteó un nuevo enfoque en la astronomía. En su modelo, los planetas, incluida la Tierra, orbitaban alrededor del Sol. Aunque esta idea inicialmente enfrentó resistencia y críticas, sentó las bases para la posterior revolución científica y cambió para siempre la forma en que la humanidad concebía el cosmos y nuestro lugar en él.

### Figura 8

#### *Harmonia Macrocosmica*

*Una representación artística del modelo copernicano, la figura muestra los movimientos de la tierra respecto al sol inmóvil en el centro de la bóveda celeste*



*Fuente: Andreas Cellarius (1708).*

Nicolás Copérnico presentó una serie de proposiciones y postulados en su célebre obra "Sobre las revoluciones de los orbes celestes", que constituyeron la base de la revolución copernicana. Estos postulados estaban respaldados por observaciones y geometría, y tenían como objetivo establecer una visión más precisa y verídica del mundo en contraposición a la interpretación aristotélica clásica. Aunque algunos capítulos incluyeron explicaciones de naturaleza metafísica, la fundamentación principal se basó en la observación y la lógica. Esto se puede evidenciar en los axiomas y definiciones sobre los que basa su teoría:

*“En primer lugar, hemos de señalar que el mundo es esférico, sea porque es la forma más perfecta de todas, sin comparación alguna, totalmente indivisa, sea porque es la más capaz de todas las figuras, la que más conviene para comprender todas las cosas y conservarlas, sea también porque las demás partes separadas del mundo (me refiero al Sol, a la Luna y a las*

*estrellas) aparecen con tal forma, sea porque con esta forma todas las cosas tienden a perfeccionarse, como aparece en las gotas de agua y en los demás cuerpos Ilíquidos., ya que tienden a limitarse por sí mismos, para que nadie ponga en duda la atribución de tal forma a los cuerpos divinos” (Copérnico, 1543, pág. 15)*

Las principales proposiciones y postulados de la revolución copernicana eran los siguientes:

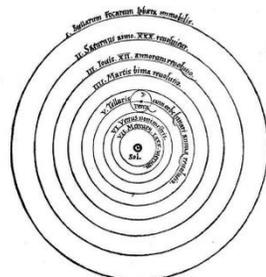
1. El universo en su totalidad es una esfera, y esta conclusión se basa en la idea de que la esfera representa una manifestación de la divinidad y simboliza la perfección. Esta idea se aplica tanto al cosmos en su conjunto como a la Tierra, que se considera una esfera. Las observaciones astronómicas y los descubrimientos de navegantes respaldan esta concepción y refutan las teorías previas que sugerían un mundo plano.

2. En relación con el movimiento de los cuerpos celestes, como los planetas, el Sol y la Luna, Copérnico argumenta que sus movimientos deben ser circulares o composiciones de movimientos circulares. Esto se debe a que la rotación es el movimiento natural de las esferas alrededor de cualquier eje posible.

La obra de Copérnico marcó un cambio radical en la comprensión del cosmos y sentó las bases del modelo heliocéntrico. A pesar de que enfrentó resistencia en su época, su enfoque más preciso y coherente del movimiento planetario allanó el camino para futuras investigaciones en astronomía y física.

## Figura 9

*Orbitas circulares y orden de los planetas*



*Nota. La imagen muestra el modelo que desarrollo Copérnico y como reorganizo los planetas en función de las observaciones. Fuente: Copérnico, 1543. p. 36.*

En el caso de la Tierra, es imperativo definir su posición en el universo para determinar qué tipo de movimiento sigue. Copérnico inicia esta reflexión bajo la siguiente premisa:

*“pues todo cambio según la posición que aparece, o es por el movimiento de lo mirado, o del que mira, o evidentemente por un cambio dispar de uno y otro pues no se percibe movimiento entre movimientos iguales entre sí, me refiero a entre lo visto y el que ve”.*

(Copérnico, 1543, pág. 38)

El movimiento aparente de los cuerpos da la sensación de que la Tierra está inmóvil. Esta afirmación, que en sí misma sirve como precedente directo de la relatividad de Galileo, el principio de Mach y el principio de relatividad, es el eje central de la revolución copernicana. Según la observación, no es posible que la Tierra ocupe el centro del universo, ya que los movimientos de todos los demás cuerpos a su alrededor no deberían evidenciar cambios en su tamaño. Esto se debe a que, según los estudios de la óptica de la época, las cosas se ven más pequeñas a medida que están más lejos y más grandes cuando se acercan.

Para Copérnico, el tamaño del universo es inconmensurable en comparación con el de la Tierra, y esta descripción se utiliza para evitar el término infinito, aunque se hace referencia a él.

La idea intuitivamente correcta es que los objetos que caen no describirían una línea recta si la Tierra estuviera girando, o que las nubes y las aves en el cielo parecerían alejarse en la dirección opuesta a la rotación de la Tierra. Estos fueron algunos de los argumentos filosóficos utilizados para defender la inmovilidad de la Tierra. Sin embargo, Copérnico encontró un método de refutación basado en un enfoque mecánico experimental, al considerar que el movimiento de los planetas y los objetos en la Tierra no son independientes. Dado que un día dura 24 horas, es mucho más plausible que la Tierra complete una revolución en ese tiempo que el Sol, que está mucho más lejos y arrastraría consigo a todo el universo. Esto sugiere que es el cielo el que está inmóvil y no la Tierra. La relatividad del movimiento está siempre presente en los razonamientos de Copérnico y su obra, y se argumenta a través de analogías como la siguiente:

*“Puesto que, al flotar una nave sobre la tranquilidad de las aguas, todo lo que está fuera de ellos es considerado por los navegantes moviéndose. De acuerdo con la imagen de su*

*movimiento, y al mismo tiempo juzgan que están quietos, con todo lo que esta con ellos”.*  
(Copérnico, 1543, pág. 41).

Claramente, Copérnico sugiere que las leyes de la mecánica celestial y las terrestres deben ser las mismas por sentido común, y que el mundo en su totalidad debe obedecer a un único modelo explicativo. Aunque esta idea se atribuye comúnmente a Isaac Newton, fue él quien la demostró de manera más completa.

El paradigma geocéntrico generaba ambigüedades y confusiones en cuanto al orden de los planetas, ya que dependiendo de las épocas del año en las que se observaban, podían parecer estar en órbitas más cercanas o lejanas a la Tierra. El hecho de que Venus y Mercurio parecieran conservar siempre la misma distancia al Sol podría ser indicio de que sus órbitas estaban centradas en el Sol y no en la Tierra. Esta idea fue tomada posteriormente por Tycho Brahe como explicación a sus observaciones. El modelo ptolemaico no podía dar cuenta de este comportamiento para Venus y Mercurio sin recurrir a una cantidad desproporcionada de epiciclos cuyos cálculos estarían fuera del alcance de cualquier persona.

El modelo propuesto por Copérnico no buscaba contradecir la interpretación católica de la doctrina aristotélica predominante en la comunidad filosófica de la época. Más bien, proponía una alternativa que fuera teológicamente consistente y sólidamente estructurada en la geometría sagrada, de manera que los datos observacionales fueran coherentes con una teoría que también respetara las creencias religiosas. La inspiración en los textos olvidados de Aristarco de Samos fue fundamental para Copérnico al construir su nueva visión del mundo. A pesar de que Copérnico no fue testigo del impacto que su obra tendría en el pensamiento científico de la época, esta supuso una revolución, aunque no de forma inmediata.

Para la Iglesia Cristiana, la nueva visión de Copérnico representó una contradicción con los planteamientos bíblicos, lo que llevó a su prohibición y retrasó el progreso en el entendimiento de la mecánica celestial y obstaculizó el surgimiento de nuevas teorías.

La idea de la bóveda celeste, tal como se conocía en ese momento, no experimentó cambios significativos. En esencia, el éter<sup>13</sup>, como sustancia primordial del mundo supra lunar, seguía siendo la base explicativa del funcionamiento de la maquinaria del sistema solar.

### **Los movimientos de la tierra**

#### ***Traslación***

Otra de las implicaciones del modelo copernicano es que, al considerar que la Tierra es simplemente otro planeta más, posee tres movimientos característicos. En primer lugar, la Tierra debe llevar a cabo un movimiento de traslación mientras órbita alrededor del Sol en un período de un año. Este fenómeno, que resulta ser el menos intuitivo de todos, probablemente fue el que causó la mayor controversia en su época. No solo entraba en conflicto con las interpretaciones predominantes de la Biblia en aquel momento, sino también porque, desde la perspectiva humana, la Tierra no parece experimentar ningún movimiento evidente. Resulta complicado imaginar cómo todo y todos los que nos rodean están en constante movimiento sin que podamos percibir directamente las consecuencias de este movimiento a través de nuestros sentidos.

#### ***Rotación***

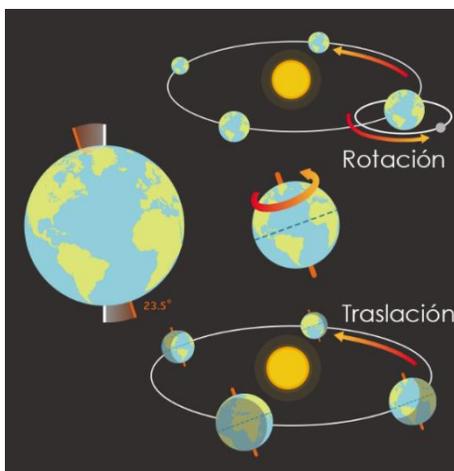
El segundo efecto que se deriva de la doctrina copernicana es la rotación de la Tierra. Dado que no está fija en un punto, la Tierra no podía experimentar el ciclo de día y noche de manera natural. En consecuencia, solo una cara estaría iluminada por la luz del Sol, mientras que la otra permanecería en penumbra perpetua. Para explicar las transiciones entre el día y la noche de manera periódica, Copérnico propuso que la Tierra gira constantemente sobre un eje invisible. Este fenómeno es lo que permite los amaneceres, atardeceres, el ciclo de día y noche, de manera similar a cómo sucedería si fuera el Sol el que orbitara alrededor de la Tierra.

### **Figura 10**

*Movimientos característicos de la tierra que orbita al sol*

---

<sup>13</sup> El éter, como un mecanismo explicativo de los fenómenos físicos, es un concepto que aún prevalece en nuestros días y ha sido respaldado por destacados protagonistas de la física moderna, como Einstein, Hertz, Lorentz y Maxwell, entre otros. Esta teoría ha evolucionado con cada avance científico y, desde una perspectiva filosófica, ha representado una fuente significativa de conocimiento para la comprensión de la física moderna. Lamentablemente, debido a la extensión de esta entrega, no es posible profundizar en el tema. Sin embargo, en la bibliografía se incluirán múltiples artículos que enriquecerán este primer apartado histórico.



*Nota. Fuente: Social studio resources, (2021),*

*<https://travellingacrosstime.com/2021/02/19/losmovimientos-de-la-tierra/>*

### ***Precesión***

Con el fin de explicar cómo ocurren los cambios estacionales en diferentes regiones del planeta, Copérnico propuso un tercer movimiento. En este movimiento, el eje central alrededor del cual gira la Tierra también se desplaza y describe una forma cónica. El cálculo de las bases de estos conos se basa en una aproximación geométrica que tiene en cuenta la duración de las estaciones del año.

Esta nueva perspectiva copernicana no solo implicó un cambio en nuestra comprensión de la distribución de los cuerpos celestes, sino que también llevó consigo una serie de implicaciones físicas fundamentales debido a los cambios propuestos. Una de las ideas más importantes es la de los centros de masas asociados a la Tierra y al Sol. Al desplazar a la Tierra como el centro del universo, se asumió que el centro de masa ahora se encuentra en el Sol, lo que implica que el centro de gravedad está en el mismo punto debido a la esfericidad del Sol.

Dado que el centro de gravedad del universo ya no está en la Tierra, surgió un problema en relación con la caída de los objetos. En respuesta a esto, Copérnico teorizó que todos los cuerpos tienen la capacidad de ejercer fuerza gravitacional en función de su peso. Las fuerzas gravitacionales más fuertes son ejercidas por los cuerpos más grandes, mientras que los objetos más pequeños experimentan fuerzas más débiles debido a su menor peso. Como resultado, la Luna orbita alrededor de la Tierra porque es más pequeña, mientras que el Sol permanece fijo y

es la Tierra y los demás planetas los que giran a su alrededor debido a su menor capacidad gravitacional. A escalas humanas, los objetos más pequeños y cotidianos solo experimentan una fuerza hacia abajo debido a su gravedad insignificante, por lo que la atracción entre ellos es imperceptible.

Una primera implicación importante de la visión de Copérnico es que el orden y el tamaño de los cuerpos celestes cambian dependiendo de la época del año desde la perspectiva de la Tierra en movimiento. Esto se debe a que la posición relativa de los planetas varía según la ubicación de la Tierra en su órbita en el momento de la observación.

El modelo heliocéntrico también tuvo un impacto significativo en la medición del tiempo. Copérnico desarrolló nuevos calendarios que aumentaban la precisión en la medición del tiempo, aunque estos no se adoptaron ampliamente hasta después de su muerte y no fueron aceptados de inmediato como parte del modelo heliocéntrico.

A pesar de que Copérnico fundamentó muchos de sus argumentos en principios teológicos, insistió en que todo lo relacionado con la física debía abordarse con el rigor matemático propuesto por las obras de Euclides, como "Los Elementos" y "La Óptica". Propuso una serie de teoremas como una extensión de los ya existentes, adaptándolos al ámbito de los fenómenos observables. A continuación, describiré algunos de estos teoremas que se consideran relevantes para comprender la forma en que Nicolás Copérnico razonaba sobre la naturaleza. No se citarán textualmente estos teoremas, en su lugar, se proporcionará una interpretación moderna y una breve descripción, centrándonos en aquellos que son más relevantes para este documento.

- I. Como teorema primero se menciona la relación que existe entre el diámetro de una circunferencia y los lados de un triángulo, cuadrado, Pentágono, hexágono y dodecágono inscritos, así como la proporción con el número pi.

### **Figura 11**

*Polígonos regulares inscritos en una circunferencia*



El noveno capítulo del libro presenta tres proposiciones que resumen lo que hoy conocemos como trigonometría plana, aplicada a triángulos inscritos en circunferencias.

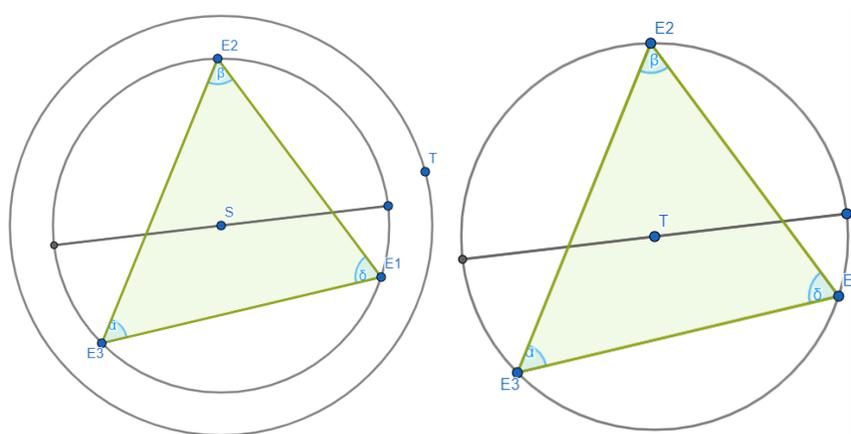
- I. En todo triángulo, dados los ángulos se conocen también sus lados.
- II. Dados dos lados y el ángulo comprendidos entre ellos, se conoce también el lado y ángulos restantes.
- III. Conocidos los lados de una triangulo se conocen también sus ángulos.

Es evidente que al realizar mediciones en tres momentos distintos de un astro y conocer su distancia aproximada desde la Tierra, es posible realizar predicciones precisas sobre su posición en cualquier otro momento, siempre y cuando los planetas orbiten la Tierra en órbitas circulares. Aunque esto no se mencione directamente, la falta de coincidencia con esta suposición implica la necesidad de un argumento matemático para refutar esta idea.

Por otro lado, la observación de los ángulos aparentes formados por un planeta en tres momentos diferentes, bajo la premisa de que estos planetas orbitan alrededor del Sol, proporciona información sobre las distancias relativas entre cada planeta, el Sol y la Tierra. Sin embargo, esta estrategia conlleva desafíos matemáticos considerablemente complejos, ya que la Tierra tiene los tres movimientos característicos previamente descritos y además, los ejes de rotación de la Tierra y las órbitas de los planetas no son coplanares.

### Figura 12

*Comparación de la posición de un planeta en dos modelos distintos para tres momentos diferentes*



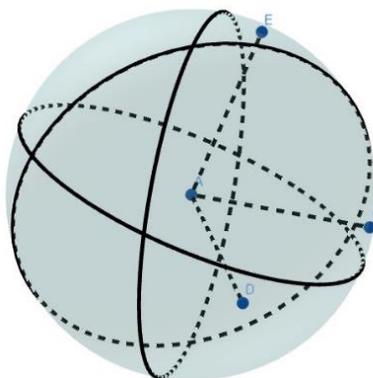
*Fuente propia*

La figura 12 representa al Sol, la Tierra y un planeta en tres momentos diferentes, identificados con las etiquetas S, T, E1, E2 y E3. Esta representación ayuda a comprender mejor la lógica subyacente en la búsqueda de realizar predicciones basadas en las proposiciones previas.

Con el objetivo de proporcionar argumentos matemáticos que relacionen la teoría con las observaciones, Copérnico dedica el noveno y último capítulo de su obra al estudio de los triángulos esféricos, un campo de la geometría que aún no estaba ampliamente desarrollado en esa época, pero que contaba con argumentos sólidamente fundamentados en la geometría euclidiana. A continuación, se resumirán brevemente las ideas principales extraídas de las 15 proposiciones que componen este capítulo.

### Figura 13

*Triángulo esférico a partir de geodésicas*



*Fuente propia.*

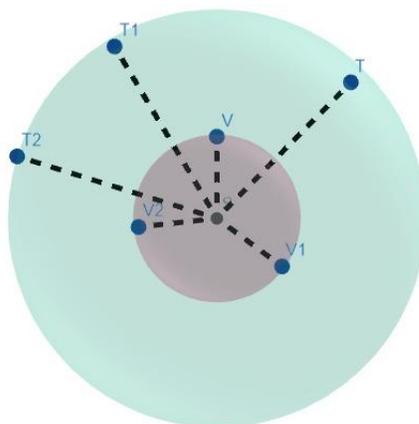
La intersección de tres geodésicas o círculos máximos forma un triángulo esférico siempre que ninguno de los ángulos sea recto. Esta noción es de suma importancia en el análisis de procesos de medición y abstracción, ya que la suposición de un sistema solar compuesto por órbitas fijas y concéntricas implica el cálculo de los ángulos y arcos involucrados.

La figura 14 ilustra cómo la posición de un planeta con respecto al Sol y su medición desde la Tierra en tres momentos distintos generan triángulos esféricos. Este mismo

razonamiento se aplica para determinar la variación de las mediciones en tres lugares diferentes de la Tierra.

### Figura 14

*Triángulos esféricos en la observación*



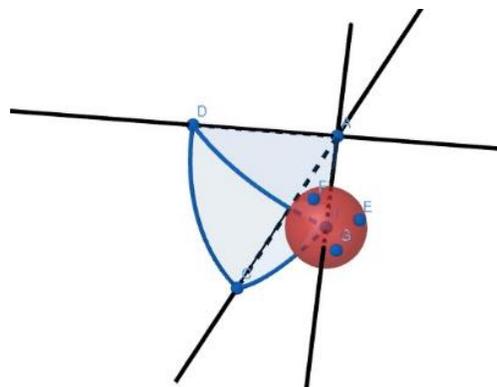
*Fuente propia*

Debido a los movimientos característicos de la Tierra, las posiciones desde las cuales se realizan las mediciones y la época del año en que se encuentre el observador en tres momentos diferentes, es posible formar un triángulo esférico representado por los vértices V, V1 y V2. De manera similar, el objeto observado experimentará cambios aparentes en su posición representados como T, T1 y T2.

Si tenemos un triángulo en el que se conocen dos lados y uno de ellos es recto, o si se conoce uno de los otros ángulos, podemos determinar los lados y ángulos restantes. Aplicando esta proposición al modelo planetario, teóricamente podemos conocer las coordenadas en las que se encuentran los astros en cualquier momento.

### Figura 15

*Triángulo formado por la posición de un planeta en tres momentos sobre su orbe*



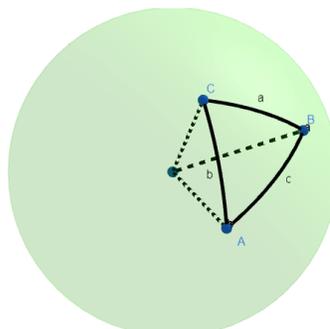
*Fuente propia*

La figura muestra un triángulo esférico en color azul, formado por un planeta representado en rojo en tres momentos distintos. Los puntos no son colineales debido a que la órbita de este planeta no se encuentra en el mismo plano que la eclíptica, según los resultados observados desde la Tierra. Esta representación del triángulo se simplifica para facilitar su comprensión, ya que en la representación real, los puntos estarían tan cerca de ser colineales que la representación más adecuada sería la que se muestra en la figura 12. Este mismo modelo se aplica para representar a un observador en la Tierra desde tres ubicaciones diferentes.

Las proposiciones siguientes resumen varios teoremas y postulados basados en los elementos del libro V de Euclides, que tratan sobre criterios de semejanza y congruencia para triángulos esféricos. Para este análisis, resumiremos estos conceptos utilizando la notación moderna de la trigonometría esférica.

### **Figura 16**

*Proposiciones asociadas a un triángulo esférico*



*Fuente propia*

*Nota.* Los vértices con rotulo en mayúscula representan los ángulos del triángulo esférico, menores siempre a  $180^\circ$  (A, B, C). La unión de dos vértices son los lados de del triángulo y se representan en minúsculas con la misma letra que el ángulo opuesto, esto es, CB=a, AB=c, AC=b.

Es importante destacar que Nicolás Copérnico no empleó las razones trigonométricas tal como las conocemos en la actualidad, a pesar de que ya habían sido popularizadas en su época. En su lugar, utilizó un antiguo sistema de proporcionalidad basado en los principios geométricos establecidos por Euclides.

**I.** Coseno esférico.

La relación que hay entre dos lados, su ángulo opuesto y el coseno del lado restante, (el coseno de un lado se refiere al arco que genera el ángulo cuyo vértice es el centro de la esfera y delimitado por dos de los vértices del triángulo), esto es:

$$\cos(a) = \cos(b) * \cos(c) + \text{sen}(b) * \text{sen}(a) * \cos(A)$$

**II.** Cotangente esférica.

Es la relación de un ángulo y sus lados adyacentes con uno de los ángulos restantes así:

$$\cot(b) * \text{sen}(c) = \cos(c) * \cos(A) + \text{sen}(A) * \cot(B)$$

**III.** Seno esférico.

Es la relación entre los ángulos y sus lados opuestos:

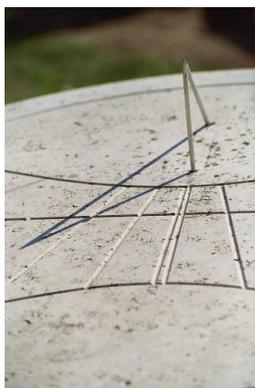
$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

El segundo libro sobre las revoluciones de Copérnico muestra cómo los argumentos matemáticos trabajados hasta ese momento pueden ser confirmados a través de la observación y la experimentación, y viceversa. Además de lo ya mencionado, existen ideas particulares que son necesarias para entender el corpus copernicano de manera objetiva.

Por un lado, se destaca la importancia de la actividad experimental como un recurso presente en el trabajo de Copérnico. Un ejemplo de esto es la demostración de la oblicuidad de la eclíptica, que es el ángulo de inclinación entre el ecuador terrestre y los trópicos (y por extensión, el plano orbital de la Tierra). Esta oblicuidad se puede comprobar mediante la construcción de instrumentos de medición angular simples, que consisten en un plano y un vector perpendicular, generalmente fabricados de madera. Estos instrumentos permiten marcar la sombra que proyecta el Sol al mediodía en diferentes épocas del año. Aunque este método no fue inventado por Copérnico (ya estaba descrito en el Almagesto), es importante resaltar las nuevas interpretaciones que él atribuyó a los resultados obtenidos.

### **Figura 17**

*Representación visual de gnomon*



*Nota. La imagen proporciona una idea de uno de los métodos de medición utilizados por Copérnico. Tomado de (Il Tempo al tempo dei romani / The Time in romans' time)*

<https://www.flickr.com/photos/edri/3431220071/>. 2009

Por otra parte, es relevante señalar que los vínculos entre la observación y la experimentación, comúnmente atribuidos a científicos como Galileo, tienen raíces anteriores, como lo demuestra el trabajo de Copérnico. Esto nos permite tener una visión más amplia del desarrollo histórico de la ciencia y los factores que contribuyeron a los cambios de paradigma.

La observación y el modelo copernicano se combinan a través de rigurosas estadísticas compiladas en tablas de datos. Estas tablas proporcionan una base para todo el trabajo

astronómico previo realizado por Copérnico y permiten buscar diferencias con los datos existentes, en particular con los resultados publicados por Ptolomeo en su obra el *Almagesto*. Entre las mediciones encontramos el ángulo de declinación del ecuador respecto a la eclíptica en función de los grados de rotación de la Tierra. Este estudio permite determinar la declinación y ascensión recta de los astros, las diferencias en la visión del horizonte según la época y el lugar desde el que se observa, y otros fenómenos relacionados, como la variación en la duración del día y la noche, las sombras de mediodía y los periodos de luz y sombra en los polos de la Tierra.

Dado que el objetivo de esta descripción es contextualizar al lector en el corpus copernicano a través de su obra, no se entrarán en detalles exhaustivos para explicar estos términos. En su lugar, se presentan diagramas que ayudan a clarificar lo mencionado anteriormente. Cabe mencionar que las ilustraciones y las imágenes generadas por computadora son abstracciones con fines didácticos que facilitan la comprensión de las relaciones entre las proposiciones, las estadísticas y la física que Copérnico intenta describir, y que no se encuentran directamente en su obra.

Hasta este punto, hemos proporcionado una descripción superficial de los dos primeros libros de la obra "Sobre las revoluciones de los orbes celestes" de Nicolás Copérnico, con el objetivo de comprender mejor la forma en que estableció su nueva explicación del mundo. Sus axiomas, basados en principios filosóficos y teológicos, junto con su enfoque metodológico axiomático y su rigor experimental, permiten construir una visión más clara del que posiblemente sea el primer gran cambio de paradigma en la historia de la humanidad.

El uso fundamental de la geometría euclidiana es evidencia del papel central que las matemáticas desempeñaron en las investigaciones científicas que lo precedieron. No se afirma que Nicolás Copérnico introdujo el uso de las matemáticas en el método científico, ya que las matemáticas surgieron por la necesidad de comprender los fenómenos naturales en sí mismas. Sin embargo, es claro que en el estudio emergente de la física formal y en adelante, las matemáticas se convirtieron en un recurso esencial en la tarea de comprender el universo.

A partir de este punto, los principios teóricos mencionados por Copérnico sirvieron como explicación a muchos fenómenos conocidos, como las diferencias en la latitud del sol, los

horarios de día y noche, los momentos de salida y puesta de los cuerpos celestes, entre otros. El libro 4 de su obra se centra en el estudio de la Luna, reestructurando todas las estimaciones previas relacionadas con su diámetro, la distancia entre la Tierra y la Luna, la aparente trayectoria de la Luna, las variaciones en los períodos de luz y sombra en relación con los movimientos de la Tierra alrededor del Sol, la relación entre los diámetros del Sol y la Luna, la sombra de la Tierra proyectada en la Luna, y más.

Es importante mencionar que Nicolás Copérnico falleció el mismo día en que su obra publicada llegó a sus manos, el 24 de mayo de 1543, por lo que no fue directamente víctima de acusaciones de herejía y persecución por parte de la Inquisición. Sin embargo, sus sucesores, como Giordano Bruno, Johannes Kepler y Galileo Galilei, no tuvieron la misma suerte al intentar defender y refinar la doctrina copernicana. En los siguientes apartados, se presentará un breve repaso de las obras más importantes de estos científicos desde una perspectiva analítica en cuanto a los aspectos epistemológicos y matemáticos.

### **Johannes Kepler**

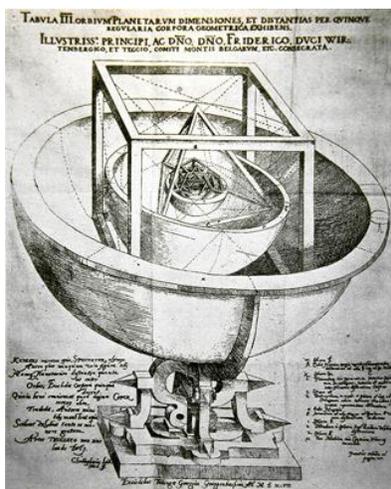
Johannes Kepler es ampliamente reconocido por sus importantes contribuciones al campo de la astronomía, especialmente por sus tres famosas leyes del movimiento planetario. Sin embargo, es menos común encontrar un análisis profundo de sus aportes desde una perspectiva filosófica o matemática, más allá del estudio de estas leyes. En los campos de la física y la filosofía, este apartado proporciona un breve análisis de estas áreas del conocimiento basado en sus obras originales "El secreto del universo" y "Astronomía Nova".

Aunque "Astronomía Nova" se considera su obra más importante en el campo de la ciencia, "El secreto del universo" ofrece una comprensión más amplia de la cosmogonía kepleriana al incorporar elementos de diversas áreas, como el arte, la música, la astrología, la astronomía y la geometría. En general, en estas obras se encuentra evidencia del profundo conocimiento de Kepler en el cuadrivium y su relación con la armonía de la naturaleza.

## Figura 18

### *Sólidos platónicos*

*Nota. Representación del vínculo entre la geometría y la cosmología, construcción de Kepler.*



*Fuente. Tossato, Claudemir. (2004).*

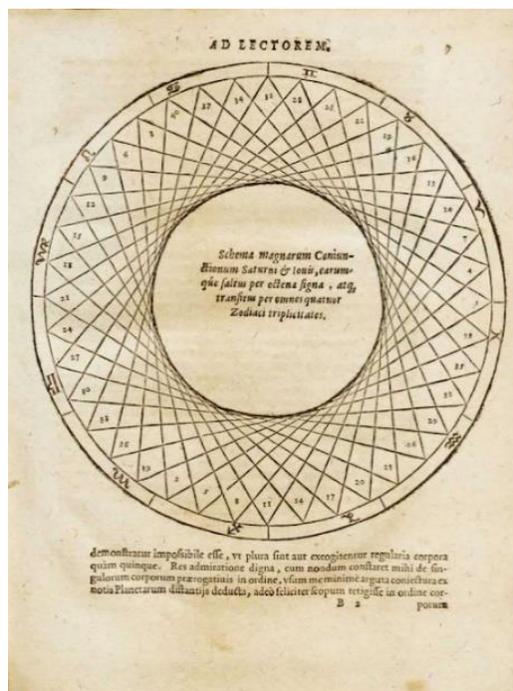
El estudio de la filosofía fue una fuente de inspiración importante para Johannes Kepler, al igual que para muchos de sus contemporáneos. Esta inspiración lo llevó a desarrollar un modelo de pensamiento sobre el universo basado en la armonía y la precisión de las matemáticas. Su enfoque filosófico se basó en gran medida en la obra de Nicolás Copérnico, al tiempo que incorporó su propia perspectiva metafísica y teológica. Kepler buscaba establecer un sólido vínculo entre las matemáticas, la astronomía, la música y la teología, lo que refleja su búsqueda de una filosofía universal que abarcara todos los aspectos del conocimiento.

Kepler fue contemporáneo de Galileo Galilei, con quien compartió sus ideas a través de correspondencia en la que intercambiaron opiniones y estudios en defensa de la doctrina copernicana, que ambos apoyaron.

Una de las creencias fundamentales de Kepler era que todos los fenómenos naturales debían obedecer a una proporción divina establecida. Buscó encontrar esta proporción divina en patrones geométricos basados en observaciones astronómicas. En el diagrama que menciona (**Figura 18**) las conjunciones aparentes de los planetas Júpiter y Saturno, vistos desde la perspectiva de la Tierra, se representan mediante los números ubicados en el círculo exterior. Kepler buscaba establecer patrones que representaran las órbitas de estos planetas errantes, aunque sus esfuerzos en este sentido no tuvieron éxito.

## Figura 19

### Conjunciones planetarias



*Nota. Los vértices representan las posiciones relativas de Júpiter y Saturno respecto a la Tierra que se supone inmóvil en el centro, los segmentos trazados deberían ser tangentes a una circunferencia perfecta. fuente Kepler, J. (1596)*

La imagen 20 es la representación gráfica de uno de los métodos que Kepler utilizó para intentar encontrar patrones geométricos que representaran las órbitas de los planetas Júpiter y Saturno, pero estas no arrojaron resultados satisfactorios. En lugar de obtener una circunferencia interna perfecta que se cerrara en un punto concreto, cada nueva medición de la posición de estos planetas en un momento dado generaba un nuevo segmento que no coincidía con los anteriores. Esto llevó a la conclusión de que la Tierra no permanecía inmóvil en el centro del universo, una premisa compartida tanto por Copérnico como por Kepler, aunque respaldada por argumentos matemáticos en el caso de Copérnico y por argumentos físicos y metafísicos en el caso de Kepler.

Ambos científicos enfrentaron grandes contradicciones en sus intentos de acomodar los datos observacionales de los cinco planetas conocidos en patrones geométricos regulares. El

modelo geocéntrico tradicional no podía explicar adecuadamente estas observaciones, y el modelo heliocéntrico de Copérnico tampoco resultaba completamente compatible, ya que no predecía órbitas perfectamente circulares, incluso con las mediciones más precisas disponibles en ese momento, proporcionadas por Tycho Brahe.

*“Inmediatamente ensayé con el cuadrado de la segunda distancia entre Júpiter y Marte, la tercera con el pentágono, la cuarta con el hexágono. Pero como a simple vista, ya desde la segunda distancia, que es entre Júpiter y Marte, no encajaba, añadí al cuadrado un triángulo y un pentágono. Resulta inacabable hacerlo con cada uno.”* (Kepler, El Secreto del universo, 1994, pág. 69)

La premisa principal en la obra de Kepler era defender el modelo copernicano. Sin embargo, un desafío significativo radicaba en que muchas de sus proposiciones estaban basadas en el lenguaje matemático, lo que dificultaba su comprensión para el público en general, como lo señalaba Copérnico en los prefacios de su obra. Esto llevó a que la comunidad eclesiástica considerara su trabajo como herético y una amenaza para la filosofía tradicional y la Iglesia en general.

Para evitar esta situación, Kepler propuso el estudio de textos que interpretaran la obra de Copérnico de manera más accesible para el público en general, como la "Narratio" de Rheticus. Además, la postura de Kepler sobre el heliocentrismo y el geocentrismo no defendía directamente la idea de que fueran casos completamente distintos e inconexos. En su perspectiva, aunque representaran explicaciones diferentes del mismo fenómeno, la naturaleza subyacente y el razonamiento pertenecían al mismo género. Cito textualmente de su obra.

*“Así Ptolomeo no demostró el nacimiento y ocaso de los astros mediante un término medio equivalente tal como: «la Tierra está en el centro inmóvil», ni Copérnico demuestra esto mismo mediante la premisa intermedia «porque la Tierra gira al a cierta distancia del centro». Pues a ambos basta decir (como lo hicieron uno y otro) que esto ocurría así porque entre el cielo y la tierra media alguna diferencia de movimientos, y porque no se percibe ninguna distancia de la tierra al centro en relación con las estrellas fijas”.* (Kepler, El Secreto del universo, 1994, pág. 77)

La fase anterior refleja en gran medida el objetivo principal de este trabajo y la esencia de lo que es una teoría científica respecto a sus orígenes y consecuencias. También es una muestra

clara de cómo el tiempo y las reinterpretaciones transforman los ideales primarios sobre los que se edifican las hipótesis científicas. Hemos visto ya cómo el heliocentrismo y el geocentrismo, si bien representan un cambio de paradigma, se alejan uno del otro como consecuencia de malas interpretaciones en la búsqueda de afirmar o refutar una teoría, y su categorización como correctas o erróneas.

Las hipótesis y teorías sobre un determinado fenómeno son válidas hasta donde su capacidad predictiva resulte acertada. Es aquí donde tanto el modelo Ptolemaico como el Copernicano encuentran sus más grandes falencias. De hecho, como se demostrará más adelante, el modelo Ptolemaico resulta mucho más cercano en esencia matemática al modelo de Kepler que la doctrina Copernicana, si se realiza un análisis más detallado bajo la mirada de la matemática moderna.

De cualquier manera, no hubiera sido posible construir la actual visión del mundo, y probablemente la ciencia estaría muy lejos de ser lo que es hoy en día, sin los aportes de Nicolás Copérnico. No solo en sus constructos matemáticos, sino principalmente en el hecho de atreverse a retomar ideas diferentes y pensar de manera distinta a como lo dictan las tradiciones institucionales.

Kepler encuentra mucho más razonable el modelo copernicano al apelar al argumento de que si las órbitas tenían una determinada forma, estas debían obedecer a la estructura más simple. Después de todo, el hecho de que un planeta gire de forma circular resulta mucho más intuitivo que un movimiento que sea por sí mismo una trayectoria en forma de flor u otra de enrevesada complejidad, ya que no es así como se nos presenta la naturaleza cotidianamente. En otras palabras, si el movimiento de un planeta es por su divina estructura circular, dicho movimiento debe estar centrado en un punto que claramente no es la Tierra, pero que se puede determinar desde la misma.

### ***Caracterización matemática de las leyes de Kepler***

En el apartado anterior, se caracterizaron en cierta medida los principios epistemológicos sobre los cuales Kepler edificó su obra. Esta sección tiene como objetivo abordar los dos aspectos restantes en los que se enmarca este trabajo: el aspecto físico y el matemático. Para

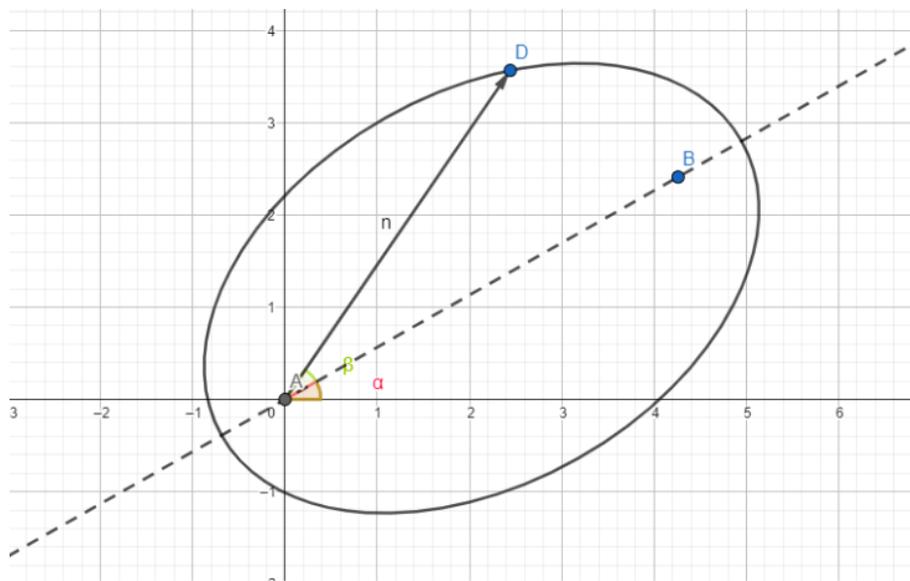
lograr esto, hemos optado por presentar una demostración de las leyes de Kepler a la luz de la física Newtoniana, utilizando un sistema moderno de matematización. El propósito de esto es cumplir con el rigor matemático y destacar la validez de dichas leyes antes consideradas conjeturas, frente a la mecánica clásica de Newton. Además, buscamos resaltar el hecho de que el modelo de Kepler aceptado en la actualidad es una representación clásica que parte de un sistema coordinado previamente establecido a conveniencia.

Cada paso se complementará con un análisis epistemológico que ayudará a construir una visión lo suficientemente amplia del fenómeno, principalmente en sus dimensiones geométricas y físicas.

### I. Las orbitas de los planetas son elípticas<sup>15</sup>

#### Figura 20

##### *Primera ley de Kepler*



*Fuente propia*

Ecuación general de la elipse en coordenadas polares<sup>16</sup>:

<sup>15</sup> La primera proposición de esta demostración se puede extender al afirmar que la trayectoria de cualquier cuerpo celeste afectado por la gravedad de otro corresponde a una sección cónica.

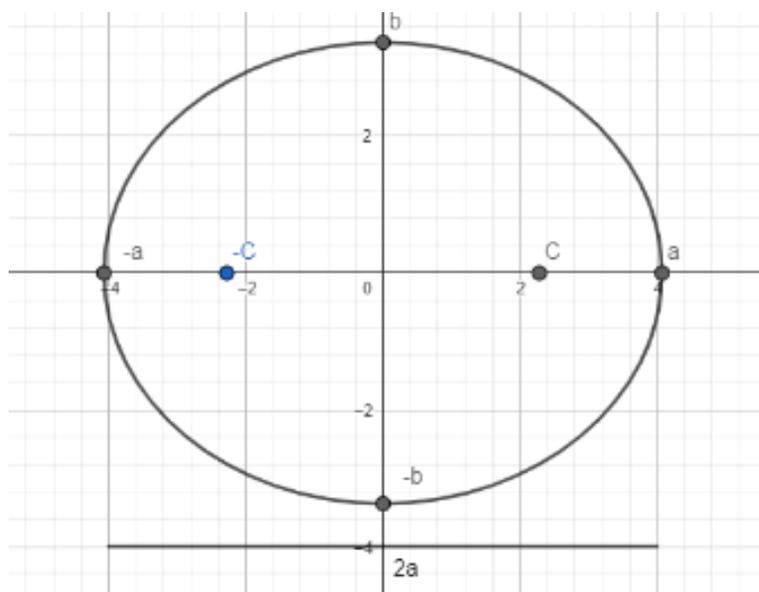
<sup>16</sup> Una elipse es una figura geométrica plana que se define como el conjunto de todos los puntos en un plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta constante se conoce como la longitud del eje mayor de la elipse y se denota por  $2a$ , mientras que la distancia entre los dos focos se llama distancia

$$n(\beta) = \frac{A}{1 - l * \cos(\beta - \alpha)}$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de inclinación respecto a la horizontal del eje coordenado uno de los focos se encuentra en el origen. Para simplificar los cálculos se tomará una elipse con focos equidistantes al eje coordenado definiendo los semiejes  $a$ ,  $b$  y la distancia focal  $c$  como se muestra a continuación

### Figura 21

*Elipse cuyos focos equidistan del eje coordenado*



*Fuente propia*

donde la excentricidad  $l$  es  $l = \frac{c}{a}$  para  $l = 0$  la elipse será una circunferencia.<sup>17</sup>

Generalmente el foco se ubica de manera conveniente en el centro del sol para simplificar los cálculos y se considera éste inmóvil. Para efectos de este trabajo se considera el eje

---

focal y se denota por  $2c$ . La distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de sus vértices se llama longitud del eje menor de la elipse y se denota por  $2b$ .

La forma general de la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas es:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

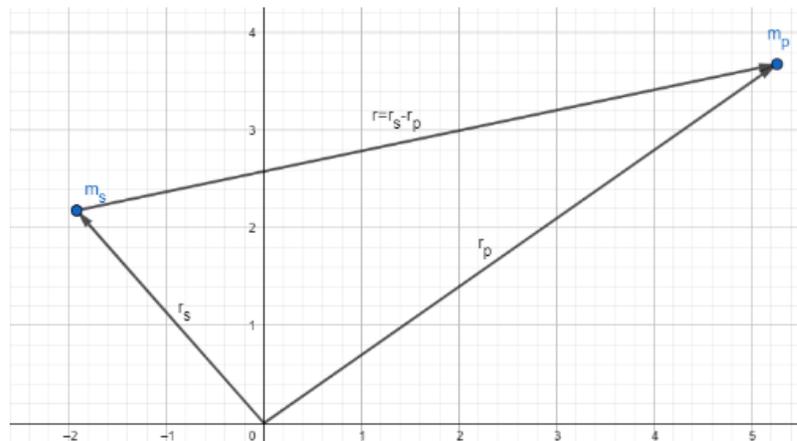
donde  $(h, k)$  es el centro de la elipse, si la longitud del eje mayor ( $2a$ ) es mayor que la longitud del eje menor ( $2b$ ), entonces la elipse se denomina una "elipse alargada". Por otro lado, si la longitud del eje mayor es igual a la longitud del eje menor ( $2a = 2b$ ), entonces la elipse se llama un "círculo".

<sup>17</sup> Para el caso de una excentricidad igual a 1 la trayectoria es una parábola y para cualquiera mayor a uno será una hipérbola.

coordenado como un punto arbitrario y se toma en cuenta el movimiento del sol por influencia de la masa de la tierra o cualquier otro planeta.

## Figura 22

*Posiciones relativas del sol y la tierra al eje coordenado*



*Fuente propia*

Los puntos  $m_s$  y  $m_p$  representan las posiciones relativas del sol y el planeta, respectivamente, asociando un valor determinado a sus masas. Los vectores  $r_s$  y  $r_p$  la distancia al eje coordenado, así la distancia entre el sol y el planeta será

$$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s$$

Se toman en consideración para el problema las leyes de Newton así: <sup>18</sup>

$$\vec{F} = G \frac{m_s * m_p}{r^2} \text{ y } \vec{F} = m\vec{a}$$

calculando la aceleración del sol

$$\vec{F}_{gs} = m_s \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = G \frac{m_s * m_p}{r^2} * \hat{r} \quad \vec{F}_{gs} = \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = G \frac{m_p}{r^2} * \hat{r}$$

calculando la aceleración del del planeta

$$\vec{F}_{gp} = m_p \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} = G \frac{m_s * m_p}{r^2} * -\hat{r}$$

$$\vec{F}_{gp} = \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} = -G \frac{m_s}{r^2} * \hat{r}$$

<sup>18</sup> Las leyes de Newton se asumen como lemas y se entiende como de dominio del lector, aquí se tomar como un par acción-reacción obedeciendo a la tercera ley puesto que los dos cuerpos se atraen mutuamente.

Dado que

$$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}$$

sustituyendo

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G \frac{m_s}{r^2} * \hat{r} - G \frac{m_p}{r^2} * \hat{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{G(m_s + m_p)}{r^2} \hat{r}$$

El anterior procedimiento da razón del cambio de la posición de un cuerpo respecto a otro en función de su influjo gravitacional en función del tiempo, ahora se busca establecer esta ecuación en función del ángulo de barrido  $\beta$  para lo cual usaremos la igualdad:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

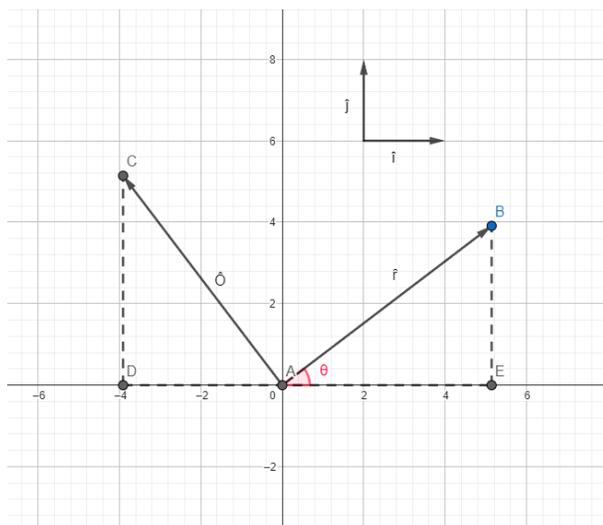
derivando en función del t

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt}$$

para deducir la derivada de  $\hat{r}$  respecto al tiempo se establece una comparación con el vector unitario generado una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  así para que se conserve la ortogonalidad, en otras palabras, se busca un cambio de base (sistema coordenado).

### Figura 23

*Rotación del eje coordenado*



*Fuente propia*

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{i} + \text{sen}(\theta)\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = \text{sen}(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$$

derivando respecto al tiempo

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{i} + \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

derivando  $\hat{\theta}$  respecto al tiempo

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \text{sen}(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r}$$

reescribiendo la ecuación en los nuevos términos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = +r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

Esta última ecuación describe entonces la velocidad de  $\vec{r}$ . Para conocer su aceleración se deriva nuevamente

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{2dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}\right]$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[\frac{2dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{\theta}$$

dado que en la ecuación de aceleración inicial no tiene componente en  $\hat{\theta}$  el término de la derecha debe ser 0

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{G(m_s + m_p)}{r^2}\hat{r}$$

entonces

$$\left[\frac{2dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

por lo tanto

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{G(m_s + m_p)}{r^2} \hat{r} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{r}$$

Esta ecuación no posee solución analítica por este motivo se busca una simplificación, dado que los vectores de la fuerza son paralelos puesto que ambos corresponden a la línea de acción entre los dos cuerpos, su producto vectorial es 0

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

al ser 0 este producto se deduce que debe ser derivada de una constante que se puede encontrar derivando el producto cruz con vector de velocidad encontrado anteriormente

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

el producto vectorial de vectores paralelos es 0 por lo que resulta

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

de esta ecuación se puede deducir que  $\left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right]$  es una constante, esto significa que el vector de posición y el vector de velocidad siempre tienen la misma dirección, esto implica que la rotación de un planeta se da siempre sobre un mismo plano, esto es así por la definición del producto cruz, esta consecuencia es de gran importancia puesto que de este modo es posible comparar el modelo de Kepler con el modelo Ptolemaico por el momento como como funciones de una variable, dicho en otras palabras la posición de un planeta en un determinado plano se puede caracterizar por una pareja ordenada x e y, en consecuencia como una parametrización del tiempo como se mostrara más adelante.

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = r\hat{r} \times \left( \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right)$$

aplicando propiedad distributiva

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} &= r^2 \frac{d\theta}{dt} (\hat{r} \times \hat{\theta}) \\ &= r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{k} \end{aligned}$$

constante que se denotara en adelante como h

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

elevando al cuadrado el termino h

$$h^2 = r^4 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

dividiendo a ambos lados por  $r^3$

$$\frac{h^2}{r^3} = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

de esta simplificación la ecuación diferencial de aceleración se puede expresar como:

$$\left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} \right] \hat{r} = \frac{G(m_s + m_p)}{r^2} \hat{r}$$

con el fin de simplificar la ecuación aún más se establece una nueva variable u que se define como:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt}$$

aplicando la regla de la cadena para el ángulo  $\theta$

$$= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \hat{r} \Rightarrow -\left( \frac{1}{u^2} \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{du}{d\theta} \hat{r}$$

el termino encerrado en paréntesis es igual a h como se vio en el paso anterior así entonces:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -h \frac{du}{d\theta} \hat{r}$$

Esta ecuación describe la velocidad del vector r. Vale la pena destacar que, hasta este punto, hemos utilizado cambios de variables con el fin de encontrar una solución analítica. Es importante notar que esta sustitución es esencialmente un cambio de sistema de coordenadas, que, para fines de la demostración matemática, es completamente válido.

Sin embargo, desde una perspectiva física, este enfoque implica aceptar que la observación se ha cambiado. La transformación de una ecuación diferencial en otra con solución analítica nos obliga a plantear una equivalencia observacional entre marcos de referencia. En otras palabras, estamos suponiendo que la descripción del movimiento se realiza desde otro sistema físico que comparte todas las características mecánicas, aunque sea más conveniente para el desarrollo analítico. Esta suposición, desde una perspectiva epistemológica, implica

comparar el movimiento desde dos perspectivas completamente abstractas y, en el mejor de los casos, imaginarias.

La idea de caracterizar el movimiento desde dos puntos distintos en el espacio o, al menos, con caracterizaciones métricas distintas, es de gran importancia para comprender los estados de movimiento. Hemos elegido esta demostración porque de alguna manera revela la inevitabilidad del principio de relatividad. Este principio, como se ha demostrado aquí, no es válido únicamente para la teoría de la relatividad, sino que también es una consecuencia inherente de la extensión de la relatividad galileana.

Así como hemos tomado arbitrariamente dos marcos de referencia para trabajar analíticamente en esta demostración, podríamos haber elegido cualquier otro marco o sistema de coordenadas en el universo. Esto habría arrojado soluciones en mayor o menor medida complejas desde una infinidad de puntos en el espacio, obteniendo así infinitas soluciones equivalentes.

Calculando de igual forma la aceleración:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r} = -h \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) \hat{r} \Rightarrow -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \hat{r}$$

dado que h es

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = hu^2$$

luego,

$$-h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \hat{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \hat{r}$$

sustituyendo en la ecuación inicial

$$\left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} \right] \hat{r} = \frac{G(m_s + m_p)}{r^2} \hat{r}$$

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3 = G(m_s + m_p) u^2$$

El carácter vectorial se mantiene respecto a la magnitud r implícita en u y la dirección  $\theta$ .  
Simplificando y dividiendo sobre h:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{G(m_s + m_p)}{h^2}$$

esta expresión corresponde a una ecuación diferencial lineal y de segundo orden y dado que  $u=1/r$  se obtiene:<sup>19</sup>

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \phi) + \frac{G(m_s + m_p)}{h^2}$$

factorizando

$$u(\theta) = \frac{G(m_s + m_p)}{h^2} \left[ 1 + A \frac{h^2}{G(m_s + m_p)} \cos(\theta - \phi) \right]$$

para simplificar la expresión se denominará “e” a la constante

$$e = \frac{Ah^2}{G(m_s + m_p)}$$

entonces

$$u(\theta) = \frac{G(m_s + m_p)}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \phi)]$$

en términos de r, quedaría finalmente

$$r(\theta) = \frac{h^2}{G(m_s + m_p)[1 + e \cos(\theta - \phi)]}$$

esta es la ecuación general de las figuras cónicas en coordenadas polares generalizando la trayectoria de otros cuerpos celestes dadas sus condiciones iniciales, la ecuación modela trayectorias de planetas, asteroides o cualquier otro cuerpo celeste.

A partir del análisis anterior, podemos remitirnos a las leyes de Kepler.

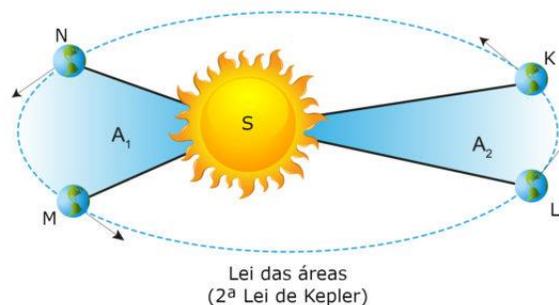
- I. Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales a lo largo de su orbita

## Figura 24

### *Segunda ley de Kepler*

---

<sup>19</sup> Por cuestión de simplificar la construcción se omite el desarrollo a la ecuación diferencial, pero se propone su solución general.



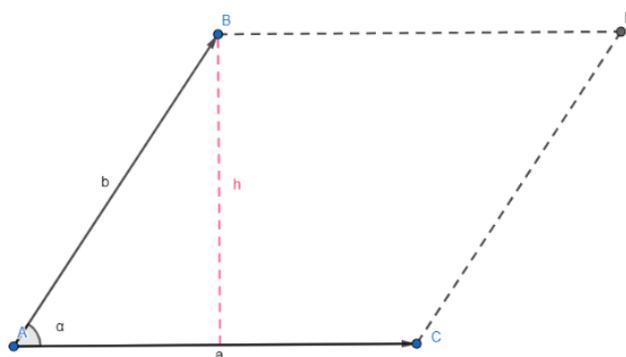
(Diagrama de la segunda ley de Kepler, 2019) [Segunda Lei de Kepler - Lei das Áreas - Astrofísica - InfoEscola](#)

Dado el paralelogramo  $ABDC$  de altura  $h$  en donde:  $h = |b|\text{sen}(\alpha)$ , su área se puede expresarse como:

$$A = |a||b|\text{sen}(\alpha) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

### Figura 25

Paralelogramo de área  $|\vec{a} \times \vec{b}|$



*Fuente propia*

El producto cruz permite determinar un vector perpendicular a otros dos a la vez que el área de un paralelogramo formado entre ellos.

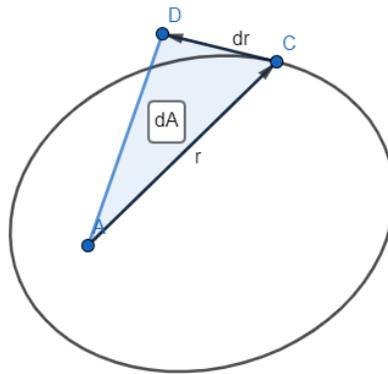
Dado que el área en consideración corresponde a la sección de la elipse sobre la que se desplaza el vector  $\vec{r}$ , analizado en la primera demostración, se puede determinar en función de dicha variable:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt}, v_{aerolar} = \frac{dA}{dt} \text{cte.}$$

De esta forma, para calcular un diferencial de área  $dA$  a partir de  $\vec{r}$  podemos considerar la velocidad tangencial.

### Figura 26

*Velocidad tangencial en el punto C*



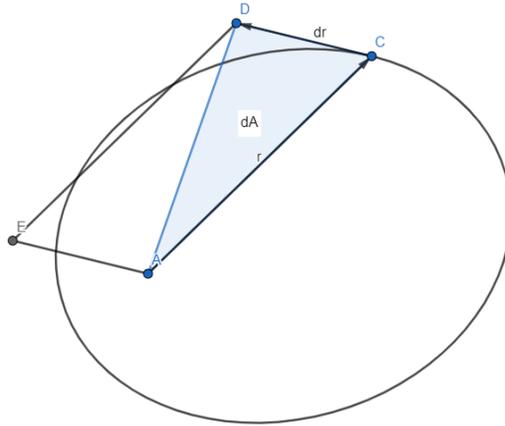
*Fuente propia*

Podemos construir un paralelogramo a partir de los vectores  $d\vec{r}$  y  $\vec{r}$  por lo que el área se puede calcular como:

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

### Figura 27

*Área entre los vectores  $\vec{r}$  de la posición y  $d\vec{r}$  de la velocidad tangencial*



*Fuente propia*

Poniendo la expresión en términos de la velocidad del vector que describe el área quedará:

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} * dt|$$

poniendo la expresión en términos de su momento lineal  $p=mv$

$$dA = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{mv} * dt|$$

organizando los términos

$$dA = \frac{dt}{m2} |\vec{r} \times \vec{p}|$$

podemos definir el momento angular L como

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}|$$

entonces:

$$dA = \frac{L}{2m} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = cte$$

Dado que L es constante por la conservación del momento angular la variación de las áreas en el tiempo es constante.

A pesar de la aparente sencillez de la segunda ley de Kepler y su demostración geométrica, encontrar una correspondencia con otro sistema de coordenadas resulta extremadamente complicado. Esta ley es de gran importancia en relación con este trabajo, ya que

revela cómo varía la velocidad de movimiento de un planeta a lo largo de su trayectoria. Esto se aplica de igual manera al modelo Ptolemaico y es coherente con el argumento de los epiciclos.

Este hecho, que en apariencia podría parecer irrelevante, tiene un trasfondo fundamental para los planteamientos aquí propuestos y de donde se deducen las premisas sobre las cuales se planteó inicialmente la problemática. El efecto conocido como retrogradación, que describe cómo un planeta aparentemente detiene su marcha y comienza a moverse en sentido contrario desde la perspectiva de un observador en la Tierra, resulta realmente complicado de entender si se asume que la Tierra es un eje inmóvil. Sin embargo, si suponemos que estamos realizando observaciones astronómicas desde el Sol, veríamos cómo los planetas no retroceden en ningún momento, sino que simplemente aceleran al estar más cerca y desaceleran al alejarse, como consecuencia de la segunda ley de Kepler.

El problema está en que esto es una abstracción de un caso hipotético, ya que estamos en la Tierra y la observación directa indica otra cosa. Parece contradictorio que aceptemos el modelo imaginario, pero rechacemos el modelo que describe lo que realmente es consecuencia de una observación real. Sin embargo, esto tiene una explicación razonable: los planetas aparentemente retroceden porque la Tierra también está en movimiento.

Como se ha visto a lo largo de este manifiesto, esta afirmación solo tiene sentido en la medida en que reflexionemos sobre lo que es el movimiento o al menos cómo describimos el movimiento. La noción de relatividad, que generalmente se le atribuye a Galileo y posteriormente a Einstein, como se ha demostrado con Copérnico y Kepler, entre otros, ha sido una constante para todos aquellos que se han detenido a reflexionar sobre la naturaleza de estos hechos. Es difícil creer que el cambio de paradigma realmente surja al considerar un simple cambio de marco de referencia. Sin embargo, en el fondo, este es realmente el argumento geométrico.

Para estos grandes pensadores y muchos otros, estas cuestiones implicaron una nueva forma de pensar y razonar sobre el mundo y su funcionamiento. Por lo tanto, no resulta descabellado proponer una reformulación de la primera ley de Kepler con fines didácticos que

ayuden a comprender el carácter clásico de esta postulación: "Las órbitas de los planetas son elipses en las cuales uno de los focos es el Sol o el centro de masa del sistema, si la descripción cinemática se realiza desde el Sol o desde un marco de referencia absoluto."

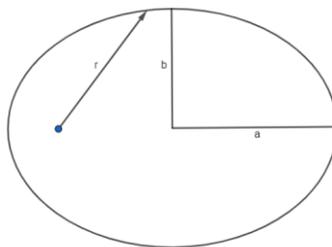
Remitámonos ahora a la segunda ley.

- II.** Para un planeta dado, el cuadrado de su periodo orbital es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

$$T^2 \propto r^3 \Rightarrow T^2 = c * r^3$$

### Figura 28

*Tercera ley de Kepler*



*Fuente propia*

donde

$$A = \frac{dA}{dt} * T$$

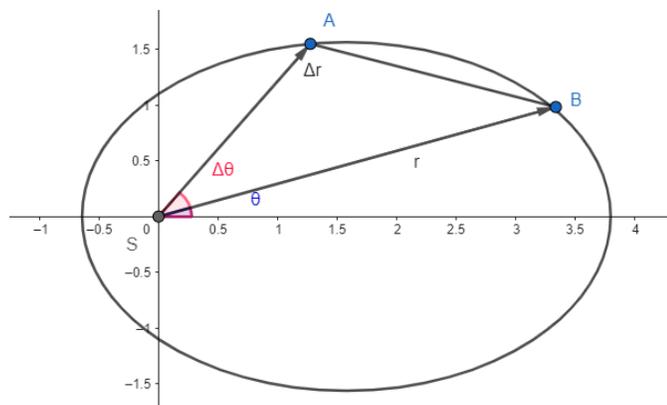
sea el área de la elipse  $\pi ab$ ,

$$\pi ab = \frac{dA}{dt} * T \Rightarrow T = \frac{\pi ab}{\frac{dA}{dt}}$$

El problema se reduce a determinar la razón de cambio del área respecto al tiempo  $\left(\frac{dA}{dt}\right)$ , consideremos un planeta en dos momentos distintos cuya distancia al sol está representada por el vector  $\vec{r}$  y el ángulo con el semieje  $\theta$ .

### Figura 29

*Posición de un planeta en dos instantes distintos a través de su órbita*



*Fuente propia.*

Para determinar la variación del área en el tiempo  $\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)$  se toma en consideración un intervalo razonablemente pequeño para el cual la altura del triángulo sea aproximadamente igual a  $\vec{r}$  de esta forma:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \vec{r} \left( \frac{\vec{r} \Delta \theta}{\Delta t} \right)$$

el barrido real del vector  $\vec{r}$  será cuando  $\Delta t$  se aproxime a 0

$$\Delta t \rightarrow 0 : \quad \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r}^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

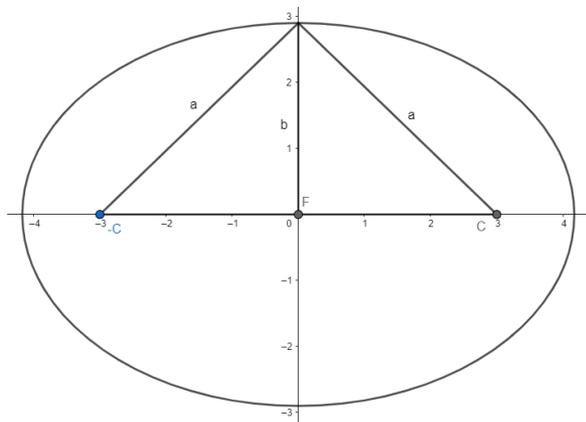
consideremos el eje coordenado como uno de los focos para determinar el semi eje mayor en términos de la excentricidad “e”

$$e = \frac{c}{a}$$

donde “c” es la mitad de la distancia entre los focos y “a” es la mitad de la constante determinada de la suma de las distancias del perímetro a los focos, definición de elipse.

### **Figura 30**

*Definición geométrica de excentricidad*



*Fuente propia.*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$1 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

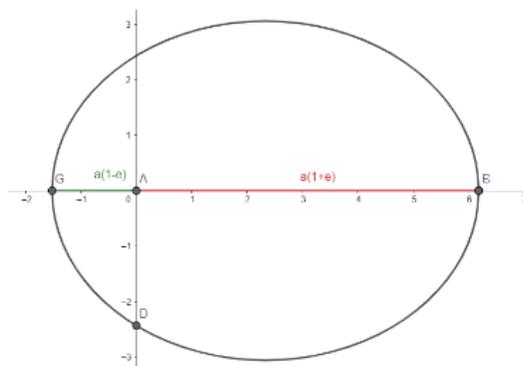
en términos de e

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + e^2$$

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

### Figura 31

*Excentricidad en forma de proporción entre los semiejes a y b*



*Fuente propia.*

De la primera demostración se obtuvo las ecuaciones:

$$r(\theta) = \frac{h^2}{G(m_s + m_p)[1 + e \cos(\theta - \phi)]}$$

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

tomando la variación del área en el tiempo como intervalos infinitesimales se tiene:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

en términos de h

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h$$

$$T = \frac{2\pi ab}{h}$$

para un ángulo igual a 0 grados la elipse se encuentra alineada con el eje x y se obtiene

$$r(0) = a(1 + e) = \frac{h^2}{G(m_s + m_p)[1 - e]}$$

pasando a multiplicar el termino semejante

$$\Rightarrow a(1 - e^2) = \frac{h^2}{G(m_s + m_p)} \Rightarrow h^2 = a(1 - e^2) G(m_s + m_p)$$

expresando el resultado de  $h^2$  en términos de a, b y e:

$$h^2 = a \left( \frac{b^2}{a^2} \right) G(m_s + m_p)$$

calculando el cuadrado del periodo

$$T^2 = \frac{(2\pi ab)^2}{h^2}$$

sustituyendo h por el termino obtenido

$$T^2 = \frac{(2\pi ab)^2 a}{b^2 G(m_s + m_p)} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_s + m_p)}$$

Esta ecuación permite determinar el tiempo que un planeta tarda en completar una órbita alrededor del Sol conociendo su masa y la mitad del semieje mayor. Por supuesto, estos requisitos estaban más allá del alcance de Kepler, y la formulación de esta ley, al igual que las otras dos, se realizó a través de un trabajo estadístico.

Es importante destacar un hecho de fundamental importancia que a menudo pasa desapercibido: las leyes de Kepler se formularon a partir de una recopilación de los datos observacionales más precisos disponibles en su tiempo. Estos datos se recopilaron a lo largo de

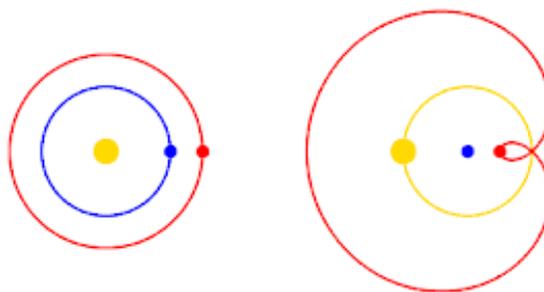
muchos años por astrónomos de diversas generaciones y culturas, muchos de los cuales eran fieles seguidores del modelo Ptolemaico.

Esto plantea la pregunta: ¿Cómo es posible que los datos observados bajo un modelo permitan construir otro modelo radicalmente distinto? La respuesta a esta pregunta parece surgir de inmediato: ambos modelos son equivalentes. O en otras palabras los datos tomados satisfacen las condiciones de ambos modelos. Esta afirmación, que en un principio podría parecer arbitraria, es perfectamente demostrable en un marco teórico más amplio que logra abarcar los dos sistemas explicativos como consecuencias de una misma idea general. Este es el caso de la teoría de la relatividad especial, que introduce una idea fundamental: el papel del observador es relevante en la caracterización del movimiento.

En el próximo capítulo, se introducirá, a través de un experimento mental asociado a los resultados obtenidos hasta ahora, la evidencia de esta correspondencia entre los modelos y cómo el observador desempeña un papel clave en la comprensión del movimiento.

### Figura 32

*Órbitas copernicana y Kepleriana*



*Fuente propia*

Se proporciona una [Representación artística modelo Ptolemaico - YouTube](#) en el siguiente enlace, no es una representación matemática sin embargo es útil como referente visual, las proporciones reales harían que cualquier representación fuera imposible de apreciar al igual que sucede con el modelo Keplereano.

<https://www.youtube.com/shorts/GijRD5y-rkg>

*Al lado derecho una representación orbital con la tierra en azul el sol amarillo y marte en rojo, a la derecha el mismo modelo con la tierra en el centro y los cuerpos restantes en orbita*

## **CAPÍTULO II**

### **El problema de la relatividad en el planteamiento del problema**

Hasta este punto, hemos abordado de manera breve la epistemología involucrada en las postulaciones de los modelos Ptolemaico, Copernicano y Ptolemaico, así como sus principios matemáticos y observacionales. Este primer apartado, a pesar de su concisión, es fundamental para configurar los desarrollos teóricos y geométricos que se presentarán a continuación. Con el objetivo de construir y vincular las ideas de la manera más clara y concisa posible, procederemos a revisar y recontextualizar tres experimentos mentales de gran importancia en el desarrollo de la teoría de la relatividad. Anticipamos nuestras disculpas al lector por presentar de manera resumida todos los conceptos y por la ausencia de las ecuaciones específicas de los razonamientos implicados. Los estándares de este trabajo hacen completamente imposible abordar estas ideas con la profundidad que merecen, Sin embargo, se procurara dejar todas las ideas lo mas claras posibles con el uso de diagramas sencillos.

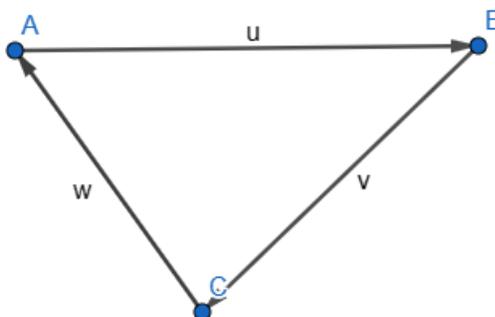
#### **La relatividad copernicana.**

Comúnmente, se sostiene la idea de que la relatividad del movimiento fue descrita y caracterizada por primera vez por Galileo Galilei. Sin embargo, esto no es del todo preciso. Nicolás Copérnico, en su obra, ya presenta claras referencias a la idea de movimientos aparentes y relativos al observador, así como los conceptos de marcos y puntos de referencia. Esto lo logra a través de un experimento mental en el cual plantea la situación en la que dos barcos se encuentran en el océano separados por cierta distancia, y busca comprender el estado de movimiento de ambos en ausencia de viento u otros elementos que puedan relacionar sus velocidades relativas, la reflexión sobre estas situaciones se presenta en la cita de la página 27. A continuación, se presentará una reconstrucción de dicho experimento, sustituyendo a los barcos y el océano por planetas y el espacio vacío:

Imaginemos un cuerpo esférico solitario en el espacio exterior, sin ningún otro elemento visible a su alrededor aparte del vacío infinito. Si quisiéramos describir su tamaño o su estado de movimiento, nos sería imposible, ya que no tendríamos ningún objeto con el cual compararlo.

No podríamos saber si el objeto se está moviendo en una dirección específica, e incluso si este se acelerara o cambiara de dirección, no podríamos determinarlo.<sup>20</sup> Para lograr una descripción precisa, necesitaríamos al menos un segundo cuerpo. Imaginemos ahora que tenemos dos cuerpos de masas y tamaños similares separados por una cierta distancia; es fácil determinar un vector que los une. Si dicho vector cambia su magnitud o dirección con el tiempo, podemos concluir que hay un movimiento que los acerca o separa. El problema con esta solución es que es difícil determinar cuál de los dos cuerpos está realmente en movimiento. Si ambos cuerpos fueran planetas habitados, los habitantes del primer planeta pensarían que el segundo planeta se está acercando o alejando de ellos, y viceversa para los habitantes del segundo planeta. En ausencia de cualquier otro referente, ambos tendrían razón, y determinar con exactitud cuál de los dos se mueve sería nuevamente imposible. Aparentemente este problema podría solucionarse incorporando un tercer punto de referencia, de esta forma tendremos ahora tres vectores y sus relaciones nos permitirían establecer un sistema coordinado para describir nuestro movimiento, llamaremos a los planetas A, B al punto de referencia lo llamaremos C y los vectores que los unen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  respectivamente:

**Figura 33**



*Fuente propia*

De esta forma podemos determinar cuál de los planetas es el que se mueve puesto que, si observamos que los vectores  $u$ ,  $w$  se modifican será el punto A el que se mueve, del mismo

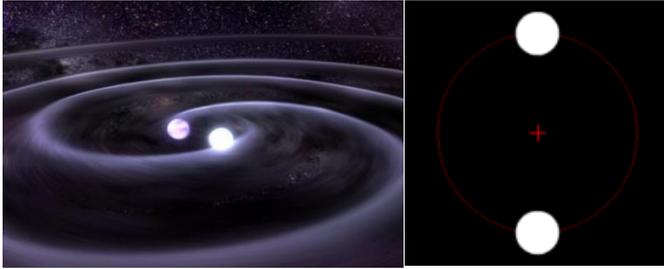
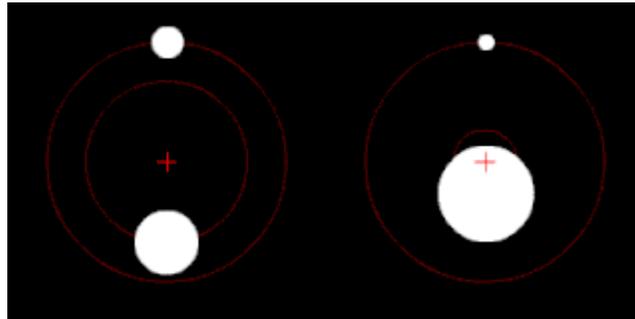
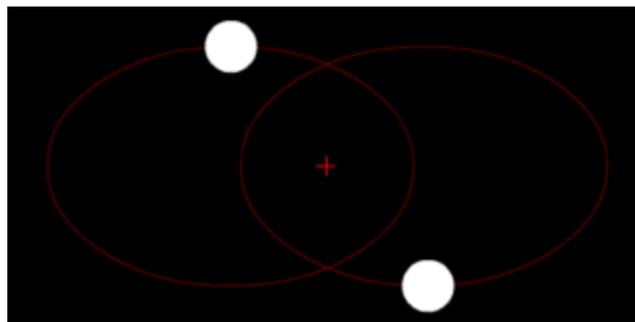
---

<sup>20</sup> A partir de este punto, no se considerarán los movimientos acelerados, ya que los análisis matemáticos necesarios para describir estas situaciones pertenecen a la relatividad general, y abordarlos extendería este trabajo de manera desproporcionada. No obstante, es importante mencionar que los principios geométricos aquí trabajados son perfectamente válidos para objetos sometidos a fuerzas gravitacionales y movimientos acelerados.

modo si los vectores que cambian son  $u$ ,  $v$  entonces el planeta que se está moviendo será el B. Este ingenioso mecanismo no estaba disponible en la época de Nicolás Copérnico, ya que pertenece a la geometría analítica propuesta por René Descartes hacia el año 1637. Constituye un sistema coordinado, y es probable que por este motivo no se encuentre más información al respecto en la obra de Copérnico. El lector perspicaz probablemente ya se habrá percatado de que esta solución plantea un problema. El punto C debe tener la condición de reposo absoluto, ya que, si puede moverse con respecto a los otros dos puntos, todo el sistema podría estar en movimiento, y nuevamente sería imposible resolver nuestra incógnita. Sin embargo, suponer que el punto C es privilegiado con respecto a los otros dos implica que lo mismo podría haber ocurrido con A o B. Incorporar un cuarto, quinto u otros cuerpos siempre conlleva al mismo problema. De hecho, si imaginamos el universo y todos los cuerpos que lo habitan, todos están sujetos a esta aparente paradoja, y la pregunta aparentemente queda sin respuesta.

Isaac Newton fue consciente de este problema y, en consecuencia, lo describe en su obra "Philosophiæ naturalis principia mathematica", al proponer dos tipos de espacio y tiempo: uno absoluto e imposible de conocer y otro aparente que obedece a la idea de que debemos recurrir a un punto privilegiado, en este caso el punto C. Albert Einstein, consciente de este dilema, aporta una solución más satisfactoria con su teoría de 1905, como veremos más adelante.

Volvamos al ejemplo de un sistema binario de estrellas ¿es posible caracterizar el estado de movimiento de ambas? La respuesta aparentemente es que no. Sin embargo, si ahora dotamos a ambas esferas con masas comparables, podríamos afirmar que la atracción gravitacional generará movimiento entre ellas. Con algunos cálculos, se podría determinar que hay un movimiento orbital entre ellas o, al menos, de una hacia la otra. Es decir, si tomamos A y B formarán un sistema dual de partículas que determinará un centro de masa, sobre el cual podríamos establecer un marco de referencia para realizar la descripción cinemática. Suponiendo que el eje coordinado de nuestro marco de referencia se ubica en un punto arbitrario fuera del sistema, la descripción del movimiento estará determinada por las masas de las esferas y la esfera menos masiva orbitará a la de mayor masa. En caso de que las masas sean iguales, ambas esferas girarán en torno a su centro de masa.

**Figura 34***Sistema binario de cuerpos con masas equiparables**Fuente: Marion Álvarez (2021)*<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Orbit2.gif>**Figura 35***Sistema binario con masas distintas*<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Orbit2.gif>**Figura 36***Sistema binario con masas iguales y velocidad inicial determinada**Fuente: B. Pleffken Hostj (2021) https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Orbit2.gif*

Todos los diagramas anteriores ilustran las diversas configuraciones posibles entre sistemas binarios de cuerpos con diferentes masas en órbita. Estas imágenes proporcionan una idea clara de cómo se ha establecido un marco de referencia convenientemente para determinar

las órbitas representadas en color rojo. Este marco de referencia pertenece a un observador externo al sistema y se considera un marco privilegiado. Sin embargo, como se verá a continuación esta geometría depende principalmente del marco de referencia seleccionado.

En otras palabras, para alguien situado en la esfera A, la esfera B es la que se mueve, y este movimiento relativo describe un círculo centrado en A, ya que A es el eje coordenado. Del mismo modo, un observador situado en B observará lo contrario. Análogamente, existirán tantas descripciones cinemáticas como marcos de referencia posibles, y todas serán equivalentes.

### **La relatividad de galileo**

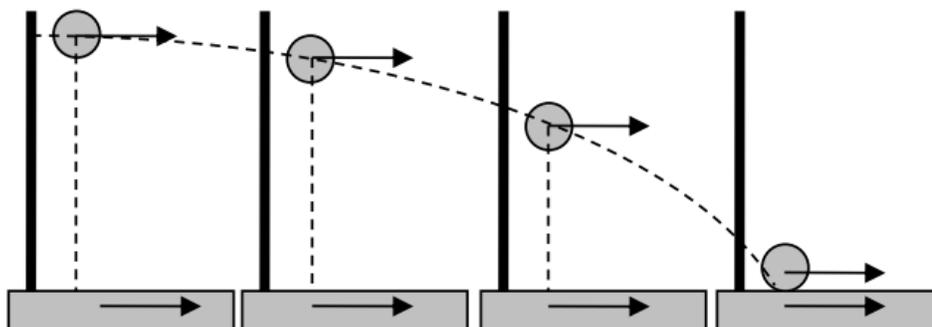
Al igual que hicimos con la relatividad copernicana, reconstruiremos un famoso experimento mental de Galileo con algunas construcciones adicionales que permiten configurar las transformaciones geométricas presentes en la relatividad del movimiento. Este experimento propone imaginar un barco que viaja de este a oeste en el océano. Sobre uno de los postes del barco cuelga una cubeta llena de agua que tiene un pequeño agujero en el fondo, lo que permite apreciar cómo el agua gotea. Dos personas distintas observan este fenómeno. Una se encuentra en el barco, parada junto al balde, y la otra está en la playa, parada al sur, viendo al barco moverse. Ambos individuos realizan una descripción de la trayectoria de las gotas que caen del balde. La persona que está a bordo de la nave determina que las gotas siempre caen en el mismo lugar en el suelo del barco, justo debajo del balde, y, por ende, la trayectoria que describen es una línea recta. Por su parte, la persona que está de pie en la costa ve que el barco se está moviendo, y las gotas caen en forma vertical, al tiempo que se suma el movimiento horizontal que les proporciona la velocidad que lleva el barco. Su conclusión es que las gotas caen con un movimiento parabólico.

Este problema es bien conocido, ya que de aquí se deducen las transformaciones de Galileo. Por este motivo, no profundizaremos en este aspecto, ya que se considera que su deducción se puede encontrar fácilmente en cualquier libro de mecánica o relatividad. Sin embargo, abordaremos una serie de consideraciones que no suelen ser tomadas en cuenta y que en muchas ocasiones se pasan por alto, pero que constituyen principios fundamentales para este trabajo. Es común que se dé por sentado que bajo la construcción de las transformaciones de

Galileo para la velocidad y la posición sea fácil determinar que ambos observadores tienen razón, cada uno desde su marco de referencia. Normalmente, esto conduce al desarrollo de ecuaciones en un curso tradicional de física. Sin embargo, es igualmente común que el tema de la parábola y la recta se pase por alto, y cualquier pregunta relacionada se considere ociosa o irrelevante para el caso. Aquí trataremos de desarrollar justamente ese tipo de preguntas y cómo no resultan irrelevantes en la caracterización del movimiento, comenzando por la más evidente: ¿Cómo pueden ser iguales la recta y la parábola?

Es evidente que la altura desde la que caen las gotas de agua es la misma para ambos observadores. No obstante, la persona que observa la parábola claramente percibe que la gota recorre una trayectoria mayor en el mismo tiempo. Dicho de esa forma, es evidente que algo no cuadra, incluso si tratamos de aplicar las transformaciones de Galileo a este fenómeno. Es posible que de manera automática esta pregunta evoque en la mente del lector que la respuesta se encuentra en la relatividad especial, y evidentemente no se equivocaría. Sin embargo, intentemos profundizar en el problema desde una perspectiva geométrica.

**Figura 37**



Nota: Imagen tomada de apuntes de relatividad (Fabio Vélez U, 2012, pág. 7)

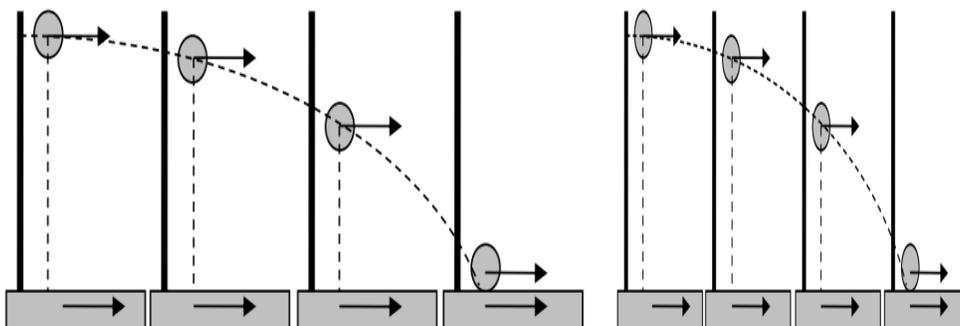
La imagen anterior representa la gota de agua como una circunferencia, donde el camino punteado vertical es la trayectoria que percibe el observador en el barco, y la parábola punteada es la trayectoria descrita por el observador en la playa. Las flechas negras representan la velocidad del barco, y las flechas grises representan la velocidad horizontal de las gotas, que deben ser iguales a la del barco.

Ahora, imaginemos un segundo barco en el medio entre el observador en la playa y el primer barco. Este segundo barco se mueve a la mitad de la velocidad que el primero. El tripulante del segundo barco observará que las gotas de agua del primer barco describen una trayectoria que se asemeja a una parábola más acentuada que la del observador en la playa. Dado que el segundo barco se mueve a una velocidad intermedia entre el primer barco y la costa, las gotas de agua caerán en una posición que no es completamente vertical, pero tampoco describirán una parábola tan pronunciada como la vista por el observador en el primer barco.

En otras palabras, el tripulante del segundo barco verá una trayectoria de las gotas que está entre la línea recta vista por el observador en el barco y la parábola observada por el individuo en la playa, debido a la velocidad intermedia del segundo barco. La velocidad del barco proporciona una componente horizontal para las "coordenadas" de las gotas que no es perceptible para sus tripulantes, pero sí lo es para el observador en la costa. La introducción del segundo barco en esta situación pone de manifiesto la naturaleza dinámica de este escenario.

A medida que el segundo barco aumenta su velocidad, se acerca más a la velocidad del primer barco, y las observaciones de las gotas por parte de su tripulación tenderán a ser una línea recta, similar a lo que ve la tripulación del primer barco. Por otro lado, si el segundo barco disminuye su velocidad, sus observaciones tenderán a asemejarse más a una parábola, similar a lo que describe la persona en la playa.

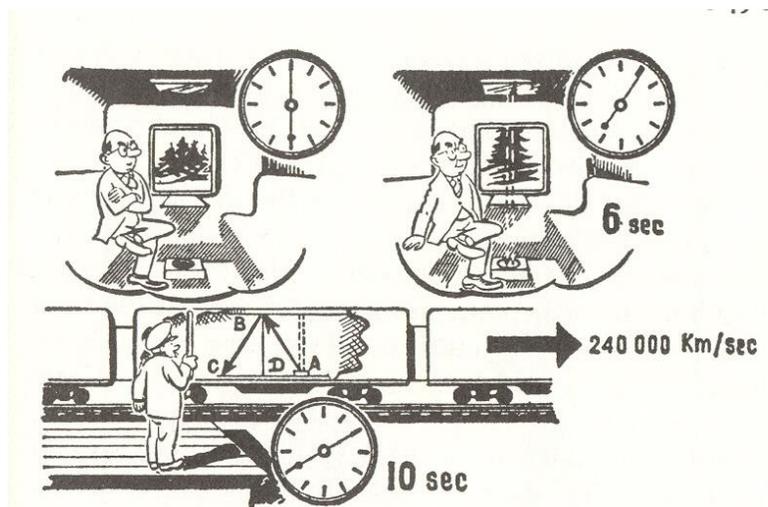
**Figura 38**



Parece entonces que la conclusión es obvia, el aumento de la velocidad del segundo barco contrae las longitudes en la dirección del movimiento lo que permite convertir una pronunciada parábola a velocidad 0 en una recta a velocidad máxima, en términos matemáticos la velocidad modifica la excentricidad de la parábola multiplicándola por un factor, si la velocidad del primer barco fuese la velocidad de la luz, dicho factor se llamaría factor gamma de Lorentz, este pequeño aunque potente análisis permite adelantar varias conclusiones, por una parte soluciona el problema de la recta que se convierte en parábola y por otra parte introduce la teoría de la relatividad especial de Einstein de una manera muy natural frente al análisis de las trayectorias. Es importante destacar que la contracción de longitudes descrita aquí no representa estrictamente la caracterización propuesta por la relatividad Einsteiniana. Por supuesto, el factor de contracción es mucho mayor y las velocidades consideradas son mucho menores. Esto, sin mencionar que no se ha tenido en cuenta la masa ni la proporción entre las velocidades y la velocidad de la luz. Más bien, se busca resaltar el hecho de que el papel de la perspectiva es fundamental en las caracterizaciones geométricas del movimiento. En cierta medida, considerar distintos marcos de referencia en la caracterización cinemática de los fenómenos inevitablemente conlleva a considerar variaciones en aspectos como el espacio y el tiempo, y su carácter relativo.

Este experimento se ha realizado teniendo en cuenta una sola dirección del movimiento como es costumbre, la recta que se convierte en parábola no solo aplica para barcos y gotas de agua. El principio de relatividad aplica igual para cualquier otro cuerpo en el universo, si pensamos en una extrapolación de este mismo mecanismo de razonamiento a cualquier otro sistema podemos deducir sistemas de transformación similares, este es el caso de las transformaciones de Lorentz, es esta forma de postular los argumentos matemáticos se sustituye la caída acelerada de las gotas por el movimiento constante de la luz, de esta forma se evita tener que calcular la longitud de arco de una parábola, labor que hubiese resultado extremadamente compleja al relacionarla con la contracción de las longitudes, en su lugar la parábola es reemplazada por una línea recta lo que formaría un triángulo rectángulo, simplificando enormemente los cálculos además poner de manifiesto una consecuencia de suma importancia, el tiempo tampoco puede ser constante. Esta nueva forma de postular los hechos configura el experimento clásico del tren y el haz de luz:

Figura 38



*Nota, nótese que en esencia el experimento de del tren que se mueve y el observador en la plataforma es exactamente el mismo que el del barco y las gotas de agua, por ende, las conclusiones obtenidas deben ser equivalentes.*

Anonimo (2017). *¿Qué es la relatividad? [Imagen]. Blog de Física y Química.* Recuperado de [https://1.bp.blogspot.com/-Fg5wzrvYNus/WKq-iVVUjzI/AAAAAAAAAoI/QSUZ27eJkWIp-vb\\_Ad4yZtzs-TAjy3bKwCLcB/s1600/whatisrelativity\\_3.jpg](https://1.bp.blogspot.com/-Fg5wzrvYNus/WKq-iVVUjzI/AAAAAAAAAoI/QSUZ27eJkWIp-vb_Ad4yZtzs-TAjy3bKwCLcB/s1600/whatisrelativity_3.jpg) el

Este pequeño análisis pone de manifiesto como la contracción de las longitudes y la dilatación del tiempo son consecuencia del movimiento mismo y no de la constancia de la luz, en otras palabras estos mismos efectos dan incluso si la velocidad de la luz fuese otra puesto que lo realmente determinante es considerar a la luz como una cociente fijo entre las magnitudes de espacio y de tiempo.

aplicado para casos complejos como el del heliocentrismo sobre el cual está fundamentado el modelo planetario de Kepler y las trayectorias parabólicas se obtiene que al desplazar el marco de referencia se logra deducir el modelo geocéntrico propuesto por Ptolomeo basado en epiciclos, en adelante este trabajo se enfocara en presentar la construcción geométrica y algunos de los argumentos analíticos que generan esta equivalencia. Del mismo modo en el que aceptamos que la recta y la parábola son equivalentes frente a sus respectivos marcos de referencia debemos entonces aceptar que es válido afirmar que el sol orbita a la tierra tanto como

la tierra orbita al sol o a cualquier otro punto arbitrario desde el cual realicemos una descripción geométrica de su cinemática.

Todos los argumentos anteriores se aplican de manera fácil al eje central de este trabajo, que es el análisis de nuestro sistema planetario. Estos sencillos experimentos mentales ponen de manifiesto el fundamento principal sobre el cual se construyeron los modelos geocéntrico y heliocéntrico. Por supuesto, hay un trasfondo epistemológico que se ha abordado en los primeros capítulos al analizar las obras originales de Copérnico y Kepler.

En otras palabras, como consecuencia del análisis relativista de los modelos planetarios, existe una equivalencia cinemática para diferentes descripciones del sistema solar, siempre y cuando estas sean correctas. El siguiente apartado muestra, bajo fundamentos matemáticos, cómo el modelo geocéntrico y la interpretación geométrica ptolemaica resultan correctos. Además, demuestra de manera axiomática la existencia de una equivalencia entre ambos.

El Capítulo 3 se enfoca en la construcción axiomática del método analítico utilizado para demostrar el modelo geométrico ptolemaico. Se describe cómo se obtienen los patrones geométricos, en forma de flor, expuestos en el Almagesto de manera analítica, aprovechando las series de Fourier y los espacios vectoriales asociados a los sistemas de movimientos planetarios. Aunque este apartado puede considerarse como anexos debido a su enfoque teórico, es fundamental para comprender el marco general de la construcción de la demostración geométrica. Se deja al criterio del lector si considera pertinente su revisión. Cabe destacar que esta parte constituye la parte más laboriosa de la investigación, ya que pone de manifiesto todos los principios y recursos matemáticos utilizados.

Por otra parte, el Capítulo 4 concluye el trabajo mostrando la construcción geométrica de la equivalencia a partir de imágenes y descripciones de las trayectorias de la luz. Se espera que se entienda que consideramos un error extraer el Capítulo 3 y ubicarlo después de la demostración geométrica, ya que esto debilitaría la solidez de la estructura lógica del trabajo. Hemos hecho nuestro mejor esfuerzo para resumir todas las ideas propuestas en la medida de lo posible. Desafortunadamente, ha sido necesario eliminar pasajes matemáticos, epistemológicos y

conceptuales que consideramos fundamentales para la configuración global de esta entrega, como el lector puede haber notado. Esta decisión se tomó en pro de reducir la extensión del trabajo.

Apelamos a la indulgencia del lector en este sentido y ofrecemos de antemano una disculpa por cualquier vacío argumental que pueda percibir. Se ha trabajado para incluir no más que lo estrictamente necesario para comprender la intención de las ideas hasta aquí expuestas.

*"La lucha, tan violenta en los primeros días de la ciencia, entre los puntos de vista de Ptolomeo y Copérnico entonces no tendría ningún sentido. Cualquier sistema de coordenadas puede ser utilizado con la misma justificación. Las dos frases, " el Sol está en reposo y la Tierra se mueve, "o" el Sol se mueve y la Tierra está en reposo, "simplemente significaría dos convenios diferentes en relación con dos sistemas de coordenadas diferentes."*

- Albert Einstein

### **CAPÍTULO III**

#### **Marco matemático en el planteamiento del problema**

El problema de establecer las equivalencias entre modelos planetarios, en particular entre el Ptolemaico y el de Kepler, se origina al considerar la validez teórico-matemática del modelo por epiciclos de Ptolomeo. Con el objetivo de facilitar la comprensión de la propuesta y mantener la estructura de trabajo presentada por Ptolomeo, Copérnico y Kepler, utilizaremos una estructura axiomática que resalte el vínculo entre las diferentes áreas de las matemáticas involucradas en el análisis.

Anteriormente, recurrimos al cálculo diferencial y la geometría para realizar las construcciones necesarias que relacionaran las leyes de Newton con las leyes de Kepler, permitiendo así la construcción de un mecanismo demostrativo. En este apartado, introduciremos algunos elementos nuevos basados en el álgebra lineal y la teoría de conjuntos, lo que proporciona una perspectiva matemática diferente y un método distinto para correlacionar todo lo mencionado hasta ahora.

Hemos optado por estos métodos con el fin de hacer que cada proposición sea una consecuencia lógica de la anterior, con el menor número posible de axiomas y siempre en concordancia con todo lo expuesto hasta el momento, tanto en términos físicos como en aspectos matemáticos.

### **Ddefiniciones**

- I.** Planeta: es un cuerpo celeste observable que no produce luz propia
- II.** Sol: es una estrella con mayor tamaño que un planeta también, es considerado un cuerpo celeste que emite luz propia
- III.** Órbita: la trayectoria que describe el movimiento de un cuerpo celeste

### **Axiomas**

- I.** La orbita de los planetas describen trayectorias continuas: el movimiento es constante sin interrupciones.
- II.** Las orbitas de los planetas describen trayectorias periódicas: el movimiento se repite con regularidad una vez completado su ciclo.
- III.** Los movimientos de los planetas se describen respecto a otros cuerpos: el movimiento no puede ser descrito de forma arbitraria, una descripción de movimiento debe realizarse al menos respecto a otro cuerpo celeste<sup>21</sup>.
- IV.** El movimiento de los cuerpos celestes se asume sobre un plano (conservación del momento angular).

### **Proposiciones**

- I.** Toda orbita se puede expresar como ecuaciones paramétricas para sus componentes X e Y en función del tiempo. Dichas ecuaciones son continuas.

Demostración:

Dado que un planeta no puede ocupar dos posiciones a la vez, ni tampoco permanecer sin posición en un determinado “t” las ecuaciones que definen sus

---

<sup>21</sup> El tercer axioma está definido como consecuencia de un análisis epistemológico de los estados físicos de un sistema, a un objeto no se le puede atribuir propiedades en si mismo, es necesario construir a partir de al menos otro, un sistema comparativo, los objetos físicos en tanto extensión y forma requieren de instrumentos de medición para caracterizarlos, dichos instrumentos constituyen otros objetos físicos.

componentes deben ser continuas en todo momento por el axioma 1. Por definición una ecuación paramétrica describe la trayectoria de una curva suave y continua.

$$\begin{cases} x = v(t) \\ y = u(t) \end{cases}, t \in R$$

Por definición de continuidad:  $\forall t \subseteq \mathbb{R} \exists \{x, y / y = u(t), x = v(t)\}$

**II.** El conjunto de las funciones continuas es un espacio vectorial bajo la suma definida como:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  y el producto por escalar  $(cf)(x) = cf(x)$ .

Demostración:

Sea el espacio vectorial de las funciones reales  $V = \{f/f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  se requiere probar que  $\omega$  es subespacio así<sup>22</sup>:

$$\omega = \{f / f \text{ es continua} \} \subseteq V = \{f/f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

1. Como  $f(x)$  es continua:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  y Como  $g(x)$  es continua:  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

por la definición de suma de funciones

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a)$$

Luego, la suma de funciones continuas es continua

$$\forall \{f, g\} \in \omega \rightarrow \{f + g\} \in \omega$$

2. Como  $f(x)$  es continua:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

---

<sup>22</sup> La demostración de que  $V = \{f/f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  es rutinaria y se omite para delimitar la axiomatización

por definición de producto por escalar

$$\lim_{x \rightarrow a} c * f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c * f(x) = c * f(a)$$

$$c * f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c * \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$c * f(x) = (cf)(x)$$

el producto de una función continua por un escalar es una función continua.<sup>23</sup>

3. Existe  $f(x)=0$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Sea  $c=0$ , se tiene que

$$c * f(x) = (cf)(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = (cf)(a) = 0 * f(x) = 0$$

**III.** Las funciones seno y coseno son continuas.

Demostración:

Sean las funciones  $sen: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , si cumplen con el criterio de continuidad:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \therefore \forall x_0 \in \mathbb{R} \text{ donde } |x - x_0| < \delta$$

$$\rightarrow |sen(x) - sen(x_0)|$$

$$< \varepsilon \text{ y } |cos(x) - cos(x_0)| < \varepsilon$$

**Lemas**

a.  $|cos(x)| \leq 1$

b.  $|sin(x)| \leq x$

c.  $|sen(a) - sen(b)| = \left| 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \right|$

Sea entonces

$$|sen(x) - sen(x_0)| = \left| 2 \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

---

<sup>23</sup> Al ser  $\omega$  un subconjunto de  $V$  se demuestra únicamente la cerradura para la suma, el producto por escalar y la existencia del elemento neutro.

$$= |2| \left| \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right|$$

$$= 2 \left| \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right|$$

aplicando lema a

$$2 \left| \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \leq 2 * 1 * \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

aplicando lema b

$$\begin{aligned} 2 * 1 * \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) &\leq 2 \left| \left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \\ &= 2 \frac{|x+x_0|}{|2|} \Rightarrow |x+x_0| \leq \delta \end{aligned}$$

al igualar

$$\delta = \varepsilon \Rightarrow |\text{sen}(x) - \text{sen}(x_0)| < \varepsilon$$

análogamente se procede para la función coseno para obtener:

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| < \varepsilon$$

De lo anterior se deduce que las funciones seno y coseno pertenecen al espacio vectorial  $\omega$  de las funciones continuas.

- IV.** Las funciones  $a \cdot \text{sen}(x)$  y  $b \cdot \text{cos}(x)$  con el producto  $(cf)(x) = cf(x)$  y la suma definida  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  son un subespacio de las funciones continuas.

Demostración.

Sea el espacio vectorial de las funciones continuas  $\omega = \{f / f \text{ es continua} \}$

Y  $u = \{a_i \cdot \text{sen}(x) + b_j \cdot \text{cos}(x)\}$   $i, j = 1, 2, 3 \dots n$  que pertenece a  $\omega$  se tiene:

1. Sea  $a_i f(x) + b_j g(x)$  con  $\{a_i, b_j\} \in \mathbb{R} \wedge \{f, g\} \in \omega$

$$a_i f(x) + b_j g(x) = a_i \cdot \text{sen}(x) + b_j \cdot \text{cos}(x)$$

$$= x \operatorname{sen}(x) + 2 \operatorname{sen}(x) + 3 \operatorname{sen} + \cdots + n \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \\ + 2 \cos(x) + 3 \cos + \cdots + m \cos(x)$$

factorizando

$$1+2+3+\dots+n(\operatorname{sen}(x)) + 1+2+3+\dots+n(\cos(x)) \\ \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \cdots + n = k$$

$$\Rightarrow k \operatorname{sen}(x) \in \omega \wedge k \cos(x) \in u$$

puesto que es de la forma

$$a_i * \operatorname{sen}(x) + b_j * \cos(x) \in u$$

la suma de los elementos de  $u$  pertenecen a  $u$

2. A  $\forall(a_i = b_j = 0) \Rightarrow a_i * \operatorname{sen}(x) + b_j * \cos(x) = 0$  existe el elemento neutro para el conjunto  $u$ <sup>24</sup>

3. Sea  $f \in u \wedge a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow af(x) = (af)(x) \Rightarrow a((\operatorname{sen}(x) + \cos(x)))$$

aplicando propiedad distributiva

$$= (a \operatorname{sen}(x) + a \cos(x))$$

como

$$a_i * \operatorname{sen}(x) \in u$$

$$a_i * \cos(x) \in u$$

y

$$a_i * \operatorname{sen}(x) + b_j * \cos(x) \in u$$

$$(a \operatorname{sen}(x) + a \cos(x)) \in u \text{ para cualquier } a$$

V. Las funciones  $\operatorname{sen}(x)$ ,  $\cos(x)$  son base del espacio vectorial de las funciones continuas.

Demostración:

Se busca probar la independencia lineal de los vectores base y que estos generen todo el espacio  $u$ . Se hará especial énfasis en esta proposición pues se considera que aquí

---

<sup>24</sup> La proposición 4 muestra como las funciones seno y coseno cumplen las tres condiciones para formar un subespacio: existencia del elemento neutro, cerradura para la suma y cerradura para el producto por escalar.

radica el verdadero fundamento matemático de la equivalencia sobre la cual se ha construido este trabajo como se verá más adelante.

Debido a la complejidad de los dos postulados se recurre a demostrar las series de Fourier como un método para generar funciones continuas en un intervalo dado y su ortogonalidad.

1. Sea una función suave en el intervalo  $[-L, L]$  se define su serie de Fourier como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Esta serie en particular representa una forma general de expresar funciones continuas, como se puede ver corresponde a una combinación lineal de funciones seno y coseno tal y como lo enuncia la proposición.

Se busca entonces determinar los coeficientes  $a_0, a_n, b_n$  que se encuentran dados por las ecuaciones:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

para el primer coeficiente  $a_0$  calculamos la integral de la función

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

dado que se asumen las funciones convergentes puesto que la función se puede expresar como la suma entonces se puede intercambiar la suma por la integral.

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

aplicando las fórmulas para integrales trigonométricas

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen}(ax) \\ \int \operatorname{sen}(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

se obtiene

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \Big|_{-L}^L + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_{-L}^L \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_{-L}^L$$

evaluando en los límites de integración

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} (L - (-L)) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{n\pi} (\operatorname{sen}(n\pi) \\ - (\operatorname{sen}(-n\pi))) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{-L}{n\pi} (\cos(n\pi) \\ - (\cos(-n\pi)))$$

como  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} (L - (-L)) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{-L}{n\pi} (\cos(n\pi) \\ - (\cos(-n\pi)))$$

dado que la función coseno es par

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{-L}{n\pi} (\cos(n\pi) - (\cos(-n\pi))) = 0$$

la ecuación queda entonces

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} (L - (-L))$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = La_0 \Rightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = a_0$$

se ha determinado el primer coeficiente esperado.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

para encontrar el segundo coeficiente  $a_n$  multiplicamos la expresión original por  $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

$$\begin{aligned} & f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

integrado la ecuación en el intervalo

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

calculando la integral del primer término como en el paso anterior y sustituyendo los límites

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

el segundo sumando es un caso típico de integración por identidades trigonométricas cuya demostración omitirá por simplicidad de la demostración

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

así, la expresión se reduce a

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

análogamente, se procede con el segundo sumando aclarando que los valores de  $n$  y  $m$  deben ser distintos, si este es el caso:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

para el caso en que  $n$  y  $m$  son iguales

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

calculando la integral con el caso típico con el caso del ángulo doble

$$\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L$$

la expresión queda

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= a_n L \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

para el tercer coeficiente el procedimiento es similar multiplicando todo por

$$\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{aligned} & f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

calculando la integral del primer y segundo término nuevamente igual a 0

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ & \quad = + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

nuevamente para el caso en el que  $m$  y  $n$  sea distintos la integral es igual a 0

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

para  $n=m$

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \\ & b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Hasta aquí se ha demostrado que para cualquier función continua en un intervalo existe una combinación lineal equivalente en términos de los elementos de  $u$  es decir funciones seno y coseno, se procede ahora a probar la ortogonalidad de estas dos funciones es decir la independencia lineal.

Sea la combinación línea

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Todas las posibles combinaciones de los factores  $m$  y  $n$  en el dominio determinan un valor distinto para los sumandos por lo que se puede expresar la integral como el caso general de una suma discreta para sus casos particulares así

$$= \sum_{i=1}^k a_n \operatorname{sen}(x) + b_m \operatorname{cos}(x)$$

para  $m=n$

$$\int_{-L}^L \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

usando la identidad

$$\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{cos}(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

aplicando la fórmula

$$\int_{-L}^L \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = -\frac{1}{2} \frac{L}{2n\pi} \operatorname{cos}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L$$

evaluando en los límites

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \frac{L}{2n\pi} \left[ \operatorname{cos}\left(\frac{2n\pi L}{L}\right) - \operatorname{cos}\left(\frac{-2n\pi L}{L}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{L}{2n\pi} [\operatorname{cos}(2n\pi) - \operatorname{cos}(-2n\pi)] \end{aligned}$$

como coseno es función par

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{L}{2n\pi} [\operatorname{cos}(2n\pi) - \operatorname{cos}(-2n\pi)] = 0 \end{aligned}$$

para el caso en el que  $n \neq m$

$$\int_{-L}^L \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

se acude a la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}Ax * \operatorname{cos}Bx = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A - B)x + \operatorname{sen}(A + B)x]$$

aplicando la fórmula

$$= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x - n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x + n\pi x}{L} \right) \right] dx$$

resolviendo la integral

$$= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x - n\pi x}{L} x \right) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x + n\pi x}{L} x \right) dx$$

sustituyendo los limites

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( \frac{L}{m\pi - n\pi} \right) \cos \left( \frac{m\pi - n\pi}{L} x \right) \Big|_{-L}^L \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{m\pi + n\pi} \right) \cos \left( \frac{m\pi + n\pi}{L} x \right) \Big|_{-L}^L \\ &= A \left[ \cos \left( \frac{m\pi - n\pi}{L} L \right) - \cos \left( \frac{m\pi - n\pi}{L} (-L) \right) \right] \\ &\quad + B \left[ \cos \left( \frac{m\pi + n\pi}{L} L \right) - \cos \left( \frac{m\pi + n\pi}{L} (-L) \right) \right] \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} &A[\cos(m\pi - n\pi) - \cos(-m\pi x + n\pi x)] \\ &\quad + B[\cos(m\pi + n\pi) - \cos(-m\pi x - n\pi x)] \end{aligned}$$

usando el coseno de la suma

$$\begin{aligned} &\cos(A + B) = \cos A * \cos B - \operatorname{sen} A * \operatorname{sen} B \\ &= A[\cos(m\pi) \cos(-n\pi) - \operatorname{sen}(m\pi) \operatorname{sen}(-n\pi) - \cos(-m\pi) \cos(n\pi) + \\ &\quad \operatorname{sen}(-m\pi) \operatorname{sen}(n\pi)] + \\ &B[\cos(m\pi) \cos(n\pi) - \operatorname{sen}(m\pi) \operatorname{sen}(n\pi) - \cos(-m\pi) \cos(-n\pi) \\ &\quad + \operatorname{sen}(-m\pi) \operatorname{sen}(-n\pi)] \end{aligned}$$

cancelando los senos de todo múltiplo de  $(\pi)$

$$\begin{aligned} &A[\cos(m\pi) \cos(-n\pi) - \cos(-m\pi) \cos(n\pi)] \\ &\quad + B[\cos(m\pi) \cos(n\pi) - \cos(-m\pi) \cos(-n\pi)] \end{aligned}$$

usando el argumento de que la función coseno es par

$$\begin{aligned} &A[\cos(m\pi) \cos(-n\pi) - \cos(-m\pi) \cos(n\pi)] \\ &\quad + B[\cos(m\pi) \cos(n\pi) - \cos(-m\pi) \cos(-n\pi)] = 0 \end{aligned}$$

se ha demostrado entonces

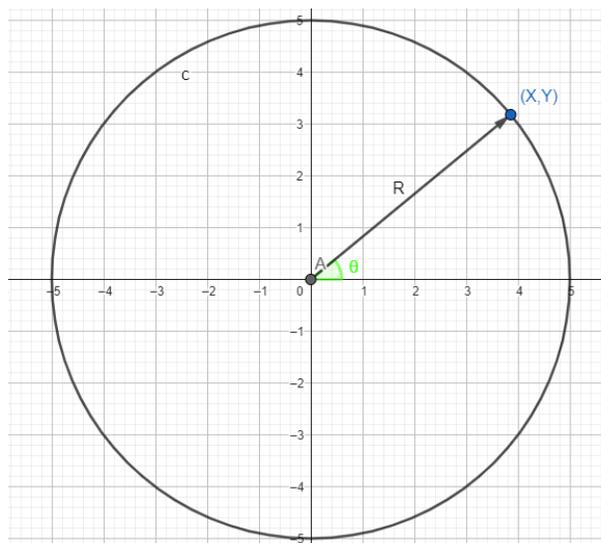
$$\int_{-L}^L \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = 0$$

de esta forma se ha encontrado que la solución a la suma de senos y cosenos es la trivial esto demuestra que las funciones son ortogonales o en otras palabras linealmente independientes.

**VI.** Toda circunferencia es parametrizable en términos de las funciones seno y coseno

### Figura 39

*Parametrización del círculo*



*Fuente propia*

Sea una circunferencia de radio  $R$  generada por la rotación del ángulo  $\theta$  las componentes  $x$  e  $y$  del punto que describe la circunferencia son:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{R}$$

$$x = R\cos\theta$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{R}$$

$$y = R\sin\theta$$

De aquí se deduce que toda circunferencia es expresable en términos del ángulo  $\theta$  y

el radio propuesto, esto es:<sup>25</sup>

$$\forall(\theta, R) \exists x, y / x = R \cos \theta \text{ e } y = R \sin \theta$$

**VII.** Toda trayectoria finita y continua es parametrizable en términos de funciones seno y coseno.

Demostración:

sea una curva finita en el intervalo  $[-L, L]$  que representa la trayectoria de un cuerpo, se puede expresar su posición en  $x$  e  $y$  como función del tiempo  $t$  por proposición I

$$f = \left\{ \begin{array}{l} x = v(t) \\ y = u(t) \end{array} \right\}, t \in R$$

Dado que para las funciones  $v(t)$  y  $u(t)$  son continuas y finitas la función  $f$  es también finita y continua por proposición II,

Al ser  $f$  continua y finita por proposición V

$$f(x) = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

por tanto

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

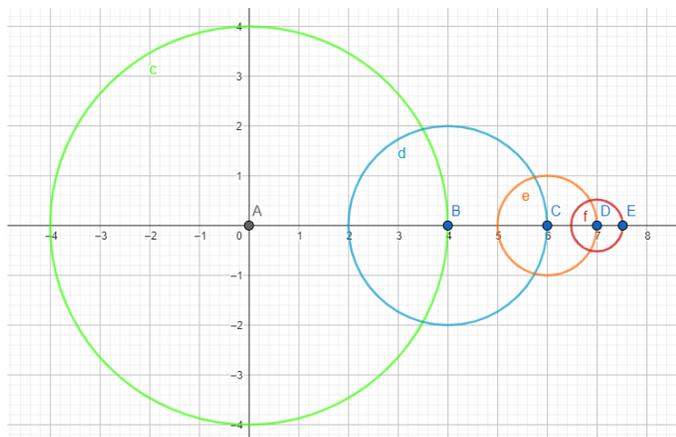
Toda función  $f(x)$  se puede expresar como combinación lineal de senos y cosenos

**VIII.** Toda circunferencia o conjunción de circunferencias (epiciclos) son combinación lineal de funciones seno y coseno.

**Figura 40**

---

<sup>25</sup> La proposición 2 muestra una parametrización en términos del ángulo, esta puede ser expresada en como función del tiempo “ $t$ ” para la órbita de un planeta  $t = 2\pi R/\omega$  donde  $\omega$  es la velocidad angular. Dicha parametrización describe de momento el modelo copernicano.



*Fuente propia*

Demostración:

Sean las circunferencias  $c, d, e, f, \dots$  centradas en los puntos  $A, B, C, D$  respectivamente, para cada una es posible realizar una parametrización para cada una  $g, h, i, j$

respectivamente por proposición V. la conjunción es de  $c + d + e + f = g + h + i + j$

En términos de las funciones para cada una

$$c + d + e + f = g + h + i + j =$$

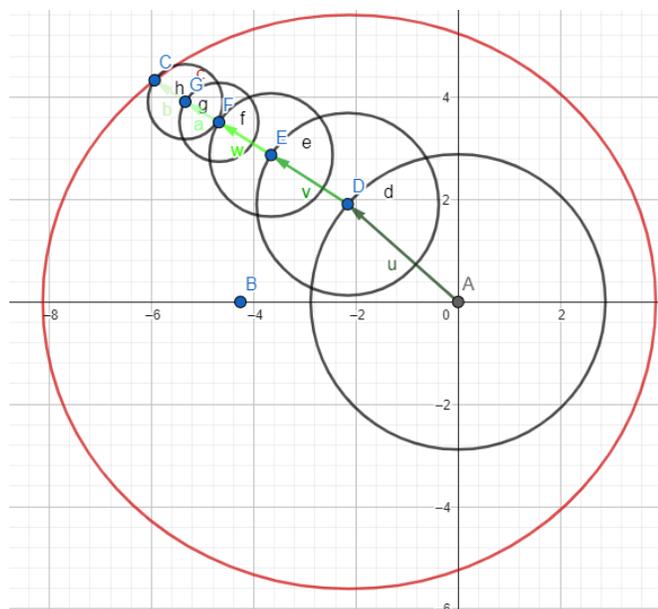
$$F(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

puesto que para cada una de las funciones  $g, h, i, j$  existen los coeficientes

$a_0, a_n, b_n$ .

**IX.** Toda elipse es expresable como combinación lineal de funciones senos y cosenos.

**Figura 41**



*Fuente propia*

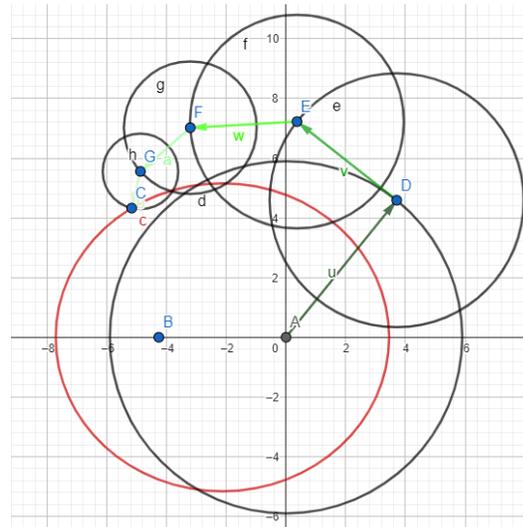
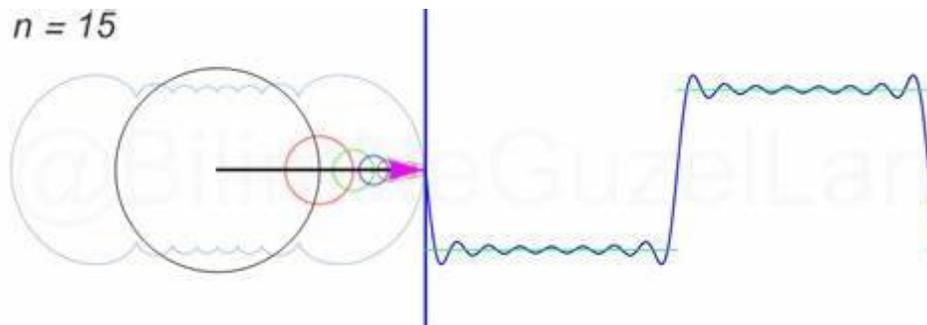
*Nota:* La imagen no corresponde a la conjunción real de circunferencias, se muestra en esta forma como un recurso didáctico para facilitar su comprensión.

Como se vio en el capítulo primero las elipses pueden expresarse como una función del ángulo de barrido, al ser una función continua por proposición V se tiene

$$\begin{aligned}
 n(\beta) & \frac{A}{1 - l * \cos(\beta - \alpha)} \\
 & = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi\beta}{L}\right) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\beta}{L}\right)
 \end{aligned}$$

**X.** El modelo planetario de Kepler tiene una equivalencia como conjunción de circunferencias en el modelo planetario de Ptolomeo.

Como consecuencia de todas las anteriores nueve proposiciones se puede deducir entonces como el modelo que describe las orbitas planetarias como elipses es también representable por medio de epiciclos, en otras palabras, como una extensión del modelo Ptolemaico.

**Figura 42***Fuente propia***Figura 43***Serie de Fourier**Fuente propia*

Dejaremos el enlace a una animación que muestra en forma dinámica como una elipse es transformada a partir de las series de Fourier para convertirse en modelos armónicos similares los ptolemaicos, no es una representación fiel a los casos aquí demostrados, pero si constituye una potente herramienta visual:

[Elipse y armónicos - YouTube](#)

<https://www.youtube.com/shorts/b03b19sUgZI>

## CAPÍTULO IV

### Consideraciones geométricas sobre la transformación

Hasta este punto, hemos logrado demostrar teóricamente cómo es posible establecer una equivalencia matemática entre las órbitas elípticas propuestas por el modelo de Kepler y las órbitas por epiciclos de Ptolomeo. Podría decirse que los epiciclos constituyen la serie de Fourier de las elipses, considerando diferentes marcos de referencia como el Sol, la Tierra o cualquier otro punto arbitrario, lo que se traduce en el aspecto físico de la equivalencia.

La pregunta que surge de inmediato es: ¿Cómo podemos encontrar esta transformación? Como hemos visto, la respuesta implica encontrar la serie de Fourier correspondiente a los epiciclos ptolemaicos y determinar sus armónicos mediante un método conocido como transformadas de Fourier. Sin embargo, este método va más allá de los alcances de este trabajo, ya que implica tomar los datos astronómicos reales de las posiciones de los planetas en cada punto de su órbita y construir a partir de ellos una serie de ecuaciones paramétricas que los describan. Esta tarea no es posible de abordar analíticamente y requiere recurrir a métodos numéricos y computacionales.

En ese sentido, en este trabajo omitimos la construcción numérica y observacional de dicha transformación y asumimos que es suficiente con demostrar su existencia para respaldar la tesis de equivalencia. Sin embargo, estas demostraciones plantean un conjunto de implicaciones filosóficas que hemos abordado a lo largo de este trabajo. Se pueden plantear muchos otros dilemas interesantes sobre los cuales reflexionar, pero debido a limitaciones de espacio, no los discutiremos aquí.

Dejamos como propuesta para el lector la reflexión sobre las implicaciones históricas y pedagógicas que subyacen en esta tesis. Aunque abordaremos este tema brevemente en las consideraciones finales, consideramos que es un aspecto valioso para la enseñanza y comprensión de la astronomía desde una perspectiva de la física moderna.

A pesar de lo expuesto hasta ahora, a continuación, presentaremos una alternativa geométrica para la construcción de esta equivalencia. Aunque puede carecer del rigor matemático necesario, tiene en cuenta algunos principios físicos que facilitan su comprensión. Optamos por presentarla de esta manera con el objetivo de que sea entendible para cualquier

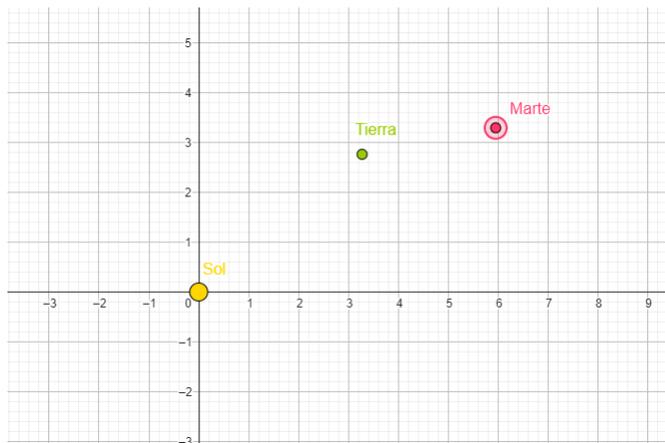
persona, incluso si omite las construcciones matemáticas previas. Esto se hace con la intención de establecer una herramienta didáctica para su enseñanza en todos los niveles educativos, lo que constituye en gran parte el valor pedagógico de esta tesis. Buscamos que el lector pueda abstraer algunos de los conceptos expuestos y aplicarlos en la enseñanza de la astronomía desde una perspectiva de la física moderna.

### **Demostración de la equivalencia a través de argumentos geométricos**

Supongamos un sistema planetario compuesto por tres cuerpos, el sol, la tierra y cualquier otro planeta.

#### **Figura 44**

*Representación del sistema sol, Tierra, Marte*



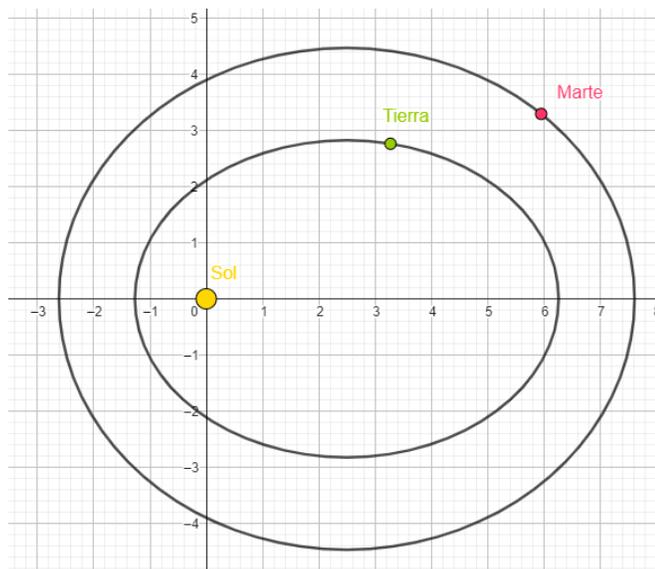
*Fuente propia*

Es importante destacar que el modelo no se representa a escala real por razones didácticas. Si se representara a escala, las distancias astronómicas serían tan vastas en relación con los tamaños de los planetas que sería difícil apreciar los conceptos presentados. Sin embargo, es crucial comprender que un modelo a escala real mostraría los mismos fenómenos.

Como se demostró en el capítulo dos, debido a la influencia gravitacional del Sol, cada uno de los planetas describe una elipse en su órbita, donde uno de los focos de la elipse coincide con la posición del Sol. Por conveniencia, esta posición también representa el eje coordenado de un sistema cartesiano.

#### **Figura 45**

### *Orbitas elípticas del sistema*



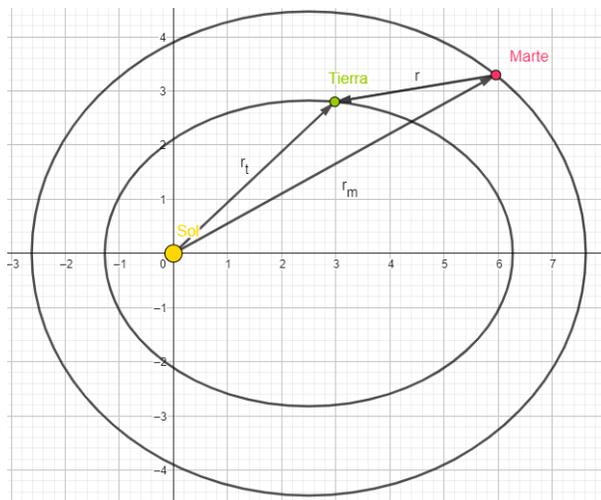
*Fuente propia*

De acuerdo con la Definición 1, los planetas no generan luz propia, pero el Sol sí, como se indica en la Definición 2. Las observaciones astronómicas se basan en la interpretación de la luz que emite el Sol y que es reflejada por cada cuerpo celeste. Esto ha sido entendido desde los tiempos de Empédocles en el siglo V a.C., quien postuló que la luz viaja en línea recta y, por lo tanto, podemos representarla como un vector.

De esta manera, la posición relativa de un planeta está determinada por la diferencia entre los vectores que van desde el Sol hasta cada uno de los planetas.

### **Figura 46**

*Vectores de posición del sistema*

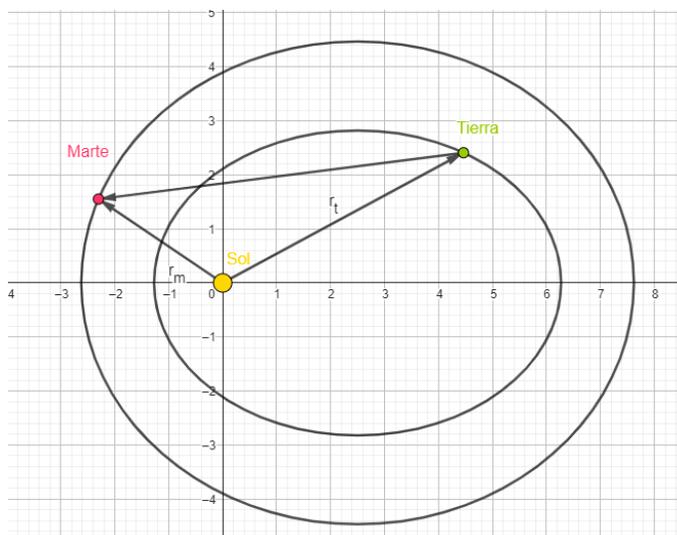


*Fuente propia*

Los vectores  $r_t$  y  $r_m$  representa la luz que viaja desde el sol a cada uno de ellos por ende la observación de marte desde la tierra se puede representar como la luz que viaja desde el sol y rebota en el planeta es decir la resta  $r = r_t - r_m$ . Misma ecuación de la que se partido en la demostración de la primera ley de Kepler para el caso de dos cuerpos. Nótese que cualquier instante siempre es posible establecer esta diferencia para determinar el vector  $r$ .

### Figura 47

*Variación en los vectores posición*

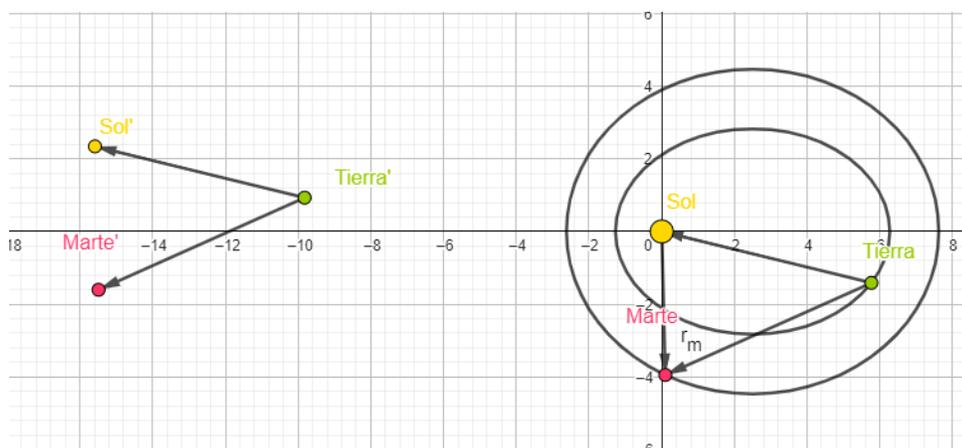


*Fuente propia*

El vector  $-r$  será la flecha que une a los dos planetas, esto puede interpretarse de la siguiente manera, las observaciones astronómicas buscar determinar las componentes del vector  $-r$  para este sistema coordenado y tomando un marco de referencia absoluto. Nótese que tal y como se está representando aquí el sistema, se asume que la descripción se está realizando desde un punto exterior al sistema y fuera del plano de rotación. Tomemos ahora la tierra como un marco de referencia suponiéndola sin su movimiento de traslación y sobre esta trazaremos los vectores  $-r_t$  que representa la observación del sol desde la tierra y  $-r$  previamente definido.

**Figura 48**

*Diferencia vectorial*



*Fuente propia*

Veamos la evolución de los vectores  $r$ ,  $r_t$  y  $r_m$  y sus equivalentes respectivos  $r'$ ,  $r'_t$  en el tiempo para el caso del geocentrismo y del heliocentrismo, es decir para el marco de referencia del sol y el sistema prima correspondiente a la tierra.

**Figura 49**

*Imagen inicial de la dinámica de los sistemas en simultaneo*

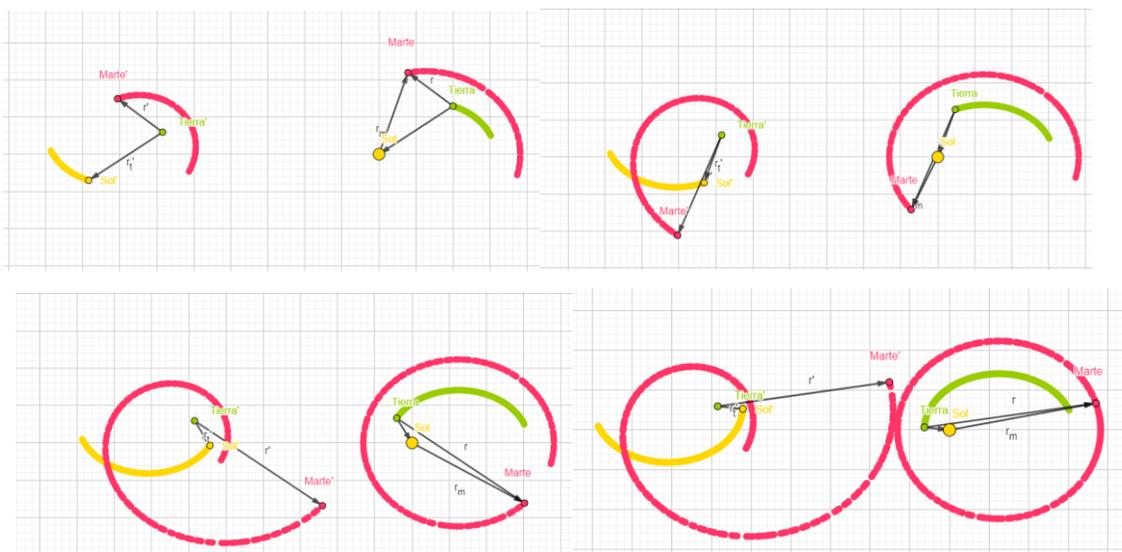


*Fuente propia*

Partiendo de un punto arbitrario cada cuadro muestra el recorrido de los vectores, el rastro de color verde muestra el movimiento de la tierra, el amarillo el del sol y el rojo el de marte.

### Figura 50

*Comparación de los modelos planetarios para distintos momentos en el tiempo*

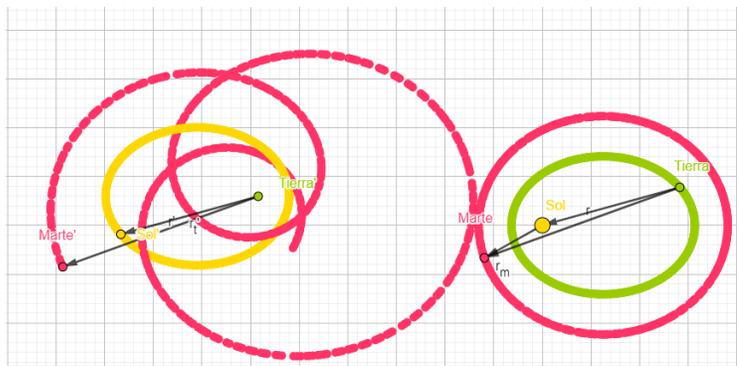


*Fuente propia*

En la cuarta imagen se puede apreciar cómo en ambos modelos, el planeta Marte ha completado una revolución en relación con la Tierra. Esto implica que no hay una contradicción lógica en la relatividad de los movimientos entre los modelos heliocéntrico y geocéntrico. Por otro lado, la Tierra describe una elipse que avanza en sentido antihorario en el modelo heliocéntrico, mientras que en el modelo geocéntrico, es el Sol quien describe exactamente la misma elipse. Este hecho, que fue predicho en el capítulo 2 en los sistemas binarios, se demuestra empíricamente en esta simulación.

### Figura 51

*Representación de la igualdad de la órbita sol-tierra y tierra-sol*

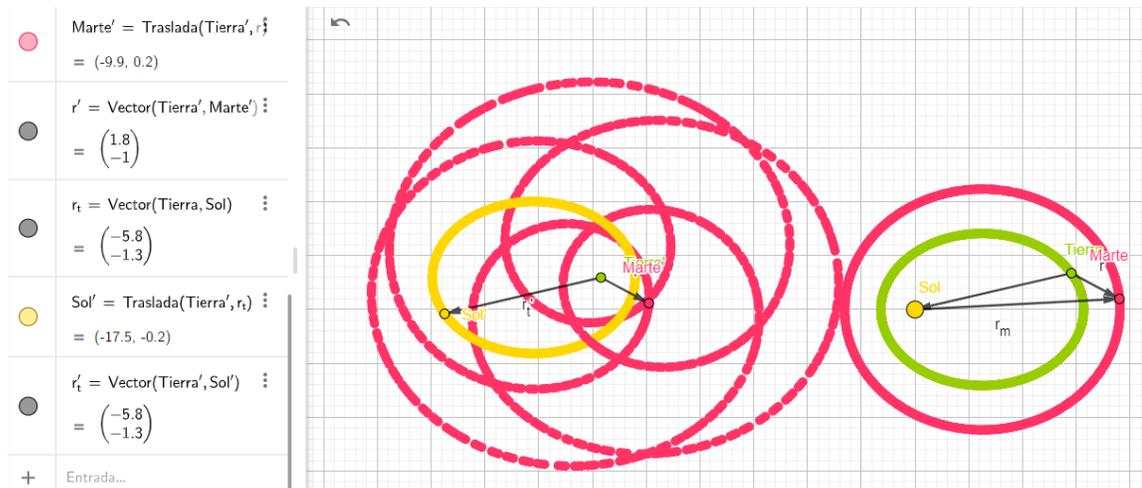


*Fuente propia*

Se puede observar cómo los dos modelos se acoplan a los sistemas planteados por Ptolomeo y Kepler respectivamente bajo el análisis la influencia de un mismo mecanismo matemático.

### Figura 52

*Cálculo de los vectores de posición*



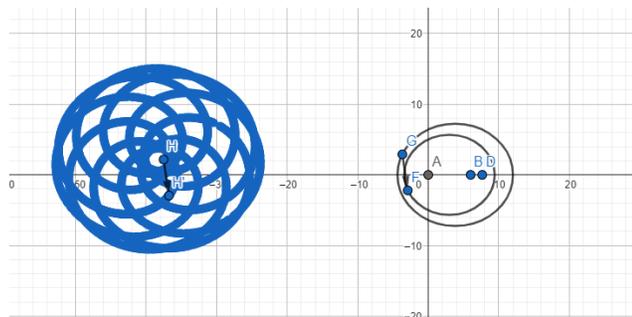
*Fuente propia*

La computadora calcula los vectores a partir de las elipses y realiza una simulación bajo la suposición de que la Tierra se encuentra estática y transforma el movimiento de todo lo demás, incluyendo el Sol. En otras palabras, cambia el sistema de coordenadas.

Observemos cómo los patrones dependen de la distancia entre las órbitas, la ubicación de los focos y la velocidad de rotación. En la siguiente imagen, se ha establecido una proporción aproximada de las velocidades angulares de la Tierra y Marte, respectivamente. El modelo de la izquierda se asemeja en gran medida a uno de los diseños originales propuestos por Ptolomeo, lo que permite evidenciar su gran capacidad de abstracción geométrica.

### Figura 53

*Desarrollo de uno de los gráficos Ptolemaicos para el planeta marte respecto a la construcción*

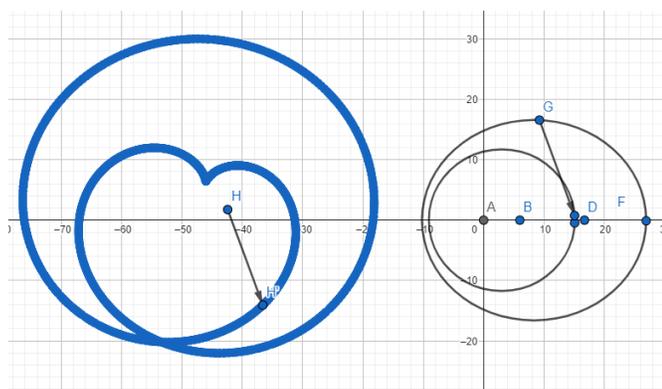


*Fuente propia*

Vemos como para un caso en donde la razón entre las velocidades angulares es mayor los patrones adquieren complejidad y el efecto de retrogradación se puede apreciar mejor.

### Figura 54

*Resultado al aproximar la velocidad orbital a un valor proporción al real en el caso de marte*

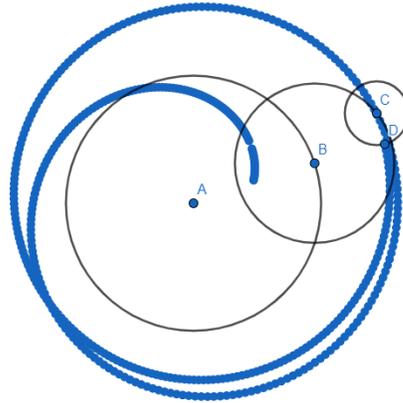


*Fuente propia*

Finalmente, la siguiente imagen deja claro cómo se realiza este proceso a través del movimiento de los epiciclos representados por la conjunción de tres circunferencias.

**Figura 55**

*Modelo aplicando las circunferencias correspondientes a los epiciclos*

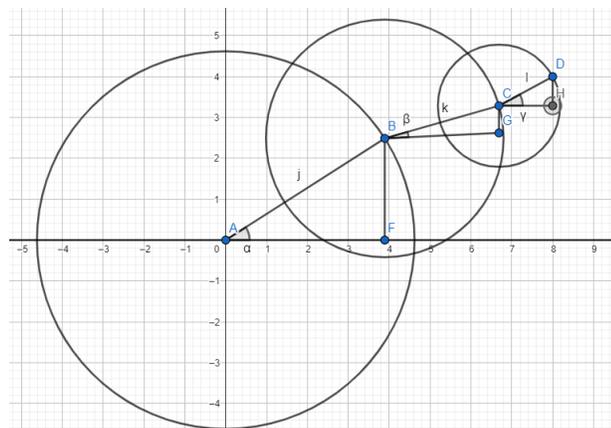


*Fuente propia*

El punto D representa un planeta en movimiento, y las circunferencias centradas en C, B y A los epiciclos que describen dicha trayectoria, cada una de estas circunferencias representan un armónico determinado por la serie de Fourier correspondiente, la posición de los puntos está determinada por una combinación línea de senos y cosenos de esta forma.

**Figura 56**

*Modelo final*



*Fuente propia*

Aquí se puede apreciar como la posición de cada punto depende de los radios correspondientes  $j, k, l$  respectivamente y el seno más el coseno de los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  así se obtiene:

$$B = j * \text{sen}(\alpha) + j * \text{cos}(\alpha)$$

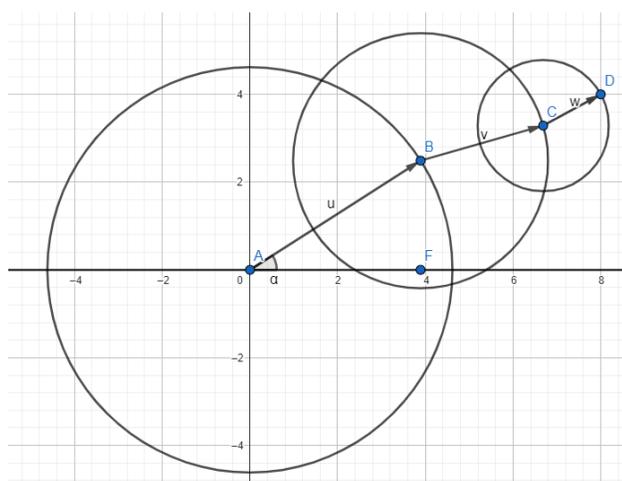
$$C = k * \text{sen}(\beta) + k * \text{cos}(\beta)$$

$$D = l * \text{sen}(\gamma) + l * \text{cos}(\gamma)$$

y la forma vectorial se muestra en la figura 50, donde los vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  son funciones del tiempo.

### Figura 57

*Suma de los vectores radiales*



$$D = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

*Fuente propia*

### Conclusiones y reflexiones finales

Esta tesis defiende una idea sencilla pero controvertida: el heliocentrismo y el geocentrismo son sistemas equivalentes descritos en diferentes marcos de referencia, y ambos corresponden a modelos clásicos. Como se ha visto a lo largo del trabajo, esta idea no es nueva, ya que Copérnico, Kepler y Einstein la habían planteado en su momento. El objetivo aquí ha sido dar un paso más allá y buscar un argumento matemático para respaldar esa equivalencia. Se ha proporcionado a su vez análisis y reflexiones sobre la naturaleza del movimiento y su relación con los orígenes de la teoría de la relatividad, se han desarrollado algunas extensiones a los

experimentos mentales que configuraron la idea de relatividad así como su aplicabilidad en el estudio geométrico de los modelos planetarios, estos planteamientos permitieron desarrollar una demostración analítica de los postulados ptolemaicos a la luz de la matemática que no estaba disponible en su época.

No se pretende validar ninguna postura en particular, sino más bien plantear temas de reflexión sobre la historia de la ciencia y la forma en que se enseñan habitualmente los conceptos astronómicos en los niveles iniciales de educación. Debido a la complejidad del proceso, se ha presentado una versión resumida del desarrollo, especialmente en cuanto al aspecto matemático, para no abrumar al lector con métodos numéricos y analíticos complejos que no aportarían mucho al trabajo. Se considera que se ha expuesto lo estrictamente necesario y que los argumentos son suficientes para alcanzar los objetivos establecidos en el primer capítulo.

En cuanto al mensaje subyacente en las construcciones presentadas, se busca fomentar una reflexión sobre cómo nuestra visión actual del sistema solar, en términos pedagógicos, sigue siendo en muchos casos una perspectiva clásica. A menudo se recurre a marcos de referencia privilegiados y absolutos en la enseñanza sin al menos considerar los mecanismos lógicos en los que se basan las descripciones. Estas ideas se replican comúnmente en los cursos tradicionales de astronomía, principalmente porque hay pocas obras en la literatura que aborden el problema planteado en este trabajo. Se invita al lector a extraer ideas que puedan ser útiles en la exposición de los fenómenos astronómicos y a cuestionar mucha de la información que se presenta habitualmente al público en la divulgación de la física.

Se espera, en el futuro, llevar a cabo una extensión de este trabajo que incluya la gravedad, a fin de realizar un análisis dinámico más allá de la simple cinemática. En este aspecto, ya se han logrado avances notables en algunos apartados de este trabajo, como la conservación del momento angular para la segunda ley de Kepler, que implica una ley análoga de conservación en el modelo ptolemaico y que explica las aceleraciones presentes en cada órbita.

Como consideración final, se destaca la importancia de estudiar obras originales sobre el surgimiento de los paradigmas científicos, ya que constituyen una herramienta fundamental para la comprensión epistemológica de las teorías en física. Esto ayuda a tener claridad sobre el pensamiento de los autores y a desmitificar varias ideas promovidas principalmente por algunos medios de divulgación científica. En este trabajo, se han destacado algunos ejemplos, como la hipótesis copernicana de la fuerza gravitacional inherente a todos los cuerpos masivos, la relatividad del movimiento conocida por Copérnico y enunciada por Kepler antes de los diálogos de Galileo, así como los métodos experimentales, entre otros.

## Anexos

### Ecuaciones de transformación de Galileo

Representación esquemática de dos marcos de referencia en el que uno se encuentra en movimiento respecto al otro.

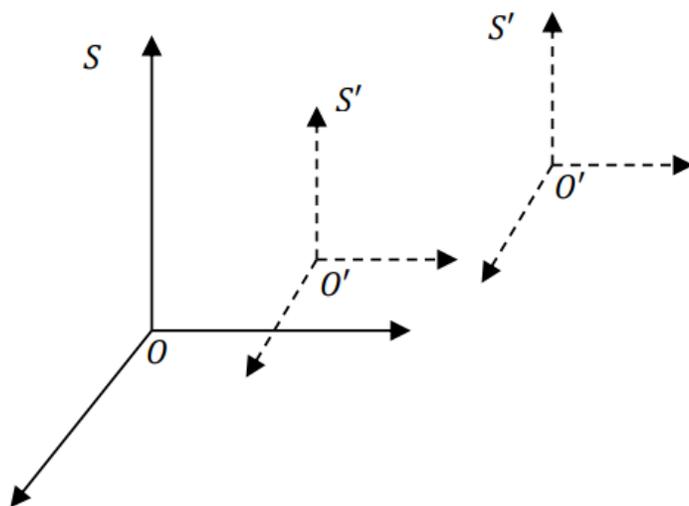


Imagen tomada de (Fabio Vélez U, 2012, pág. 9)

El marco O se encuentra en reposo respecto a su contraparte en movimiento O'

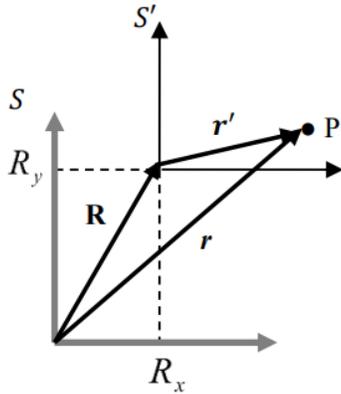


Diagrama tomado de (Fabio Vélez U, 2012, pág. 11)

Ecuaciones de transformación directa e inversa de Galileo a partir el diagrama de movimiento de marcos inerciales.

Componentes rectangulares:

$$r' = (x')i + (y')j + (z')k$$

$$r = (x)i + (y)j + (z)k$$

$$R = (x_0)i + (y_0)j + (z_0)k$$

Tomando en cuenta la variación de las componentes:

$$(x')i = (x - x_0)i$$

$$(y')j = (y - y_0)j$$

$$(z')k = (z - z_0)k$$

Velocidad en función del tiempo

$$x_0 = v_x t$$

$$y_0 = v_y t$$

$$z_0 = v_z t$$

Transformaciones directas

$$x' = x - v_x t$$

$$y' = y - v_y t$$

$$z' = z - v_z t$$

Transformaciones inversas

$$x = x' - v_x t$$

$$y = y' - v_y t$$

$$z = z' - v_z t$$

Transformación de velocidades

deducción

$$u'_x = \frac{dx'}{dt}$$

$$u'_x = \frac{d(x - v_x t)}{dt}$$

$$u'_x = \frac{dx}{dt} - v_x$$

$$u'_x = u_x - v_x$$

Transformaciones

$$u'_x = u_x - v_x$$

$$u'_y = u_y - v_y$$

$$u'_z = u_z - v_z$$

### Ecuaciones de transformación de Lorentz

Consideración del marco de referencia S' en movimiento respecto a S

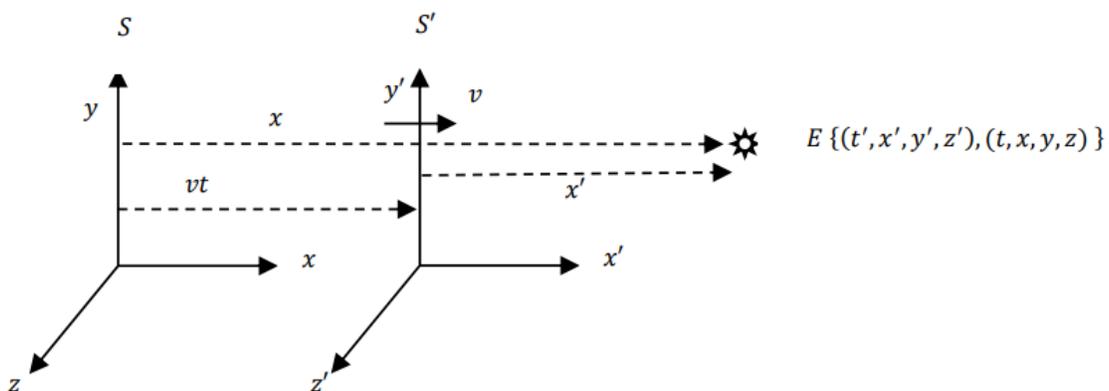


Diagrama tomado de (Fabio Vélez U, 2012, pág. 59)

**Determinación del coeficiente de Lorentz ( $\gamma$ ).**

$$x' = ct'$$

$$\gamma(x - vt) = ct'$$

$$\gamma(ct - vt) = ct'$$

considerando las distancias para un marco en reposo

$$x = ct$$

$$\gamma(x' - vt') = ct$$

$$\gamma(ct' - vt) = ct'$$

multiplicando las dos distancias

$$\gamma t(c - v)\gamma t'(c + v) = (ct')(ct)$$

$$\gamma^2 t t'(c - v)\gamma t'(c + v) = (ct')(ct)$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}$$

### Transformación de la coordenada temporal

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt']$$

$$\frac{x}{\gamma^2} = (x - vt) + \frac{vt'}{\gamma}$$

$$x \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) = (x - vt) + \frac{vt'}{\gamma}$$

$$\frac{-xv^2}{c^2} = -vt + \frac{vt'}{\gamma}$$

$$\frac{-xv}{c^2} + t + \frac{t'}{\gamma}$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2}\right)$$

Por simetría se obtiene

$$t = \gamma \left(t' - \frac{x'v}{c^2}\right)$$

## Referencias

- Velásquez, A. Oliveira, M. (2020). *Discutindo o modelo de Ptolomeu e sua equivalência com o modelo de Copérnico*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42, e20190293. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0293>
- Damasio, F. (2011). *O início da revolução científica: questões acerca de Copérnico e os epiciclos, Kepler e as órbitas elípticas*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(3), 3602. <https://doi.org/10.1590/S1806-11172011000300020>
- Peralta, J. Calles, A. Yépez, E. (2003). *El análisis de Fourier de las trayectorias planetarias y el modelo copernicano del sistema solar*. *Revista Mexicana de Física*, 49(3), 283-289. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0035-001X2003000300015](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0035-001X2003000300015)
- Gargiulo, M. (2019). *Algunas consideraciones acerca de la relación ciencia y filosofía en los escritos ptolemaicos: Un análisis desde su modelo teleológico de explicación*. *Archai*, 25, e02506. [https://doi.org/10.14195/1984-249X\\_25\\_6](https://doi.org/10.14195/1984-249X_25_6)
- Arribas, A. (1012) *Claudio Ptolomeo: El señor de los epiciclos*. <http://blogs.mat.ucm.es/shm/wp-content/uploads/sites/17/2012/05/Ptolomeo-2012.pdf>
- Pradas, J. (2012). *Astronomía geocéntrica [Imagen]*. Blogger.com. <https://onx.la/3a1e3>
- Smith, A. (1851). *Celestial Illustrations [Refraction, parallax, light & heat]*. *En Smith's Illustrated Astronomy*. <https://onx.la/be7bf>
- Luecking, Stephen. (2018). *Albrecht Dürer's Celestial Geometry*. *Math Horizons*. 25. 5-7. 10.1080/10724117.2018.1424456.
- Tossato, Claudemir. (2004). *Discussão cosmológica e renovação metodológica na carta de 9 de dezembro de 1599 de Brahe a Kepler*. *Scientiae Studia*. 2. 537-565. 10.1590/S1678-31662004000400005.

Bruno, G. (1981). *Sobre le infinito universo y los mundos*. (A. cappelletti, Trad.). Orbis. (Trabajo original publicado en 1548).

Galilei, G. (2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. (J. Román, Trad.; 1.<sup>a</sup> ed.). Losada. (Trabajo original publicado en 1638).

Euclides. (1991). *Elementos Libros I-IV*. (L. Vega, Trad.). Gredos. (Trabajo original publicado hacia el siglo III a.c.)

Kepler, J. (2014). *El secreto del universo*. (E. Rada, Trad.). Alianza. (Trabajo original publicado en 1596)

Copérnico, N. (2009). *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*. (C. Mínguez, Trad.). Tecnos. (Trabajo original publicado en 1543).

DIRAC, P. A. (1997). *Albert Einstein. Historical and Cultural Perspectives*. New York:

HOLTON, G. and Y. ELKANA.

Einstein, A. (1905). *SOBRE LA ELECTRODINAMICA DE LOS ´*. Annals of Physics.

Einstein, A. (1916). *SOBRE LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD*. Buenos aires: Alianza.

Fabio Vélez U. (2012). *Apuntes de Relatividad*. Bogotá: Corcas Editores.

Kepler, J. (1992). *Prodromus Dissertationum Cosmographicarum continens*. Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Kepler, J. (1994). *El Secreto del universo*. Madrid: Altaya, S.A.

Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican Revolution*:. Cambridge, MA: Harvard University Press: Planetary Astronomy in the Development of Western Thought (2nd ed).