



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

**ANÁLISIS Y CONTEXTUALIZACIÓN SOBRE EL DESARROLLO DE
ALGUNAS PROPIEDADES DE ESPIRALES ARQUIMEDIANAS Y
LOGARÍTMICA**

ELVIS ANTONIO PARRA VARGAS

LINA TATIANA RODRIGUEZ BERNAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ. D.C

2023

**ANÁLISIS Y CONTEXTUALIZACIÓN SOBRE EL DESARROLLO DE
ALGUNAS PROPIEDADES DE ESPIRALES ARQUIMEDIANAS Y
LOGARÍTMICA**

ELVIS ANTONIO PARRA VARGAS

Código 2016240058

Cédula 1016001796

LINA TATIANA RODRIGUEZ BERNAL

Código 2016240070

Cédula 1022434374

Trabajo grado presentado como requisito parcial
Para optar por el título de Licenciados en Matemáticas

Asesor:

ORLANDO AYA CORREDOR

Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ. D.C

2023

Dedicatoria

A mi madre y a doña Adelita, por su apoyo y amor incondicional

Agradecimientos

Gracias a la vida por darme la oportunidad de soñar y de luchar por las metas y objetivos propuestos

Gracias a mi madre y a mi abuela por el esfuerzo y sacrificio que han hecho a lo largo del tiempo, por brindarme las herramientas y la posibilidad de salir adelante, sin ellas esto no hubiera sido posible

Gracias a mi familia, Karen, Has, Cony, Marina, Rafa, Sergio, Jenny, Luis, don Aníbal, a todos, mil gracias, por estar ahí, en cada momento que lo necesite

Gracias a la Universidad Pedagógica Nacional por abrirme sus puertas y darme la oportunidad de formarme como profesional

Gracias a todos mis compañeros y amigos con los que sufrimos y reímos en esta etapa de nuestras vidas, en especial gracias a Yenny Paola Vallejo quien siempre estuvo a mi lado en este proceso

Gracias a mi compañera de trabajo de grado Lina Tatiana por su dedicación y esfuerzo

Gracias a nuestro profesor y asesor Orlando Aya Corredor por su paciencia y dedicación, quien nos brindó su conocimiento y experiencia para la culminación de este proyecto.

Elvis Antonio Parra Vargas

Dedicatoria

A mis padres, hermana, abuelitas y peluditos...

Agradecimientos

A mis padres y a mi hermana, quienes siempre me han apoyado en cada paso y me motivaron a nunca desistir. Gracias por su amor incondicional y por ser mi mayor fuente de inspiración.

A mi abuelita y tía Cecilia, mis segundas mamás y mi mayor tesoro, gracias por su apoyo incondicional, palabras de aliento, comprensión y amor han sido mi refugio en los momentos más desafiantes.

A mis amigos y compañeros con los que he compartido risas, desafíos y momentos inolvidables durante estos años de universidad. Los llevo en mi corazón colegas Claudia Laverde, mi compañera de aventuras y Luis Bohórquez.

A la Universidad Pedagógica Nacional y a mis profesores que me han brindado no solo educación, sino un espacio para desarrollarme como individuo y profesional. Me llevo experiencias inolvidables y huellas de aquellos maestros que dentro de sus enseñanzas y consejos me inspiraron a apreciar esta profesión.

A mi compañero y colega Elvis Parra, quien de la mano trabajamos en este documento, gracias por las explicaciones, risas y largas charlas. Valoro mucho tu amistad y espero perdure con el tiempo.

Al profe Orlando Aya por su dedicación, compromiso y acompañamiento durante la realización de este trabajo, por cada risa y regaño necesario, mil y mil gracias.

Lina Tatiana Rodríguez Bernal

RESUMEN

En el campo de la enseñanza de las matemáticas, y más específicamente en el de la geometría y el cálculo dentro de un programa de formación inicial de profesores, es común que en los cursos se deba abordar el tema de curvas planas, y cuyo estudio busque desarrollar, recrear y ejecutar demostraciones, ejercicios y construcciones básicas entorno a estas. Ahora bien, debido a las bases conceptuales, tanto desde lo geométrico como desde lo analítico, que son necesarias para el estudio y comprensión de las familias de curvas especiales, como es el caso de las espirales, en algunos casos, su estudio o bien se omite o no son suficientemente trabajadas y se reduce a una descripción somera y que no responde a los objetivos anteriormente propuestos. De otra parte, si el tema resulta de interés para un docente en formación, desde lo disciplinar se evidencia una carencia de material bibliográfico sobre el tema y particularmente en castellano.

Por lo anterior, en este documento se realiza un barrido de algunas espirales especiales desde su contexto histórico, sus aplicaciones y usos en distintas disciplinas, rescatando el protagonismo que las espirales han tenido, a través del tiempo, en el desarrollo de distintos problemas matemáticos y no matemáticos. Además, se aborda el análisis matemático de algunas propiedades de las espirales arquimedianas y logarítmica, se incluyen ilustraciones y construcciones de ellas para la comprensión del lector que se encuentre interesado en el tema.

Palabras clave: Espiral, espiral de Arquímedes, espiral logarítmica, espirales arquimedianas, propiedades.

ABSTRACT

In the field of mathematics teaching, and more specifically in the field of geometry and calculus within an initial teacher training program, it is common that courses should address the topic of plane curves, and whose study seeks to develop, recreate and execute demonstrations, exercises, and basic constructions around these. However, due to the conceptual bases, both geometrically and analytically, which are necessary for the study and understanding of the families of special curves, as is the case of spirals, in some cases, their study is either omitted or not sufficiently worked and is reduced to a brief description that does not respond to the previously proposed objectives. On the other hand, if the subject is of interest to a teacher in

training, from the disciplinary point of view there is a lack of bibliographic material on the subject, especially in Spanish.

Therefore, in this document a sweep of some special spirals is made from their historical context, their applications and uses in different disciplines, and rescuing the prominence that spirals have had through time in the development of different mathematical and non-mathematical problems. In addition to the mathematical analysis of some properties of the Archimedean and logarithmic spirals, illustrations, and constructions of them are included for the understanding of the reader who is interested in the subject.

Keywords: Spiral, Archimedean spirals, logarithmic spiral, properties.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
JUSTIFICACIÓN	3
METODOLOGÍA	5
OBJETIVOS	7
Objetivo general.....	7
Objetivos específicos	7
CAPÍTULO 1. PRELIMINARES	8
1.1 Curvas Geométricas	8
1.2 Curva plana	8
1.3 Curva mecánica.....	9
1.4 Espirales	10
1.4.1 Partes de una espiral.....	12
1.5 Ecuaciones y coordenadas	13
1.5.1 Ecuaciones paramétricas	13
1.5.2 Ecuación paramétrica de una espiral.....	14
1.5.3 Coordenadas y ecuación polar.	14
1.5.4 Ecuación polar de una espiral	15
1.5.5 Relación de coordenadas cartesianas y polares.	15
1.6 Estudio de propiedades	16
1.6.1 Longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal	16
1.6.2 Longitud de curva	17
1.6.3 Curvatura.....	18
1.6.4 Radio de curvatura.	19
1.6.5 Área barrida por el radio vector	20
1.6.6 Área encerrada	21
1.6.7 Cuadratura del círculo	21
1.6.8 Progresión aritmética	22
1.6.9 Progresión geométrica	23
CAPÍTULO 2. ESPIRAL DE ARQUÍMEDES	24

2.1 Descripción	24
2.2 Contexto histórico	24
2.3 Espiral, arte y cotidianidad	29
2.4 Ecuación Polar de la espiral	30
2.5 Espiral de Arquímedes y la progresión aritmética	33
2.6 Parametrización.....	35
2.7 Ecuación cartesiana de la espiral	36
2.8 Algunas propiedades de la espiral de Arquímedes	37
2.8.1 Propiedad 1. La espiral de Arquímedes es de paso constante.....	37
2.8.2 Propiedad 2. Longitud de los segmentos subnormal y subtangente	38
2.8.3 Propiedad 3. Longitud de los segmentos tangente y normal	39
2.8.4 Propiedad 4. Longitud curva.....	39
2.8.5 Propiedad 5. La curvatura de la espiral de Arquímedes	42
2.8.6 Propiedad 6. La rectificación de la circunferencia.....	43
2.8.7 Propiedad 7. El área encerrada por la espiral y el eje polar en su primera vuelta equivale a la tercera parte del área del círculo que la encierra.....	45
2.8.8 Propiedad 8. El área encerrada por la espiral y el eje polar, entre la primera y segunda espira equivale a $1/2$ del área del círculo que la encierra.	46
2.8.9 Propiedad 9. El área barrida en la segunda vuelta está a razón de $7/12$ con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector	50
2.8.10 Propiedad 10. Área barriada.	52
2.8.11 Propiedad 11. Cuadratura del círculo.....	53
CAPÍTULO 3: ESPIRALES ARQUIMEDIANAS.....	56
3.1 Espiral hiperbólica	56
3.1.1 Descripción	56
3.1.2 Ecuaciones paramétricas	59
3.1.3 Ecuación cartesiana.....	60
3.1.4. Algunas propiedades de la espiral hiperbólica.....	61
3.1.4.1 Propiedad 1. La longitud de la subtangente en el punto P es constante e igual a b	61
3.1.4.2 Propiedad 2: Longitud para la tangente, subnormal y la normal .	61

3.1.4.3 Propiedad 3. Curvatura	63
3.1.4.4 Propiedad 4. Radio de curvatura	63
3.1.4.5 Propiedad 5. Longitud curva.....	65
3.1.4.6 Propiedad 6. Área barrida por el radio vector	67
3.1.4.7 Propiedad 7. Longitudes de arco constantes	69
3.2 Espiral de Fermat	70
3.2.1 Descripción	70
3.2.2 Arte y cotidianidad.....	72
3.2.3 Ecuaciones paramétricas	74
3.2.4 Ecuación cartesiana.....	74
3.2.5 Algunas propiedades de la espiral de Fermat	75
3.2.5.1 Propiedad 1. Longitud de la subtangente y la subnormal	75
3.2.5.2 Propiedad 2. Longitud de la tangente y la normal	76
3.2.5.3 Propiedad 3. Curvatura	78
3.2.5.4 Propiedad 4. Radio de curvatura.....	79
3.2.5.5 Propiedad 5. Longitud de curva	80
3.2.5.6 Propiedad 6. Área barrida por el radio vector	81
3.2.5.7 Propiedad 7. Área encerrada por la primera espira y el eje polar es la mitad del área del círculo que la encierra	83
3.2.5.8 Propiedad 8. Áreas iguales.....	83
3.2.5.9 Propiedad 9. Área entre arcos consecutivos	85
3.3 Espiral lituus	87
3.3.1 Descripción	87
3.3.2 Ecuaciones paramétricas	89
3.3.3 Ecuación cartesiana.....	89
3.3.4 Algunas propiedades de la espiral lituus.....	90
3.3.4.1 Propiedad 1. Longitud del segmento subtangente	90
3.3.4.2 Propiedad 2. Longitud de los segmentos tangente, subnormal y normal	91
3.3.4.3 Propiedad 3. Curvatura	92
3.3.4.4 Propiedad 4. Radio de curvatura.....	94

3.3.4.5 Propiedad 5. Longitud de curva	94
3.3.4.6 Propiedad 6. Puntos de inflexión en la rama positiva de la curva.	96
3.3.4.7 Propiedad 7. Área barrida por el radio vector r	97
3.3.4.8 Propiedad 8: El área del sector circular OPQ es constante e igual a $\frac{b^2}{2}$ siempre que $0 < \theta < 2\pi$	98
CAPÍTULO 4: ESPIRAL LOGARÍTMICA	100
4.1 Descripción	100
4.2 Contexto histórico	100
4.3 Espiral, arte y cotidianidad	103
4.4 Ecuación polar	105
4.5 Ecuaciones paramétricas	106
4.6 Ecuación cartesiana.....	107
4.7 La espiral logarítmica y la progresión geométrica.....	107
4.8 Algunas propiedades de la espiral logarítmica	111
4.8.1 Propiedad 1. Longitud de la subtangente y la subnormal	111
4.8.2 Propiedad 2. Longitud de la tangente y la normal	112
4.8.3 Propiedad 3. Longitud de curva	113
4.8.4 Propiedad 4. Curvatura	119
4.8.5 Propiedad 5. Autosimilitud	120
4.8.6 Propiedad 6. Relación de homotecia.....	122
4.8.7 Propiedad 7. Equiangular.....	123
4.8.8 Propiedad 8. El paso de la espiral no es constante.....	124
4.8.9 Propiedad 9. Área barrida por el radio vector	126
REPOSITORIO DE ESPIRALES	128
REFLEXIONES Y CONCLUSIONES	129
REFERENCIAS	133
ANEXOS	135
Anexo 1: Longitud de la tangente (T), Longitud de la normal (N), longitud de la subtangente (S_T) y longitud de la subnormal (S_N) para una curva en coordenadas polares.	135

Anexo 2: La curvatura k para una curva $r = f(\theta)$ expresada en coordenadas polares.	140
Anexo 3: Resolución de la integral de la ecuación 2-10 para hallar la longitud de curva espiral de Arquímedes.....	143
Anexo 4: Expresión de Arquímedes para hallar el valor del área de cada anillo de la espiral uniforme.	145
Anexo 5: Expresión para hallar el valor del área barrida por el radio vector que genera la espiral.....	146
Anexo 6: Resolución de las integrales (I) y (II) para hallar la longitud de curva de la espiral hiperbólica.....	148

TABLA DE FIGURAS

FIGURA 1-1: Clasificación de algunas curvas geométricas	10
FIGURA 1-2: Espiral de dos centros.....	12
FIGURA 1-3: Espiral de tres centros.....	12
FIGURA 1-4: Espiral de un centro.....	13
FIGURA 1-5: Conexión entre sistemas coordenados cartesiano y polar.....	16
FIGURA 1-6: Líneas notables de una curva.....	16
FIGURA 1-7: Conexión vectores tangentes unitarios en puntos equidistantes de C	18
FIGURA 1-8: Representación de la cuadratura del círculo.....	22
FIGURA 2-1: Espiral de Arquímedes.....	24
FFIGURA 2-2: Trisección del ángulo AOB	26
FFIGURA 2-3: Método de exhaución por medio de sectores circulares en la espiral	28
FIGURA 2-4: Espiral cónica de Pappo.....	29
FIGURA 2-5: Espiral Clelie	29
FIGURA 2-6: Espiral Doppler.....	29
FIGURA 2-7: Caparazón de caracol.....	29
FIGURA 2-8: Tornillo de Arquímedes	29
FIGURA 2-9: Movimiento de un punto en el plano polar, que genera la espiral de Arquímedes	31
FIGURA 2-10: La espiral de Arquímedes es de paso constante	34
FIGURA 2-11: Representación gráfica de la espiral de Arquímedes cuando se varía el parámetro a	35
FIGURA 2-12: Segmentos tangentes, subtangente, normal y subnormal de la espiral de Arquímedes, para un punto P que pertenece a la curva.....	38
FIGURA 2-13: Rectificación de la circunferencia	43
FIGURA 2-14: Área encerrada por la primera espira y el eje polar.....	45
FIGURA 2-15: Área de la segunda espira o anillo.....	46
FIGURA 2-16: Área total o área barrida por el radio vector hasta la segunda vuelta.	50
FIGURA 2-17: Área barrida por el radio vector de la espiral para un ángulo $\theta = 11\pi/6$	53
FIGURA 2-18: Cuadratura del círculo por medio de la espiral de Arquímedes.	53

FIGURA 2-19: Media geométrica entre b y h	54
FIGURA 2-20: Cuadrado de lado $a = \sqrt{\pi r}$	54
FIGURA 3-1: Espiral hiperbólica rama positiva	57
FIGURA 3-2: Espiral hiperbólica generada mediante una inversión circular aplicada a la espiral de Arquímedes.....	57
FIGURA 3-3: Proyección cónica plana de una hélice circular	58
FIGURA 3-4: Perspectiva superior de una escalera en forma de caracol.....	58
FIGURA 3-5: Espiral hiperbólica como lugar geométrico	58
FIGURA 3-6: Espiral hiperbólica cuya asíntota horizontal es $y = b$	60
FIGURA 3-7: Segmento tangente, subtangente, normal y subnormal para un punto P de la espiral hiperbólica.	62
FIGURA 3-8: Relaciones trigonométricas para el ángulo x	67
FIGURA 3-9: Área comprendida entre la espiral hiperbólica y dos radio vectores	68
FIGURA 3-10: Las longitudes de arco de todas las circunferencias (centradas en el polo) medidas desde la curva hasta el eje polar son iguales a b	69
FIGURA 3-11: Puntos de partida A , B y C de corredores en una pista atlética circular, determinados por la espiral hiperbólica, tal que $D_1 = D_2 = D_3$	70
FIGURA 3-12: Espiral de Fermat.....	70
FIGURA 3-13: Las ramas positiva y negativa de la espiral de Fermat son simétricas respecto a al origen polar.	71
FIGURA 3-14: Inversión circular de la rama positiva de la espiral lituus	71
FIGURA 3-15: Las regiones encerradas entre espiras consecutivas y el eje polar después de la primera vuelta tienen la misma área.	72
FIGURA 3-16: Espiral de Fermat a la izquierda, a la derecha patrón filotáctico que genera un efecto óptico de espirales entrecruzadas.	73
FIGURA 3-17: Flor margarita	73
FIGURA 3-18: Torre de energía solar en el proyecto de energía solar Crescent Dunes.....	74
FIGURA 3-19: Longitud de segmentos subtangente, tangente, subnormal y normal, para un punto de la espiral de Fermat	78
FIGURA 3-20: Área barrida por el radio vector en la primera vuelta.....	81
FIGURA 3-21: Área barrida por el radio vector hasta la segunda vuelta	82

FIGURA 3-22: Área barrida por el radio vector hasta la tercera vuelta	82
FIGURA 3-23: El área encerrada por la primera espira y el eje polar es la mitad del área del círculo que la encierra.	83
FIGURA 3-24: Regiones encerradas entre espiras consecutivas y el eje polar tienen la misma área.	84
FIGURA 3-25: Áreas determinadas por arcos consecutivos entre dos radio vectores son iguales	85
FIGURA 3-26: Rama positiva de la espiral lituus	88
FIGURA 3-27: Inversión circular de la espiral de Fermat por medio de la cual se genera la espiral lituus	88
FIGURA 3-28: Longitud de segmentos subtangente, tangente, subnormal y normal, para un punto P de la espiral lituus.....	92
FIGURA 3-29: Área barrida por el radio vector.....	98
FIGURA 3-30: Área del sector circular OPQ	98
FIGURA 4-1: Espiral logarítmica.....	100
FIGURA 4-2: Evoluta logarítmica y espiral logarítmica.....	102
FIGURA 4-3: Curva pedal logarítmica y espiral logarítmica.....	102
FIGURA 4-4: Curva cáustica y la espiral logarítmica.....	102
FIGURA 4-5: Espiral logarítmica y su inversión circular que genera nuevamente una espiral logarítmica	102
FIGURA 4-6: Curva de persecución y espiral logarítmica.....	103
FIGURA 4-7: Concha nautilus	103
FIGURA 4-8: Estilo de mosaico que adorna una villa romana en Corinto en el siglo II D.C....	104
FIGURA 4-9: Mecanismo kerf – canceling para cortadores láser.....	104
FIGURA 4-10: Engranaje de bisagra en espiral logarítmica.	105
FIGURA 4-11: Brazos de la galaxia Whirlpool	105
FIGURA 4-12: El paso AB, BC, CD, \dots de la espiral logarítmica.....	108
FIGURA 4-13: Construcción de espiral mediante triángulos rectángulos.	109
FIGURA 4-14: Triángulo rectángulo extraído de la espiral logarítmica.....	109
FIGURA 4-15: Construcción de triángulo semejante.....	110

FIGURA 4-16: Longitud de segmentos subtangente, tangente, subnormal y normal, para un punto dado P de la espiral logarítmica.....	113
FIGURA 4-17: Longitud de la segunda espiro para la curva $r = (1.2)^\theta$	115
FIGURA 4-18: Longitud de curva determinada por los puntos A y B para $13\pi/6 < \theta < 17\pi/6$	116
FIGURA 4-19: Movimiento en sentido horario para la espiral logarítmica, donde la curva da infinitas vueltas alrededor del origen.	116
FIGURA 4-20: Espiral logarítmica con $b > 1$, $t > 0$	117
FIGURA 4-21: Espiral logarítmica con $0 < b < 1$, $t > 0$	117
FIGURA 4-22: Espiral logarítmica con $b = 2^{\frac{1}{2\pi}}$	118
FIGURA 4-23: Rotación de la espiral logarítmica un ángulo $\sigma = 210^\circ$	121
FIGURA 4-24: Espiral logarítmica con ángulos de inclinación $\sigma = 20^\circ$	122
FIGURA 4-25: El ángulo α determinado por el radio vector y la recta tangente a la curva para cualquier punto de la espiral logarítmica, es constante.....	123
FIGURA 4-26: Espiral logarítmica con $b = 1.2$, donde se aprecia que el ángulo α es constante	124
FIGURA 4-27: Espirales logarítmicas modificando el parámetro b	125
FIGURA 5-1: A la izquierda listado de construcciones. En la ventana principal, previsualización de las mismas.....	128
FIGURA A-1.1: Segmento tangente de una curva polar por el punto P de la curva.....	135
FIGURA A-1.2: Segmento normal de una curva polar por el punto P de la curva.....	136
FIGURA A-1.3: Líneas notables	136
FIGURA A-1.4: Segmentos tangente, subtangente, normal y subnormal en una espiral hiperbólica para un punto P que pertenece a la curva.	139

ÍNDICE TABLAS

TABLA 1: Se muestra el valor del área encerrada entre espiras consecutivas y el eje polar, para los primeros siete anillos de la espiral	48
TABLA 2: Valor del área encerrada para las primeras espiras o anillos usando la fórmula de Arquímedes	49
TABLA 3: Área barrida por el radio vector en las primeras siete vueltas.	51
TABLA 4: Espirales arquimedianas generadas por la ecuación 3.1.	56
TABLA 5: Área barrida por el radio vector en la espiral de Fermat para las primeras siete vueltas.	84
TABLA 6: Se presentan los datos para el área que encierran espiras consecutivas después de la primera vuelta en la espiral de Fermat.	85
TABLA 7: Registro de datos obtenidos en la construcción de triángulos semejantes en la espiral logarítmica.	110
TABLA 8: Cociente o razón entre los valores de áreas consecutivas.....	146
TABLA 9: Cambio del área barrida.....	147

INTRODUCCIÓN

El presente documento de Trabajo de Grado, requisito para optar por el título de Licenciados en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional, presenta el estudio de algunas propiedades de las espirales de Arquímedes, arquimedianas (hiperbólica, Fermat y litus) y logarítmica, mediante el uso de las herramientas conceptuales y procedimentales del cálculo y la geometría analítica. En varios momentos del desarrollo se emplearon construcciones realizadas en GeoGebra® para conjeturar, ejemplificar y comprobar algunas propiedades de las espirales y apoyar la validación matemática de estas. Además, para el desarrollo del trabajo se realizó una revisión de la literatura del campo frente a estas curvas a lo largo de la historia y algunas de sus aplicaciones en diferentes disciplinas, tales como, el arte, la biología, el diseño, y la medicina, entre otras; algunos de estos aspectos son reportados.

Teniendo en cuenta el anterior panorama, se planteó la elaboración de este documento en seis capítulos. En el primero, se expone la justificación y metodología del trabajo y se presentan los objetivos, tanto el general como los específicos que lo orientan. En el segundo, se desarrollan los elementos generales del marco teórico. En él se presentan los conceptos básicos para el estudio general de las espirales y se encuentra estructurado en cuatro partes. En la primera, se hace una descripción sucinta de curvas geométricas donde se desglosan de acuerdo con algunas clasificaciones dadas por las fuentes consultadas (curvas planas, técnicas, abiertas, entre otras). En la segunda, se hace un acercamiento a la definición de espiral, donde se abordan diferentes fuentes desde la antigüedad hasta el presente. En la tercera, se presentan las partes y componentes generales de una curva espiral. Finalmente, en la cuarta, se relaciona lo que en el dibujo técnico se denomina un esquema gráfico con la finalidad de situar a la espiral y su familia en la clasificación que, desde esta disciplina, se realiza de las curvas.

En el tercer capítulo, se aborda la espiral de Arquímedes y se estructura con tres apartados. El primero, un contexto histórico, el cual pretende que el lector conozca y situé el protagonismo que la espiral ha tenido a través del tiempo desde el estudio realizado por Arquímedes de Siracusa referente a los problemas clásicos de la geometría, hasta el desarrollo de curvas análogas a esta. En el segundo, se relata, grosso modo, con ayuda de algunas ilustraciones, el uso de la espiral en distintas disciplinas (el arte, la biología, arquitectura, arte entre otros). Para el tercero,

denominado: desarrollo matemático de la espiral, se inicia presentado sus ecuaciones en coordenadas polares y en paramétricas, para posteriormente realizar el análisis y resolución de algunas propiedades específicas, como, por ejemplo, la curvatura, la longitud de curva, áreas, etc. En este capítulo se incluyeron algunas tablas y construcciones auxiliares que posibilitaron realizar algunas generalizaciones y demostraciones.

En el cuarto y quinto capítulo se realiza el estudio de las espirales arquimedianas (hiperbólica, Fermat y litus), y logarítmica respectivamente, estas son abordados en el mismo orden de estudio en que fue tratada la espiral de Arquímedes. Finalmente, en el sexto capítulo, se presentan las conclusiones y reflexiones del trabajo; teniendo en cuenta el nivel de desarrollo de los objetivos planteados, metodología, las singularidades y hallazgos encontrados, además, los aportes y aprendizajes que dejó el trabajo de grado en la formación de los autores como futuros licenciados en matemáticas.

JUSTIFICACIÓN

Las espirales, con su presencia en la naturaleza, el arte y las matemáticas capturan el interés, la curiosidad y el asombro de quienes alguna vez las han estudiado. Explorar su geometría, patrones y relaciones matemáticas ha sido un trabajo que a lo largo del tiempo ha permitido avances en distintas disciplinas. Ahora bien, ¿Todos reconocen una espiral por su forma?, si bien la forma de las espirales ha estado presente en distintas situaciones a través del tiempo en nuestra cotidianidad, puede ser que no se reconozcan como tal; pero si se va un poco más allá, realmente sabemos ¿Qué clase de espirales existen? o ¿Qué propiedades matemáticas tienen?, estas son preguntas que en el presente documento se pretenden abordar y aproximar algunas respuestas.

La inquietud surge porque, dentro del proceso de formación vivido como docentes de matemáticas, se estudiaron algunas curvas en el curso de Geometría Analítica y algunos elementos generales de las curvas en el espacio de Cálculo en Varias Variables, pero no se logró, ni por parte de los docentes de los espacios, ni de nosotros como docentes en formación, establecer vínculos directos entre la parametrización general de las curvas y los elementos analíticos de las mismas, y ni que decir de su desarrollo histórico o sus aplicaciones.

Las espirales arquimedianas y logarítmica, por ejemplo, han jugado un papel importante a través de los años, como lo menciona (Castro, 2019) al afirmar que estas han tenido una presencia significativa en la historia de la humanidad; el hombre prehistórico, por ejemplo, solía dibujar espirales en sus pinturas rupestres representando el ciclo de nacimiento, muerte y renacimiento, hasta nuestros días donde se emplea para modelar el crecimiento de algunas plantas y las formas de algunas galaxias. Como afirma (Perez, 2006) no existe ninguna cultura que no haya utilizado una espiral como elemento simbólico, mágico o simplemente ornamental, relacionándola con el crecimiento o al laberinto como espacio para perderse y encontrarse, son formas que tienen una gran riqueza simbólica y espiritual. (Cano, y otros, 2016).

Teniendo en cuenta lo anterior, se propuso desarrollar un recurso bibliográfico que contenga el estudio de algunas propiedades de las espirales partiendo de la definición, algo de su historia, construcciones y el paso a paso de la solución de cada una las propiedades planteadas como objeto de estudio. El ánimo final es brindar un consolidado de estas propiedades que pueda servir de apoyo o consulta para quienes estén interesados en el tema. Lo anterior en virtud de que

si bien existe, aparentemente, mucha información, esta es muy poco detallada y particularmente si se busca en idioma español; ahora bien, en otros idiomas, si bien hay un poco más de detalles e información, las formas empleadas para la representación algebraica, corresponden a casos muy particulares que no posibilitan estudiar las espirales, dado que estas presentan un desarrollo de una manera específica de la espiral y no desde su forma general y las propiedades y resultados de ellas son enunciadas sin una demostración u omitiendo detalles formales y procedimentales que resultan relevantes.

METODOLOGÍA

La investigación exploratoria, según (Morales, 2015), es un tipo de metodología que consiste en proveer una referencia o incrementar el conocimiento sobre una temática poco conocida, estudiada, o que si bien puede ser conocida no cuenta con el detalle requerido para la comprensión por parte del público interesado en ello. Debe destacarse que este tipo de investigación no pretende determinar las conclusiones del tema estudiado, sino servir de fundamento a otras potenciales investigaciones. Sin embargo, cuando se pretende dar conclusiones lo que se busca realmente es dar claridad sobre los hallazgos presentados en estudios o investigaciones previas.

Para el presente trabajo se empleó una metodología de investigación exploratoria que abarcó tres etapas claves:

1. Revisión bibliográfica
2. Desarrollo matemático de las propiedades y construcciones de las espirales
3. Reflexiones y conclusiones

Inicialmente, se realizó una revisión bibliográfica que abarcó una amplia gama de fuentes, incluyendo textos matemáticos de Cálculo y Geometría como el Cálculo en Varias Variables de Stewart, Thomas, Ayres, entre otros y en Geometría como Geometría Analítica de Lehmann, además de textos clásicos como *The Works of Archimedes*, y *Tratado de Curvas especiales notables*, que registran por lo menos un siglo de haber sido publicados. Siguiendo esta misma línea, en otro idioma, se consultaron textos como *The curves of the life, Spirals, logaritmska spirala, A catalolog special plane curves, A handbook on curves and properties*, entre otros libros que, por su contenido, contribuyen a una comprensión de la historia, evolución y contexto en el que se desarrollaron las espirales, además, de un contraste de la notación matemática e ilustraciones de estas.

Otro recurso empleado fueron los portales y proyectos educativos tal como el Proyecto Nicolás, recurso elaborado por estudiantes de la Universidad de Chile del área de investigación en donde realizaron una exploración matemática e histórica de la espiral. Otras fuentes alternas fueron: trabajos de grado de pregrado y maestría, buscadores académicos, diccionarios matemáticos y literarios, bibliotecas virtuales, entre otras con el fin de trazar la trayectoria

matemática e histórica de las espirales a través del tiempo teniendo en cuenta diferentes contextos, usos y representaciones gráficas.

Posteriormente, se definieron los objetivos del estudio, centrándose en aspectos específicos como el desarrollo de propiedades matemáticas, un contexto histórico y algunas aplicaciones en diversas disciplinas. El análisis se llevó a cabo desde dos perspectivas complementarias: visual y matemática. Se emplearon algunas ilustraciones y mediante el software matemático GeoGebra ® se verificaron algunas propiedades, en aras de apoyar el desarrollo, estudio y conceptualización de las espirales y con la fundamentación disciplinar derivada de la Geometría Analítica, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se procede a demostrar algunas propiedades de las espirales usando la notación actual.

OBJETIVOS

A continuación, se presentan los objetivos para el desarrollo del presente trabajo, un objetivo general y tres específicos que gravitan alrededor de él.

Objetivo general

Elaborar un estudio de las propiedades matemáticas de las espirales arquimedianas y logarítmica, teniendo en cuenta su historia y desarrollo en otras disciplinas.

Objetivos específicos

- Consultar, recopilar y seleccionar información de distintas fuentes sobre el tema a estudiar: las espirales.
- Establecer conexiones con otras disciplinas (física, diseño, arquitectura, botánica, etc.) y evidenciar su uso implícito en situaciones de la vida cotidiana.
- Construir algunas representaciones gráficas que permitan visualizar, estudiar y verificar las espirales y sus propiedades.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

En este apartado se establecen algunos conceptos previos para abordar los objetivos de este estudio, proporcionando una visión clara y sistemática de los conocimientos ya existentes sobre las espirales. A lo largo de este capítulo, se consultaron diferentes textos, portales y trabajos académicos relacionados con el estudio de las espirales y que fueron descritos de manera general en el apartado de metodología.

1.1 Curvas Geométricas

Se define, de manera general, a una línea como curva geométrica cuando se aparta constantemente de la dirección recta sin formar ángulos, y la trayectoria de los puntos que la forman es continua y, además, cumple con una determinada norma.

En algunos textos de geometría analítica las curvas se clasifican en dos grupos, según (Gomez E. B., 2012) las denominadas planas y las alabeadas, las cuales pueden ser caracterizadas de la siguiente manera.

- **Curvas planas:** Son curvas bidimensionales, con todos sus puntos situados en un mismo plano. Las curvas planas pueden ser cerradas o abiertas. Dependiendo de la forma de generarse que tengan, las curvas planas se dividen en curvas técnicas y curvas cónicas, que poseen propiedades específicas y diferentes entre sí.
- **Curvas alabeadas:** Son curvas tridimensionales. Se generan mediante el movimiento de un punto que sigue cualquier ley o ecuación en su movimiento, la cual constituye una función continua en un cierto intervalo. (p.108).

Para el estudio en cuestión, se abordará el desarrollo de una curva considerada como técnica: la espiral.

1.2 Curva plana

Matemáticamente se puede definir una curva plana desde los siguientes elementos:

Se denomina función en dos dimensiones a una aplicación que relaciona un subconjunto de \mathbb{R} , con un vector del espacio vectorial \mathbb{R}^2 , de la forma:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x(t), y(t))$$

Se le llama curva en el plano definida por f al conjunto de puntos P tal que el vector \overline{OP} es una imagen de f , $f(t_0) = \overline{OP}$. Esta forma de definir la curva se le denomina definición en paramétricas. En este sentido, y en cuanto a su representación algebraica, una curva plana se puede representar de las siguientes formas:

Forma implícita:	$f(x, y) = 0$
Forma explícita:	$y = f(x)$
Forma paramétrica:	$x = x(t), y = y(t)$, cuyo parametro es t

1.3 Curva mecánica

Según (Mosquera, 2013) Descartes proporcionó una definición para curva mecánica, que en términos actuales es la siguiente: Una curva mecánica, es una curva que se tiene que imaginar cómo descrita por dos movimientos separados e independientes cuya relación no admite una relación exacta, esto es, una ecuación polinómica. Este tipo de curvas son: la espiral, la cuadratriz, la trisectriz, la conoide, la cisoide, entre otras.

Finalmente, a través del siguiente esquema conceptual, desde el dibujo técnico, se puede apreciar una visión panorámica y organizada de la clasificación de las curvas geométricas, resaltando sus subclases y algunos ejemplos de estas. Ver Figura 1-1. Posteriormente se profundizará en lo que respecta al estudio de la familia de espirales, y se visualizaran las conexiones de unas curvas con otras.

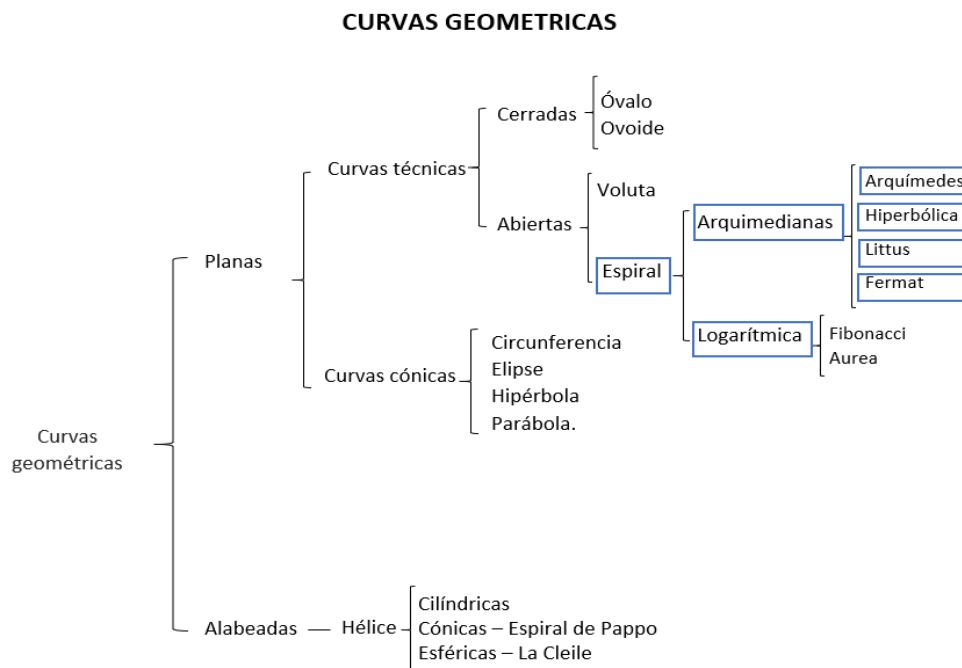


Figura 1-1: Clasificación de algunas curvas geométricas

Fuente: Adaptación de Curvas geométricas de <https://manuplastica.wixsite.com/dibujar/curvas-geometricas>

1.4 Espirales

Las espirales matemáticas son curvas que han intrigado y fascinado a matemáticos, científicos y artistas a lo largo de la historia. Su forma elegante y propiedades las convierten en una de las estructuras geométricas más atractivas y simbólicas. Desde las galaxias espirales en el universo hasta las conchas de los caracoles en la naturaleza, las espirales están presentes en una gran variedad de contextos (Gardner, 1961)

A lo largo del tiempo se han otorgado distintas definiciones a las espirales, estas difieren de acuerdo con el campo de análisis y el texto que se consulte. De las fuentes que se consultaron, durante el proceso de estudio, se obtuvieron las siguientes definiciones que se consideran evidencian la dificultad de formalizar una definición de manera general y en particular para las espirales aun cuando teóricamente se conciba que una definición debería estar constituida por los invariantes del objeto.

Definiciones de diccionarios literarios y matemáticos:

- Real academia de la lengua española (RAE): Una espiral es una curva que da indefinidamente vueltas alrededor de un punto, alejándose más en cada una de ellas.

- (Edition, Encyclopedia Britannica Eleventh, 1970): Una espiral es una curva que se enrolla alrededor del origen.
- The American Heritage Dictionary: Lugar geométrico de un punto que se mueve alrededor de un centro fijo a una distancia monótonamente creciente o decreciente constante (2022, s.p.).

Las anteriores definiciones proporcionan una idea general, señalando algunos aspectos clave como la forma y el patrón de movimiento característico. Al mencionar el punto central y el cambio constante en la distancia alrededor de este punto, se resalta una característica distintiva de las espirales.

Ahora, en atención al desarrollo histórico, se presenta la definición de Arquímedes de Siracusa, quien estudio a detalle la estructura y algunas de las propiedades de una de las espirales más importantes, a la que se le atribuye su nombre. Cabe anotar que la definición es una traducción al lenguaje actual y fue expuesta en su obra *de las espirales*.

Arquímedes de Siracusa:

“Si una línea recta que permanece fija en un extremo, se le hace girar en el plano con velocidad constante, hasta hacerla volver de nuevo a la posición de la que ha partido, y junto con la recta que gira, se mueve un punto sobre la recta con velocidad constante comenzando por el extremo fijo, el punto describe en el plano una espiral" (s.f)

Ahora bien, tener una noción sobre la definición de las espirales en otras disciplinas aporta una perspectiva más amplia y enriquecedora sobre estas. Por ejemplo, desde el campo artístico, se destaca como elemento estético y expresivo en diversas obras de arte en las cuales las espirales han sido empleadas para transmitir sensaciones de movimiento, dinamismo y armonía visual. En el dibujo técnico, se define a la espiral como una curva plana, abierta y/o continua que se forma en expansión por un punto que se desplaza de manera uniforme a lo largo de una recta, estando esta fija en un punto por el cual gira con un valor angular constante.

Por otro lado, en la física, según (Lorente, 2006) la espiral básica es considerada una curva mecánica generada por una superposición de dos movimientos, uno radial uniforme y uno circular también uniforme. La definición de espiral desde este campo se relaciona con la forma y comportamiento que toman ciertos fenómenos físicos. Por ejemplo, en la mecánica de fluidos, las espirales aparecen en el flujo turbulento, donde las partículas del fluido siguen trayectorias curvas

y espirales en su movimiento. Asimismo, en la estructura del cosmos, se estudian la conformación de las galaxias y cómo influyen en la distribución de materia y estrellas dentro del sistema.

1.4.1 Partes de una espiral

A partir de la espiral como curva mecánica, las espirales, de manera general, gráficamente poseen distintas partes, que contribuyen a su forma y características. A continuación, se mencionan e ilustran (Figura 1-2 y Figura 1-3) las principales partes de una espiral:

- Espira:** Es el fragmento de curva que describe el punto que genera la espiral en una vuelta completa.
- Paso:** Es la distancia radial que existe entre 2 espiras consecutivas.
- Núcleo:** Es la distancia a partir de donde se genera, en expansión, la espiral. Los núcleos pueden ser lineales ver Figura 1-2 si los centros están situados en una línea, o poligonales Figura 1-3 si los vértices del polígono regular son los centros que generan la curva.
- Radio vector:** Son las prolongaciones de los lados del núcleo

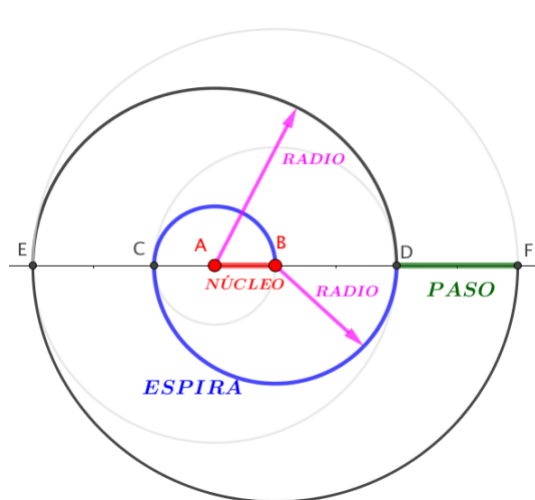


Figura 1-2: Espiral de 2 centros.

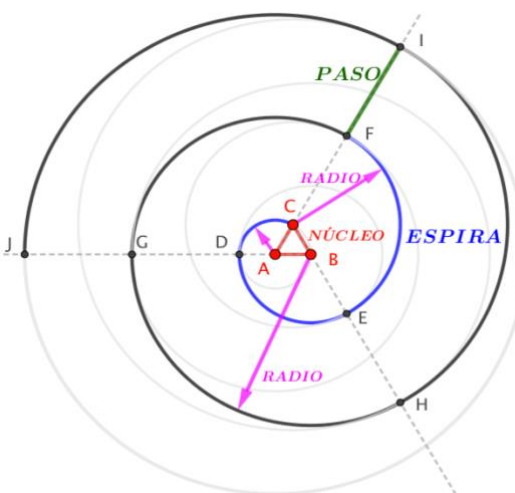


Figura 1-3: Espiral de 3 centros

En el presente escrito se estudiarán espirales de un solo centro, algunos autores definen el radio vector de este tipo de espirales (ver Figura 1-4) de la siguiente manera:

Según (Cortázar, 1862) un radio vector en una espiral es un segmento de línea que conecta el punto central de la espiral con cualquier punto a lo largo de la trayectoria. Este vector se extiende desde el centro hacia el punto en la espiral y se utiliza para describir la posición de

dicho punto en relación con el centro de la espiral. En otras palabras, es un vector que representa la distancia y la dirección desde el centro de la espiral hasta un punto específico de ella.

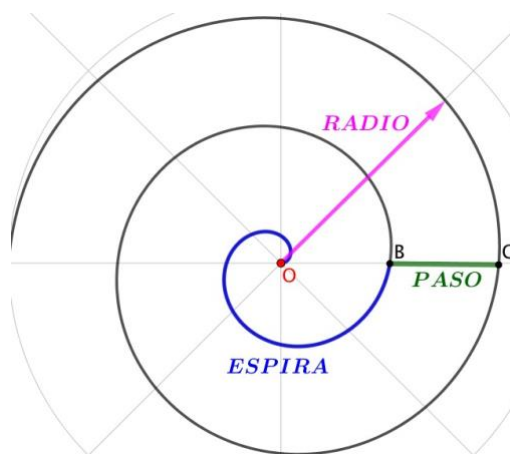


Figura 1-4: Espiral de un centro.

Ahora bien, el estudio de las espirales desde su representación algebraica ha llevado al desarrollo de ecuaciones paramétricas y polares que describen su forma y comportamiento. Además, ha permitido explorar conceptos de la geometría y el cálculo, así como su relación con otros fenómenos matemáticos y físicos. La información que se presenta a continuación proviene de diversas fuentes, como: (Lehmann, 1989), (Spivak, 1988), (Ayres, 1988), (Lasso, 2021) (Stewart, 2012), (Thomas, 2005) entre otros.

1.5 Ecuaciones y coordenadas

1.5.1 Ecuaciones paramétricas

Un lugar geométrico que satisface $f(x, y) = 0$ suele representar una curva plana C . Esta expresión analítica también puede ser caracterizada a través de un par de ecuaciones de tal forma que x, y sean función de una tercera variable θ (llamado parámetro).

Se puede definir también como: Sea C un conjunto de puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas x y y están definidas por las expresiones

$$x = x(\theta); \quad y = y(\theta) \quad ; \quad a \leq \theta \leq b \quad (1.1)$$

En donde $x(\theta)$ y $y(\theta)$ son continuas sobre $[a, b]$.

Las expresiones en la ecuación (1.1) se denominan ecuaciones paramétricas de la curva C . Además, cualquier punto $P(x, y)$ cuyas coordenadas x y y sean calculadas mediante estas ecuaciones se denominan punto de la curva C .

1.5.2 Ecuación paramétrica de una espiral

Las ecuaciones paramétricas de las espirales matemáticas es una forma de representar estas curvas en función de un parámetro, que suele ser una variable como " t " (tiempo) o " θ " (ángulo). Las ecuaciones paramétricas definen las coordenadas " x " y " y " de un punto en la espiral en términos del valor del parámetro.

La ecuación paramétrica general de una espiral se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x(t) &= f(t) \cos(t) \\y(t) &= f(t) \sin(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

En la ecuación (1.2), $x(t)$ y $y(t)$ representan las coordenadas cartesianas (x, y) del punto en la espiral en función del parámetro t . La función $f(t)$ determina como varia el radio o la distancia desde el origen hasta un punto en la espiral a medida que el parámetro t cambia. El ángulo t generalmente se incrementa con el tiempo o con otro factor que hace que la espiral se desarrolle progresivamente alrededor del punto central.

Cada elección de la función $f(t)$ dará lugar a una espiral con propiedades y características únicas. Por ejemplo, en la espiral logarítmica, el radio crece exponencialmente a medida que se desplaza alrededor del punto central, lo que resulta en una forma de espiral muy particular. Por otro lado, en la espiral de Arquímedes el radio aumenta linealmente, lo que genera una espiral cuya forma podría denominarse que es más "abierto".

1.5.3 Coordenadas y ecuación polar.

El sistema de coordenadas polares usa segmentos dirigidos y ángulos para ubicar puntos en el plano. Básicamente, se escoge un punto fijo O y se traza un rayo con origen sobre ese punto: estos son los objetos de referencia, el punto se denomina polo, y el rayo eje polar. Ahora, es posible establecer la coordenada en cualquier punto en el plano de la forma $P(r, \theta)$ donde r corresponde a la distancia de O a P , y θ el ángulo formado entre el eje polar y \overline{OP} .

El ángulo θ recibe el nombre de ángulo polar, mientras que \overline{OP} se llama radio vector. Por convención los ángulos son medidos de forma positiva en sentido contrario a las agujas del reloj (antihorario), y los valores $r < 0$ corresponden a un cambio en la dirección.

Una ecuación que describa el comportamiento de una curva empleando coordenadas polares, se denomina ecuación polar. Debido a la naturaleza circular del sistema, las curvas de este tipo como las espirales poseen una expresión más simple en comparación con el sistema cartesiano. Se puede definir como: Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$ el conjunto de puntos $P(r, \theta)$ que satisfacen $r = f(\theta)$ se denomina ecuación polar.

1.5.4 Ecuación polar de una espiral

La ecuación polar de las espirales matemáticas es otra forma de representar estas curvas.

La ecuación polar general para una espiral se expresa, como se mencionó, de la forma:

$$r(\theta) = f(\theta) \quad (1.3)$$

En la ecuación (1.3), $r(\theta)$ representa la distancia desde el origen (punto central) hasta un punto en la espiral, y θ es ángulo formado entre el radio de la espiral y un eje de referencia. Asimismo, en la ecuación paramétrica, la función $f(\theta)$ determina como varía el radio de la espiral a medida que el ángulo (θ) cambia. La elección de $f(\theta)$ define el tipo de espiral en específico que se obtiene. La ventaja de la ecuación polar es que describe la espiral directamente en términos de su forma radial y angular, lo que resulta más conveniente para ciertos análisis o visualizaciones. Sin embargo, ambas formas de representación, la ecuación polar y la ecuación paramétrica, son igualmente válidas y proporcionan información completa sobre las espirales.

1.5.5 Relación de coordenadas cartesianas y polares.

Las coordenadas polares pueden ser cambiadas a cartesianas y viceversa. La conexión entre estos dos sistemas de coordenadas se muestra en la Figura 1-5

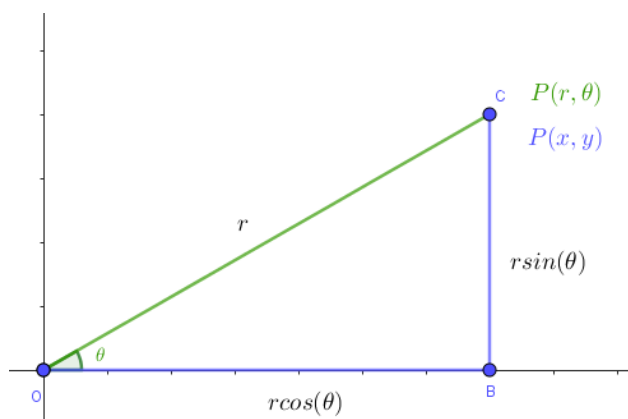


Figura 1-5: Conexión entre sistemas coordenados cartesiano y polar

1. Desde las razones trigonométricas se tiene que:

$$x = r \cos \theta ; \quad y = r \sin \theta$$

lo que permite cambiar de coordenadas polares a cartesianas.

2. Para cambiar de coordenadas cartesianas a polares, y desde el teorema de Pitágoras y la razón trigonométrica se tiene:

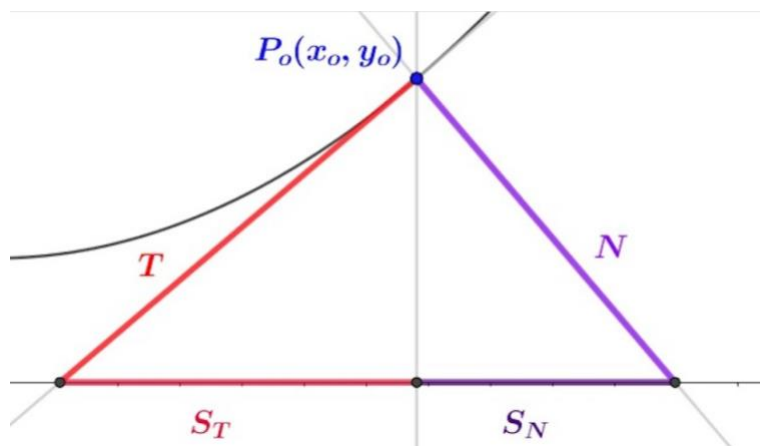
$$r^2 = x^2 + y^2 ; \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

1.6 Estudio de propiedades

1.6.1 Longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal

La longitud de la tangente a una curva en uno de sus puntos se define como la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje x . La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x , recibe el nombre de longitud de la subtangente.

La longitud de la normal se define como longitud del segmento de normal comprendido entre el punto de tangencia y el eje x . La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x recibe el nombre de longitud de subnormal. (Figura 1-6)

**Figura 1-6:** Líneas notables de una curva.

Longitud de la subtangente

$$S_T = y_0/m$$

Longitud de la tangente

$$T = \sqrt{(S_T)^2 + (SP_0)^2}$$

Longitud de la subnormal

$$S_N = my_0$$

Longitud de la normal

$$N = \sqrt{(S_N)^2 + (SP_0)^2}$$

En el [anexo 1](#), se verifica que para una curva en coordenadas polares (r, θ) las longitudes de los segmentos se calculan mediante las siguientes expresiones:

Longitud de la subtangente

$$S_T = \frac{r^2}{|r'|}$$

Longitud de la tangente

$$T = \sqrt{S_T^2 + r^2} = \left| \frac{r}{r'} \right| \sqrt{r^2 + r'^2}$$

Longitud de la subnormal

$$S_N = |r'|$$

Longitud de la normal

$$N = \sqrt{S_N^2 + r^2} = \sqrt{(r')^2 + r^2}$$

Nota: Las longitudes de la subtangente y subnormal son segmentos dirigidos, a no ser que se indique lo contrario.

1.6.2 Longitud de curva

La longitud de arco, también llamada rectificación de una curva es la medida de la distancia o camino recorrido a lo largo de una curva o dimensión lineal. Históricamente, ha sido difícil determinar esta longitud en segmentos irregulares; aunque fueron empleados varios métodos para curvas específicas. La llegada del cálculo trajo consigo la posibilidad de generar una ecuación general para obtener soluciones cerradas¹ para algunos casos, y particularmente para cualquier curva continua a trozos y diferenciable en un intervalo. La fórmula general para calcular la longitud de curva $y = f(x)$ entre dos puntos, $x = a$ y $x = b$ en el eje x deducida desde los procesos de acumulación, el teorema de Pitágoras y el paso al infinito, es:

¹ Se dice que una ecuación es una solución en forma cerrada si resuelve un problema dado en término de funciones y operaciones matemáticas elegidas de un conjunto limitado y generalmente aceptado.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1.4)$$

donde:

- L es la longitud de la curva entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$
- $\frac{dy}{dx}$ es la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x , que representa la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto.
- El integrando $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ representa el “elemento de arco” de la curva (aproximación infinitesimal de la longitud).

1.6.3 Curvatura

Si C es una curva suave definida por la función vectorial \mathbf{r} , entonces, si $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ el vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$ esta dado por la expresión 1.5

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad (1.5)$$

que indica la dirección de la curva.

De la Figura 1-7 se puede ver que $\mathbf{T}(t)$ cambia de dirección en forma muy lenta cuando C se parece a una recta, pero cambia de dirección más rápidamente cuando C se dobla o se tuerce bruscamente sobre sí misma.

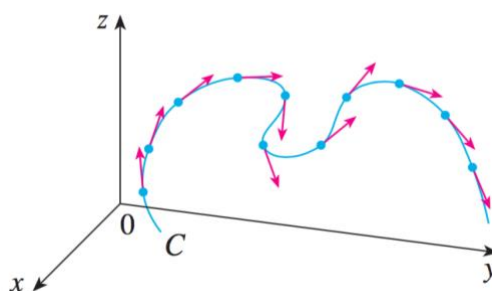


Figura 1-7: Conexión Vectores tangentes unitarios en puntos equidistantes de C

Fuente: Tomado de *Longitud de curva y curvatura*, de Cálculo en varias variables trascendentes tempranas, (7 ed.), (James Stewart, 2012)

La curvatura de \mathcal{C} en un punto dado es una medida de rapidez con la que la curva cambia de dirección en ese punto. Específicamente, se define como la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco. (Se emplea la longitud de arco (s) para que la curvatura sea independiente de la parametrización). Se define la curvatura \mathbf{k} de la curva \mathcal{C} como:

$$\mathbf{k} = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| \quad (1.6)$$

donde \mathbf{T} es el vector tangente unitario.

La curvatura es más fácil de calcular si se expresa en término del parámetro t en lugar de s , de modo que se usa la regla de la cadena para escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

luego

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

como $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$, entonces

$$k = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad (1.7)$$

La ecuación 1.7 se puede usar siempre para calcular la norma de la curvatura, con frecuencia es más conveniente aplicar la ecuación:

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{\|\mathbf{r}'\|^3} \quad (1.8)$$

la ecuación 1.8 se utilizó para obtener la expresión de curvatura para una curva plana escrita en coordenadas polares $r = f(\theta)$ demostrada en el [anexo 2](#)

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.9)$$

1.6.4 Radio de curvatura.

El radio de curvatura es un concepto empleado en geometría analítica y el cálculo, ya que caracteriza localmente a una curva y a las superficies curvas. Se utiliza para describir cuan curvada o cóncava es una curva o una superficie en un punto determinado o para construir una

función que describa la curvatura de esta en cualquier punto, caso en el cual es denominada función de curvatura.

Dada una curva, descrita por la función $y = f(x)$. El radio de curvatura R en un punto P de la curva se define como el recíproco de la magnitud de la curvatura en ese punto. A su vez, la curvatura se define como la tasa de cambio de la tangente a la curva con respecto a la longitud del arco de la curva. Para una curva plana, como lo es la espiral, cuya ecuación pueda escribirse en coordenadas cartesianas (x, y) como $x = x(t)$; $y = y(t)$ donde t es un parámetro arbitrario, la expresión para el radio de curvatura se reduce a (1.10).

$$R_c = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right|} \quad (1.10)$$

En caso de que pueda escribirse $y = f(x)$ de tal modo que para cada punto de la curva exista un único valor de x , entonces puede tomarse a x como el parámetro arbitrario, y el radio de curvatura se puede expresar como (1.11):

$$R_c = \frac{\left[1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2f}{dx^2} \right|} \quad (1.11)$$

Es importante destacar que, en la práctica, el radio de curvatura puede variar a lo largo de la curva, y su valor puede ser diferente en distintos puntos. Cuando el radio de curvatura es pequeño, por ejemplo, la curva es “cerrada” o curvada en ese punto, y cuando es más grande, la curva es “abierta” o suave en ese punto.

1.6.5 Área barrida por el radio vector

El área barrida por el radio vector de un objeto en movimiento es una magnitud importante en el contexto de la física y las matemáticas. Se refiere al área de la región que es barrida (o cubierta) por el radio vector de un punto móvil mientras se mueve en una trayectoria curva en un plano desde un punto inicial a uno final o en un intervalo de tiempo dado. El radio vector es un vector que conecta el origen (o algún punto fijo) al punto en cuestión, y su magnitud es la distancia entre el punto y el origen. Si el objeto se mueve en una trayectoria curva, el radio vector cambiará su dirección y magnitud a medida que el punto se desplace.

Para calcular el área barrida por el radio vector a lo largo de una trayectoria curva en un intervalo $[a, b]$ se utiliza una integral definida. La fórmula general, obtenida nuevamente desde los procesos de acumulación y el paso al infinito, para calcular el área barrida (A_B) está dada por:

$$A_B = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta \quad (1.12)$$

donde: $r(\theta)$ es la magnitud del radio vector como función del ángulo polar θ (en coordenadas polares).

1.6.6 Área encerrada

El área encerrada se refiere al área de una región del plano que está delimitada por una curva cerrada. Esta curva cerrada puede ser una línea curva, una poligonal cerrada o cualquier otra figura que forme una “frontera” alrededor de la región.

Para calcular el área encerrada (A_{enc}) por una curva encerrada, en coordenadas polares entre dos ángulos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ se tiene que:

$$A_{enc} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta \quad (1.13)$$

En esta ecuación se aplica el mismo principio que se mencionó para calcular el área barrida por el radio vector, ya que en últimas se convierte en un caso particular del mismo concepto.

1.6.7 Cuadratura del círculo

Según (Johnson, 1999) la cuadratura del círculo se refiere a un antiguo problema matemático, denominado uno de los tres problemas clásicos de la geometría, que consiste en construir un cuadrado con la misma área que un círculo dado, empleando únicamente regla y compás.

Históricamente, los antiguos matemáticos griegos intentaron resolver este problema durante muchos siglos, pero en el año 1882, se demostró que la cuadratura del círculo es matemáticamente imposible de lograr utilizando únicamente regla y compás y para ello se fundamentó en la teoría de números y la trascendencia del número π , que es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. (Figura 1-8)

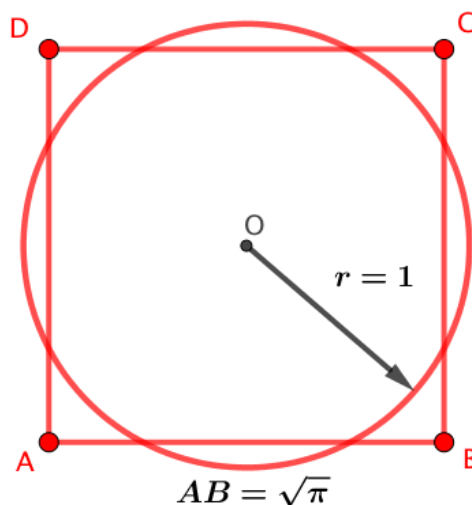


Figura 1-8: Representación de la cuadratura del círculo.

1.6.8 Progresión aritmética

Una progresión aritmética es una secuencia de números en la que cada término después del primero se obtiene sumando una constante llamada “diferencia” (d) al término anterior. En otras palabras, una progresión aritmética es una secuencia en la que cada término es igual al anterior más una cantidad constante. Así, la progresión aritmética puede expresarse como:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n - 1)d, \dots$$

donde:

- a es el primer término de la progresión.
- d es la diferencia común entre dos términos consecutivos.
- n es el número del término que se desea calcular.

Las progresiones aritméticas tienen aplicaciones en diversas áreas, como finanzas, física, estadística y matemáticas. Son útiles para modelar situaciones en las que se presenta un crecimiento o decremento constante en una magnitud o cantidad a lo largo del tiempo o en una secuencia.

1.6.9 Progresión geométrica

Una progresión geométrica, es una secuencia de números en la que cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por una constante, denominada “razón” o “razón común” (r). En otras palabras, una progresión geométrica es una secuencia en la que cada término es igual al anterior multiplicando por la misma cantidad.

La progresión geométrica se expresa de la forma:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{(n-1)}, \dots$$

Donde:

- a es el primer término de la progresión
- r es la razón o razón común de la progresión, que es el factor de multiplicación entre cada término consecutivo, o lo que es lo mismo la razón entre un término y su inmediato predecesor.
- n es el número del término que se desea calcular.

Las progresiones geométricas tienen aplicaciones en matemáticas, ciencias, ingeniería y otras áreas, y son útiles para modelar situaciones en las que hay un crecimiento o decaimiento multiplicativo.

En el siguiente capítulo se abordará una de las espirales más básicas y que da origen a otras más, la espiral de Arquímedes y se estudiarán algunas de sus propiedades retomando los elementos teóricos anteriormente presentados.

CAPÍTULO 2. ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

2.1 Descripción

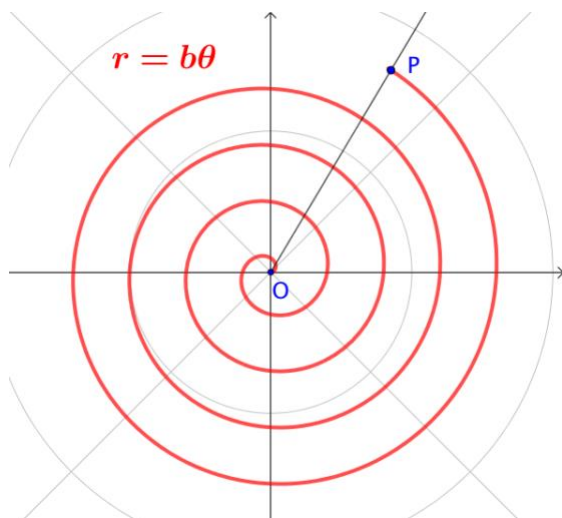


Figura 2-1: Espiral de Arquímedes generada por el rastro del movimiento del punto P

La espiral de Arquímedes es una curva mecánica generada por un punto móvil que se compone de dos movimientos constantes (uno rectilíneo y otro rotacional). En la Figura 2-1 el punto móvil P , parte del origen generando un movimiento sobre la semirrecta \overline{OP} con velocidad lineal constante, simultáneamente la semirrecta \overline{OP} gira alrededor del punto O con velocidad angular constante. Como resultado de esta combinación de movimientos, el rastro generado por el punto P traza la espiral de Arquímedes sobre el plano polar². Si desea visualizar la construcción ingrese al siguiente link: <https://www.geogebra.org/m/ag7apdnt>

2.2 Contexto histórico

Según (Perez, 2006), Arquímedes de Siracusa (287a.C. – 212a.C) definió la espiral como curva mecánica en su libro “*De las espirales*”, de la siguiente manera:

Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad constante, ese punto describe una espiral. (p.12)

² Para espirales posteriores no se realizará la construcción paso a paso que permite la deducción de las expresiones simbólicas o modelos de las espirales. En su lugar se emplearán las expresiones analíticas de cada una de ellas para el estudio y la visualización de las propiedades abordadas.

Su estudio comenzó aproximadamente hacia el siglo III a.C, durante el cual la comunidad científica se dedicó a encontrar solución a los tres problemas clásicos de la geometría griega (la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo), además de indagar propiedades particulares de algunas curvas como, por ejemplo, el cálculo de áreas de diferentes espiras y la longitud de un arco de la circunferencia. Arquímedes introduce su espiral en la literatura matemática de la época y responde entre otras cosas a la pregunta planteada en términos actuales, sobre ¿qué área barre el radio vector que genera la espiral?; en su momento, su estudio se compendió en la obra “*De las Espirales*”, un tratado matemático que lo consagró como uno de los grandes geómetras de la época; pero el descubrimiento y estudio de propiedades como lo menciona (Gomez T. F., 1905) en su libro “*Tratado de las curvas especiales notables*” fue atribuido a Conon³, por lo cual durante un período de tiempo fue conocida bajo el nombre de espiral de Conon. Años más tarde, Nizze⁴, quien tradujo al alemán la obra de Arquímedes, logró demostrar y endosar la legitimidad de la espiral a Arquímedes.

De otra parte, los métodos de Arquímedes estaban en lo que hoy denominamos la física, mientras que los métodos de la escuela euclidiana estaban en el uso de la regla y el compás euclídeos, lo que hacía que, para estos, los métodos del genio de Siracusa resultaran un tanto incomprensibles y fueran incluso menospreciados pues estaban en el mundo de los hechos (físicos) y no en el de las ideas (matemáticas).

Aunque esta curva le permitió a Arquímedes acometer dos de los tres problemas clásicos de la geometría griega (la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo), los geómetras de la época exigían la resolución de dichos problemas empleando únicamente regla y compás, y esta curva, no se construye solo con estos dos elementos, dado que los griegos consideraban que estas construcciones tenían que trazarse mediante la intersección de rectas y circunferencias, usando solamente la regla no numerada y el compás, instrumento que en aquella época no era válido para transportar distancias sino que una vez empleado y ser retirado del plano de trazado se cerraba.

Siguiendo la idea anterior, a continuación, se presenta una forma de implementar la espiral de Arquímedes para lograr la trisección de un ángulo. El problema consiste en encontrar un ángulo cuya medida sea un tercio de la medida de otro ángulo dado, utilizando únicamente regla y compás. Se debe hacer énfasis que, con el uso de la espiral, no se resuelve el problema en su

³ Conon de Samos (280 a. C. - 220 a. C.) astrónomo y matemático griego

⁴ Johann Ernst Nizze, conocido como Ernst Nizze (16 de noviembre de 1788 en Ribnitz; † 10 de febrero de 1872 en Stralsund) profesor de matemáticas y filólogo clásico alemán

versión original y por lo tanto debe ser modificado para que la implicación de la solución sea la misma, y de otra parte que el lenguaje empleado no será el original del contexto histórico, sino que será puesto en términos contemporáneos para su análisis.

Dado un ángulo AOB , con vértice en el origen, tal que $m\angle AOB^5 = \theta$, con $0 < \theta < \pi$ y dada una espiral de Arquímedes $r = b\theta$, es decir, centrada en el origen, la cual corta la semirrecta OB en un punto P distinto cada vez que el ángulo θ recorre un intervalo de π radianes como se ilustra en la Figura 2-2.

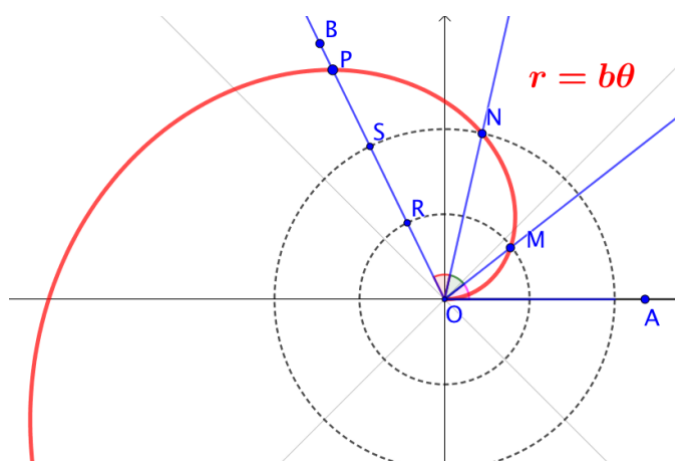


Figura 2-2: Trisección del ángulo AOB

Sea P un punto cualquiera de las intersecciones generadas entre la semirrecta OB y la curva, entonces empleando el teorema de Tales, se divide el segmento OP en tres segmentos congruentes (división de un segmento en n partes congruentes) OR , RS y SP . Luego se construyen dos circunferencias, la primera $\odot O_{O,R}$ (circunferencia con centro en O y radio OR), la segunda $\odot O_{O,S}$ (circunferencia con centro en O y radio OS), estas circunferencias cortan la espiral en los puntos M y N , como OM es la tercera parte de OP ya que $OM = OR$ (por ser radios de la misma circunferencia) y una de las propiedades de la espiral de Arquímedes, es que el radio es directamente proporcional al ángulo, entonces la medida del ángulo AOM es la tercera parte de la medida del ángulo AOB ; y de forma análoga, se puede establecer que la medida del ángulo AON es dos tercios de la medida del AOB . De esta manera se puede apreciar el empleo de la espiral de Arquímedes para la trisección de un ángulo cualquiera AOB . Este mismo procedimiento se puede emplear para dividir un ángulo AOB en el número n de partes congruentes que se requiera.

El segundo problema clásico que Arquímedes abordó con ayuda de la espiral fue la cuadratura del círculo. Este problema consiste en construir un cuadrado que tenga igual área que

⁵ La notación $m\angle AOB = \theta$ hace referencia a que la medida del ángulo AOB es igual a la medida del ángulo θ

el de un círculo dado. Un análisis actual sobre cómo se usa la espiral para resolver este problema se puede encontrar de manera detallada en Sarmiento, B. & Rodríguez, Y. (2009) “*Cuadratura de un círculo con la espiral de Arquímedes*”. En este libro se efectúa el análisis de la solución al problema y se presenta una construcción muy interesante haciendo uso de Cabri II Plus. No se considera necesario reproducir aquí lo realizado por ellos, sino que, si es de interés para el lector, puede consultar el capítulo 27 para profundizar en el tema. Sin embargo, lo que sí se presenta a continuación, es una breve explicación sobre el uso de la espiral para la cuadratura de un círculo dado, que se puede revisar con detalle en la Propiedad 11 (Cuadratura del círculo) empleando la rectificación de la circunferencia, propiedad que Arquímedes estudió y desarrolló en su libro “*De las espirales*” y que se presenta de igual manera en este documento como propiedad 6 del presente capítulo.

Es importante resaltar que Arquímedes, a pesar de emplear métodos mecánicos, analiza la espiral como un objeto matemático, por tanto, hace uso de ciertos métodos y herramientas que se anticipan al desarrollo del cálculo integral. Probablemente el método que utilizó Arquímedes para calcular el área que barre el radio vector que genera la espiral, fue el método de exhaustión, aun cuando no existe una evidencia histórica que así lo soporte.

El método de exhaustión, atribuido a Eudoxo, es un procedimiento geométrico mediante el cual se puede aproximar el perímetro o el área de figuras curvas, aumentando la aproximación de la precisión conforme se avanza en los cálculos dando una idea intuitiva, geométrica y formal al proceso del paso al límite. El procedimiento fue publicado por Arquímedes en su obra “*Método*”, y describe dos caminos que utilizó para determinar la longitud de la circunferencia. El primer método consistía en inscribir polígonos regulares en la circunferencia, entre mayor sea el número de lados del polígono, más se acercará el perímetro de estos a la longitud de la circunferencia, de forma análoga para el área, entre mayor sea el número de lados, más se acerca el área de los polígonos al área delimitada por la circunferencia. El segundo método es similar, pero en este caso circunscribiendo polígonos regulares a la circunferencia.

De acuerdo con Texeira, F. (1905), el procedimiento de Arquímedes para determinar el valor del área de este tipo de curvas hace referencia a un ejemplo claro del uso de los indivisibles y del infinitesimal. Así, Arquímedes, consideró el área como una suma de sectores circulares tal como se observa en la Figura 2-3.

La espiral de Arquímedes, además de representar en su momento una innovación y avance en distintos campos, fue objeto de estudio de matemáticos y científicos y esto se extendió a través de la historia; un ejemplo de ello fue Pappo⁶ de Alejandría (siglo III), quien adaptó esta curva a una cónica (hélice).

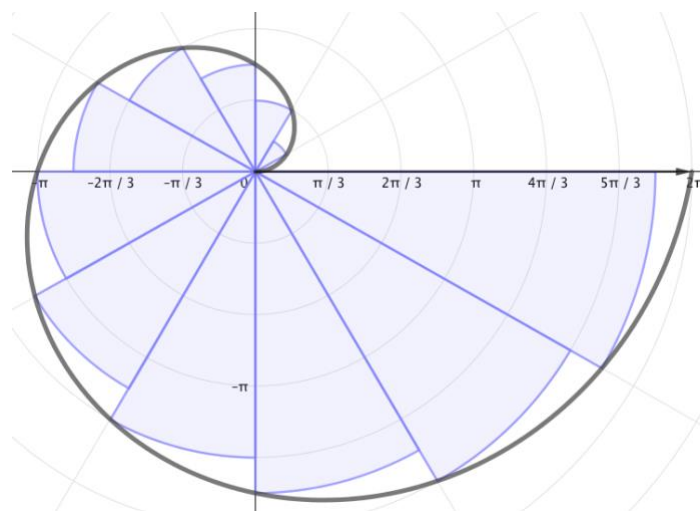


Figura 2-3: Método de exhaución por medio de sectores circulares en la espiral

Según (Ferreó, 2019) la espiral cónica de Pappus es la trayectoria descrita por un punto que se mueve uniformemente sobre una línea que pasa por un punto O (origen), esta línea gira uniformemente alrededor de un eje O_z manteniendo un ángulo α con O_z , tal como se aprecia en la (Figura 2-4). Por lo anterior, la espiral de Arquímedes se puede ver como una proyección ortogonal al eje del cono y con ello la espiral sale del plano bidimensional para tomar una representación tridimensional.

Ampliando la idea anterior, la espiral ha tenido varias exploraciones y por tanto distintas representaciones en el plano y en el espacio, algunas análogas a esta. Una de ellas es la curva “Clelie” o “espiral esférica de Arquímedes” (Figura 2-5), también estudiada por Pappo cuya representación es afín a la espiral de tipo cónica y la espiral Doppler (Figura 2-6) cuya representación coincide con las proyecciones planas de la espiral de Pappo.

⁶ Según Tamaro, E., & Fernández, T. (2004). Pappo, Pappo o Pappus de Alejandría; (siglos III-IV). Fue el último gran matemático griego de la escuela alejandrina. Su obra principal fue escrita hacia el 340, reviste una particular importancia desde el punto de vista histórico porque, además de ser una exposición completa y sistemática de los conocimientos de su época, recoge fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría.

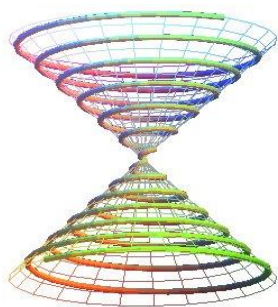


Figura 2-4: Espiral cónica de Pappo

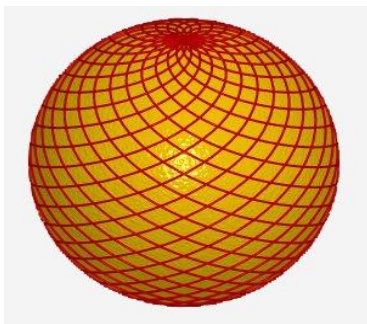


Figura 2-5: Espiral Clelie

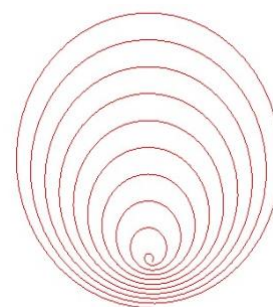


Figura 2-6: Espiral Doppler

Fuente: Tomado de curvas 3D de *Mathcurve* (2014)

2.3 Espiral, arte y cotidianidad

Las espirales son curvas que tienen una presencia importante en la naturaleza por su singularidad y relativa facilidad de construcción; un ejemplo de esto es el caparazón de los caracoles (Figura 2-7), trompas y colas de animales, y algunas estructuras de flores y frutas (girasoles y piñas) y si se desea ir más allá, su forma también está presente en la estructura de las galaxias, los remolinos de agua y las tormentas tropicales. En la cotidianidad, comportamientos que se pueden aproximar por espirales, se encuentran en las huellas dactilares, esculturas, construcciones arquitectónicas emblemáticas, e incluso en el arte rupestre, entre otras.



Figura 2-7: Caparazón de caracol



Figura 2-8: Tornillo de Arquímedes

Fuente: Tomado de *Maquinas simples* de quizlet (<https://quizlet.com/56308309/maquinas-simples-flash-cards/?x=1jqt>, s.f) (tornillo de Arquímedes) y *Fósil amonita* de pixabay (<https://pixabay.com/es/photos/amonita>)

Para Davis, J (1993), quizás el interés de Arquímedes por las espirales estaba relacionado con el tornillo que el propio Arquímedes diseñó (Figura 2-8). Este es un dispositivo hidráulico,

en el que se hace uso de un tubo helicoidal para elevar agua, este y otros objetos cotidianos, según Davis, fueron desarrollados con base en la espiral.

Asimismo, a la espiral de Arquímedes se le atribuyen distintas aplicaciones en el mundo real; algunas se ven reflejadas en el diseño de objetos como un compresor espiral o en las bombas de comprensión, las cuales están elaboradas de dos espirales del mismo tamaño intercaladas y que son empleadas principalmente para comprimir líquidos y gases; este mecanismo es de uso común en aires acondicionados, refrigeradores o similares. De igual manera se puede apreciar otro tipo de uso, y es en los surcos de las primeras grabaciones para discos de vinilo (gramófonos), los cuales forman una espiral de Arquímedes, mediante surcos espaciados con la finalidad de maximizar el tiempo de grabación que este podría ocupar (esto fue cambiado posteriormente para mejorar la calidad del sonido).

En el campo de la medicina, se suele solicitar al paciente que dibuje una espiral de Arquímedes (desde el interior hasta el exterior siguiendo una plantilla), con el fin de medir o evaluar el ET⁷, el análisis del dibujo permite extraer información sobre la severidad del temblor del paciente, y colaborar en el diagnóstico de enfermedades neurológicas (Parkinson, parálisis cerebral, trastornos del cerebro, entre otras). Un ejemplo del test se puede visualizar en <https://www.youtube.com/shorts/nrvjUImByOg>.

2.4 Ecuación Polar de la espiral

Según Gómez. J., García, F., Pina, E & Navarro, J. (2003) la espiral de Arquímedes se define como el lugar geométrico descrito por el movimiento de un punto, que, partiendo del extremo de una semirrecta, se mueve uniformemente sobre ella mientras la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su extremo, entendiéndose por extremo el punto origen de la semirrecta.

A partir de la definición anterior, como curva mecánica, se deducirá la ecuación polar de la espiral de Arquímedes. Partiendo de la definición se puede observar en la Figura 2-9 que el movimiento que genera la espiral es realmente un movimiento compuesto por una traslación y una rotación, es decir, el cambio de posición del punto sobre la semirrecta y el giro de la

⁷ El temblor esencial (ET por sus siglas en inglés) es un trastorno neurológico que afecta a las personas en todo el mundo y es 20 veces más presente que la enfermedad de Parkinson.

semirrecta sobre su punto de origen que se realizan respectivamente con velocidad lineal constante y velocidad angular constante.

Si se tiene un punto fijo O en el plano, de una semirrecta con origen en O y un punto P sobre la semirrecta y se hace girar la semirrecta entorno a O con velocidad angular ω constante y a su vez, el punto P se mueve sobre la semirrecta a velocidad v constante, entonces la trayectoria que describe el punto P es una espiral de Arquímedes. En la Figura 2-9 se aprecian el rastro el color azul que deja el movimiento del punto, donde r representa el radio vector que determina la posición del punto P sobre el plano polar.

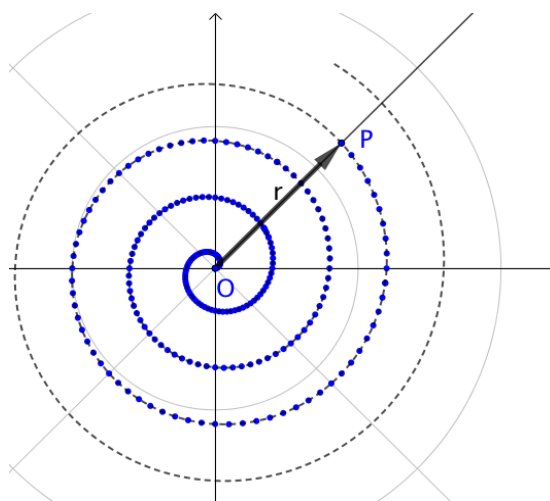


Figura 2-9: Movimiento de un punto en el plano polar, que genera la espiral de Arquímedes

Sea la magnitud del radio vector $r = |\overline{OP}|$ que es generada por el movimiento del punto P que parte de la posición inicial O sobre la semirrecta, entonces

$$r = vt \quad (2.1)$$

El ángulo girado por unidad de tiempo es la velocidad angular ω y se debe recordar que las unidades, en el sistema internacional de medidas, de velocidad angular son los rad/s . Como la velocidad angular es la tasa de variación del desplazamiento angular, se puede expresar como:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\theta = \omega\Delta t$$

Luego, por definición de espiral de Arquímedes, la magnitud de giro de la semirrecta por la cual se desplaza el punto P es constante, entonces es posible calcular en el paso al límite el ángulo de giro, es decir, cuando $\Delta t \rightarrow dt$ y $\Delta\theta \rightarrow d\theta$, se obtiene, en términos diferenciales:

$$d\theta = \omega dt$$

luego, integrando a ambos lados de la igualdad:

$$\int d\theta = \int \omega dt$$

Ahora, para un intervalo de tiempo entre t_0 y t , en el cual el ángulo cambia de θ_0 a θ se obtiene, teniendo en cuenta que la velocidad angular ω es constante, que

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega \int_{t_0}^t dt$$

Integrando a ambos miembros de la igualdad, y con el teorema fundamental del cálculo, se sigue que la variación del desplazamiento angular está dada por:

$$(\theta - \theta_0) = \omega(t - t_0)$$

Ahora, si se asume que la observación inicia en $t_0 = 0$ con $\theta_0 = 0$, entonces:

$$\theta = \omega t \tag{2.2}$$

Luego, se observa que tanto la traslación dada por la ecuación (2.1) y el giro, dado por la ecuación (2.2), están en función del tiempo t , tomando a t como un parámetro, si se elimina el parámetro t se obtiene:

$$\text{Para } r = vt \Rightarrow t = \frac{r}{v}$$

$$\text{Para } \theta = \omega t \Rightarrow t = \frac{\theta}{\omega}$$

por lo tanto:

$$\frac{r}{v} = \frac{\theta}{\omega}$$

de donde

$$r = \frac{v}{\omega} \theta$$

Sea b la constante generada por el cociente entre las constantes velocidad lineal y velocidad angular, entonces b adquiere un significado dinámico

$$\frac{v}{\omega} = b; \quad b \in \mathbb{R}^+$$

La constante b es positiva, ya que la velocidad (realmente la rapidez) con la que crece el radio vector \vec{r} también lo es, y además el sentido de giro de la semirrecta es antihorario, luego el cociente de las dos cantidades físicas es positivo. con las condiciones previamente establecidas, la ecuación polar de una espiral de Arquímedes se puede expresar como:

$$r = b\theta; \quad (\theta \geq 0)$$

donde r es la distancia entre un punto cualquiera de la espiral a su origen, b es una constante la cual relaciona la velocidad lineal con la angular y θ indica el ángulo de giro del radio vector.

Algunas observaciones que se pueden puntualizar con relación a lo determinado anteriormente son:

- Cuanto mayor sea el valor de la constante b , mayor es el paso de la espiral, esto en virtud de que b es proporcional a la velocidad lineal o tangencial, e inversamente proporcional a la velocidad angular.
- Si se cambia el sentido de giro (en el de las manecillas del reloj u horario), se obtienen espirales simétricas entre sí.
- Si $b < 0$, se modifica el sentido de giro del radio vector, este será en sentido horario.
- Si, $b > 0$, el sentido de giro del radio vector es en sentido antihorario (es el sentido de giro usual y el que se estudiará en el presente escrito).

2.5 Espiral de Arquímedes y la progresión aritmética

Dada una espiral de Arquímedes con centro en O , se puede observar en la Figura 2-10 que al trazar cualquier radio vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, los puntos de intersección del radio vector y la espiral después de la primera vuelta determinan segmentos congruentes, es decir, que la distancia entre espira y espira es constante, no varía, en otras palabras, la distancia entre pasos consecutivos es la misma.

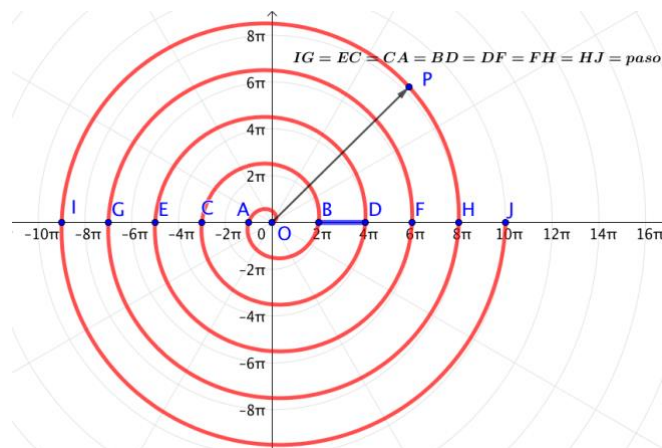


Figura 2-10: La espiral de Arquímedes es de paso constante

Esto está relacionado con una progresión aritmética, y es una consecuencia de la rapidez lineal (radial) constante pues en esta se tiene un punto de partida a , y una diferencia de la progresión aritmética b . Con estos dos valores se puede formar una sucesión, de forma que el primer elemento sea a , el segundo elemento $a + b$, el tercer elemento $a + 2b$ hasta el n ésimo elemento $a + nb$, es decir

$$a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb;$$

Por lo anterior, en una espiral de Arquímedes la magnitud de los radios vectores se puede obtener a partir de un origen o centro de la espiral, en este caso a , más una distancia de paso b que es equivalente a la diferencia en una progresión aritmética, multiplicada por n , donde n representa el valor del ángulo en radianes.

$$r = a + nb$$

Intuitivamente, y desde de la definición de progresión aritmética se logra observar que en coordenadas polares (r, θ) la espiral de Arquímedes puede ser descrita por la ecuación general:

$$r = a + b\theta \quad (2.3)$$

a y b son números reales, a representa la distancia entre el origen O y un punto P cualquiera de la espiral en el instante inicial, y b es la constante que determina la distancia entre las espiras consecutivas. Para dar una idea más clara de cómo se representa gráficamente la ecuación (2.3),

se ilustran en la Figura 2-11 tres graficas donde el valor de b es el mismo para los tres casos, y el valor de a varia.

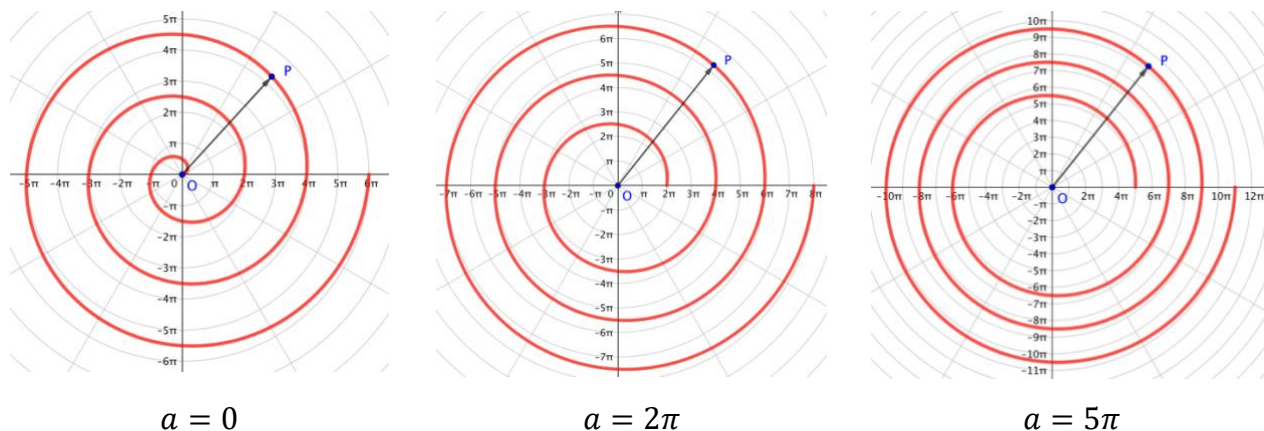


Figura 2-11: Representación gráfica de la espiral de Arquímedes cuando se varía el parámetro a

Ahora, hay que recordar que el ángulo de giro esta dado en radianes, por tanto, una vuelta completa equivale a 2π radianes, luego el ángulo θ se puede escribir como $\theta = 2\pi k$, donde k indica el valor de la vuelta, o fracción de esta, que está dando la espiral (un contador); por consiguiente, se puede expresar la ecuación general como:

$$r = a + b2\pi k; \quad k \geq 0$$

2.6 Parametrización

La parametrización de una curva no es única, pues depende de donde se quiere iniciar el recorrido, el sentido en el que este quiere hacerse, etc. Así, por ejemplo, a partir de la ecuación de la circunferencia se puede expresar la espiral de Arquímedes en forma paramétrica; recordando que la ecuación de la circunferencia en forma reducida, en coordenadas cartesianas, está dada por $x^2 + y^2 = r^2$, donde el radio r es constante, su centro $(0,0)$ y una de sus ecuaciones paramétricas es:

$$\begin{cases} x(k) = r \cos 2\pi k \\ y(k) = r \sen 2\pi k \end{cases}$$

Ahora bien, dado que en la espiral de Arquímedes el radio no es constante, como se evidenció en la definición, la magnitud del radio vector se puede obtener mediante la ecuación $r = a + b2\pi k$, y como se indicó al final del apartado anterior, por tanto, sus coordenadas paramétricas estarán dadas por:

$$\begin{cases} x(k) = (a + b2\pi k) \cos 2\pi k \\ y(k) = (a + b2\pi k) \sen 2\pi k \end{cases}$$

Como $\theta = 2\pi k$ se obtiene que:

$$\begin{cases} x(\theta) = (a + b\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = (a + b\theta) \sen \theta \end{cases} \quad (2.4)$$

Por las ecuaciones 2.1 y 2.2 se sabe que $r = vt$ y $\theta = \omega t$, si $a = 0$ entonces, sustituyendo estos valores en la ecuación 2.4, se puede expresar las coordenadas paramétricas de la espiral de Arquímedes en términos de la velocidad lineal y angular constantes, con parámetro t , como:

$$\begin{cases} x(t) = vt \cos \omega t \\ y(t) = vt \sen \omega t \end{cases} \quad (2.5)$$

2.7 Ecuación cartesiana de la espiral

La espiral de Arquímedes con ecuación polar $r = a + b\theta$ se puede expresar en coordenadas cartesianas (x, y) usando las coordenadas paramétricas que se obtuvieron en la sección de parametrización a partir de la ecuación 2.4:

$$\begin{cases} x = (a + b\theta) \cos \theta \\ y = (a + b\theta) \sen \theta \end{cases}$$

Al realizar el cociente de y entre x , se obtiene:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sen \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

si se aplica arcotangente a ambos miembros de la igualdad, se obtiene:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Al despejar θ de la ecuación de la espiral de Arquímedes se tiene que $\theta = \frac{r-a}{b}$, luego

$$\frac{r-a}{b} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

sin embargo, el radio de la circunferencia que se usó para la parametrización de la espiral se puede expresar como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por tanto, la ecuación cartesiana de la espiral será:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - a = b \cdot \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right); b > 0$$

Si $a = 0$, entonces la espiral estará centrada en el origen (forma usual o canónica) y su ecuación cartesiana respectiva es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = b \cdot \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right); \quad b > 0 \quad (2.6)$$

2.8 Algunas propiedades de la espiral de Arquímedes

En el análisis de las propiedades de las espirales que son estudiadas en este documento se resalta que estas, como fruto de la metodología de trabajo, son exploradas con ayuda de algunas herramientas matemáticas contemporáneas, como el cálculo infinitesimal y con el uso de software de geometría dinámica (en particular GeoGebra®). De igual manera muchas de las propiedades presentadas aquí, ya han sido estudiadas y presentadas en otros documentos de manera somera, es decir, enunciando sus propiedades sin profundizar en el desarrollo de estas o estudiadas para casos particulares. Lo que se pretende hacer con el presente escrito es obtener una revisión documental, donde se detallen a profundidad algunas propiedades con el fin de ayudar a comprender su desarrollo y verificación desde considerar formas generales para luego hacer particularizaciones en algunos casos.

2.8.1 Propiedad 1: La espiral de Arquímedes es de paso constante.

La principal propiedad de la espiral de Arquímedes consiste en que la distancia entre los dos arcos contiguos situados en el mismo radio es siempre la misma y coincide con el paso de la espiral; la generalidad de la propiedad puede ser deducida desde lo analizado en la progresión aritmética y la espiral de Arquímedes presentada anteriormente. Esta propiedad también se puede expresar de la siguiente manera: Dada una recta cualquiera que pasa por el origen polar, y una espiral de Arquímedes, la distancia entre dos intersecciones consecutivas cualesquiera entre dos espiras, es constante e independiente de la recta elegida.

A continuación, se realiza el análisis respectivo de este enunciado.

Sean dos espiras consecutivas, considere las dos intersecciones generadas por las espiras con una recta que pasa por el origen polar, entonces, los puntos de corte consecutivos estarán dados por (r_1, θ_1) y $(r_2, \theta_1 + 2\pi)$, como el paso es constante, entonces se tiene:

- $r_1 = b\theta_1 \Rightarrow b = \frac{r_1}{\theta_1}$
- $r_2 = b(\theta_1 + 2\pi) \Rightarrow b = \frac{r_2}{\theta_1 + 2\pi}$

luego, igualando ambas ecuaciones se observa que:

$$\frac{r_2}{\theta_1 + 2\pi} = \frac{r_1}{\theta_1} \Rightarrow r_2\theta_1 = r_1\theta_1 + r_12\pi \Rightarrow (r_2 - r_1)\theta_1 = r_12\pi; \text{ con } \theta_1 \neq 0$$

Pero $r_1 = b\theta_1$, luego se sigue:

$$r_2 - r_1 = 2b\pi$$

Se observa que la distancia entre las dos espiras consecutivas es constante, el resultado no depende de las espiras, siempre que estas sean consecutivas, ni de la recta elegida. El paso estará dado por la longitud de una circunferencia de radio b .

2.8.2 Propiedad 2. Longitud de los segmentos subnormal y subtangente

Dada la espiral de Arquímedes y un punto P que pertenece a la curva, la longitud de la subtangente S_T y la subnormal S_N están determinadas por las siguientes expresiones:

$$\text{I. } S_T = b\theta^2 \qquad \text{II. } S_N = b$$

En la Figura 2-12, se observan los segmentos que determinan la S_T y S_N en la espiral de Arquímedes para un punto P cualquiera que pertenece a la curva, cuya ecuación polar es $r = b\theta$.

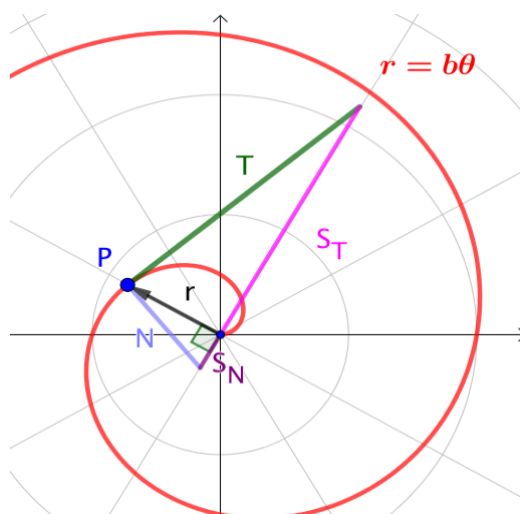


Figura 2-12: Segmentos tangentes, subtangente, normal y subnormal de la espiral de Arquímedes, para un punto P que pertenece a la curva

Empleando las ecuaciones respectivas del [anexo 1](#), se pueden verificar fácilmente las longitudes para dichos segmentos.

I) Para la subtangente se tiene que $S_T = \frac{r^2}{r'}$, así

$$S_T = \frac{r^2}{r'} \Rightarrow S_T = \frac{b^2\theta^2}{b} = \frac{b(b\theta^2)}{b} = b\theta^2$$

II) Para la subnormal se tiene que $S_N = r'$, así

$$S_N = r' \Rightarrow S_N = \frac{d(b\theta)}{d\theta} \Rightarrow S_N = b$$

así queda verificada la propiedad.

2.8.3 Propiedad 3. Longitud de los segmentos tangente y normal

La longitud de los segmentos tangente T y normal N para un punto P en la espiral de Arquímedes, están determinadas por las expresiones

$$T = b\theta\sqrt{1 + \theta^2} \qquad N = b\sqrt{1 + \theta^2}$$

En la Figura 2-12 se pueden observar los segmentos que determinan la tangente T y la normal N , luego, para encontrar las expresiones respectivas, se hace uso nuevamente del [anexo 1](#); para la tangente se tiene que:

$$T = \sqrt{S_T^2 + r^2} = \sqrt{(b\theta^2)^2 + (b\theta)^2} = \sqrt{b^2\theta^4 + b^2\theta^2} = b\theta\sqrt{\theta^2 + 1}$$

Para la longitud de la normal:

$$N = \sqrt{S_N^2 + r^2} \Rightarrow N = \sqrt{(b)^2 + (b\theta)^2} = b\sqrt{1 + \theta^2}$$

tal como se quería verificar.

2.8.4 Propiedad 4. Longitud curva

Existen diversos métodos para hallar la longitud de una curva. En el caso de la espiral de Arquímedes, algunos con valor exacto y otros estimados. A continuación se hace el análisis sobre el método usado para obtener el valor exacto, con las herramientas matemáticas actuales que se

tienen a la mano y particularmente del cálculo infinitesimal. Para ello hay que recordar el siguiente teorema:

Si una curva C se describe con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = h(t)$, tal que $a \leq t \leq b$, donde f' y g' son continuas en un intervalo $[a, b]$, y la curva C es recorrida una sola vez cuando t aumenta desde a hasta b , entonces la longitud de C estará dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (2.8)$$

Sea $r = f(\theta)$, tal que $\theta_o \leq \theta \leq \theta_f$, se pueden expresar las ecuaciones paramétricas de la curva como:

$$x = r \cos(\theta) \Rightarrow x = f(\theta) \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta) \Rightarrow y = f(\theta) \sin(\theta)$$

luego al derivar con respecto al parámetro θ , se obtiene:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)$$

al elevar al cuadrado cada una de las derivadas

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = f'(\theta)^2 \cos^2(\theta) - 2f'(\theta)f(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)^2 \sin^2(\theta)$$

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = f'(\theta)^2 \sin^2(\theta) + 2f'(\theta)f(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)^2 \cos^2(\theta)$$

al sumar los cuadrados de las derivas se sigue:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = f'(\theta)^2 [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] + f(\theta)^2 [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)]$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = f'(\theta)^2 + f(\theta)^2$$

como $r = f(\theta)$, entonces $f'(\theta)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$, y $f(\theta)^2 = r^2$, y así

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

luego, sustituyendo la igualdad anterior en la ecuación 2.8 se obtiene

$$L = \int_{\theta_o}^{\theta_f} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 es la expresión general para hallar la longitud de curva para una curva en coordenadas polares. Ahora, para la espiral de Arquímedes se tiene que

$$\text{I. } r = b\theta \Rightarrow r^2 = b^2\theta^2$$

$$\text{II. } \frac{dr}{d\theta} = b \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = b^2$$

Para calcular la longitud de curva de la espiral de Arquímedes, los límites de integración serán $\theta_o = 0$, y $\theta_f = 2\pi n$, donde n representa el número de vueltas del radio vector; y sustituyendo I y II en la ecuación (2.9) se sigue:

$$L = \int_0^{2\pi n} \sqrt{b^2 + b^2\theta^2} d\theta$$

$$L = b \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \quad (2.10)$$

La anterior integral puede ser resuelta por sustitución trigonométrica. Si desea ver su desarrollo, consultar el [anexo 3](#). Al resolver la integral y evaluar con el Teorema Fundamental del Cálculo, de la expresión 2.10 se obtiene:

$$L = \frac{b}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln \left| \theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right| \right] \quad (2.11)$$

La expresión 2.11 es equivalente a:

$$L = \frac{b}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \sinh^{-1} \theta \right] \quad (2.12)$$

En algunos textos se utiliza esta última expresión para calcular la longitud de curva de la espiral de Arquímedes. Así, queda verificada la propiedad.

2.8.5 Propiedad 5. La curvatura de la espiral de Arquímedes

La curvatura de la espiral de Arquímedes para un punto P de la curva está dada por:

$$k = \frac{(\theta^2 + 2)}{b(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Para verificar la propiedad dada, se emplea el resultado obtenido en el [anexo 2](#), donde la curvatura k para una curva $r = f(\theta)$ expresada en coordenadas polares esta dada por:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - r r''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sea $r = b\theta$, luego se tienen las igualdades:

- I. $r^2 = b^2\theta^2$
- II. $r' = b$
- III. $r'' = 0$

Luego, sustituyendo las igualdades I, II y III en la ecuación de curvatura, se obtiene:

$$k = \frac{b^2\theta^2 + 2(b)^2 - (b\theta)(0)}{((b\theta)^2 + (b)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{b^2\theta^2 + 2b^2}{(b^2\theta^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2(\theta^2 + 2)}{b^3(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\theta^2 + 2)}{b(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

por lo anterior, se verifica la propiedad.

Hay que recordar que el radio de curvatura en un punto P para una curva esta dado por $R = \frac{1}{k}$, luego se puede verificar que el radio de curvatura R para la espiral de Arquímedes en un punto P estará dado por:

$$R = \frac{b(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(\theta^2 + 2)}$$

2.8.6 Propiedad 6. La rectificación de la circunferencia.

Dado un punto P de la espiral y una recta tangente que pasa por él, se denomina K al punto de intersección de la recta tangente con la recta perpendicular OP que pasa por el origen, entonces, la longitud del segmento OK es igual a la longitud del arco de circunferencia con centro O y radio OP , generado por la intersección entre la circunferencia y el eje polar. Se denotará dicho arco como \widehat{POB} . ver la Figura 2-13

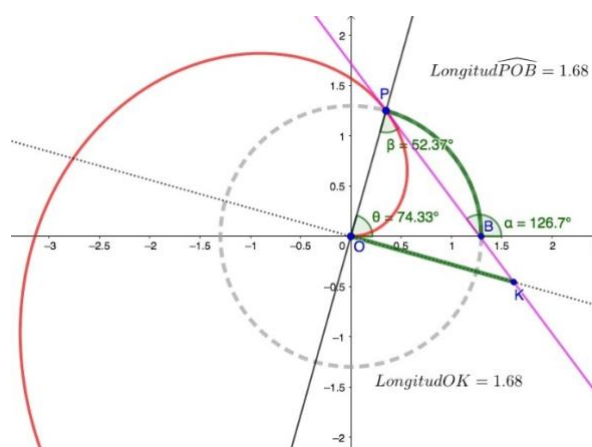


Figura 2-13: Rectificación de la circunferencia.

Para verificar esta propiedad, se parte de una función (cualquiera) en coordenadas polares

$$r = f(\theta)$$

se sabe que sus coordenadas cartesianas correspondientes verifican que:

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

entonces, la pendiente de la recta tangente en un punto (x, y) será

$$m = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$$

$$m = \frac{r \cos(\theta) + r' \sin(\theta)}{r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)} \quad (2.13)$$

En el caso de la ecuación de la espiral de Arquímedes $r = b\theta$, derivando la expresión anterior, se obtiene que $r' = b$. Reemplazando en la ecuación (2.13) y luego al realizar el cociente del denominador y numerador entre $\cos(\theta)$ se obtiene:

$$m = \frac{b(\theta \cos(\theta) + \sin(\theta))}{b(\cos(\theta) - \theta \sin(\theta))}$$

$$m = \frac{\theta + \tan\theta}{1 - \theta \tan\theta}$$

Luego, si se considera el ángulo β , tal que $\tan\beta = \theta$, se tiene que:

$$m = \frac{\theta + \tan\theta}{1 - \theta \tan\theta} = \frac{\tan\beta + \tan\theta}{1 - \tan\beta \tan\theta} = \tan(\beta + \theta)$$

En la Figura 2-13 es relevante que el ángulo θ es el ángulo POB y la suma de las medidas del ángulo β y el ángulo θ es equivalente a la medida del ángulo que forma la recta tangente con el eje X , denotado por α , con la singularidad de que α es un ángulo externo del triángulo OBP , luego α es el ángulo suplementario del ángulo OBP , ya que son ángulos que forman un par lineal, pero él $\angle OBP$ es a su vez el suplementario de la suma de los otros dos ángulos internos $\angle OPB$ y $\angle POB$ en el triángulo OPB , ya que se cumple que $m\angle POK = m\angle OPB + m\angle OBP$ en virtud del teorema del ángulo externo aplicado al triángulo OPB .

Por lo anterior, se tiene $m\angle OPB + m\angle POB = m\angle \alpha = m\angle \beta + m\angle \theta$, sin embargo, nótese que el $m\angle POB = m\angle \theta$, esto en virtud de que las coordenadas del punto P son (r, θ) , luego se deduce que $m\angle OPB = m\angle \beta$, es decir $\angle OPB^8 \cong \angle \beta$.

Ahora, el triángulo OPK es un triángulo rectángulo, entonces se cumple que $\tan\beta = \frac{OK}{OP}$. Por otro lado, $OP = r = b\theta$ por lo que $\tan\beta = \theta = \frac{OK}{b\theta}$, de donde se sigue que $OK = b\theta^2$. Como $OP = b\theta = r$ y la longitud del arco de la circunferencia viene dada por la ecuación $s = r\theta$, el

⁸ $\angle OPB \cong \angle \beta$ es la notación usada para expresar que el ángulo OPB es congruente con el ángulo β . Recuérdese que, si dos ángulos son congruentes, tienen la misma medida.

arco de circunferencia de centro en O y radio OP , comprendido entre P y el eje polar, mide lo mismo que el segmento OK ; ya que se cumple que $OK = b\theta^2 = (b\theta)\theta = r\theta = s$

Finalmente se comprueba que la espiral de Arquímedes proporciona un método para rectificar un arco de circunferencia, es decir, la medida de un arco de circunferencia puede ser expresada por medio de la medida del segmento OK , a partir de la espiral y la recta tangente en el punto de corte P con la circunferencia.

2.8.7 Propiedad 7. El área encerrada por la espiral y el eje polar en su primera vuelta equivale a la tercera parte del área del círculo que la encierra.

Sea A_{cr_1} el área del círculo que encierra la primera espira, entonces el área del círculo estará dada por $A_{cr_1} = \pi(2\pi b)^2$ de donde $A_{cr_1} = 4\pi^3 b^2$. Ver figura 2-14.

Por lo anterior, se debe probar que el área encerrada por la primera espira y el eje polar, para $0 \leq r \leq 2\pi b$ es $A_1 = \frac{1}{3}A_{cr_1}$; en palabras de Arquímedes "El área de la espiral en su primera vuelta es igual a la tercera parte del área del círculo que la envuelve"

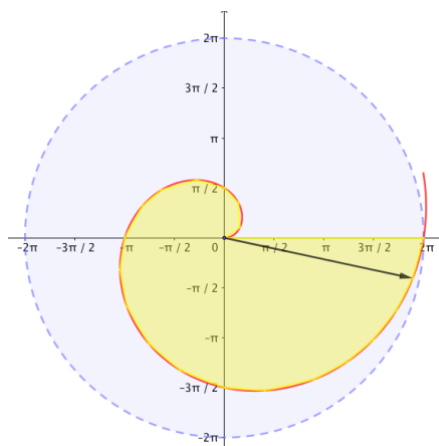


Figura 2-14: Área encerrada por la primera espira y el eje polar.

Esto se puede verificar usando cálculo integral en coordenadas polares, se debe recordar que el área de una región en forma de abanico entre el origen y la curva $r = f(\theta)$, tal que f es continua en un intervalo $[\alpha, \beta]$ con $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde f es recorrida una sola vez cuando θ aumenta desde α hasta β , está dada por la integral

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

Para comprender mejor la expresión dada, es útil imaginarse que el área está barrida por el radio vector que parte del origen O , el cual inicia con un ángulo α y termina con un ángulo β , en la Figura 2-14 se puede apreciar el área encerrada por la primera espira resaltada en color amarillo.

Sea $r = b\theta$ en su primera vuelta, entonces $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se sigue que

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (b\theta)^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{b^2 \theta^3}{2(3)} \Big|_0^{2\pi}$$

$$A_1 = \frac{b^2 \theta^3}{6} \Big|_0^{2\pi} = \frac{(2\pi)^3}{6} b^2 = \frac{4}{3} \pi^3 b^2$$

que se puede expresar en términos de r , como:

$$A_1 = \frac{4}{3} \pi^3 b^2 = \frac{1}{3} \pi (2\pi b)^2 = \frac{1}{3} \pi (r)^2 = \frac{1}{3} A_{cr_1}$$

así queda demostrado que el área de la espiral en su primera vuelta es igual a la tercera parte del área del círculo que la encierra.

2.8.8 Propiedad 8. El área encerrada por la espiral y el eje polar, entre la primera y segunda espira equivale a 1/2 del área del círculo que la encierra.

El enunciado equivale a probar que el área encerrada por la segunda espira para un radio vector r tal que $2\pi b \leq r \leq 4\pi b$ (Figura 2-15) está dada por $A_2 = \frac{1}{2} \pi r_2^2$

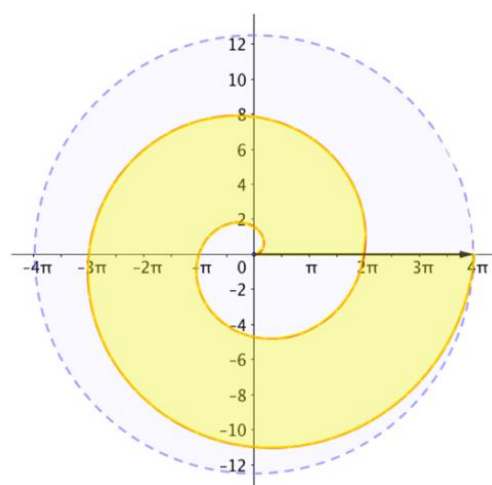


Figura 2-15: Área de la segunda espira o anillo

Sea A_{cr_2} el área del círculo que encierra la segunda espira, entonces el área total estará dada por

$$A_{cr_2} = \pi(r_2)^2$$

$$A_{cr_2} = \pi(4\pi b)^2$$

$$A_{cr_2} = 16b^2\pi^3$$

Luego $\frac{1}{2}$ del área del círculo que encierra la segunda espira es:

$$\frac{1}{2}A_{cr_2} = \frac{1}{2}[16\pi^3b^2]$$

$$\frac{1}{2}A_{cr_2} = 8\pi^3b^2$$

Ahora se procede a obtener el área encerrada entre la segunda y primera espira y el eje polar, con el propósito de verificar que es equivalente a $\frac{1}{2}A_{c2}$. Una forma de hacerlo es a través de la integral que representa el área acotada por la curva en el intervalo requerido.

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_2^2 - r_1^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(b(\theta + 2\pi))^2 - (b\theta)^2] d\theta = \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} [(\theta + 2\pi)^2 - (\theta)^2] d\theta$$

$$A_2 = \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} (\theta + 2\pi - \theta)(\theta + 2\pi + \theta) d\theta = \pi b^2 \int_0^{2\pi} (2\theta + 2\pi) d\theta$$

$$A_2 = \pi b^2 [\theta^2 + 2\pi\theta] \Big|_0^{2\pi} = \pi b^2 [4\pi^2 + 4\pi^2] = 8\pi^3 b^2$$

Por tanto, se concluye que el área encerrada entre la segunda y primera espira denotada por A_2 es equivalente a $\frac{1}{2}A_{cr_2}$; es decir, $A_2 = 8\pi^3 b^2 = \frac{1}{2}\pi(4\pi b)^2 = \frac{1}{2}A_{cr_2}$, tal como se quería mostrar. Aplicando el mismo procedimiento efectuado en la propiedad 8, se puede expresar el área encerrada entre cualquier par de espiras consecutivas y el eje polar, en términos del área del círculo que la encierra. Por ejemplo, el área encerrada por la tercera y segunda espira denotada por A_3 (tercer anillo) es equivalente a $\frac{4}{9}$ del área del círculo que la envuelve, simbolizada por

A_{cr_3} , de igual manera el área encerrada por la cuarta y tercera espira representada por A_4 (cuarto anillo) es igual a $\frac{3}{8}$ del área del círculo que la contiene, denotado por A_{cr_4} . Así mismo, se puede expresar el área de cualquier anillo o del área encerrada entre cualquier par de espiras consecutivas y el eje polar, en términos del área del círculo que encierra la espiral en su primera vuelta, es decir, en función del círculo de radio $r_1 = 2\pi b$, cuya área esta denotada por A_{cr_1} .

A continuación, se presenta el área encerrada por las primeras espiras en términos del área del círculo respectivo que encierra cada espira y también en términos del círculo que contiene la primera espira, es decir, del círculo cuyo radio es $r_1 = 2\pi b$.

Tabla 1: Se muestra el valor del área encerrada entre espiras consecutivas y el eje polar, para los primeros siete anillos de la espiral

Radio	Área del círculo que encierra a la espira dada	Área encerrada por la espira (anillo)	Área encerrada por la espira en términos del círculo que la contiene	Área encerrada por la espira en términos de A_{cr_1}
$r_1 = 2\pi b$	$A_{cr_1} = \pi(2\pi b)^2$	$A_1 = \frac{4}{3}\pi^3 b^2$	$A_1 = \frac{1}{3}A_{cr_1}$	$A_1 = \frac{1}{3}A_{cr_1}$
$r_2 = 4\pi b$	$A_{cr_2} = \pi(4\pi b)^2$	$A_2 = 8\pi^3 b^2$	$A_2 = \frac{2}{4}A_{cr_2}$	$A_2 = 2A_{cr_1}$
$r_3 = 6\pi b$	$A_{cr_3} = \pi(6\pi b)^2$	$A_3 = 16\pi^3 b^2$	$A_3 = \frac{4}{9}A_{cr_3}$	$A_3 = 4A_{cr_1}$
$r_4 = 8\pi b$	$A_{cr_4} = \pi(8\pi b)^2$	$A_4 = 24\pi^3 b^2$	$A_4 = \frac{6}{16}A_{cr_4}$	$A_4 = 6A_{cr_1}$
$r_5 = 10\pi b$	$A_{cr_5} = \pi(10\pi b)^2$	$A_5 = 32\pi^3 b^2$	$A_5 = \frac{8}{25}A_{cr_5}$	$A_5 = 8A_{cr_1}$
$r_6 = 12\pi b$	$A_{cr_6} = \pi(12\pi b)^2$	$A_6 = 40\pi^3 b^2$	$A_6 = \frac{10}{36}A_{cr_6}$	$A_6 = 10A_{cr_1}$
$r_7 = 14\pi b$	$A_{cr_7} = \pi(14\pi b)^2$	$A_7 = 48\pi^3 b^2$	$A_7 = \frac{12}{49}A_{cr_7}$	$A_7 = 12A_{cr_1}$

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 1, se pueden observar ciertos patrones que permiten encontrar una generalización para obtener el valor del área encerrada entre dos espiras consecutivas y el eje polar (nombrada por los autores de este escrito como área encerrada por la espira n ésima). Si el lector lo desea puede profundizar en este aspecto buscando una generalización con los datos que

se muestran en la Tabla 1, por ejemplo, en la tercera columna se puede evidenciar que para $n \geq 2$ donde n representa el número de espira o vuelta, se puede obtener la siguiente generalización:

$$A_n = 8(n-1)\pi^3 b^2$$

Una expresión a la que llegó Arquímedes usando valores de áreas ya conocidas para obtener el área encerrada por la espira enésima, para $n \geq 2$, y cuya idea es desarrollada en el [anexo 4](#), es la siguiente:

$$A_{n+1} = \frac{n}{(n-1)} A_n$$

Donde A_n representa el valor del área encerrada para la espira enésima (área conocida) y A_{n+1} representa el valor del área encerrada de la espira siguiente (área por encontrar); por tanto, se puede observar en la Tabla 2 que Arquímedes logró establecer un tipo de sucesión recursiva, en la cual basta conocer el área encerrada por la segunda espira para obtener las siguientes.

Tabla 2: Valor del área encerrada para las primeras espiras o anillos usando la fórmula de Arquímedes

n	$A_{n+1} = \frac{n}{(n-1)} A_n (U^2)$
2	$A_{2+1} = \frac{2}{(2-1)} A_2 \Rightarrow A_3 = 2(8\pi^3 b^2) \Rightarrow A_3 = 16 \pi^3 b^2$
3	$A_{3+1} = \frac{3}{(3-1)} A_3 \Rightarrow A_4 = \frac{3}{2}(16\pi^3 b^2) \Rightarrow A_4 = 24 \pi^3 b^2$
4	$A_{4+1} = \frac{4}{(4-1)} A_4 \Rightarrow A_5 = \frac{4}{3}(24\pi^3 b^2) \Rightarrow A_5 = 32 \pi^3 b^2$
5	$A_{5+1} = \frac{5}{(5-1)} A_5 \Rightarrow A_6 = \frac{5}{4}(32\pi^3 b^2) \Rightarrow A_6 = 40 \pi^3 b^2$

Fuente: Elaboración propia.

De manera similar, se puede obtener el área barrida por el radio vector (área encerrada total), denotada por A_B , para un ángulo de giro dado, por ejemplo, se enuncia la siguiente propiedad estudiada por Arquímedes, en la cual se obtiene el área barrida por el radio vector de la espiral hasta la segunda vuelta, denotada por A_{B2} .

2.8.9 Propiedad 9. El área barrida en la segunda vuelta está a razón de $\frac{7}{12}$ con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector

Se debe probar que $A_{B2} = \frac{7}{12}A_{cr_2}$. Se sabe que el radio vector para la segunda vuelta está determinado por $r_2 = b(\theta + 2\pi)$, luego, integrando en coordenadas polares y teniendo en cuenta que el ancho de la espiral es 2π , los límites de integración para hallar el área barrida serán $\theta_0 = 0$ y $\theta_f = 2\pi$. Figura 2-16

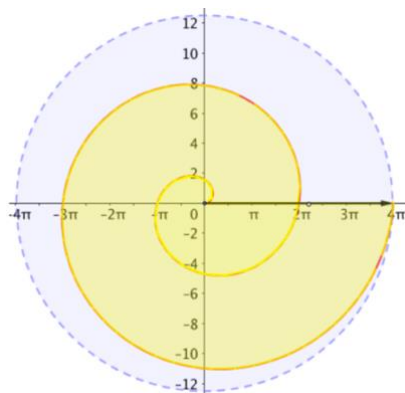


Figura 2-16: Área total o área barrida por el radio vector hasta la segunda vuelta.

$$\begin{aligned} A_{B2} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_2)^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} (\theta + 2\pi)^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \left(\frac{(\theta + 2\pi)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{b^2}{6} [(4\pi)^3 - (2\pi)^3] = \frac{28\pi^3 b^2}{3} \end{aligned}$$

Así $A_{B2} = \frac{28}{3}\pi^3 b^2$. Ahora, este valor se puede expresar en términos del área del círculo que contiene la espiral en la segunda vuelta.

$$A_{B2} = \left(\frac{4}{4}\right) \frac{28}{3} \pi^3 b^2 = \frac{7}{12} \pi (4\pi b)^2 = \frac{7}{12} A_{cr_2}$$

así queda demostrado que el área barrida por el radio vector hasta la segunda vuelta es equivalente a $\frac{7}{12}$ del área del círculo que la encierra. Esta fue una de las propiedades que Arquímedes estudió y usó para lograr generalizar el trabajo sobre áreas en la espiral uniforme.

Este mismo resultado, se hubiera obtenido fácilmente sumando las áreas encerradas por las espiras 1 y 2, obtenidas en la Tabla 1, es decir, al sumar $A_1 = \frac{4}{3}\pi^3 b^2$ y $A_2 = 8\pi^3 b^2$, se obtiene:

$$A_1 + A_2 = \frac{28}{3}\pi^3 b^2 = \frac{7}{12}A_{cr_2}$$

Iterando el procedimiento efectuado en la anterior propiedad o realizando las sumas de las áreas encerradas por espiras consecutivas presentadas en la Tabla 1, se puede obtener el valor del área barrida por el radio vector para las primeras siete vueltas, tal como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3: Área barrida por el radio vector en las primeras siete vueltas.

Radio	Área del círculo que contiene la espira hasta la vuelta dada	Área barrida o total	Área barrida en términos del círculo que la contiene	Área barrida términos de A_{cr_1}
$r_1 = 2\pi b$	$A_{cr_1} = \pi(2\pi b)^2$	$A_{B1} = \frac{4}{3}\pi^3 b^2$	$A_{B1} = \frac{1}{3}A_{c1}$	$A_{B1} = \frac{1}{3}A_{cr_1}$
$r_2 = 4\pi b$	$A_{cr_2} = \pi(4\pi b)^2$	$A_{B2} = \frac{28}{3}\pi^3 b^2$	$A_{B2} = \frac{7}{12}A_{c2}$	$A_{B2} = \frac{7}{3}A_{cr_1}$
$r_3 = 6\pi b$	$A_{cr_3} = \pi(6\pi b)^2$	$A_{B3} = \frac{76}{3}\pi^3 b^2$	$A_{B3} = \frac{19}{27}A_{c3}$	$A_{B3} = \frac{19}{3}A_{cr_1}$
$r_4 = 8\pi b$	$A_{cr_4} = \pi(8\pi b)^2$	$A_{B4} = \frac{148}{3}\pi^3 b^2$	$A_{B4} = \frac{37}{48}A_{c4}$	$A_{B4} = \frac{37}{3}A_{cr_1}$
$r_5 = 10\pi b$	$A_{cr_5} = \pi(10\pi b)^2$	$A_{B5} = \frac{244}{3}\pi^3 b^2$	$A_{B5} = \frac{61}{75}A_{c5}$	$A_{B5} = \frac{61}{3}A_{cr_1}$
$r_6 = 12\pi b$	$A_{cr_6} = \pi(12\pi b)^2$	$A_{B6} = \frac{364}{3}\pi^3 b^2$	$A_{B6} = \frac{91}{108}A_{c6}$	$A_{B6} = \frac{91}{3}A_{cr_1}$
$r_7 = 14\pi b$	$A_{cr_7} = \pi(14\pi b)^2$	$A_{B7} = \frac{508}{3}\pi^3 b^2$	$A_{B7} = \frac{127}{147}A_{c7}$	$A_{B7} = \frac{127}{3}A_{cr_1}$

Fuente: Elaboración propia.

En la búsqueda de hallar una generalización, ver [anexo 5](#), para obtener el área barrida hasta la espira n –ésima, se tiene que el área determinada por el radio vector para un ángulo θ , tal que $2(n-1)\pi \leq \theta \leq 2n\pi$, donde n indica el número de vuelta, estará dada por:

$$A_B = \left(n(n-1) + \frac{1}{3}\right)\pi r^2; \text{ tal que } r = 2\pi b$$

es decir,

$$A_B = 4 \left(n(n-1) + \frac{1}{3}\right)\pi^3 b^2$$

$$A_B = \frac{4}{3}(3n^2 - 3n + 1)\pi^3 b^2$$

Hoy en día, usando cálculo integral, se puede generalizar y encontrar una expresión para obtener el área barrida por el radio vector \vec{r} para cualquier ángulo dado $\theta > 0$. A continuación, se presenta dicha propiedad.

2.8.10 Propiedad 10. Área barrida.

El área barrida por el radio vector de la espiral de Arquímedes, para un ángulo dado θ , cuando θ varía entre θ_o y θ_f , viene dada por la expresión:

$$A_B = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} b^2 \theta^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \theta^2 d\theta$$

$$A_B = \frac{b^2 \theta^3}{6} \Big|_{\theta_o}^{\theta_f} = \frac{b^2}{6} (\theta_f^3 - \theta_o^3)$$

Por ejemplo, en la Figura 2-17 si se desea conocer el área barrida por el radio vector en la espiral para un ángulo $\theta_f = \frac{11\pi}{6}$, con $\theta_o = 0$ entonces el área estará dada por:

$$A = \frac{b^2}{6} (\theta_f^3 - \theta_o^3) = \frac{b^2}{6} \left[\left(\frac{11\pi}{6} \right)^3 - 0^3 \right] = \frac{1331}{1296} \pi^3 b^2$$

luego el área en unidades cuadradas será aproximadamente

$$A \approx 31.84 b^2 U^2$$

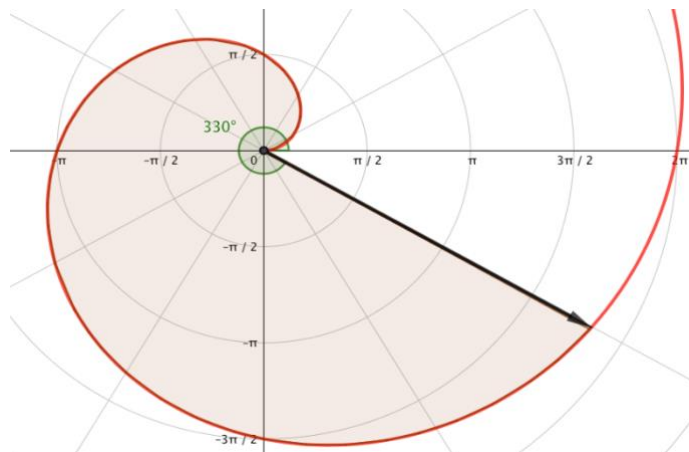


Figura 2-17: Área barrida por el radio vector de la espiral para un ángulo $\theta = \frac{11\pi}{6}$

2.8.11 Propiedad 11. Cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo consiste en construir un cuadrado que tenga igual área que un círculo dado. A continuación, se presenta la idea general de esta propiedad, haciendo uso de las propiedades previamente estudiadas como la propiedad 6 “*La rectificación de la circunferencia*” y demás propiedades sobre áreas de la espiral.

Dado un círculo con centro en O y radio $r = OP$, se traza un espiral de Arquímedes que corte a la circunferencia en el punto P , tal que el ángulo POB sea un ángulo recto. Luego se traza la recta tangente por el punto de intersección P . La tangente corta a la recta OB en el punto K , aplicando la propiedad 3 de la rectificación de la circunferencia, se cumple que OK mide lo mismo que el arco de la circunferencia comprendido entre los puntos B y P , por tanto, la medida de OK será $OK = \frac{\pi r}{2}$

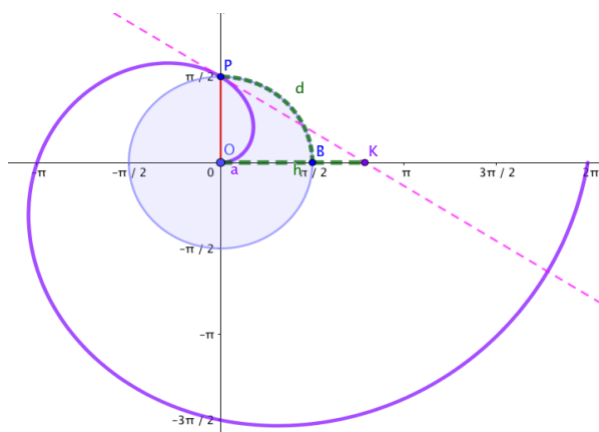


Figura 2-18: Cuadratura del círculo por medio de la espiral de Arquímedes.

Como la medida de $OK = \frac{\pi r}{2}$, basta con encontrar un cuadrado tal que su área sea πr^2 . Sean $b = 2r$ y $h = OK = \frac{\pi r}{2}$, se lograría cuadrar el área del círculo acotado por la circunferencia dada, ya que el área del círculo estará determinada por:

$$A = b(h) = 2r \left(\frac{\pi r}{2} \right) = \pi r^2$$

Nótese que se utilizó un rectángulo y este no cumple con la definición de cuadrado, ya que tanto la base como la altura deben tener la misma medida para que sea un cuadrado, luego si lo que se desea es generar un cuadrado con la misma área del círculo, entonces se puede obtener la media geométrica de la base $b = 2r$ y altura $h = OK = \frac{\pi r}{2}$, con el fin de encontrar un cuadrado de lado a , donde a será la media geométrica entre b y h tal como se observa en la Figura 2.19

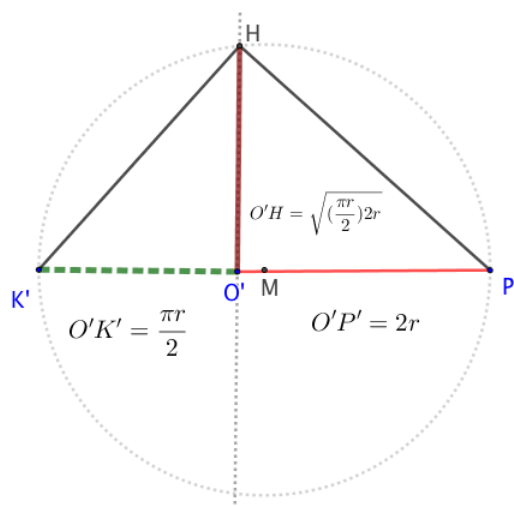


Figura 2-19: Media geométrica entre b y h

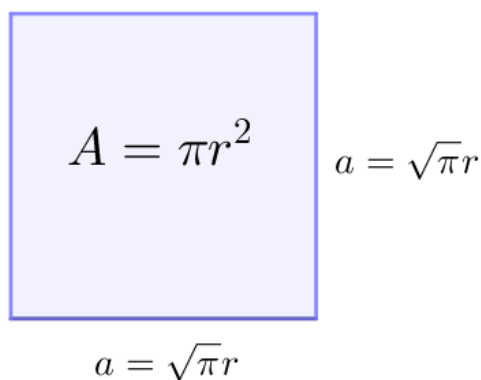


Figura 2-20: Cuadrado de lado $a = \sqrt{\pi r}$

Como se observa en la Figura 2-20 la medida del lado a (lado del cuadrado) estará dada por el segmento $O'H' = a = \sqrt{\left(\frac{\pi r}{2}\right) 2r}$; por tanto, al realizar la construcción del cuadrado de lado $a = \sqrt{\pi r}$, su área será la misma que la del círculo de radio r .

$$A = (\sqrt{\pi r})(\sqrt{\pi r}) = \pi r^2$$

También es posible cuadrar el área encerrada por cada espira o anillo y el área barrida por el radio vector de la espiral, ya que como se observó en las propiedades 8 y 10, el área de cada espira y el área barrida por el radio vector puede expresarse en función del círculo que la encierra y se puede enunciar en virtud de la propiedad mostrada.

En el siguiente capítulo se abordará una familia más general de espirales llamada espirales arquimedianas, y de la cual, la espiral de Arquímedes puede ser considerada como un caso particular. Se analizarán las propiedades de algunos miembros de dicha familia de curvas

CAPÍTULO 3: ESPIRALES ARQUIMEDIANAS

La espiral de Arquímedes hace parte de una familia general llamada espirales arquimedianas, la cual está generada por la ecuación:

$$r^m = b^m \theta \quad (3.1)$$

Para $m = 1$ se tiene el caso particular de la espiral uniforme o de Arquímedes, la cual fue estudiada en el capítulo anterior. A partir de la ecuación 3.1 variando el valor de m se pueden generar miembros específicos de la familia de espirales arquimedianas; en la Tabla 4 se presentan las ecuaciones para algunas de estas curvas, y el nombre específico con el que es conocida.

Tabla 4: Espirales arquimedianas generadas por la ecuación 3.1.

m	Curva generada	Ecuación polar
-1	Espiral hiperbólica (Varignon, 1704)	$r = \frac{b}{\theta}$
2	Espiral de Fermat (1636)	$r^2 = b^2 \theta$
-2	Espiral lituus	$r^2 = \frac{b^2}{\theta}$

A continuación, se analizan y detallan algunas propiedades y usos de ellas.

3.1 Espiral hiperbólica

3.1.1 Descripción

La espiral hiperbólica es una curva trascendental generada por la ecuación polar:

$$r = \frac{b}{\theta} \quad (3.2)$$

Como se observa en la ecuación 3.2 esta espiral se puede describir en coordenadas polares mediante la ecuación de una hipérbola equilátera análoga a $xy = b$. La curva fue estudiada por P. Nicolás en 1696, Pierre Varignon en 1704, Johan Bernoulli en 1710, quien finalmente le dio el nombre de espiral hiperbólica, y Roger Cotes en 1722.

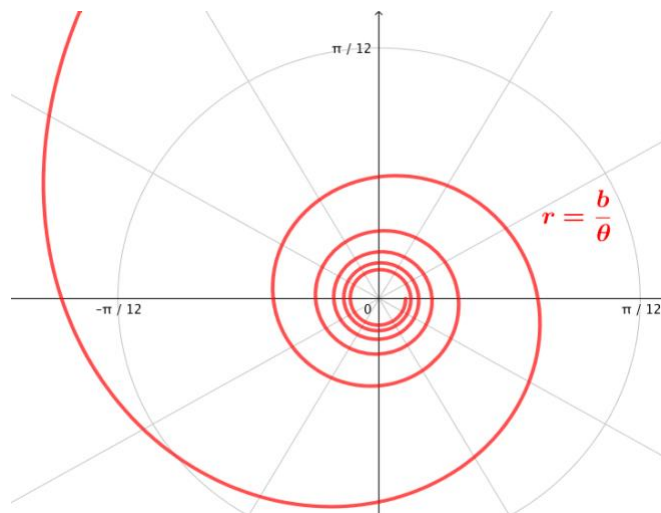


Figura 3-1: Espiral hiperbólica rama positiva ($\theta > 0$)

La espiral hiperbólica puede ser generada mediante una transformación en el plano, aplicando la inversión circular⁹ a una espiral de Arquímedes se obtiene, como imagen, la espiral hiperbólica. Esto se puede apreciar en la Figura 3-2 en la cual se observa que es posible generar una curva a partir de la otra, tomando el polo como centro de inversión. Es por esta razón que la curva hiperbólica es conocida como la inversa o recíproca de la espiral de Arquímedes, algunos lo entienden como relación recíproca, pero esto puede generar confusión.

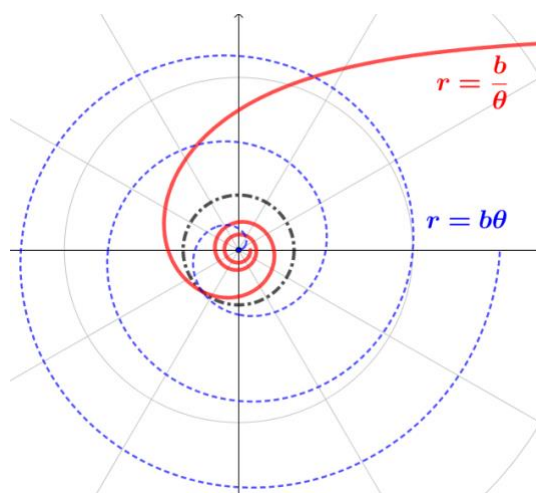


Figura 3-2: Espiral hiperbólica generada mediante una inversión circular aplicada a la espiral de Arquímedes.

⁹ La inversa es un método de derivar una curva nueva basada en un círculo. Es por tanto, una transformación independiente de la curva, que consiste en aplicar la transformación a cada punto de la curva a transformar, en coordenadas polares se puede expresar como $(r, \theta) \mapsto \left(\frac{1}{r}, \theta\right)$.

Esta curva también se puede generar como la ortocáustica de la espiral tractriz¹⁰ con respecto al centro polar, esto quiere decir que, si se pone a rodar la espiral hiperbólica sobre una recta, su polo describe una tractriz; por otra parte, si rueda sobre una espiral logarítmica, su polo describe una recta. Otra manera de generar esta curva es a través de una proyección cónica plana de una hélice circular como se observa en la Figura 3-3; una forma cotidiana de evidenciar esto es al observar una escalera en forma de caracol desde una perspectiva del plano superior como en la Figura 3-4. Si es de interés profundizar en el tema, puede consultar la página de [Robert Ferréol](https://mathcurve.com/courbes2d/hyperbolic/hyperbolic.shtml)¹¹

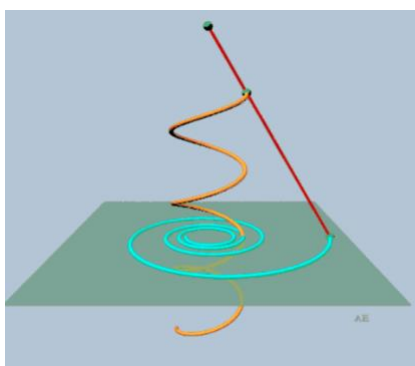


Figura 3-3: Proyección cónica plana de una hélice circular

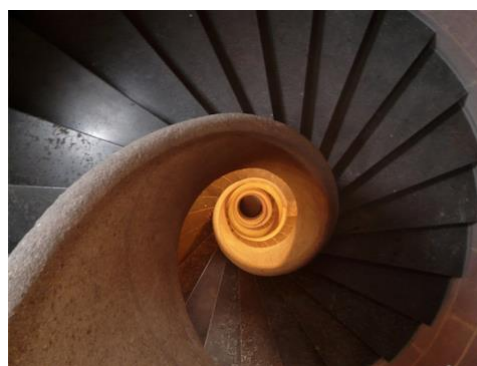


Figura 3-4: Perspectiva superior de una escalera en forma de caracol

Fuente: Tomado de *Curvas en 2D y 3D* de Mathcurve

<https://mathcurve.com/courbes2d/hyperbolic/hyperbolic.shtml>

Como curva plana, la espiral hiperbólica se puede definir como el lugar geométrico del punto P de una circunferencia variable de radio r , centrada en O , la cual corta el eje x en un punto A tal que la medida del arco PA es constante e igual a b . tal como se observa en la Figura 3-5

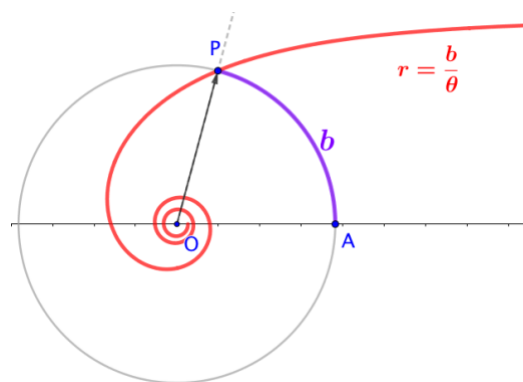


Figura 3-5: Espiral hiperbólica como lugar geométrico

¹⁰ La espiral tractriz es la curva con tangente polar constante, esta fue estudiada por Huygens, Varignon en 1704, Cotes en 1722, Giard en 1862.

¹¹ <https://mathcurve.com/courbes2d/hyperbolic/hyperbolic.shtml>

3.1.2 Ecuaciones paramétricas

Partiendo de la circunferencia en su forma reducida $x^2 + y^2 = r^2$, donde el radio r es constante, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Sustituyendo $r = \frac{b}{\theta}$ en las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, y haciendo el cambio de variable $t = \theta$ se obtienen las siguientes ecuaciones paramétricas para la espiral en coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x(t) = b \frac{\cos t}{t} \\ y(t) = b \frac{\operatorname{sen} t}{t} \end{cases} \quad (3.3)$$

La espiral hiperbólica tiene un ángulo de inclinación que aumenta con la distancia de su centro, a diferencia de la espiral de Arquímedes en la cual disminuye con la distancia. Al observar la Figura 3-2, se visualiza la gráfica de una espiral hiperbólica con $b = 3$, se puede apreciar que el valor de r disminuye y tiende a cero, pero no llega a ser cero, mientras que el ángulo θ aumenta y tiende a infinito; la curva da un número infinito de vueltas alrededor del origen al cual se aproxima, pero el origen no hace parte del dominio de la función y por este motivo es un punto asintótico de la misma.

En la Figura 3-6, se observa que la gráfica de la curva tiene una asíntota horizontal en la recta $y = b$, esto se puede apreciar analíticamente en el sistema de ecuaciones recogido en la ecuación 3.3, ya que cuando t tiende a cero, la ordenada se aproxima a b , mientras que la abscisa crece indefinidamente, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} b \frac{\cos t}{t} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow 0} b \frac{\operatorname{sen} t}{t} = b$$

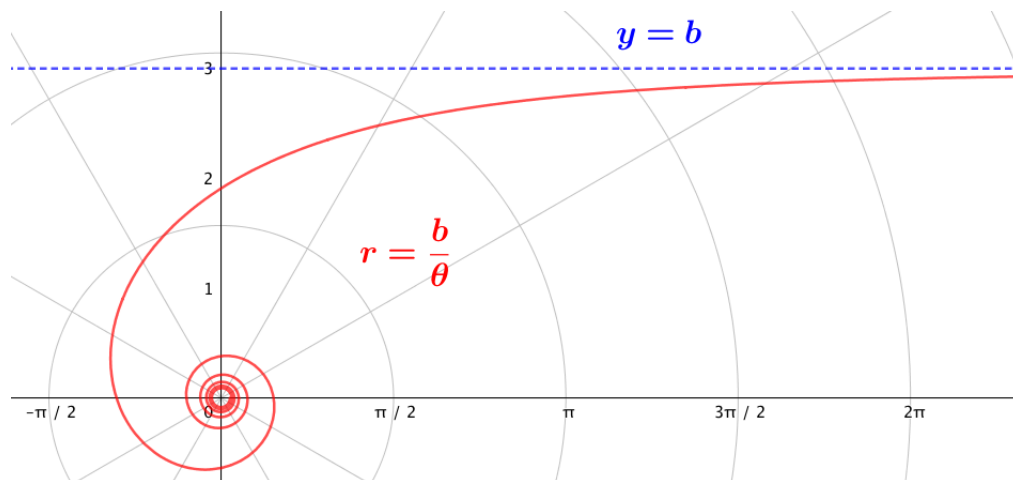


Figura 3-6: Espiral hiperbólica cuya asíntota horizontal es $y = b$

3.1.3 Ecuación cartesiana

Tal como se evidenció en la sección de la espiral de Arquímedes, una curva plana se puede representar en distintos sistemas de coordenadas; la espiral hiperbólica no es la excepción. Por tanto, se puede pasar del sistema de coordenadas polares (r, θ) al sistema de coordenadas cartesianas (x, y) , para ello se hace uso de las coordenadas paramétricas que se obtuvieron en la ecuación 3.3:

$$\begin{cases} x(\theta) = b \frac{\cos \theta}{\theta} \\ y(\theta) = b \frac{\sen \theta}{\theta} \end{cases}$$

Al realizar el cociente de y entre x , se obtiene:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sen \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

Aplicando arcotangente a ambos miembros de la igualdad, se obtiene:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Al despejar θ de la ecuación de la espiral hiperbólica se tiene que $\theta = \frac{b}{r}$, luego

$$\frac{b}{r} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sin embargo, el radio r de la circunferencia que se usó para la parametrización de la espiral se puede expresar como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y al realizar la sustitución correspondiente en la ecuación anterior, se tiene que la ecuación cartesiana de la espiral hiperbólica estará dada por:

$$\frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si se desea se puede simplificar la expresión a:

$$\frac{b\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\frac{b\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\right) \quad (3.4)$$

3.1.4. Algunas propiedades de la espiral hiperbólica

3.1.4.1 Propiedad 1. Longitud de la subtangente S_T en el punto P es constante e igual a b .

Dada la espiral hiperbólica y un punto P que pertenece a la curva, la longitud de la subtangente S_T en el punto P es constante e igual a b .

Por el [anexo 1](#), se sabe que el valor de la subtangente S_T para cualquier curva expresada en coordenadas polares se puede obtener empleando la siguiente ecuación

$$S_T = \frac{r^2}{r'}$$

como $r^2 = b^2\theta^{-2}$ y $r' = -b\theta^{-2}$, entonces el valor de la subtangente es:

$$S_T = \frac{r^2}{r'} = \frac{b^2\theta^{-2}}{-b\theta^{-2}} \Rightarrow S_T = -b$$

así queda verificada esta propiedad.

3.1.4.2 Propiedad 2: Longitud para la tangente T , subnormal S_N y la normal N

La longitud para la tangente T , subnormal S_N y la normal N en la espiral hiperbólica, para un punto P que pertenece a la curva son respectivamente:

$$T = \sqrt{b^2 + r^2} \qquad S_N = -\frac{b}{\theta^2} \qquad N = \frac{r}{b}\sqrt{r^2 + b^2}$$

En la Figura 3-7, se pueden observar los segmentos que determinan la T , S_N y N para una espiral hiperbólica en un punto P que pertenece a la curva y cuya ecuación polar es $r = b\theta^{-1}$.

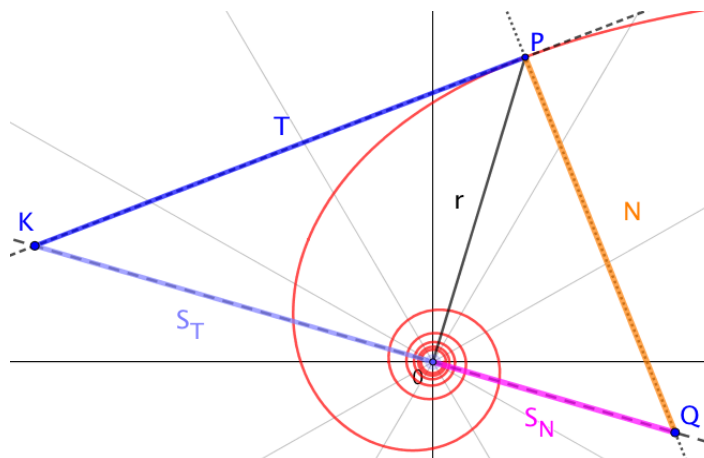


Figura 3-7: Segmento tangente T , subtangente S_T , normal N y subnormal S_N para un punto P de la espiral hiperbólica.

Empleando las ecuaciones respectivas del [anexo 1](#), se puede verificar fácilmente las siguientes igualdades:

$$T = \sqrt{S_T^2 + r^2} = \sqrt{b^2 + r^2}$$

$$S_N = r' = -b\theta^{-2} = -\frac{b}{\theta^2}$$

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{S_N^2 + r^2} = \sqrt{(-b\theta^{-2})^2 + (b\theta^{-1})^2} = \sqrt{b^2\theta^{-4} + b^2\theta^{-2}} = b\theta^{-1}\sqrt{\theta^{-2} + 1} \\ &= \frac{r}{b}\sqrt{b^2\theta^{-2} + b^2} = \frac{r}{b}\sqrt{r^2 + b^2} \end{aligned}$$

Observación aclaratoria: En los valores obtenidos se toman cantidades negativas, esto en virtud de que los segmentos son tratados como segmentos dirigidos, sin embargo, si se desea calcular solo su longitud, se debe tomar el valor absoluto para cada valor obtenido, tal como se realizó en la demostración del [anexo 1](#).

3.1.4.3 Propiedad 3. Curvatura

La curvatura de la espiral hiperbólica para un punto P de la curva está dada por:

$$k = \frac{\theta^4}{b(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Para verificar la propiedad dada, se emplea el resultado obtenido en el [anexo 2](#), donde la curvatura

k para una curva $r = f(\theta)$ expresada en coordenadas polares esta dada por:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

como $r = b\theta^{-1}$, se tiene que:

$$1) \quad r^2 = b^2\theta^{-2}$$

$$2) \quad r' = -b\theta^{-2}$$

$$3) \quad r'' = 2b\theta^{-3}$$

Sustituyendo las igualdades 1, 2 y 3 en la ecuación de curvatura, se obtiene:

$$k = \frac{b^2\theta^{-2} + 2(-b\theta^{-2})^2 - (b\theta^{-1})(2b\theta^{-3})}{(b^2\theta^{-2} + (-b\theta^{-2})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2\theta^{-2}}{\left(\frac{b^2}{\theta^2} + \frac{b^2}{\theta^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2\theta^{-2}}{\left(\frac{b^2(\theta^2 + 1)}{\theta^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{b^2\theta^{-2}}{\frac{b^3(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\theta^6}} = \frac{\theta^4}{b(\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

con lo que verificada la propiedad.

3.1.4.4 Propiedad 4. Radio de curvatura

El radio de curvatura de la espiral hiperbólica en un punto P de la curva, tiene por expresión:

$$R = \frac{r(b^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{b^3} = \frac{N^3}{S_N S_T}$$

La verificación de esta propiedad es inmediata, ya que se define el radio de curvatura R como

$R = \frac{1}{k}$ por tanto usando la propiedad 3 se obtiene:

$$R = \frac{1}{\frac{b(\theta^2 + 1)^{3/2}}{\theta^4}} = \frac{b(\theta^2 + 1)^{3/2}}{\theta^4}$$

sin embargo, la ecuación que genera la espiral hiperbólica está dada por $r^2 = b^2\theta^{-2}$, es decir

$\theta^2 = \frac{b^2}{r^2}$ por consiguiente se puede expresar el radio de curvatura en términos de r como:

$$R = \frac{b(\theta^2 + 1)^{3/2}}{\theta^4} = \frac{b\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)^{3/2}}{\frac{b^4}{r^4}} = \frac{br^4\left(\frac{b^2 + r^2}{r^2}\right)^{3/2}}{b^4} = \frac{br^4}{b^4} (b^2 + r^2)^{3/2}$$

$$R = \frac{r(b^2 + r^2)^{3/2}}{b^3}$$

Ahora, para verificar que $R = \frac{N^3}{S_N S_T}$, se parte del lado derecho de la igualdad y haciendo uso de las propiedades 1 y 2, se sustituyen los valores para N , S_N y S_T en la igualdad, con el fin de llegar a $R = \frac{N^3}{S_N S_T} = \frac{r(b^2 + r^2)^{3/2}}{b^3}$, por tanto:

$$\frac{N^3}{S_N S_T} = \frac{\left(\frac{r}{b}\sqrt{b^2 + r^2}\right)^3}{\left(-\frac{b}{\theta^2}\right)(-b)} = \frac{\theta^2 r^3 (b^2 + r^2)^{3/2}}{b^5} = \frac{(r^2)\theta^2 r (b^2 + r^2)^{3/2}}{b^5}$$

$$\frac{N^3}{S_N S_T} = \frac{(b^2\theta^{-2})\theta^2 r (b^2 + r^2)^{3/2}}{b^5}$$

$$\frac{N^3}{S_N S_T} = \frac{r(b^2 + r^2)^{3/2}}{b^3}$$

tal como se quería mostrar.

3.1.4.5 Propiedad 5. Longitud curva

La longitud de curva para la espiral de hipérbola entre dos puntos $(r(\theta_0), \theta_0)$ y $(r(\theta_f), \theta_f)$ esta dada por la expresi3n:

$$L = b \left[\ln \left| \theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right| - \frac{\sqrt{\theta^2 + 1}}{\theta} \right]_{\theta_0}^{\theta_f}$$

Para verificar la propiedad se hace uso de la integral que permite calcular la longitud de una curva en coordenadas polares, tal como se hizo en la secci3n de la espiral de Arquímedes donde se obtuvo la ecuaci3n 2.9

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta$$

Sea la ecuaci3n de la espiral hipérbola $r = b\theta^{-1}$, su derivada definida para un punto (r, θ) estar3 dada por:

$$r' = -b\theta^{-2}$$

Luego substituyendo los valores r y r' en la integral

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{(-b\theta^{-2})^2 + (b\theta^{-1})^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{b^2\theta^{-4} + b^2\theta^{-2}} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{\frac{b^2}{\theta^4} + \frac{b^2\theta^2}{\theta^4}} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{b\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta^2} d\theta = b \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta^2} d\theta$$

la integral

$$L = b \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta^2} d\theta$$

se puede resolver usando substituci3n trigonométrica,

$$\text{Sea } \theta = \tan x \Rightarrow d\theta = \sec^2 x dx$$

luego haciendo un mapeo del intervalo $\theta_o \leq \theta \leq \theta_f$ al intervalo $A \leq x \leq B$, se tiene que:

$$L = b \int_A^B \frac{\sqrt{1 + \tan^2 x} \sec^2 x}{\tan^2 x} dx \Rightarrow L = b \int_A^B \csc^2 x \sec x dx$$

observe que $\csc^2 x \sec x = (1 + \cot^2 x) \sec x$, usando razones trigonométricas, esta expresión se reduce a:

$$(1 + \cot^2 x) \sec x = \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) \left(\frac{1}{\cos x}\right) = \sec x + \cot x \csc x$$

donde la integral para la longitud de curva se puede reescribir como

$$L = b \int_A^B \sec x + \cot x \csc x dx \Rightarrow L = b \int_A^B \sec x dx + b \int_A^B \cot x \csc x dx$$

por tanto, el problema se reduce en resolver las siguientes integrales:

$$\text{I. } b \int_A^B \sec x dx = b \ln (\tan x + \sec x) \Big|_A^B$$

$$\text{II. } b \int_A^B \cot x \csc x dx = -b \csc x \Big|_A^B$$

Las integrales I y II son solucionadas a detalle en la sección de anexos; si es de interés conocer el desarrollo de estas, puede consultar el [anexo 6](#).

Resolviendo las integrales (I) y (II), se obtiene:

$$L = b \int_A^B \sec(x) dx + b \int_A^B \cot(x) \csc(x) dx = b \ln (\tan(x) + \sec(x)) \Big|_A^B - b \csc(x) \Big|_A^B$$

sin embargo, la respuesta debe estar escrita en términos de la variable inicial θ , ya que la longitud de curva inicialmente esta expresada por la integral

$$L = b \int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta^2} d\theta \quad \Leftrightarrow \quad L = b \int_A^B \sec(x) dx + b \int_A^B \cot(x) \csc(x) dx$$

Luego, efectuando el cambio a la variable inicial $\theta = \tan(x)$, y teniendo presente los límites de integración con el fin de volver al mapeo inicial $\theta_o \leq \theta \leq \theta_f$, se pueden establecer las siguientes relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo de la Figura 3-8

- $\operatorname{sen} x = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}}$
- $\operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + 1}}$
- $\operatorname{tan} x = \frac{\theta}{1} = \theta$
- $\operatorname{csc} x = \frac{\sqrt{\theta^2 + 1}}{\theta}$
- $\operatorname{sec} x = \sqrt{\theta^2 + 1}$

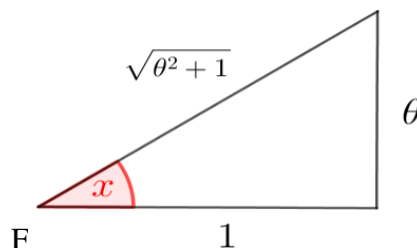


Figura 3-8: Relaciones trigonométricas para el ángulo x

usando las razones trigonométricas para efectuar el cambio de variable, se obtiene:

$$L = b \ln (\tan(x) + \sec(x)) \Big|_A^B - b \operatorname{csc}(x) \Big|_A^B$$

$$L = b \ln (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) \Big|_{\theta_o}^{\theta_f} - b \frac{\sqrt{\theta^2 + 1}}{\theta} \Big|_{\theta_o}^{\theta_f}$$

$$L = b \left[\ln (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) - \frac{\sqrt{\theta^2 + 1}}{\theta} \right] \Big|_{\theta_o}^{\theta_f}$$

tal como se quería verificar.

3.1.4.6 Propiedad 6. Área barrida por el radio vector

El área barrida por el radio vector r de una espiral hiperbólica para un ángulo dado θ , cuando θ varía entre θ_o y θ_f , viene dada por la expresión:

$$A = \frac{b}{2} (r_o - r_f)$$

Para verificar esta propiedad, nuevamente se debe realizar la integral de la función en coordenadas polares, tal como se hizo en la sección anterior para calcular el área barrida en la espiral de Arquímedes:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} f(\theta)^2 d\theta$$

en este caso, la función hiperbólica está dada por $f(\theta) = r = b\theta^{-1}$, luego realizando la integral se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} (b\theta^{-1})^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \theta^{-2} d\theta = -\frac{b^2\theta^{-1}}{2} \Big|_{\theta_o}^{\theta_f}$$

luego se procede a evaluar los límites de integración:

$$A = -\frac{1}{2} [b^2\theta_f^{-1} - b^2\theta_o^{-1}] = -\frac{b}{2} [b\theta_f^{-1} - b\theta_o^{-1}] = -\frac{b}{2} [r_f - r_o] = \frac{b}{2} [r_o - r_f]$$

Observe que la expresión obtenida para el área es equivalente al valor del área de un triángulo cuya base es el valor de b y cuya altura es el valor absoluto de la magnitud de la diferencia de los radio vectores. Por ejemplo, si se desea hallar el área comprendida entre la curva y dos radio vectores para un ángulo θ tal que $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ para la espiral $r = \theta^{-1}$ (Figura 3-9) simplemente se usa la expresión obtenida en la propiedad 6

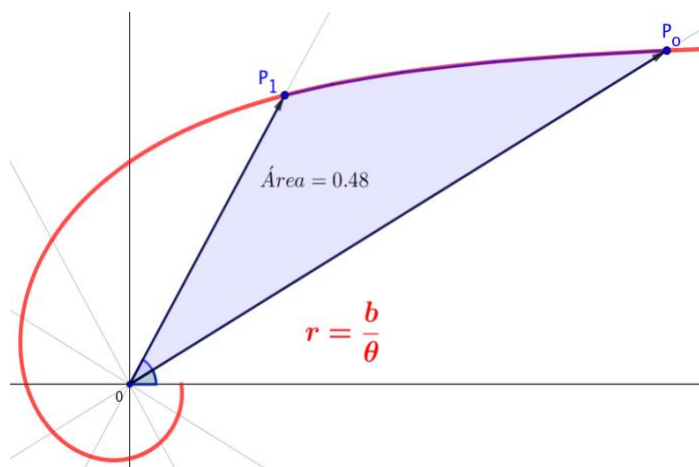


Figura 3-9: Área comprendida entre la espiral hiperbólica y dos radio vectores

$$A = \frac{b}{2} [r_o - r_f]$$

$$A = \frac{b}{2} \left[\frac{b}{\theta_o} - \frac{b}{\theta_f} \right]$$

$$A = \frac{b^2}{2} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \right]$$

en particular para $b = 1$

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{\pi} \right] \approx 0.48 u^2$$

3.1.4.7 Propiedad 7. Longitudes de arco constantes

Las longitudes de arco de todas las circunferencias (centradas en el polo) medidas desde la curva hasta el eje polar, son constantes e iguales a b ; tal como se aprecia en la Figura 3-10

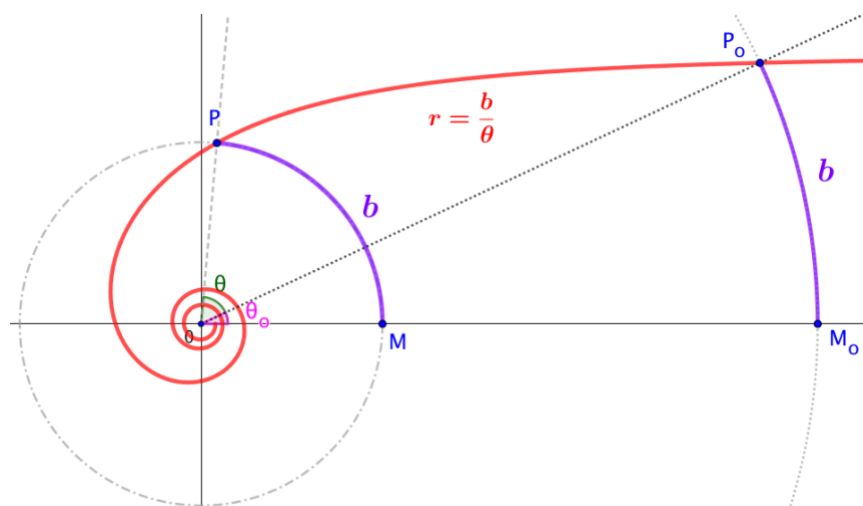


Figura 3-10: Las longitudes de arco de todas las circunferencias (centradas en el polo) medidas desde la curva hasta el eje polar son iguales a b

La verificación de esta propiedad es inmediata. Se debe recordar que la longitud de arco de una circunferencia está dada por:

$$s = \theta r$$

como la espiral hiperbólica está generada por la ecuación $r = b\theta^{-1}$, sustituyendo r en la igualdad anterior se obtiene:

$$s = \theta r \Rightarrow s = \theta(b\theta^{-1})$$

por tanto, se verifica que $s = b$ tal como se quería mostrar.

Esta propiedad es usualmente empleada para obtener los puntos de partida de corredores en una pista atlética; para el caso en que la pista atlética sea circular, si el radio del carril circular interior es R , entonces la espiral hiperbólica que marca los puntos de partida de los corredores será:

$$r = \frac{2\pi R}{2\pi - \theta}$$

En la Figura 3-11 se puede apreciar que el radio de la pista circular interior es $R = 8$, al trazar la espiral hiperbólica respectiva, esta determina los puntos A, B y C de salida de los corredores y la meta o puntos de llegada son respectivamente A, B_1 y C_1 , recuerde que el

perímetro de la circunferencia es $2\pi r$ nótese que la distancia recorrida D_1 , D_2 y D_3 , por los tres corredores es la misma

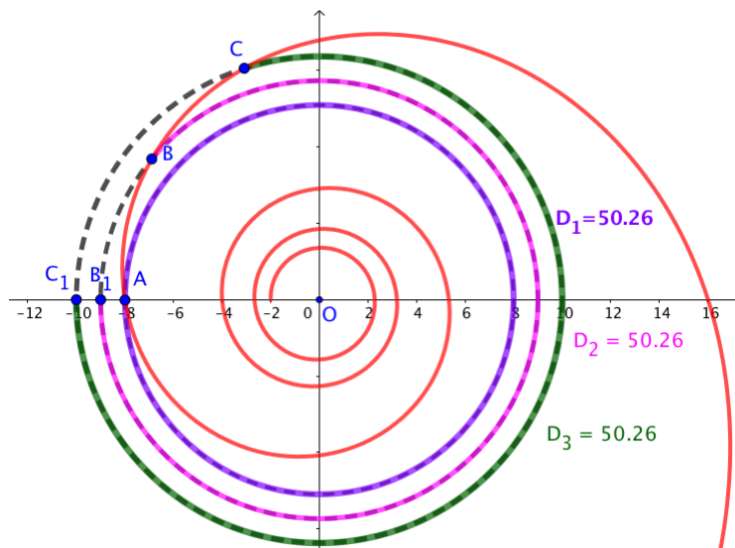


Figura 3-11: Puntos de partida A, B y C de corredores en una pista atlética circular, determinados por la espiral hiperbólica, tal que $D_1 = D_2 = D_3$

3.2 Espiral de Fermat

3.2.1 Descripción

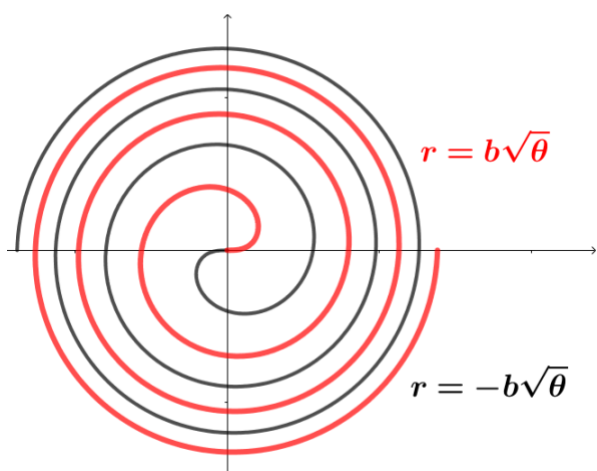


Figura 3-12: Espiral de Fermat

La espiral de Fermat es una curva trascendente plana que hace parte de la familia de espirales arquimedianas generadas por la ecuación polar

$$r^m = b^m \theta.$$

Si $m = 2$, entonces se obtiene la ecuación 3.5 que genera la espiral de Fermat

$$r^2 = b^2 \theta \Rightarrow r = \pm b\sqrt{\theta}; \theta \geq 0 \quad (3.5)$$

En la ecuación 3.5 se puede apreciar que para cualquier valor positivo del ángulo θ le corresponden dos valores de r , los cuales son valores opuestos, generando así dos ramas de la curva, una positiva y una negativa tal como se observa en la Figura 3-12; Además, si se observa el comportamiento de la curva para la rama positiva se puede establecer que cuando θ aumenta,

los valores positivos de r también aumentan, esto implica que el punto que genera la curva se aleja cada vez más del origen polar y da un número infinito de vueltas alrededor de este.

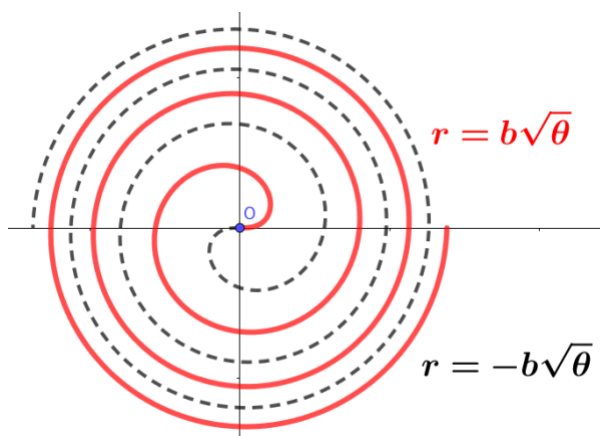


Figura 3-13: Las ramas positiva y negativa de la espiral de Fermat son simétricas respecto al origen polar.

Las dos ramas de la espiral forman una curva continua en donde el origen polar es punto de inflexión de la curva, ya que en este punto la curva cambia de concavidad. Además, tal como se muestra en la figura 3-13 las dos ramas de la curva son simétricas respecto a este punto, la rama negativa de la curva (curva punteada) es el reflejo de la rama positiva generada a través del punto de origen O .

La espiral de Fermat puede ser generada por medio de una inversión circular aplicada a otra espiral denominada espiral lituus: para ello se genera una circunferencia de radio r , centrada en el origen, y luego se aplica la inversión de la espiral lituus respecto a dicha circunferencia, tal como se ilustra en la figura 3-14; es por esta razón que la espiral lituus es conocida como la inversa o recíproca de la espiral de Fermat.

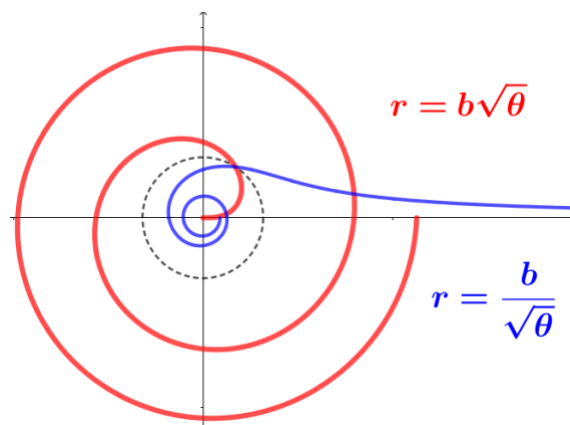


Figura 3-14: Inversión circular de la rama positiva de la espiral lituus (curva azul) por medio de la cual se genera la rama positiva de la espiral de Fermat (curva roja).

Según Texeira, F (1905) La espiral de Fermat es un caso particular de espiral parabólica, cuya ecuación viene dada por $(r - a)^2 = b^2\theta$; si $a = 0$, entonces se obtiene la ecuación de la espiral de Fermat, por esta razón espiral es llamada espiral parabólica; sin embargo, nótese que es solo un caso particular de una espiral parabólica.

Uno de los primeros en estudiar esta curva fue Menelao de Alejandría a finales del siglo I; posteriormente quien retomaría su estudio sería Pierre de Fermat en el siglo XVII, a quien se le atribuye su nombre y fue el propio Fermat quien estudió varias de las propiedades matemáticas que se conocen hoy en día sobre esta espiral, entre ellas se resalta una propiedad singular que establece la relación entre áreas determinadas por espiras consecutivas, que fue plasmada, junto con el estudio de otras propiedades, en una carta escrita y dirigida por Fermat a Marin Mersenne el 3 de junio de 1636, en los siguientes términos actuales: El área entre dos arcos o espiras consecutivas de la espiral, después de la primera vuelta o giro completo, es igual al área del círculo que encierra la primera espira; tal como se ilustra en la Figura 3-15. Esto se verificará en la propiedad 7 del presente apartado.

Fermat también encontró que, a partir de la primera vuelta (un giro completo), el área comprendida entre dos vueltas consecutivas alrededor de la espiral es constante; como resultado, la distancia entre vueltas crece en proporción inversa a su distancia desde el centro de la espiral, en contraste con la de Arquímedes, la de Fermat es similar, con la disimilitud que la espiral de Arquímedes mantiene la misma distancia entre arcos, es decir, es de paso constante.

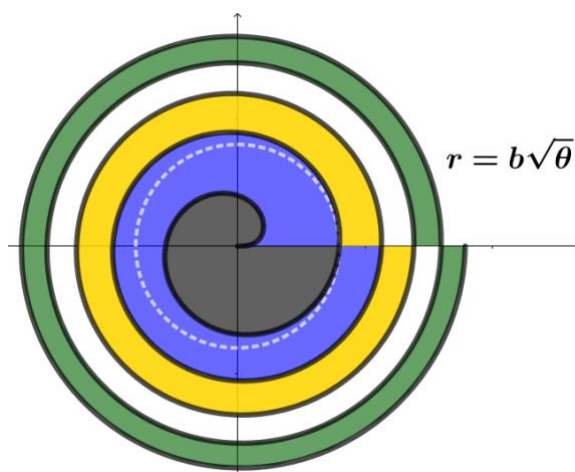


Figura 3-15: Las regiones encerradas entre espiras consecutivas y el eje polar después de la primera vuelta (Azul, amarilla, blanca, verde) tienen la misma área.

3.2.2 Arte y cotidianidad

La geometría de esta espiral es notoria en diferentes campos de estudio, ejemplo de ello, es el crecimiento de plantas. En botánica la filotaxis consiste en la disposición geométrica repetitiva de elementos alrededor de un eje o centro, en el caso de las flores, cuando todos los elementos tienen el mismo tamaño, la forma de las espirales usadas para este modelado¹² usualmente es la espiral de Fermat (Figura 3-16) evidenciable en el caso del girasol y de la flor

¹² Si es de interés del lector profundizar en el uso de la espiral de Fermat para el modelado y estudio de las flores, puede consultar <https://mathtourist.blogspot.com/2020/04/fermats-natural-spirals.html>

margarita, esta última presenta una franja de pétalos blancos o de colores y un disco central de floretes tubulares; en este disco central el patrón corresponde a la espiral de Fermat como se observa en la Figura 3-17.

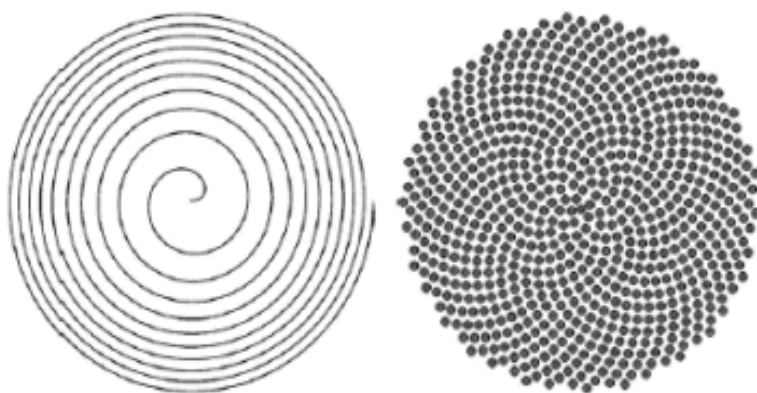


Figura 3-16: Espiral de Fermat a la izquierda, a la derecha patrón filotáctico que genera un efecto óptico de espirales entrecruzadas.



Figura 3-17: Flor margarita

Fuente: Tomado de *Fermat Spiral Mándalas* (Krawczyk, 2005) (Figura 3-16) y *Fermat's Natural Spiral* (Science new,2005) (Figura 3-17)

Este modelo fue propuesto por H. Vogel en 1979 y propone un patrón de distribución de las flores y semillas del girasol. El modelo se expresa en coordenadas polares (r, θ) como $r = c\sqrt{n}$ $\theta = n(137.5^\circ)$ donde θ es el ángulo, r es el radio o distancia desde el centro, n es el número índice de la flor y c es una constante. Es una forma de espiral de Fermat. El ángulo de 137.5° se relaciona con la proporción áurea, la cual provee la forma más eficiente de empaquetamiento de las flores.

Para culminar con algunos de los usos y aplicaciones de la espiral de Fermat cabe resaltar que se utiliza en el diseño de condensadores variables, empleados a menudo en los circuitos¹³ L/C , también fue utilizada en el diseño de reflectores de energía solar y ciclotrones, relacionado a un acelerador de partículas en 1930 por Ernest O. Lawrence. En la actualidad uno de los usos de la espiral de Fermat es el diseño de espejos de energía solar concentrada (Figura 3-18).

¹³ En electrodinámica, un circuito L/C es un circuito lineal que contiene una bobina y un capacitor y es llamado circuito resonante u oscilador

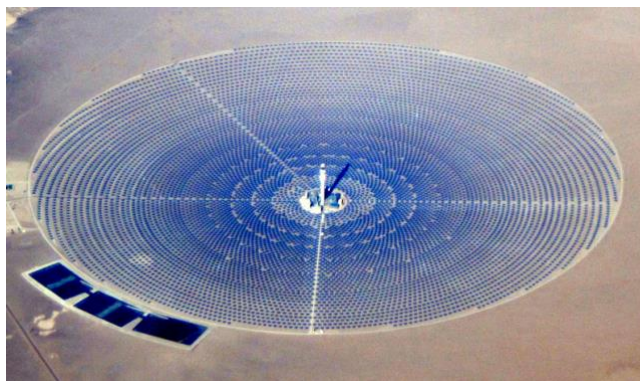


Figura 3-18: Torre de energía solar en el Proyecto de Energía Solar Crescent Dunes

Fuente: Tomado de *Crescent Dunes Solar* (Wikimedia, 2014)

3.2.3 Ecuaciones paramétricas

Se sabe que las ecuaciones paramétricas de una circunferencia del tipo $x^2 + y^2 = r^2$ son:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

se conoce que la ecuación polar de espiral de Fermat está dada por $r = \pm b\sqrt{\theta}$, entonces sustituyendo el valor positivo de r en las ecuaciones paramétricas de la circunferencia se obtienen las siguientes ecuaciones paramétricas para la espiral de Fermat:

$$\begin{cases} x(\theta) = b\sqrt{\theta} \cos \theta \\ y(\theta) = b\sqrt{\theta} \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad (3.6)$$

La ecuación 3.6 genera la rama positiva de la curva, y cuyo parámetro θ pertenece a los números reales tal que $\theta \geq 0$.

3.2.4 Ecuación cartesiana

Para realizar el paso del sistema de coordenadas polares (r, θ) al sistema de coordenadas cartesianas (x, y) , se emplean las coordenadas paramétricas que se obtuvieron en la ecuación 3.6:

$$\begin{cases} x(\theta) = b\sqrt{\theta} \cos \theta \\ y(\theta) = b\sqrt{\theta} \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Realizando el cociente $\frac{y}{x}$ se obtiene

$$\frac{y}{x} = \frac{b\sqrt{\theta} \operatorname{sen} \theta}{b\sqrt{\theta} \operatorname{cos} \theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

aplicando arco tangente a ambos miembros de la igualdad:

$$\theta = \operatorname{arctan} \left(\frac{y}{x} \right)$$

como $r^2 = b^2 \theta \Rightarrow \theta = \frac{r^2}{b^2}$, entonces sustituyendo θ en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{r^2}{b^2} = \operatorname{arctan} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Sin embargo, nótese que $r^2 = x^2 + y^2$, sustituyendo r^2 en la expresión anterior y aplicando tangente en ambos miembros de la igualdad se tiene que la ecuación cartesiana de la espiral de Fermat estará dada por:

$$\frac{y}{x} = \tan \left(\frac{x^2 + y^2}{b^2} \right)$$

3.2.5 Algunas propiedades de la espiral de Fermat

3.2.5.1 Propiedad 1. Longitud de la subtangente y la subnormal

La subtangente S_T y la subnormal de la curva para un punto (r, θ) están dadas por:

$$\text{I. } S_T = \frac{2r^3}{b^2} \qquad \text{II. } S_N = \frac{b^2}{2r}$$

Se sabe que la expresión para la espiral de Fermat está dada por $r^2 = b^2 \theta$, luego al tomar la rama positiva y derivar r respecto θ se obtiene:

$$r = b\theta^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r' = \frac{b}{2\theta^{\frac{1}{2}}}$$

Por el [anexo 1](#), se sabe que la ecuación para obtener el valor de la longitud de la subtangente es:

$$S_T = \frac{r^2}{|r'|}$$

luego sustituyendo r y r' se sigue:

$$S_T = \frac{r^2}{|r'|} = \frac{b^2\theta}{\frac{b}{2\theta^{\frac{1}{2}}}} = 2b\theta^{\frac{3}{2}}$$

el resultado obtenido se puede expresar en términos de r como:

$$S_T = 2b\theta^{\frac{3}{2}} = \frac{2b^3\theta^{\frac{3}{2}}}{b^2} = \frac{2r^3}{b^2} \quad (3.7)$$

ahora, para obtener el valor de la longitud de subnormal S_N se hace uso del [anexo 1](#), el cual indica que:

$$S_N = |r'|$$

luego sustituyendo r' se sigue que:

$$S_N = \left| \frac{b}{2\theta^{\frac{1}{2}}} \right|$$

para expresar el resultado en términos de r se multiplica el numerador y denominador por b y se sustituye $r = b\theta^{\frac{1}{2}}$

$$S_N = \frac{b}{2\theta^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2}{2b\theta^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2}{2r} \quad (3.8)$$

con lo que queda verificada la propiedad.

3.2.5.2 Propiedad 2. Longitud de la tangente y la normal

Las expresiones para obtener el valor de la longitud de la tangente T y la normal N , para un punto P que pertenece a la curva son respectivamente:

$$T = b\sqrt{4\theta^3 + \theta} \qquad N = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4\theta^2 + 1}{\theta}}$$

En virtud del [anexo 1](#) se conoce que la longitud de la tangente y la normal están dadas por $T = \sqrt{S_T^2 + r^2}$ y $N = \sqrt{S_N^2 + r^2}$, haciendo uso de la propiedad 1 se obtiene:

$$T = \sqrt{S_T^2 + r^2} = \sqrt{\left(2b\theta^{\frac{3}{2}}\right)^2 + b^2\theta} = \sqrt{4b^2\theta^3 + b^2\theta} = b\sqrt{4\theta^3 + \theta}$$

$$N = \sqrt{S_N^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2\theta^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + b^2\theta} = \sqrt{\frac{b^2}{4\theta} + b^2\theta} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4\theta^2 + 1}{\theta}}$$

tal como se quería demostrar.

Por ejemplo, si se desea calcular las longitudes de los segmentos T , N , S_N y S_T , en un punto P en la espiral de Fermat con $b = 1$, para un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{3}$, se realizan los cálculos para dicho ángulo empleando las propiedades 1 y 2 como se muestra a continuación.

Longitud de la subtangente $S_T = 2b\theta^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \approx 2.14$

Longitud de la tangente $T = b\sqrt{4\theta^3 + \theta} = (1)\sqrt{\frac{4\pi^3}{3^3} + \frac{\pi}{3}} \approx 2.37$

Longitud de la subnormal $S_N = \frac{b}{2\theta^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx 0.49$

Longitud de la normal $N = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4\theta^2 + 1}{\theta}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + 1}{\frac{\pi}{3}}} \approx 1.13$

En la Figura 3-19 se presentan los valores obtenidos en GeoGebra®, y comparando con los volares calculados, se puede observar que los valores teóricos obtenidos son una buena aproximación.

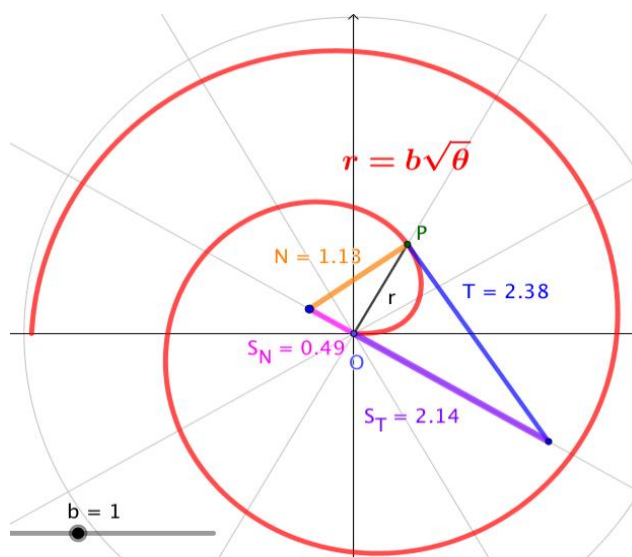


Figura 3-19: Longitud de segmentos subtangente S_T , tangente T , subnormal S_N y normal N , para un punto dado $P = \left(1.02, \frac{\pi}{3}\right)$ en la espiral de Fermat

3.2.5.3 Propiedad 3. Curvatura

La curvatura de la espiral de Fermat para un punto P que pertenece a la curva está dada por:

$$k = \frac{2r(4r^4 + 3b^4)}{(4r^4 + b^4)^{\frac{3}{2}}}$$

Para verificar la propiedad enunciada, se hace uso del [anexo 2](#) en el cual se demostró que la curvatura k para una curva r expresada en coordenadas polares (r, θ) está dada por:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

como la espiral de Fermat está generada por $r = b\theta^{\frac{1}{2}}$, se tienen las siguientes igualdades:

- I. $r^2 = b^2\theta$
- II. $r' = \frac{1}{2}b\theta^{-\frac{1}{2}}$
- III. $r'' = -\frac{1}{4}b\theta^{-\frac{3}{2}}$

luego al sustituir I, II y III en la ecuación de curvatura, se obtiene:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2\theta + 2\left(\frac{1}{2}b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - b\theta^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}b\theta^{-\frac{3}{2}}\right)}{\left(b^2\theta + \left(\frac{1}{2}b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{b^2\theta + \frac{b^2}{2\theta} + \frac{b^2}{4\theta}}{\left(b^2\theta + \frac{b^2}{4\theta}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2\theta + \frac{2b^2}{4\theta} + \frac{b^2}{4\theta}}{\left(\frac{4b^2\theta^2 + b^2}{4\theta}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2\theta + \frac{3b^2}{4\theta}}{\left(\frac{4b^2\theta^2 + b^2}{2^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{4b^2\theta^2 + 3b^2}{4\theta}}{\frac{(4b^2\theta^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{8\theta^{\frac{3}{2}}}}$$

$$k = \frac{2\theta^{\frac{1}{2}}(4b^2\theta^2 + 3b^2)}{(4b^2\theta^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ahora, para expresar el resultado obtenido en términos del radio vector r , se multiplica tanto el numerador como el denominador por b^3 y luego se sustituye $r^4 = b^4\theta^2$

$$k = \frac{2\theta^{\frac{1}{2}}(4b^2\theta^2 + 3b^2)}{(4b^2\theta^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{b^3}{b^3}\right) = \frac{2b\theta^{\frac{1}{2}}(4b^4\theta^2 + 3b^4)}{(4b^4\theta^2 + b^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r(4r^4 + 3b^4)}{(4r^4 + b^4)^{\frac{3}{2}}}$$

así queda verificada la propiedad.

3.2.5.4 Propiedad 4. Radio de curvatura

El radio de curvatura de la espiral de Fermat en un punto P de la curva, tiene por expresión:

$$R = \frac{(4r^4 + b^4)^{\frac{3}{2}}}{2r(4r^4 + 3b^4)}$$

su verificación es inmediata, ya que $R = \frac{1}{k}$

3.2.5.5 Propiedad 5. Longitud de curva

La longitud de curva para la espiral de Fermat entre dos puntos $(r(\theta_0), \theta_0)$ y $(r(\theta), \theta)$ se puede obtener de manera similar a las otras espirales estudiadas hasta el momento, haciendo uso de la integral de longitud de curva en coordenadas polares:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta$$

Sin embargo, al sustituir r' y r en la integral, en la expresión obtenida surge una integral que debe ser resuelta numéricamente ya que no posee una primitiva elemental, así:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + b^2\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{\frac{b^2}{4\theta} + b^2\theta} d\theta \\ L &= \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{\frac{b^2 + 4b^2\theta^2}{4\theta}} d\theta = \frac{b}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{\frac{1 + 4\theta^2}{\theta}} d\theta = \frac{b}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_f} \sqrt{\frac{(1 + 4\theta^2)(1 + 4\theta^2)}{\theta(1 + 4\theta^2)}} d\theta \\ L &= \frac{b}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{(4\theta^2 + 1)}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta = \frac{b}{2} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right] \end{aligned}$$

la primera integral se puede resolver por métodos de integración usuales, sin embargo, la segunda integral expresada por:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}}$$

es una integral elíptica y debe resolverse numéricamente para obtener una aproximación; por tanto, se puede dejar expresada la longitud de curva de la espiral de Fermat en términos de estas dos integrales.

$$L = \frac{b}{2} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right]$$

3.2.5.6 Propiedad 6. Área barrida por el radio vector

El área barrida por el radio vector desde θ_o hasta θ_f , está dada por la expresión:

$$A = \frac{b^2}{4} (\theta_f^2 - \theta_o^2)$$

Para verificar esta propiedad, se debe desarrollar la integral de área para una curva en coordenadas polares, tal como se ha hecho anteriormente.

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} f^2(\theta) d\theta$$

Al igual que en las propiedades anteriores, nuevamente vamos a trabajar con la rama positiva de la curva, luego la espiral de Fermat estará generada por $r = f(\theta) = b\theta^{\frac{1}{2}}$, sustituyendo $f(\theta)$ en la integral se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \left(b\theta^{\frac{1}{2}}\right)^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \theta d\theta = \frac{b^2}{4} (\theta^2) \Big|_{\theta_o}^{\theta_f} = \frac{b^2}{4} (\theta_f^2 - \theta_o^2)$$

así, queda verificada la propiedad.

Con esta propiedad se puede calcular el área barrida por el radio vector para cada vuelta, por ejemplo, para el área barrida hasta la primera vuelta o espira, denotada por A_{B1} en la Figura 3-20, estará dada por:

$$A_{B1} = \frac{b^2}{4} (\theta_f^2 - \theta_o^2) = \frac{b^2}{4} ((2\pi)^2 - 0)$$

$$A_{B1} = b^2 \pi^2 u^2$$

donde u^2 representa las unidades de área.

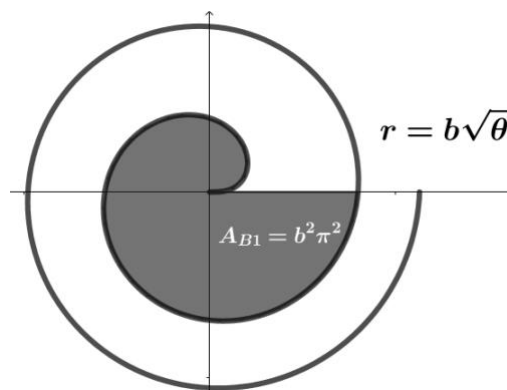


Figura 3-20: Área barrida por el radio vector en la primera vuelta A_{B1}

Para la segunda vuelta en la Figura 3-21, el ángulo en el que inicia el barrido el radio vector es $\theta_o = 2\pi$ y el ángulo en el que finaliza el barrido el radio vector será $\theta_f = \theta_o + 2\pi$, es decir $\theta_f = 4\pi$, así el área barrida o total hasta la segunda vuelta o espira será:

$$A_{B2} = \frac{b^2}{4} (\theta_f^2 - \theta_o^2) = \frac{b^2}{4} ((4\pi)^2 - (2\pi)^2)$$

$$A_{B2} = 3b^2\pi^2 u^2$$

Para la tercera vuelta en la Figura 3-22 el radio vector comienza a barrer el área desde el ángulo $\theta_o = 4\pi$ y termina el barrido en el ángulo $\theta_f = \theta_o + 2\pi$, es decir $\theta_f = 6\pi$. Por tanto, el área barrida por el radio vector hasta la tercera vuelta A_{B3} estará dada por:

$$A_{B3} = \frac{b^2}{4} (\theta_f^2 - \theta_o^2) = \frac{b^2}{4} ((6\pi)^2 - (4\pi)^2)$$

$$A_{B3} = 5b^2\pi^2 u^2$$

Luego, si se continúa realizando el cálculo para el área barrida de las vueltas siguientes, entonces al iterar el proceso, se puede observar que para la vuelta n ésima el área barrida A_{Bn} estará dada por:

$$A_{Bn} = (2n - 1)b^2\pi^2 u^2$$

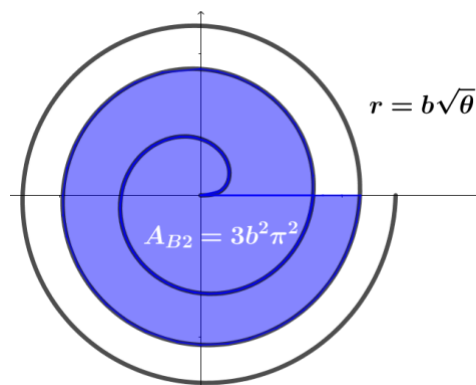


Figura 3-21: Área barrida por el radio vector hasta la segunda vuelta A_{B2}

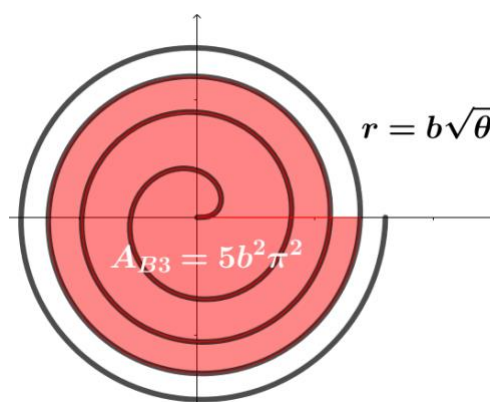


Figura 3-22: Área barrida por el radio vector hasta la tercera vuelta A_{B3}

3.2.5.7 Propiedad 7. Área encerrada por la primera espira y el eje polar es la mitad del área del círculo que la encierra.

El radio r del círculo que encierra la primera espira, en la Figura 3-23, está determinado por $r = b\theta^{\frac{1}{2}}$, como el círculo que encierra la primera espira corresponde a la primera vuelta, entonces $\theta = 2\pi$, así, el radio del círculo estará dado por $r = b(2\pi)^{\frac{1}{2}}$ luego al calcular el área del círculo se obtiene:

$$A_c = \pi r^2 = \pi \left(b(2\pi)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$A_c = 2\pi^2 b^2 u^2$$

Por tanto, el área de círculo que encierra la primera espira es $A_c = 2b^2\pi^2$, ahora solo falta encontrar el área que encierra la curva en su primera vuelta, pero esto ya se hizo en el análisis posterior efectuado en la propiedad 6, se debe recordar que:

$$A_{B1} = \frac{b^2}{4} (\theta_f^2 - \theta_o^2) = \frac{b^2}{4} ((2\pi)^2 - 0) = b^2\pi^2 u^2$$

es decir

$$A_{B1} = b^2\pi^2 u^2 = \frac{1}{2} A_c$$

tal como se quería mostrar.

3.2.5.8 Propiedad 8. Áreas iguales.

El área encerrada entre dos arcos o espiras consecutivas de la espiral y el eje polar, después de la primera vuelta o giro completo es constante e igual al área del círculo que encierra la primera espira. Para verificar esta propiedad, se notarán las áreas encerradas entre espiras consecutivas después de la primera vuelta como $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ tal como se ilustra en la Figura 3-24.

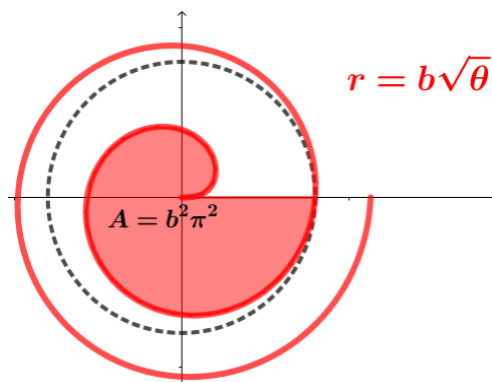
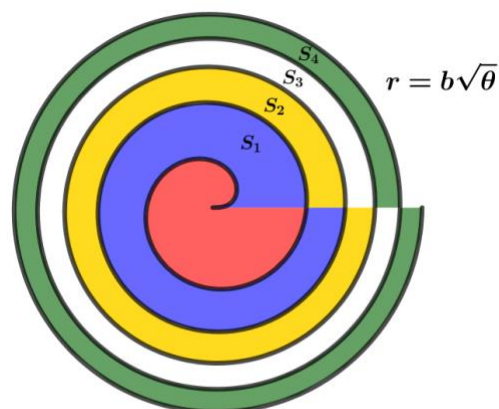


Figura 3-23: El área encerrada por la primera espira y el eje polar es la mitad del área del círculo que la encierra.



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 2b^2\pi^2$$

Figura 3-24: Cada una de las regiones encerradas entre espiras consecutivas y el eje polar tienen la misma área.

Nótese que a partir del estudio realizado en la propiedad 6 y 7 para el área barrida, se puede obtener el valor del área encerrada entre dos espiras consecutivas y el eje polar, de manera similar al trabajo realizado en la espiral de Arquímedes, los datos para el área barrida se pueden organizar como se registra en la Tabla 5:

Tabla 5: Área barrida por el radio vector en la espiral de Fermat para las primeras siete vueltas.

Vuelta	Ángulo inicial θ_o	Ángulo final $\theta_f = \theta_o + 2\pi$	Área Barrida (u^2)
1	0	2π	$A_{B1} = b^2\pi^2$
2	2π	4π	$A_{B2} = 3b^2\pi^2$
3	4π	6π	$A_{B3} = 5b^2\pi^2$
4	6π	8π	$A_{B4} = 7b^2\pi^2$
5	8π	10π	$A_{B5} = 9b^2\pi^2$
6	10π	12π	$A_{B6} = 11b^2\pi^2$
7	12π	14π	$A_{B7} = 13b^2\pi^2$

Fuente: Elaboración propia.

Con los valores obtenidos es posible calcular el área encerrada entre cualquier par de espiras consecutivas. Para esto, se debe efectuar la siguiente operación: Al área barrida por el radio vector hasta la vuelta n se le debe restar el área barrida de la vuelta anterior, es decir, la vuelta $n - 1$, tal como se presenta en la Tabla 6

Tabla 6: Se presentan los datos para el área que encierran espiras consecutivas después de la primera vuelta en la espiral de Fermat.

Vuelta	Área Barrida A_n (u^2)	Área Barrida A_{n-1} (u^2)	Área encerrada entre espiras consecutivas (u^2)
2	$A_{B2} = 3b^2\pi^2$	$A_{B1} = b^2\pi^2$	$S_1 = 2b^2\pi^2$
3	$A_{B3} = 5b^2\pi^2$	$A_{B2} = 3b^2\pi^2$	$S_2 = 2b^2\pi^2$
4	$A_{B4} = 7b^2\pi^2$	$A_{B3} = 5b^2\pi^2$	$S_3 = 2b^2\pi^2$
5	$A_{B5} = 9b^2\pi^2$	$A_{B4} = 7b^2\pi^2$	$S_4 = 2b^2\pi^2$
6	$A_{B6} = 11b^2\pi^2$	$A_{B5} = 9b^2\pi^2$	$S_5 = 2b^2\pi^2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	A_n	A_{n-1}	$S_n = A_n - A_{n-1}$

Fuente: Elaboración propia.

Luego, al observar los datos de la Tabla 6 y en virtud de la propiedad 7, se puede verificar que el área encerrada entre espiras consecutivas después de la primera vuelta siempre será igual al área del círculo que encierra la primera espira, es decir:

$$S_n = A_n - A_{n-1} = 2b^2\pi^2 = A_c$$

así queda verificada esta propiedad.

3.2.5.9 Propiedad 9: Área entre arcos consecutivos.

Las regiones determinadas entre los sectores polares y cada par de espiras consecutivas tienen la misma área, tal como se observa en la Figura 3-25, es decir, las áreas determinadas por los arcos consecutivos entre dos radio vectores son iguales.

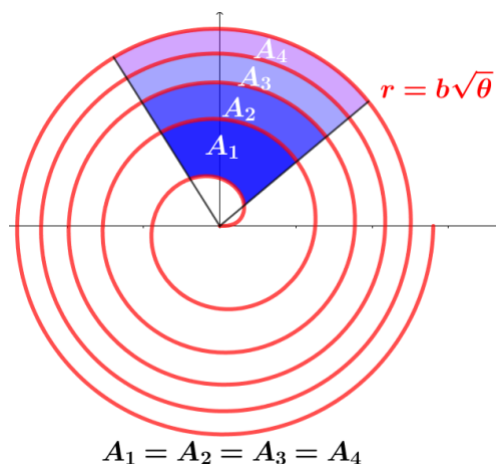


Figura 3-25: Las áreas determinadas por arcos consecutivos entre dos radio vectores son iguales

Se sabe que el área barrida por el radio vector de una curva en coordenadas polares está dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta) d\theta$$

donde $f(\theta) = r$. Como se necesita calcular el área comprendida entre arcos vecinos y dos radios vectores r_1 y r_2 después de la primera vuelta, entonces se denota esta área como A_1 , se sigue que $r_1 = b(\theta + 2\pi)^{\frac{1}{2}}$ y $r_2 = b(\theta + 4\pi)^{\frac{1}{2}}$, así el área A_1 estará dada por:

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta$$

resolviendo la integral se obtiene:

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(b(\theta + 4\pi)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(b(\theta + 2\pi)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] d\theta = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(\theta + 4\pi) - (\theta + 2\pi)] d\theta$$

$$A_1 = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi d\theta = \pi b^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \pi b^2 (\theta_2 - \theta_1)$$

donde

$$A_1 = \pi b^2 (\theta_2 - \theta_1)$$

Ahora, si se realiza el cálculo del área para el siguiente par de arcos consecutivos, se tendría que aumentar en 2π el ángulo θ , así A_2 estará dada por:

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(b(\theta + 6\pi)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(b(\theta + 4\pi)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] d\theta = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(\theta + 6\pi) - (\theta + 4\pi)] d\theta$$

$$A_2 = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi d\theta = \pi b^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \pi b^2 (\theta_2 - \theta_1)$$

del resultado obtenido se puede observar que las áreas A_2 y A_1 son iguales, es decir

$$A_2 = \pi b^2 (\theta_2 - \theta_1) = A_1$$

Si se desea generalizar el resultado para cualquier par de arcos consecutivos, entonces teniendo en cuenta que se parte después de la primera vuelta. Sea k una vuelta cualquiera con $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$, se tiene que:

$$A_k = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(b(\theta + \pi k)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(b(\theta + \pi(k-2))^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] d\theta = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(\theta + \pi k) - (\theta + k\pi - 2\pi)] d\theta$$

$$A_k = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi d\theta = \pi b^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \pi b^2 (\theta_2 - \theta_1)$$

así queda verificada la propiedad.

Nótese que para el caso en que el ángulo barrido sea una vuelta, $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$, en consecuencia $A_k = \pi b^2 (\theta_2 - \theta_1) = 2\pi^2 b^2$ que coincide con el resultado obtenido en la propiedad 8. Esta última propiedad es otro ejemplo de las posibles aplicaciones de la geometría de la espiral en el diseño de condensadores variables, empleados a menudo en los circuitos L/C, para establecer la frecuencia de resonancia, como, por ejemplo, para sintonizar un radio.

3.3 Espiral Lituus

3.3.1 Descripción

La espiral lituus fue nombrada así por su similitud con el báculo o bastón romano llamado lituus, el cual empleaban los sacerdotes romanos para ciertos rituales. Fue el matemático inglés Roger Cotes (1682–1716) quien relacionó la forma de la espiral con el lituus romano y etrusco.

A partir de la ecuación 3.1 que genera la familia de espirales arquimedianas, si el valor del parámetro m es $m = -2$, se obtiene la ecuación en coordenadas polares que representa la espiral lituus es:

$$r^2 \theta = b^2 \quad r = \pm \frac{b}{\sqrt{\theta}} \quad (3.9)$$

De la ecuación 3.9, se puede deducir que la gráfica de la curva tiene dos ramas, una positiva y una negativa, de igual manera se puede ver que el ángulo θ es inversamente proporcional al cuadrado del radio. Por otra parte, en la Figura 3-26, se muestra la rama positiva de la curva, se observa que a medida que el valor de θ aumenta el punto que genera la curva

describe un número infinito de vueltas alrededor del origen, pero el origen no hace parte del dominio de la función, es decir, es un punto asintótico de la curva; también se puede apreciar que cuando el valor del ángulo θ tiende a ser cero, el punto generador de la curva se aleja indefinidamente del eje de las ordenadas y se aproxima cada vez más al eje de las abscisas o al eje polar.

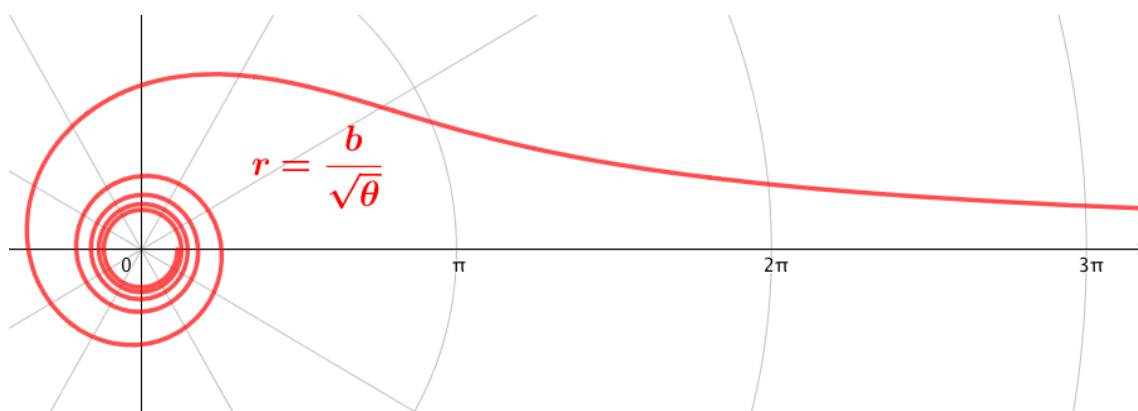


Figura 3-26: Rama positiva de la espiral lituus

La inversión en el círculo unitario en coordenadas polares se puede expresar como $(r, \theta) \mapsto \left(\frac{1}{r}, \theta\right)$. La espiral lituus puede ser generada mediante una inversión circular de una espiral de Fermat, como se evidencia en la Figura 3-27; es por esto por lo que la espiral lituus es conocida como la curva recíproca de la espiral de Fermat

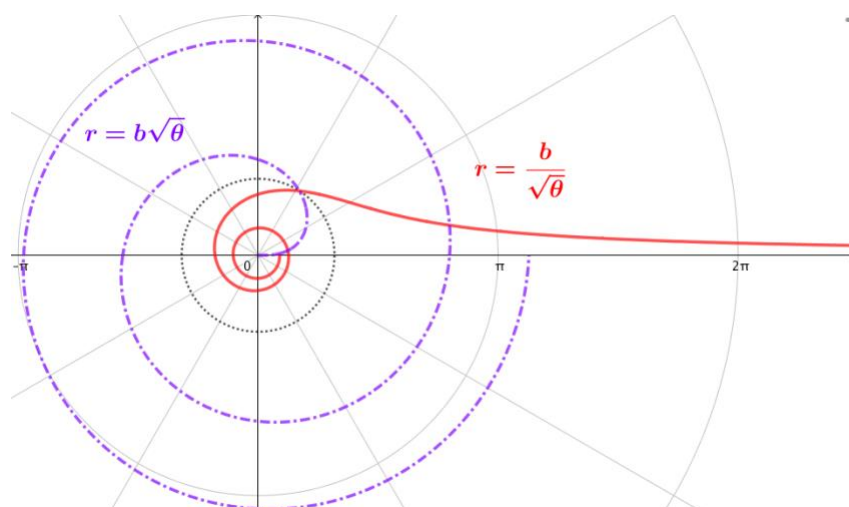


Figura 3-27: Inversión circular de la espiral de Fermat por medio de la cual es genera la espiral lituus

3.3.2 Ecuaciones paramétricas

Partiendo de la circunferencia en su forma reducida $x^2 + y^2 = r^2$, donde el radio r es constante, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Sustituyendo $r = \frac{b}{\sqrt{\theta}}$ en las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, y haciendo el cambio de variable $t = \theta$ se obtienen las ecuaciones paramétricas para la espiral lituus en coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x(t) = b \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \\ y(t) = b \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} \end{cases} \quad (3.10)$$

De 3.10 se puede observar que

$$x(t) = b \frac{\cos t}{\sqrt{t}} = b\sqrt{t} \frac{\cos t}{t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} b\sqrt{t} \frac{\cos t}{t} = \infty$$

$$y(t) = b \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} = b\sqrt{t} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} b\sqrt{t} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 0$$

por tanto, podría decirse que la curva tiene una asíntota horizontal en el eje de las abscisas.

3.3.3 Ecuación cartesiana

Para pasar del sistema de coordenadas polares (r, θ) al sistema de coordenadas cartesianas (x, y) , se emplean las coordenadas paramétricas que se obtuvieron en la ecuación 3.10 efectuando el cociente de y entre x :

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

Aplicando arcotangente a ambos miembros de la igualdad y sustituyendo el valor del ángulo $\theta = \frac{b^2}{r^2}$, se obtiene:

$$\frac{b^2}{r^2} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right)$$

que puede escribirse de otra forma sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2$ y aplicando tangente a ambos miembros de la igualdad

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\frac{b^2}{x^2 + y^2}\right) \quad (3.11)$$

3.3.4 Algunas propiedades de la espiral lituus

3.3.4.1 Propiedad 1. Longitud del segmento subtangente

La subtangente S_T de la curva para un punto (r, θ) esta dada por:

$$S_T = -2b\theta^{\frac{1}{2}} = \frac{-2b^2}{r}$$

A partir de $r = b\theta^{-\frac{1}{2}}$ y en virtud del [anexo 1](#), se sabe que la ecuación para obtener el valor de la subtangente está dada por:

$$S_T = \frac{r^2}{r'}$$

luego

- $r^2 = b^2\theta^{-1}$
- $r' = -\frac{b\theta^{-\frac{3}{2}}}{2}$

sustituyendo estos valores en la ecuación de la subtangente, se obtiene:

$$S_T = \frac{r^2}{r'} = \frac{-2b^2\theta^{-1}}{b\theta^{-\frac{3}{2}}}$$

$$S_T = -2b\theta^{\frac{1}{2}}$$

al multiplicar por 1 el miembro derecho de la igualdad, donde ese 1 está expresado en términos de la propia curva, se tiene:

$$S_T = -2b\theta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b\theta^{-\frac{1}{2}}}{r}\right)$$

$$S_T = \frac{-2b^2}{r}$$

3.3.4.2 Propiedad 2. Longitud de los segmentos tangente, subnormal y normal

Las expresiones para obtener el valor de la tangente T , la subnormal S_N y la normal N en la espiral Lituus, para un punto P que pertenece a la curva son respectivamente:

$$T = b \sqrt{4\theta + \frac{1}{\theta}} \quad S_N = -\frac{b\theta^{-\frac{3}{2}}}{2} \quad N = \frac{b}{2\theta} \sqrt{4\theta + \frac{1}{\theta}}$$

Por definición de espiral lituus se sabe que $r = b\theta^{-\frac{1}{2}}$, y por la propiedad 1 se tiene que la subtangente es $S_T = -2b\theta^{\frac{1}{2}}$. Empleando las ecuaciones del [anexo 1](#), se pueden verificar las igualdades dadas:

$$T = \sqrt{S_T^2 + r^2} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\left(-2b\theta^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{4b^2\theta + b^2\theta^{-1}} = b \sqrt{4\theta + \frac{1}{\theta}}$$

$$S_N = r' \quad \Rightarrow \quad S_N = \frac{d}{d\theta} \left(b\theta^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{b\theta^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

$$N = \sqrt{S_N^2 + r^2} \quad \Rightarrow \quad N = \sqrt{\left(-\frac{b\theta^{-\frac{3}{2}}}{2}\right)^2 + \left(b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4\theta^3} + \frac{b^2}{\theta}} = \sqrt{\frac{b^2}{4\theta^3} + \frac{4\theta^2 b^2}{4\theta^3}}$$

$$N = b \sqrt{\frac{1 + 4\theta^2}{4\theta^3}} = \frac{b}{2\theta} \sqrt{4\theta + \frac{1}{\theta}}$$

quedando verificadas las expresiones para las longitudes T , S_N y N para un punto P de la espiral lituus.

Por ejemplo, si se desea calcular el valor de la longitud para los segmentos subtangente S_T , tangente T , subnormal S_N y normal N , para un punto P de la espiral lituus con un ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $b = 1$ simplemente se sustituye el valor de θ para las ecuaciones obtenidas en las propiedades 1 y 2, teniendo en cuenta que se debe tomar el valor positivo del valor obtenido para cada longitud.

Longitud de la subtangente	$S_T = \left -2b\theta^{\frac{1}{2}} \right = \left -2(1)\sqrt{\frac{\pi}{3}} \right = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 2.046$
Longitud de la tangente	$T = b \sqrt{4\theta + \frac{1}{\theta}} = (1) \sqrt{\frac{4\pi}{3} + \frac{3}{\pi}} \approx 2.267$
Longitud de la subnormal	$S_N = \left -\frac{b\theta^{-\frac{3}{2}}}{2} \right = \left -\frac{(1)\sqrt{\left(\frac{3}{\pi}\right)^3}}{2} \right = \frac{\sqrt{\frac{27}{\pi^3}}}{2} \approx 0.466$
Longitud de la normal	$N = \frac{b}{2\theta} \sqrt{4\theta + \frac{1}{\theta}} = \frac{(1)}{2\frac{\pi}{3}} \sqrt{4\frac{\pi}{3} + \frac{3}{\pi}} = \frac{3}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{3} + \frac{3}{\pi}} \approx 1.082$

tal como se ilustra en la Figura 3-28, la cual fue construida en GeoGebra ®, se muestra una aproximación para la longitud de cada uno de los segmentos.

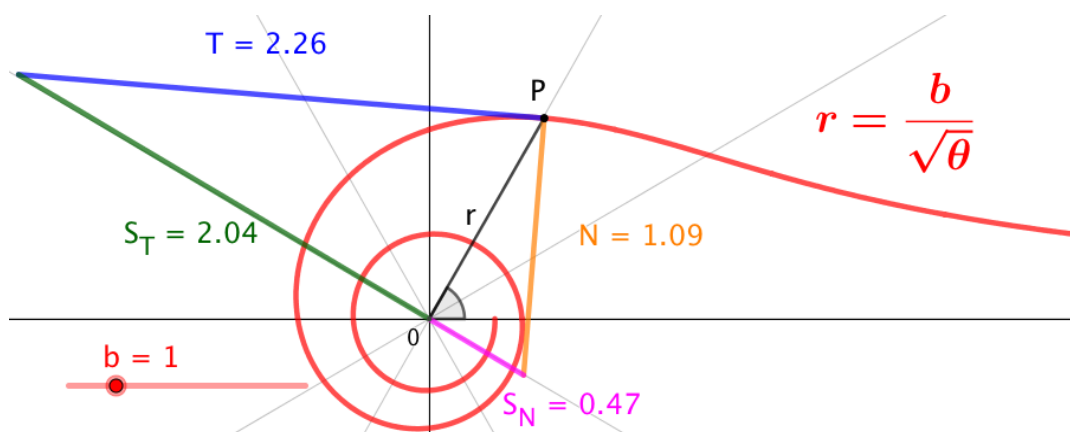


Figura 3-28: Longitud de segmentos subtangente S_T , tangente T , subnormal S_N y normal N , para un punto dado $P = \left(0.56, \frac{\pi}{3}\right)$ de la espiral lituus

3.3.4.3 Propiedad 3. Curvatura

La curvatura de la espiral lituus para un punto P de la curva está dada por:

$$k = \frac{2(4\theta^2 - 1)\theta^{\frac{3}{2}}}{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2b^2(r^4 - 4b^4)}{r(4b^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}$$

Se verificará la propiedad enunciada en virtud del [anexo 2](#), en el cual se mostró que la curvatura k para una curva r expresada en coordenadas polares (r, θ) está dada por:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sea la curva lituus generada por $r = b\theta^{-\frac{1}{2}}$, se tienen las siguientes igualdades:

$$\text{I. } r^2 = b^2\theta^{-1}$$

$$\text{II. } r' = -\frac{1}{2} b\theta^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{III. } r'' = \frac{3}{4} b\theta^{-\frac{5}{2}}$$

sustituyendo las igualdades I, II y III en la ecuación de curvatura, se obtiene:

$$k = \frac{b^2\theta^{-1} + 2\left(-\frac{1}{2} b\theta^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - \left(b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{3}{4} b\theta^{-\frac{5}{2}}\right)}{\left(b^2\theta^{-1} + \left(-\frac{1}{2} b\theta^{-\frac{3}{2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{b^2}{\theta} + \frac{b^2}{2\theta^3} - \frac{3b^2}{4\theta^3}}{\left(\frac{b^2}{\theta} + \frac{b^2}{4\theta^3}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{\frac{4\theta^2 b^2}{4\theta^3} + \frac{2b^2}{4\theta^3} - \frac{3b^2}{4\theta^3}}{\left(\frac{4\theta^2 b^2}{4\theta^3} + \frac{b^2}{4\theta^3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{b^2(4\theta^2 - 1)}{4\theta^3}}{\left(\frac{b^2(4\theta^2 + 1)}{4\theta^3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(4\theta^3)^{\frac{3}{2}} b^2 (4\theta^2 - 1)}{4\theta^3 b^3 (4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8\theta^{\frac{9}{2}} (4\theta^2 - 1)}{4\theta^3 b (4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{2(4\theta^2 - 1)\theta^{\frac{3}{2}}}{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

ahora, falta probar el lado derecho de la igualdad

$$\frac{2(4\theta^2 - 1)\theta^{\frac{3}{2}}}{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2b^2(r^4 - 4b^4)}{r(4b^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}$$

para ello, se parte de lo demostrado anteriormente (lado izquierdo de la igualdad) con el fin de probar esta aserción se debe recordar que $r = b\theta^{-\frac{1}{2}}$ y $b^2 = r^2\theta$.

$$k = \frac{2(4\theta^2 - 1)\theta^{\frac{3}{2}}}{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\theta^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}(4\theta^2 - 1)}{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\theta(4\theta^2 - 1)}{b\theta^{-\frac{1}{2}}(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(4\theta^3 - \theta)}{r(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r^6(4\theta^3 - \theta)}{rr^6(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = -\frac{2r^6(\theta - 4\theta^3)}{r(4r^4\theta^2 + r^4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2r^6\theta(1 - 4\theta^2)}{r(4(r^2\theta)^2 + r^4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2r^2\theta(r^4 - 4(r^2\theta)^2)}{r(4(r^2\theta)^2 + r^4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2b^2(r^4 - 4(b^2)^2)}{r(4(b^2)^2 + r^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = -\frac{2b^2(r^4 - 4b^4)}{r(4b^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}$$

así queda verificada la propiedad. Se hace énfasis que el razonamiento se hizo sobre la rama positiva de la curva.

3.3.4.4 Propiedad 4. Radio de curvatura

El radio de curvatura de la espiral lituus en un punto P de la curva, tiene por expresión:

$$R = \frac{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2(4\theta^2 - 1)\theta^{\frac{3}{2}}}$$

Su verificación es inmediata, ya que $R = \frac{1}{k}$

3.3.4.5 Propiedad 5. Longitud de curva

La expresión para calcular la longitud de curva (L) esta dada por:

$$L = \int_{\theta_o}^{\theta_f} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta$$

al sustituir $r^2 = b^2/\theta$ y $r' = -\frac{b\theta^{-\frac{3}{2}}}{2}$ en la integral anterior, se obtiene:

$$L = \int_{\theta_o}^{\theta_f} \sqrt{\left(-\frac{b\theta^{-\frac{3}{2}}}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{\theta}} d\theta = \frac{b}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \sqrt{\frac{1+4\theta^2}{\theta^3}} d\theta = \frac{b}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \left(\frac{\sqrt{1+4\theta^2}\sqrt{1+4\theta^2}}{\theta\sqrt{\theta}\sqrt{1+4\theta^2}}\right) d\theta$$

$$L = \frac{b}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{1+4\theta^2}{\theta\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} d\theta = \frac{b}{2} \left[\int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} + \int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{4\theta^2}{\theta\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} d\theta \right]$$

luego

$$L = \frac{b}{2} \left[\int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} + 4 \int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{\theta}{\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} d\theta \right] \quad (3.12)$$

En la expresión 3.12, se observa que la longitud de la espiral lituus no puede ser calculada mediante los métodos de integración usuales, ya que la segunda integral es una integral elíptica¹⁴ de segunda especie, reducida a su forma normal, que puede ser aproximada mediante métodos numéricos; Sin embargo, la longitud de curva L puede ser calculada mediante la función hipergeométrica gaussiana¹⁵ de la forma:

$$L = 2\theta_o^{\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\theta^{-2}\right) - 2\theta_o^{\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\theta_o^{-2}\right)$$

En particular, no se realizará la verificación de esta propiedad en el presente trabajo, pero aun así, es pertinente que el lector sepa que existe una manera de hallar la longitud de la curva lituus por métodos poco convencionales y que se encuentran en lo que se denominan las matemáticas especiales.

¹⁴ En cálculo, una integral elíptica es una función f de la forma $f(x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)}) dt$; donde R es una función racional, P es un polinomio sin raíces repetidas y $c \in \mathbb{R}$

¹⁵La función hipergeométrica de Gauss o función hipergeométrica de primer orden ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es una función especial representada por la serie hipergeométrica, que incluye otras funciones como casos especiales o límite. Es una solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.

3.3.4.6 Propiedad 6. Puntos de inflexión en la rama positiva de la curva.

La espiral lituus tiene un único punto de inflexión en $\theta = \frac{1}{2}$ y $r = b\sqrt{2}$

En la Figura 2.31 se ilustra la rama positiva de la espiral lituus, y en ella se puede evidenciar que la curva tiene un punto de inflexión. Se debe recordar que un punto de inflexión de una curva o función es aquel punto en el cual la función cambia de cóncava a convexa o viceversa, este punto de inflexión se puede encontrar usando el criterio de la segunda derivada, sin embargo, la curva a analizar esta expresada en coordenadas polares, por tanto, para obtener los puntos de inflexión se puede analizar el cambio de curvatura de la función y tal como se demostró en el [anexo 4](#) el curvatura k para una función r en coordenadas polares está dada por:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ahora bien, como se mostró en la propiedad 3, la curvatura para la espiral lituus es:

$$k = \frac{2(4\theta^2 - 1)\theta^{\frac{3}{2}}}{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

como se desea obtener el cambio de signo en la curvatura, entonces se debe igualar a cero y así hallar los puntos de inflexión:

$$\frac{2(4\theta^2 - 1)\theta^{\frac{3}{2}}}{b(4\theta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

luego despejando θ se obtiene:

$$4\theta^2 - 1 = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{1}{2}$$

sin embargo, para $\theta = -\frac{1}{2}$ se obtiene un valor imaginario de r

$$r(\theta) = b\theta^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow r\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{b}{\sqrt{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow r\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{b\sqrt{2}}{i} \Rightarrow r\left(-\frac{1}{2}\right) = -b\sqrt{2}i$$

por tanto, el único punto de inflexión real para la rama positiva de la espiral lituus es:

$$r(\theta) = b\theta^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow r\left(\frac{1}{2}\right) = b\sqrt{2}$$

Así, las coordenadas polares para el punto de inflexión son: $\theta = \frac{1}{2}$ y $r = b\sqrt{2}$, tal como se quería probar.

3.3.4.7 Propiedad 7. Área barrida por el radio vector r

El área barrida por el radio vector r de una espiral lituus para un ángulo dado θ , cuando θ varia entre θ_o y θ_f , viene dada por la expresión:

$$A = \frac{1}{2} b^2 \ln\left(\frac{\theta_f}{\theta_o}\right)$$

Para verificar esta propiedad se realiza la integral

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} f^2(\theta) d\theta$$

como la espiral lituus está representada por $f(\theta) = b\theta^{-\frac{1}{2}}$, entonces:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \left(b\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{1}{\theta} d\theta$$

y resolviendo la integral se obtiene:

$$A = \frac{b^2}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} \frac{1}{\theta} d\theta = \frac{b^2}{2} [\ln\theta] \Big|_{\theta_o}^{\theta_f}$$

$$A = \frac{b^2}{2} [\ln\theta_f - \ln\theta_o]$$

$$A = \frac{b^2}{2} \ln\left(\frac{\theta_f}{\theta_o}\right)$$

Por ejemplo, para calcular el área delimitada por la curva para un ángulo θ tal que $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ (ver Figura 3-29) simplemente se usa la expresión obtenida en la propiedad 7.

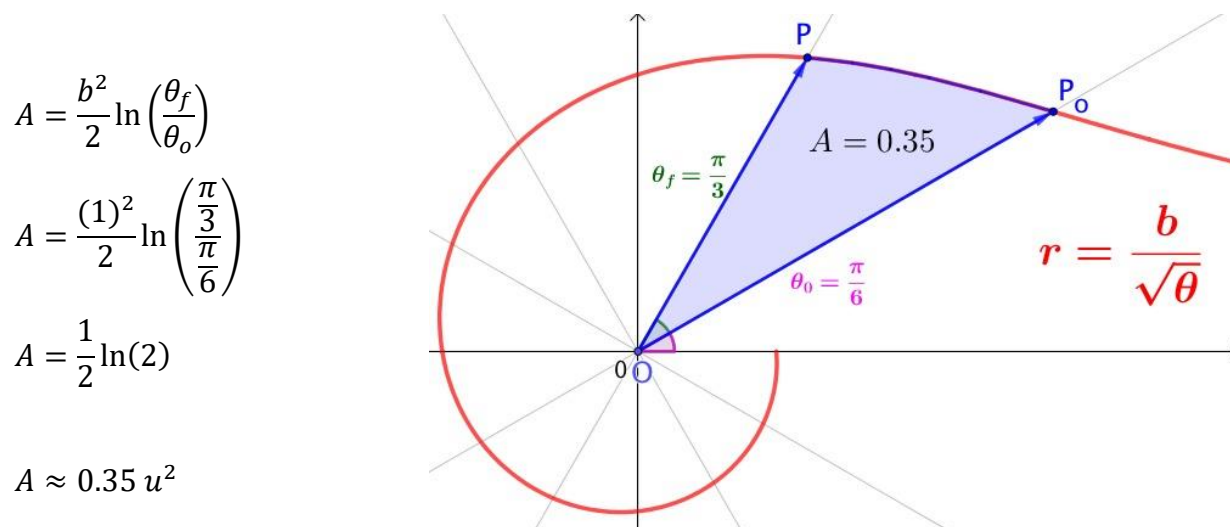


Figura 3-29: Área barrida por el radio vector.

3.3.4.8 Propiedad 8: El área del sector circular OPQ es constante e igual a $\frac{b^2}{2}$ siempre que $0 < \theta < 2\pi$

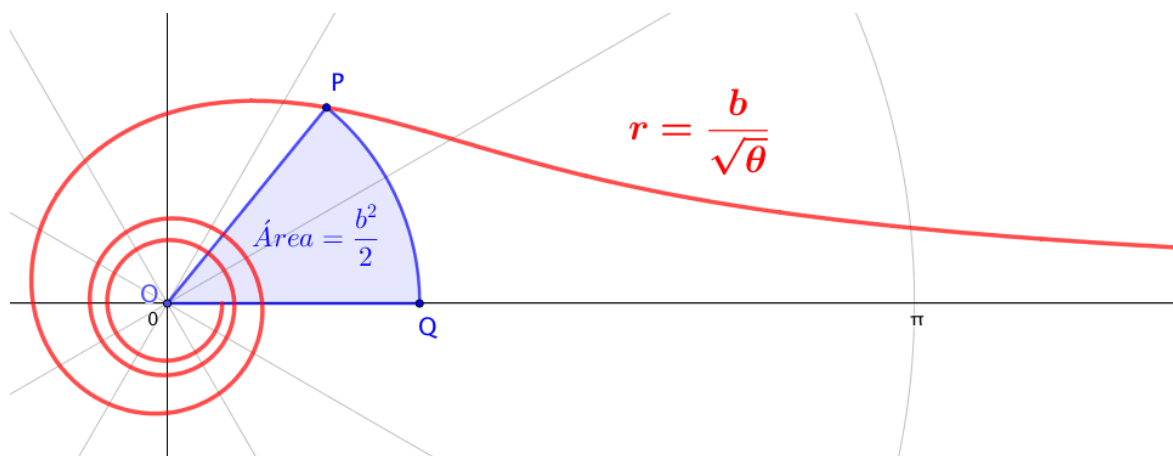


Figura 3-30: Área del sector circular OPQ

Para verificar esta propiedad (Ver figura 3-30), se debe recordar que el área de un sector circular OPQ esta dada por:

$A_{OPQ} = \frac{\theta r^2}{2}$; donde el ángulo θ esta dado en radianes. Dado que se sabe que la ecuación de la espiral lituus puede ser expresada como $r^2 = \frac{b^2}{\theta}$, al sustituir r^2 en la ecuación para el área del sector circular OPQ se obtiene:

$$A_{OPQ} = \frac{\theta r^2}{2} \Rightarrow A_{OPQ} = \frac{\theta b^2}{2\theta} \Rightarrow A_{OPQ} = \frac{b^2}{2}$$

En el próximo capítulo se abordará el estudio de una espiral que no hace parte de la familia de arquimedianas y que se conoce como espiral logarítmica.

CAPÍTULO 4: ESPIRAL LOGARÍTMICA

4.1 Descripción

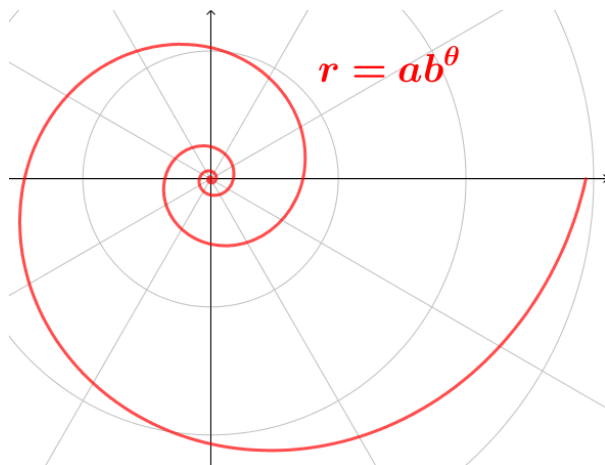


Figura 4-1: Espiral logarítmica

La espiral logarítmica también es conocida bajo el nombre de espiral equiangular o geométrica. Recibe el nombre de equiangular debido a que la tangente en cada punto de la curva corta al radio vector siempre con el mismo ángulo, característica que será estudiada en la propiedad 7 de esta sección. Es llamada geométrica debido a que el paso de la espiral crece en progresión geométrica.

Al igual que la espiral de Arquímedes se obtiene a partir de la composición de dos movimientos, uno circular y otro radial. A diferencia de la espiral de Arquímedes el movimiento radial no es con velocidad constante, es exponencial, por lo que el paso no es constante.

4.2 Contexto histórico

Según Álvarez (2007), el origen del estudio de la espiral se remonta al campo de la navegación. A lo largo de los siglos XVI y XVII, los navegantes sabían que sobre la superficie terrestre la distancia más corta entre dos puntos es el arco de círculo máximo o también conocido como ortodrómica¹⁶. Asimismo, debían fijar un rumbo que encaje con este arco, y para ello, era necesario estar realizando continuos cambios de rumbo. Por lo anterior, los navegantes solían modificar el ángulo que formaba la trayectoria del barco con todos los meridianos que atravesaban, y de este modo el rumbo se mantenía constante (los rumbos de este tipo dibujan en la esfera terrestre una curva llamada loxodrómica¹⁷). Los navegantes no trabajaban sobre una

¹⁶ Término empleado en navegación y que corresponde a la distancia más corta entre dos puntos (dados por su longitud y latitud) en un mapa.

¹⁷ Se denomina loxodrómica a la línea que une dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre cortando a todos los meridianos con el mismo ángulo.

esfera, sus mapas eran planos, esto es, proyecciones de la esfera en \mathbb{R}^2 , donde la proyección de la esfera sobre un plano convierte a la loxodrómica en una espiral logarítmica.

La espiral logarítmica fue documentada por primera vez en algunos escritos de Alberto Durero en 1525, famoso pintor de la época del renacimiento, quien la catalogó como “línea eterna” y tuvo protagonismo en sus obras. Más de un siglo después, fue abordada por el filósofo y matemático Rene Descartes en 1638, a quien se le atribuye el estudio de algunas de sus características y propiedades; él intentó encontrar la trayectoria de caída de un punto sobre un objeto en rotación que lo atrae gravitatoriamente. Finalmente, fue Jacques Bernoulli quien retomó el estudio de la espiral y a quien se le atribuye su formalización.

A pesar de que esta curva ya había sido bautizada como espiral logarítmica, Bernoulli le atribuyó el seudónimo “spira mirabilis” (espiral maravillosa o milagrosa), debido a su asombro al trabajar su estructura y encontrar propiedades matemáticas únicas, ya que la espiral logarítmica tiene una estabilidad excepcional con respecto a las transformaciones geométricas. Por ejemplo, el tamaño de la espiral aumenta, pero su forma no se altera con cada curva sucesiva, propiedad asociada con la autosimilaridad.

Es común encontrar curvas análogas a la espiral logarítmica debido al modelo de construcción, ecuación y propiedades matemáticas, entre ellas se encuentran algunas como la evoluta¹⁸ que se observa en la Figura 4-2; esta consiste en una curva generada por la localización de los centros del círculo de curvatura (círculo oscilador) de una curva dada; la evoluta de la espiral logarítmica es clasificada como un tipo de espiral logarítmica que posee el mismo centro y ángulo tangencial polar. De manera similar hay otras curvas análogas generadas a partir de la espiral logarítmica como la involuta, la curva pedal¹⁹ (Figura 4-3), la curva podaría y la curva cáustica²⁰ (Figura 4-4).

¹⁸ Dada una curva C la evoluta es la curva C_e definida como la localización de los centros del círculo de curvatura de C .

¹⁹ Dada una curva C la curva pedal C_p de C resulta de la proyección ortogonal de un punto fijo en las líneas tangentes de C .

²⁰ Dada una curva C y un punto fijo S (llamado fuente de luz) la cáustica C_c es la envoltura de la reflexión de los rayos de luz que nacen en S y son reflejados por la curva C

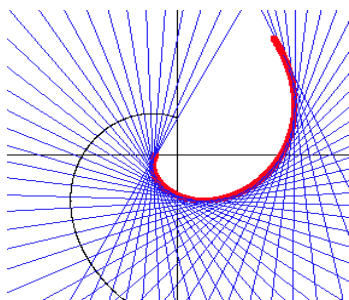


Figura 4-2. Evoluta logarítmica (curva roja), espiral logarítmica (curva negra)

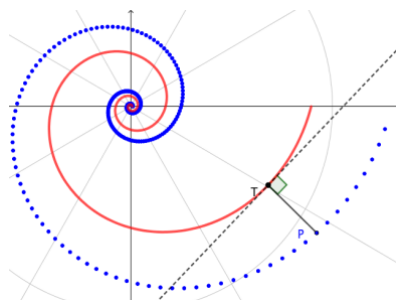


Figura 4-3. Curva Pedal logarítmica (curva azul), espiral logarítmica (curva roja)

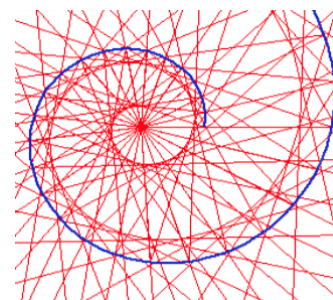


Figura 4-4. Curva cáustica (curva roja) de la espiral logarítmica (curva azul)

Fuente: Tomado de Proyecto Nicolas de Caustica de

<https://www.dim.uchile.cl/~simetria/matematico/nodo634.html> (s.f) y *curvas en 2D y 3D* de Mathcurve <https://mathcurve.com/courbes3d/courbes3d.shtml>

La inversión en el círculo unitario en coordenadas polares se puede expresar como $(r, \theta) \mapsto \left(\frac{1}{r}, \theta\right)$. Es interesante observar en la Figura 4-5, donde se tiene la curva de la espiral logarítmica, con los parámetros $a = 1$ y $b = 2^{\frac{1}{2\pi}}$; al aplicar la inversión circular a la espiral logarítmica, se obtiene nuevamente una espiral logarítmica, esto aplica para cualquier espiral, es decir, se mapea la espiral logarítmica $r = ab^\theta$ en la espiral logarítmica $r = \frac{1}{a}b^{-\theta}$.

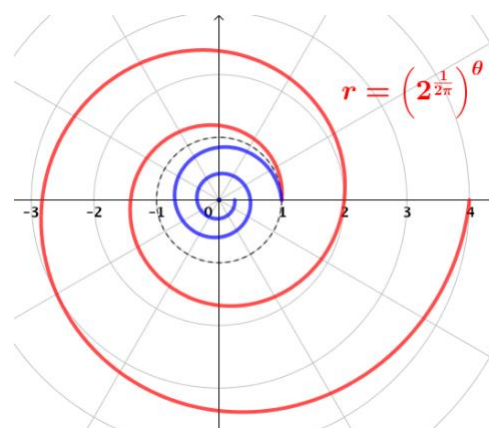


Figura 4-5: Espiral logarítmica (curva roja) y su inversión circular que genera nuevamente una espiral logarítmica (curva azul)

Existen otras curvas análogas, como las curvas de persecución, según Nahin, Paul J (2007) “las curvas de persecución son el rastro de un objeto persiguiendo a otro a velocidad constante”. Supóngase que hay n ratones, cada uno en una esquina de un polígono regular de n lados. Cada ratón se dirige hacia su vecino con velocidad uniforme. La traza de la trayectoria de estos ratones configura una espiral equiangular. En la Figura 4-6, se ilustra una serie de curvas construidas anidando una secuencia de polígonos regulares, los vértices dan la trayectoria de los n ratones y forman n espirales logarítmicas.

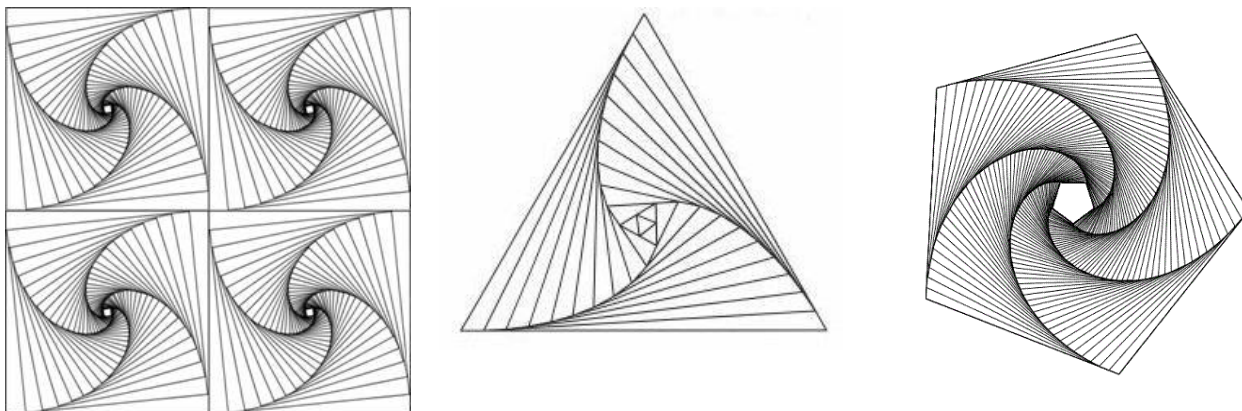


Figura 4-6: Curva de persecución y espiral logarítmica

Fuente: Tomado de *curvas de persecución* de mat.ucm

(<http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/modelizaciones/proyectos/proyecto2/modelos%20esteticos/belleza.htm>)

4.3 Espiral, arte y cotidianidad

La espiral logarítmica es una de las curvas que más ha llamado la atención de científicos, biólogos y artistas debido a la similitud que han encontrado en distintos fenómenos naturales, estructuras arquitectónicas y aplicaciones de ingeniería. El británico D'arcy Thompson (1860 – 1948), el primer biomatemático titulado de la humanidad, en su libro *On Growth and Form* documentó un cierto número de ejemplos de correlación entre formas biológicas y fenómenos mecánicos. Thompson, detalló la tendencia natural de crecimiento (en forma de espiral logarítmica) de las conchas Nautilus (Figura 4-7), cuernos, colmillos, etc.

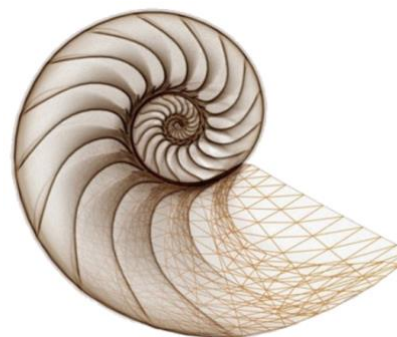


Figura 4-7. Concha Nautilus

Fuente: Tomado de *Nautilus* de Anygrb (<https://www.anygrb.com/en-clipart-2uwez>)

Tiempo después, y tras el resurgimiento de las ideas sobre la relación entre arte griego y las matemáticas en los primeros años del siglo XX, se dieron a conocer nuevos estudios sobre esta espiral. En 1914, el escritor británico Sir Theodore Andrea Cook (1867 – 1928), publica el ejemplar *“The curves of the life”* o *“las curvas de la vida”*, donde, en más de 400 ilustraciones, retrata el significado de la espiral, analizando el papel de diversas curvas espirales, tanto en el campo del arte como en la naturaleza. Cook afirma que “la espiral logarítmica es el centro del primer principio de la vida tanto en el ser humano como la naturaleza. La espiral es fundamental para la estructura de las plantas, las conchas y el cuerpo humano; a la periodicidad de los

elementos atómicos, el ADN (la doble hélice), los nervios de la córnea y en algunos mosaicos antiguos” (P. 201). Ver Figura 4-8

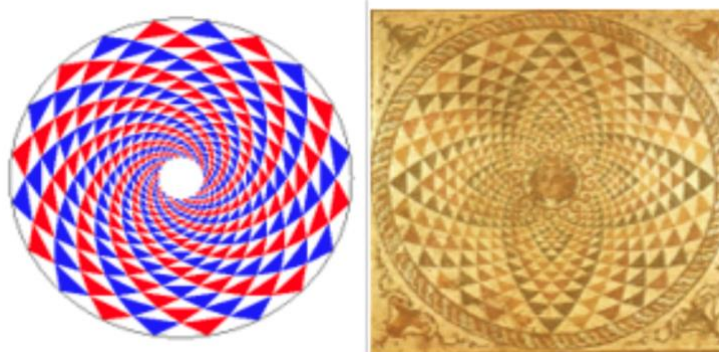


Figura 4-8: Estilo de mosaico que adorno una villa romana en Corinto en el siglo II d.C

Fuente: Tomado de *mosaico espiral* de mathcurve
<https://mathcurve.com/courbes2d/logarithmic/logarithmic.shtml>

Así, la espiral fue adquiriendo mayor interés en investigación y fue posicionándose en estudios de ingeniería y mecánica, además de empezar a ser estudiada debido al parecido con algunos mecanismos, por ejemplo, el de las máquinas de fabricación sustractivas (como cortadoras laser), en las que puede presentarse una pérdida de precisión cuando el mecanismo se fabrica en una máquina diferente, debido a la diferencia de material eliminado o *kerf*²¹ por cada máquina en el proceso de corte. Para ajustar esta variación de *kerf*, se ha utilizado la propiedad de autosimilaridad de la espiral logarítmica para diseñar un mecanismo *kerf - canceling* (eliminación de la diferencia) para cortadores laser. Figura 4-9



Figura 4-9: Mecanismo kerf – canceling para cortadores laser

Fuente: Tomado de *logarithmic Spiral* (Wikimedia, 2020)

²¹ Se emplea el término de *kerf* al ancho de un corte o al ancho de un material eliminado mediante un proceso de corte

Otro ejemplo, se evidencia en los engranajes de bisagra en forma de espiral logarítmica, este mecanismo tiene dos o más ruedas dentadas, que se utiliza para transmitir potencia mecánica de un componente a otro, los cuales son de tipo espiralado y su uso industrial permite transmitir potencia con velocidad y en direcciones precisas esto en virtud que la espiral logarítmica tiene la propiedad de proporcionar ángulos iguales entre la céntrica dental y las líneas radiales. Ver Figura 4-10



Figura 4 -10: Engranaje de bisagra en espiral logarítmica.

Fuente: Tomado de *Engranajes cónicos espirales* de Zuazo (<https://www.zuazo.net/productos/engranajes-conicos-espirales>)



Figura 4-11: Brazos de la galaxia Whirlpool.

Fuente: Tomado de Galaxia remolino (Wikimedia, 2005)

Actualmente, se han estudiado el parentesco de las espirales logarítmicas con estructuras del universo como lo son la vía láctea y algunas galaxias como la Whirlpool (Figura 4-11), estas poseen varios brazos espirales, cada uno de los cuales es similar a una espiral logarítmica con una inclinación o lanzamiento orbital²² de 12 grados.

4.4 Ecuación polar

En el sistema polar, la ecuación de una espiral logarítmica suele escribirse de la forma:

$$r = ab^{\theta}, \quad a > 0, \quad b \neq 1, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Las constantes a y b son números reales positivos, donde a es un factor de escala el cual determina el tamaño de la espiral y b indica en que medida y en que dirección esta enrollada la espiral. Si $b > 1$ la espiral se expande con un incremento θ , en cambio, si $b < 1$ la espiral se contrae. Nótese que si $b = 1$ no se forma una espiral sino una circunferencia.

²² La inclinación o lanzamiento orbital es el ángulo que forma el plano de la órbita (plano orbital) de un astro con respecto a un plano de referencia.

Si se despeja θ de la ecuación (4.1) se obtiene $\theta = \log_b \left(\frac{r}{a} \right)$, esta igualdad indica que los ángulos alrededor del polo son proporcionales al logaritmo del radio vector; de aquí el nombre de espiral logarítmica. Existen diferentes expresiones alternas en la notación polar de la espiral logarítmica, estas difieren de acuerdo con el texto o fuente que se consulte; sin embargo, se evidencia que estas expresiones pueden llegar a ser equivalentes o reducirse a la ecuación general (4.1).

Por ejemplo, sea la espiral expresada de forma general por la ecuación (4.1), si se rota el eje polar por θ_1 (alguna medida angular fija), entonces, se escribiría de la forma $r = ab^{\theta+\theta_1}$; de donde, al aplicar la propiedad de producto de potencias de igual base, se tiene que $r = a b^{\theta} \cdot b^{\theta_1}$. Haciendo la sustitución $\theta_1 = \log_b a^{-1}$, se tiene que $r = b \cdot a^{\theta} \cdot b^{\log_b a^{-1}}$, así $r = a \cdot a^{-1} \cdot b^{\theta}$ o $r = b^{\theta}$. (Donde se aplicó la propiedad de la función logarítmica $b^{\log_b x} = x$ definida para todo $x > 0$ y $b > 0, b \neq 1$). Por lo anterior, se muestra que (4.1) se puede expresar de diferentes formas. Análogamente, se muestra que la ecuación 4.2 representa una espiral logarítmica con las mismas características.

$$r = \alpha \cdot e^{\beta\varphi}, \quad \beta, \alpha > 0 \quad (4.2)$$

Donde se asume $a = \alpha, b = e$ y $\theta = \beta\varphi$.

Considerando lo anterior, en coordenadas polares, la espiral logarítmica se puede expresar sin pérdida de generalidad y sin caer en especificidades, por (4.1).

4.5 Ecuaciones paramétricas

A partir de la ecuación de la circunferencia, se puede expresar la espiral logarítmica en forma paramétrica, similar al proceso realizado en las secciones ya tratadas.

Partiendo de la ecuación paramétrica de la circunferencia en su forma reducida:

$$\begin{cases} x(k) = r \cos 2\pi k \\ y(k) = r \sin 2\pi k \end{cases}$$

La espiral logarítmica esta expresada por $r = ab^{\theta}$, sea $\theta = 2\pi t$, se tiene que

$$\begin{cases} x(t) = ab^{2\pi t} \cos(2\pi t) \\ y(t) = ab^{2\pi t} \sin(2\pi t) \end{cases} \quad (4.3)$$

4.6 Ecuación cartesiana

Para pasar del sistema de coordenadas polares (r, θ) al sistema de coordenadas cartesianas (x, y) , se emplean las coordenadas paramétricas que se obtuvieron en la ecuación 4.3; realizando el cociente de y entre x se obtiene:

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

Aplicando arcotangente a ambos miembros de la igualdad y sustituyendo el valor del ángulo $\theta = \log_b \left(\frac{r}{a} \right)$, se obtiene:

$$\log_b \left(\frac{r}{a} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right)$$

que puede escribirse de otra forma sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y aplicando tangente a ambos miembros de la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \tan \left(\log_b \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) - \log_b (a) \right) \\ \frac{y}{x} &= \tan \left(\frac{1}{2} \log_b (x^2 + y^2) - \log_b (a) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.7 La espiral logarítmica y la progresión geométrica.

Para establecer la relación entre la espiral logarítmica y la progresión geométrica, es importante mencionar que en una espiral logarítmica el ángulo de giro crece en progresión aritmética, sumando siempre la misma cantidad, mientras que el radio de giro crece en progresión geométrica, multiplicando el radio anterior por un mismo número.

Dada una espiral logarítmica con centro en O , se puede observar en la Figura 4-12, que, al trazar las intersecciones de la curva con el eje polar, los puntos de intersección determinan segmentos de diferente medida, es decir, que la distancia entre espira y espira es distinta o varía.

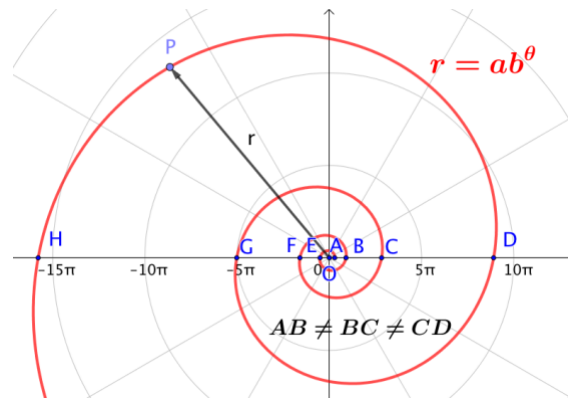


Figura 4-12: El paso AB, BC, CD, \dots de la espiral logarítmica

La distancia entre espira y espira es distinta, pero se cumple la relación:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{OE}{EF} = \frac{OA}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = R$$

Las longitudes tomadas desde el polo están en progresión geométrica, donde R , es la razón de la progresión. Se debe recordar que el termino enésimo de una progresión geométrica está dado por:

$$a_n = a_1 r^{(n-1)}$$

Aquí, r es la razón de la progresión y no debe confundirse con la r del radio vector, de igual manera que a no debe confundirse con el parámetro a de la espiral. Por consiguiente a_n denota el término enésimo de la progresión y a_1 hace referencia al primer término. Se puede establecer una relación entre la progresión geométrica y los pasos de la espiral logarítmica; por ejemplo, si en la Figura 4-12, se toma el paso AB como el primer término de la progresión, entonces se puede verificar que los pasos de la espiral están en progresión geométrica, donde el término enésimo (paso) se puede establecer como:

$$a_n = (AB) R^{(n-1)}$$

Otra forma de visualizar esta característica es mediante la construcción de los triángulos rectángulos que rigen la curva, como se ilustra en la Figura 4-13.

Debido a la característica equiangular de la espiral (ángulos congruentes) y garantizando la recta tangente, se obtiene una constante en los ángulos de los triángulos; por tanto, el parámetro que ahora se desea conocer es la hipotenusa de los triángulos construidos.

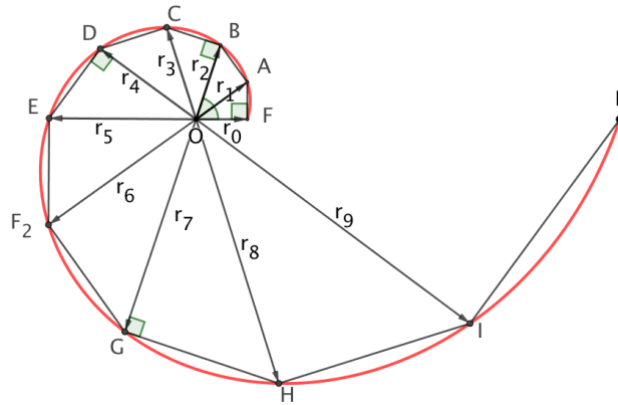
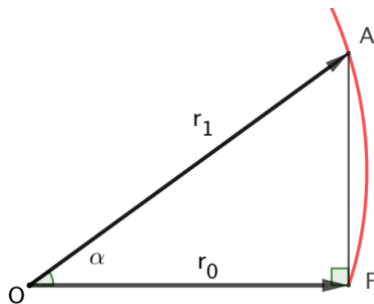


Figura 4-13: Construcción de espiral mediante triángulos rectángulos.

Un camino para conocer la longitud de la hipotenusa es mediante las razones trigonométricas, dado el ángulo α (es constante en la construcción geométrica por ser equiangular), y un radio r_1 , se puede calcular la hipotenusa de r_1 con el coseno de α , como se evidencia en la Figura 4-14



$$\cos \alpha = \frac{r_0}{r_1}$$

Despejando r_1

$$r_1 = \frac{r_0}{\cos \alpha}$$

Figura 4-14. Triángulo rectángulo extraído de la espiral logarítmica

Para construir los siguientes triángulos, se traza una recta perpendicular a la hipotenusa del triángulo inmediatamente anterior, quien fungirá como cateto del siguiente triángulo. Posteriormente, se construye el ángulo α desde la hipotenusa y con esa apertura determina un triángulo semejante a la inicial, como se ilustra en la Figura 4-15

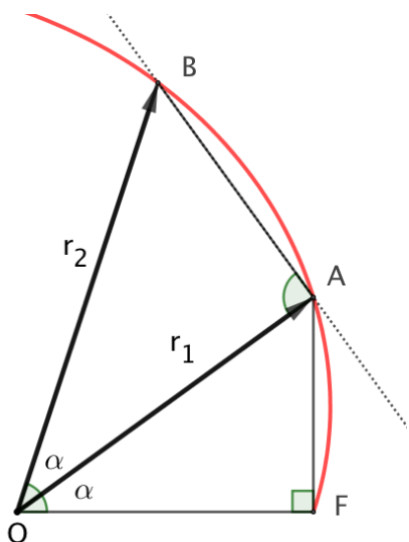


Figura 4-15. Construcción de triángulo semejante

Para hallar r_2 , se emplea el mismo procedimiento anterior

$$\cos \alpha = \frac{r_1}{r_2}$$

despejando r_2 y sustituyendo el valor de r_1

$$r_2 = \frac{r_0}{(\cos \alpha)^2}$$

al construir sucesivos triángulos semejantes contiguos a la espiral, se obtienen los siguientes datos organizados en la Tabla 7.

Tabla 7. Registro de datos obtenidos en la construcción de triángulos semejantes en la espiral logarítmica.

Número de triángulos	Ángulo (θ)	Hipotenusa
1	α	$\frac{r_0}{\cos \alpha}$
2	2α	$\frac{r_0}{(\cos \alpha)^2}$
3	3α	$\frac{r_0}{(\cos \alpha)^3}$
4	4α	$\frac{r_0}{(\cos \alpha)^4}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$n\alpha$	$\frac{r_0}{(\cos \alpha)^n}$

Al analizar los datos de la tabla anterior, se encuentra que:

- En la segunda columna, la sucesión de números corresponde a una progresión aritmética, dado que la diferencia de dos elementos sucesivos de la secuencia es constante, esto como resultado obtenido por cada triángulo nuevo que se genera para la construcción de la espiral; ya que se suma nuevamente el valor del ángulo α para cada uno de ellos.
- En el caso de las expresiones obtenidas para el radio, se observa una progresión geométrica, ya que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por la constante, en este caso $\frac{1}{\cos \alpha}$.

Por lo anterior, se evidencia que la presencia simultánea de estas dos progresiones son el resultado de la covariación logarítmica propia de la expresión. Dicho de otra manera, el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar crece en progresión aritmética.

4.8 Algunas propiedades de la espiral logarítmica

4.8.1 Propiedad 1. Longitud de la subtangente y la subnormal

La subtangente S_T y la subnormal S_N de la curva logarítmica para un punto (r, θ) están dadas por:

$$S_T = \frac{r}{\ln(b)} \qquad S_N = r \ln(b)$$

La expresión para la espiral logarítmica está dada por $r = ab^\theta$, tal que $a > 0$, $b \neq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Se sabe que la función exponencial y logarítmica son funciones inversas, en virtud de este hecho, se puede reescribir b^θ como $b^\theta = e^{\ln(b)\theta}$ y aplicando propiedades de los logaritmos, se sigue que $b^\theta = e^{\ln(b)\theta} = e^{\ln(b)\theta}$, luego al derivar r respecto θ se obtiene:

$$r = ab^\theta \Rightarrow r' = a \frac{d}{d\theta}(b^\theta)$$

$$r' = a \frac{d}{d\theta}(e^{\ln(b)\theta}) = ae^{\ln(b)\theta} \frac{d}{d\theta}(\ln(b)\theta) = ae^{\ln(b)\theta} \ln(b)$$

como $e^{\ln(b)\theta} = b^\theta$, entonces, al sustituir en la igualdad anterior se obtiene:

$$r' = ab^\theta \ln(b)$$

ahora, haciendo uso del [anexo 1](#), donde la ecuación para obtener el valor de la longitud de la subtangente para un punto P de una curva en coordenadas polares es $S_T = \frac{r^2}{|r'|}$, en consecuencia:

$$S_T = \frac{r^2}{|r'|} = \frac{r^2}{|r \ln(b)|} = \frac{r}{\ln(b)}$$

solo falta obtener el valor de la longitud de subnormal S_N , para obtener este valor, nuevamente se hace uso del [anexo 1](#), el cual indica que $S_N = |r'|$, por tanto, el resultado es inmediato:

$$S_N = |r'| \Rightarrow S_N = ab^\theta \ln(b) = r \ln(b)$$

como se quería demostrar.

4.8.2 Propiedad 2: Longitud de la tangente y la normal

Las expresiones para obtener el valor de la tangente T y la normal N para un punto P que pertenece a la espiral logarítmica, son respectivamente:

$$T = \frac{r}{\ln(b)} \sqrt{1 + \ln^2(b)} \quad N = r \sqrt{1 + \ln^2(b)}$$

Se sabe que la espiral logarítmica esta generada por la ecuación $r = ab^\theta$ y por los resultados obtenidos en la propiedad 1 se tiene que $S_T = \frac{r}{\ln(b)}$ y $S_N = r \ln(b)$; empleando las ecuaciones del [anexo 1](#) se pueden verificar las igualdades dadas en la propiedad 2:

$$T = \sqrt{S_T^2 + r^2} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\left(\frac{r}{\ln(b)}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{r^2 + r^2 \ln^2(b)}{\ln^2(b)}} = \frac{r}{\ln(b)} \sqrt{1 + \ln^2(b)}$$

$$N = \sqrt{S_N^2 + r^2} \quad \Rightarrow \quad N = \sqrt{(r \ln(b))^2 + r^2} = r \sqrt{1 + \ln^2(b)}$$

así queda verificada la propiedad.

Por ejemplo, si se deseará calcular el valor de la longitud para los segmentos subtangente S_T , tangente T , subnormal S_N y normal N , para un punto $P = \left(14.48, \frac{8\pi}{3}\right)$ de la espiral logarítmica con ecuación $r(\theta) = 1.2^\theta$, entonces empleando las propiedades 1 y 2 se obtendría:

Longitud de la subtangente $S_T = \frac{r}{\ln(b)} = \frac{14.48}{\ln(1.2)} \approx 79.42$

Longitud de la tangente $T = \frac{r}{\ln(b)} \sqrt{1 + \ln^2(b)} = \frac{14.48}{\ln(1.2)} \sqrt{1 + \ln^2(1.2)} \approx 80.73$

Longitud de la subnormal $S_N = r \ln(b) \approx 2.64$

Longitud de la normal $N = r \sqrt{1 + \ln^2(b)} = 14.48 \sqrt{1 + \ln^2(1.2)} \approx 14.72$

comparando los valores calculados con los valores obtenidos en GeoGebra ® que se ilustran en la Figura 4-16 se puede apreciar que se obtiene una buena aproximación.

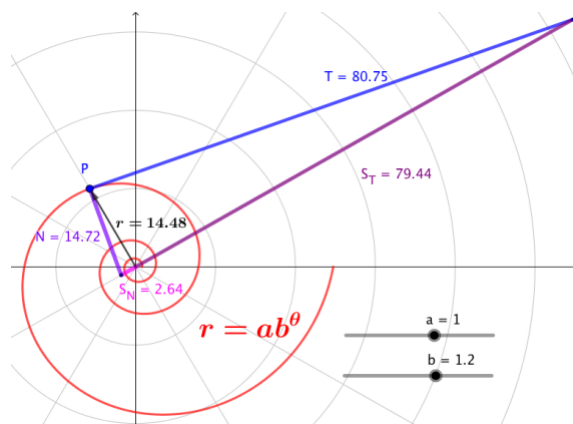


Figura 4-16: Longitud de segmentos subtangente S_T , tangente T , subnormal S_N y normal N , para el punto dado $P = \left(14.48, \frac{8\pi}{3}\right)$ de la espiral logarítmica

4.8.3 Propiedad 3. Longitud de curva

Al ser la espiral logarítmica una curva definida paramétricamente, la longitud de curva entre dos puntos de la espiral, podrá ser evaluada mediante la ecuación.

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

teniendo en cuenta las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = ab^{2\pi t} \cos(2\pi t) \\ y(t) = ab^{2\pi t} \sin(2\pi t) \end{cases}$$

se calculan las derivadas de sus componentes. Para ello, se aplica las propiedades de las derivadas (exponencial y trigonométricas) y se simplifica la expresión usando una forma factorizada.

$$x'(t) = 2\pi ab^{2\pi t} \ln b \cos(2\pi t) - 2\pi ab^{2\pi t} \sin(2\pi t)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi ab^{2\pi t} [\ln(b) \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)] \\
y'(t) &= 2\pi ab^{2\pi t} \ln b \sin(2\pi t) + 2\pi ab^{2\pi t} \cos(2\pi t) \\
&= 2\pi ab^{2\pi t} [\ln(b) \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t)]
\end{aligned}$$

cuyos cuadrados son respectivamente:

$$\begin{aligned}
[x'(t)]^2 &= (2\pi ab^{2\pi t})^2 (\ln(b) \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t))^2 \\
[y'(t)]^2 &= (2\pi ab^{2\pi t})^2 (\ln(b) \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t))^2
\end{aligned}$$

Al tener la expresión $2\pi ab^{2\pi t}$ en común en los dos sumandos, este será expresado en la ecuación como factor común. Posteriormente, se resuelve la suma de cuadrados y se simplifica la expresión.

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = (2\pi ab^{2\pi t})^2 [(\ln(b) \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t))^2 + (\ln(b) \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t))^2]$$

$$\begin{aligned}
[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 &= (2\pi ab^{2\pi t})^2 [\ln^2(b) \cos^2(2\pi t) - 2 \ln(b) \cos(2\pi t) \sin(2\pi t) + \sin^2(2\pi t) \\
&\quad + \ln^2(b) \sin^2(2\pi t) + 2 \ln(b) \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)]
\end{aligned}$$

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = (2\pi ab^{2\pi t})^2 [\ln^2(b) + 1]$$

Es importante tener en cuenta que para este caso los extremos de los intervalos de integración fueron definidos como (a, b) según indica la fórmula original (los cuales corresponden a dos puntos de la espiral o pasos), no hay que confundir este valor del extremo de la integral con el parámetro b de la fórmula paramétrica de la espiral, puesto que este indica la razón de cambio en el radio y el otro un paso. Por lo anterior, se reescribirá la fórmula de la siguiente manera:

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(2\pi ab^{2\pi t})^2 [\ln^2(b) + 1]} dt$$

donde t_0 y t_1 indican los pasos de los cuales se quiere hacer referencia para hallar la longitud. Posteriormente, se realiza la integral aplicando propiedades y cálculos según sea el caso.

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 2\pi ab^{2\pi t} \sqrt{[\ln^2(b) + 1]} dt$$

$$\begin{aligned}
 L(t_0, t_1) &= 2\pi a \sqrt{[\ln^2(b) + 1]} \int_{t_0}^{t_1} b^{2\pi t} dt \\
 L(t_0, t_1) &= a \sqrt{[\ln^2(b) + 1]} \int_{t_0}^{t_1} 2\pi b^{2\pi t} dt \\
 L(t_0, t_1) &= a \sqrt{[\ln^2(b) + 1]} \left. \frac{b^{2\pi t}}{\ln(b)} \right|_{t_0}^{t_1} \\
 L(t_0, t_1) &= \frac{a \sqrt{[1 + \ln^2(b)]}}{\ln(b)} [b^{2\pi(t_1)} - b^{2\pi(t_0)}] \tag{4-5}
 \end{aligned}$$

La ecuación (4-5) corresponde a la longitud de una espiral logarítmica en un intervalo determinado en términos del parámetro t , el cual representa el número de vuelta en la espiral. Por ejemplo, si se desea hallar la longitud de la curva, para $r = (1.2)^\theta$, donde $a = 1$ y $b = 1.2$, entre las vueltas 1 y 2, es decir, la longitud de la segunda espira (Figura 4-17), estará dada por:

$$L(t_0, t_1) = \frac{a \sqrt{[1 + \ln^2(b)]}}{\ln(b)} [b^{2\pi(t_1)} - b^{2\pi(t_0)}]$$

$$L(1,2) = \frac{1 \sqrt{[1 + \ln^2(1.2)]}}{\ln(1.2)} [b^{2\pi(2)} - b^{2\pi(1)}]$$

$$L(1,2) \approx 37,582$$

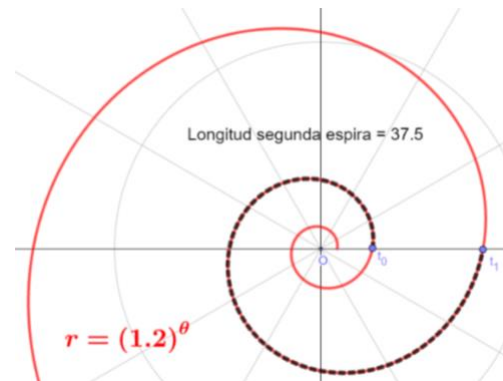


Figura 4-17: Longitud de la segunda espira para la curva $r = (1.2)^\theta$

De otro modo, si lo que se desea es hallar la longitud de curva entre dos puntos cualesquiera (r_0, θ_0) y (r_1, θ_1) , se debe hacer el cambio de variable $\theta = 2\pi t$, así, la expresión para hallar la longitud en términos de θ , estará dada por:

$$L(\theta_0, \theta_1) = \frac{a \sqrt{[1 + \ln^2(b)]}}{\ln(b)} [b^{\theta_1} - b^{\theta_0}]; \theta_1 > \theta_0 \tag{4.6}$$

Por ejemplo, si se desea hallar la longitud de curva para $r = (1.2)^\theta$, determinada por los puntos (r_0, θ_0) y (r_1, θ_1) tal que $\theta_0 = \frac{13\pi}{6}$ y $\theta_1 = \frac{17\pi}{6}$, entonces implementando la ecuación 4.6 se obtiene:

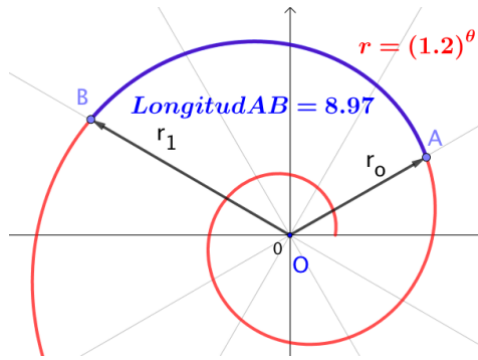


Figura 4-18: Longitud de curva determinada por los puntos A y B para $\frac{13\pi}{6} < \theta < \frac{17\pi}{6}$

$$L(\theta_0, \theta_1) = \frac{a\sqrt{[1 + \ln^2(b)]}}{\ln(b)} [b^{\theta_1} - b^{\theta_0}]$$

$$L\left(\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{[1 + \ln^2(1.2)]}}{\ln(1.2)} \left[1.2^{\frac{17\pi}{6}} - 1.2^{\frac{13\pi}{6}}\right]$$

$$L\left(\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right) \approx 8.97$$

El valor obtenido para L es una buena aproximación tal como se observa en la Figura 4-18

Ahora bien, nótese que si se recorre la curva en sentido horario (ángulo negativo), y se halla la longitud entre un punto cualquiera de la curva y el origen polar, se observa en la Figura 4-19 que, gracias a la propiedad de autosimilitud de la espiral logarítmica, se puede pensar que se dan infinitas vueltas para tratar de alcanzar el origen polar, y por tanto es factible suponer que esta longitud de curva también es infinita. ¿Pero será realmente infinita?

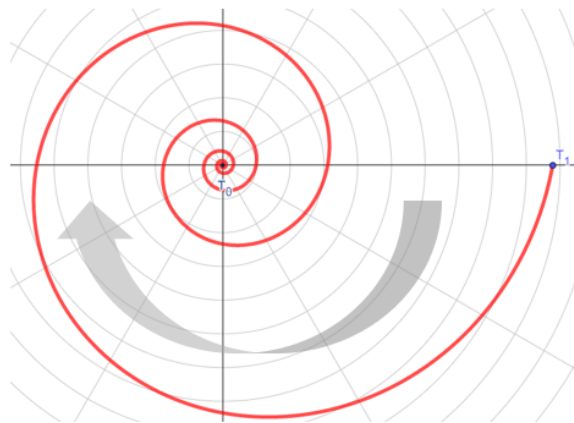


Figura 4-19. Se ilustra el movimiento en sentido horario para la espiral logarítmica, donde la curva da infinitas vueltas alrededor del origen.

Para hallar esta longitud se debe dar un valor negativo al parámetro t_0 , dado que al tomar cualquier punto de la espiral el movimiento de este es en sentido horario como lo indica la figura 4-19. Por lo tanto, la longitud se calcularía desde menos infinito (que correspondería al parámetro t_0) y el número de vuelta (t_1). Al sustituir el infinito en la ecuación 4.5, se tiene una integral impropia.

$$L(-\infty, t_1) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} L(t_0, t_1)$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{[\ln^2(b) + 1]}}{\ln(b)} [b^{2\pi(t_1)} - b^{2\pi(t_0)}]$$

sustituyendo $t_0 = -\infty$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{[\ln^2(b) + 1]}}{\ln(b)} [b^{2\pi(t_1)} - b^{2\pi(-\infty)}]$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{[\ln^2(b) + 1]}}{\ln(b)} [b^{2\pi(t_1)} - b^{-\infty}]$$

Si $b > 1$ la expresión $[b^{-\infty}]$ tiende a cero. Por lo tanto, la expresión para la longitud de curva se escribe como:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{[\ln^2(b) + 1]}}{\ln(b)} b^{2\pi(t_1)}$$

y este valor es finito, ya que el parámetro t_1 indica el número concreto de vuelta; por tanto, se puede decir que los infinitos giros de la espiral alrededor del origen tienen longitud finita.

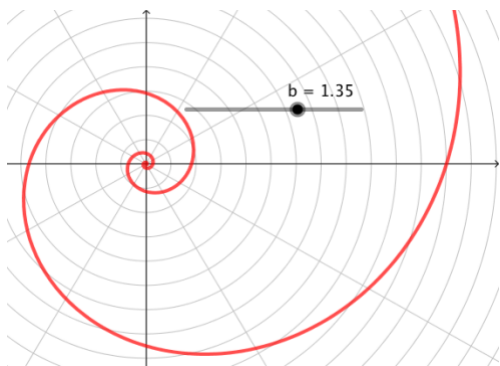


Figura 4-20: Espiral logarítmica con $b > 1$, $t > 0$

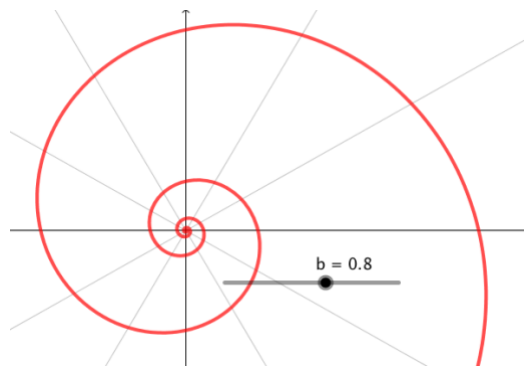


Figura 4-21: Espiral logarítmica con $0 < b < 1$, $t > 0$

La condición de que $b > 1$ no restringe la generalidad del desarrollo (Figura 4-20), dado que tomar un valor entre $0 < b < 1$ procede en la espiral un encogimiento (Figura 4-21), esto implica que, en cuanto a la longitud de curva, sin tener en cuenta el sentido del movimiento, se tendrá una equivalencia entre estas dos expresiones.

$$L = (-\infty, t_1) = L(t_1, +\infty)$$

Se debe recordar que el punto de inicio para la espiral logarítmica lo determina el valor del parámetro t , si $t = 0$, sustituyendo en las ecuaciones paramétricas se tendría:

$$\begin{cases} x(t) = ab^{2\pi t} \cos(2\pi t) \\ y(t) = ab^{2\pi t} \sin(2\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = a \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Luego el punto de inicio de la espiral será $(a, 0)$, pero se sabe que el valor de a es un factor de escala que hace que la espiral logarítmica sea más grande o pequeña, entonces se puede asumir para fines prácticos el valor $a = 1$, por consiguiente $f(0) = 1$, así, el punto de inicio de la espiral será $(r, \theta) = (1, 0)$ que es el punto P en la Figura 4-22, y la ecuación para la longitud de curva desde el punto P al centro de la espiral estará dada por:

$$L(-\infty, t) = \frac{\sqrt{[\ln^2(b) + 1]}}{\ln(b)} b^{2\pi t}$$

Ahora bien, existen ciertos casos particulares. Si el parámetro $b = 2^{1/(2\pi)}$, este valor está relacionado con una progresión geométrica de razón 2, siempre que $\theta > 0$ y es de razón $\frac{1}{2}$ cuando $\theta < 0$. La longitud para la curva $r = (2)^{\frac{\theta}{2\pi}}$ desde el punto de inicio $P = (1, 0)$ hacia el centro de la espiral en sentido horario (Figura 4-22) estará dada por la expresión:

$$L(-\infty, 0) = \frac{\sqrt{[\ln^2(2^{1/(2\pi)}) + 1]}}{\ln(2^{1/(2\pi)})}$$

realizando cálculos y simplificando se obtiene que:

$$L(-\infty, 0) = \frac{\sqrt{[\ln^2(2) + (2\pi)^2]}}{\ln(2)} \Rightarrow L(-\infty, 0) = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\ln^2(2)}} \approx 9.12$$

De manera similar para la espiral con parámetro $b = 2^{1/(2\pi)}$ en la Figura 4-22, se puede apreciar que las infinitas vueltas de la espiral alrededor del origen tienen longitud finita, mediante cálculos geométricos, como se evidencia a continuación:

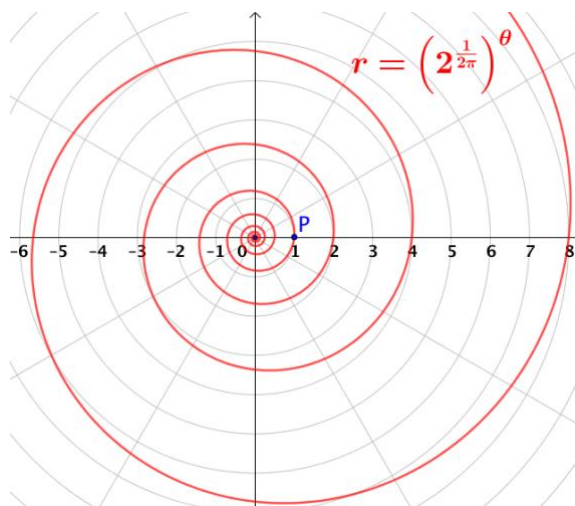


Figura 4-22. Espiral logarítmica con $b = 2^{1/(2\pi)}$

Sea L_1 , la longitud de la primera vuelta en sentido horario, es decir que $\theta \in [-2\pi, 0]$ y L_2 la longitud de la segunda vuelta, etc. La espiral logarítmica tiene una escala invariante, gracias a la propiedad de autosimilitud, es decir, cada vuelta hacia el interior presenta $\frac{1}{2}$ de la expansión de la vuelta anterior, que es la razón r de la serie, por consiguiente, resulta ser una serie geométrica de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$; así la longitud de la curva estará dada por:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \dots + L_n = L_1 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2^2}L_1 + \frac{1}{2^3}L_1 + \dots + \frac{1}{2^n}L_1 = \frac{L_1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2L_1$$

Observe que el hecho de que sin importar el número de vueltas que se den alrededor del origen, nunca se llega al centro de la espiral, esto hace pensar que la longitud de curva es infinita, pero como ya se verificó esto no es verdad, su longitud es finita.

Otro caso particular es cuando el valor de $b = e$, entonces la longitud de la curva desde menos infinito hasta el punto de inicio de la curva P marcado por el valor de $t = 0$ es:

$$L(-\infty, 0) = \frac{\sqrt{[\ln^2(e) + 1]}}{\ln(e)} = \sqrt{2}$$

4.8.4 Propiedad 4. Curvatura

La curvatura de la espiral logarítmica para un punto P de la curva está dada por:

$$k = \frac{1}{r \sqrt{1 + \ln^2(b)}}$$

Para verificar la propiedad, se emplea el resultado obtenido en el [anexo 2](#), donde la curvatura k para una curva $r = f(\theta)$ expresada en coordenadas polares esta dada por:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - r r''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sea $r = ab^\theta$, luego se tienen las igualdades:

- I. $r^2 = a^2 b^{2\theta}$
- II. $r' = ab^\theta \ln(b)$
- III. $r'' = ab^\theta \ln^2(b)$

sustituyendo I, II y II en k , se obtiene:

$$k = \frac{a^2 b^{2\theta} + 2(ab^\theta \ln(b))^2 - (ab^\theta)(ab^\theta \ln^2(b))}{[a^2 b^{2\theta} + (ab^\theta \ln(b))^2]^{3/2}}$$

$$k = \frac{a^2 b^{2\theta} + 2a^2 b^{2\theta} \ln^2(b) - a^2 b^{2\theta} \ln^2(b)}{[a^2 b^{2\theta} + a^2 b^{2\theta} \ln^2(b)]^{3/2}}$$

operando y cancelando términos semejantes, se tiene:

$$k = \frac{a^2 b^{2\theta} [1 + \ln^2(b)]}{a^3 b^{3\theta} (1 + \ln^2 b)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{1}{ab^\theta (1 + \ln^2 b)^{\frac{1}{2}}}$$

pero, $r = ab^\theta$, luego

$$k = \frac{1}{r \sqrt{1 + \ln^2 b}} \quad (4.7)$$

así queda verificada la propiedad.

Con la validación de la expresión de la curvatura k para un punto P de la espiral logarítmica, se puede deducir la expresión del radio de curvatura R , el cual está dado por $R = \frac{1}{k}$,

de donde:

$$R = r \sqrt{1 + \ln^2 b} \quad (4.8)$$

4.8.5 Propiedad 5. Autosimilitud

Un objeto es autosimilar si se puede construir a partir de copias semejantes, en el que todo es exacta o aproximadamente similar a una parte de sí mismo; esto es, cuando el todo tiene la misma forma que una o varias de sus partes. Esta propiedad indica que la espiral logarítmica permanece invariante a homotecias respecto a su centro, en otras palabras, si se amplía o se reduce el tamaño de la espiral su forma no se altera.

Se le atribuye esta característica dada que es una propiedad de expansión (homotecia), en otras palabras, al aplicar esta transformación, la espiral resulta ser idéntica a la original tomando cualquier ángulo. Para verificar este hecho, se rota con ángulo σ alrededor del origen O la espiral logarítmica en sentido antihorario, sustituyendo en la ecuación polar θ por $\theta + \sigma$, se obtiene:

$$r = ab^{(\theta+\sigma)} = ab^\theta b^\sigma = b^\sigma(ab^\theta) = c(ab^\theta)$$

Es decir, el nuevo radio (r), es igual al anterior multiplicado por un factor c con $c = b^\sigma$ esto es, una homotecia de centro O y razón $c > 0$. Por ejemplo, si se rota la espiral logarítmica en $\frac{7}{6}\pi$ radianes, es decir para $\sigma = \frac{7\pi}{6}$ ($\sigma = 210^\circ$), la espiral obtenida tiene la misma forma que la original, pero diferente tamaño, es decir, es una copia semejante a la original, tal como se observa en la Figura 4-23.

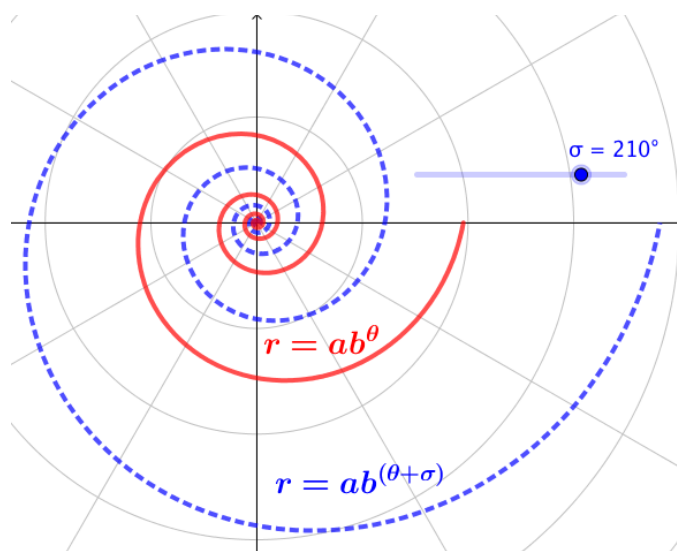


Figura 4-23. Se rotó la espiral logarítmica un ángulo $\sigma = 210^\circ$ y la espiral obtenida (azul) es la misma “aumentada”

Otra singularidad observada desde la misma propiedad es que la espiral logarítmica escalada es congruente (por rotación) a la curva original.

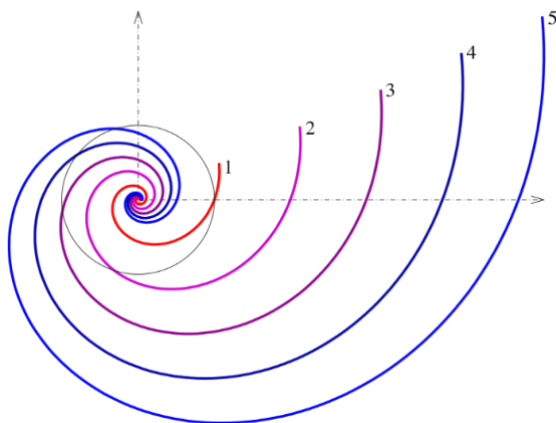


Figura 4-24: Espiral logarítmica con ángulos de inclinación $\sigma = 20^\circ$

Fuente: Tomado de *espiral logarítmica* de Wikimedia (<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spiral-log-a-1-5.svg>, 2019)

La Figura 4-24, ilustra espirales logarítmicas con ángulos de inclinación para $\sigma = \frac{\pi}{9}$ ($\sigma = 20^\circ$) y para el parámetro a con $a = 1, 2, 3, 4$ y 5 . Como se puede observar todas las curvas son semejantes a la curva base u original (representada por $a = 1$ en color rojo), pero con distinta amplitud. Estas curvas son generadas rotando la curva original distintos ángulos. Nótese también que las espirales no tienen puntos en común una con otra.

4.8.6 Propiedad 6. Relación de homotecia

Si se interseca a la espiral logarítmica con una semirrecta con origen en O , sus puntos de intersección corresponderán a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ (donde el subíndice indica el número de espira).

Se cumple que: $\frac{|OP_n|}{|OP_{n-1}|} = k = ab^{2\pi}$ (son puntos homotéticos). A continuación, se realiza el desarrollo del enunciado anterior.

De acuerdo con las expresiones correspondientes al paso $(2k + 1)\pi$ (expresión que corresponden a cortes consecutivos con el eje polar). Se tiene que $(\theta + 2\pi n)$, es equivalente al argumento anterior, dado que, resolviendo el paréntesis y contrastando las variables (sin tener en cuenta el orden), corresponde al ángulo que forma la recta con el eje polar y la vuelta o espira. De esta forma, se tiene:

$$|OP_n| = ab^{(\theta+2\pi n)}$$

$$|OP_{n-1}| = ab^{(\theta+2\pi(n-1))}$$

reemplazando:

$$\frac{|OP_n|}{|OP_{n-1}|} = \frac{ab^{(\theta+2\pi n)}}{ab^{(\theta+2\pi(n-1))}} = ab^{2\pi}$$

tal como se quería mostrar.

4.8.7 Propiedad 7. Equiangular

El ángulo formado por la recta tangente en un punto cualquiera de la espiral y el radio vector en ese punto, es constante. (Figura 4-25)

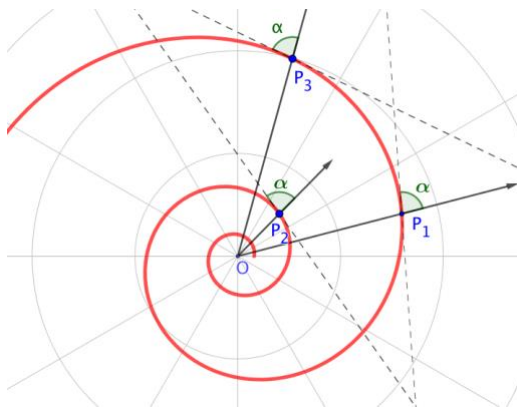


Figura 4-25. El ángulo α determinado por el radio vector y la recta tangente a la curva para cualquier punto de la espiral logarítmica, es constante

Esta propiedad se puede verificar de varias formas, una de ellas es hacer uso de las ecuaciones paramétricas de la espiral logarítmica y la definición de producto punto o escalar entre dos vectores, para verificar que el ángulo comprendido entre el radio vector y la recta tangente, es decir, que el cociente de la ecuación 4.9.

$$C = \cos(\alpha) = \frac{\rho(\theta) \cdot \rho'(\theta)}{|\rho(\theta)||\rho'(\theta)|} \quad (4.9)$$

es independiente de θ , donde $\rho(\theta)$ es el vector posición (cartesiano) de la espiral en el punto con coordenadas polares (θ, r) . Para ver se requiere calcular $\rho(\theta)$ y $\rho'(\theta)$, que están dados por:

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \rho(\theta) &= (ab^\theta \cos \theta, ab^\theta \sin \theta) \\ \rho'(\theta) &= (ab^\theta (\log b \cos \theta - \sin \theta), ab^\theta (\log b \sin \theta + \cos \theta)) \end{aligned}$$

entonces

$$C = \frac{(ab^\theta \cos \theta, ab^\theta \sin \theta) \cdot (ab^\theta (\log b \cos \theta - \sin \theta), ab^\theta (\log b \sin \theta + \cos \theta))}{|ab^\theta \cos \theta, ab^\theta \sin \theta| |ab^\theta (\log b \cos \theta - \sin \theta), ab^\theta (\log b \sin \theta + \cos \theta)|}$$

$$C = \frac{a^2 b^{2\theta} \log b}{ab^\theta ab^\theta \sqrt{\log^2 b + 1}}$$

$$C = \frac{\log b}{\sqrt{\log^2 b + 1}} \quad (4.10)$$

Luego se puede observar que a partir de la ecuación 4.9 se obtuvo la ecuación 4.10 donde se verifica que C es independiente de θ . De otra parte, el ángulo α entre el radio vector y la recta tangente a la curva se puede obtener mediante la expresión 4.11.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\log b}{\sqrt{\log^2 b + 1}}\right) \quad (4.11)$$

El ángulo α es llamado el ángulo equiangular de la espiral logarítmica. Nótese que en la ecuación 4.10 si $b \rightarrow 1$ entonces $C \rightarrow 0$ y por la ecuación 4.11 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (es decir, las rectas son perpendiculares). Por otro lado, si $b \rightarrow \infty$, $C \rightarrow 1$ y $\alpha \rightarrow 0$ entonces las tangentes se asemejan cada vez al radio vector en cada punto.

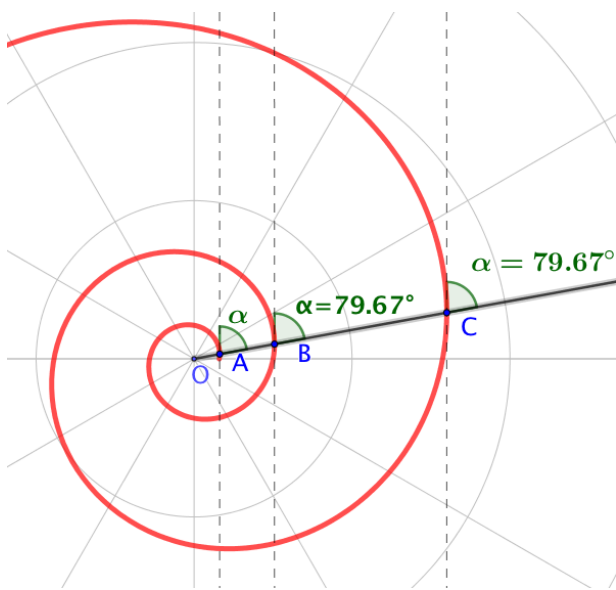


Figura 4-26: Espiral logarítmica con $b = 1.2$, donde se aprecia que el ángulo α es constante

Por ejemplo, sea la espiral logarítmica de centro O , con $b = 1.2$ y A, B y C puntos por donde se trazan las tangentes en la espiral (Figura 4-26). Reemplazando los valores en la ecuación 4.10 se obtiene:

$$C = \frac{\log 1.2}{\sqrt{\log^2 1.2 + 1}}$$

$$C = 0,179$$

$$\arccos(C) = 79.67^\circ$$

Este proceso es análogo para cualquier punto P que pertenezca a la curva.

4.8.8 Propiedad 8. El paso de la espiral no es constante

El paso de la espiral logarítmica es variable. Siendo creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$. A diferencia de la espiral de Arquímedes, donde el paso es constante y la distancia entre los dos arcos contiguos situados en el mismo radio es siempre la misma, en la espiral logarítmica, este

valor varía según el valor del parámetro. A continuación, se realiza el análisis respectivo de esta propiedad.

Si se considera los argumentos $(2k + 1)\pi$ y $2k\pi$ (expresiones que corresponden a cortes consecutivos con el eje polar). La diferencia entre radios correspondientes, teniendo en cuenta la ecuación polar de la espiral es:

$$r_2 - r_1 = ab^{(2k+1)\pi} - ab^{2k\pi}$$

$$r_2 - r_1 = ab^{2k\pi}b^\pi - ab^{2k\pi}$$

$$r_2 - r_1 = ab^{2k\pi}(b^\pi - 1); \text{ donde } b^\pi - 1 = k_1$$

por tanto, el paso depende de k , es decir, el número de vueltas de la curva que corta con el eje polar. La expresión $(b^\pi - 1)$ es una constante k_1 , por consiguiente, la longitud de paso esta determinada por $ab^{2k\pi}$, con $k \in \mathbb{N}$. Al variar el parámetro k , el paso puede aumentar o disminuir, según el valor de $b \in \mathbb{R}^+$. Por ende, el paso crece si $r_2 - r_1 > 0$ y $b > 1$, y decrece si $r_2 - r_1 < 0$ y $0 < b < 1$. (Figura 4-27)

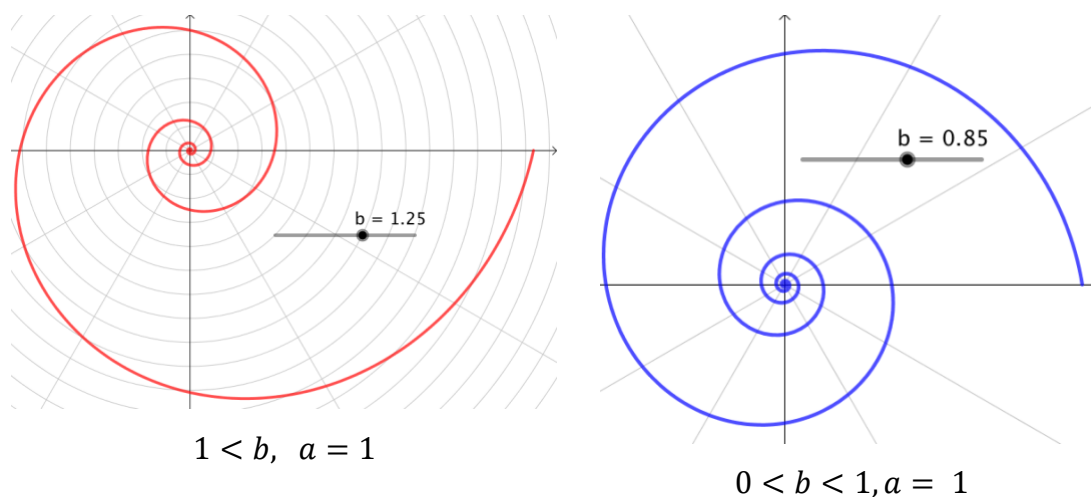


Figura 4-27: Espirales logarítmicas modificando el parámetro b . Imagen izquierda (roja) el paso es creciente, Imagen derecha (azul) el paso es decreciente, tal como se evidencia con la graduación del eje polar.

4.8.9 Propiedad 9. Área barrida por el radio vector

El área barrida por el radio vector r de una espiral logarítmica para un ángulo dado θ , cuando θ varía entre θ_o y θ_f , viene dada por la expresión:

$$A = \frac{r_f^2 - r_o^2}{4 \ln(b)}$$

Para verificar esta propiedad se usa la integral de área para una curva en coordenadas polares:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} f^2(\theta) d\theta$$

se sabe que $f(\theta) = r = ab^\theta$, luego al sustituir y realizar la integral se sigue:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} (ab^\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} b^{2\theta} d\theta$$

reescribiendo $b^{2\theta} = b^{2\theta} = e^{\ln(b^{2\theta})} = e^{\ln(b)2\theta}$ y luego sustituyendo en la integral

$$A = \frac{a^2}{2} \int_{\theta_o}^{\theta_f} (e^{2\ln(b)\theta}) d\theta$$

Sea $u = 2\ln(b)\theta$, entonces $du = 2\ln(b) d\theta$, por consiguiente $d\theta = \frac{du}{2\ln(b)}$, como es una integral definida, los límites de integración también cambian. Si $\theta = \theta_o$, entonces $u = 2\ln(b)\theta_o$ y para el límite superior, si $\theta = \theta_f$, entonces $u = 2\ln(b)\theta_f$ y la integral será:

$$A = \frac{a^2}{4\ln(b)} \int_{2\ln(b)\theta_o}^{2\ln(b)\theta_f} (e^u) du = \frac{a^2}{4\ln(b)} (e^u) \Big|_{2\ln(b)\theta_o}^{2\ln(b)\theta_f}$$

nuevamente haciendo cambio de variable se obtiene:

$$A = \frac{a^2}{4\ln(b)} (e^{2\ln(b)\theta}) \Big|_{\theta_o}^{\theta_f}$$

como $e^{2\ln(b)\theta} = b^{2\theta}$, entonces

$$A = \frac{a^2}{4\ln(b)} (b^{2\theta}) \Big|_{\theta_o}^{\theta_f} \Rightarrow A = \frac{(ab^\theta)^2}{4\ln(b)} \Big|_{\theta_o}^{\theta_f}$$

evaluando en los límites de integración se obtiene:

$$A = \frac{a^2}{4\ln(b)} (b^{2\theta}) \Big|_{\theta_o}^{\theta_f} \Rightarrow A = \frac{(ab^{\theta_f})^2 - (ab^{\theta_o})^2}{4\ln(b)}$$

como $r = ab^\theta$ entonces al sustituir en la igualdad anterior se obtiene:

$$A = \frac{r_f^2 - r_o^2}{4\ln(b)} \quad (4.12)$$

así queda demostrada la propiedad.

Con el estudio de esta espiral se culmina el análisis de las espirales propuesto para el presente trabajo sin que ello agote el tema o el posible estudio de estas mismas u otras curvas. En el próximo capítulo se presentarán las conclusiones del trabajo realizado y las reflexiones derivadas del mismo.

REPOSITORIO DE ESPIRALES

Como parte del trabajo realizado y con la finalidad de que el lector pueda visualizar mejor cada una de las construcciones empleadas para el estudio de propiedades de las espirales, se creó un repositorio digital en la página del software de Geometría dinámica, GeoGebra®. Los archivos fueron cargados de tal forma que la interfaz mostrará cada espiral y el desarrollo de algunas propiedades asociadas a estas (Figura 5-1).



Figura 5-1: A la izquierda listado de construcciones. En la ventana principal, previsualización de estas.

Cada uno de los archivos presentados pueden ser visualizados, editados o descargados por lector, accediendo a través del siguiente link: <https://www.geogebra.org/m/ku5tzvgd>

Se hace la aclaración que las construcciones presentadas en el repositorio no pretenden ser un recurso para la enseñanza de este tema, sino, una herramienta que permitió el desarrollo del presente estudio y que puede ser de utilidad para el lector.

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

La propuesta de trabajo inicial pretendía abarcar el tema de curvas planas específicamente el de espirales, esto involucraba no solo la familia de espirales arquimedianas y logarítmica, sino el estudio de espirales poco estudiadas como la espiral de Galileo, espiral de Poincaré, espiral de Cornú, espiral tractriz, entre otras; sin mencionar las más conocidas como lo son las espirales áureas (la espiral de Durero y la espiral de Fibonacci). Sin embargo, en el desarrollo del trabajo se logró evidenciar que, si se deseaba trabajar detalladamente las características de cada una de estas espirales, era poco probable poder hacerlo con cada una de ellas dada la extensión del tema; por tanto, se tomó la decisión de realizar el estudio de propiedades a partir del concepto general de espiral e involucrando algunas familias específicas de espirales como las espirales arquimedianas y finalizando con la espiral logarítmica.

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas del estudio realizado en relación con los objetivos propuestos, en cuanto a la metodología aplicada, el aporte del proceso de aprendizaje vivido como licenciados en formación y se cierra con una relación sobre los aportes del trabajo a la comunidad de educadores matemáticos.

Sobre los objetivos:

Se logró desarrollar el estudio de algunas propiedades que caracterizan las espirales arquimedianas y logarítmica. Fruto de este estudio se elaboró como producto final el presente escrito y repositorio de espirales, los cuales constituyen un recurso bibliográfico, donde se recopila el desarrollo de algunas propiedades básicas y generales de dichas espirales presentadas en detalle.

En el desarrollo del trabajo se logró establecer algunas relaciones entre las propiedades de las espirales, sus usos y aplicaciones en la vida cotidiana. Sin embargo, cabe resaltar que el estudio de estas curvas se centró en la verificación de propiedades. Lo anterior, debido a que en la revisión documental donde se consultó, recopiló y seleccionó información, se evidenció que el material bibliográfico que se encuentra disponible sobre el tema de espirales está más enfocado hacia el

arte y algunas ciencias, es algo limitado en cuanto al desarrollo matemático que caracteriza estas curvas.

Por último, se menciona que los documentos más completos sobre espirales (dentro del contexto de sus propiedades) están escritos en otro idioma diferente al español y se considera relevante poder contar con este recurso bibliográfico en el idioma español, que además responda a una única notación y parametrización de las respectivas espirales, ya que diversas fuentes no sólo usan diferentes notaciones, sino que, usualmente emplean formas muy específicas para la representación de una espiral, esto es, toman un miembro específico de la familia de espirales. En algunas fuentes las propiedades escasamente aparecían mencionadas sin la demostración y en otras resultan poco detalladas; ese era el principal objetivo al estudiar las espirales y presentarlas como objetos que pueden ser estudiados dentro del contexto de la geometría analítica, pero, que también podrían ser exploradas en el aula de la educación secundaria sin una verificación analítica detallada, pero sí para reconocerlas e identificar ciertas regularidades y propiedades de estas desde una exploración guiada que apoye tareas como la visualización y la generalización.

Es importante señalar que dada la extensión del trabajo se optó por partir de la representación generalizada de las espirales y este se realizó a modo exploratorio, ya que, el énfasis estuvo en lo analítico, por lo tanto, se sugiere para futuras investigaciones profundizar en las construcciones teniendo en cuenta su paso a paso y composición de movimientos además de ampliar el contexto de aplicaciones y usos.

Sobre la metodología:

Emplear la metodología exploratoria permitió tener un orden de estudio para el desarrollo del trabajo y abordar los objetivos planeados, ya que, el estudio de las propiedades de estas curvas, a menudo no son evidentes a primera vista, debido a sus características y aplicaciones complejas. Muchas veces dentro del desarrollo se requirió usar software de geometría (en particular GeoGebra ®) ya fuera para visibilizar la propiedad o incluso para llevarla a un lenguaje comprensible. Por lo anterior, se enfatizó en realizar una revisión bibliográfica, que generó mayor entendimiento de las propiedades, teniendo cada vez más herramientas para abordarlas y considerando diferentes campos y contextos donde las espirales pueden ser aplicadas.

En resumen, el desarrollo del presente trabajo a través de la metodología de investigación exploratoria proporcionó una visión inicial de estas singulares curvas, generó preguntas e inquietudes, demostró su relevancia en diversas disciplinas y se espera que brinde la oportunidad para investigaciones futuras sobre las demás espirales u otro tipo de curvas en el plano o en el espacio.

Sobre los aprendizajes:

El estudio realizado fue un proceso enriquecedor en el ámbito formativo como educadores matemáticos, ya que permitió:

- Caracterizar algunas propiedades de las espirales empleando cálculo integral y algunas construcciones geométricas con ayuda de GeoGebra ® para su verificación, afianzando así conocimientos relevantes con los que debe contar un futuro educador matemático.
- Por medio del estudio de curvas en coordenadas polares, se logra visualizar la importancia que tiene el uso de este sistema, no solo para parametrizar cada curva, sino para su representación y análisis, ya que el manejo fluido de pasar de un sistema a otro permite razonar, modelar con ayuda de software (GeoGebra ®) y caracterizar cada una de las propiedades.
- Conceptualizar desde la definición de integral, la longitud de curva y el área de una curva en coordenadas polares.
- Reconocer la relación que tienen las espirales en la naturaleza y sus diferentes usos en la cotidianidad, lo cual representa una oportunidad de exploración e implementación en el aula de clase.
- Realizar un cuestionamiento a algunos saberes dentro del campo del Cálculo Diferencial e Integral, así como de la Geometría Analítica que como profesionales de la Educación Matemática debemos tener aun cuando estos puedan estar lejanos de las aulas en las cuales se espera que nos desempeñemos.

Sobre los aportes

El principal aporte para la comunidad académica es el compendio de propiedades que caracterizan a las espirales arquimedianas y a la espiral logarítmica, ya que este material bibliográfico puede ser un buen punto de partida para aquellas personas que deseen adentrarse en el mundo de las espirales desde un punto de vista diferente al arte y meramente descriptivo o exploratorio.

Otro aporte fue la creación de un repositorio en GeoGebra® dedicado a las construcciones de espirales como producto del estudio de sus propiedades. Este repositorio no solo facilita el acceso a las construcciones, sino que también brinda al lector la visualización y exploración interactiva, permitiendo a su vez analizar, experimentar y profundizar en las propiedades de las espirales, proporcionando así una herramienta invaluable para estudiantes, profesores e investigadores interesados en este tema.

Los objetos geométricos espirales no aparecen de manera específica en el currículo escolar colombiano, y puede ser un buen complemento para la formación de estudiantes de diferentes grados. El estudio que se presenta de estas curvas puede ser un recurso para los docentes, que les ayude a diseñar actividades que involucren regularidades sobre áreas y longitudes presentes en algunas espirales. De igual manera es posible diseñar este tipo de actividades para estudiantes de educación superior donde se ponga en práctica las herramientas del Cálculo Infinitesimal y la Geometría Analítica.

REFERENCIAS

- Aguirre, N. (2013). La espiral de Arquímedes en un proyecto de modelación matemática. *Revista de Educación Matemática (RevEM)*.
- Álvarez, F. (2004). *Proyecto Nicolas Weinstein*. Obtenido de <https://www.dim.uchile.cl/~simetria/matematico/nodo1.html>.
- Arenzana, V. (1998). Las curvas mecánicas en la geometría griega: la cuadratriz de Dinóstrato. *Suma*, 31-36.
- Ayres, F. (1988). *Cálculo diferencial e integral*. McGraw Hill Education.
- Cano, D., Escribano, M., Garro, J., Rojo, J., Tarres, J., & Victoria, S. (2016). Un trabajo con espirales. *Pensamiento matemático*, II(2), 12-19.
- Castro, S. (2019). *Historia de las matemáticas del cero al infinito* (2 ed.). THE GALOBART BOOKS.
- Cook, T. (1979). *The Curves of Life*. Dover Publications.
- Cortázar, J. (1862). *Geometría Analítica*. España
- Davis, J. (1993). *Spirals: From Theodorus to Chaos*. United States of America: A K Peters/CRC Press.
- Edition, Encyclopedia Britannica Eleventh*. (1970). 29.
- Española, R. A. (2023). *Diccionario de la lengua española* (23 ed.). Espasa Calpe.
- Ferréol, R. (2019). *Math curve*. Obtenido de <https://mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml>
- Gardner, M. (1961). *Science good*. Buffalo, NY: Prometheus.
- Gomez, E. B. (2012). *Dibujo Técnico. 1 Bachillerato* (Vol. 2). McGraw-Hill .
- Gomez, J., Garcia, F. & Navarro, E. (2003). *Matemáticas, Temario para la preparación de oposiciones* (Vol. 2). Madrid, España : Mad S.L .
- Granados, A. (2018). Espirales. *Researchgate*, 1-8.
- Heath, T. L. (1987). *The works of Archimedes*. London: The Macmillan Company.
- Johnson, A. (1999). *Famous problems and their mathematicians*. Libraries Unlimited.
- Lasso, J. S. (2021). *Estudio de curvas planas a partir de parametrizaciones*. Obtenido de Repositorio UPN: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/16705>
- Lawrence, J. D. (2014). *A catalog of special plane curves*. Dover publications.
- Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica* . Limusa.
- Lockwood, E. (1961). *A book of curves*. Cambridge University Press.

- Lorente, J. L. (2006). *Tema 48. Espiral y helices*.
- Mosquera J. (2013). *Desarrollo histórico de la noción de curva: de la forma sintética a la representación analítica*. Trabajo de grado, Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Morales, N. (2015). *Investigación Exploratoria: Tipos, metodología y ejemplos*. Obtenido de <https://www.lifeder.com/investigacion-exploratoria>.
- Nahin, P. (2007). *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*. Princeton University Press.
- Perez, A. (2006). Ecuación de las flores. *Sigma: revista de matemáticas*(26), 137-148. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2921390>
- Rabar, K., & Sošić, M. (2022). Logaritamska spirala. *Zbornik radova*, XXV(1), 139-153.
- Sarmiento, B., & Rodríguez, Y. (2009). *Los tres problemas clásicos de la Geometría. Construcciones con Cabri Plus II y Usos*. Bogota: Cargraphics Carvajal S.A.
- Siracusa, A. (s.f.). *De las espirales*.
- Spivak, M. (1988). *Cálculo infinitesimal*. Reverte.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de Varias variables trascendentes tempranas* (Vol. 7). Cengage Learning.
- Tamro, E., & Fernandez, T. (2004). *Biografía de Pappus de Alejandría*. Recuperado el 12 de Febrero de 2023, de La enciclopedia biográfica en línea: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pappo.htm>
- Texeira, F. (1905). *Tratado de las curvas especiales notables*. Madrid: Gacela de Madrid.
- The American Heritage* (50 ed.). (s.f.). HarperCollins Publishers. Recuperado el 25 de 07 de 2023
- Thomas, G. (2005). *Cálculo en varias variables* (Vol. 2). Pearson education.
- Yates, R. (1947). *A handbook on curves and their properties*. Michigan: Edwards Brothers Inc.

ANEXOS

Anexo 1: Longitud de la tangente (T), Longitud de la normal (N), longitud de la subtangente (S_T) y longitud de la subnormal (S_N) para una curva en coordenadas polares.

Dada una curva en coordenadas polares (r, θ) , se pueden establecer las longitudes de los segmentos S_T, T, N, S_N para un punto $P = (r, \theta)$ de la curva como:

$$\text{Longitud de la subtangente} \quad S_T = \frac{r^2}{|r'|}$$

$$\text{Longitud de la tangente} \quad T = \sqrt{S_T^2 + r^2} = \left| \frac{r}{r'} \right| \sqrt{r^2 + r'^2}$$

$$\text{Longitud de la subnormal} \quad S_N = |r'|$$

$$\text{Longitud de la normal} \quad N = \sqrt{S_N^2 + r^2} = \sqrt{(r')^2 + r^2}$$

Nota: En algunos textos se toma el valor positivo para la longitud de cada segmento, ya que la distancia entre dos puntos es positiva; sin embargo, las expresiones dadas para estos segmentos por parte de los autores del presente escrito satisfacen condiciones de segmentos dirigidos, acorde al trabajo realizado por Gómez (1905) y Lehmann (1989), por tanto, se tendrá en cuenta el signo asociado al valor obtenido, a menos que se indique lo contrario.

Sea $r = f(\theta)$ una curva en coordenadas polares, y sea P un punto tal que $P \in r$, sea la recta m tangente a la curva por el punto P , y sea la recta n perpendicular al radio r por el origen O , entonces m y n se intersectan en el punto Q , tal que el segmento PQ se define como el segmento tangente (T) a la curva por el punto P . (Figura A-1.1)

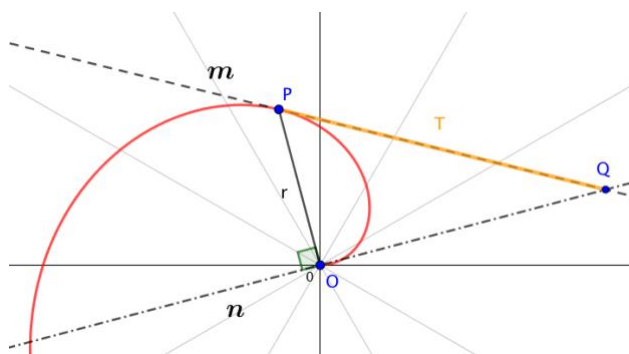


Figura A-1.1: Segmento tangente (T) de una curva polar por el punto P de la curva.

Luego, se traza la recta j perpendicular a m por el punto P , nótese en la Figura A-1.2 que la recta j es la recta normal a la curva por el punto P . Las rectas j y n se intersecan en el punto K , luego el segmento PK se define como el segmento normal (N) a la curva por el punto P .

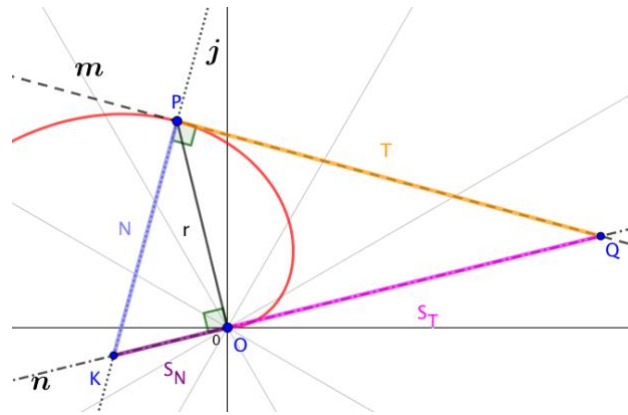


Figura A-1.2: Segmento normal (N) de una curva polar por el punto P de la curva.

En la figura A-1.2 se observa que el segmento KO es una proyección del segmento normal N sobre la recta n y de manera similar el segmento OQ es una proyección del segmento tangente T sobre la recta n , luego se define el segmento KO como subnormal S_N y al segmento OQ como subtangente S_T .

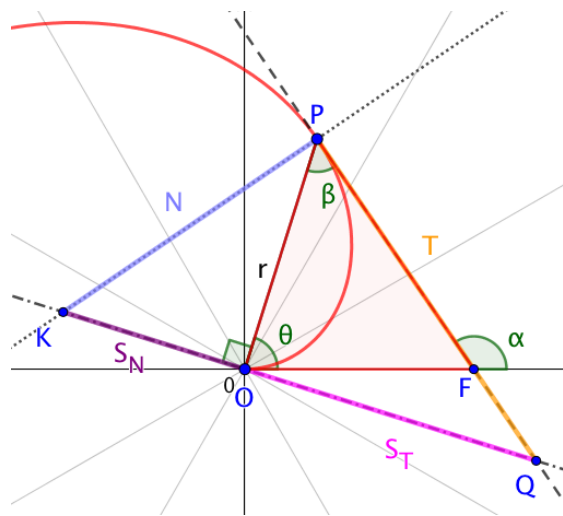


Figura A-1.3: Líneas notables

Sea β el ángulo formado por el radio vector r y la recta tangente m a la curva por el punto P . Nótese en la Figura A-1.3 que el ángulo α es el ángulo de elevación de la recta tangente m y a su vez α es un ángulo externo del triángulo POF , luego α es el ángulo suplementario del ángulo OPF , ya que son ángulos que forman un par lineal, además, se sabe que la suma de los ángulos internos en un triángulo es equivalente a 180° por tanto:

$$\theta + \beta + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

$$\beta = \alpha - \theta, \text{ como era de esperarse}$$

Aplicando tangente al ángulo a ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$\tan \beta = \tan(\alpha - \theta)$$

Luego usando la identidad trigonométrica para tangente de una resta de ángulos, se obtiene:

$$\tan \beta = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\theta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\theta)}$$

Pero la pendiente de la recta tangente en el punto P es la derivada de f en ese punto, en este caso para el ángulo de elevación α , se tiene que $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$, para el ángulo θ nótese que $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, como se está trabajando con razones trigonométricas, entonces se puede establecer la siguiente relación:

$$\tan \beta = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx} \left(\frac{y}{x}\right)} \quad (\text{I})$$

que se puede reescribir en términos de diferenciales como:

$$\tan \beta = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}$$

Como se está trabajando en coordenadas polares, se debe realizar el cambio de coordenadas cartesianas a polares, recordando que

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \Rightarrow x = f(\theta) \cos(\theta) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow y = f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Luego realizando las derivadas respectivas

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= f'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + f(\theta) \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Realizando la sustitución de (II) y (III) en (I)

$$\tan \beta = \frac{(f(\theta) \cos(\theta))[f'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)] - (f(\theta) \operatorname{sen}(\theta))[f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \operatorname{sen}(\theta)]}{(f(\theta) \cos(\theta))[f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \operatorname{sen}(\theta)] + (f(\theta) \operatorname{sen}(\theta))[f'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)]}$$

$$\tan \beta = \frac{f(\theta)([f'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + f(\theta) \cos^2 \theta] - [f'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta])}{f(\theta)([f'(\theta) \cos^2 \theta - f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)] + [f'(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta + f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)])}$$

$$\tan \beta = \frac{[f'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + f(\theta) \cos^2 \theta] - [f'(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta]}{[f'(\theta) \cos^2 \theta - f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)] + [f'(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta + f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)]}$$

$$\tan \beta = \frac{f(\theta) \cos^2 \theta + f(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta}{f'(\theta) \cos^2 \theta + f'(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{f(\theta) [\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta]}{f'(\theta) [\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta]}$$

$$\tan \beta = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

Como $r = f(\theta)$ por tanto se tiene que

$$\tan \beta = \frac{r}{r'} \quad (\text{IV})$$

Observando en la Figura A-1.3 al realizar el análisis sobre el triángulo POQ nótese que la longitud de la subtangente (S_T), usando razones trigonométricas estará dada por $\tan \beta = \frac{c.o}{c.A} = \frac{S_T}{r}$, pero en virtud de la ecuación (IV) se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{r}{r'} = \frac{S_T}{r}$$

por tanto, longitud de la subtangente (S_T) estará dada por:

$$S_T = \frac{r^2}{|r'|} \quad (\text{A-1.1})$$

Ahora, observando la Figura A-1.3, y razonando nuevamente sobre el triángulo POQ , al aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la tangente (T) se obtiene:

$$T = \sqrt{S_T^2 + r^2}$$

como la $S_T = \frac{r^2}{|r'|}$, entonces

$$T = \sqrt{\left(\frac{r^2}{|r'|}\right)^2 + r^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{r^4 + r^2 r'^2}{r'^2}}$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{r^2}{r'^2}\right)(r^2 + r'^2)}$$

Por tanto, la expresión para hallar la longitud de la tangente T estará dada por:

$$T = \left| \frac{r}{r'} \right| \sqrt{r^2 + r'^2} \quad (\text{A-1.2})$$

Ahora, para hallar la expresión que determina la longitud de la subnormal (S_N) y la longitud de la normal (N), se realiza el mismo procedimiento que se usó para la longitud de la subtangente y la tangente, sin embargo, esta vez se debe razonar sobre el triángulo OPK .

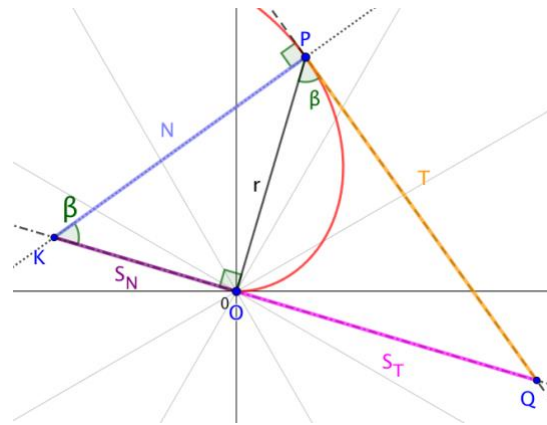


Figura A-1.4 Segmentos tangente, subtangente, normal y subnormal en una espiral hiperbólica para un punto P que pertenece a la curva.

Nótese que en la Figura A-1.4 el $\angle OKP = \beta$, luego la longitud de la subnormal (S_N) usando razones trigonométricas estará dada por $\tan \beta = \frac{c.o}{c.A} = \frac{r}{S_N}$, haciendo uso de la ecuación (IV) se tiene que:

$$\frac{r}{r'} = \frac{r}{S_N}$$

y por lo tanto, la longitud de la subtangente S_N estará dada por:

$$S_N = r' \quad (\text{A-1.3})$$

Se puede observar en la Figura A-1.4 que sobre al razonar sobre el triángulo OPK y usando el Teorema de Pitágoras, la longitud de la normal N estará dada por:

$$N = \sqrt{S_N^2 + r^2}$$

$$N = \sqrt{(r')^2 + r^2} \quad (\text{A-1.4})$$

Así quedan verificadas las expresiones para la longitud de cada segmento.

Anexo 2: La curvatura k para una curva $\mathbf{r} = f(\theta)$ expresada en coordenadas polares.

Sea $r = f(\theta)$ una curva plana escrita en coordenadas polares, donde $f(\theta)$ es una función continua y positiva, muestre que la curvatura de f viene dada por:

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A-2.1})$$

A partir de las ecuaciones

$$x = r \cos(\theta) \Rightarrow x = f(\theta) \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta) \Rightarrow y = f(\theta) \sin(\theta)$$

se puede establecer la función vectorial $\mathbf{r} = f(\theta)$ como:

$$\mathbf{r} = \langle x, y \rangle = \langle r \cos(\theta), r \sin(\theta) \rangle = \langle f(\theta) \cos(\theta), f(\theta) \sin(\theta) \rangle$$

donde la primera y segunda derivada son respectivamente:

$$\mathbf{r}' = \langle f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta) \rangle$$

$$\mathbf{r}'' = \langle f''(\theta) \cos(\theta) - f'(\theta) \sin(\theta) - f'(\theta) \sin(\theta) - f(\theta) \cos(\theta), f''(\theta) \sin(\theta) + f'(\theta) \cos(\theta) + f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta) \rangle$$

$$\mathbf{r}'' = \langle f''(\theta) \cos(\theta) - 2f'(\theta) \sin(\theta) - f(\theta) \cos(\theta), f''(\theta) \sin(\theta) + 2f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta) \rangle$$

Se conoce que la curvatura²³ de una curva está dada por:

$$k = \frac{|r' \times r''|}{\|r'\|^3} \quad (\text{A-2.2})$$

luego calculando el producto cruz entre r' y r'' se obtiene:

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\text{sen}(\theta) & f'(\theta)\text{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta) & 0 \\ f''(\theta)\cos(\theta) - 2f'(\theta)\text{sen}(\theta) - f(\theta)\cos(\theta) & f''(\theta)\text{sen}(\theta) + 2f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\text{sen}(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\text{sen}(\theta) & f'(\theta)\text{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta) \\ f''(\theta)\cos(\theta) - 2f'(\theta)\text{sen}(\theta) - f(\theta)\cos(\theta) & f''(\theta)\text{sen}(\theta) + 2f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\text{sen}(\theta) \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$r' \times r'' = [(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\text{sen}(\theta))(f''(\theta)\text{sen}(\theta) + 2f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\text{sen}(\theta)) - (f'(\theta)\text{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))(f''(\theta)\cos(\theta) - 2f'(\theta)\text{sen}(\theta) - f(\theta)\cos(\theta))]$$

$$r' \times r'' = f'f''\cos(\theta)\text{sen}(\theta) + 2f'^2\cos^2(\theta) - ff'\cos(\theta)\text{sen}(\theta) - ff''\text{sen}^2(\theta) - 2ff'\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + f^2\text{sen}^2(\theta) - [f'f''\text{sen}(\theta)\cos(\theta) - 2f'^2\text{sen}^2(\theta) - ff'\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + ff''\cos^2(\theta) - 2ff'\cos(\theta)\text{sen}(\theta) - f^2\cos^2(\theta)]$$

$$r' \times r'' = f'f''\cos(\theta)\text{sen}(\theta) + 2f'^2\cos^2(\theta) - ff'\cos(\theta)\text{sen}(\theta) - ff''\text{sen}^2(\theta) - 2ff'\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + f^2\text{sen}^2(\theta) - f'f''\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + 2f'^2\text{sen}^2(\theta) + ff'\text{sen}(\theta)\cos(\theta) - ff''\cos^2(\theta) + 2ff'\cos(\theta)\text{sen}(\theta) + f^2\cos^2(\theta)$$

al organizar términos semejantes para reducir y simplificar la expresión se obtiene:

$$r' \times r'' = f'f''\cos(\theta)\text{sen}(\theta) - f'f''\text{sen}(\theta)\cos(\theta) - ff'\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + ff'\cos(\theta)\text{sen}(\theta) - ff''(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) - 2ff'\cos(\theta)\text{sen}(\theta) + 2ff'\text{sen}(\theta)\cos(\theta) +$$

²³ Si es de interés del lector, en la sección 13.3 del libro Cálculo de Trascendentes Tempranas, cuarta edición, del autor James Stewart, en la página 852 se puede consultar la demostración para la curvatura de una curva dada por la función vectorial r .

$$2f'^2(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) + f^2(\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta))$$

$$r' \times r'' = f^2 - ff'' + 2f'^2$$

y como $f(\theta) = r$, se obtiene:

$$r' \times r'' = r^2 + 2r'^2 - rr'' \quad (I)$$

Ahora se procede a hallar la norma de r' , y luego $\|r'\|^3$

$$\|r'\| = \sqrt{(f' \cos(\theta) - f \text{sen}(\theta))^2 + (f' \text{sen}(\theta) + f \cos(\theta))^2}$$

$$\|r'\| = \sqrt{f'^2 \cos^2(\theta) - 2ff' \cos(\theta) \text{sen}(\theta) + f^2 \text{sen}^2(\theta) + f'^2 \text{sen}^2(\theta) + 2ff' \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + f^2 \cos^2(\theta)}$$

$$\|r'\| = \sqrt{f'^2 \cos^2(\theta) + f'^2 \text{sen}^2(\theta) + f^2 \text{sen}^2(\theta) + f^2 \cos^2(\theta)}$$

$$\|r'\| = \sqrt{f^2(\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + f'^2(\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta))}$$

$$\|r'\| = (f^2 + f'^2)^{\frac{1}{2}}$$

así, la norma de r' elevada al cubo estará dada por:

$$\|r'\|^3 = (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} \quad (II)$$

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (I) y (II) en (A – 2.2) se deduce que la expresión de la curvatura para una curva en coordenadas polares está dada por:

$$k = \frac{|r' \times r''|}{\|r'\|^3} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

tal como se quería probar.

Anexo 3: Resolución de la integral de la ecuación 2-10 para hallar la longitud de curva espiral de Arquímedes

$$L = b \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

Sea $\theta = \tan(x)$, entonces $d\theta = \sec^2(x)dx$, haciendo un mapeo del intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi n$ en el intervalo $A \leq x \leq B$, se tiene que:

$$L = b \int_A^B \sqrt{1 + \tan^2 x} \sec^2(x) dx \Rightarrow L = b \int_A^B \sec^3(x) dx$$

El problema se reduce en resolver la integral $k = \int_A^B \sec^3(x) dx$, aplicando integración por partes, $\int u dv = uv - \int v du$, donde:

$$\text{I. } u = \sec(x) \Rightarrow du = \sec(x) \tan(x) dx$$

$$\text{II. } dv = \sec^2(x) dx \Rightarrow v = \int \sec^2(x) dx \Rightarrow v = \tan(x)$$

Se tiene que la integral k , estará dada por:

$$k = \int_A^B \sec^3(x) dx = \sec(x) \tan(x) - \int_A^B \sec(x) \tan^2(x) dx$$

luego, resolviendo la integral, se sigue:

$$k = \int_A^B \sec^3(x) dx = \sec(x) \tan(x) - \int_A^B (\sec x (\sec^2 x - 1)) dx$$

$$k = \int_A^B \sec^3(x) dx = \sec(x) \tan(x) - \int_A^B \sec^3(x) dx + \int_A^B \sec(x) dx$$

como $k = \int_A^B \sec^3(x) dx$, entonces

$$2k = \sec(x) \tan(x) + \int_A^B \sec(x) dx$$

resolviendo

$$2k = \sec(x) \tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)| \Big|_{A_1}^{B_1}$$

$$k = \frac{\sec(x) \tan(x)}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sec(x) + \tan(x)| \Big|_{A_1}^{B_1}$$

Ahora, efectuando cambio de variable; como $\theta = \tan(x)$, entonces $x = \tan^{-1} \theta$, y se debe tener presente nuevamente los límites de integración, para volver al mapeo inicial $0 \leq \theta \leq 2\pi n$

$$k = \frac{\sec(\tan^{-1} \theta) \tan(\tan^{-1} \theta)}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sec(\tan^{-1} \theta) + \tan(\tan^{-1} \theta)| \Big|_0^{2\pi n}$$

$$k = \frac{\sec(\tan^{-1} \theta) \theta}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sec(\tan^{-1} \theta) + \theta| \Big|_0^{2\pi n}$$

como $\sec(\beta) = \sqrt{\tan^2(\beta) + 1}$, donde $\beta = \tan^{-1} \theta$, se sigue:

$$\sec(\tan^{-1} \theta) = \sqrt{\theta^2 + 1}$$

luego sustituyendo este valor en k , se obtiene:

$$k = \frac{1}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln \left| \sqrt{\theta^2 + 1} + \theta \right| \Big|_0^{2\pi n} \right]$$

así, reemplazando k en la ecuación para la longitud (L) se sigue:

$$L = b \frac{1}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln \left| \sqrt{\theta^2 + 1} + \theta \right| \Big|_0^{2\pi n} \right]$$

Como $\theta = 2\pi n$ para el giro de orden n , entonces evaluando en los límites establecidos finalmente se obtiene que la longitud de curva estará dada por:

$$L = \frac{b}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln \left| \sqrt{\theta^2 + 1} + \theta \right| - \ln \left| \sqrt{1} + 0 \right| \right]$$

$$L = \frac{b}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln \left| \theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right| \right] \quad (\text{A-3.1})$$

así, queda verificada la propiedad.

Observe que si en la sustitución trigonométrica que se hizo al comienzo para hallar:

$$L = b \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

Donde la integral es de tipo $\int \sqrt{a^2 + \theta^2} d\theta$, se hubiera usado $\theta = a \sinh x$; $d\theta = a \cosh x$ se tendría una expresión diferente para lo longitud de curva, pero equivalente:

$$L = \frac{b}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \sinh^{-1} \theta \right] \quad (\text{A-3.2})$$

Anexo 4: Expresión de Arquímedes para hallar el valor del área de cada anillo de la espiral uniforme.

Dada una espiral uniforme, el valor del área encerrada entre dos espiras consecutivas y el eje polar para $n \geq 2$, donde n representa la espira enésima, estará dada por la expresión:

$$A_{n+1} = \frac{n}{(n-1)} A_n$$

A_n representa el valor del área comprendida entre las espiras n y $(n-1)$ y el eje polar. Por otra parte, A_{n+1} representa el valor del área encerrada por la espira o anillo siguiente el cual se desea hallar.

En la última columna de la Tabla 8 se puede observar que el área de cada espira o anillo está en términos del radio inicial; como se busca encontrar una expresión general por medio de una sucesión recursiva que permita llegar a la generalización de Arquímedes, se usaran los valores de la última columna, aunque esta no es la única forma de hacerlo, para fines prácticos se tomarán estos valores. Luego, al realizar el cociente entre los valores de áreas consecutivas se obtiene los datos consignados en la Tabla 8.

Tabla 8: Cociente o razón entre los valores de áreas consecutivas

n	Área encerrada por la espira en términos de A_{c1}	$\frac{A_{n+1}}{A_n}$
2	$A_2 = 2A_{c1}$	$\frac{A_3}{A_2} = \frac{2}{1}$
3	$A_3 = 4A_{c1}$	$\frac{A_4}{A_3} = \frac{3}{2}$
4	$A_4 = 6A_{c1}$	$\frac{A_5}{A_4} = \frac{4}{3}$
5	$A_5 = 8A_{c1}$	$\frac{A_6}{A_5} = \frac{5}{4}$
6	$A_6 = 10A_{c1}$	$\frac{A_7}{A_6} = \frac{6}{5}$
7	$A_7 = 12A_{c1}$	$\frac{A_8}{A_7} = \frac{7}{6}$

Se observa que el termino enésimo (n) la sucesión a_n con $n \geq 2$, generada por el cociente de áreas consecutivas $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ estará dado por:

$$a_n = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n}{n-1}$$

por consiguiente

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n}{n-1} \Rightarrow A_{n+1} = \frac{n}{(n-1)} A_n$$

El análisis expuesto aquí no es una demostración de la propiedad de Arquímedes, sin embargo, la idea es mostrar una manera de obtener la generalidad a la que llegó Arquímedes empleando los datos obtenidos de la Tabla 8.

Anexo 5: Expresión para hallar el valor del área barrida por el radio vector que genera la espiral.

Dada una espiral uniforme, el área barrida por el radio vector de la espiral cuando éste describe la espira o vuelta de orden n estará dada por:

$$A_B = \frac{4}{3}(3n^2 - 3n + 1)\pi^3 b^2$$

A partir de los datos obtenidos en la Tabla 8, es posible generar una nueva tabla de datos que contenga el cambio del área barrida cada vez que se incrementa el número n de vueltas. Se sabe que $\pi^3 b^2$ es un valor constante, por tanto, se operará solamente con los coeficientes ubicándolos en la Tabla 9 y calculando los cambios sucesivos del área barrida hasta que este cambio sea nulo, a continuación, se presenta los datos obtenidos:

Tabla 9: Cambio del área barrida

n	A	ΔA	$\Delta(\Delta A)$	$\Delta(\Delta(\Delta A))$
1	$\frac{4}{3}$	0		
2	$\frac{28}{3}$	$\frac{24}{3}$	0	
3	$\frac{76}{3}$	$\frac{48}{3}$	$\frac{24}{3}$	0
4	$\frac{148}{3}$	$\frac{72}{3}$	$\frac{24}{3}$	0

Haciendo uso de los datos obtenidos en la Tabla 9, se puede expresar el área (A) por medio de un polinomio de segundo orden ya que el cambio de tercer orden es nulo, así se tiene que el modelo es de la forma: $A(n) = an^2 + bn + c$. Así se establecen las siguientes condiciones:

- 1) $\frac{4}{3} = a(1)^2 + b(1) + c \implies \frac{4}{3} = a + b + c$
- 2) $\frac{28}{3} = a(2)^2 + b(2) + c \implies 28 = 12a + 6b + 3c$
- 3) $\frac{76}{3} = a(3)^2 + b(3) + c \implies 76 = 27a + 9b + 3c$

A partir de las tres condiciones generadas, se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual se puede resolver por cualquier método. Empleando el método de Gauss-Jordan, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4/3 \\ 12 & 6 & 3 & | & 28 \\ 27 & 9 & 3 & | & 76 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4/3 \\ 0 & -6 & -9 & | & 12 \\ 0 & -18 & -24 & | & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4/3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & -2 \\ 0 & -18 & -24 & | & 40 \end{pmatrix} \sim$$

$F_2 - 12F_1 \rightarrow F_2$ $-\frac{1}{6}F_2 \rightarrow F_2$ $F_3 + 18F_2 \rightarrow F_3$
 $F_3 - 27F_1 \rightarrow F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4/3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4/3 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4/3 \end{pmatrix} \sim$$

$\frac{1}{3}F_3 \rightarrow F_3$ $F_2 - \frac{3}{2}F_3 \rightarrow F_2$ $F_1 - 1F_3 \rightarrow F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4/3 \end{pmatrix}$$

$F_1 - 1F_2 \rightarrow F_1$

así, los valores para a , b y c respectivamente son 4 , -4 y $\frac{4}{3}$ y sustituyendo en el polinomio de segundo grado que se obtiene:

$$A(n) = an^2 + bn + c$$

$$A(n) = 4n^2 - 4n + \frac{4}{3}$$

$$A(n) = \frac{4}{3} (3n^2 + 3n + 1)$$

Por tanto, el área barrida por el radio vector estará dada por:

$$A_B = \frac{4}{3} (3n^2 - 3n + 1) \pi^3 b^2$$

Anexo 6: Resolución de las integrales (I) y (II) para hallar la longitud de curva de la espiral hiperbólica

La longitud de curva para la espiral hiperbólica se puede expresar por:

$$L = b \int_A^B \sec x + \cot x \csc x \, dx \Rightarrow L = b \int_A^B \sec x \, dx + b \int_A^B \cot x \csc x \, dx$$

por tanto, se deben desarrollar las siguientes integrales

$$\text{I. } b \int_A^B \sec x \, dx = b \ln (\tan x + \sec x) \Big|_A^B$$

$$\text{II. } b \int_A^B \cot x \csc x \, dx = -b \csc x \Big|_A^B$$

Para la solución de La primera integral (I), esta se puede reescribir como:

$$b \int_A^B \sec x \, dx = b \int_A^B \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} \, dx = b \int_A^B \frac{(\sec x \tan x + \sec^2 x)}{\tan x + \sec x} \, dx$$

realizando un cambio de variable, con $u = \tan x + \sec x$, se sigue que:

$$u = \tan x + \sec x \Rightarrow du = \sec^2 x + \sec x \tan x \, dx$$

luego sustituyendo en la integral

$$b \int_A^B \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\tan x + \sec x} \, dx = b \int_{A_1}^{B_1} \frac{du}{u} = b \ln |u| \Big|_{A_1}^{B_1}$$

al regresar el mapeo a la variable x , se obtiene el resultado expresado en (I)

$$b \int_A^B \sec x \, dx = b \ln (\tan x + \sec x) \Big|_A^B$$

Para la segunda integral (II) se resuelve de manera similar, ya que al reescribir $\cot x \csc x$ se obtiene:

$$b \int_A^B \cot x \csc x \, dx = b \int_A^B \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} \, dx = b \int_A^B \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$$

haciendo cambio de variable, sea $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x \, dx$, luego

$$b \int_A^B \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = b \int_{A_1}^{B_1} \frac{du}{u^2} = -b \frac{1}{u} \Big|_{A_1}^{B_1}$$

regresando el mapeo a la variable x se obtiene el resultado expresado en (II) se obtiene

$$b \int_A^B \cot(x) \operatorname{csc}(x) dx = -b \operatorname{csc}(x) \Big|_A^B$$

por tanto, de las integrales (I) y (II), se obtiene:

$$L = b \int_A^B \sec(x) dx + b \int_A^B \cot(x) \operatorname{csc}(x) dx = b \ln(\tan(x) + \sec(x)) \Big|_A^B - b \operatorname{csc}(x) \Big|_A^B$$