

**La naturaleza eléctrica del corazón como un problema de conocimiento: estudio sobre
las implicaciones que tiene su interpretación desde el contexto de los sistemas
dinámicos y la geometría fractal**

RIBKÁ SORACIPA MUÑOZ

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.**

2023

La naturaleza eléctrica del corazón como un problema de conocimiento: estudio sobre las implicaciones que tiene su interpretación desde el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal

RIBKÁ SORACIPA MUÑOZ

Trabajo de grado como requisito para optar el título de Magister en Docencia de las Ciencias Naturales

Asesores

GIOVANNY SIERRA VARGAS, FRANCISCO JAVIER OROZCO GONZÁLEZ

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Bogotá D.C. 2023**

Dedicatoria

*Al Altísimo y los maestros de Israel que guían mi camino
A mis padres que me dieron la libertad para desenvolverme en el fascinante mundo del
conocimiento, en el cual se extiende mis alas para volar cada vez más alto y dejar de lado
el mundo de las limitaciones
A los cinco niños que crecieron escuchando la existencia de la armonía matemática.*

Agradecimientos

*A Catalina Correa y Signed Prieto por trabajar junto conmigo por más de 10 años en el
mundo fascinante de la armonía física y matemática del corazón.
A Jairo Jattin y Cesar Valdés por su apoyo incondicional durante la elaboración de este
trabajo de grado
A los estudiantes de la facultad de medicina de la Universidad Militar Nueva Granada
A las chicas de la UPN por su espíritu ganador para siempre dar lo mejor*

TABLA DE CONTENIDO

Introducción.....	1
Capítulo 1	
1. Planteamiento del problema	4
1.1.1. Descripción del problema y justificación	4
1.1.2. Formulación de la pregunta	8
1.1.3. Objetivos	8
1.1.4. Objetivo general.....	8
1.1.5. Objetivos específicos	9
Capítulo 2	
2. Estudio del comportamiento del corazón desde una mirada mecánica y eléctrica.....	10
2.1. El movimiento compuesto y su relación con el movimiento del corazón.....	11
2.1.1. La modelización de los fenómenos físico o de la naturaleza.....	13
2.1.2. Primeros estudios del comportamiento mecánico del corazón.....	22
2.2. Principales experiencias de las cuales emergieron las nociones de electricidad y magnetismo	28
2.2.1. De la electrostática a la electrodinámica.....	35
2.3. El galvanómetro	41
2.3.1. El galvanómetro en el contexto de la docencia y la investigación	43
2.3.2. El procesamiento de la señal eléctrica del corazón.....	46
2.4. Síntesis del capítulo.....	48
Capítulo 3	
3. Matematización de la naturaleza.....	52
3.1. Representaciones de la realidad e imágenes de conocimiento	53
3.2. Formalización de la metodología fundamentada en los sistemas dinámicos y la geometría fractal.....	56
3.3. El espacio de Box Counting y la dimensión fractal	57
3.4. Atractor cardíaco caótico.....	60
3.5. Desarrollo de la idea de espacio generalizado de Box Counting	66
3.5.1. La combinatoria	70
3.5.2. Serie y número total de atractores cardíacos caóticos	77
3.6. El “arte de contar”	82
3.6.1. El concepto de suma	84
3.6.2. Operaciones básicas en los logaritmos	85
3.7. Espacio generalizado de Box Counting para los atractores cardíacos caóticos	88
3.8. Síntesis del capítulo.....	92
Capítulo 4	

4. Seminario: interpretación del electrocardiograma en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal.....	95
4.1. Descripción de la página Web del seminario	100
4.1.1. Preliminares	102
4.1.2. Unidad 1: Organización de los estudios que antecedieron a la creación del electrocardiograma.....	107
4.1.3. Unidad 2: Matematización de la naturaleza.....	110
4.1.4. El arte de contar	114
4.1.5. Metas por alcanzar	121

Capítulo 5

5. Reflexiones finales	122
------------------------------	-----

Bibliografía	125
---------------------------	-----

Anexo 1	132
----------------------	-----

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 2

Figura 1. Trayectoria circular uniforme de un objeto en el punto $P(x, y)$	12
Figura 2. Trayectoria del objeto representada en un movimiento armónico simple o movimiento vibratorio armónico	13
Figura 3. Movimiento sistema masa resorte	14
Figura 4. Trazado del movimiento armónico simple en un sistema masa resorte	15
Figura 5. Esfigmógrafo de Vierordt	16
Figura 6. Representación gráfica del pulso arterial generada por el Esfigmógrafo de Marey	17
Figura 7. El Esfigmógrafo diseñado por Benjamín Ward Richardson y el trazado de la presión de la arteria radial	19
Figura 8. Una de las versiones del cardiógrafo de Marey	24
Figura 9. Cardiograma	25
Figura 10. Variaciones observadas en el trazado del cardiograma	27
Figura 11. Electrómetro de George Adams	30
Figura 12. Esquema diseñado para ilustrar el montaje experimental utilizado por Ohm para descubrir su ley	39
Figura 13. Versión mejorada del galvanómetro reflector de imán móvil diseñado por los hermanos Elliott en 1875	43
Figura 14. Electrómetro Capilar de Lippmann fabricado en 1872	45
Figura 15. Electrocardiograma	47
Figura 16. Variaciones observadas en el intervalo RR de un Holter 24 horas	48

Capítulo 3

Figura 1. Representación de una cuadrícula	59
Figura 2. Método de Box Counting y conteo de cuadros	59
Figura 3. Atractor cardíaco caótico a) normal y b) anormal	61
Figura 4. Superposición de las rejillas K_p y K_g en los atractores a) y b) de la figura 4.62	
Figura 5. Conjuntos A, B y C	65
Figura 6. Observación de números	67
Figura 7. Experimento mental	68
Figura 8. Ampliación de un cuadro grande (K_g) y sus cuadros pequeños (K_p)	71
Figura 9. Todas las posibilidades de ocupación de cuadros K_p para un solo cuadro grande (K_g)	71
Figura 10. Posibles combinaciones o parejas (K_g, K_p) que pueden darse cuando se tienen dos cuadros grandes (K_g)	72

Figura 11. Posibles combinaciones o parejas (K_g , K_p) que pueden darse cuando se tienen tres cuadros grandes (K_g).....	73
Figura 12. Cuadros ocupados y su relación con alguno de los tres conjuntos	83
Figura 13: Esferas que representan la idea de generalización mediante la cantidad de atractores que contienen la cantidad de conjuntos A, B y C	84
Figura 14. Regla de Arquímedes	87
Figura 15. Comportamiento de la proporción entre pequeños (K_p) y grandes (K_g) y su dimensión fractal (D).....	91

Anexo

Figura 1. Comportamiento de la proporción entre pequeños (K_p) y grandes (K_g) y su dimensión fractal de la tabla 1	133
--	-----

ÍNDICE DE TABLAS

Capítulo 2

Tabla 1. Resultados del montaje experimental de Ohm	39
---	----

Capítulo 3

Tabla 1. Aspectos generales del espacio de Box Counting y la dimensión fractal obtenida mediante este método	58
Tabla 2. Aspectos generales de un atractor cardiaco caótico	61
Tabla 3. Cantidad de Kp cuando se tienen una cantidad de Kg organizados en parejas las cuales establecen un determinado número de combinaciones.....	73
Tabla 4. Cantidad de Kp cuando se tienen tres Kg organizados en parejas las cuales establecen un determinado número de combinaciones	74
Tabla 5. Cantidad de Kp cuando se tienen cuatro Kg organizados en parejas las cuales determinan un determinado número de combinaciones	74
Tabla 6. Cantidad de Kp cuando se tienen cinco Kg organizados en parejas las cuales determinan un determinado número de combinaciones	75
Tabla 7. Generalización de los resultados obtenidos para las situaciones.....	76
Tabla 8. Número total de atractores normales, agudos y atractores que pueden estar evolucionando hacia el estado dinámico normal o agudo	82
Tabla 9. Generalización de la cantidad de cuadros pequeños (Kp) y grandes (Kg), así como el número de parejas que se pueden establecer	89
Tabla 10. Número de posibles parejas que se pueden establecer si se tiene 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 cuadros grandes	89
Tabla 11. Número de combinaciones, parejas, cuadros ocupados al superponer sobre el atractor una rejilla con 16 cuadros grandes (Kg) y el número mínimo y máximo de cuadros pequeños (Kp), la proporción entre Kp/Kg y su dimensión fractal (D)	90

Capítulo 4

Tabla 1. Características generales del seminario.....	97
---	----

Anexo 1

Tabla 1. Número de combinaciones, parejas, cuadros ocupados al superponer sobre el atractor una rejilla con 17 cuadros grandes (K_g) y el número mínimo y máximo de cuadros pequeños (K_p), la proporción entre K_p/K_g y su dimensión fractal (D) 132

INTRODUCCIÓN

Un problema de conocimiento de acuerdo con Orozco y colaboradores (2003) tiene su origen cuando el sujeto intenta establecer un discernimiento sobre el objeto. En la enseñanza de las ciencias es considerado dicho problema como una categoría alternativa para comprender la construcción de conocimiento en ciencias. A partir de esta categoría se puede concebir la enseñanza de las ciencias como una actividad cultural en la cual se privilegian los entornos de comunicación y de experiencias que permitan la construcción de explicaciones del mundo físico. Cabe señalar que esta categoría no privilegia la enseñanza de las ciencias a partir de la reconstrucción de los corpus teórico-experimentales disciplinares, lo cual representa un tema de reflexión en la presente investigación.

El conocimiento humano puede ser considerado un fenómeno de la conciencia que emerge como resultado de un proceso en el que se relaciona un sujeto cognoscente y un objeto por conocer. De este proceso se resaltan los siguientes elementos: el sujeto cognoscente, el objeto por conocer y la relación que debe establecerse entre ellos para que se dé el conocimiento. El filósofo Johannes Hessen en su trabajo titulado la teoría del conocimiento afirma lo siguiente: “Una exacta observación y descripción del objeto debe preceder a toda explicación e interpretación”. Para Hessen el conocimiento humano es un fenómeno de la conciencia que se diferencia del psicológico en cuanto a que se aspira a aprehender la esencia general en el fenómeno concreto.

En la literatura médica se documenta la dificultad que existe en la interpretación del trazado de un electrocardiograma, dicha dificultad se puede entender como una falta de experiencia por parte del profesional o debido a problemas en el diseño del electrocardiógrafo encargado de realizar el almacenamiento y procesamiento de la señal eléctrica del corazón. Si la dificultad se debe a una falta de experiencia en la interpretación del electrocardiograma la solución es seguir practicando las metodologías de interpretación en muchos trazados; si es el equipo entonces una solución posible es la de aplicar la última técnica e procesamiento de señales biológicas. Estas dos posibles soluciones prácticas no abren un espacio a las reflexiones que permitan considerar la interpretación del trazado del electrocardiograma como un problema de conocimiento.

Una manera de llevar la interpretación del trazado del electrocardiograma al contexto de un problema de conocimiento es mediante un análisis profundo de la relación sujeto-objeto de conocimiento. Es importante reconocer que dentro de la investigación no se encontró un solo objeto de conocimiento, razón por la cual fue necesario seleccionar como objeto de conocimiento la naturaleza eléctrica del corazón y el electrocardiograma. Para indagar sobre la naturaleza eléctrica del corazón, se realizó un estudio histórico que buscaba reconocer las razones que motivaron el diseño del electrocardiógrafo o galvanómetro de cuerda como se describe más adelante.

Al reconocer las razones que llevaron a la creación del electrocardiógrafo, se encontraron los aportes que realizaron otras ciencias como la física, matemática, la química y la biología en su creación. En esta investigación se profundiza en los aportes físicos y matemáticos, en vista a que es desde estas dos ciencias que se ha propuesto interpretar el electrocardiograma. La propuesta surge después de considerar el comportamiento variable de la frecuencia cardíaca calculada a partir del electrocardiograma como un sistema dinámico cuyo estado se puede caracterizar en un espacio de fase. La imagen generada en el espacio de fase es medida con el método de Box Counting, desarrollado en el contexto de la geometría fractal. Se trata de una propuesta desarrollada por el grupo Insight que se ha dado a conocer muy bien en el ámbito científico, mientras que en el ámbito pedagógico no ha sido totalmente estudiada.

Esto último representa la fase siguiente de la presente investigación, que tiene su origen durante la práctica docente en la cual se observó que el fundamento teórico y los alcances de dicha propuesta no son claros para los estudiantes de pregrado de la facultad de medicina. Entonces, para sentar las bases pedagógicas para dicha propuesta, se ha planteado estrategias para su enseñanza. Una de ellas fue dada a conocer en el trabajo previamente elaborado para optar el título de Especialista en Docencia de las Ciencias para un Nivel Básico. En la presente investigación se plantea estructurar un seminario en el cual se considere la naturaleza eléctrica del corazón como un problema de conocimiento, en donde el electrocardiograma al ser empleado como un medio que permite entender el comportamiento eléctrico del corazón, puede ser utilizado como un medio que facilite ir al origen del problema y argumentar la pertinencia de interpretarlo desde el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal.

La fase final de esta investigación es un seminario en el cual se plasmará la interpretación del electrocardiograma en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal. Las actividades del seminario se organizaron con base en los temas desarrollados en los dos primeros capítulos; en el tercer capítulo se desglosa la propuesta del grupo Insight y sus implicaciones a nivel teórico, disciplinar y pedagógico; en el cuarto capítulo se describe la estructura del seminario; en el quinto capítulo se encuentran las reflexiones finales de esta investigación y los aportes que ésta tiene para la práctica docente.

Capítulo 1

1. Planteamiento del problema

1.1. Descripción del problema y justificación

De acuerdo con el filósofo de la ciencia Hanson, la interpretación es un elemento intrínseco de la visión. Esto demuestra que la visión no es un estado físico propio de las cosas y objetos, sino que hay que entenderla como una experiencia en la cual lo sensible se organiza a través de “estructuras” que la conciencia subjetiva pone (Valencia et al., 2021).

La postura de Hanson puede servir como un referente epistemológico a partir del cual se puede ir profundizando en la manera como se ha observado el trazado del electrocardiograma. Antes de comenzar es importante recordar que el electrocardiógrafo es un dispositivo electrónico diseñado para detectar, registrar y ampliar en tiempo real la señal eléctrica del corazón mediante electrodos ubicados en puntos específicos del cuerpo humano a partir de los cuales se conduce la corriente eléctrica mediante cables a este dispositivo. El comportamiento de la señal eléctrica del corazón queda registrado en el trazado del electrocardiograma a partir del cual es posible evaluar la condición clínica del paciente, considerando dentro de esta evaluación la presencia de algunos síntomas previos como son dolor en el pecho, palpitaciones cardíacas y los antecedentes familiares de enfermedad cardíaca.

Actualmente existen varias versiones de electrocardiógrafos cuyo sistema de programación permite realizar registros durante periodos de tiempo de tres minutos y mayores a 24 horas. Se ha considerado que el tiempo de registro de la señal eléctrica cardíaca juega un papel clave en la evaluación del electrocardiograma, en vista de que su estudio durante tres o cuatro minutos, al ser un tiempo muy corto puede que no permita la detección de señales eléctricas anormales esporádicas del corazón, que al no ser evaluadas oculten un posible problema en su funcionamiento, razón por lo cual se recomienda hacer un control mediante un electrocardiograma remoto o continuo. Este último puede durar entre 24 y 48 horas, el electrocardiógrafo encargado de almacenar la señal eléctrica del corazón durante este tiempo se denomina Holter, en honor al creador de la idea de diseñar un dispositivo portable para monitorear el corazón de un sujeto que se encuentre por fuera de una Unidad de Cuidados Intensivos y realizando sus actividades cotidianas.

Considerando la postura de Hanson en cuanto a que “los sujetos pueden ver las mismas cosas en la medida que se les proporcionen los mismos datos visuales”, llama la atención cómo estudios ciegos en los que se enmascaran las conclusiones clínicas de los electrocardiogramas para que luego diferentes sujetos los evalúen, llegan en muchos casos a conclusiones diferentes. Por ejemplo, el estudio realizado por Eslava y colaboradores (2009) parte del supuesto de que un estudiante¹ de primer año de residencia debe tener la destreza suficiente para identificar las condiciones clínicas más relevantes aplicadas en el departamento de Medicina Interna al evaluar un electrocardiograma². Ahora bien, el resultado del estudio mostró que sólo la mitad de los electrocardiogramas evaluados por los residentes coincidieron con algunas de las conclusiones clínicas que fueron previamente enmascaradas. Adicionalmente, fue medido el nivel de certeza de la evaluación y el promedio registrado por todos los participantes fue del 46.3%. Los resultados de este estudio llevan a preguntarse qué sucede aquí, teniendo en cuenta que a los participantes del estudio se les proporcionaron los mismos datos visuales, es decir los mismos electrocardiogramas.

Después de las consideraciones anteriores resulta oportuno cuestionar la relación específica que se da entre visión e interpretación con las propuestas que plantean potencializar la forma en la que se visualizan los electrocardiogramas, como una manera de mitigar el problema de su interpretación. Dentro de estas propuestas se encuentra el aprendizaje mediante la práctica, como afirma López (2006) en el prólogo de su libro: *La Alegría de Leer el Electrocardiograma*: “la clave de cualquier destreza está en hacer y en el caso de la electrocardiografía en ver muchos trazados”. Cabe señalar que los trazados a los que se refiere el autor de este libro son los electrocardiogramas tres a cuatro minutos de duración. El autor también comenta en su libro sobre uno de los objetivos que cumple esta enseñanza y es que el estudiante de pregrado de medicina adquiera las destrezas necesarias para aprender a leer e interpretar la patología que se presenta con mayor frecuencia a un médico general.

¹El estudiante es un médico general interesado en ampliar y profundizar sus conocimientos en una determinada especialidad clínica el cual recibe el nombre de residente.

²Las condiciones clínicas más relevantes del departamento de Medicina Interna son: Bradicardia sinusal, ejemplos de infarto agudo de miocardio, aleteo auricular, taquicardia ventricular, taquicardia supraventricular, pericarditis aguda, hipertrofia ventricular izquierda, Wolff-Parkinson-White, segundo bloqueo anteroposterior de grado y bloqueo cardíaco completo.

En el siguiente capítulo se profundiza en las razones que llevaron a crear el electrocardiograma y una de ellas es comprender la naturaleza eléctrica del corazón, que llevó a estudiar más sobre el latido cardíaco, del cual ya había una experiencia sensible que fue organizada a través de “estructuras” que se establecen en la conciencia subjetiva, como lo plantea Hanson. La noción de frecuencia cardíaca se construyó a partir de una experiencia sensible la cual posteriormente fue cuantificada a partir del electrocardiograma. Con base en la cuantificación de la frecuencia cardíaca se han organizado una serie de parámetros que aportan elementos de conocimiento con los cuales se puede inferir la condición clínica de un sujeto y la magnitud de los cambios de los ciclos cardiacos a lo largo del tiempo.

Por ejemplo, la frecuencia cardíaca es normal cuando se encuentra entre 60 y 100 latidos por minuto, una frecuencia cardíaca fuera de estos límites puede llegar a considerarse anormal, dependiendo de su tiempo de permanencia y del momento del ciclo circadiano o la actividad que esté realizando el individuo, y recibe el nombre de bradicardia o taquicardia. Hay una bradicardia cuando los valores de la frecuencia cardíaca se encuentran por debajo de los valores de normalidad, mientras que una taquicardia se presenta cuando los valores de la frecuencia cardíaca son mayores al límite de normalidad. Resulta oportuno cuestionarse si estos valores identificados en un tiempo no menor a tres o cuatro minutos pueden determinar el estado de salud de un sujeto, así mismo si dichos parámetros pueden ser aplicables para evaluar registros electrocardiográficos de 24 horas o más. Para encontrar una respuesta a los anteriores interrogantes se ha recurrido a la estadística para analizar una gran cantidad de valores de frecuencias cardíacas para luego organizar los resultados y clasificarlos para establecer unas características que posteriormente permitan determinar el estado de salud de un sujeto.

Aunque López (2006) afirma que la acertada interpretación del electrocardiograma depende en gran medida de la observación de “muchos trazados”, deja poco claro cuántos son “muchos”. La gran cantidad de variaciones observadas en los trazados de los electrocardiogramas es una de las razones por las cuales no se puede establecer una cantidad exacta de electrocardiogramas a estudiar para obtener “maestría” en su interpretación. Lo anterior deja como consecuencia que no exista una única manera para observar el electrocardiograma, ya sea de corta o larga duración. Es desde este escenario de donde

emergen discusiones entre los conceptos y posturas a partir de los cuales se argumenta la manera de evaluar un electrocardiograma.

Sobre la base de las consideraciones anteriores resulta oportuno plantear nuevos estudios desde la mirada de la física y la matemática a partir de los cuales se pueda ir al fondo del problema de la interpretación del electrocardiograma, ya sea éste continuo o de corta duración. Ya se realizó una primera investigación en la cual se propuso una estrategia para la enseñanza de una nueva metodología para la evaluación de la dinámica cardiaca reportada en Holter, desarrollada en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal, la cual toma valores de la frecuencia cardiaca de los electrocardiogramas continuos para generar atractores cardíacos y de esta manera determinar el estado dinámico del corazón (Rodríguez, et al., 2008). Se trata de una primera investigación que le apuesta a la posibilidad de llevar al estudiante de pregrado de la facultad de medicina a que comprenda que las variaciones observadas en el trazado de un electrocardiograma y en consecuencia los valores de la frecuencia cardiaca pueden ser entendidos como un sistema dinámico cardiaco que puede estar en un estado normal o anormal, con lo cual se podrían resolver las discusiones anteriormente mencionadas (Soracipa, 2021).

Es claro que la interpretación de un electrocardiograma desde la mirada de la cardiología puede ser al comienzo diametralmente opuesta a la mirada física y matemática en cuanto al método científico que utilizan; sin embargo, en algo sí pueden coincidir y es que ambas buscan un método que facilite su interpretación. La enseñanza de esta nueva metodología (Rodríguez, et al., 2008) diseñada para interpretar el electrocardiograma evaluado en Holter requiere que se tenga presente el contexto histórico que llevó a la creación del electrocardiograma. Sumado a esto se encuentra el procesamiento de la señal eléctrica del corazón que sería otro tema de estudio que aportaría más elementos de conocimiento para lograr una formación más integral en el estudiante de pregrado en el momento que esté interpretando el electrocardiograma por diferentes metodologías y/o técnicas (Gregg et al, 2008).

A la luz de estas consideraciones, resulta oportuno indagar sobre las implicaciones de orden disciplinar que tiene la enseñanza de la metodología desarrollada desde el contexto de los sistemas dinámicos no lineales y la geometría fractal para la interpretación de un

electrocardiograma continuo. Un punto de partida para esta indagación puede ser mediante la siguiente pregunta: ¿Qué hace que el fenómeno de la electricidad del corazón se constituya un problema relevante para un docente de física que está enfocado en comprender los fenómenos naturales desde experimentos, teorías y leyes? Atendiendo a que la autora de este trabajo de grado ha abordado la metodología con los estudiantes de pregrado de la facultad de medicina, su experiencia le permite desde la mirada de los sistemas dinámicos y la geometría fractal observar los electrocardiogramas como atractores cardiacos que posibilitan una comprensión más profunda de la naturaleza eléctrica del corazón y las dinámicas que ésta produce. Adicionalmente, abre la posibilidad de entender la naturaleza eléctrica del corazón como un proceso que hace parte de un todo, es decir que hace parte de un sistema dinámico y no estático que además evoluciona en el tiempo. Dicho entendimiento se puede formalizar a partir del establecimiento de una estructura matemática y geométrica que no se altera, aún con las imprecisiones diagnósticas que se desencadenan con el estudio de la variabilidad de la frecuencia cardiaca.

En relación con esto último, es claro que debían existir diferentes miradas y explicaciones al fenómeno, las cuales dependen del contexto sociocultural en donde se desenvuelve el individuo para el cual tiene sentido interrogarse por la electricidad del corazón. Es por esta razón que el presente trabajo de grado pone en consideración los escenarios en los que se debe desenvolver un docente de física a la hora de cuestionarse por la electricidad del corazón no sólo desde los sistemas dinámicos y la geometría fractal sino también desde la vigencia histórica que tiene el estudio de la electricidad y de los distintos fenómenos asociados.

1.2. Formulación de la pregunta

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la pregunta que orienta este trabajo de grado es la siguiente: ¿Qué elementos de orden teórico, epistemológico y pedagógico son necesarios para configurar un seminario que oriente a los estudiantes de pregrado de medicina en la interpretación del electrocardiograma en el Holter desde el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Estructurar un seminario que introduzca a los estudiantes de pregrado de medicina en la interpretación del electrocardiograma desde el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal, a partir del reconocimiento de la naturaleza eléctrica del corazón como un problema de conocimiento.

1.3.2. Objetivos específicos

- Realizar una revisión histórica que permita reconocer los elementos característicos de la naturaleza eléctrica del corazón.
- Profundizar en el formalismo matemático y epistemológico de la metodología diseñada en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal para la interpretación del electrocardiograma.
- Diseñar unas actividades que permitan al estudiante de pregrado reconocer que existe un problema en la interpretación del electrocardiograma en Holter desde la perspectiva de la medicina convencional, y conocer una posible solución, desarrollada desde el contexto de la física y la matemática.

Capítulo 2

2. Estudio del comportamiento del corazón desde una mirada mecánica y eléctrica

En este capítulo se realizó una breve revisión histórica de los estudios que motivaron la comprensión del latido del corazón desde una mirada mecánica y eléctrica. Para profundizar en estos estudios fue necesario desentrañar los conceptos físicos, matemáticos y químicos que hay detrás de cada explicación sobre la causa y origen del latido del corazón. La revisión histórica de este capítulo consideró aspectos de orden teórico y disciplinar que estuvieron presentes el estudio del comportamiento mecánico y eléctrico del corazón para encontrar las razones que llevaron a representar el comportamiento del corazón en un espacio de dos dimensiones.

El historiador de la medicina Henry Sigerist (1891-1957) afirmó que la fisiología emerge a partir del estudio del movimiento generado por los organismos vivos. Su afirmación la establece bajo la idea de una “*anatomía animada*” la cual ilustra cómo el médico de la época barroca centraba su atención en la contracción y el efecto que se produce, como por ejemplo la contracción observada en el músculo (Debru, 2004). Esto quiere decir que las primeras explicaciones sobre el movimiento de los organismos vivos se elaboraron a partir de la observación de los efectos de unos fenómenos y posteriormente se centró la mirada en buscar el origen del movimiento, más allá de interpretaciones mecánicas. Esta idea de “*anatomía animada*” da una pista de donde comenzar a organizar los fenómenos y/o problemas de conocimiento que permitieron comprender el latido del corazón desde una perspectiva mecanicista.

La comprensión del latido del corazón desencadenó un interés por la modelización y representación gráfica de estos movimientos, que posteriormente fueron utilizados para realizar asociaciones entre las enfermedades del sistema circulatorio con los trazados del comportamiento del corazón. Cabe señalar que la finalidad de la investigación no es profundizar en las asociaciones con una patología cardíaca en particular sino en el desentrañamiento de los principios físicos y matemáticos que le dieron un sentido de unidad de medida a la frecuencia cardíaca comenzando desde una mirada mecánica y finalizando en una mirada eléctrica centrando para ello la atención en la representación gráfica de estas dos miradas.

2.1. El movimiento compuesto y su relación con el movimiento del corazón

Las primeras mediciones del comportamiento del corazón realizadas desde la mirada de la mecánica clásica fueron llevadas a cabo por el médico Étienne-Jules Marey (1830-1904), el cual razonó de manera ingeniosa la solución del problema que surgía al hacer mediciones y registros sin perturbar el fenómeno que se estaba estudiando, más cuando se trataba de captar las más mínimas pulsaciones de la vida, empleando para ello conceptos de la física que permitieran comprender el fenómeno mecánico desde la mirada de la medicina de esta época (Debru, 2004). A continuación, se realiza una breve contextualización de los elementos conceptuales, físicos y matemáticos más relevantes que se identificaron en el diseño de los dispositivos médicos por parte de Marey, en particular el esfigmógrafo y el cardiógrafo.

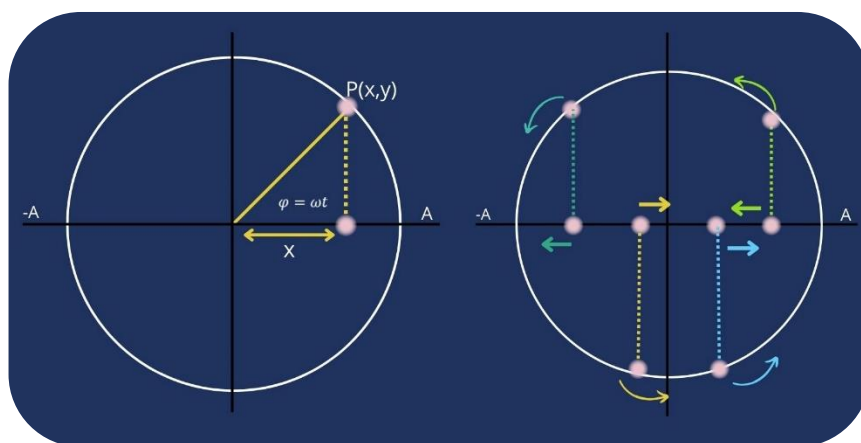
La cinemática y la dinámica hacen parte de la mecánica clásica y con ellas se puede profundizar en el estudio del movimiento de los cuerpos desde dos perspectivas diferentes. La cinemática permite estudiar el movimiento estableciendo un sistema de referencia y sin importar las causas que producen el movimiento; por su parte, la dinámica estudia los cambios de movimiento de los cuerpos generados por las fuerzas impresas sobre ellos. Estas dos nociones de movimiento fueron profundizadas por Isaac Newton (1642-1727) en su trabajo titulado *Principios matemáticos de la filosofía natural*; en esta obra se resalta lo siguiente: una fuerza se manifiesta siempre y cuando existan al menos dos cuerpos, esto quiere decir que el concepto de fuerza se encuentra íntimamente relacionado a la interacción entre dos o más cuerpos.

Al ir profundizando en el estudio del movimiento se encuentra que hay movimientos que son compuestos y su estudio se simplifica mediante la descomposición de movimientos simples y simultáneos. La manera de simplificar el estudio es mediante el principio de independencia del movimiento horizontal y vertical que fue enunciado por Galileo Galilei (1564-1642) para poder explicar la trayectoria y el movimiento de un proyectil junto con la ayuda de otros dos principios (Naylor, 1990). Dicho principio se define de la siguiente manera:

Cuando un móvil sigue un movimiento compuesto por dos movimientos simples y simultáneos, su posición en un tiempo es independiente de cómo actúen los movimientos simples, simultánea o sucesivamente (Atañón et al, 2002, p.46).

La física clásica se caracteriza por el estudio de cuatro tipos de movimientos, el rectilíneo uniforme y perpendicular, el parabólico, el circular y el armónico simple. De este último movimiento se puede considerar que es un caso sencillo de un movimiento compuesto que a la vez es periódico, adicionalmente tiene una particularidad y es la de repetir su trayectoria, posición, velocidad y su aceleración en cada cierto rango de tiempo (T) el cual se denomina periodo. El número de veces que se realiza este mismo movimiento en una unidad de tiempo se conoce como la frecuencia del movimiento (Atañón et al, 2002).

Figura 1. Trayectoria circular uniforme de un objeto en el punto $P(x, y)$



Fuente: elaboración propia

Adicionalmente, es un movimiento al cual se le puede aplicar el principio de independencia del movimiento horizontal y vertical así:

- En la figura 1 se describe la trayectoria de un objeto que se encuentra en el punto $P(x, y)$ de un plano coordenado que realiza un movimiento circular uniforme con una velocidad angular (ω) en una circunferencia de radio A .
- En la figura 1 también se puede observar la trayectoria de este movimiento proyectado en un eje de coordenada x, x' , esto quiere decir que el objeto pasa por la posición $x = +A$ y $x' = -A$ con una velocidad angular en sentido antihorario³.
- La frecuencia angular del movimiento armónico simple es igual a la velocidad angular del móvil, de tal forma que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ Ecuación 1}$$

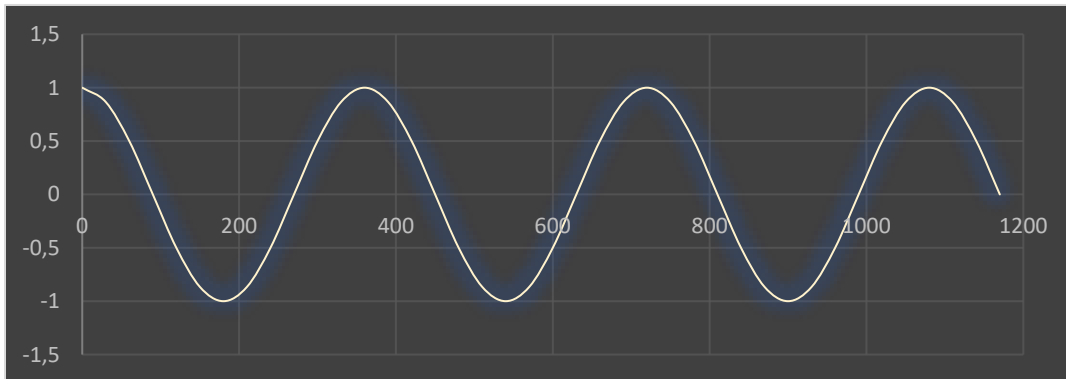
³Esta idea de movimiento circular uniforme representada en un plano de coordenadas, también se puede profundizar mediante el estudio de las funciones trigonométricas de seno y coseno a partir de un círculo unitario.

- La proyección siempre se encuentra en el eje x, x' entre las posiciones $+A$ y $-A$, cuyo valor coincide con el radio de la circunferencia y además recibe el nombre de amplitud (A).

Los cuatro puntos anteriores configuran un movimiento armónico simple o movimiento vibratorio armónico y su expresión algebraica y geométrica es la siguiente:

$$x = A \cos \omega t \text{ Ecuación 2}$$

Figura 2. Trayectoria del objeto representada en un movimiento armónico simple o movimiento vibratorio armónico.



Fuente: elaboración propia

La figura 2 también permite ilustrar otra manera de representar la trayectoria horizontal del objeto de la figura 1 la cual se establece a partir de la ecuación 2. Otros ejemplos de un movimiento armónico simple se encuentran en sistemas físicos (donde se considera que no hay pérdida de energía) como lo son el péndulo simple, los electrones de un alambre que transporta corriente alterna y un sistema masa resorte.

2.1.1. La modelización de los fenómenos físicos o de la naturaleza

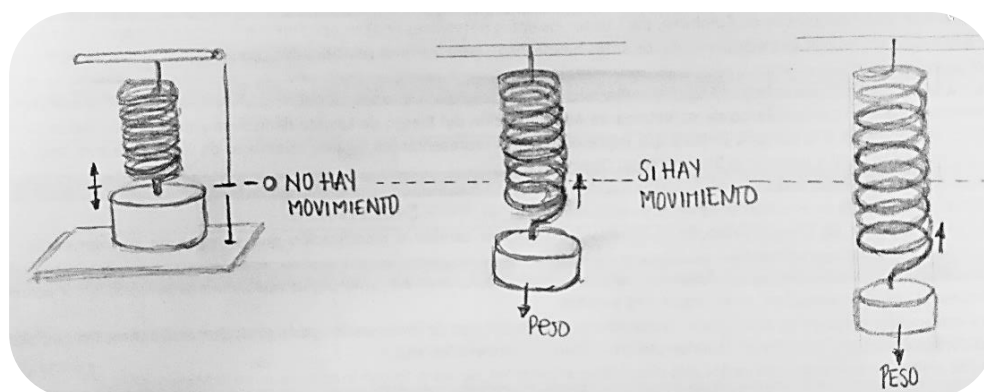
La modelización es un medio para representar un sistema de relaciones que al ser sistematizadas permite la comprensión de los procesos asociados a los fenómenos físicos o de la naturaleza. A modo de ejemplo se encuentra la modelización del sistema solar que permite acercarse a la noción de movimientos cíclicos. Esta noción también se percibe en la naturaleza, en el cuerpo humano y como se describe más adelante en el ciclo cardiaco. Para ir un poco más al fondo de la relación que existe entre la trayectoria circular de un objeto con el movimiento armónico simple descrito en el ítem anterior es importante reconocer que la

figura 1 y 2 representan una manera de modelizar un fenómeno físico y/o de la naturaleza tal y como se describe a continuación con otros ejemplos.

Una manera que permite acercarse a la noción de ciclo cardíaco es mediante las representaciones que se realizaron para el movimiento mecánico del corazón. A continuación, se describe brevemente que elementos de conocimiento permitieron establecer un sistema de relaciones con este movimiento. Para comenzar el siglo XVI estudió la ciencia los fenómenos desde los conceptos de *tiempo*, *espacio*, *materia* y *fuerza*, a partir de los cuales se fueron sustituyendo las “*sustancias*” y las “*causas*” escolásticas utilizadas para describir el *por qué* se mueven las cosas. Los conceptos anteriores al complementarse con los formalismos matemáticos permitieron indagar en el *cómo* se mueven las cosas, lo cual llevó a medir velocidades y aceleraciones de los cuerpos en movimiento (Cecil, 1997).

Sobre la base de las consideraciones anteriores emergen otras nociones sobre el movimiento que no requiere imprimir una fuerza constante para generar un movimiento continuo. De la noción anterior Galileo formalizó el principio de inercia y el concepto de masa, que a su vez tienen una estrecha relación con el concepto de peso. Otra noción clave por mencionar aquí fue establecida por Copérnico y Kepler: la existencia de una armonía matemática en los fenómenos de la naturaleza, que llevó a pensar que todo cambio se puede expresar de manera matemática y en términos de materia, lo cual desencadenó que el movimiento se pudiera explicar mediante procesos mecánicos.

Figura 3. Movimiento de un sistema masa resorte

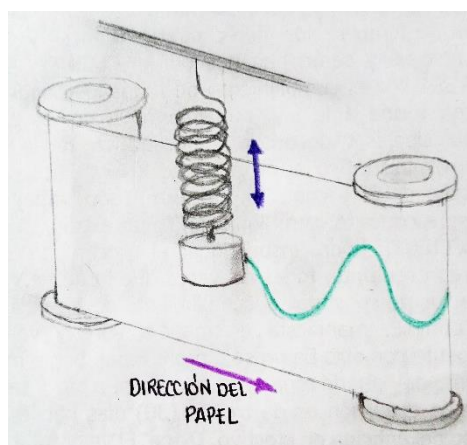


Fuente: elaboración propia

La figura 3 ilustra las anteriores nociones sobre el movimiento mediante un montaje que consiste en una masa unida a uno de los extremos de un resorte (o muelle) mientras que el

otro extremo del resorte se encuentra unido a una varilla. En este caso, el movimiento de la masa tiene una relación con el movimiento armónico simple. Cuando el resorte se estira por el peso que tiene la masa (o también por una fuerza ejercida sobre la masa) el resorte tiende a recobrar su estado original y lograr un punto de equilibrio junto con la masa que matemáticamente se entiende como el cumplimiento de la segunda y tercera ley de Newton. Al imprimir una fuerza en la misma dirección del peso de la masa el resorte se estira más allá del punto de equilibrio y, cuando se retira la fuerza ejercida sobre la masa se observa que comienza a subir y bajar sobre una misma trayectoria; este efecto se conoce como oscilación o vibración. El tiempo que tarda la masa en efectuar una oscilación se denomina periodo y el número de oscilaciones la frecuencia del movimiento (Albarenga & Máximo, 1983).

Figura 4. Trazado del movimiento armónico simple en un sistema masa resorte.



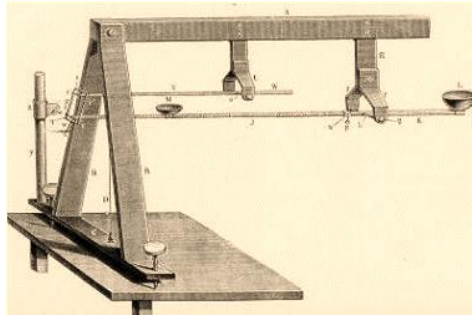
Fuente: elaboración propia.

La figura 4 ilustra la trayectoria del movimiento de la masa cuando ésta sube y baja hasta que cesa su movimiento, es decir cuando la fuerza que ejerce la masa sobre el resorte y viceversa logran un punto de equilibrio. Una comparación entre la figura 4 y la figura 2 permite observar que la trayectoria de la masa corresponde a la del movimiento armónico simple, la distancia que hay entre el punto de equilibrio con la máxima alcanzada por la masa que oscila se conoce como amplitud del movimiento (esto mismo aplica con la mínima distancia).

Para ilustrar otro ejemplo en el cual se aplicaron las nociones del sistema masa resorte descritas más atrás, es necesario realizar previamente una breve descripción sobre la primera medida realizada para el movimiento que generaba el pulso arterial utilizando un dispositivo

mecánico. El Esfigmógrafo que aparece en la figura 5 es un sistema mecánico diseñado por Kar von Vierordt (1818-1884) para medir el pulso arterial. Una de las intenciones por las cuales Vierordt diseñó este dispositivo era registrar la presión de la arteria radial sin realizar perforaciones en la piel del sujeto. Adicionalmente, incorporó como unidad de medida el peso.

Figura 5. Esfigmógrafo de Vierordt.



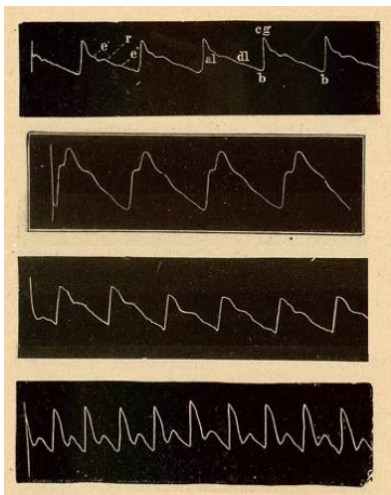
Fuente: Balestrieri y Rapuano (2010).

Vierordt quería con el peso establecer una unidad de medida cuyos registros al ser organizados y agrupados pudieran ser utilizados para hacer comparaciones y clasificaciones entre los diferentes pesos de la presión arterial radial; no obstante, el proceso resultó ser engorroso y las mediciones muy imprecisas. Por esta razón se desencadenó una necesidad de mejora del dispositivo de Vierordt dejando intacta la idea de un dispositivo móvil en contacto con la arteria radial, con lo cual las mejoras se empezaron a realizar en los engranajes y piezas del dispositivo. Llegados a este punto resulta oportuno cuestionarse si las mejoras de las mediciones eran una cuestión de enfocarse por los cambios en las piezas del Esfigmógrafo para lograr un mejor registro de la presión arterial. Las narrativas que hay sobre este proceso de mejoras revelan que fue necesario pensar en otras alternativas las cuales no se centraron solo en procesos mecánicos. A continuación, se describen algunas ideas que fundamentan estas alternativas:

- Captar de manera intuitiva los principios de la mecánica y la estática presentes en el Esfigmógrafo.
- Lograr un registro de la periodicidad en el movimiento de la presión arterial sin utilizar el peso.

- Cambiar el centro de atención en el *cómo* la presión arterial genera movimiento en el dispositivo móvil del Esfigmógrafo al *cómo* una representación gráfica podría explicar el comportamiento de la presión arterial en el tiempo.
- Representar el comportamiento de la presión arterial mediante los principios de la geometría cartesiana.

Figura 6. Representación gráfica del pulso arterial generada por el Esfigmógrafo de Marey.



Los puntos anteriores fueron considerados por Marey cuando sustituyó los registros de pesas por registros gráficos (Figura 6). Resulta interesante cuestionarse por las ideas que llevaron a Marey plantear esta alternativa. Para desentrañar estas ideas se formula la siguiente pregunta: *¿Qué se repite durante el movimiento de la arteria radial para considerar periódico el movimiento?* La respuesta a este cuestionamiento se puede hacer mediante una descripción del antes y después de considerar todas las nociones del movimiento armónico:

Fuente: Universidad Autónoma de León (2023).

Antes	Después
<p>La sangre que fluye por las arterias y venas sigue una trayectoria establecida. Al imaginar esta trayectoria es posible pensar que la sangre al fluir por las arterias y venas lo hace en un determinado rango de tiempo, también lo hace de manera continua para no alterar los procesos vitales del cuerpo humano que se ven favorecidos por la circulación de la sangre. En este orden de</p>	<p>El paso a seguir era introducir la noción de velocidad en las observaciones del pulso de la arteria radial. Se entiende por velocidad el cambio de posición de un objeto respecto a un determinado rango de tiempo; en este orden de ideas la velocidad a calcular no sería la de la sangre mientras que esta fluye, sino la velocidad del pulso de la arteria radial.</p>

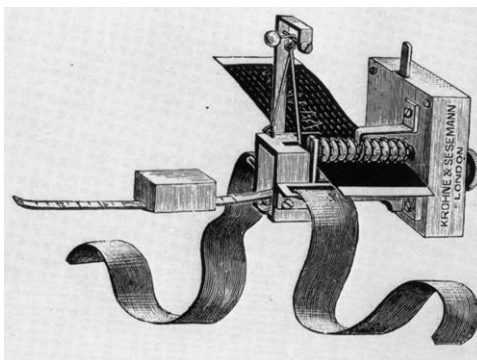
ideas, la noción de circulación de la sangre permite inferir que existe un movimiento continuo de la sangre. En cuanto a la noción de posición, esta cobra un significado cuando se entiende como el lugar donde se pueden palpar las pulsaciones de la arteria radial.

De acuerdo con los razonamientos que se han venido realizando, se puede desentrañar la razón de fondo que dirigía las mejoras del Esfigmógrafo y es la necesidad de trasladar el conocimiento adquirido a partir de la palpación de la arteria radial a interacciones mecánicas. A partir de estos razonamientos es posible pensar que se desencadenó la mirada mecanicista del comportamiento del pulso de la arteria radial.

Sobre la base de las consideraciones anteriores Marey propuso de manera ingeniosa realizar una medida indirecta de la velocidad del pulso y calculando para ello la velocidad que debía adquirir el papel para lograr una sincronía con dispositivo encargado de realizar el trazado del movimiento del pulso de la arteria radial.

Una observación más minuciosa de los trazados del pulso arterial de la figura 6 muestran que no están delimitados por un espacio coordenado, es decir no se indica qué variable va en las abscisas y en las ordenadas. Lo anterior revela que aún no se había formalizado un sistema de referencia a partir del cual se pudiera caracterizar el trazado. Entonces las primeras interpretaciones se realizaron con base en unos registros empíricos que requerían trasladarse al contexto de la matemática y la geometría. Es de esta manera que se puede observar que el primer intento de una representación geométrica del trazado es cuando ubicaron unas letras para caracterizar sus crestas y valles.

Figura 7. El Esfigmógrafo diseñado por Benjamín Ward Richardson y el trazado de la presión de la arteria radial.



Fuente: Lawrence (1979, p. 96).

La figura 7 muestra una de las tantas propuestas de mejoras llevadas a cabo en el esfigmógrafo por parte de Benjamín Ward Richardson. En este dispositivo llama la atención un resorte que se encuentra ubicado en posición horizontal el cual cumplía con dos funciones, la primera era hacer más sensible el contacto del esfigmógrafo con la arteria radial y la segunda mejorar el registro del comportamiento de la arteria radial. Existen varias razones por las cuales se buscaba que un dispositivo móvil fuera muy sensible, se puede afirmar que la primera era para hacer mediciones más confiables y un trazo más preciso sobre la tira del papel ahumado. La otra razón era para lograr captar las mínimas pulsaciones de la arteria radial. En otras palabras, el Esfigmógrafo se convirtió en un dispositivo mecánico capaz de captar la pulsación que se percibe cuando se coloca sobre la arteria radial el dedo índice y del corazón que también se conoce como pulso.

De las anteriores descripciones se deduce que independiente de no contar con un sistema de referencia, la experiencia en la observación de estos trazados permitió avanzar en el reconocimiento de la noción de período, que se puede establecer de dos modos: el primero consiste en considerar la aparición de una cresta y registrar el tiempo que tarda en aparecer la cresta siguiente y así sucesivamente; el segundo sería lo mismo que el primero pero ahora se considera la aparición de los valles. En cuanto a la frecuencia, esta se entendió como la cantidad de veces que se registraba bien sea una cresta o un valle en el trazado en un minuto. De esta manera se reforzó la idea de que la frecuencia estaría representada por el número de pulsaciones, es decir por la cantidad de crestas o valles observadas en un minuto.

Después de la descripción de las relaciones encontradas entre la figura 2 y 3 resulta oportuno preguntarse: *¿es posible aplicar el principio de independencia del movimiento*

compuesto es posible aplicarlo en la representación gráfica del pulso de la arteria radial?

La pregunta se puede responder considerando lo siguiente:

Si se parte de la idea de que el pulso de la arteria radial es la consecuencia de un movimiento compuesto y simultáneo que se desencadena en el corazón, el cual se encarga de bombear sangre oxigenada desde el ventrículo izquierdo y pasa por las siguientes arterias: aorta ascendente, subclavia, axilar, braquial, y que cuando llega al codo se divide en dos arterias que son la radial y la cubital, entonces, cabe la posibilidad de elaborar explicaciones sobre el comportamiento del pulso arterial considerando como punto de referencia el eje de las ordenadas, es decir que la cantidad de crestas y valles ya estarían marcando un periodo y una frecuencia para cuantificar la pulsación de la arteria arterial independientemente de si en el eje de las abscisas se marca el tiempo.

Profundizando un poco más en el razonamiento anterior, es importante resaltar que quien marca el ritmo del pulso de la arteria radial es la válvula aórtica la cual tiene la función de abrirse cuando el ventrículo izquierdo se contrae y cerrarse cuando el ventrículo se relaja. Todo el proceso anterior es cíclico y esta es la razón por la cual cobra significado la representación gráfica de la cresta en el trazado, la cual representa la sístole, mientras que el valle representa la diástole. El paso por seguir es preguntarse si después de los anteriores razonamientos es legítimo afirmar que el trazado del pulso arterial representa un movimiento armónico.

Antes de dar una respuesta al anterior cuestionamiento es necesario profundizar en el papel que juega la representación del movimiento en un plano coordenado.

El profesor de historia de la ciencia Eric Gray Forbes (1977) señala que el matemático Sigmund Günther plantea que hay tres etapas conceptuales que se debían alcanzar antes de que la matemática se considerara como una ciencia. La primera consiste en la especificación de la posición sobre una superficie con respecto a dos ejes, la segunda trata de la representación gráfica de la relación entre las ordenadas y las abscisas (variable dependiente e independiente), por último, el establecimiento de un principio, ley o ecuación algebraica, correspondiente a esa curva geométrica. Sin embargo, Forbes no está de acuerdo con la postura de Günther, pues considera que los matemáticos griegos desarrollaron todos estos procesos antes de que René Descartes (1596-1650) estableciera su geometría, la cual

posteriormente recibió el nombre de geometría analítica. Ahora bien, si ya se habían desarrollado estos procesos entonces *¿Cuál fue el aporte verdadero que hizo Descartes en cuanto a la geometría?* (De la Torre, 2006).

Antes de responder a esta pregunta cabe señalar que Descartes conocía muy bien el álgebra que empleaban los griegos en situaciones geométricas, la noción de coordenada ya la habían trabajado los egipcios antiguos, los romanos y los griegos en el levantamiento de mapas. En este orden de ideas los estudios realizados sobre el trabajo de Descartes permiten responder a la pregunta, pues ellos muestran que él se encontraba enfocado en crear una matemática universal a partir de la cual estudiará el *orden* según el cual al conocimiento de un término le sigue el conocimiento de otro término y la *medida* con la cual los objetos están relacionados entre sí gracias a la misma unidad. Adicionalmente, De la Torre (2006) afirma que Descartes quería una geometría que resolviera problemas como el siguiente: *¿Cuál es el lugar geométrico de un punto tal que se satisface una condición específica?* La respuesta que da Descartes es geométrica, lo cual exige identificar la curva solución del problema, y que además se demuestre que ésta es construible mediante un artificio mecánico que permita dibujarla con base en ciertas reglas específicas.

En este orden de ideas, se puede concluir que Marey estaba siguiendo la ruta para formalizar una interpretación matemática del trazado de la presión arterial que comenta Forbes en su estudio de la siguiente manera: para la primera etapa conceptual, el papel ahumado donde se representaba la posición del pulso arterial hizo las veces de una superficie con respecto a dos ejes, la segunda etapa, que consiste en la representación gráfica de la relación entre las ordenadas y las abscisas, condujo a realizar estudios más profundos a medida que se generaban más trazados y se mejoraba la técnica de registros de dichos trazados. Como consecuencia de las descripciones anteriores se puede afirmar que las mejoras al enfocarse específicamente en la técnica de registro y las interacciones mecánicas no estaban interesadas en el establecimiento de una ley, principio o ecuación algebraica que fuera representativa para la curva geométrica que genera el trazado del pulso de la arteria radial.

Esto último invita a cuestionarse por las razones que no llevaron al establecimiento de una ley, principio o ecuación a partir de la cual se representarían todos los trazados del pulso arterial, como lo hace una ecuación de movimiento armónico simple. Una de las razones por

las cuales no se llegó a esto último está relacionada con las imágenes de conocimiento que direccionan el estudio de este fenómeno en particular tal y como se describe más adelante. Otra de las razones se encuentra en la representación gráfica del pulso arterial de la figura 6, en la cual se puede observar que en los cuatro trazados hay variaciones en medio de cada cresta y valle, lo cual lleva a pensar que no hay una regularidad en el pulso arterial.

La variación observada en el trazado llevó a los fisiólogos de esa época a buscar explicaciones, llegando algunos a concluir que la irregularidad en los trazados es una consecuencia del diseño de los dispositivos. Otros estudios posteriores llevados a cabo en el contexto de la fisiología mostrarían que dicha irregularidad se debe a que el pulso es dicrótico, esto quiere decir que en el trazado es posible observar cómo al terminar la pulsación principal, se percibe otro trazo con una menor intensidad.

Que se puede concluir a partir de las consideraciones anteriores sobre el trabajo de Marey, la primera conclusión es que él modelizó el comportamiento del pulso arterial con el Esfigmógrafo, las mejoras realizadas a su versión original las llevo a cabo mediante el estableciendo de relaciones con las nociones de movimiento de la mecánica clásica previamente descritas. Desde la cinemática estableció como sistema de referencia el papel ahumado, dándole un espacio a la representación gráfica del movimiento del pulso arterial. En cuanto al concepto de fuerza que Vierordt lo utilizó para establecer una relación con la masa, Marey lo empleo para transmitir el movimiento del pulso arterial sobre el papel ahumado. La transmisión del movimiento del pulso arterial mediante un sistema de fuerzas que llegaban al dispositivo que realizaba el trazado, puede ser considerado un ejemplo de la aplicación del principio de independencia del movimiento horizontal.

La segunda conclusión se encuentra en la forma que tiene el trazado del pulso arterial, en la cual se puede observar que es irregular independiente de que el movimiento sea cíclico y que aparentemente describa una misma trayectoria, la irregularidad aquí observada es un claro indicio de que el comportamiento del pulso arterial no es periódico, razón por la cual no puede ser estudiado como si fuese un movimiento armónico simple. Esta conclusión permite reflexionar sobre la pertinencia de realizar mejoras al dispositivo y/o herramienta con la cual se logre captar una regularidad dentro de un comportamiento que es irregular.

2.1.2. Primeros estudios del comportamiento mecánico del corazón

Las ideas del médico griego Claudio Galeno (130-200 d.C.) influyeron en la medicina occidental durante más de un milenio. Galeno al interesarse por el estudio del corazón observó en el siglo II que el corazón extirpado de un animal con frecuencia continuaba latiendo durante algún tiempo. Esta observación le permitió afirmar que: “*El poder de la pulsación tiene su origen en el corazón mismo... El hecho de que el corazón, extraído del tórax, pueda verse mover durante un tiempo considerable es una indicación definitiva de que no necesita los nervios para realizar su propia función*” (Fye, 1987, p. 493). El redescubrimiento del trabajo de Galeno titulado “*De anatomicis administrationibus*” en el renacimiento aportó elementos de conocimiento que guiaron otros procesos de investigación en anatomía entre ellos los llevados a cabo por Leonardo Da Vinci (1452-1519). El interés de Da Vinci por la anatomía del corazón le permitió describir sus cuatro cámaras, así como la función de las aurículas y los ventrículos. Adicionalmente realizó experimentos para explicar un ciclo cardíaco, y aunque presentó de manera incorrecta los hechos observados, sus trabajos serían una fuente de investigación en la anatomía de generaciones posteriores (Roberts, et al, 2019).

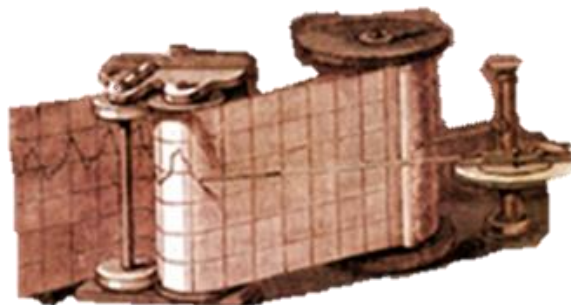
Roberts y colaboradores (2019) afirman que el ocultamiento por siglos de los trabajos de anatomía de da Vinci, implicó que las teorías de anatomía de Galeno fueron consideradas una doctrina hasta que el médico Andreas Vesalius en 1543 publicó el tratado “*De humani corporis fabrica*”. Vesalius rechazó de manera abierta las teorías de Galeno, lo que condujo a la producción de su propio tratado para que sirviera como texto guía para los “anatomistas” de la época. Dicho tratado tenía la finalidad de mostrar a los simpatizantes de Galeno que su excesiva confianza en la “doctrina” de las autoridades antiguas les impedía conocer la anatomía mediante la observación directa. El tratado desafiaba la anatomía galénica y esto llevó a que sus ideas fueran consideradas como herejías y conocidas por unos pocos.

Lo que apremiaba aquí era describir de manera correcta la circulación pulmonar y esto lo hizo Realdo Colombo, asistente Vesalius, quien identificó la aorta y la arteria pulmonar como los medios por los cuales se conduce la sangre fuera del corazón (Roberts, et al, 2019). Esta explicación de Colombo sería considerada por unos pocos en vista de que durante la ilustración se continuaron realizando estudios en la anatomía del corazón con base en las teorías de Galeno. De los anteriores planteamientos y otros que no se mencionan en este capítulo, Roberts y colaboradores (2019) deducen que fueron estos estudios los que aportaron

un nuevo conocimiento para la comprensión de la estructura, ubicación y función del corazón. Se trata de investigaciones que permitieron legitimar el conocimiento sobre la anatomía del corazón a una escala macroscópica, es decir se contaba con más elementos que permitían hablar de la estructura y funcionamiento del corazón desde lo que se puede observar.

El paso por seguir era hacer un registro en el tiempo de las pulsaciones del corazón sin necesidad de hacer perforaciones en el tórax. Quien realizó las primeras herramientas mecánicas y mediciones de las pulsaciones del corazón fue Marey, para ello diseñó un dispositivo que se ubicaba sobre el tórax, el cual denominó cardiógrafo (figura 8), denominando “cardiograma” al registro de estas pulsaciones. La figura 9 ilustra el cardiograma que pronto se volvió una oportunidad de establecer una relación numérica entre cada pulsación y el tiempo que marcaba el comienzo y final de cada ciclo cardíaco. Por lo tanto, Marey logró hacer un dispositivo mecánico de registro que permitió medir la duración de cada ciclo cardíaco.

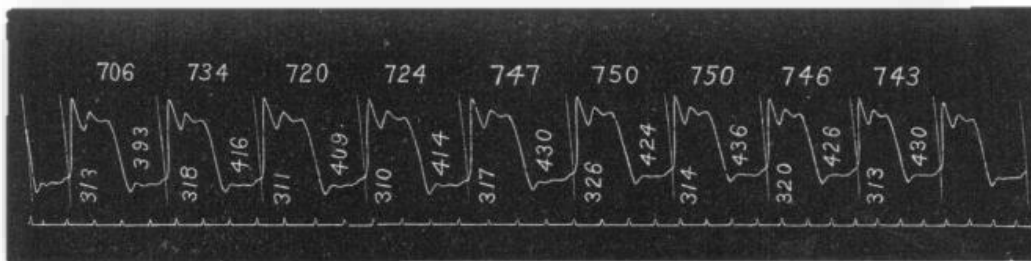
Figura 8. Una de las versiones del cardiógrafo de Marey



Fuente: Science Photo Library Limited (2023).

El cardiógrafo fue muy bien acogido por los primeros fisiólogos del siglo XVIII, quienes comenzaron a idear estudios para realizar medidas en diferentes partes del corazón en la que hubiera un movimiento, este proceso de medición se realizó de forma indirecta y directa en animales y después en humanos. Las mediciones se realizaban, conceptualizando al corazón humano como una bomba mecánica sensible, permitiendo según Claude Bernard (1813-1878) establecer dos relaciones que serían complementarias entre el corazón mecánico-sensible medido por una máquina mecánica-sensible (Daston y Lunbeck, 2011).

Figura 9. Cardiograma.



Fuente: Keyt (1985, pp. 144).

En 1860 Marey y su colaborador Auguste Chauveau (1827-1917) dieron a conocer el primer registro cardiográfico del comportamiento del corazón realizado en caballos. No pasaron más de 20 años para que el uso del cardiógrafo abriera una especialidad, llamada cardiografía, que fue considerada una ciencia del registro de los movimientos y las fases de revolución del corazón. Como ya se describió más atrás, Marey ya tenía una experiencia en la representación gráfica del pulso arterial, con base en la cual logró hacer un registro simultáneo de las variaciones de la presión sanguínea en las cavidades del corazón y en la aorta, así como las impresiones del corazón contra la pared torácica.

Dentro de la literatura que fue consultada sobre el cardiograma se encontró el trabajo publicado por Key en 1885, en el cual él describe muy bien que significado tenía un cardiograma para un fisiólogo de esa época. En su trabajo se puede leer que el cardiógrafo era entendido como un instrumento que permite hacer un registro de los **movimientos y fases de revolución** del corazón (p. 141). De lo anterior se resalta en negrilla las palabras movimientos y fases de revolución para indagar si existe una relación con la descripción que se hizo sobre el movimiento compuesto.

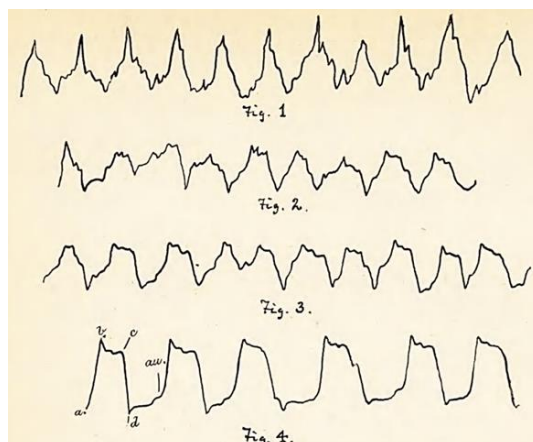
Antes de describir las relaciones es importante resaltar que ideas se tenían sobre el movimiento del corazón y sus funciones. Galeno a partir de su esquema de la circulación de la sangre explica que una pequeña parte de la sangre venosa es la que pasa desde el ventrículo derecho hacia el izquierdo a través de esos “poros” para formar la escasa sangre arterial, mientras que el aire pasa desde los pulmones a través de la arteria pulmonar a la parte izquierda del corazón. De esta representación sostenía que el ventrículo izquierdo y las arterias formaban un sistema independiente, sin sangre, que servía para ventilar y enfriar el

“calor natural”. Posteriormente, William Harvey (1578-1657) para explicar sobre la circulación de la sangre utilizó como ejemplo el sistema solar, para ello hizo una analogía entre el corazón y el sol, y los planetas que giran alrededor del sol sería la sangre (Valencia y Vera, 2021, p. 69). Para Harvey la función del corazón es la de impulsar la sangre a las arterias, de estas a las venas y de las venas al corazón (Buzzi, 2016). La explicación de Harvey es considerada la representación más cercana al proceso actual de la circulación de la sangre.

En este orden de ideas, es muy posible que la noción de movimiento que tiene Key se relacione con el movimiento de la sangre y todo lo que ya se había observado desde Da Vinci hasta el momento que fue diseñado el cardiógrafo. En cuanto a la noción de **fases de revolución** se puede relacionar con el movimiento que se genera de acuerdo con la cantidad de veces que la sangre pasa por el corazón. En física una “fase de revolución” se entiende como el número de rotaciones completas de un cuerpo que gira alrededor de un punto que puede ser fijo en un minuto.

Adicionalmente, Key comenta que en los trazados del cardiograma se comenzaron a observar variaciones en la duración de los ciclos individuales tal y como se ilustra en la figura 9. Estas variaciones desencadenaron todo tipo de interrogantes para encontrar una respuesta que explicara las razones por las cuales se dan estas variaciones. El estudio llevado a cabo por Munro (1883) ilustra muy bien la manera cómo los fisiólogos intentan caracterizar cada variación observada en el cardiograma mediante la comparación de otros cardiogramas. Los criterios de comparación eran mediante la selección de cardiogramas de sujetos con un estado de salud favorable y desfavorable. La figura 10 ilustra el comportamiento del cardiograma de cuatro sujetos, los tres primeros corresponden a sujetos con una condición de salud favorable y el tercero corresponde a un sujeto con una condición de salud desfavorable según los parámetros clínicos de la época.

Figura 10. Variaciones observadas en el trazado del cardiograma.



Fuente: Munro (1883, p. 80).

Mientras que se encontraba una explicación a las variaciones observadas en los trazados, los fisiólogos comenzaron a encontrar un significado al ascenso y descenso de la línea trazada en el cardiograma. Es desde esta experiencia que todos ellos comenzaron a coincidir en que el ascenso representa una sístole ventricular y su descenso una diástole ventricular, adicionalmente el punto más bajo del ascenso principal marca el comienzo de la sístole, y el punto más alto del descenso principal marca el comienzo de la diástole. Desde estos primeros estudios del comportamiento del corazón no era posible afirmar que su comportamiento fuera irregular, pues no perdían la esperanza de encontrar un trazado periódico al cual asociar una condición de salud favorable y que sirviera de comparación con los demás trazados. Sin embargo, dicha esperanza terminó es pensar que las variaciones observadas se debían al cardiograma y no al comportamiento del corazón.

En los marcos de las observaciones anteriores, es posible concluir que la validación de las ideas de Galeno y los anatomistas del renacimiento fue llevada a cabo desde una mirada mecanicista, con la cual se intentó explicar el movimiento del corazón como un conjunto de interacciones mecánicas. No obstante, aún no estaba del todo claro qué origina y controla de manera interna los procesos mecánicos del corazón. Esta es una de las tantas razones por las cuales fue necesario considerar otros métodos de investigación que permitieran interrogar la naturaleza del latido del corazón, y de esta manera llegar a su origen por otras rutas de investigación. Como se verá más adelante, la indagación histórica muestra que los métodos

de investigación que contribuyeron a encontrar el origen del latido del corazón fueron aquellos que se desarrollaron en el contexto de la electricidad.

2.2. Principales experiencias de las cuales emergieron las nociones de electricidad y magnetismo

Cuando se indaga por la historia de la electricidad se llega a los estudios llevados a cabo por Tales de Mileto y otros filósofos. Mileto reconoció las propiedades eléctricas del ámbar y magnéticas de la piedra imán al desarrollar varios experimentos con estas dos piedras. En sus observaciones encontró que, al frotar el ámbar la piedra adquiere la propiedad de atraer objetos ligeros como plumas y paja, mientras que la piedra imán sin necesidad de frotarla ya tenía la propiedad de atraer el hierro. Mileto al describir sus observaciones sentó las bases de lo que posteriormente se conocería como electrostática (Poveda, 2003).

A comienzos del siglo XV, el médico italiano Girolamo Fracastoro se interesó por el estudio de los fenómenos de la electricidad por frotamiento, los cuales se encontraban olvidados en los mil años del medioevo. Fracastoro es recordado por diseñar uno de los primeros dispositivos para detectar la electricidad. El siglo XVI fue una época crucial para el estudio de todas las propiedades de la electricidad que dieron paso al desarrollo de todo tipo de aparatos y experimentos para describir sus efectos (Kübra et al, 2019). El médico William Gilbert (1544-1603), se encuentra dentro de la lista de los primeros investigadores empiristas que profundizó de manera sistemática en la literatura que trataba las nociones de electricidad y magnetismo, así como sus manifestaciones naturales. Todo su trabajo de diecisiete o dieciocho años quedó publicado en su libro titulado *De Magnete, Magneticisque corporibus et de Magno Magnete Tellure; Physiologia Nova, Pluribus Argumenta et Experimenta Demonstrata*, en el cual introduce los términos de "atracción eléctrica", "fuerza eléctrica", "polo magnético" y acuñó la palabra latina *electricus* del término griego para ámbar: *elektron* (ἤλεκτρον).

Este libro es considerado una de las primeras obras impresas de toda la historia de la ciencia que trataba temas de electricidad. Se documenta que la forma de investigar de Gilbert terminaría la época descriptiva de los fenómenos electrostáticos y daría comienzo a la electrofísica (Poveda, 2003). En las explicaciones de Gilbert se consideraba la electricidad como un fluido, es decir, para él un cuerpo electrizado era aquel que emanaba una energía

que rodea al cuerpo que se encontraba más cercano, el cual no tenía sus mismas propiedades. Bajo esta idea de fluido comenzó a establecer diferencias entre los fenómenos eléctricos y magnéticos, en cuanto a sus propiedades de atraer y repeler cuerpos.

La intensidad de la corriente eléctrica que manipulaba Gilbert era muy pequeña comparada a la que generó años después el Ingeniero militar Otto von Guericke (1602-1686) mediante un dispositivo mecánico que se convirtió en la primera máquina electrostática. De esta manera la intensidad de los fenómenos eléctricos observados en la naturaleza (un rayo) sería simulada en un dispositivo mecánico y este fue precisamente el impacto que generó la máquina de Guericke en la comunidad científica de su época: la posibilidad de simular lo que sucede en la naturaleza mediante el diseño de máquinas en los laboratorios de Europa. Los físicos que estuvieron detrás de la reproducción de la máquina de Guericke fueron Stephen Gray (1670-1736) y Charles-François de Cisternay Du Fay (1698-1739). También, se propusieron mejoras en este generador electrostático por parte de Isaac Newton (1642-1727), quien dio a conocer una máquina que reemplaza el globo giratorio que era frotado y fabricado en diferentes metales por un cilindro fabricado en vidrio (Poveda, 2003).

Paralelamente Gray realizó sus propios experimentos y observaciones de los fenómenos eléctricos, con los cuales descubrió que algunos materiales al ser puestos en contacto con dos cuerpos servían de medio conductor para pasar la carga eléctrica del cuerpo electrizado al cuerpo no electrizado. Esta mirada de los fenómenos eléctricos por parte de Gray fue el punto de partida para hacer distinciones entre materiales conductores y aislantes. Du Fay seguía la misma línea de investigación de Gray en cuanto al establecimiento de las propiedades eléctricas de muchos materiales y llegó a la conclusión de que existían dos clases diferentes de electricidad, a las que denominó “electricidad vítrea” y “electricidad resinosa”. Du Fay llegó a esta conclusión como una interpretación que él le dio al efecto que observaba después de que el material había sido frotado. Otro de sus aportes fue establecer que las electricidades del mismo signo se repelen, mientras que las electricidades de signo opuesto son atraídas. Lo anterior fue considerado en el siglo XVIII y XIX como la ley de Du Fay (Poveda, 2003).

Por su parte Sir William Watson (1707-1787) es considerado uno de los primeros en aplicar los símbolos de más (+) y menos (−) a las dos polaridades eléctricas. Esta representación de Watson generaliza todas las representaciones que dan cuenta de la existencia de cargas positivas y negativas del material que se esté analizando. Estas

clasificaciones se lograban en la medida que se diseñaban instrumentos mecánicos que permitieron reconocer los objetos con “electricidad vítrea y resinosa”. El primer electroscopio se llamó “versorium” y fue diseñado por Gilbert (Hellström, 1998), cuyas mejoras realizadas por el físico William Henley llevaron al diseño del electrómetro de cuadrante con el cual se podía hacer un registro de la carga acumulada en una máquina electrostática. Para ello reemplazó el hilo por una varilla muy delgada y liviana cargada en su extremo inferior libre con una bola de corcho. La sensibilidad lograda por el dispositivo diseñado por Henley fue mejorado por Abraham Bernet (1750-1799) quien diseñó un electrómetro denominado de panes de oro con el cual se podía detectar y probar la presencia de pequeñas cargas eléctricas (Poveda, 2003).

Otra de las mejoras realizadas al electrómetro se encuentra en el diseño de George Adams (1750-1795), quien incorporó una escala de medida grabada de manera cuidadosa. Esta escala permite cuantificar el grado de electricidad de cualquier cuerpo y el tiempo que tarda en descargarse un cuerpo en otro cuerpo. El dispositivo funciona a partir del principio básico que hay detrás de todos los electrómetros simples: dos partes del instrumento reciben una carga eléctrica del mismo signo y, por lo tanto, se repelen entre sí. De esta manera el fenómeno observado y registrado confirma la ley de Dufay (Beléndez, 2008).

Figura 11. Electrómetro de George Adams



Fuente: Connelly y Chang (2019).

Esto último también tiene relación con la ley de atracción y repulsión electrostática de Coulomb, que publicó en un artículo en 1785, alrededor de unos diez años después de que Adams fabricara su dispositivo (Figura 11). Si bien había un principio implícito en los dispositivos que permitía replicar y realizar mejoras, no era claro lo que cada uno de ellos medía, por el hecho de indicar un ángulo de separación, dado que no había una manera de calibrar los dispositivos. La calibración se logró siglos después y en términos prácticos el electrómetro es sensible para medir pequeñas cantidades de electricidad (Connelly y Chang,

2019). Resulta oportuno resaltar que todos estos razonamientos y hallazgos permean las investigaciones y experimentos posteriores en los cuales se indaga más por el por qué que por el cómo de los fenómenos eléctricos.

Después de las consideraciones anteriores, es posible reconocer las representaciones que elaboró la física de los fenómenos observados para deducir leyes del movimiento simples y generales. En contraposición, la historia natural de esta época se enfrentó a la abundante variedad de la naturaleza, que no podía reducirse fácilmente a “*leyes generales*”. Una manera de recontextualizar lo anterior es adelantarse en el tiempo y situarse en el periodo que tomó más fuerza la separación entre creador y creación (Ducheyne, Present, 2017), lo cual permitió concebir la naturaleza como una máquina que funciona según las leyes prescritas de la mecánica. El médico y naturalista alemán Albrecht von Haller (1708-1777) nunca dudó de la validez general de las leyes establecidas en la física, y consideró que no era imposible aplicar las leyes matemáticas al cuerpo humano, pero subrayó que esto era muy difícil.

Para Haller estaba claro que para comprender los movimientos de una máquina era necesario conocer cada una de partes. Pero lograr esto en los increíblemente finos y complicados vasos y las fibras del cuerpo humano era extremadamente difícil, e incluso un conocimiento anatómico detallado no sería suficiente para determinar sus movimientos. Para lograr tal precisión del movimiento era necesario según Haller diseccionar animales vivos y ponerlos bajo el microscopio para ver las acciones de sus órganos. No descartó por ello la mecánica como modelo explicativo, pero enfatizó que no todos estos movimientos podían reducirse a interacciones mecánicas (Steinke, 2005).

A partir de lo anterior cobran significado las ideas de Haller sobre la contracción muscular, la cual muestra en su libro de fisiología que estaría alejada de cualquier explicación mecánica. Su forma de razonar se encuentra muy ligada a la existencia de una relación entre estructura y función, lo cual transmite la idea de que el cuerpo está “*infinitamente más animado*” que las placas anatómicas y más que una simple máquina. La forma de razonar de Haller empujó la construcción del concepto de “*irritabilidad*” de los tejidos animales, que proviene de la corriente científica denominada *iatrofísica* (Micheli, 2011), que como toda construcción de conocimiento se vio envuelta en un proceso continuo de confrontación de diferentes formas de pensar elaboradas con base de una serie de observaciones y experimentos. Los trabajos de

Haller fueron cruciales para observar que los nervios en sí mismos no son irritables, lo cual llevó a clasificar las estructuras que eran irritables y sensibles a un nivel anatómico y conceptual. Una vez Haller estableció la correlación músculo-irritabilidad y nervio-sensibilidad pudo deducir que si detectaba una fibra muscular esperaba encontrar irritabilidad y dondequiera que observaba irritabilidad suponía la presencia de fibras musculares (Steinke, 2005).

Haller demostró que el corazón latía espontáneamente independientemente de conexiones nerviosas o de otro tipo, interpretando la irritabilidad intrínseca en el músculo cardíaco desde la contracción y la relajación del corazón como un estímulo del flujo de la sangre sobre las paredes del órgano. Fue gracias a sus estudios sobre la irritabilidad y la sensibilidad que llegó a diseñar los experimentos que le permitieron centrar su atención en el movimiento de la aurícula y el ventrículo. Encontró que primero se detenía la aurícula derecha y luego el ventrículo derecho, mientras que el ventrículo izquierdo, que por la ligadura a la aorta aún estaba lleno de sangre, seguía latiendo. Estos hallazgos le permitieron concluir que la sangre u otro agente irritante eran necesarios para inducir la acción del corazón. Para esta década Haller no sabía si los nervios eran agentes necesarios para el movimiento del corazón. En 1751 y 1752 retomó sus experimentos con el corazón y encontró que al desconectar todos los nervios el corazón continuaba con su movimiento. Estos hallazgos reafirmaron la convicción de Haller de que ni el alma ni los nervios sino sólo la sangre eran agentes necesarios en el movimiento del corazón (Steinke, 2005).

Otras investigaciones que aportaron en la construcción del concepto de irritabilidad y la sensibilidad fueron llevadas a cabo por el catedrático de Anatomía de la Universidad de Bolonia Leopoldo Caldani (1725-1813), quien es considerado uno de los primeros en realizar estimulación eléctrica en nervios y músculos. Por su parte el físico y naturalista Felice Fontana (1720-1805) había sugerido una analogía entre el sistema nervioso y un aparato eléctrico (Steinke, 2005). A partir de esta analogía fundamentó las propiedades bioeléctricas de los tejidos las cuales se encuentran expuestas en su libro publicado en 1767. Mientras tanto John Walsh en 1773 realizó una analogía entre las descargas eléctricas del pez torpedo y las que produce la botella de Leiden (Micheli, 2011). Los razonamientos anteriores permiten trazar una de las posibles rutas por las cuales se desencadenó el interés en emplear

la electricidad en los experimentos utilizando para ello la botella de Leyden y las máquinas electrostáticas y de esta manera observar los efectos de las descargas eléctricas.

Posteriormente, el médico y físico Luigi Galvani (1737-1798) realizó una investigación sistemática de los efectos de la electricidad sobre los músculos. Para ello utilizó una réplica del generador electrostático de Guericke mientras diseccionaba una rana y sus observaciones le permitieron descubrir que la estimulación eléctrica de sus nervios podría causar una contracción muscular. Cajavilca y colaboradores (2009) comentan que estas experiencias llevaron a Galvani a concluir que la electricidad se encuentra principalmente acumulada en el músculo y afirmó lo siguiente:

“Es aún más difícil que la existencia de una electricidad dúplex en cada fibra muscular misma pueda ser negada si uno piensa que no es difícil, ni está lejos de la verdad, admitir que la propia fibra tiene dos superficies, opuestas una a la otra; y esto por consideración de la cavidad que no pocos admiten en ella, o por la diversidad de sustancia de la que decíamos que está compuesta la fibra, diversidad que necesariamente implica la presencia de varias pequeñas cavidades y, por tanto de superficies” (p. 160).

Galvani dedicó once años de su vida estudiando los eventos fisiológicos de las ranas a los que relacionaba con los fenómenos eléctricos. Para él los nervios y los músculos de las ranas funcionan de manera semejante a la armadura interna y externa de una botella Leiden, y a partir de esta comparación concluyó que el animal tiene su propia electricidad.

Por su parte el químico y físico Alessandro Volta (1745-1827) fue invitado para dar un parte de las clases del curso de física en la Universidad de Pavía sobre electricidad, calórico, las propiedades físicas de los gases, entre otros. Al conocer Volta el trabajo de Galvani fue partidario de sus ideas, estableció una relación entre la rana-electrómetro y concluyó que la rana constituía un electrómetro más sensible que los que él había conocido (Micheli, 2011). Volta realizó sus propios experimentos, observando que la electricidad provocaba una contracción y también una tetanización⁴ de la preparación neuromuscular.

⁴Contracción repetida e incontrolada de un músculo o un nervio que impide su relajación de manera voluntaria. Recuperado: <https://www.rae.es/dhle/tetanizaci%C3%B3n>

Cabe señalar que Volta al utilizar su celda en los experimentos elaboró sus propias explicaciones de los resultados de Galvani mediante corrientes bimetálicas. En el trabajo de Cajavilca y colaboradores (2009) se documenta la explicación que Volta dio sobre su experimento con la electricidad:

Si la electricidad se genera a partir de tres sustancias las cuales debían ser dos metales heterogéneos y un tercer material conductor para completar el circuito, entonces si se considera el músculo como el tercer material la contracción se daría en virtud de su irritabilidad (p. 10).

La anterior explicación hace referencia a lo que hoy se conoce como circuito eléctrico. La manera de representar el fenómeno eléctrico por parte de Galvani y Volta generó la primera controversia respecto a la naturaleza eléctrica animal. La controversia generada por los resultados de Galvani y Volta se terminaría años después con los resultados de los experimentos realizados por el naturalista Alexander von Humboldt (1769-1859) y Michael Faraday (1791-1867).

Se documenta que Humboldt se encontraba impulsado por una corriente filosófica que surgió de la biología de Friedrich Wilhelm Joseph Schelling (1775–1854), la cual fue apoyada por Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), Friedrich Schiller (1759–1805), Johann Gottfried Herder (1744–1803) y muchos eruditos alemanes que durante la era romántica veían la naturaleza como un organismo animado (Stahnisch, 2007). Dicha filosofía consideraba la naturaleza como una unidad primordial o fundamental, desde la materia inorgánica hasta las formas orgánicas más elevadas (Lovejoy, 1936, p. 31). Adicionalmente, los partidarios de esta filosofía afirmaban que la naturaleza sólo comenzaría a revelarse a aquellos capaces de ver armonía y amor en el mundo, no a aquellos que la sometieran a la "violencia" de los experimentos.

Desde esta filosofía Humboldt al replicar los experimentos de Galvani y Volta llegó a la conclusión de que la electricidad bimetálica y la de los animales no son mutuamente excluyentes (Herrera, 2005). Se puede decir que la controversia se originó por las explicaciones que cada uno de ellos elaboró de sus hallazgos, lo que los alejó de ver que ambos estaban hablando de los efectos de un mismo fenómeno. De todo esto se desprende que Galvani y Volta no se encontraban enfocados en el establecimiento de "*leyes generales*", es decir, no buscaban en una explicación del *cómo* sino del *porqué* de los fenómenos

observados. Humboldt no estableció una ley, pero sí elaboró una explicación en la cual consideraba la naturaleza eléctrica como una unidad primordial.

Después de las consideraciones anteriores, aún quedaba por responder si el músculo era un conductor de la electricidad o cabía la posibilidad de pensar que fuera una fuente de electricidad. La respuesta a este cuestionamiento se fue logrando en la medida que se fue interrogando cada vez más por los fenómenos eléctricos lo cual llevó a diseñar nuevos instrumentos para la elaboración de los experimentos. También, fue necesario ir al fondo de la electricidad que había descubierto Volta. A continuación, se realiza una breve descripción de los estudios y los experimentos que cambiaron por completo la manera de observar la electricidad y el magnetismo, que también fueron claves para formalizar un sistema de unidades de medida para la electricidad.

2.2.1. De la electrostática a la electrodinámica

Para encontrar una respuesta a si el músculo tenía dentro de sus funciones conducir la electricidad o era un generador de ella, se debía antes organizar los fenómenos eléctricos cuyas cargas eléctricas se mueven por un medio conductor. Lo anterior implicó movilizar gran parte de las experiencias adquiridas desde el contexto de la electrostática a los fenómenos observados a partir de la celda voltaica. Se documenta que el físico y químico Hans Christian Ørsted (1777-1851) realizó experimentos con la celda voltaica mejorada por él mismo y elaboró sus explicaciones las elaboró considerando la mirada metafísica de los “filósofos de la Naturaleza” anteriormente mencionados (Beléndez, 2008); adicionalmente recurrió a la elaboración de experimentos mentales debido a que los consideraba la mejor forma de comprender la naturaleza (Cohen, 2010). Uno de los experimentos mentales cruciales de Ørsted fue el que llevó a otro nivel los trabajos independientes sobre las propiedades de la electricidad y el magnetismo. El nivel de certeza del experimento mental elaborado por Ørsted se debe a que aplicó de manera acertada las leyes de la electrostática al movimiento de las cargas.

Dado que un experimento mental debe ser confirmado para validar su veracidad, Ørsted diseñó un montaje experimental para el cual diseñó una batería que constaba de 20 celdas lo suficientemente fuertes como para elevar la temperatura de un conductor. Cuando la corriente fluyó en el conductor cerca de la aguja de una brújula, se pudo observar que la aguja se desviaba (Geddes et al, 1998). Con este montaje experimental él demostró que la electricidad

y el magnetismo no son fenómenos independientes (Ørsted, 1820). El montaje experimental fue replicado en una reunión llevada a cabo en París el 11 de septiembre de 1820 en la que se encontraba André Marie Ampère (1775-1836), quien tardó una semana en reproducirlo y observó otras relaciones implícitas en el movimiento que le permitieron afirmar en 1822: *"He decidido utilizar la palabra electrodinámica para unir bajo un nombre común todos estos fenómenos, y en particular para designar aquellos que he observado entre dos conductores voltaicos"* (Dibner, 1954, p. 724).

Adicionalmente, Ampère identificó la acción electromotriz como si esta fuera de dos clases, la primera la denominó tensión eléctrica a la primera, la cual existe cuando dos cuerpos se encuentran separados entre sí por un conductor, como por ejemplo la tensión entre los dos polos de una celda voltaica antes de estar conectados por un conductor. La segunda es la corriente eléctrica (flujo de corriente) la cual existe cuando los elementos forman parte de un circuito de cuerpos conductores. A la luz de estos razonamientos Ampère terminó por concluir que el magnetismo era un fenómeno eléctrico y demostró que la fuerza de atracción o repulsión era directamente proporcional a la fuerza de las corrientes e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas (Dibner, 1954), con lo cual quedaba demostrada la ley de Coulomb. Por su parte, Michael Faraday (1791-1867) al reproducir el experimento de Ørsted descubrió la manera de generar corriente eléctrica a partir de un campo magnético. Este descubrimiento abrió el camino para considerar la existencia de fuerzas a distancia mediante el concepto de "campo" con el cual se explicaban las propiedades de las fuerzas eléctricas y magnéticas (Beléndez, 2008).

Ampère continuó profundizando en sus experimentos y pronto encontró que la forma que tenían los alambres revelaba relaciones análogas a las que fueron establecidas inicialmente entre alambres paralelos. Fue entonces cuando el alambre fue doblado para formar bobinas y hélices, que podían estar fijas o libres, las cuales se podían mover sobre pivotes. La forma que más revolucionó las ideas iniciales de Ampère fue una bobina en espiral la cual transportaba corriente y se comportaba exactamente como un imán. Para que la bobina alcanzara las propiedades de un imán esta debía estar delicadamente equilibrada para oscilar libremente y ajustarse al campo magnético de la tierra; Ampère lo arregló, haciendo que un cable portador de corriente se comporte como una aguja de brújula magnética. Adicionalmente, explicó que el magnetismo de la tierra se origina por las corrientes eléctricas

terrestres que circulaban en la tierra de este a oeste. Tales corrientes, especuló, podrían ser causadas por la acción química entre los materiales heterogéneos en contacto dentro del globo, como Volta había demostrado con diferentes metales en contacto.

Algunas de las reglas generales formuladas por Ampère son las siguientes:

- Dos corrientes eléctricas se atraen cuando fluyen paralelas entre sí en la misma dirección y se repelen cuando fluyen paralelas entre sí en la dirección opuesta.
- Del punto anterior se deduce que cuando los conductores metálicos a lo largo de los cuales fluyen las corrientes se encuentran en el plano paralelo, cada conductor tiende a mover al otro conductor a una posición paralela a él y en la misma dirección.
- Las atracciones y repulsiones son absolutamente diferentes de la electricidad ordinaria, es decir la electrostática.
- Todos los fenómenos revelados por Ørsted con respecto a la relación del flujo de una corriente eléctrica y un imán están cubiertos por la *ley de atracción* de dos corrientes eléctricas. Esta ley se deriva de la deducción de que un imán es producto de corrientes eléctricas producidas por la acción de las partículas de hierro entre sí.

Las anteriores reglas son una clara muestra de una organización de los fenómenos electrodinámicos, los cuales distan mucho de la manera de explicar los fenómenos electrostáticos. Cabe señalar que las acciones de atracción y repulsión cobran aquí otro significado pues son entendidas como leyes que se van a cumplir tanto en el estudio de los fenómenos electrodinámicos como los electrostáticos. El paso por seguir era encontrar la manera de calcular la fuerza de la corriente eléctrica, lo cual no se podía realizar utilizando los instrumentos diseñados para hacer medidas de la electricidad estática. Por ejemplo, las mediciones arrojadas por un electrómetro permitían hacer operaciones básicas de aritmética y análisis de los ángulos, pero los resultados no eran suficientes para constituir una medición eléctrica (Connelly y Chang, 2019). Todas estas imposibilidades convergieron en el diseño de un instrumento que logró cuantificar la electricidad dinámica, y para ello fue necesario integrar en el diseño los planteamientos teóricos que emergieron a partir del descubrimiento de Ørsted y los procesos tanto prácticos como experimentales que se fueron desencadenando en la elaboración del dispositivo.

El dispositivo se denominó galvanómetro, y su idea de base es la medición de la fuerza de la corriente eléctrica que pasa por un cable o medio conductor. Cabe señalar que en este

apartado se describe solo de las diferentes interpretaciones de lo que era la electricidad para esta época, en la cual se comenzaron a proponer diferentes formas de medida, lo cual hacía parte del panorama teórico cambiante en el que se desarrollaron estos dispositivos. La historia del galvanómetro es muy amplia y clave para profundizar en una futura investigación; para los propósitos del presente trabajo se enfatiza en las razones de los cambios en la instrumentación, que se encontraron acompañados con los modos de pensar la electricidad y la comprensión de las diferentes formas en que se pueden hacer demostraciones física y matemáticas que expliquen los fenómenos eléctricos.

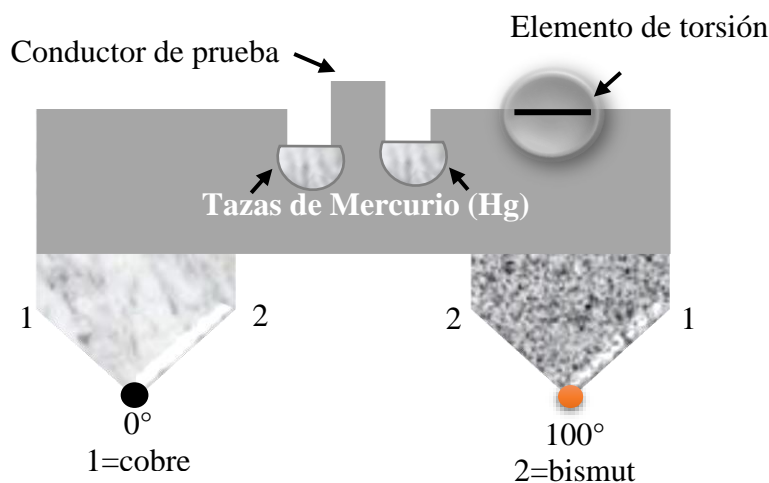
En relación con esto último se resalta la manera como George Simon Ohm (1789-1854) interrogó los fenómenos eléctricos a partir de los trabajos de Volta, Ørsted y el físico con formación en medicina Johann Seebeck (1770-1831). Ohm sabía que la celda voltaica por excelente que fuera para producir chispas, producir descargas eléctricas en humanos y animales para demostrar la electricidad, no podía suministrar corriente eléctrica por mucho tiempo. Esto generó la necesidad de buscar la manera de crear electricidad continua. También, sabía que el montaje experimental de Ørsted servía como indicador de corriente confiable, pero era un montaje experimental al cual se debían hacer mejoras. A partir de estas dos investigaciones Ohm estudió las propiedades conductoras de cables de diferentes metales. Sin embargo, para continuar con sus investigaciones era necesario antes encontrar una solución a los inconvenientes que presentaba la celda voltaica y la solución llegó por parte del descubrimiento de la termoelectricidad por parte de Seebeck.

Seebeck replicó el experimento de Ørsted de manera diferente, diseñando un circuito eléctrico formado por conductores de cobre y bismuto. Para ello sostuvo una unión metálica en su mano y concluyó que la desviación resultante de la aguja de una brújula adyacente a un conductor era consecuencia de la diferencia de temperatura de las uniones metálicas provocada por el calor de su mano. Adicionalmente, estableció una relación entre la fuerza de diferentes metales, la cual era mayor a diferente temperatura.

Por su parte Ohm elaboró un montaje experimental para el cual utilizó dos recipientes de hojalata, en uno de ellos había agua hirviendo y en otro nieve o hielo (Figura 12). Diseñó un termopar usando una tira de bismuto y dos tiras de cobre. Los extremos del cobre fueron sumergidos en dos recipientes que contenían mercurio, que sirvieron como contactos con el conductor de prueba. Para generar corriente, una unión se colocó en agua hirviendo y la otra

unión se colocó en agua helada. Generó corriente termoeléctrica a partir de la diferencia de temperatura cada vez que las dos copas de mercurio estaban conectadas entre sí por el conductor de prueba para completar el circuito. Ideó un indicador que consistía en una aguja magnética suspendida por un cable aplanado, de cinco pulgadas de largo, al que se le podía aplicar torsión (Geddes y Geddes, 1998, p. 108; Schagrin, 1963, p. 543).

Figura 12. Esquema diseñado para ilustrar el montaje experimental utilizado por Ohm para descubrir su ley.



Fuente: elaboración propia.

En la tabla 1 la primera columna muestra la cantidad de alambres utilizados por Ohm, los cuales son de igual diámetro y diferente longitud, en la tercera columna se encuentra el ángulo de torsión. Cada alambre fue insertado entre las copas de mercurio para generar un circuito eléctrico.

Tabla 1. Resultados del montaje experimental de Ohm.

Conductor	Longitud (pulgadas)	Ángulo de torsión X
1	2	326.75
2	4	300.75
3	6	277.75
4	10	238.75
5	18	190.75
6	34	134.5
7	66	83.25
8	130	48.5

La sistematización de los resultados hallados con este montaje experimental lo llevó al establecimiento de la siguiente expresión matemática:

$$X = \frac{a}{b + x} \text{ Ecuación 3}$$

Donde X representa la intensidad de la acción magnética del conductor cuya longitud es x , a y b son constantes en función de la fuerza de excitación y de la resistencia de las demás partes del circuito. Ohm estableció para b el valor 20.25 y para a el valor 7285. En este orden de ideas la ecuación queda de la siguiente manera:

$$X = \frac{7285}{(20.25 + x)} \text{ Ecuación 3.1}$$

A modo de ejemplo se sustituye el valor de x del primer alambre en la ecuación 3.1 y se obtiene un resultado muy cercano al valor del ángulo de torsión que se encuentra en la tercera columna:

$$X = \frac{7285}{(20.25 + 2)}$$

$$X = \frac{7285}{(22.25)}$$

$$X = 327.415$$

La ecuación 3 es otra manera Ohm de llegar a la ley del circuito eléctrico, pues a representa la fuerza electromotriz, $b + x$ la resistencia total del circuito y X la intensidad de la corriente. Ahora bien, si la acción electromagnética es proporcional a cantidad de corriente, entonces la ecuación 3 con las unidades apropiadas es familiar a $I = E/R$ que es la que se encuentra por lo general en el capítulo de corriente eléctrica que trata sobre la resistencia eléctrica⁵ en los libros de texto de física (Alvarenga y Máximo, 1983, pp. 742).

Después de las consideraciones anteriores queda más claro cómo cambió la manera de interrogarse por los fenómenos eléctricos a partir de las ideas de Volta y Galvani, en vista de que ya no se estaba estudiando la electricidad obtenida por medio de la fricción entre

⁵La resistencia eléctrica de un conductor se define como $R = V_{AB}/i$ en donde R es la resistencia, V_{AB} es la diferencia de potencial en los extremos de un conductor (voltaje), i representa la corriente que pasa por el conductor. La unidad de esta magnitud en el Sistema Internacional será Volt por amperere $V/A = 1 \text{ ohm} = 1\Omega$ (Alvarenga y Máximo, p. 142).

materiales, que es la que se estudia en la electrostática, sino la producida por efectos químicos, térmicos y magnéticos que comenzaron a fundamentar la electrodinámica.

Existen varias razones por las cuales se resalta el trabajo experimental de Ohm, la primera es por la manera como destacó los rasgos más relevantes de fenómeno termoeléctrico tal y como se muestra en la tabla 1. La organización de éstos le permitió a Ohm un proceso de razonamiento matemático que dio como resultado el establecimiento de una magnitud física a partir de la cual quedaron establecido los aspectos del fenómeno que deben ser tenidos en cuenta para su caracterización. La segunda tiene que ver con la manera en que logró comprender qué se requiere para que la corriente eléctrica pueda ser continua, la clave está en las características del material que debe tener el conductor, gracias a lo cual puede ejercer una resistencia al paso de la corriente eléctrica.

La tercera tiene que ver con la fecha en la que Ohm dio conocer sus descubrimientos: 1826, seis años después de que Ørsted hiciera público su experimento, y cuatro años después que Ampère publicara sus descubrimientos y llamara electrodinámica a los fenómenos que había observado entre dos conductores voltaicos. Schagrin (1963, p. 543) comenta que una de las razones por las cuales se demoraron en dar a conocer estos resultados es porque se trata de un estudio con una base matemática que fue ignorada y rechazada por sus contemporáneos. Incluso cuando Ohm mostró sus resultados a diez de sus superiores formados en el sistema educativo alemán, les resultó difícil entender el fundamento teórico de esta ley.

2.3. El galvanómetro

Para medir la fuerza de la corriente que pasaba por un cable se utilizó el galvanómetro cuyos diversos diseños evolucionaron de formas interesantes. La corriente que se quería medir era la que utilizó Ørsted en su experimento. En el trabajo de Geddes y Geddes (1998), se puede tomar la traducción que realizaron sobre la descripción que realizó Ørsted de su experimento:

“Los extremos opuestos de la batería galvánica se unieron mediante un alambre metálico, que por brevedad, llamaremos el conductor de unión, o el alambre de unión. Al efecto que ha tenido lugar en este conductor y en el espacio circundante, daremos el nombre de conflicto de la electricidad. Deje que la parte recta de este cable se coloque horizontalmente sobre la aguja magnética, debidamente suspendida y paralela a ella. Si es necesario, el alambre de unión se dobla para adoptar una

posición adecuada para el experimento. Estando las cosas en este estado, la aguja se moverá y su extremo cerca del lado negativo de la batería irá hacia el oeste” (p. 107).

La anterior descripción muestra uno de los puntos principales en la configuración de esta experiencia y es cuando el imán intenta alinearse con el campo magnético que se encuentra en sentido perpendicular al plano por donde circula la corriente. La construcción de un galvanómetro implicó plantear diseños que fueran más allá de la dependencia del campo magnético terrestre que servía como punto de referencia para regular el imán utilizado en el experimento. Para propusieron dos tipos de galvanómetro: el de bobina móvil e imanes en movimiento. Dentro de los diseños de galvanómetro con bobina móvil se encuentran el que diseñó Whipple William Sturgeon que fue utilizado para hacer registros de la corriente voltaica y termoeléctrica, y el galvanómetro de D'Arsonval cuyas mejoras lo posicionaron dentro de los galvanómetros más utilizados. Los mecanismos utilizados en los galvanómetros con imanes móviles para eliminar la influencia de los campos magnéticos externos fueron más complejos de realizar, lo cual explica por qué se mejoraron los galvanómetros de bobina móvil (Connelly y Chang, 2019).

Eliminar el papel del campo magnético en el galvanómetro de bobina e imán móvil implicó que algo adicional tenía que actuar. Se incorporó entonces un resorte para impedir que la aguja indicadora de la corriente se desviara automáticamente hasta 90° , independientemente de la intensidad de la fuerza magnética del circuito eléctrico que se estaba probando. Todas las mejoras hicieron uso de una balanza de torsión que consistía en un alambre o cuerda en la cual quedaba suspendida la bobina móvil, de tal forma que cuando se retorció el cable o la cuerda de suspensión ejercía una fuerza restauradora más fuerte cuanto mayor fuera el ángulo de deflexión. La balanza de torsión fue un instrumento utilizado por Coulomb para hacer medidas de la fuerza electrostática y desde entonces ha estado disponible para su uso en varias formas en medidas físicas (Connelly y Chang, 2019).

La corriente eléctrica utilizada para las mejoras en los galvanómetros pronto llevó a interrogarse por la manera de medir fracciones más pequeñas de corriente, el problema que emergió en el campo de la señalización telegráfica. Quien se interesó por dar respuesta a este cuestionamiento fue William Thomson quien más tarde se llamó Lord Kelvin (1824-1907) y para lograrlo debía hacer más sensible los galvanómetros con imán móvil. Al galvanómetro

ya diseñado por él, incorporó de manera ingeniosa un método de observación que consiste en dirigir sobre un espejo un haz de luz que procedía de una lámpara, luego el haz de luz reflejado en el espejo se proyectaba sobre una larga tarjeta blanca, la cual se encontraba marcada con las divisiones de una escala. El haz de luz servía como índice ingrávito y permitía una alta sensibilidad, magnificando los movimientos más diminutos de la "aguja" (Connelly y Chang, 2019).

Figura 13. Versión mejorada del galvanómetro reflector de imán móvil diseñado por los hermanos Elliott en 1875.



Fuente: Connelly y Chang (2019, p. 169)

De esta manera Thomson logró diseñar el primer galvanómetro reflector que no sólo fue utilizado para recibir señales, sino como un dispositivo que se convirtió en un instrumento de precisión indispensable en los laboratorios para hacer pruebas de corrientes eléctricas de baja intensidad (Figura 13). Como afirma Connelly y Chang (2019), la disposición de los espejos de tipo Thomson podría usarse para un imán móvil o para un galvanómetro de bobina móvil logrando una gran precisión en las medidas.

2.3.1. El galvanómetro en el contexto de la docencia y la investigación

Aunque pueden faltar muchos eventos por describir en el proceso de desarrollo de herramientas para medir la corriente eléctrica, es importante para esta investigación considerar los fenómenos que sirvieron de referente para medir posteriormente la corriente eléctrica del corazón. El fundamento teórico para la construcción del galvanómetro reflector de Thomson, como se describe más adelante, aporta elementos de conocimiento para medir

de manera acertada la intensidad de la corriente eléctrica del corazón y también visualizar su comportamiento.

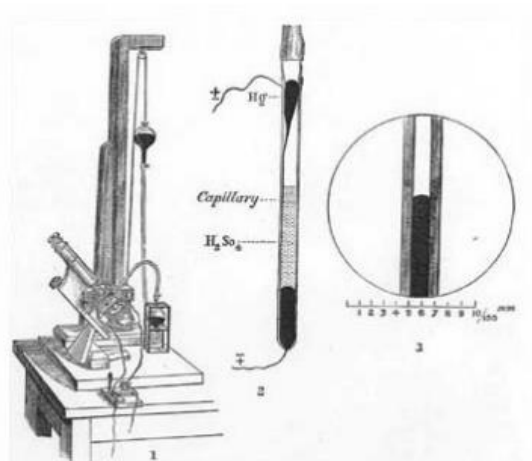
En la Europa de comienzos del siglo XIX la docencia y la investigación no sólo se llevaban a cabo en instituciones universitarias. Por ejemplo, la industria de este siglo generó una nueva manera de investigar y enseñar desde la práctica. La carrera de ingeniería tomó fuerza, incluyendo el área de la ingeniería eléctrica. Pero aún no era claro qué de todo el conocimiento que había detrás del diseño y elaboración de un instrumento eléctrico se podía enseñar en un salón de clases. Es desde esta falta de claridad que se comienzan a organizar las clases para que el estudiante se formara y tuviera los fundamentos para complementar lo que hacía falta en el dispositivo y garantizar su funcionamiento. Es desde este ambiente académico y de investigación donde fueron propuestas las mejoras en el uso y diseño del galvanómetro (Connelly & Chang, 2019).

En relación con este último, es importante resaltar que aún no se tenía una completa claridad de los alcances que representaba el uso de la electrodinámica en la industria. Además, si bien se había avanzado en la técnica, aún faltaban más investigaciones para fortalecer su parte teórica. Las propuestas de investigación se continuaban planteando desde el contexto de la química y la física, las cuales retomaban la controversia generada entre Galvani y Volta sobre la naturaleza de la electricidad, pero ahora los cuestionamientos emergían desde los fenómenos que fueron observados desde Ørsted en adelante.

Los experimentos llevados a cabo por electrólisis y aquellos que consideraban el estudio de los fluidos eléctricos, generaron la necesidad de cuantificar el trabajo que realizan las cargas en un campo eléctrico. Lo anterior llevó a organizar una serie de fenómenos a partir de los cuales se pudiera establecer una unidad de medida que se denominó potencial eléctrico. El problema surgió cuando una celda voltaica al suministrar una pequeña corriente con frecuencia presentaba una alta resistencia eléctrica interna. Entonces los estudios e investigaciones querían encontrar ese “punto nulo” en el cual se presentaba la resistencia en el flujo de la corriente. Dentro de las posibles soluciones se encontró la propuesta realizada por parte de la química, para ello se retomó el fundamento teórico del electrómetro previamente descrito junto con las nociones sobre capilaridad para crear el electrómetro capilar por parte de Gabriel Lippmann (1845-1921).

El electrómetro capilar de Lippmann permitía medir pequeñas diferencias de potencial eléctrico en términos de cambios en la tensión superficial entre una gota de mercurio cubierta en ácido sulfúrico (H_2SO_4) diluido en un tubo capilar (Figura 14). Este instrumento funcionaba de la siguiente manera: se observaba la posición de un fino hilo de mercurio en un capilar cuando se lleva a una marca fiducial hasta un poco antes de finalizar el capilar; a continuación, se observaba la altura a la que llegaba el mercurio en un manómetro cuando el mercurio en el capilar se ha llevado a la marca fiducial, esta parte del proceso de observación se complementaba con el uso de un catetómetro para realizar la medida (Conway & Gordon, 1967).

Figura 14. Electrómetro Capilar de Lippmann fabricado en 1872.



Fuente: Micheli (2011, p. 340).

Pronto el electrómetro capilar de Lippmann diseñado en el laboratorio de Kirchhoff (Stock, 2004), empezó a ser utilizado en otras investigaciones no propiamente para establecer un sistema de unidad de medida sino para medir la electricidad que se generaba en el músculo cardíaco. Basado en su interés en la fisiología de los nervios y los músculos, Augustus Desiré Waller (1856-1922) planteó realizar un registro de la actividad eléctrica o los cambios de voltaje del corazón humano. Esta propuesta lo posicionó dentro de los primeros que realizaron medidas de la electricidad del músculo cardíaco en animales y hombres utilizando para ello el electrómetro capilar de Lippmann (Waller, 1889). Las diferencias de potencial registradas por Waller alcanzaron $1/40.000$ voltios, registrando sin éxito la despolarización

y repolarización ventricular, debido a que el electrómetro dejaba de funcionar después de realizar varias mediciones (Barold, 2003).

El método de investigación de Waller fue posteriormente aplicado por Willem Einthoven (1860-1927), que al estudiar los resultados de Waller encontró una serie de limitaciones en el estudio y se dispuso a realizar mejoras en el electrómetro capilar y en sus registros. Una observación minuciosa en los registros eléctricos de Waller llevó a Einthoven a encontrar cinco desviaciones eléctricas que denominó ABCDE. Posteriormente realizó una corrección geométrica de las derivaciones, que posteriormente llamó P, Q, R, S y T, basado en la idea de orden establecida por parte de Descartes para nombrar los diagramas matemáticos (Henson, 1971; Einthoven, 1893; 1895). Independientemente de las mejoras llevadas a cabo en los trazados, aún persistían las dificultades con el electrómetro capilar, el tiempo de respuesta era muy lento y de poca precisión debido a la inercia del mercurio, lo cual dificultaba hacer registros de potenciales altos.

Lo anterior llevó a Einthoven considerar la necesidad de diseñar otro instrumento que también fuera capaz de registrar los potenciales eléctricos del corazón. Planteó una solución considerando las investigaciones realizadas a partir del galvanómetro de transmisión de Thomson. Para ello estudió la función que cumple una cuerda para registrar la variación eléctrica entre los grandes polos de los imanes. Con este principio de galvanómetro unido a las funciones gráficas que tiene el oscilógrafo, Einthoven en 1901 diseñó un galvanómetro de cuerda con una sensibilidad muy alta para registrar la corriente eléctrica del corazón. Dio a conocer los resultados arrojados por el galvanómetro de cuerda en su trabajo publicado en 1895, donde el registro de la corriente eléctrica del corazón fue denominado "electrocardiograma". Muchos años después el galvanómetro de cuerda recibió el nombre de electrocardiógrafo.

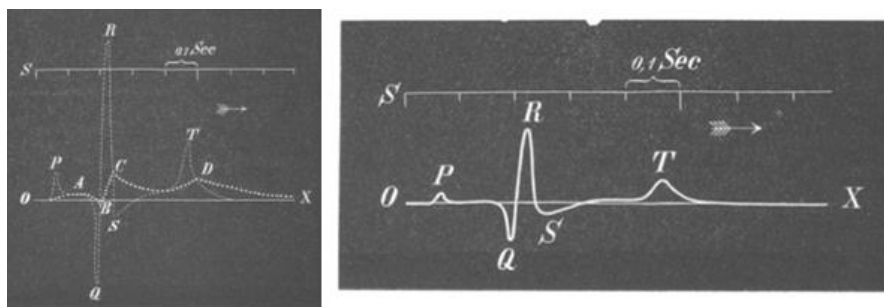
2.3.2. El procesamiento de la señal eléctrica del corazón

Desde que se diseñó el cardiógrafo y electrocardiógrafo el cálculo de la frecuencia cardiaca puede ser considerada una magnitud física la cual permite estudiar y registrar los cambios de los ciclos cardiacos a lo largo del tiempo. Sus unidades de medida se dan en latidos por minuto o pulsaciones por minuto. En la actualidad el almacenamiento de la señal eléctrica del corazón se realiza mediante tres tipos básicos de grabación: continua, intermitente (eventos) y analítica en tiempo real (ambulatorio).

Uno de los tipos de grabación más utilizados es la grabación analítica en tiempo, la cual hace parte de las funciones que realiza un Holter. En el Holter las señales eléctricas que son detectadas por el electrocardiógrafo son digitalizadas, codificadas y almacenadas en una memoria de estado sólido. Posteriormente, estas grabaciones pasan a un electrocardioanalizador capaz de leer y reproducir las ondas PQRS grabadas. La lectura suele realizarse a una velocidad al menos 60 veces el tiempo real, lo que significa que efectúa la lectura de una hora de grabación en un minuto (Cabrales y Vanegas, 2006).

Desde que Einthoven diseñó el electrocardiógrafo el procesamiento de la señal eléctrica del corazón no ha sido un proceso fácil de realizar. Cabe señalar que cualquier tipo de señal eléctrica independiente de la fuente de donde provenga es altamente fluctuante (Schafer y Rabiner, 1973). Adicionalmente, Einthoven es recordado por ser el primero en considerar el refinamiento de las señales eléctricas del corazón de los registros de Waller mediante procesos matemáticos de su época, también realizó ajustes refinamientos a los electrocardiogramas tal y como se ilustra en la figura 15.

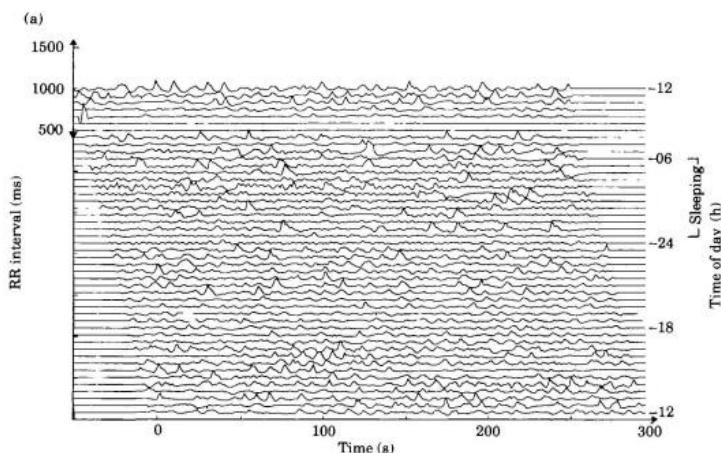
Figura 15. Electrocardiograma



Fuente: Einthoven (1895, p. 105-107).

Actualmente cada una de las ondas de un electrocardiograma se pueden estudiar a una escala de tiempo en milisegundos. La figura 16 ilustra el comportamiento que tiene la onda R en segmentos de 300 segundos de un Holter de 24 horas el cual corresponde a un sujeto con condición de salud favorable (Mølgaard et al, 1994).

Figura 16. Variaciones observadas en el intervalo RR de un Holter 24 horas.



Fuente: Mølgaard et al., (1994, p. 1176).

Desde la práctica clínica se considera toda anomalía en el ritmo “natural” del corazón como una arritmia, este término proviene del latín *arrythmīa* (tardío), y este del griego *ἀρρυθμία* *arrythmía* que significa falta de ritmo regular. A partir del siglo XIX se comenzaron a realizar estudios cuyos resultados han llevado a clasificar las arritmias en dos grandes grupos de acuerdo a si son de origen ventricular y auricular. Con el cardiograma y el electrocardiograma las arritmias fueron medidas y se organizaron de acuerdo con la velocidad de los latidos. Cada organización se les dio los siguientes nombres:

- Bradicardia cuando la velocidad del latido es menor a 60 latidos por minuto.
- Taquicardia cuando la velocidad es mayor a 100 latidos por minuto
- Normalidad cuando la velocidad se encuentra entre 60 y 100 latidos por minuto.

Las anteriores organizaciones son aplicables a registros de electrocardiograma de corta duración, sin embargo, para los electrocardiogramas continuos o Holter la falta de ritmo en los valores de la frecuencia cardíaca se conoce como variabilidad de la frecuencia cardíaca la cual es una idea más general de una arritmia y que abarca todas las posibles variaciones que se pueden encontrar en un estudio mayor a 24 horas. Para llegar a estas clasificaciones en la mayoría de los casos la cardiología recurre a la estadística.

2.4. Síntesis del capítulo

La organización de estos acontecimientos históricos se convirtió en un hilo conductor que permitió profundizar en las condiciones que hicieron posible a los objetos de conocimiento

y sus interpretaciones entrar en el campo de lo posible. El reconocimiento de las condiciones permite tener una idea más clara de cómo los objetos de conocimiento se fueron transformando hasta llegar a ser susceptibles de análisis desde el contexto de la física, la matemática, la geometría, la biología y la química. Desde el contexto de la física, se destaca la influencia del mecanicismo del siglo XVII, utilizado para explicar el funcionamiento de los seres vivos (François, 1999). Esta influencia se puede ver en los razonamientos realizados desde Galeno hasta los anatomistas de la ilustración sobre el funcionamiento del corazón, a partir de los cuales se extrajeron elementos claves de conocimiento para los futuros estudios en diferentes ramas de la medicina.

A la luz de lo anterior se van a resaltar tres momentos claves de este capítulo: el primero consiste en la manera cómo Marey logró captar con el cardiógrafo las pulsaciones del corazón y con el cardiograma representar temporalmente su comportamiento. Dichas representaciones permitieron hacer observaciones del comportamiento del corazón independientemente de la experiencia sensible, como por ejemplo palpar la arteria radial u observar el funcionamiento de las aurículas y el ventrículo. Adicionalmente, es interesante como desde las observaciones del cardiograma se comenzaron a organizar los comportamientos de los trazados regulares o irregulares para luego asociarlos con el estado de salud de un sujeto, si bien con cierta precaución dado que no estaban totalmente seguros de si la irregularidad observada en los trazados era una consecuencia directa del cardiógrafo o la manera como se comporta el corazón.

La búsqueda de certeza en las observaciones del comportamiento del corazón llevó a que se mejorara la técnica de registro, así mismo condujo al diseño de herramientas que fueran más sensibles para ello. Esta manera de proceder surgió desde que Benjamin Martin (1705–1782) se interesó en la construcción de los montajes experimentales de Newton hasta tal punto que impulsó el estudio por la técnica de diferentes herramientas a partir de su funcionamiento básico. Estas herramientas fueron empleadas para realizar diferentes funciones que facilitaban los procesos y optimizaban el tiempo, dejando al interés de unos pocos las razones fundamentales por las cuales fueron elaborados estos montajes experimentales por parte de Newton (Soracipa, 2021). Es decir, se dejó de lado por mucho

tiempo el estudio de la base física y matemática de la teoría que quería demostrar Newton mediante cada montaje experimental.

A la luz de la consideración anterior se realizó una búsqueda de estudios que se hubieran interesado en mejorar la técnica de registro del cardiograma desde una perspectiva geométrica y matemática, sin resultado alguno. En el trabajo de Galabin (1875) por ejemplo se alcanza a reconocer el esfuerzo que había en describir las formas de los trazados del cardiograma cuando los comparaban unos con otros. Lo anterior da comienzo al segundo momento, en donde se hizo necesario encontrar una respuesta a las dificultades observadas en el cardiograma de acuerdo con las siguientes premisas: ¿es correcto seguir pensando que las variaciones observadas en los trazados de un cardiograma son una consecuencia directa del equipo que realiza el registro? O por el contrario ¿es una propiedad intrínseca de la electricidad del corazón?

La respuesta a esta premisa no se puede dar a la ligera, se requiere argumentar la respuesta y esta es la razón por la cual se hizo una breve descripción de todas las representaciones que intentaban explicar la electricidad observada en la naturaleza y aquella que se generaba mediante máquinas. Debido a que la historia de la electricidad es muy extensa, se seleccionaron estudios claves que eran necesarios para saber qué tan apropiado era utilizar el galvanómetro de cuerda o el electrómetro capilar de Lippmann. Esto nos lleva a pensar que tanto la física como la química aportaron conocimiento para ir mejorando las técnicas de registro de la señal eléctrica cardíaca, pero, por más mejoras que se realizaran, se continuaban observando variaciones en los trazados de los electrocardiogramas. Esto representa el tercer momento en el cual la investigación se limitó a profundizar en la otra parte de la premisa que considera la variación observada tanto en los cardiogramas como en los electrocardiogramas como un comportamiento intrínseco del corazón, que debe ser considerado un problema de conocimiento.

La posibilidad que se abrió como objeto de todo este devenir histórico fue observar la naturaleza eléctrica del corazón que se caracteriza por su variabilidad como un problema de conocimiento, que invitan a los científicos y los docentes en el campo de las ciencias naturales a que se siga indagando sobre su estudio. En el orden de las ideas anteriores, comienza a cobrar otro significado el profundizar en las implicaciones que tiene estudiar la

naturaleza eléctrica del corazón en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal que es el tema del siguiente capítulo. Pero antes es importante tener claro desde que escala de observación se va a estudiar la naturaleza eléctrica del corazón. Waller y Einthoven abrieron dos líneas de investigación que buscan profundizar en la electricidad del corazón. Waller fue el primero en reconocer las diferencias que hay al observar un mismo fenómeno eléctrico después de conocer los resultados de Einthoven afirmó lo siguiente:

[...] el galvanómetro de Einthoven era para el electrómetro capilar lo que un microscopio de alta potencia es para un microscopio de baja potencia (Barold, 2003, p. 100).

La escala de observación de Waller es microscópica y a partir de ella se estableció como origen de la electricidad del corazón las funciones que cumplen el Nodo Sinusal y el Nodo Auriculoventricular. En cambio, la escala de observación de Einthoven es macroscópica en vista que logró amplificar la corriente eléctrica del corazón en el electrocardiograma, abriendo nuevas ramas de investigación como la del procesamiento de la señal eléctrica cardíaca. Esto permite privilegiar la dialéctica sujeto-electrocardiograma en cuanto a que permite movilizar las miradas reduccionistas y mecanicistas desde las cuales se considera la naturaleza eléctrica del corazón y su relación con los principios físicos de la electricidad como hechos aislados hacia una mirada en las que adquieran sentido nociones como la relación, la emergencia y los sistemas dinámicos.

Capítulo 3

“La observación es uno de los factores importantes para el cultivo de la memoria”.

Harry Lorayne

3. **Matematización de la naturaleza**

El primer artículo publicado por Newton sobre la óptica de los colores en la Royal Society dejó claro que su manera de explicar la dispersión de la luz blanca era mediante un razonamiento matemático. La explicación de Newton fue tomada como una contradicción a las interpretaciones de este mismo fenómeno por parte de las corrientes afines al empirismo, las cuales llegaron a considerar irrelevantes esta explicación. Según Thomas Kuhn la forma de proceder de las “ciencias baconianas” es partir de la observación cualitativa del fenómeno, a continuación, formular una “hipótesis” sobre la naturaleza física de la luz y con base en esta idea explicar la producción de los colores como producto de interacciones mecánicas que afectan la luz blanca. De acuerdo con lo anterior, la contradicción se da porque Newton deja su interpretación en el ámbito matemático dejando las interacciones mecánicas en el campo fenomenológico, que puede ser entendido como la delimitación de las cualidades y clasificaciones del fenómeno mediante el análisis de efectos y/o comportamientos

Una explicación mecanicista de la dispersión de los colores al estar fundamentada en conceptos tan difusos, puede que no cubra otros niveles del fenómeno y tampoco permita la predicción de nuevos hechos (Granés, 1998). En general la interpretación de un fenómeno a partir de conceptos corre el riesgo de modificarse casi a voluntad con el fin de ir adaptando las explicaciones a las características que se presentan en los fenómenos que se van descubriendo. Para que la interpretación de la dispersión de la luz blanca no solo quedara en el ámbito matemático, Newton diseñó un montaje experimental como fruto de una cuidadosa reflexión que también dista de las comprobaciones mecanicistas previamente elaboradas. Para Newton, un experimento representa el diseño de condiciones físicas que al estar fundamentadas en unos principios (o leyes) permite hacer predicciones que luego serán contrastadas con los resultados experimentales. Esta nueva manera de investigar cambió radicalmente la forma de seleccionar y explicar los fenómenos, así como el sentido, y la función de la investigación y de los experimentos (Granés, 1998). Sumado a esto se encuentra su profundo convencimiento de fundamentar las observaciones partiendo de un principio o

ley que debía ser acorde a los fenómenos observados tal y como se mencionó en el capítulo dos.

Podría pensarse que la discusión respecto a la naturaleza de la luz es un hecho puntual e irrepetible, pero no es así: al proponer matematizar un fenómeno de la naturaleza sujeto a todo tipo de controversias, puede pasar que no se entienda el fundamento matemático de la idea que hay detrás del montaje experimental, tal y como pasó con Ohm. Dentro de las controversias hay un espacio para la discusión y el debate de la postura que generó la controversia, una de las finalidades de este capítulo es dar a conocer los elementos físicos, geométricos y matemáticos que permiten argumentar el estudio de la variación de la frecuencia cardiaca en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal. La argumentación parte desde la metodología propuesta por el grupo Insight la cual ha planteado ciertas premisas que permiten comprender el estado dinámico del corazón según la racionalidad y los procedimientos deductivos propios de la matemática, dejando de lado por el momento la mirada de la electrofisiología que profundiza a una escala microscópica el comportamiento eléctrico del corazón.

3.1. Representaciones de la realidad e imágenes de conocimiento

Una de las razones por las cuales se enfatiza por el estudio de la naturaleza eléctrica del corazón, es por la claridad que hay sobre la relación que existe entre los procesos eléctricos que son llevados a cabo entre el nodo Sinusal y Auriculoventricular con las funciones mecánicas del corazón. Lo anterior hace parte de los hallazgos que han sido documentados en los estudios de Biología, Química y la Medicina que pueden representar una realidad para cada una de estas áreas de saber, a las cuales recurre un físico para intentar entender o explicar lo que él observa. Entonces el físico debe encontrar la mejor estrategia que le permita organizar de manera acertada todas estas representaciones sobre la realidad del movimiento del corazón que se van a convertir en imágenes de conocimiento, definidas por Valencia y colaboradores (2001) así:

Las representaciones que elaboramos de la naturaleza, de la verdad y sus formas de legitimarla; las ideas que tenemos acerca de qué y cómo es el mundo, de cómo y quiénes somos nosotros, se estructuran no sólo desde los contextos, las dinámicas culturales, las edades, los deseos y las motivaciones, sino desde unas particulares estrategias de

*organización. Estas estrategias de organización las denominamos **imágenes**; desde ellas nos relacionamos con los eventos del mundo, organizamos dicha relación y construimos conocimiento (p. 35).*

En el 2008 el grupo Insight dio a conocer una metodología que interpreta la variación de la frecuencia cardíaca que es calculada en los registros Holter en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal (Rodríguez et al, 2008), tres años después se publicó el refinamiento de esta metodología (Rodríguez et al, 2011). Al plantear la metodología, el grupo tiene claras las imágenes de conocimiento a partir de las cuales la medicina explica la variabilidad de la frecuencia cardíaca, así como los procesos de razonamiento matemático y las estructuras geométricas que se estudian en la geometría fractal.

Esta metodología se ha dado a conocer ante la comunidad científica tanto a nivel nacional e internacional en un gran número de publicaciones, sin embargo, no se ha estudiado las implicaciones que tiene su enseñanza en los estudiantes de pregrado de la facultad de medicina. Esta es la razón por la cual se propuso como tema de investigación en la Especialización en Docencia de las Ciencias para el Nivel Básico y posteriormente en la Maestría en Docencia de las Ciencias Naturales. La metodología publicada en el 2008 fue el tema de investigación para la especialización (Soracipa, 2021), la metodología refinada es la que se describe en este trabajo.

Ahora es el momento de dar a conocer las imágenes de conocimiento de la física y la matemática a partir de las cuales se organizó la metodología. Es de aclarar que esto no se ha realizado por ninguno de los estudios realizados por el Grupo Insight, razón por la cual la investigación se enmarca en el ámbito pedagógico y una reflexión constante sobre la práctica docente. Para dar a conocer las imágenes de conocimiento de esta metodología se ha tomado como referente la manera como la matemática muestra que las actividades básicas de la mente humana son organizadas, las cuales se clasifican por afinidades y son ordenadas por categorías para luego interpretarlas en el lenguaje conjuntista (Salvat, 1986).

Para comenzar, la imagen del sistema del mundo que emergió después de los descubrimientos de Newton era la de un mundo regido por la regularidad, la simplicidad y las leyes matemáticas. La manera de investigar y razonar los fenómenos de la naturaleza por parte de Newton impactó a muchos hombres de ciencia de esta época, entre ellos el médico

y físico Pieter Van Musschenbroek (1692-1761) quien diseñó el primer condensador eléctrico que recibió el nombre de botella de Leyden. Van Musschenbroek asistió a las conferencias organizadas por John Theophilus Desaguliers (1683-1744) en Londres quien fue el encargado de promulgar el funcionamiento y los resultados de los experimentos de Newton. En los textos de física elaborados por Musschenbroek se ve reflejado el impacto que tuvo la manera de investigar de Newton, pues en ellos trata temas sobre el método de la filosofía, la física experimental y la geometría, entre otros. Uno de los temas más sobresalientes de sus obras fueron sus posturas sobre las “leyes de la naturaleza”, ya que quería emprender el camino que permitió a Newton establecer la ley de la gravitación universal pero ahora en el magnetismo (Ducheyne y Present, 2017).

Las leyes de la naturaleza ocupan un lugar central en el pensamiento científico, sin embargo, no hay un consenso sobre los factores que llevaron a cabo la introducción del concepto moderno de una *"ley de la naturaleza"*. Los estudios coinciden en que surgió durante los siglos XVI y XVII en los trabajos de Descartes y Newton. Por ejemplo, en la ley de la gravitación universal Newton estableció que ésta se cumple por las leyes del movimiento y que con ella es posible explicar el movimiento terrestre y celeste. Es decir, Newton sintetizó *"los fenómenos de la naturaleza a leyes matemáticas"* (Ducheyne y Present, 2017).

Por su parte Van Musschenbroek al ir profundizando cada vez más sobre las implicaciones que tiene una ley en el estudio de los fenómenos de la naturaleza llegó a la siguiente afirmación: *"Llamamos a las leyes fenómenos constantes que, siempre que los cuerpos se colocan en circunstancias similares, siempre ocurren de la misma manera"* (Ducheyne & Present, 2017, p.645). Con esta idea en mente junto con la observación sensorial se clasificaron los fenómenos de la naturaleza que posteriormente comenzaron a ser parte de dos grupos de leyes que denominó *"leyes generales"* y *"especiales"*; estas últimas corresponden a las clasificaciones que realizó al estudiar el reino animal y vegetal. La forma de razonar de Van Musschenbroek proporciona un claro ejemplo de la creciente importancia de las ciencias de la vida en el pensamiento del siglo XVIII, y los desafíos relacionados con el intento de perseguir tanto la historia natural como la física experimental matemática bajo la mirada de la filosofía natural o la física (Ducheyne & Present, 2017).

Cabe señalar que la observación y la experimentación también son consideradas las bases sobre las cuales se levantó la ciencia natural en esta época. La ciencia para Newton no puede reducirse al recuento asistemático de observaciones. Es necesario que la observación se encuentre orientada por premisas teóricas que sugieren principios universales que sirven de base a un sistema matemático. En el trabajo de Newton hay un profundo convencimiento del carácter de necesidad de la ley, que lo lleva a buscar un encuentro de los fenómenos con ella. De esta manera los experimentos se debían diseñar a partir de la ley, lo cual generaba un proceso experimental del cual emerge la noción de objetividad. Lo anterior quiere decir que, Newton no buscaba la explicación de los fenómenos en términos de interacciones mecánicas, sino por procesos de pensamiento racionales que partían de premisas teóricas las cuales él comprendía, para luego hacer predicciones según procedimientos deductivos propios de las matemáticas (Granés, 1998).

La metodología diseñada por el Grupo Insight es afín a la manera como se comenzaron a razonar los fenómenos de la naturaleza desde Newton. La variabilidad de la frecuencia cardíaca al ser llevada al contexto de los sistemas dinámicos debe estar sustentada bajo premisas teóricas que guarden una relación con los principios universales que sirven de base a un sistema matemático y geométrico. Las premisas teóricas de la metodología muestran que a partir de ellas es posible establecer diferencias entre estados dinámicos cardíacos normales y anormales, es decir que a partir de ellas se puede concluir el estado de salud de un sujeto. La manera de confirmar si la metodología puede hacer estas diferencias es mediante un experimento, que en este caso corresponde al equipo en el cual se realiza el almacenamiento de la señal eléctrica del corazón y los resultados del electrocardiograma, los cuales son utilizados para validar si son acertados los principios teóricos de la metodología.

A continuación, se menciona cuáles serían esos principios universales que formalizan la metodología y se cierra mostrando los principios teóricos de la metodología.

3.2. Formalización matemática de la metodología fundamentada en los sistemas dinámicos y la geometría fractal

De Salamam y Roulet (1982) afirman que la lógica es una ciencia que se puede distinguir en dos momentos claves de la historia. El primer momento se extiende desde sus orígenes cuando fue creada por Aristóteles en el siglo IV a.C., hasta mediados del siglo XVIII y recibe

el nombre de lógica clásica tradicional o aristotélica, el segundo momento que se extiende desde mediados del siglo XVIII hasta nuestros días es la denominada lógica simbólica matemática o moderna. Ésta segunda fue desarrollada principalmente por matemáticos, y emergió como un intento de justificar ciertos razonamientos que eran válidos para las matemáticas, pero no para la lógica aristotélica. La matemática al ser considerada la ciencia del razonamiento simbólico se ocupa de símbolos abstractos y de relaciones entre ellos. Los símbolos en cuestión pueden considerarse como abstracciones de modelos concretos (números, figuras, operaciones, etc.,) pero su vida matemática es independiente de ellos (Salvat, 1986).

Otro aspecto por resaltar es que los nuevos planteamientos matemáticos determinan en la mayoría de los casos avances paralelos en las demás ciencias. También, resulta cierto que los avances de las demás ciencias y los problemas que en ellas emergen son una fuente inagotable de inspiración para los matemáticos y los físicos. En relación con esto último, en este capítulo el lector encontrará cómo se puede dar una solución al problema de la interpretación del electrocardiograma, mediante una metodología que fue desarrollada por el Grupo Insight desde el contexto de la teoría de los sistemas dinámicos y la geometría fractal (Rodríguez et al, 2021).

3.3. El espacio de Box Counting y la dimensión fractal

El método de Box Counting arroja una medida adimensional muy utilizada debido a su relativa facilidad de cálculo matemático y estimación empírica. La definición se remonta al menos a la década de 1930 y ha recibido varios nombres como son: entropía de Kolmogorov, dimensión de entropía, dimensión métrica, densidad logarítmica, dimensión de información, dimensión de capacidad, este último término expresa mejor las posibles asociaciones teóricas. Para facilitar el entendimiento de este concepto se emplea el nombre de dimensión de caja o conteo de cajas (Box Counting en inglés) para evitar confusiones (Falconer, 1990).

El espacio geométrico de Box Counting es un espacio que contiene una determinada secuencia de cuadrículas de diferente tamaño. En el caso de la metodología desarrollada por el Grupo Insight, el tamaño de la cuadrícula siguiente se reduce en un factor de $\frac{1}{2}$. Este espacio fue creado para caracterizar las formas de la naturaleza, que son irregulares y muchas de ellas imposibles de medir con reglas euclidianas. Un ejemplo que ilustra lo inadecuado

que resulta aplicar reglas euclidianas para hacer medidas del contorno de una estructura de la naturaleza se encuentra en la paradoja de la costa de Gran Bretaña. En el anexo 1 del trabajo de grado de especialización la autora de esta investigación describe esta paradoja y cuál fue su solución (Mandelbrot, 1967; Soracipa, 2021).

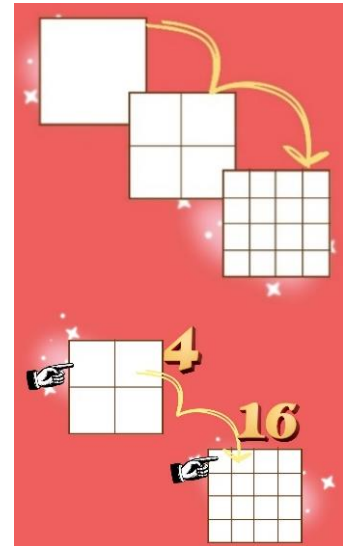
Es de esta manera como las estructuras de la naturaleza que se caracterizan por su irregularidad y/o aleatoriedad fueron clasificadas y categorizadas como fractales que a su vez hacen parte de lo que hoy se denomina geometría fractal. Cabe agregar que un gran número de estructuras anatómicas complejas presentan una geometría irregular. Ejemplos incluyen los árboles venosos y arteriales y la ramificación de las fibras de músculo cardíaco, al igual que otras redes como el árbol traqueobronquial, la ramificación coronaria (Rodríguez et al., 2007) y el sistema de conducción de His Purkinje, también la estructura ventricular es fractal (Rodríguez et al., 2010; Rodríguez et al., 2018). Estas estructuras cardiopulmonares comparten al menos una función fisiológica fundamental: el rápido y eficiente transporte sobre redes de compleja distribución espacial. Una variedad de sistemas de órganos presenta estructuras fractales que facilitan la diseminación de la información (sistema nervioso), la absorción de nutrientes (intestino), así como la distribución, colección y transporte (ductos biliares, cálices renales, complejos coroideos y vellosidades coriónicas) (Goldberger et al., 1990).

Tabla 1. Aspectos generales del espacio de Box Counting y la dimensión fractal obtenida mediante este método

Descripción	Espacio de Box Counting
-------------	-------------------------

- ∴ La figura 1 ilustra un cuadro que fue dividido en una cantidad n de cuadros más pequeños. La figura ilustra también que se pasa de la noción de cuadro a cuadrícula de n cantidad de cuadros.
- ∴ El cuadro inicial se reduce o divide todos sus lados en un factor de $\frac{1}{2}$. Esta es sólo una de las posibles proporciones que pueden utilizarse, pero resulta de utilidad graficar este caso, pues corresponde a la escala usada por el Grupo Insight.
- ∴ El espacio de Box Counting consiste básicamente en cada una de estas cuadrículas las cuales se ajustarán una más que otras para ser superpuestas sobre estructuras irregulares como se observará más adelante.

Figura 1: Representación de una cuadrícula



Fuente: elaboración propia.

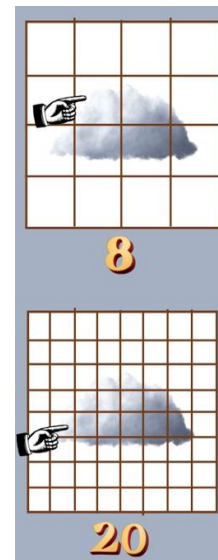
Descripción

El método de Box Counting consiste en lo siguiente⁶:

1. Se selecciona la estructura fractal a medir.
2. Sobre esta estructura irregular se superponen como mínimo dos cuadrículas con cuadros de diferente tamaño. Para la nube de la figura 1 se ha superpuesto una cuadrícula de 16 y otra de 64 cuadros.
3. Al contar el número de cuadros que ocupa la nube con la cuadrícula de 16 cuadros se encuentra que esta ocupa 8 cuadros, mientras que la cuadrícula de 64 cuadros la nube ocupa 20 cuadros.

Método de Box Counting

Figura 2: Método de Box Counting y conteo de cuadros.



Fuente: Elaboración propia

⁶Para tener una idea más completa y concreta de las aplicaciones de este método y su desarrollo matemático consultar el trabajo de grado titulado: *Estrategia para la construcción e interpretación de atractores cardiacos caóticos con estudiantes de pregrado de la facultad de medicina* (Soracipa, 2021).

4. La ecuación 1 es una expresión matemática con la cual se evalúa la dimensión fractal de cualquier estructura fractal, en este caso se utiliza para la nube. En el numerador el término $N_2(2^{-(j+1)})$ representa el número de cuadros ocupados por la nube al superponer una rejilla de cuadros más pequeños, en el denominador el término $N_1(2^{-j})$ representa el número de cuadros grandes ocupados por la nube.

$$D = \text{Log}_2 \frac{N_2(2^{-(j+1)})}{N_1(2^{-j})} \text{ Ecuación 1}$$

Siendo D el valor de la dimensión fractal. Ahora al sustituir los valores hallados para la nube se encuentra que:

$$D = \text{Log}_2 \frac{20}{8}$$

$$D = 1.321$$

La dimensión fractal de la nube sería igual a 1.321.

3.4. Atractor cardíaco caótico

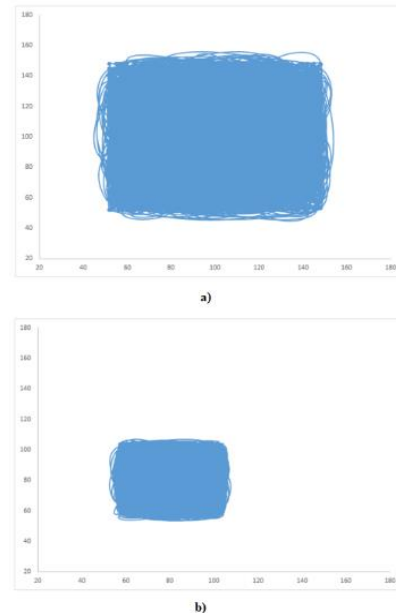
La metodología del Grupo Insight publicada en el 2008 plantea, como se mencionó atrás, la posibilidad de interpretar la variación de la frecuencia cardíaca en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal. Para ello utilizó los valores de la frecuencia cardíaca de los estudios Holter para generar un atractor cardíaco caótico en un espacio de fase. Los pasos que se requieren para generar dicho atractor en el espacio de fase fueron descritos para la investigación llevada a cabo para la especialización (Soracipa, 2021). A continuación, se resaltan que operaciones necesarias para clasificar por afinidades cada atractor cardíaco caótico generado en el espacio de fases en tres conjuntos que representan estados dinámicos cardíacos diferentes.

Tabla 2. Aspectos generales de un atractor cardíaco caótico

Descripción	Espacio de fases y atractor
-------------	-----------------------------

- ∴ Los atractores cardíacos de la figura 3 corresponden a los valores de la frecuencia cardíaca de estudios Holter de dos sujetos diferentes.
- ∴ Ambos atractores fueron generados en un mismo espacio de fases para garantizar que el análisis de cada atractor se realice en igualdad de condiciones.
- ∴ En este caso al atractor generado en el espacio de fases se les ajustaron sus ejes a valores de la frecuencia cardíaca entre 20 y 180 latidos por minuto.
- ∴ Una comparación del espacio ocupado por cada atractor en el espacio de fases muestra que el atractor del sujeto 1 (figura 3a) ocupa un mayor espacio, mientras que el atractor del sujeto 2 (figura 3b) ocupa un menor espacio.

Figura 3: Atractor cardíaco caótico a) normal y b) anormal



Fuente: elaboración propia

Conclusión y algunos cuestionamientos que se pueden desencadenar a partir de la comparación de los dos atractores

- A partir de la comparación del espacio ocupado por estos dos atractores se puede concluir que: un atractor normal se caracteriza porque ocupa un mayor espacio comparado con un atractor anormal.
- Es la conclusión anterior es una razón suficiente para establecer diferencias entre estados dinámicos cardíacos normales y aquellos que se encuentran lejos de este estado de normalidad.
- En el caso que se cuenten con más de dos estudios Holter ¿seguirá siendo igual de acertado establecer diferencias entre atractores a partir de la observación?

Descripción

Método de Box Counting

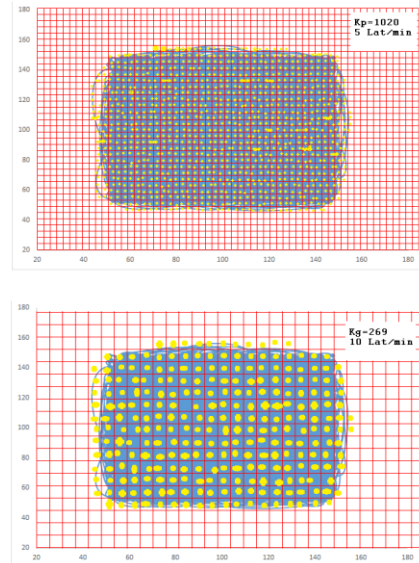
Establecer diferencias a partir de la observación es posible siempre y cuando el número de objetos no sea mayor a dos. Para saber si los atractores cardiacos se pueden diferenciar a partir de su espacio de ocupación se requiere realizar una medida que permita no sólo establecer diferencias en dos atractores cardiacos sino en todos aquellos que se generen en el espacio de fases, para ello se hace uso del método de Box Counting. En la metodología desarrollada por el Grupo Insight (2008), la cuadrícula descrita anteriormente para el espacio de Box Counting se denomina rejilla.

∴ La figura 4 ilustra como se ve el atractor de la figura 3 al superponer una primera rejilla de cuadros “pequeños” (Kp) y otra de “grandes” (Kg).

∴ Para la metodología cada rejilla de Kp y Kg representa un espacio geométrico acotado, es decir, un espacio con un número finito de Kp o Kg que se superponen sobre el atractor.

∴ El conteo de cuadros al superponer la rejilla de Kp en el atractor cardiaco del sujeto 1 arrojó como resultado 138 y al superponer una rejilla de Kg el resultado fue de 42. En cambio, el conteo de cuadros al superponer la rejilla Kp en el atractor cardiaco caótico del sujeto 2 dio como resultado 34 y al superponer en este mismo atractor una rejilla Kg el resultado fue de 12.

Figura 4. Superposición de las rejillas Kp y Kg en los atractores a) y b) de la figura 4.



Método de Box Counting aplicado a los atractores cardiacos caóticos

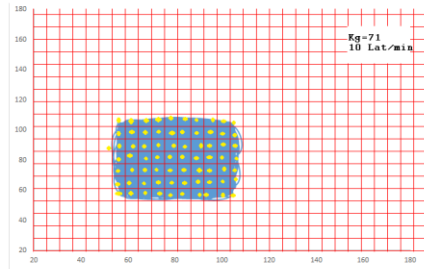
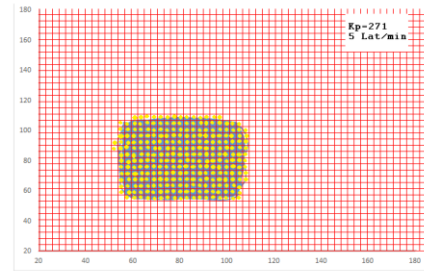
En la metodología desarrollada por el Grupo Insight, al ser el lado de los cuadros de una rejilla exactamente la mitad del de la segunda, y utilizarse solamente dos rejillas, el término $N_2(2^{-(j+1)})$ que se encuentra en el numerador de la ecuación 1 representa el número de cuadros ocupados por la estructura fractal al superponer una rejilla de Kp , esto quiere decir que $N_2(2^{-(j+1)}) = Kp$; mientras que en el denominador el término $N_1(2^{-j})$ representa el número de cuadros ocupados por la estructura fractal al superponer la rejilla de Kg , esto quiere decir que $N_1(2^{-j}) = Kg$.

De esta manera la ecuación 1 toma la siguiente expresión:

$$D = \text{Log}_2 \frac{Kp}{Kg} \quad \text{Ecuación 2}$$

Ahora, al sustituir el conteo de cuadros Kp y Kg de los dos atractores de la figura 4 en la ecuación 2 se obtiene los siguientes resultados:

Dimensión fractal del atractor caótico cardiaco a)	Dimensión fractal del atractor caótico cardiaco b)
$D = \text{Log}_2 \frac{Kp}{Kg}$	$D = \text{Log}_2 \frac{Kp}{Kg}$
$D = \text{Log}_2 \frac{271}{71}$	$D = \text{Log}_2 \frac{1020}{269}$
$D = 1.93$	$D = 1.92$



Fuente: elaboración propia

Conjuntos

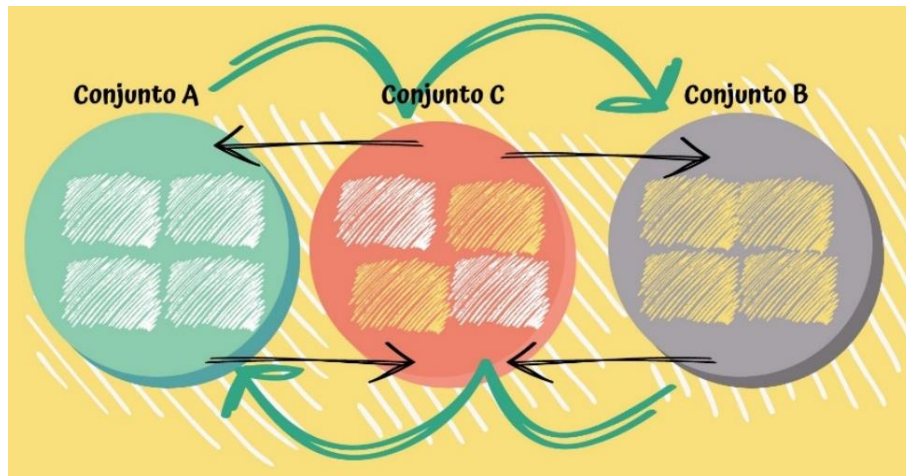
Desde el contexto de la teoría de conjuntos todo conjunto debe tener unas reglas bien definidas las cuales caracterizan los elementos que se están representado. Para el tema que estamos tratando en este capítulo las reglas se establecen mediante el “arte de contar” que hace parte de la disciplina que recibe el nombre de análisis combinatorio (Salvat, 1986). Entonces, para establecer las reglas de los conjuntos que se pueden formar a partir del conteo de cuadros es necesario considerar lo siguiente:

- ∴ La metodología desarrollada por el Grupo Insight tomó 17 estudios Holter todos ellos fueron evaluados por un especialista el cual encontró que cuatro de ellos eran normales y 13 presentaban diferentes patologías cardiacas (Rodríguez et al, 2008).
- ∴ La aplicación del método de Box Counting en los atractores mostró que los valores de la dimensión fractal no permiten diferenciar entre estados dinámicos cardiacos normales y anormales, mientras que el conteo de cuadros que ocupa cada atractor al superponer las dos rejillas sí permite hacer diferenciaciones entre estados dinámicos cardiacos. A continuación, se describe cómo se establecieron estas diferencias.
 - I. Si se considera el valor máximo y mínimo de los espacios ocupados por los atractores generados a partir de los estudios Holter que fueron evaluados como normales se encuentra que estos variaron entre 260 y 483 con la rejilla Kp , entre 69 y 131 con la rejilla Kg .
 - II. Para los estudios Holter con diferentes patologías cardiacas se encontró que estos variaron entre 60 y 383 con la rejilla Kp , entre 16 y 106 con la rejilla Kg .
 - II. De los estudios Holter con diferentes patologías cardiacas se encuentran tres cuyos sus atractores están por debajo de los 100 cuadros ocupados por la rejilla Kp , y por debajo de 50 cuadros ocupados por la rejilla Kg . Estos tres estudios se denominan agudos, y se caracterizan de acuerdo con los parámetros clínicos convencionales por una pérdida en la variabilidad de la frecuencia cardiaca, es decir no hay una variación significativa en los valores de la frecuencia cardiaca durante todo el tiempo que duró el registro de la señal eléctrica del corazón.

Cuando los puntos I, II y III fueron considerados como un orden matemático consecuente con dos estados dinámicos cardiacos como son el normal y el agudo, se establecieron tres grupos: el primero representa el intervalo entre el número máximo y mínimo de cuadros que pueden ocupar los atractores normales (conjunto A); el segundo representa el intervalo entre el número máximo y mínimo de cuadros que puede ocupar un atractor cardiaco cuyo estudio Holter hay una pérdida de la variabilidad de la frecuencia cardiaca (conjunto B); el tercer grupo se estableció cuando se compararon los valores límites de cuadros ocupados por los atractores de los dos primeros grupos, lo cual reveló que existe un grupo intermedio (conjunto C) que caracteriza un atractor que puede evolucionar hacia alguno de los dos estados que representa el conjunto A y B.

En este orden de ideas la figura 5 ilustra los conjuntos A, B y C que también hacen alusión a la idea de estado dinámico en el cual puede estar un atractor cardiaco. Los estados dinámicos cardiacos en esta metodología serían: estado dinámico cardiaco normal (conjunto A), estado dinámico cardiaco agudo (conjunto B) y estado dinámico cardiaco evolucionando hacia alguno de los dos posibles estados (conjunto C).

Figura 5. Conjuntos A, B y C.



Fuente: elaboración propia

$$A = \{x \leq 100\}$$

$$B = \{x > 200\}$$

$$C = \{100 < x < 200\}$$

En donde $x \in \mathbb{Z}^+$ y es una variable que representa el total de cuadros ocupados por el atractor al superponer la rejilla de Kp .

A continuación, es necesario establecer la definición matemática de los Kp y Kg . Para ello tomamos la ecuación 2 y realizamos el debido despeje algebraico considerando la función inversa de un logaritmo de la siguiente manera:

$$D = \text{Log}_2 \frac{Kp}{Kg} \text{ Ecuación 2}$$

$$2^D = \frac{Kp}{Kg} \text{ Ecuación 3}$$

El numerador y denominador de la ecuación 3 se puede expresar de la siguiente manera:

$$Kp = Kg 2^D \text{ Ecuación 3.1} \quad Kg = \frac{Kp}{2^D} \text{ Ecuación 3.2}$$

La relación que nos muestra la ecuación 3.1 es que la cantidad de cuadros pequeños contados es igual a cantidad de cuadros grandes multiplicado por una potencia de base dos que se encuentra elevada según el valor de la dimensión fractal. Mientras que la ecuación 3.2 muestra que la cantidad de cuadros grandes es una proporción entre los cuadros pequeños y la potencia de base en dos elevado a un determinado valor de dimensión fractal.

Todas estas descripciones corresponden a la metodología publicada en el 2008 por el Grupo Insight. A continuación, se describe qué se consideró para realizar el refinamiento de esta metodología, que representa un claro ejemplo del arte de contar y la relación que este arte tiene con la combinatoria.

3.5. Desarrollo de la idea de espacio generalizado de Box Counting

De acuerdo con los razonamientos que se han venido realizando, el matemático Marcus du Sautoy (2003) afirma que “*parte del trabajo del matemático consiste en hallar esquemas y estructuras en el mundo de la matemática, la otra parte consiste en **demostrar** que cierta estructura será siempre válida*” (p.52). En cuanto al concepto de demostración afirma lo

siguiente “la demostración marca el auténtico principio de la matemática como arte de la deducción en lugar de una simple observación de números”.

La primera parte de la afirmación de du Sautoy se puede encontrar en los trabajos desarrollados previamente por el grupo Insight en el contexto de la geometría fractal. En estos trabajos se encontró que el espacio ocupado por una estructura fractal al superponer una rejilla de cuadros pequeños Kp permite hacer distinciones geométricas y matemáticas entre las estructuras medidas, lo que no puede hacer los valores individuales de la dimensión fractal (Soracipa, 2021).

Figura 6. Observación de números.



Fuente: elaboración propia

Entonces al aplicar el método de Box Counting en los atractores cardiacos se sabía que el número total de cuadros ocupados podría hacer distinciones matemáticas y geométricas entre atractores. Se puede decir que este hallazgo emerge como resultado de la implicación recíproca la cual fue conocida desde el comienzo. La implicación recíproca descrita aquí difiere de la simple correspondencia concreta en cuanto a que se llega a ella como resultado de un cálculo de posibilidades y no sólo de las comprobaciones reales.

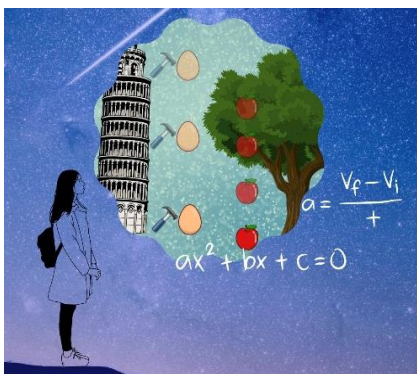
Continuando con la primera parte de la afirmación de du Sautoy sobre demostrar que cierta estructura será siempre válida, en la metodología del Grupo Insight previamente descrita se establecen las características matemáticas para los tres conjuntos, las cuales se van a cumplir cuando la metodología sea aplicada en otro grupo de estudios Holter. Es decir, estas características matemáticas y geométricas configuran una estructura que le da sentido a la noción de estado dinámico cardiaco, pues es a partir de ellas que se puede caracterizar el estado dinámico cardiaco por la forma que tiene el atractor en un espacio de fases y por la cantidad de cuadros que éste ocupa al superponer la rejilla Kp .

Una manera de contextualizar las razones que llevaron al refinamiento de la metodología desarrollada por el Grupo Insight se encuentra en la manera como du Sautoy razona lo que es para él una demostración. De ella se resalta que es un *arte de la deducción* que lleva a cabo la mente humana y es necesario cultivarla, para lo cual se requiere conocer los métodos

y/o técnicas de este arte. Uno de ellos es la inducción matemática, que es considerada un método de prueba que juega un papel central en las matemáticas (Rabinovitch, 1970). Más adelante se explica cómo se realizó la inducción matemática en la metodología desarrollada por el Grupo Insight, por lo pronto es importante explicar las razones por las cuales se realizó la inducción matemática.

A partir de una inducción matemática es posible establecer una expresión matemática que sea aplicable para todos los atractores cardiacos generados en el espacio de fases y medidos en el espacio de Box Counting. En otras palabras, es un proceso matemático que permite encontrar una estructura matemática y geométrica más completa en la cual están contenidas las características establecidas para los tres conjuntos previamente descritos. Cabe señalar que el establecimiento de una generalización no es una tarea fácil de llevar a cabo; Edward de Bono, en su estudio sobre el pensamiento lateral, ilustra muy bien los escenarios a los cuales se debe dirigir la razón (1991). Las ideas que desarrolla Bono sobre este tipo de pensamiento ilustran el escenario al cual debe recurrir todo matemático para ver el problema desde todos los ángulos posibles para plantear la solución desde una nueva perspectiva. Dentro de los ángulos posibles se encuentra el uso del experimento mental y la analogía.

Figura 7. Experimento mental



Fuente. Elaboración propia

El experimento mental comúnmente se asocia a la filosofía especulativa, no obstante, hay estudios que muestran que estos experimentos fueron utilizados por los físicos de la revolución científica; entre ellos se encuentran Newton, Ørsted, y Einstein; entre otros (Aguilar y Romero, 2011; Cohen, 2010). Adicionalmente, el físico y filósofo Ernst Mach consideró que en esencia los experimentos mentales son similares a los experimentos reales. Cabe agregar que hay una discusión sobre su estatus epistémico, que tiene su origen en los comienzos de la Filosofía de la Ciencia como disciplina independiente. Por lo tanto, el uso de los experimentos mentales fue estrictamente restringido y quien argumentó a favor de esta restricción fue Karl Popper.

En términos generales los experimentos mentales tienen una funcionalidad que se vincula al descubrimiento de hipótesis y a la crítica de principios teóricos. El filósofo de la ciencia James Robert Brown apoya la idea de Mach sobre las similitudes que existen entre los experimentos mentales y los reales, señalando que, por lo tanto, pueden desempeñar funciones en el contexto de justificación de las teorías. También, tiene clara su oposición a la mirada empirista la cual argumenta la manera como se elaboran explicaciones a partir del resultado del experimento, es decir que para Brown la ejecución de ciertos experimentos mentales permite captar de manera intuitiva las leyes de la naturaleza con las cuales se pueden confirmar las teorías científicas (Mettini, 2018).

De acuerdo con los razonamientos que se han venido realizando, para Brown los experimentos mentales posibilitan la revisión de teorías y aumentan el grado de certeza de una hipótesis postulada. Adicionalmente afirma que existe un realismo respecto de las leyes de acuerdo con el cual, éstas son relaciones entre universales que subsisten independientemente de sus instancias.

Una analogía es un tipo de razonamiento en el cual se realiza una comparación de situaciones o fenómenos que tienen una similitud entre sí. Hay situaciones de la vida que hacen que se acudan a ellas, por ejemplo, cuando se quiere comunicar una idea, explicar algo o resolver un problema, y se carece de conocimientos sobre el tema. Para realizar una comparación se requiere establecer un referente que sea conocido y del cual se encuentran semejanzas con esa idea que no se puede expresar. A nivel epistemológico se considera que la analogía juega un papel clave en el estudio de la producción de conocimiento y la creatividad de los científicos (Oliva, 2004).

A continuación, se realiza una descripción del experimento mental y las analogías utilizadas en el refinamiento de la metodología desarrollada por el grupo Insight, para realizar una inducción matemática la cual permite establecer una expresión matemática aplicable a todos los atractores cardiacos. Como se verá más adelante el experimento mental comienza reconociendo el espacio de Box Counting como aquel espacio en el cual es posible hacer caracterizaciones de estructuras irregulares, que en este caso son los atractores cardiacos. Mientras que se va describiendo el experimento mental a partir del cual se extraerán elementos matemáticos claves para realizar la inducción matemática, se invita al lector a que

tenga en cuenta si dentro de la demostración se responde a la siguiente pregunta: ¿es posible establecer el total de atractores cardiacos que se pueden medir en el espacio de Box Counting, que a su vez determinen el total de atractores que se pueden encontrar en el estado dinámico normal, agudo y en evolución hacia alguno de los dos estados anteriores?

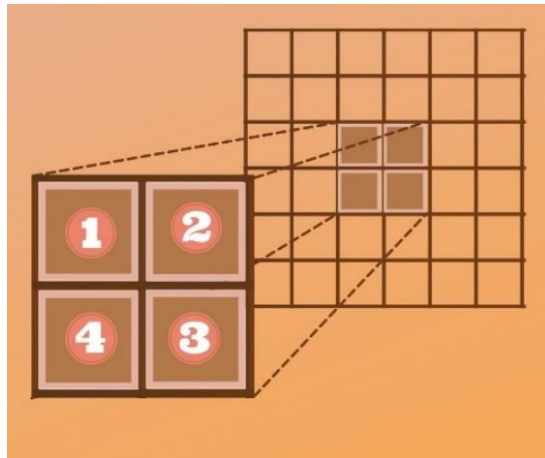
Durante la demostración del refinamiento de la metodología es importante considerar lo que expresa muy bien expresa du Sautoy (2003), “*muy a menudo una demostración no pretende poner todos los puntos sobre las íes: se trata de una reconstrucción del viaje y no necesariamente la construcción de cada uno de sus pasos*” (p. 56). En este orden de ideas, se va a realizar es una reconstrucción del viaje de un escenario muy abstracto y la pregunta formulada permite centrar la atención en el resultado que en últimas representan los alcances que tiene la metodología para interpretar el electrocardiograma y/o Holter en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal.

3.5.1. La combinatoria

En la combinatoria existe un arreglo particular que se obtiene de la mezcla de los elementos de un conjunto. Una definición concreta de combinatoria sería un número de conjuntos con un determinado número de elementos que hacen parte de un universo de elementos, sin considerar el orden de selección, sino el tipo de elementos que se toman. Previamente Rodríguez y colaboradores (2021) explicaron la manera de realizar combinaciones entre Kg y Kp , de esta explicación se resalta lo siguiente:

En la figura 8 se ilustra una rejilla que tiene nueve Kg , cada uno de ellos fue dividido entre cuatro Kp , la longitud de cada Kp es la mitad del lado de un Kg , así en cada Kg caben 4 Kp . Para establecer la cantidad de cuadros pequeños que puede una estructura fractal ocupar, se sabe que por cada Kg superpuesto sobre el atractor existe cuatro posibilidades de ocupación de Kp .

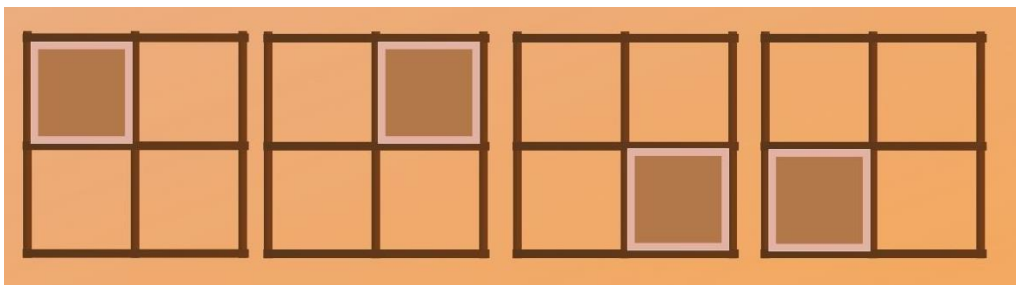
Figura 8. Ampliación de un cuadro grande (Kg) y sus cuadros pequeños (Kp)



Fuente: elaboración propia

La idea anterior se ilustra en la figura 9 en la cual se muestra todas las posibilidades que puede tener una estructura fractal en ocupar un Kp , en este orden de ideas se muestra que solo hay cuatro posibilidades de ocupar un Kp .

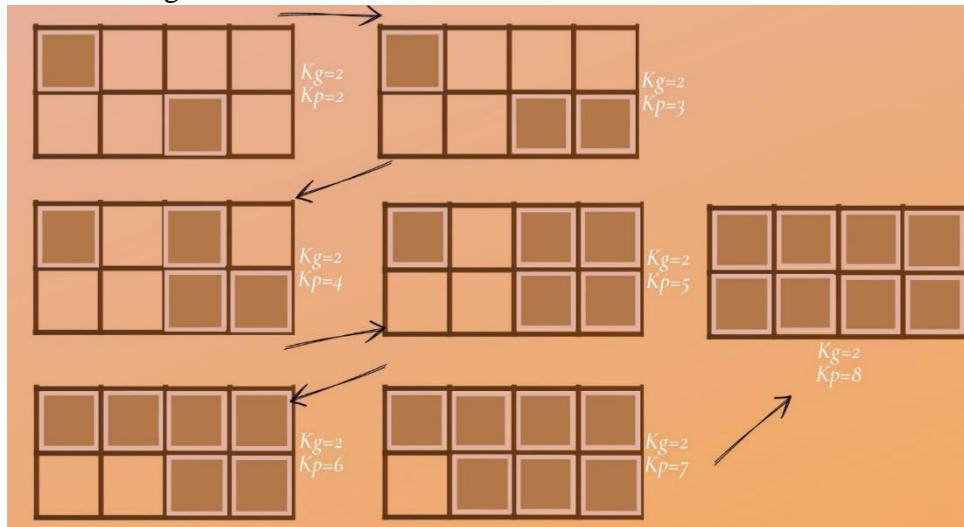
Figura 9. Todas las posibilidades de ocupación de cuadros Kp para un solo cuadro Kg .



Fuente: elaboración propia

Para continuar desarrollando la idea de posibilidades de ocupación de una estructura fractal, es necesario emplear el razonamiento abstracto el cual permite proyectar en su mente una cantidad limitada de posibilidades de que una estructura fractal ocupe una determinada cantidad de Kp cuando se tiene más de un Kg tal y como se ilustra en la figura 10.

Figura 10. Posibles combinaciones o parejas (Kg , Kp) que pueden darse cuando se tienen dos cuadros grandes.



Fuente: elaboración propia

La figura 10 fue diseñada para ilustrar cómo sería el razonamiento abstracto en el cual se plantea un análisis de la cantidad de Kp que pueden ser ocupados de acuerdo con una determinada cantidad de Kg . En este caso si el número de Kg son dos se encuentra que el número máximo de Kp que puede ocupar una estructura fractal será de 8. Lo anterior en términos matemáticos sería:

$$4(Kp) \times 2(Kg) = 8(Kp)$$

Ahora ¿cuántas parejas (Kg , Kp) se pueden establecer de acuerdo con lo observado en la figura 10? La respuesta a esta pregunta sería:

$$(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8)$$

Considerando que la pareja (2,1) en la figura 11 no se forma, entonces tendríamos que $8 - 1 = 7$, que son el número de parejas (Kg , Kp) que se pueden dar. Una de las razones por las cuales no se da la pareja (2,1) es porque un valor de $Kp = 1$, significa que uno de los

cuadros Kg no está siendo ocupado, y entonces ya no tendríamos 2 cuadros Kg , sino sólo un cuadro Kg . Por esto, aunque el máximo valor de Kp ocupados sea 8, sólo se obtienen 7 posibilidades. Otra manera de organizar el número de parejas observadas en la figura 11 y sus combinaciones es mediante la tabla 3.

Tabla 3. Cantidad de Kp cuando se tiene una cantidad de Kg organizados en parejas las cuales establecen un determinado número de combinaciones.

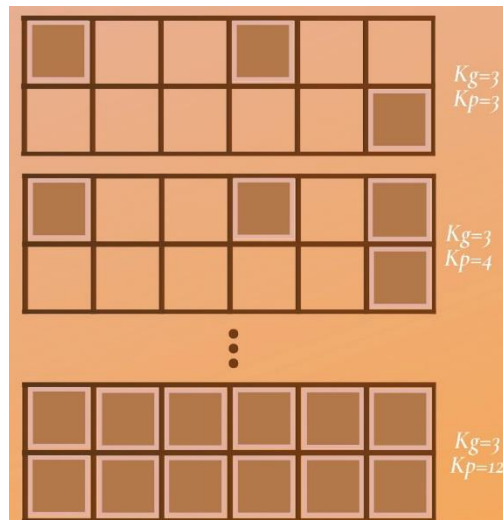
Kg	2	2	2	2	2	2	2
Kp	2	3	4	5	6	7	8
Parejas (Kg, Kp)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)
Combinación	1	2	3	4	5	6	7

Continuando con este razonamiento abstracto, en la figura 11 se puede observar que hay tres cuadros Kg y en cada uno de ellos hay un cuadro Kp ocupado, es decir que hay como mínimo tres cuadros pequeños ocupados. El valor máximo de cuadros pequeños ocupados en esta situación será 11, lo anterior en términos matemáticos sería:

$$4(Kp) \times 3(Kg) = 12(Kp)$$

Ahora si repetimos la pregunta de la situación anterior para la figura 11 la respuesta sería:

Figura 11. Posibles combinaciones o parejas (Kg, Kp) que pueden darse cuando se tienen tres cuadros grandes (Kg).



Fuente: elaboración propia

(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (3,9), (3,10), (3,11), (3,12)

Volvemos a considerar que la pareja (3,1) no se tiene en cuenta y que las parejas comienzan a partir del valor de Kg que en esta situación es 3, entonces las parejas (3,1) y (3,2) no serían consideradas, en este orden de ideas tendríamos que $12 - 2 = 10$, que corresponden al número de parejas (Kg, Kp) que se pueden dar.

Tabla 4. Cantidad de Kp cuando se tienen tres Kg organizados en parejas las cuales establecen un determinado número de combinaciones.

Kg	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Kp	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Parejas	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)	(3,9)	(3,10)	(3,11)	(3,12)	
Combinaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

A continuación, se plantean dos situaciones y se procede de manera semejante a como se hizo con las tres primeras situaciones (omitiendo en cada una de ellas su representación gráfica). Ahora si se consideran cuatro Kg , el valor máximo de cuadros pequeños ocupados en esta situación será 16, lo anterior en términos matemáticos sería:

$$4(Kp) \times 4(Kg) = 16(Kp)$$

En esta situación la pareja (4,1), (4,2) y (4,3) no se tiene en cuenta y las parejas comienzan a partir del valor de Kg , en este orden de ideas tendríamos que $16 - 3 = 13$, que corresponden al número de parejas (Kg, Kp) que se pueden dar.

Tabla 5. Cantidad de Kp cuando se tienen cuatro Kg organizados en parejas las cuales determinan un determinado número de combinaciones.

Kg	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Kp	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Parejas	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)	(4,9)	(4,10)	(4,11)	(4,12)	(4,13)	(4,14)	(4,15)	(4,16)
Combinaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Ahora si se consideran cinco Kg , el valor máximo de cuadros pequeños ocupados en esta situación será 20, lo anterior en términos matemáticos sería:

$$4(Kp) \times 5(Kg) = 20(Kp)$$

En esta situación la pareja (5,1), (5,2), (5,3) y (5,4) no se tiene en cuenta y las parejas se comienzan a organizar partir del valor de Kg , en este orden de ideas tendríamos que $20 - 4 = 16$, que corresponden al número de parejas (Kg, Kp) que se pueden dar tal y como se muestra en la tabla 6.

Tabla 6. Cantidad de Kp cuando se tienen cinco Kg organizados en parejas las cuales determinan un determinado número de combinaciones.

Kg	Kp	Parejas	Combinaciones
5	5	(5, 5)	1
5	6	(5, 6)	2
5	7	(5, 7)	3
5	8	(5, 8)	4
5	9	(5, 9)	5
5	10	(5, 10)	6
5	11	(5, 11)	7
5	12	(5, 12)	8
5	13	(5, 13)	9
5	14	(5, 14)	10
5	15	(5, 15)	11
5	16	(5, 16)	12
5	17	(5, 17)	13
5	18	(5, 18)	14
5	19	(5, 19)	15
5	20	(5, 20)	16

Al observar detenidamente la descripción de las situaciones anteriores encontramos que existe un patrón recurrente en el número total de cuadros ocupados a medida que se aumenta el número de Kg . Lo anterior se puede entender bajo la noción de sucesión que hace parte de un grupo de funciones especiales la cual representa un conjunto que tiene como dominio al conjunto de los enteros positivos, razón por la cual se puede ordenar los valores de sus rangos o recorridos (González et al., 1988). Ahora para deducir el término general de la sucesión se considera lo siguiente:

- La letra j toma los valores de Kg que representa una determinada cantidad de cuadros grandes y el valor mínimo de Kp .
- El valor máximo de Kp se establece cuando se multiplica Kg por 4, es decir $4 \times (\#)Kg$.
- En el número de parejas se observa que este se puede establecer cuando se multiplica a 3 por Kg más 1, es decir:

Si $j = Kg = 2$ entonces

$$3j + 1 =$$

$$3(2) + 1 = 7$$

Hay en total 7 parejas

Si $j = Kg = 3$ entonces

$$3j + 1 =$$

$$3(3) + 1 = 10$$

Hay en total 10 parejas

Si $j = Kg = 4$ entonces

$$3j + 1 =$$

$$3(4) + 1 = 13$$

Hay en total 13 parejas

Si $j = Kg = 5$ entonces

$$3j + 1 =$$

$$3(5) + 1 = 16$$

Hay en total 16 parejas

Todos los anteriores planteamientos se pueden organizar conforme aparece en la tabla 7, donde se puede observar que j toma los siguientes valores 2, 3, 4, 5, ... j . En la tabla 7 también se puede observar que el signo “por” se ha eliminado, es decir ya no se escribe $4 \times j$, sino sólo $4j$, de igual forma ya no se escribe $3 \times j + 1$, sino $3j + 1$. De esta manera se encontró un patrón para el número de combinaciones para un determinado valor de Kg que será representado por un número j cualquiera, de tal forma que el número de combinaciones que obtendremos será $3j + 1$.

Tabla 7. Generalización de los resultados obtenidos para las situaciones analizadas.

Kg	Mínimo Kp	Máximo Kg	No. Parejas
2	2	8	7
3	3	12	10
4	4	16	13
5	5	20	16
⋮	⋮	⋮	⋮
j	j	$4j$	$3j + 1$

3.5.2. Serie y número total de atractores cardiacos caóticos

Para esta parte de la metodología es importante recordar la función que cumple una serie matemática y es la de sumar elementos de alguna sucesión de números ordenados que tienen una relación con los valores consecutivos de los números naturales, siguiendo un patrón o expresión de generación, por ejemplo:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

De esta manera la suma de los 10 primeros términos de esta serie matemática se simboliza de la siguiente manera:

Σ

En cuanto al ejemplo anterior la serie converge a 20, pues la sumatoria da como resultado:

En esta serie se observa un patrón repetitivo en todos los términos el cual va a ser una constante, en este caso el número 2 es un valor constante, con un número finito de sumandos.

$$\sum_{j=1}^{10} 2$$

Donde la letra sigma representa la suma abreviada de esta secuencia de números, la letra j representa el *índice de sumación*, adicionalmente los límites inferior y superior indican cuántos términos va a tener la suma. Las series se pueden caracterizar por su convergencia, es decir se dice que una serie converge si su suma es finita.

$$\sum_{j=1}^{10} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$$

Volviendo a la tabla 7 en la columna cuatro se encuentra que el número de parejas que se pueden establecer con la expresión matemática $3j + 1$ que a su vez representan el número total de combinaciones para cada j las cuales se pueden sumar al observar que cumple las condiciones de una serie. A continuación, se describe cómo se realiza esta suma:

$$N_A = \sum_{j=n}^x 3j + 1 \text{ Ecuación 6}$$

Al cumplir la serie el criterio de convergencia la ecuación 6 se puede expandir de la siguiente manera:

Serie (a)

$$\sum_{j=n}^x 3j = 3 \sum_{j=n}^x j + n$$

Serie (b)

$$\sum_{j=n}^x 1 = x - n + 1$$

La ecuación 6 representa una sucesión que se lee “sumatoria de $3j + 1$ que va desde $j = n$ hasta $j = x$ ” donde n y x representan los términos de Kg mínimo y Kg máximo respectivamente. Se puede inferir que la serie establecida converge a un valor finito en vista de que tiene límites finitos (x y n), adicionalmente no existe una indeterminación en la sucesión $3j + 1$ dentro del intervalo numérico establecido para la serie, en este caso el intervalo numérico es $[n, x]$.

$$N_A = \sum_{j=n}^x 3j + 1$$

$$N_A = \sum_{j=n}^x 3j + \sum_{j=n}^x 1 \text{ Ecuación 7}$$

Ahora es necesario analizar las dos sumatorias de la ecuación 7 por separado. El término general de la sucesión de la serie (a) converge, pero la serie no cuenta con un término general al que este converja. Para establecer el término general de la serie se procede de tal forma que se pueda utilizar el procedimiento de Gauss para la suma de los n -primeros números naturales.

La serie (b) así como la serie (a) convergen, además la serie tiene un término general que se puede establecer directamente del resultado al que llegó Gauss.

De esta manera la serie debe empezar en cero e ir hasta un determinado número para poder aplicar el resultado:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Es por esta razón que se realiza el cambio de la serie (a) a la (b), pues la serie (b) tiene la suma de los primeros “ $x - n$ ” números. Para lograr ir desde la serie (a) hasta la serie (b) se debe tener en cuenta que dos series son iguales si tienen igual cantidad de términos, es decir:

$$\sum_{i=0}^n a_i \qquad \sum_{i=0}^n b_i$$

Son iguales si y solo si

$$a_0 = b_0 \qquad a_0 + a_1 = b_0 + b_1 \qquad a_0 + a_1 + a_2 = b_0 + b_1 + b_2$$

$$i = 0 \qquad i = 1 \qquad i = 2$$

$$a_0 + a_1 + a_2 \cdots a_n = b_0 + b_1 + b_2 \cdots b_n$$

$$i = n$$

Es decir, son iguales término a término.

En el momento de hallar una serie que sea igual a la serie (a) y que no permita utilizar el resultado de Gauss hay que asegurar que, sean iguales término a término por esto se hace el cambio de j a $j + n$ dentro de la sumatoria de la siguiente manera:

$$\sum_{i=n}^x j = n, \quad n + (n + 1), n + (n + 1) + (n + 2), \cdots n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + x$$

$$\sum_{i=n}^{x-n} j + n = n, n + (n + 1), n + (n + 1) + (n + 2), \cdots n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots$$

$$+ \frac{(n + x - n)}{x}$$

De esta manera se observa que ambas series son iguales término a término, además es finita y converge, y se puede separar así:

$$\sum_{i=0}^{x-n} j + n = \sum_{i=0}^{x-n} j + n \sum_{i=0}^{x-n} 1$$

Así, la primera serie que se encuentra al lado derecho de la igualdad corresponde a la suma de los primeros $x - n$ números y aplicando la fórmula encontrada por Gauss se llega a que:

$$\sum_{i=0}^{x-n} j = \frac{(x-n)(x-n+1)}{2}$$

También, se sabe que

$$\sum_{j=n}^x 1 = x - n + 1$$

Entonces:

$$\sum_{i=0}^{x-n} j + n = \sum_{i=0}^{x-n} j + n \sum_{i=0}^{x-n} 1 = \frac{(x-n)(x-n+1)}{2} + n(x-n+1) = \frac{(x-n+1)(x+n)}{2}$$

Volviendo a la serie (a) se tiene que:

$$\sum_{i=n}^x 3j = 3 \sum_{i=0}^{x-n} j + n = \frac{3(x-n+1)(x+n)}{2}$$

Considerando de nuevo la ecuación 7, obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} N_A &= \sum_{i=n}^x 3j + 1 \\ N_A &= \sum_{i=n}^x 3j + \sum_{i=n}^x 1 \\ N_A &= \frac{3(x-n+1)(x+n)}{2} + (x-n+1) \end{aligned}$$

Sacando factor común a la anterior expresión matemática se obtiene:

$$N_A = (x-n+1) \left[\frac{3(x-n+1)(x+n)}{2} + 1 \right] \text{ Ecuación 8}$$

Ahora, para establecer a partir de este término general de la serie cualquier valor de cuadros Kg, vamos a suponer que tenemos una variable que llamaremos j (ver tabla 7), la cual puede tomar cualquier valor entero entre un valor máximo y mínimo de cuadros Kg; en

este caso son 131 y 16 que corresponde a los valores experimentales determinados a partir de los Holter prototipos⁷ mencionados en la metodología desarrollada por el Grupo Insight (Rodríguez et al, 2011). En la ecuación 8, x corresponde al valor máximo de Kg y n el valor mínimo de Kg, al realizar la respectiva sustitución de valores y despejes algebraicos se llega a:

$$\begin{aligned}
 N_A &= (x - n + 1) \left[\frac{3}{2}(x + n) + 1 \right] \\
 N_A &= (131 - 16 + 1) \left[\frac{3}{2}(131 + 16) + 1 \right] \\
 N_A &= (131 - 15) \left[\frac{3}{2}(147) + 1 \right] \\
 N_A &= (116) \left[\frac{3(147) + 2}{2} \right] \\
 N_A &= 25694
 \end{aligned}$$

De acuerdo con los razonamientos que se han realizado hasta el momento en la ecuación 8, N_A representa el número total de atractores cardiacos que se pueden encontrar en el espacio de Box Counting de acuerdo con una determinada cantidad de Kg. El valor máximo y mínimo de cuadros Kg calculados experimentalmente para las dinámicas cardíacas normales fue de 131 y 61, al sustituir estos valores en el término general de la serie se obtiene:

$$\begin{aligned}
 N_A &= (x - n + 1) \left[\frac{3}{2}(x + n) + 1 \right] \\
 N_A &= (131 - 61 + 1) \left[\frac{3}{2}(131 + 61) + 1 \right] \\
 N_A &= (131 - 60) \left[\frac{3}{2}(197) + 1 \right] \\
 N_A &= (71) \left[\frac{3(197) + 2}{2} \right] \\
 N_A &= 20519
 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene un total de 20519 atractores cardiacos caóticos normales. Ahora si se sustituye el valor 16 y 23 que corresponden a los valores totales experimentales

⁷Se entiende por prototipo en esta metodología a los electrocardiogramas que tienen unas características particulares establecidas desde parámetros clínicos y matemáticos que los distinguen de otros electrocardiogramas.

ocupados por un atractor con enfermedad aguda en este mismo término general de la sucesión se obtiene como resultado:

$$N_A = (x - n + 1) \left[\frac{3}{2}(x + n) + 1 \right]$$

$$N_A = (23 - 16 + 1) \left[\frac{3}{2}(23 + 16) + 1 \right]$$

$$N_A = (8) \left[\frac{3}{2}(39) + 1 \right]$$

$$N_A = (8) \left[\frac{3(39) + 2}{2} \right]$$

$$N_A = 476$$

Este resultado indica que hay un total de 476 atractores cardiacos agudos.

En la tabla 8 se organizó los resultados para responder a la previamente pregunta formulada. En esta tabla también se puede observar la diferencia que hay entre saber el total de atractores que se pueden generar en el espacio de Box Counting y establecer los conjuntos A, B y C a partir del conteo de cuadros que ocupa cada atractor al superponer la rejilla Kp .

Tabla 8. Número total de atractores normales, agudos y atractores que pueden estar evolucionando hacia el estado dinámico normal o agudo.

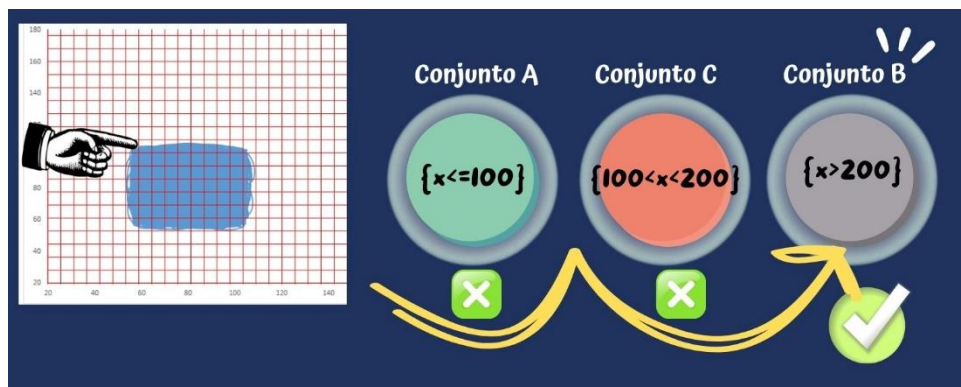
N_A	Número total de atractores	Número total de atractores normales $N_{Normales}$	Número total de atractores agudos N_{Aagudo}
$(x - n + 1) \left[\frac{3(x - n + 1)(x + n)}{2} + 1 \right]$	25694	25519	476
Número de atractores evolucionando hacia alguno de los estados $N_{Normales}$ y N_{Aagudo} $N_{Evolución} = N_A - (N_{Normales} + N_{Aagudo})$	4699		

3.6. El “arte de contar”

Para hallar la dimensión fractal de una estructura irregular a partir del método de Box Counting, se comienza contando cuadros para posteriormente aplicar la ecuación 1. Mientras

que con la metodología del Grupo Insight se cuentan los cuadros que ocupa cada atractor al superponer sobre él rejilla Kp , para luego establecer los criterios que caracterizan y diferencian a los conjuntos A, B y C, que a su vez representan tres estados dinámicos cardiacos diferentes. Por ejemplo, la figura 12 ilustra como después de contar los cuadros ocupados por el atractor cardiaco al superponer sobre él la rejilla Kp es mayor a 200 cuadros, entonces al revisar las características de los tres conjuntos se concluye que este atractor pertenece a un sistema dinámico normal. En este orden de ideas, contar en la metodología desarrollada por el grupo Insight no fue considerada una simple acción mecánica del método de Box Counting, al contrario, una reflexión profunda del problema llevó a entender el “*arte de contar*” como un proceso de análisis combinatorio (Salvat, 1986).

Figura 12: Cuadros ocupados y su relación con alguno de los tres conjuntos



Fuente: elaboración propia.

Cómo se describió más atrás la metodología plateó no sólo contar los cuadros que ocupa un atractor en un espacio de fases sino saber cuántos atractores cardiacos contienen las características de estos tres conjuntos, es claro que la situación cambia completamente debido a que se trata de indagar por un número determinado de atractores cardiacos. El procedimiento para contar la cantidad de atractores cardiacos aplicó procesos de combinatoria, para luego encontrar un orden matemático desde la noción de sucesión para establecer un término general de la serie que es justamente el que permite establecer el número total de atractores para cada uno de los tres grupos.

El término general de la serie muestra que, si existe un determinado número de atractores cardiacos por ejemplo para un estado dinámico normal, entonces la variabilidad en el comportamiento de la frecuencia cardiaca se encuentra acotada a un sistema dinámico

específico, que a su vez es diferenciable de los otros dos estados dinámicos (Figura 13). En este orden de ideas, la metodología desarrollada por el Grupo Insight (Rodríguez et al, 2011; 2021) muestra que al llevar la variabilidad de la frecuencia cardiaca para ser caracterizada en el contexto de los sistemas dinámicos no resultó ser un impedimento para establecer el estado dinámico cardiaco en el que se encuentra el sujeto en el momento que se realizó el registro de su señal eléctrica cardiaca.

Figura 13. Esferas que representan la idea de generalización mediante la cantidad de atractores que contienen la cantidad de conjuntos A, B y C.



Fuente: elaboración propia.

3.6.1. El concepto de suma

Para introducir el sistema de números reales se comienza con los enteros positivos, la generalización del espacio de Box Counting descrita en este capítulo arroja resultados numéricos que pertenecen al conjunto de enteros positivos, en el cual se incluye los números racionales positivos. El sistema de números reales se puede caracterizar mediante tres conjuntos de axiomas que son los siguientes: axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma de extremo superior. En el axioma de cuerpo se supone la existencia dos operaciones llamadas suma (+) y multiplicación (\times), estas dos operaciones cumplen los siguientes axiomas: propiedad conmutativa, asociativa y distributiva, cabe señalar que de estos axiomas se deducen todas las leyes aplicadas en el álgebra elemental las cuales reciben el nombre teoremas como es el teorema de posibilidad de sustracción y de división (Apóstol, 1990).

Los axiomas de orden son un grupo de axiomas que dan cuenta de un concepto por el cual se establece una *ordenación* entre los números reales. En esta ordenación se introduce unas propiedades de orden que representan un conjunto que permite posteriormente definir los conceptos de mayor que ($>$) y menor que ($<$) a partir del concepto primitivo de positivo. Volviendo a la ecuación 8, el término general de la serie muestra que tiene implícita esta propiedad de orden, si se considera que:

- ∴ La suma total de atractores cardiacos delimita la cantidad de variaciones que se pueden presentar en un determinado estado dinámico cardiaco.
- ∴ Cada suma a partir del valor máximo y mínimo que caracteriza al conjunto A y B establece el estado dinámico individual normal y agudo.
- ∴ Un estado normal se diferencia de un estado dinámico agudo porque contiene 20519 posibles atractores cardiacos, adicionalmente sus atractores ocupan un mayor espacio en el espacio de fases.
- ∴ El estado dinámico que puede ir evolucionando hacia estado normal o agudo se caracteriza por contener en total 4699 atractores.

La figura 13 ilustra las cuatro consideraciones anteriores, también permite observar cómo se van organizando de mayor a menor el número de atractores cardiacos que representa un estado dinámico. El principio de buena ordenación es una propiedad importante de los enteros positivos, debido a que se utiliza como base para la demostración y la inducción que se formula de la siguiente manera: “*todo conjunto no vacío de enteros positivos contiene uno que es el menor*”⁸. En la metodología el menor estado dinámico cardiaco es el agudo, que a su vez ocupa un menor espacio en el espacio de fases.

3.6.2. Operaciones básicas en los logaritmos

La demostración teórica de la metodología desarrollada por el Grupo Insight muestra que la potencialidad del método de Box Counting se encuentra en contar y sumar. El concepto de suma se caracteriza por unos axiomas que cumple la ecuación 8. Sumar puede considerarse una actividad racional fácil de llevar a cabo, sin embargo, al indagar la historia de la matemática se encuentra que no es así y es necesario establecer algoritmos que permitan

⁸ Esta formulación aparece en el teorema 1.37 tomado del Apóstol, T. (1990). Calculus I. Bogotá: Editorial Reverté, pag. 43.

realizar esta operación. En el siglo XVI se dio una de las mayores expansiones comerciales debido a las nuevas rutas de navegación, que requerían que las operaciones comerciales fueran perfeccionadas. De esta manera surge la necesidad de encontrar algoritmos menos laboriosos que los utilizados hasta entonces, como son los algoritmos de la multiplicación, de la división, etc. Esta necesidad converge en el establecimiento de los logaritmos gracias a dos vías aparentemente disímiles. La primera de ella es el cálculo del dinero que se iba acumulando en procesos bajo las reglas de interés compuesto, y la segunda corresponde a la navegación que se encontraba en su auge, lo cual forzaba a realizar más investigaciones astronómicas en las cuales se empleaban cálculos trigonométricos. Ambas vías inspiraron respectivamente a John Napier (1550-1617) y a Jobst Bürgi (1552-1632) en el establecimiento de los fundamentos matemáticos de los logaritmos (Tapia, 2003).

El clérico y matemático Henry Briggs (1561-1630) diseñó las primeras tablas logarítmicas decimales, las cuales fueron dadas a conocer en 1624 en su obra titulada "*Arithmetica logarithmica*" (logaritmos comunes), las cuales contienen tablas de logaritmos de 14 decimales para los números del 1 hasta 20.000 y 90.000 hasta 100.000⁹ (Briggs, 1976). Con estas tablas se podían realizar operaciones de aritmética y geometría y se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad. En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino también de astronomía.

Al ir un poco más al fondo de la historia de los logaritmos se encuentra que ellos estuvieron presentes en los trabajos realizados por los griegos en áreas de la matemática, la geometría y la astronomía. Es de esta manera como se llega a la primera noción de logaritmo en el trabajo de Arquímedes y sus conocidas comparaciones entre sucesiones algebraicas y geométricas. Para ilustrar un poco el significado del aporte de Arquímedes, se puede observar la figura 14 en la cual se encuentra una tabla con dos filas, en la primera fila están los diez primeros números de la sucesión aritmética y en la segunda fila se encuentran los diez primeros números de la sucesión geométrica. Arquímedes estableció una sorprendente relación entre estas dos sucesiones, mostrando que se podían utilizar para encontrar los

⁹Otra fuente de consulta sobre el trabajo de Briggs: Britannica, The Editors of Encyclopaedia. "Henry Briggs". Encyclopedia Britannica, disponible en: <https://www.britannica.com/biography/Henry-Briggs>.

resultados de las multiplicaciones de diferentes números, sólo teniendo esta organización de sucesiones.

Figura 14. Regla de Arquímedes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
			1	+	9	=	10		
1								9	10
2								512	1024
			2	x	512	=	1024		

Fuente: elaboración propia.

A continuación, se describe cómo funciona la regla de Arquímedes y para ello se consideran las dos siguientes situaciones:

Primera situación

∴ ¿Cuánto da la multiplicación entre 512×2 ? Para saber el resultado a partir de la tabla de la figura 15, bastaría con mirar a qué números corresponden cada uno de los factores, o sea, 512 y 2, en la sucesión de aritmética, o sea la primera fila de la tabla, se puede observar que al 2, le corresponde el número 1, mientras que al 512 le corresponde el número 9, posteriormente se realiza la siguiente operación $1 + 9 = 10$. De debajo del número 10 se encuentra 1024 que corresponde al resultado de la multiplicación planteada $512 \times 2 = 1024$.

Segunda situación

∴ ¿Cuánto da la división entre $1024 \div 8$? Para saber el resultado se toma los números que le corresponden en la sucesión aritmética tanto al divisor como al dividendo, de esta manera a 1024 le corresponde el número 10, y al 8, le corresponde el número 3, y ahora al efectuar la sustracción de estos números se llega a que: $10 - 3 = 7$. El número 7 se encuentra en la primera fila de la progresión aritmética y el número que se encuentra en la segunda fila debajo de 7 es el 128, que es el resultado de dividir 1024 entre 8.

Los resultados de estos dos casos muestran una de las potencialidades que tiene trabajar con logaritmos en operaciones de multiplicación y división. La regla de Arquímedes revela una relación fundamental entre las operaciones de suma – multiplicación y resta – división que a su vez explica de donde se establecen las propiedades de los logaritmos.

Una de las razones por las cuales se describe la regla de Arquímedes es porque ella sirve de ejemplo para mostrar cómo la suma de dos números de la sucesión aritmética da como resultado el producto de dos números de la sucesión geométrica, que al ser puesta en el contexto de la metodología diseñada por el Grupo Insight no podría ser aplicada para establecer el número total de atractores.

Esto último puede llevar a pensar al lector lo siguiente: si es el conteo de cuadros es uno de los elementos matemáticos y geométricos que fundamenta la metodología desarrollada por el grupo Insight, qué sentido tiene mencionar el método de Box Counting y reconocer la importancia de los logaritmos en la historia. La metodología aquí descrita no puede prescindir del método de Box Counting por las siguientes razones:

1. El método de Box Counting fue creado bajo la idea de medir estructuras geométricas irregulares, entonces hay que recordar que el atractor cardiaco representa un sistema dinámico irregular que se encuentra dentro de las estructuras fractales a las cuales se les puede aplicar este método.
2. La geometría fractal cuenta con varios métodos a partir de los cuales es posible caracterizar las diferentes estructuras fractales presentes en la naturaleza, el método de Box Counting es uno de ellos.
3. El método de Box Counting se estructura a partir de los logaritmos y las reglas de potencia, si no se reconoce sus implicaciones matemáticas y geométricas muy difícilmente se hubiera podido aplicar este método en los atractores cardiacos.

3.7. Espacio generalizado de Box Counting para los atractores cardiacos caóticos

Tabla 9. Generalización de la cantidad de cuadros pequeños (Kp) y grandes (Kg), así como el número de parejas que se pueden establecer.

Kg	Mínimo Kp	Máximo Kg	No. Parejas
j	j	$4j$	$3j + 1$

La tabla 9 es una síntesis de la tabla 7 en la cual se quiere resaltar los términos que permitieron llegar a la ecuación 8, también para llegar al paso final de la descripción de esta metodología desarrollada por el Grupo Insight. La parte final de la metodología consiste en saber si existe o no una ley o principio que se cumpla. Para lograr esta descripción se toma como referente la definición de ley de Musschenbroek

"Llamamos a las leyes fenómenos constantes que, siempre que los cuerpos se colocan en circunstancias similares, siempre ocurren de la misma manera" (Ducheyne & Present, 2017, p. 645).

A continuación, se realiza una analogía para poner esta definición en el contexto de la metodología que se está describiendo en este capítulo la cual quedaría de la siguiente manera:

- ∴ Los cuerpos serían los atractores cardiacos caóticos.*
- ∴ Las circunstancias similares representan a los atractores generados en un espacio de fases y caracterizados en el espacio de Box Counting.*
- ∴ La parte de la definición de ley que dice fenómenos constantes y que siempre ocurren de la misma manera se describen a continuación.*

Si a j se le dan los siguientes valores: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y luego se sustituyen los términos generales de la tabla 9 se llega a los valores que se encuentran en la tabla 10:

Tabla 10. Número de posibles parejas que se pueden establecer si se tiene 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 cuadros grandes.

Kg	Mínimo Kp	Máximo Kp	No Parejas
16	16	64	49
17	17	68	52
18	18	72	55
19	19	76	58
20	20	80	61
21	21	84	64
22	22	88	67
23	23	92	70

En la primera fila de la tabla 10 se tiene que el número mínimo de Kp es igual a 16 y el máximo de Kg es igual a 64, el número de parejas posibles es de 49. A continuación, se va a

detallar más la información de la primera fila de la tabla 10 en la tabla 11, en donde se puede observar que en la primera columna se encuentra el número total de combinaciones que en este caso son 49 que corresponden al número de parejas posibles las cuales fueron ubicadas en la segunda columna. En la tercera y cuarta columna se ubican por separado los valores de las parejas que aparecen en la columna dos, para luego calcular la proporción entre Kp/Kg y finalmente hallar el valor de la dimensión fractal de cada pareja el cual se encuentra en la columna seis.

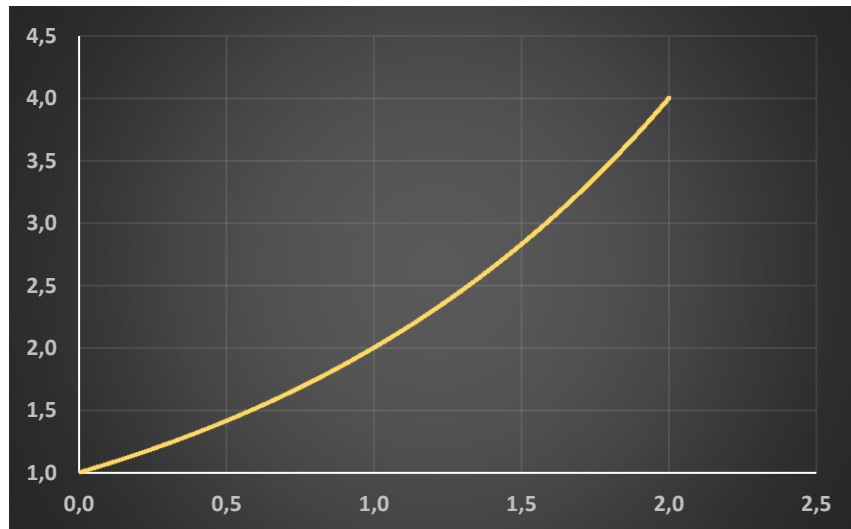
Tabla 11. Número de combinaciones, parejas, cuadros ocupados al superponer sobre el atractor una rejilla con 16 cuadros grandes (Kg) y el número mínimo y máximo de cuadros pequeños (Kp), la proporción entre Kp/Kg y su dimensión fractal (D).

Combinaciones	Parejas	Kg	Kp	Kp/Kg	D
1	(16,16)	16	16	1	0
2	(16,17)	16	17	1,06	0,087
3	(16,18)	16	18	1,13	0,170
4	(16,19)	16	19	1,19	0,248
5	(16,20)	16	20	1,25	0,322
6	(16,21)	16	21	1,31	0,392
7	(16,22)	16	22	1,38	0,459
8	(16,23)	16	23	1,44	0,524
9	(16,24)	16	24	1,50	0,585
10	(16,25)	16	25	1,56	0,644
11	(16,26)	16	26	1,63	0,700
12	(16,27)	16	27	1,69	0,755
13	(16,28)	16	28	1,75	0,807
14	(16,29)	16	29	1,81	0,858
15	(16,30)	16	30	1,88	0,907
16	(16,31)	16	31	1,94	0,954
17	(16,32)	16	32	2,00	1,000
18	(16,33)	16	33	2,06	1,044
19	(16,34)	16	34	2,13	1,087
20	(16,35)	16	35	2,19	1,129
21	(16,36)	16	36	2,25	1,170
22	(16,37)	16	37	2,31	1,209
23	(16,38)	16	38	2,38	1,248
24	(16,39)	16	39	2,44	1,285
25	(16,40)	16	40	2,50	1,322
26	(16,41)	16	41	2,56	1,358
27	(16,42)	16	42	2,63	1,392
28	(16,43)	16	43	2,69	1,426
29	(16,44)	16	44	2,75	1,459
30	(16,45)	16	45	2,81	1,492

31	(16,46)	16	46	2,88	1,524
32	(16,47)	16	47	2,94	1,555
33	(16,48)	16	48	3,00	1,585
34	(16,49)	16	49	3,06	1,615
35	(16,50)	16	50	3,13	1,644
36	(16,51)	16	51	3,19	1,672
37	(16,52)	16	52	3,25	1,700
38	(16,53)	16	53	3,31	1,728
39	(16,54)	16	54	3,38	1,755
40	(16,55)	16	55	3,44	1,781
41	(16,56)	16	56	3,50	1,807
42	(16,57)	16	57	3,56	1,833
43	(16,58)	16	58	3,63	1,858
44	(16,59)	16	59	3,69	1,883
45	(16,60)	16	60	3,75	1,907
46	(16,61)	16	61	3,81	1,931
47	(16,62)	16	62	3,88	1,954
48	(16,63)	16	63	3,94	1,977
49	(16,64)	16	64	4,00	2,000

La figura 15 corresponde a la representación gráfica de los valores que aparecen en la columna cinco y seis de la tabla 11, en la cual muestra que hay un comportamiento exponencial intrínseco que se establece a partir de los valores de la columna cinco y seis. Al proceder de la misma manera a como se hizo con la primera fila con las demás filas de la tabla 11, se llega al mismo comportamiento exponencial. A modo de confirmar la afirmación anterior se realizó un anexo 1 en el cual se encuentran los resultados de la fila dos de la tabla 10.

Figura 15. Comportamiento de la proporción entre pequeños (K_p) y grandes (K_g) y su dimensión fractal (D).



Fuente: Elaboración propia.

La exponencial hallada se caracteriza porque va desde 0 hasta 2 en el *eje x* y de 1 hasta 4 en el *eje y*. Esta gráfica exponencial muestra que existe un orden matemático para todas las parejas que se puedan formar a partir de los términos generales de la tabla 7. Ahora queda por reflexionar si la exponencial tiene una relación a un fenómeno constante y que siempre ocurren de la misma, entonces que sería lo constante de la metodología desarrollada por el Grupo Insight el comportamiento exponencial que se establece a partir de la proporción entre K_p/K_g y los valores de la dimensión fractal. Esto último revela que el espacio de Box Counting ha sido generalizado para los atractores cardiacos mediante el establecimiento de un comportamiento exponencial.

3.8. Síntesis del capítulo

La investigación comienza documentando que existe un problema en la interpretación del electrocardiograma ya sea este de tres minutos o mayor a 24 horas. Para encontrar una solución al problema los fisiólogos pueden centrar sus estudios en la forma que tiene el trazado, o bien estudian la variación de los valores de la frecuencia cardiaca. Para ambos escenarios se han desarrollado metodologías y/o técnicas encaminadas a proporcionar elementos de conocimiento necesarios para interpretar el trazado del electrocardiograma. Por ejemplo, las metodologías que se encuentran en el libro “*La alegría de interpretar el electrocardiograma*” (López, 2006), se centran en el reconocimiento de las diferentes formas que se pueden presentar en un trazado, para luego indicar cuál sería la metodología más apropiada para interpretar dicha forma. En este orden de ideas un estudiante debe aprender a establecer la mejor asociación entre la forma del trazado y su interpretación.

Dadas las condiciones que anteceden esta investigación se van a resaltar cuatro momentos claves de este capítulo: el primero reconoce las variaciones en el comportamiento de la frecuencia cardiaca que son calculadas a partir del cardiograma y electrocardiograma como las mismas. Se puede llegar a esta comprensión cuando se entiende que los movimientos mecánicos del corazón son una consecuencia de su actividad eléctrica. Otro aspecto por destacar de este momento es la influencia de la mecánica clásica en el estudio y explicación del comportamiento del corazón, debido a que para la época en que se realizaron estos dos

dispositivos Jules Henri Poincaré (1854-1912) se encontraba trabajando en los formalismos físicos, matemáticos y teóricos establecidos para los fenómenos que se asociaban a las ideas abstractas de los sistemas dinámicos que él y otras ciencias estaban estudiando (Aubin, 2002; Núñez, 2013), lo cual imposibilitaba estudiar la variabilidad de la frecuencia cardíaca desde el contexto de los sistemas dinámicos.

En el segundo momento se encuentra la descripción de la experiencia de Newton para explicar la dispersión de la luz blanca mediante un razonamiento matemático, la cual sirve como referente epistemológico de lo que significa interpretar un fenómeno de la naturaleza en el contexto de las matemáticas. Esta experiencia es análoga a los procesos por los cuales ha pasado la metodología del Grupo Insight para argumentar que la variación de la frecuencia cardíaca se puede interpretar en el contexto de los sistemas dinámicos. Es de esta manera que este capítulo cobra significado en vista de que se está detallando el fundamento físico, matemático y epistemológico de la metodología, el cual no se puede observar a simple vista en la publicación de un artículo en una revista de cardiología.

Cabe señalar que la metodología puesta en el ámbito académico es un proceso totalmente diferente, debido a todos los sistemas de relaciones que se desencadenan entre el docente y el estudiante cuando la metodología es llevada al aula. Por eso se hizo necesario hacer una descripción rigurosa de los referentes epistemológicos, teóricos y disciplinares que se encuentran implícitos en la metodología, para lograr que ésta no sea enseñada a partir de los valores límites que caracterizan los conjuntos A, B y C, como una manera de evitar en la enseñanza del método de Box Counting.

Lo anterior nos lleva al tercer momento, en el cual se sintetiza la aplicación del método de Box Counting, el cual fue explicado con mayor detalle para el trabajo de la especialización (Soracipa, 2021). De este método se resalta la acción de contar los espacios ocupados por los atractores en el espacio de Box Counting, como una manera que permite establecer diferencias entre estados dinámicos cardíacos normales y agudos. En este orden de ideas, la acción de contar pasa a otro nivel de comprensión, cuando contar el número de posibilidades de que un atractor ocupe un espacio en un determinado número de rejillas grandes, lleva a establecer el total de atractores que representan las características establecidas para los

conjuntos A, B y C. Son dos procesos de conteo de cuadros que llevan el método de Box Counting a otro nivel de entendimiento.

En relación con este último, se desencadena el cuarto momento en el cual se toma como referente la manera en que los matemáticos como du Sautoy exponen los procesos de razonamiento de los matemáticos que marcaron un antes y después en el estudio de las ciencias. Lo anterior se puede ver en cómo se estudia la variación de la frecuencia cardíaca en la cardiología y como esta misma variación es interpretada en el contexto de los sistemas dinámicos, donde se demuestra que no se pueden aplicar los mismos principios teóricos con los cuales se estableció el electrocardiograma para interpretar la señal eléctrica del corazón.

Capítulo 4

Seminario: interpretación del electrocardiograma en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal

El seminario se configura a partir de una experiencia docente de ocho años trabajando con estudiantes de pregrado de la facultad de Medicina y Ciencias de la Salud de la Universidad Militar Nueva Granada, la cual se encuentra ubicada en la Calle 49, Tv. 3C #49-00 en la Ciudad de Bogotá. Dentro del plan de estudio de la carrera de medicina se establece que a partir de sexto a décimo semestre los estudiantes deben inscribirse en una de las líneas de profundización que se ofertan cada semestre, para enfocarse en alguna de las especialidades clínicas y también orientar procesos de investigación con los estudiantes. La experiencia como docente se adquiere en la línea de profundización “Teorías Físicas y Matemáticas Aplicadas la Medicina”.

En este orden de ideas, la línea de profundización debía generar espacios en los cuales se privilegie los procesos de investigación con los estudiantes. Para ello se debía comenzar con una exposición del tema del proyecto de investigación aprobado por la universidad, los objetivos y los resultados que se esperaba alcanzar al aplicar una metodología diseñada por el grupo Insight. A continuación, se describe mediante un ejemplo la manera como procede el grupo Insight en una investigación en la que se evalúa la capacidad del método matemático para diferenciar casos normales de pacientes con arritmias cardíacas:

1. Se selecciona como población de estudio un grupo de holter de casos con arritmias, diagnosticados por un experto desde los parámetros convencionales, y se toma como grupo control estudios Holter normales.
2. Posteriormente se aplica la metodología descrita en el capítulo tres a cada uno de los estudios Holter.
3. Se toma como Patrón de Oro o Gold Standard el diagnóstico clínico convencional establecido por el especialista. El Patrón de Oro es aquél que se toma como verdadero, al ser el que ha sido aceptado por mayor consenso por la comunidad científica.
4. Se establece el diagnóstico matemático a partir de los valores límite de los conjuntos de normalidad y enfermedad aguda.

5. Se comparan los diagnósticos matemáticos con los establecidos como patrón de Oro. Si ambos coinciden esto evidencia la eficacia del método matemático para diagnosticar acertadamente.
6. Los estudiantes se comenzaban a involucrar en la investigación a partir del punto dos, debido a que era necesario contrastar los resultados alcanzados al aplicar la metodología descrita en el capítulo tres con los que habían encontrado en la revisión de la literatura científica que trataba sobre este tema.

A partir de este último punto se comenzaba a delegar una serie de actividades que debían desarrollar los estudiantes, entre ellas la elaboración de artículos y un resumen para participar en algún encuentro de semilleros y/o congreso nacional. Dentro de este proceso, se podía observar que el estudiante se podía desenvolver muy bien armando una narrativa en la parte clínica a partir de los resultados, pero no en la parte física y matemática en la cual se desarrolló la metodología. Esto último se observaba, cuando el estudiante dejaba en el artículo la metodología tal y como ya había sido publicada en otra revista, o sin percarse de que debía cambiarse la población de estudio u otros detalles. Es decir, en el momento de elaborar el artículo el estudiante trabajaba bien el resumen, la introducción, la discusión y la bibliografía, pero no la metodología.

Debido a las medidas de confinamiento adoptadas en el 2020 por la pandemia de COVID-19, la facultad de medicina optó por llevar a cabo encuentros remotos con los estudiantes. Esta medida implicó hacer uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones como son los encuentros por Google Meet, Skype o Zoom. Adicionalmente, durante la pandemia se dieron otros cambios en los procesos de investigación que normalmente se llevaban a cabo en las universidades, por ejemplo, había proyectos que requerían el contacto con las personas y estos fueron los primeros que comenzaron a congelarse y otros se cancelaron para destinar el recurso económico en estudios sobre COVID. Como consecuencia de esto se comenzaron a cambiar las prioridades de la facultad de medicina en cuanto a los procesos de investigación, pues ya no apremiaba mandar a publicar artículos y presentar los resultados de las investigaciones en congresos o eventos científicos.

Este cambio de prioridades por parte de la facultad de medicina permitió que se le diera más relevancia a la enseñanza de las metodologías diseñadas por el grupo Insight. Es de esta

manera como la autora del presente trabajo de investigación comenzó a elaborar una serie de estrategias para enseñar por fases la metodología descrita en el capítulo tres para posteriormente estructurar el seminario. Cabe considerar que la configuración del seminario comienza a tener un fundamento pedagógico a partir del proceso de sistematización de las actividades llevadas a cabo por los estudiantes de pregrado de la facultad de medicina durante el 2021.

En el seminario se privilegia la dialéctica sujeto-objeto en cuanto a que permite trasladar las miradas reduccionistas y mecanicistas desde las cuales se considera la naturaleza eléctrica del corazón y los principios físicos, matemáticos y geométricos de la electricidad como hechos aislados hacia una mirada en la que adquieran sentido nociones como la relación, la emergencia y los sistemas dinámicos. Para lograr una nueva mirada de la naturaleza eléctrica del corazón fue necesario esclarecer las condiciones que hicieron posible su emergencia, razón por la cual se realizó una reflexión de las narrativas que hay en la elaboración del cardiógrafo con el cual se realizaron registros de los efectos mecánicos de la electricidad del corazón y con el electrocardiógrafo se evidenció su existencia. Este esclarecimiento no fue una tarea fácil de llevar a cabo en vista de que las narrativas que se encuentran son elaboradas desde un lenguaje propio de la medicina.

Desde la experiencia como docente de física es posible afirmar que una nueva mirada se puede proponer en la medida que se cuestionen las miradas simplistas que hacen de la naturaleza eléctrica del corazón algo obvio en las relaciones sujeto-electrocardiograma como son entendidas desde la cardiología. A continuación, se describe la estructura del seminario en el cual se plantea como objetivo general introducir al estudiante de pregrado de medicina a interpretar el electrocardiograma continuo o Holter en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal. La tabla 1 es una descripción general del seminario y su página web.

Tabla 1. Características generales del seminario

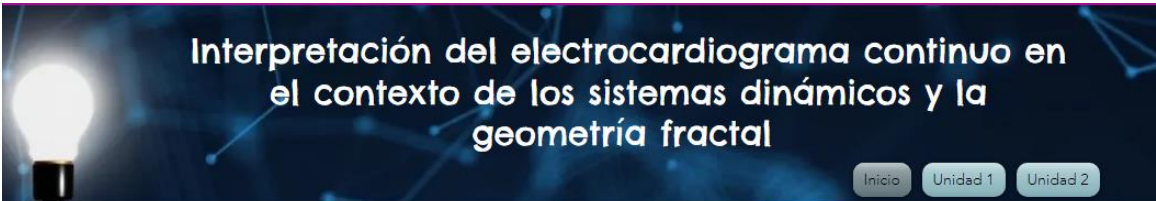


Número de sesiones		Intensidad horaria	2 horas
Enlace de la página Web	https://mysoracipam.wixsite.com/formaci-n-en-ecg		

<p style="text-align: center;">Características generales de la página Web del seminario</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El seminario se encuentra estructurado para que sea llevado a cabo por el docente de manera presencial o mediante conexión remota. • Para ambos escenarios el docente contará con una página web en la cual se organizaron los temas a tratar por sesiones en dos unidades. • Cada sesión se organiza de tal manera que antes de comenzar se abra un espacio para socializar con los estudiantes la actividad propuesta en cada sesión para dar una retroalimentación a las actividades y orientar la investigación. • La página web consiste en tres entornos a los cuales se puede acceder cuando se va a la parte inferior de la introducción de la página en donde se encuentra: la agenda del curso, el Syllabus y la evaluación. • La página web se convierte en un recurso académico para el docente y el estudiante pues cumple la función de organizar las temáticas, las actividades y sus entregas. También, se vuelve un entorno al cual el estudiante puede acceder en los momentos que considere apropiados.
<p style="text-align: center;">Enfoque de enseñanza</p>	<p>Las actividades propuestas en el seminario se enmarcan en algunos aspectos del enfoque de la enseñanza mediante el conflicto cognitivo e investigación dirigida. Del primer enfoque se resalta el cambio conceptual entendido como una sustitución de una teoría por otra que puede ser más sólida, es decir que sean más próximas al conocimiento científico actual. El segundo enfoque complementa al primero en cuanto a que todo cambio conceptual requiere de una serie de procesos que realizan profundos cambios en la mente de los estudiantes mediante la creación de escenarios que los sitúen en el contexto en el que se desarrollaron los cambios conceptuales, por ejemplo, el momento en el cual se privilegió estudiar el latido del corazón desde la mirada de la electricidad y no desde una mirada mecánica.</p>
<p style="text-align: center;">Propósito de formación</p>	<p>Que el estudiante profundice, integre y generalice los contenidos del seminario, para abordar la resolución de un problema mediante el planteamiento de una ruta de investigación en la cual haga uso de métodos propios de la rama del saber y de la investigación científica, y también garantice el ordenamiento lógico de los</p>

	<p>conocimientos y las habilidades que va a ir adquiriendo a medida se desarrollen los temas y actividades propuestas en el seminario.</p>
<p>Estrategia de aprendizaje</p>	<p>El abordaje histórico del electrocardiograma que se plantea en el seminario permitirá al estudiante reconocer que el problema sujeto-electrocardiograma tiene un contexto histórico y por ende unas narrativas propias las cuales permiten desentrañar formalismos teóricos establecidos desde la física, la matemática y la química. Todo lo anterior llevará al estudiante a cuestionarse y reflexionar por este problema de conocimiento que se suele pasar por alto por la confianza que se tiene en el progreso, es decir por la confianza que hay en el diseño de un dispositivo más sofisticado que disminuirá los errores previos.</p>
<p>Recursos digitales</p>	<p>La página Web del seminario cuenta con unos recursos digitales que al ser vistos en conjunto responden a las transformaciones que ha dejado la educación virtual. Dentro de los recursos digitales a resaltar de la página Web se encuentra el ambiente virtual de aprendizaje (AVA) que ha sido distribuido de la siguiente manera:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Introducción • Preliminares • Unidad uno • Unidad dos • Entorno de evaluación <p>También, cuenta con un objeto virtual de información (OVI) que hace referencia a unos videos cortos que informan, en alguno de ellos se dan detalles de la actividad y temática a desarrollar por parte del estudiante. El OVI se encuentra distribuido de la siguiente manera:</p> <p>Preliminares OVI (1): ¿Cómo razona un físico el planteamiento de un problema?</p> <p>Unidad 1: sesión uno</p> <p>OVI (1): principio de independencia del movimiento horizontal y vertical.</p>

	<p>Unidad 1: sesión dos</p> <p>OVI (1) y (2): Hacen parte del video original de St Mary’s Scholl. En el primero se muestra la técnica de registro de la señal eléctrica del corazón empleada en el segundo un electrocardiógrafo diseñado a comienzo del siglo XX.</p> <p>Unidad dos: sesión uno</p> <p>OVI (1): La paradoja de la costa que rompe la realidad. OVI (2): Auto – similitud OVI (3): La curva de Koch OVI (4): Sistemas dinámicos</p>
--	--

4.1. Descripción de la página Web del seminario

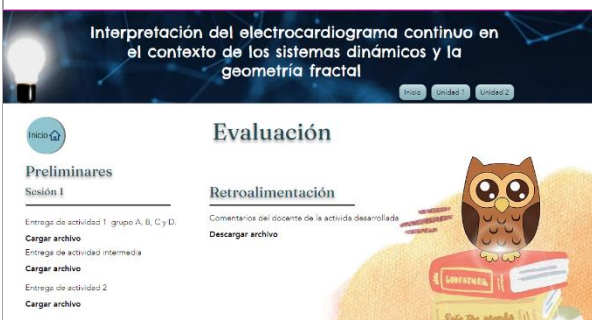
	
<p>En la primera página de la página web se encuentra la introducción del seminario, en la parte superior el menú el cual consta de un inicio, unidad uno y dos.</p>	
	<p>Al dar clic en inicio se despliega la página de preliminares.</p>
	<p>Al dar clic en la unidad uno y dos se puede desplegar el número de sesiones a desarrollar por cada unidad.</p>



En la parte inferior de la primera página se encuentran tres entornos que son los siguientes: la agenda del curso, el Syllabus y la evaluación.




Al dar clic en la agenda del seminario se encuentra un archivo pdf el cual el estudiante puede consultar y descargar.




El entorno de evaluación es un espacio que permite al estudiante cargar los archivos y descargar la retroalimentación que ha realizado el docente de la actividad propuesta por cada sesión.

4.1.1. Preliminares



Seminario alemán



Def. La palabra seminario proviene de *siminis* que significa semilla.

Un seminario alemán también conocido como seminario investigativo, surge en los institutos de filología clásica del siglo XVIII. A comienzos de la era moderna en cuatro instituciones: la cátedra, el colegio, el seminario y la sociedad. Primero llenaron y luego ampliaron el espacio social e intelectual dejando un vacío en las prácticas de enseñanza de las universidades medievales en la Alemania. Es decir, hubo una reconstrucción de las instituciones académicas medievales y modernas de cuya síntesis surgió el seminario de investigación de la era moderna.

Cabe señalar que si los individuos crean y son creados por instituciones sociales, entonces debemos preguntarnos *¿Qué tipo de persona produce y es producido por las instituciones de investigación científica?* En otras palabras: *¿Quién o qué es el investigador?*

Un seminario alemán también conocido como seminario investigativo tiene su origen en los institutos de filología clásica en la Alemania del siglo XVIII. Es un espacio de encuentro de una o varias ciencias encaminadas a fomentar los procesos de investigación. En el seminario hay un moderador quien es el encargado de introducir en cada una de las sesiones los temas que se relacionan con el problema a investigar. El moderador debe cumplir con las siguientes condiciones:

- ∴ Conocer las temáticas a desarrollar en cada sesión, también identificar que la relación sujeto-electrocardiograma puede ser considerado un problema de conocimiento y las soluciones que se han propuesto como se verá más adelante desde el contexto de la medicina y la propuesta en el capítulo tres.
- ∴ El seminario al ser interdisciplinar requiere que se tenga conocimiento sobre las técnicas o metodologías de interpretación del electrocardiograma. Para estos casos se recomienda que consulte los libros básicos de electrofisiología, los trabajos publicados en las revistas especializadas y que tratan de este tema en particular.
- ∴ Una estrategia a la cual puede recurrir el moderador para fortalecer la indagación del punto anterior es asignar a dos estudiantes de medicina este tema para que lo expongan en esta sesión preliminar.
- ∴ Es importante que el moderador lea el capítulo dos del primer trabajo de investigación llevado a cabo por la autora de este trabajo (Soracipa, 2021), pues en él se describe una de las metodologías utilizadas por la clínica para interpretar el trazado de un electrocardiograma.

Si bien el seminario trata un tema particular de la cardiología, dado que la solución es propuesta desde un contexto físico, matemático y geométrico, permite la participación de estudiantes de diferentes ciencias en calidad de receptores. El seminario está enfocado a que los asistentes sean sujetos activos y propositivos, razón por la cual el moderador debe estar muy al tanto de las reflexiones de los estudiantes, para lograr direccionar esas ideas al reconocimiento del problema.

El moderador formula la siguiente pregunta:

¿Qué es un electrocardiograma?

Si la pregunta anterior es realizada a un estudiante de medicina, seguro dará una explicación sin necesidad de consultar una fuente de conocimiento, como por ejemplo en un diccionario o libro de cardiología. Los sujetos que no saben la definición pueden optar por consultar libros o digitar la pregunta en los motores de búsqueda.

La actividad se realiza en dos fases, la primera consiste en reconocer cuál es el problema y plantear una solución a la siguiente situación.

Se realizó un estudio ciego con 52 estudiantes a los cuales se le entregaron diez electrocardiogramas del departamento en medicina interna (MI), es decir se entregaron a 52 estudiantes el trazado de diez electrocardiogramas sin su respectiva evaluación clínica. La investigación parte del siguiente supuesto: los electrocardiogramas al ser representativos de las condiciones clínicas más comunes del departamento de MI deben poder ser correctamente evaluados clínicamente por los estudiantes de primer año. Ahora bien, **el resultado del estudio mostró que sólo la mitad de los electrocardiogramas se interpretaron correctamente.** En cuanto al nivel de certeza promedio registrado por todos los participantes fue de 18.5 de un máximo de 40.



Si es la primera vez que se imparte seminario en una institución educativa el moderador debe enviar los artículos de Eslava y colaboradores (2009) y Catai y colaboradores (2020) al correo de todos los estudiantes indicando que debe ser leído para la sesión preliminar. El moderador en la sesión preliminar debe dedicar un tiempo prudente para abordar el primer artículo con los estudiantes, para saber qué entendieron de la lectura e identificar si el estudiante tiene claro el problema. Si lo anterior sucede en la sesión preliminar el estudiante entra a ser el líder del grupo y se continúa con el segundo artículo. De acuerdo con las discusiones que se den con los estudiantes se les debe indicar que deben descargar la primera actividad en la cual hay unas preguntas que deben responder de manera grupal y luego subir el documento en el entorno de evaluación.

Criterios que se deben tener en cuenta para la selección del material de consulta por parte de los estudiantes:

- Eslava y colaboradores (2009) realizan su estudio con médicos generales, que es el título que obtiene el estudiante de pregrado de la facultad de medicina de la universidad Militar Nueva Granada. Entonces, si hay una experiencia documentada que les muestre qué esperan de ellos los médicos del departamento de Medicina

Interna, podrán cuestionarse por los conocimientos que tienen hasta el momento sobre el electrocardiograma.

- Catai y colaboradores (2020), realizan una serie de recomendaciones sobre el uso de métodos de análisis de la variabilidad de la frecuencia cardíaca desarrollados en el contexto de la cardiología, así como sus aplicaciones en diferentes situaciones fisiológicas. Es un buen material para contextualizar a todos los participantes del seminario, en especial aquellos que no conozcan el tema.

Actividad uno

Entorno de evaluación



Primera parte

Del trabajo de Eslava y colaboradores (2009), identifique cual es el objetivo o propósito de la investigación y si existen más supuestos en el estudio. A continuación, encontrará una serie de cuestionamientos encaminados a que profundice un poco más en la lectura propuesta y al final identifique cual sería el problema central de la investigación.

- ¿Se cumplió con el objetivo de la investigación?
- De los resultados del estudio que se puede concluir.
- ¿Qué tipo de investigación fue la que realizó Eslava y colaboradores?



Preliminares

Sesión 1

Entrega de actividad 1 grupo A, B, C y D.

[Cargar archivo](#)

Entrega de actividad intermedia

[Cargar archivo](#)

Entrega de actividad 2

[Cargar archivo](#)

Retroalimentación

Sesión 1

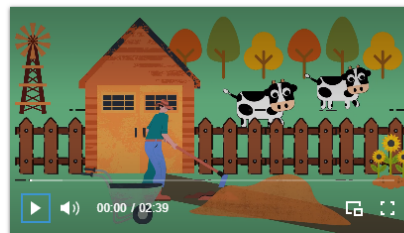
Comentarios del docente de la actividad desarrollada

[Descargar archivo](#)

¿Cómo razona un físico el planteamiento de un problema?

El profesor de física Lawrence M. Krauss (1996), en su libro *Miedo a la física: una guía para perplejos*, describe en el primer capítulo la forma de proceder de un físico ante la solución de un problema (Kraus, 1996). El capítulo del libro se titula "allí donde hay luz" el cual comienza con un cuento "que puede ser considerado un chiste" de una granja que presentaba problemas en la producción de leche por lo cual consideraron necesario consultar a un físico, ingeniero y psicólogo, para encontrar una solución al problema.

En el video se encuentra una narración de los aspectos generales de la solución que plantea el físico, el ingeniero y psicólogo. La descripción completa de la solución que plantea el físico la encuentra dando clic en el botón Descargar.



[Descargar](#)

A continuación, el moderador pasa a la actividad intermedia de la sesión, la cual consiste en leer el problema que se le propone al ingeniero, al psicólogo y al físico sobre una granja que presentaba problemas en la producción de leche con el fin que cada uno de ellos proponga una solución al problema. La solución para debatir y profundizar en el seminario es la solución que propone el físico. Para profundizar en esta solución no es

suficiente que el estudiante lea el primer capítulo de este libro, razón por la cual se hizo un escrito en el cual se amplió la explicación de la solución propuesta el físico. La actividad consiste básicamente en leer este documento y posteriormente el estudiante debe elaborar un escrito en el cual se comparen las ideas que tenía antes y después de la lectura, y las que emergieron después de leer el escrito que detalla la manera en que piensa o razona un físico.

Esta actividad se propone debido a que en el seminario se busca plantear una solución del problema que hay al interpretar el electrocardiograma a partir de los valores de la frecuencia cardiaca en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal.

Actividad intermedia (Individual)



Después de realizar la lectura de la solución que propone el físico al paso a seguir es que elabore un escrito en el cual se narre que ideas tenía sobre la física antes de leer el documento que describe la manera como puede razonar un físico ante el planteamiento de un problema y después de leerlo.

Nota: el escrito se debe subir en el entorno de evaluación que se encuentra en la pestaña de inicio o dando clic [aquí](#).

Adicionalmente, se realizó un video corto como una manera de motivar al estudiante a la lectura de la actividad y también para recoger los aspectos claves de la solución.

Video



Actividad



Segunda actividad

La segunda actividad consiste en que cada grupo realice una lectura de los siguientes artículos y preparen una presentación para exponer a sus compañeros. Realicen una lista de los términos que les son completamente nuevos o no recuerdan su significado.

- Leer el siguiente artículo titulado: [Nueva metodología física y matemática de evaluación del Holter](#)
- Leer el siguiente artículo titulado: [Mathematical law of chaotic cardiac dynamics: Predictions for clinical application](#)

La actividad la realiza el grupo C y D

Nota: la presentación de la exposición y lista de palabras se debe subir en el entorno de evaluación que se encuentra en la pestaña de inicio o dando clic [aquí](#).



La segunda actividad de la sesión preliminar consiste en la lectura y posterior exposición de dos artículos en los cuales se plantea la interpretación del comportamiento de la variabilidad de la frecuencia cardíaca en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal. Esta parte de la actividad sólo la realizan dos grupos con el fin de:

- Analizar la manera en que los estudiantes se desenvuelven en la exposición, en particular en la manera como ellos explican la metodología y sus resultados.
- Posteriormente escuchar las dificultades que encontraron los expositores al leer el artículo.

Este último punto corresponde a la segunda parte de la actividad, la cual consiste en elaborar una lista de los conceptos cuyo significado desconozca. El objetivo es evitar que el estudiante en gran medida consulte su significado en los motores de búsqueda, pues la idea es que elabore la lista sin encontrar las definiciones. La experiencia que ha dejado la elaboración de esta lista por parte de los estudiantes es la de permitir hacer una comparación entre un antes y un después de que se desarrollan los temas del seminario. La comparación muestra que la mayoría de estos conceptos son aclarados durante el seminario.

Cabe señalar que el primero de los dos artículos propuestos en esta actividad corresponde al fundamento teórico de la investigación llevada a cabo por la autora del presente trabajo para optar la Especialización en Docencia para un Nivel Básico (Soracipa, 2021) y el segundo corresponde a la descripción de la metodología del capítulo tres. El primer artículo evidencia la posibilidad de interpretar la variabilidad de la frecuencia cardíaca generando para ello atractores cardíacos caóticos para luego medir su espacio ocupado con el método de Box Counting. En el segundo artículo, como se puede ver en el capítulo tres, se va más allá de demostrar la posibilidad de llevar la frecuencia cardíaca al contexto de los sistemas dinámicos, debido a que se propone que en el espacio de Box Counting como aquel que permite contar todos los posibles atractores cardíacos caóticos estableciendo para ello la siguiente ecuación: $N_A = (x - n + 1) \left[\frac{3(x-n+1)(x+n)}{2} + 1 \right]$

Se trata de una ecuación que cambia la manera de proceder de la cardiología, debido a que en ella se hace uso de metodologías estadísticas las cuales se establecen para analizar otro tipo de variables, mientras que esta ecuación tal y como se describió en el capítulo tres se deriva de la observación sistemática de los espacios ocupados por el atractor cardíaco caótico.

4.1.2. Unidad 1: Organización de los estudios que antecedieron a la creación del electrocardiograma

Inicio Unidad 1 Unidad 2

Organización de los estudios que antecedieron a la creación del electrocardiograma

En este seminario se privilegia la dialéctica sujeto-objeto en cuanto a que permite trasladar las miradas reduccionistas y mecanicistas desde las cuales se considera la **naturaleza eléctrica del corazón y su relación con los principios físicos y matemáticos de la electricidad** como hechos aislados hacia una mirada en la que adquieran sentido nociones como son: la relación, la emergencia y los sistemas dinámicos. Para lograr esta nueva mirada por parte del estudiante se hace necesario el esclarecimiento de las condiciones que hacen posible su emergencia, un estudio de los dispositivos que evidenciaron la existencia de la electricidad del corazón y el esclarecimiento de los mecanismos que la describen. Todo lo anterior es posible en la medida que se cuestionen las miradas simplistas que hacen de la naturaleza eléctrica del corazón algo obvio y se desvirtúen las relaciones sujeto-objeto como son entendidas desde la electrofisiología.

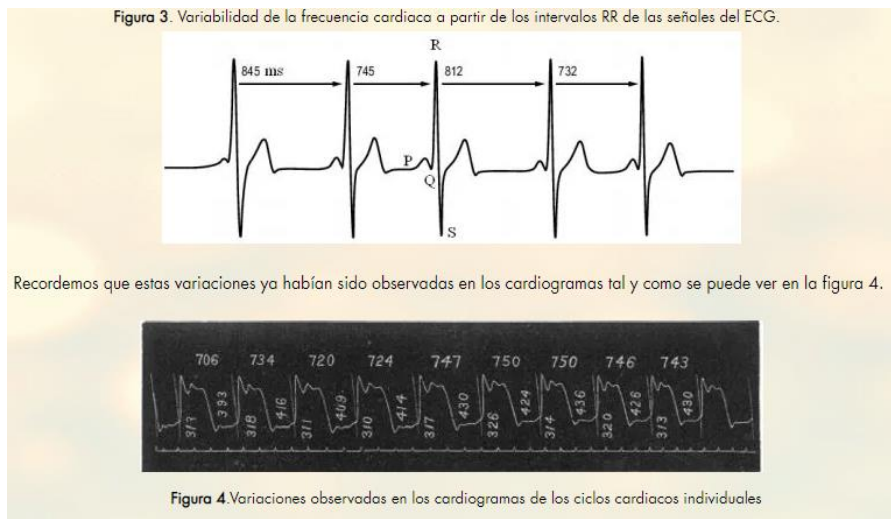
La unidad 1 se llevará a cabo en dos sesiones.

Primera sesión: estudio del latido del corazón desde una mirada mecanicista.

Segunda sesión: estudio del latido del corazón desde una mirada eléctrica.

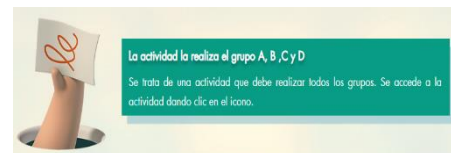
Se puede acceder a los contenidos de las unidades 1 y 2 bien sea por el menú o el enlace que lleva a cada una de las sesiones. La primera sesión se titula: “Estudio del latido del corazón desde una mirada mecanicista”, en la cual se discute la primera parte del estudio histórico que se realizó en el capítulo dos. Lo anterior quiere decir que este capítulo presenta al moderador un material de consulta en el cual puede seguir profundizando. La segunda sesión se titula: “Estudio del latido del corazón desde una mirada eléctrica” y corresponde a la segunda parte del capítulo dos. A continuación, se enuncian los temas adicionales en los cuales puede profundizar el moderador en la primera y segunda sesión.

Mecánica	Eléctrica
<ul style="list-style-type: none"> Concepto de fuerza – mecánica clásica Movimiento simple y compuesto. Movimiento armónico simple. Principio de independencia del movimiento horizontal y vertical. Mecánica de fluidos 	<ul style="list-style-type: none"> Electroestática Electrómetro Electricidad y magnetismo Galvanómetro



Las dos miradas de conocimiento que serán analizadas en estas dos sesiones van a converger en el análisis de la figura 3 y 4, que son claves para que se observe cómo la variabilidad de la frecuencia cardiaca ya se había encontrado en el cardiograma, lo cual desmiente que la variabilidad era una consecuencia del dispositivo que realiza la medida, en este caso del cardiógrafo diseñado por Marey. En esta parte de la sesión el moderador debe llamar la atención a la reflexión por parte de los estudiantes en cuanto a que la variabilidad en los valores de la frecuencia cardiaca no es una consecuencia del equipo o el dispositivo que realiza la medida tal y como se pensaba, entonces es posible considerar que sea un proceso natural en el comportamiento del corazón, lo cual implica interpretarlo desde otro sistema de referencia, lo cual lleva a movilizar todo el conocimiento elaborado a partir del comportamiento del corazón desde un sistema estático a un sistema dinámico.

La segunda sesión cuenta con una actividad que deben realizar todos los estudiantes, la cual tiene por finalidad que todos los participantes del seminario se familiaricen con una de las metodologías que ha establecido la cardiología para para calcular los valores de la frecuencia cardiaca a partir de los trazados de los electrocardiogramas.



En el archivo de PDF encontrará la lectura de una metodología que fue diseñada desde el contexto de la cardiología para calcular los valores de la frecuencia cardiaca a partir de un electrocardiograma de corta duración la cual se encuentra un documento en Word. Si ya conoce la metodología entonces puede pasar al siguiente nivel de la actividad la cual consiste en responder a las siguientes preguntas:

- ¿Es posible afirmar que el electrocardiograma cumple el principio de independencia del movimiento horizontal y vertical? Justifique su respuesta.
- ¿La frecuencia cardiaca se puede considerar una variable dependiente del tiempo? Justifique su respuesta.

Nota: las respuestas a estas preguntas deben quedar consignadas en un documento de Word el cual se debe entregar en el entorno de evaluación que se encuentra en la pestaña de inicio o dando clic [aquí](#).

Es importante resaltar que antes y desde de que fue diseñado el cardiógrafo, e incluso con el electrocardiógrafo, el cálculo de la frecuencia cardiaca permite estudiar la magnitud

de los cambios de los *ciclos cardiacos* a lo largo del tiempo. Sus unidades de medida se dan en latidos por minuto o pulsaciones por minuto. En este orden de ideas la actividad busca que todos los participantes del seminario tengan conocimiento de esta metodología.

Posteriormente los estudiantes deben responder a las siguientes preguntas:

¿Es posible afirmar que el electrocardiograma cumple el principio de independencia del movimiento horizontal y vertical? Justifique su respuesta.

¿La frecuencia cardiaca se puede considerar una variable dependiente del tiempo? Justifique su respuesta.

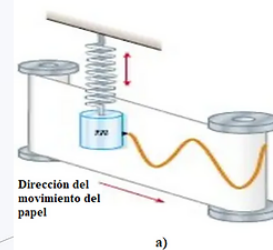


La respuesta a la primera pregunta es posible debido a que en la primera sesión se trató sobre el principio de independencia del movimiento horizontal y vertical tanto por parte del docente como mediante un video que se encuentra cuando se da clic en: *movimiento armónico simple*.

Esfígmógrafo y su relación con el movimiento compuesto

La figura 4 a) ilustra un sistema masa resorte que utiliza la física para modelizar la noción de *movimiento armónico simple*. El sistema consiste en una masa sujeta a un resorte a la cual se le imprime una fuerza que hace que el resorte se estire. Al soltar la masa, esta comienza a subir y bajar sobre una misma trayectoria, este efecto se denomina *oscilación o vibración*. Cabe señalar que la masa antes de imprimir dicha fuerza se encuentra en un *punto de equilibrio*, el que comience a oscilar sobre este punto se debe a que hay una fuerza restauradora la cual se encuentra en el resorte. La distancia entre la posición de equilibrio y la máxima alcanzada por la masa que oscila se denomina *amplitud* del movimiento. El tiempo que la masa tarda en efectuar una oscilación se denomina *periodo* y el número de oscilaciones se denomina *frecuencia* del movimiento.

Figura 4. Sistema masa resorte.



El estudio de este principio permite comprender a mayor profundidad la noción de marco de referencia geométrico y matemático a partir del cual se caracteriza un fenómeno de la naturaleza tal y como se describió en el capítulo dos. También, permite entender que el comportamiento de los valores de la frecuencia cardiaca puede ser llevado a otro marco de referencia como es un espacio de fases, para caracterizar su comportamiento como si se tratase de un sistema dinámico que puede evolucionar en el tiempo a dos estados límites,


que en el contexto en que se desarrolló la metodología descrita en el capítulo tres se entienden como estado dinámico cardiaco normal y anormal.

4.1.3. Unidad 2: Matematización de la naturaleza

Matematización de la naturaleza

Los nuevos planteamientos matemáticos determinan en la mayoría de los casos avances paralelos en las demás ciencias. También, resulta cierto que los avances de las demás ciencias y los problemas que en ellas emergen son una fuente inagotable de inspiración para los matemáticos y los físicos.

El profesor de historia de la ciencia Eric Gray Forbes (1977) señala que hay tres etapas conceptuales que se debían alcanzar antes de que la matemática se considerara como una ciencia. La primera consiste en la especificación de la posición sobre una superficie con respecto a dos ejes, la segunda trata de la representación gráfica de la relación entre las ordenadas y las abscisas (variable dependiente e independiente), por último, el descubrimiento de la ley o ecuación algebraica, correspondiente a esa curva geométrica.



La unidad dos se desarrolla por fases; en la primera el moderador debe prepararse para hablar sobre las nuevas estructuras matemáticas y si tienen o no implícita la geometría con la cual se determinan en la mayoría de los casos avances paralelos en las demás ciencias. Lo contrario también resulta cierto, los avances de las demás ciencias y los problemas que en ellas emergen son una fuente inagotable de inspiración para los matemáticos y los físicos. Para desarrollar esta primera fase el moderador cuenta con la página web del seminario en la cual se encuentra material de consulta sobre:

- Geometría fractal
- Sistemas dinámicos

Nota: Para la geometría fractal es necesario que haga uso del material que se encuentra en la página web del seminario, debido a que es material que se elaboró para sintetizar los temas claves sobre la geometría fractal que fueron profundizados en el trabajo de grado presentado para la especialización (Soracipa, 2021). Para el caso de los sistemas dinámicos, puede hacer uso del material que permita contextualizar que son los sistemas dinámicos y sus aplicaciones en la física.

La geometría fractal

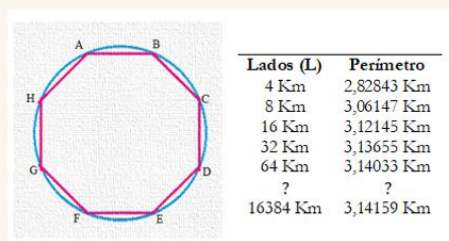
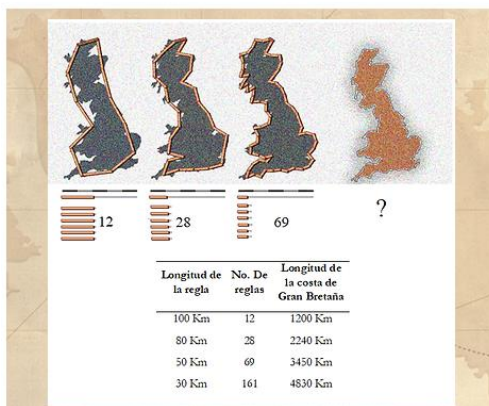
El origen de la geometría fractal, se remonta desde las dificultades que se presentaron al realizar una medida a escala de los contornos de estructuras irregulares. En el video se ilustra uno de los problemas de medida de estructuras irregulares como son las costas, el cual surgió cuando se estaban fijando los límites entre países. Desde esta dificultad emerge la paradoja de la costa descrita en el video que acompaña esta descripción.

Existe otra solución de esta paradoja que implicó replantear la manera de medir objetos irregulares utilizando para ello el cuadrado. Ésta se describe a continuación.



La primera sesión de la unidad dos trata sobre la geometría fractal. Inicialmente se muestra su origen mediante un video en el cual se narra la paradoja de la costa, que rompe la realidad, y una solución a esta paradoja. A continuación, se extraen elementos claves citados en el video para exponer las características de la paradoja.

Elementos de conocimientos claves del análisis para solucionar la paradoja de la costa...



Análisis de la paradoja

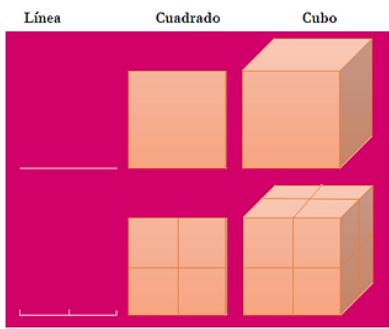
Ahora bien, ¿qué sucede si el propósito es medir la longitud de una circunferencia? Una de las maneras de hacer esta medida es aumentar el número de lados de un **polígono** regular inscrito, se encuentra que la longitud converge a un valor finito (ver figura 2).



Auto-similitud

En este video se desarrollará una idea intuitiva de auto-similitud a partir de análisis de las representaciones de una línea en un espacio de dos y tres dimensiones.

A continuación, se expone el método de Box Counting, para ello es necesario hablar de auto – similitud. Este concepto se profundizó previamente por la autora de la presente investigación y se puede consultar para que el moderador cuente con un contexto completo de la relación que existe



entre la auto - similitud y el método de Box Counting (Soracipa, 2021).

La idea intuitiva de auto – similitud parte del análisis de las particiones que se pueden realizar en una línea, donde la primera figura muestra que se llega a un cubo y en la otra se genera la curva que recibe el nombre de la curva de Koch. Se elaboró un video para facilitar el entendimiento de la curva de Koch.

Sistemas dinámicos

El origen de los sistemas dinámicos y sus leyes, se remonta desde el estudio independiente de los fenómenos terrestres y celestes. La unificación de estas leyes llevada a cabo posteriormente por el Isaac Newton, fue uno de los acontecimientos científicos más relevantes de toda la historia de la física. A medida que se avanzó en el estudio de estos sistemas fueron emergiendo comportamientos irregulares y aleatorios que llamaron la atención debido a que requerían plantear nuevos formalismos matemáticos y geométricos para caracterizar su comportamiento.



En cuanto a los sistemas dinámicos, un espacio de fase permite describir el comportamiento de cualquier sistema incluyendo los sistemas caóticos. Desde este espacio la imagen generada da un significado al comportamiento del sistema según su forma geométrica. Este último es justamente lo que se busca en el seminario: que los asistentes puedan encontrar un significado en los atractores cardiacos mediante sus espacios de ocupación. El moderador debe documentarse sobre las trayectorias que se pueden generar en un espacio fase para hablar de ellas o exponerlas durante la sesión, estas trayectorias son:

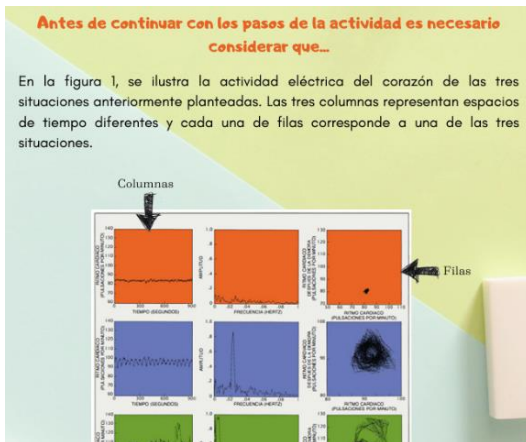
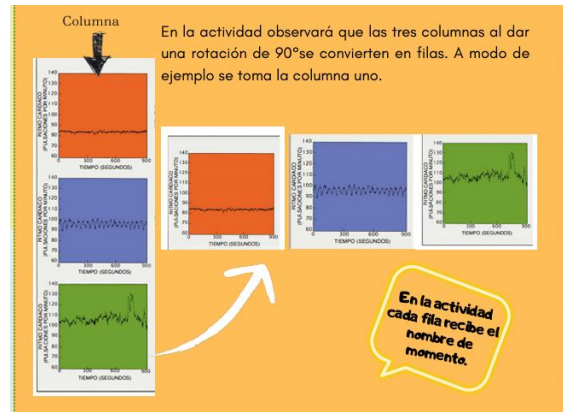
- La trayectoria puntual, como la trayectoria de un péndulo.
- La trayectoria cíclica, como puede ser el sistema solar.
- La trayectoria caótica y/o extraña, como puede ser el movimiento caótico de una partícula de polen en un vaso con agua.

El último tipo de trayectoria puede ser estudiado mediante la geometría fractal (Devaney, 1992). Este tema se puede consultar en el trabajo previo llevado a cabo por la autora de la presente investigación (Soracipa, 2021).

Actividad (Individual)

La actividad propuesta hace parte de una de las actividades que se desarrollaron con los estudiantes de medicina para el trabajo de la especialización (Soracipa, 2021). Con esta actividad se buscaba cumplir con el objetivo general de dicho trabajo que es el siguiente:

Implementar una estrategia de enseñanza para la comprensión de los atractores cardiacos caóticos diseñados en el contexto de la teoría de los sistemas dinámicos no lineales y la geometría fractal con el fin de aportar elementos conceptuales que posibiliten la interpretación de los electrocardiogramas.

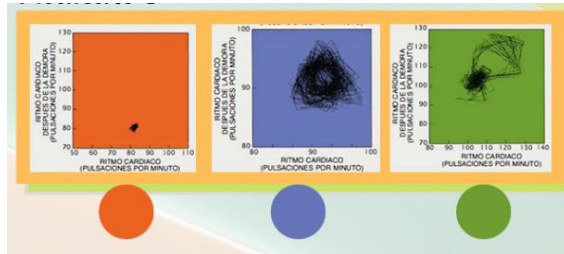


La actividad consiste en observar la señal eléctrica del corazón en tres espacios diferentes provenientes de tres sujetos que se encuentran en diferentes condiciones clínicas que aparecen en esta ilustración, la cual fue tomada del trabajo publicado por Goldberger y su equipo de trabajo (1990).

La señal eléctrica del corazón que se encuentra en la primera y segunda columna es la que todo estudiante de medicina puede reconocer y describir.

La señal eléctrica del corazón que aparece en la tercera columna, que es la que aparece en esta ilustración, corresponde a una señal eléctrica llevada a un espacio de fases el cual da como resultado un atractor. La descripción que se realice de esta columna los participantes del seminario

aporta elementos claves de análisis, debido a que se está intentado hacer descripciones de algo que es totalmente nuevo a partir de la información que aparece en las dos primeras columnas.



Nota: Esta es una actividad se debe realizar en la casa para posteriormente socializarla en una posible segunda parte de esta sesión.

4.1.4. El arte de contar

La segunda fase consiste en hacer una introducción a los participantes del seminario a algunos de los procesos que permiten realizar una inducción matemática. Cabe señalar que la inducción matemática o prueba por recursión, es un tema de la matemática cuyo proceso de enseñanza es dispendioso. Para lograr disminuir el grado de dificultad que se pueda generar por parte de los participantes se ha diseñado la siguiente estrategia que se divide en cuatro fases, que se describen a continuación:

FASE UNO

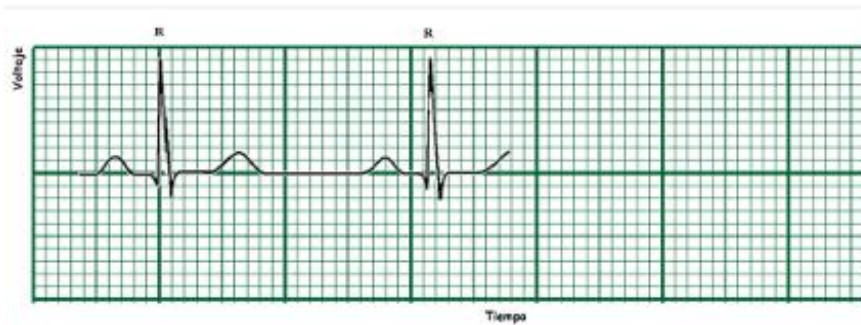
geometría fractal Inicio Unidad 1

Método utilizado para hallar los valores de la frecuencia cardiaca
[Método básico para interpretar un electrocardiograma]

Desde que se diseñó el cardiógrafo hasta el electrocardiograma el cálculo de la frecuencia cardiaca permite estudiar la magnitud de los cambios de los ciclos cardiacos a lo largo del tiempo. Sus unidades de medida se dan en latidos por minuto o pulsaciones por minuto.

En la segunda sesión de la unidad 1, los participantes del seminario realizaron una actividad que consistía en la aplicación de una metodología establecida por la cardiología para calcular los valores de la frecuencia cardiaca a partir de los trazados de los electrocardiogramas. Para esta actividad se debe disponer de uno a tres electrocardiogramas de corta duración.

La experiencia que deja esta actividad es cómo después de contar los cuadros grandes y pequeños que separan cada onda R se logra calcular el valor de la frecuencia cardíaca.



Los posibles resultados a los que se puede llegar después del conteo de los cuadros pueden ser contrastados con los resultados que se encuentran en la siguiente tabla.

Cuadros grandes + Cuadros pequeños	Frecuencia cardíaca (RR)	Cuadros grandes + Cuadros pequeños	Frecuencia cardíaca (RR)
1	300	5	60
1,04	288	5,04	60
1,08	278	5,08	59
1,12	268	5,12	59
1,16	259	5,16	58
2	150	6,0	50
2,04	147	6,04	50
2,08	144	6,08	49
2,12	142	6,12	49
2,16	139	6,16	49
3	100	7	43
3,04	99	7,04	43
3,08	97	7,08	42
3,12	96	7,12	42
3,16	95	7,16	42
4	75	8	38
4,04	74	8,04	37
4,08	74	8,08	37
4,12	73	8,12	37
4,16	72	8,16	37

Las discusiones que se generaron sobre esta actividad deben ser consideradas de nuevo antes de pasar a la actividad que se propone para la tercera sesión.

Nota: En el caso que no se cuente con estos electrocardiogramas se puede hacer uso de un motor de búsqueda, donde hay imágenes de ellos, en los cuales se ocultan los datos personales del sujeto.

FASE DOS

La fase dos consiste básicamente en realizar una actividad que permita explicar por qué contar en esta investigación es un “arte”.

Según el diccionario de Oxford Languages¹⁰ se define el arte como:

¹⁰Oxford Languages, se puede consultar en la siguiente URL: <https://languages.oup.com/>

La actividad en la que el ser humano recrea, con una finalidad estética, un aspecto de la realidad o un sentimiento en formas bellas valiéndose de la materia, la imagen o el sonido.

De esta definición puesta en contexto de lo que se quiere lograr en esta fase se extrae lo siguiente:

- **Actividad en la que el ser humano recrea**

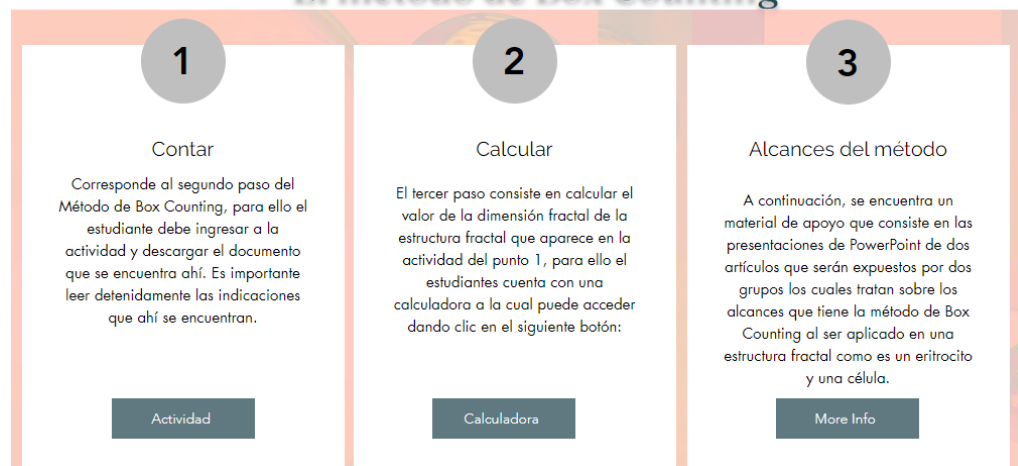
Es necesario que el moderador tenga claridad de que el seminario reconoce el contar como una actividad humana, debido a que la metodología diseñada para caracterizar la variabilidad de la frecuencia cardiaca en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal se elaboró desde las reglas de deducción establecidas por el hombre.

- *...con una finalidad estética, un aspecto de la realidad o un sentimiento en formas bellas.*

Contar cuadros ocupados por los atractores cardiacos caóticos en el espacio de Box Counting es un paso que permite recrear una realidad que yacía oculta hasta que dicho conteo comenzó a cobrar un significado mediante asociaciones con la noción de estado dinámico con el cual se caracteriza el comportamiento del corazón tal y como se describió en el capítulo tres. Para esta fase se propone realizar la siguiente actividad:

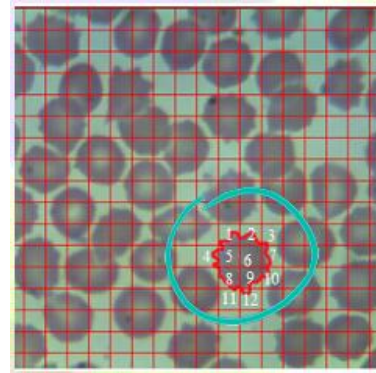
ACTIVIDAD (Grupal)

El método de Box Counting



La actividad consiste en aplicar el método de Box Counting, para ello se propone la medición de una estructura fractal. Después de realizar los respectivos cálculos el estudiante debe entrar a donde dice alcances del método.

La estructura fractal a la cual hay que analizar para hallar su dimensión es el eritrocito, con el fin de medir las alteraciones en su forma .



Después de contar los cuadros que ocupa cada alteración en la forma de un eritrocito, se calcula su dimensión fractal aplicando para ello la ecuación 2 del capítulo tres. Para

Calculadora de dimensión fractal

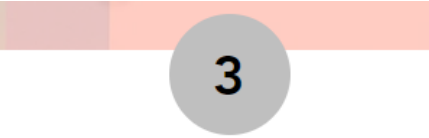
Conteo de cuadros pequeños	22
Conteo de cuadros grandes	15
Dimensión fractal	0.552541

hacer más fácil este proceso se diseñó una calculadora en excel tal y como se puede observar en la ilustración.

A continuación, los resultados deben ser sistematizados en la pestaña que dice “Resultados”.

Eritrocito	Cuadros pequeños	Cuadros grandes	Dimensión fractal
E1			
E2			
E3			
E4			
E5			



 <p style="text-align: center;">3</p> <p style="text-align: center;">Alcances del método</p> <p>A continuación, se encuentra un material de apoyo que consiste en las presentaciones de PowerPoint de dos artículos que serán expuestos por dos grupos los cuales tratan sobre los alcances que tiene el método de Box Counting al ser aplicado en una estructura fractal como es un eritrocito y una célula.</p> <p style="text-align: center;">More Info</p>	<p>En cuanto a los alcances que tiene el método de Box Counting, se encuentran como material de apoyo cuatro artículos en los cuales fue aplicado este método por parte del Grupo Insight.</p> <p>Estos cuatro artículos se deben enviar previamente al grupo de estudiantes que tengan conocimiento en Biología, pues tratan temas como las alteraciones en la forma de los eritrocitos (tres artículos) y las células epiteliales de cuello uterino (un artículo). Cada grupo debe realizar una presentación de este artículo.</p> <p>La exposición debe durar por mínimo 20 minutos para poder alcanzar a hacer las respectivas reflexiones sobre las exposiciones por parte de los asistentes y el moderador del seminario.</p>
<p>Recomendaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • El documento de excel se debe descargar por cada uno de los grupos conformados en el seminario. • La actividad se debe realizar durante la sesión con el fin de que si surgen inquietudes, el moderador las pueda solucionar, el tiempo estimado de la actividad es de una hora. 	
<p>FASE TRES</p>	
<p>Consiste en un intento de transmitir la belleza de la matemática, para ello se recomienda que el moderador lea el trabajo de varios matemáticos, entre ellos se encuentra:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Magia y belleza de las matemáticas y algo de su historia</i> de Iván Obregón (2007). • <i>Apología de un matemático</i> de Godfrey Hardy (1999). • <i>La música de los números primos</i> de Du Sautoy (2003). <p>Es importante la lectura de estos libros u otros que estén enfocados en transmitir la belleza que se encuentra en una simple estructura matemática, en las diferentes formas geométricas, etc. Por ejemplo, el libro de Du Sautoy narra toda la historia que hay detrás de los números primos la cual no se encuentra en los libros de matemáticas utilizados para la enseñanza, usualmente enfocados en enseñar que es un número primo y la regla para reconocerlos. Esto último es lo que precisamente no se quiere para el seminario que encuentra en la acción de contar un arte, lo que nos lleva a la otra parte de la definición de arte:</p>	

- ... valiéndose de la materia, **la imagen** o el sonido

En esta parte de la definición se resalta la palabra *imagen* debido a que son las imágenes de los cardiogramas, electrocardiogramas y los atractores que cobran un significado más profundo para la relación entre el sujeto-naturaleza eléctrica del corazón. Es por esta razón que el estudio del comportamiento eléctrico del corazón a partir de los valores de la frecuencia cardiaca cobra un nuevo significado cuando este es estudiado desde el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal con el fin de establecer una estructura matemática y geométrica que permite establecer el estado dinámico del corazón.

FASE CUATRO: CIERRE DEL SEMINARIO

Antes de dar cierre al seminario el moderador debe tener tiempo para analizar las actividades descritas en la fase uno y dos de la unidad dos. Dentro de este análisis puede tener en cuenta:

- Las respuestas que dan los participantes del seminario sobre las actividades propuestas.
- Reflexionar sobre los significados que los participantes del seminario tienen después de contar para calcular la frecuencia cardiaca y contar para hallar la dimensión fractal de las diferentes alteraciones de los eritrocitos.

Cabe señalar que la actividad de la fase dos se encuentra diseñada para generar sorpresa a todos los participantes del seminario, en vista de que en hematología las alteraciones en la forma de los eritrocitos se clasifican por las formas que estos tienen. Plantear hacer medidas de dichas las alteraciones es un claro ejemplo de las limitaciones que tiene solo conocer las reglas euclidianas para hacer mediciones, mostrando en cambio la pertinencia de caracterizar dicha irregularidad en el contexto de la geometría fractal.

Después de este análisis el moderador realiza la siguiente actividad de contraste:

Antes	Después
En la sesión preliminar se pregunta sobre la definición de electrocardiograma.	Preguntar de nuevo por la definición de electrocardiograma a los participantes del seminario que no tenían conocimiento sobre esto.
En la segunda actividad de la sesión preliminar se propuso la lectura de estos dos artículos: <ul style="list-style-type: none"> • Nueva metodología física y matemática de evaluación del Holter (Rodríguez et al, 2008). 	De acuerdo con las experiencias de los participantes del seminario, se selecciona una o dos de estas, para que el estudiante hable de su experiencia después de realizar todas las actividades propuestas en el seminario.

<ul style="list-style-type: none"> • Mathematical law of chaotic cardiac dynamics: Predictions for clinical application (Rodríguez et al, 2011). <p>Tema clave de la discusión: Las experiencias que les quedaron a los participantes del seminario después de la lectura de estos dos artículos.</p>	<p>El moderador debe hacer preguntas con el fin de indagar qué tan claro es en ese momento la metodología desarrollada por el grupo Insight. Así mismo, qué parte de la metodología no entiende y anotar estas respuestas, debido a que es insumo para estructurar una actividad para esa dificultad.</p>
<p>En el seminario alemán se solicita a los participantes del seminario anotar una lista de términos que no son claros para ellos, la mayoría de estos términos tienen que ver con el fundamento matemático de la metodología, que son los sistemas dinámicos y la geometría fractal.</p> <p>Dentro de esta lista se encuentra</p> <ul style="list-style-type: none"> • El método de Box Counting. • Sistemas dinámicos • Geometría fractal • Atractor • Entre otros. 	<p>El moderador organiza una lista de estos términos y comienza a preguntar a los participantes del seminario cuántos de estos términos podrían tachar de la lista y por qué.</p> <p>Se sugiere que las respuestas se den por escrito, para tener un registro y realizar un posterior análisis.</p>
<p>Por experiencia se sabe que la metodología descrita en el capítulo tres por lo general no se logra comprender. Por ejemplo, es común encontrar en las exposiciones que no se menciona la ecuación 8.</p> <p>Tema clave de la discusión: La experiencia que le quedó a los participantes del seminario de la lectura de este artículo.</p>	<p>Las actividades desarrolladas en el seminario se encaminan a fortalecer el entendimiento del método de Box Counting, mediante la vivencia de su aplicación independientemente de que los valores de la dimensión fractal no se utilicen en la metodología desarrollada por el Grupo Insight para el holter.</p> <p>La aplicación del método de Box Counting en las alteraciones de la forma de los eritrocitos tiene una intención de fondo, la cual es positiva cuando se pregunta de nuevo por este método después de realizar las actividades.</p> <p>Se ha encontrado como experiencia que el estudiante responde: <i>“ahora sí entiendo cuando el artículo dice que se deben contar los cuadros que ocupa el atractor con una determinada rejilla. Lo anterior</i></p>

	<p>muestra que no fue necesario poner como actividad el conteo de los cuadros que ocupa un atractor, debido a que el estudiante es capaz de realizar una asociación de semejanzas entre la experiencia que les dejó aplicar el método de Box Counting en los eritrocitos.</p> <p>Hasta aquí se cerraría la actividad, lo que se espera es que las discusiones que se hagan aquí puntualmente sirvan para estructurar actividades que permitan llegar hasta la ecuación 8.</p>
--	---

4.1.5. Metas por alcanzar

Dentro de las metas que se proponen alcanzar a partir de la sistematización de las actividades del seminario se encuentran:

- Encontrar en las fases I, II, III, y IV previamente descritas elementos de conocimiento para estructurar la tercera unidad que trata sobre la metodología que fue descrita en el capítulo tres.
- Lograr actividades que generen sorpresas matemáticas las cuales motivan al sujeto a seguir profundizando en la metodología desarrollada por el Grupo Insight.

Capítulo 5

REFLEXIONES FINALES

Se presentan las reflexiones finales de la investigación, teniendo en cuenta los ejes en los que se enmarcó el trabajo como son: el contexto histórico del cardiograma y electrocardiograma como dos dispositivos que permitieron comprender la naturaleza eléctrica del corazón, la interpretación de la variación de la frecuencia cardiaca en el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal y el análisis de fuentes primarias con fines disciplinares y pedagógicos. Además de ello, se menciona la importancia que tiene el maestro de Ciencias Naturales, y particularmente de Física, en la educación superior, donde se hace necesario que sea pensada como una oportunidad para generar espacios en los que se posibilite la construcción de conocimiento en un entorno que favorezca la reflexión permanente y de esta manera ampliar la experiencia que se tiene respecto al fenómeno de estudio.

Sobre el contexto histórico del cardiograma y electrocardiograma.

Ahondar en la naturaleza eléctrica del corazón implicó considerar la manera en que la observación y medición de diferentes cualidades permiten al sujeto (docente - estudiante) ampliar su experiencia sensible y de esta manera caracterizar dicha naturaleza; donde las cualidades que los cuerpos exhiben fueron organizadas a través de la descripción, ordenamiento y análisis de las observaciones hechas en las diferentes experiencias. Esta forma de estudiar la naturaleza eléctrica del corazón abre un panorama donde el sujeto puede hacer parte de las dinámicas del seminario y se integra como el actor que aporta en la construcción y enriquecimiento de diálogos que surgen en las reflexiones que se dan cuando se elaboran explicaciones alrededor del objeto de estudio. La estructura del seminario está enfocada en que el sujeto no sea un actor pasivo que se relega a reproducir teorías o principios que pueden solucionar un problema de estudio particular.

Sobre la variabilidad de la frecuencia cardiaca interpretada desde el contexto de los sistemas dinámicos y la geometría fractal

Se deben tener presentes algunos de los aspectos de la enseñanza mediante los métodos de conflicto cognitivo e investigación dirigida, al llevar al sujeto, en este caso al estudiante

de pregrado de medicina, a comprender la variabilidad de la frecuencia cardíaca en el contexto de los sistemas dinámicos. Estos dos enfoques tienen en común que hay un cambio conceptual del sujeto; los procesos que el docente proponga para lograr dicho cambio deben involucrar al sujeto como actor que aporta en la construcción de conocimiento. De esta manera se amplían las experiencias y las formas de referirse al objeto de estudio.

Cabe señalar que todo cambio conceptual requiere que en principio el sujeto (docente) sea el primero en formarse para dicho cambio, que observe las dificultades que representó dicho cambio para él, así su experiencia le puede servir para reflexionar en todo aquello que se deba cambiar a medida que se estructuran escenarios para que se de dicho cambio conceptual.

Lo anterior permite llegar a una enseñanza enfocada en la explicación de una serie de técnicas y/o metodologías para describir gráficamente lo que significa un atractor cardíaco. Un docente que cuestiona y reflexiona sobre su práctica docente puede abrir un camino para seguir profundizando en el estudio de la naturaleza eléctrica de corazón, independientemente de que sea un tema que corresponda a otras ciencias y no propiamente a la física. Algo similar pasa con otros fenómenos biológicos como la respiración. Fue muy significativo ir al fondo de las representaciones que utilizamos para explicar este fenómeno, las cuales nos muestran que pueden ser limitadas y alejadas a lo que ésta significa. Esto mismo puede pasar si el tema de reflexión es la naturaleza eléctrica del corazón, de la cual muy poco se discute en el aula.

A la luz de los razonamientos anteriores como docente de física puedo argumentar que no era suficiente guiar al estudiante para que reconozca que los valores de la frecuencia cardíaca en un espacio de fases generan unos atractores, cuyos espacios de ocupación al ser medidos con el método de Box Counting permiten diferenciar estados dinámicos cardíacos normales de anormales. También, era claro para mí como docente que esta forma de sintetizar una experiencia tiene significado sólo para aquellos que conocen el contexto teórico y epistemológico en el cual se desenvuelve la metodología descrita en el capítulo tres.

El seminario que se describe en el capítulo anterior le da importancia a la dialéctica sujeto-electrocardiograma para encontrar todos los referentes teóricos, disciplinares y pedagógicos para que a medida que se implementen las actividades del seminario se pueda ir mejorando la manera de profundizar sobre el estudio de la actividad eléctrica del corazón en el contexto de los sistemas dinámicos. Se espera que el seminario sea el escenario que permita generar

experiencias que al ser sistematizadas puedan servir para el fortalecimiento de la práctica docente y sean cimientos para profundizar más sobre la naturaleza eléctrica del corazón.

Bibliografía

- Achard, F. (2005). Chapter 44 – James Clerk Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, first edition (1873). *Landmark Writings in Western Mathematics*. p.p. 564–587.
- Atañón, G., Atañón, E., Soriano, J., Martín, A. (2002). *Física y Química*. España: Grupo editorial Bruño.
- Aguilar, M., Navarro, J., López, J y Alcalde, M. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14, 2. p.p. 382-386.
- Aguilar, Y & Romero, A. (2011). A propósito de los experimentos mentales: una tentativa para la construcción de explicaciones en ciencia. *Revista Científica*, 13, 169-174
- Alvarenga, B y Máximo A. (1983). *Física General, con experimentos sencillos*. México: HARLA S.A. de C.V.
- Apóstol, T. (1990). *Calculus I*. Bogotá: Editorial Reverté.
- Aubin D. (2002). Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Dur´ee and Revolution, Disciplines and Cultures. *Historia Mathematica* 29, 273–339.
- Balestrieri, E., & Rapuano, S. (2010). Calibration of Automated Non Invasive Blood Pressure Measurement Devices. *Advances in Biomedical Sensing, Measurements, Instrumentation and Systems*, 281–304.
- Barold, SS. (2003). Willem Einthoven and the birth of clinical electrocardiography a hundred years ago. *Card Electrophysiol Rev*, 7(1):99-104.
- Blanche, R. (1972). *El método experimental y la filosofía de la física*. México: Fondo de la Cultura Económica.
- Beléndez, A. (2008). La unificación de luz, electricidad y magnetismo: la "síntesis electromagnética" de Maxwell, *Rev. Bras. Ensino Fís.* 30(2), 2601.
- Briggs, H. (1976). *Arithmetica logarithmica*. G. Olms, Ed.
- Buzzi, A. (2016). La circulación de la sangre a 400 años de su descubrimiento. *Revista argentina de cardiología*.
- Cabrales, M., & Vanegas, D. (2006). Monitoria electrocardiográfica ambulatoria de 24 horas (Holter). En M. Cabrales & D. Vanegas (Ed.), *Manual de Métodos Diagnósticos en Electrofisiología Cardiovascular*. Panamericana Formas e Impresos, p. 9-20.

- Cajavilca, Ch., Varón, J., Sternbach, G. (2009). Luigi Galvani and the foundations of electrophysiology. *Resuscitation*, 80, 159-162.
- Catai, A., Pastre, C., Godoy, M., Silva, E., Takahashi, A & Vanderlei, L. (2020). Heart rate variability: are you using it properly? Standardisation checklist of procedures. *Braz J Phys Ther.* 24(2):91-102.
- Cecil, W. (1997). *Historia de la ciencia y sus relaciones con la filosofía y la religión*. Madrid: Editorial TECNOS, S.A.
- Cohen, M. (2010). *El escarabajo de Wittgenstein y otros 25 experimentos mentales*. Madrid: Alianza Editorial.
- Connelly, Ch & Chang, H. (2019). Galvanometers and the Many Lives of Scientific Instruments. *The Whipple Museum of the History of Science Objects and Investigations, to Celebrate the 75th Anniversary of R. S. Whipple's Gift to the University of Cambridge*, pp. 159 – 186.
- Conway, B., & Gordon, L. (1967). New technique for electrocapillary measurements using the Lippmann electrometer. *Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry*, 15, 7–14.
- Daston, L., & Lunbeck, E. (2011). *Histories of scientific observation*. University of Chicago Press, pp. 337.
- Debru C. (2004). Étienne-Jules Marey: l'innovation médicale Étienne-Jules. *Bulletin de l'Académie Nationale de Médecine*. P. 1413-1421
- De Bono, E. (1991). *Pensamiento lateral*. Paidc's Argentina.
- De Salama, A y Roulet, M. (1982). *De lógica simbólica y elementos de metodología de la ciencia*. Bogotá: El Ateneo Editorial.
- De la Torre, A. (2006). El método cartesiano y la geometría analítica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 15, p.p. 75-87.
- Dibner, B. (1954). Ten founding fathers of the electrical science: V. Andre Marie Ampere. *Electrical Engineering*, 73(8), 724–725.
- Du Sautoy, M. (2003). *La música de los números primos*. Quaderns Crema, S.A.U.
- Ducheyne, S., & Present, P. (2017). Pieter van Musschenbroek on laws of nature. *The British Journal for the History of Science*, 50(04), 637–656.

- Eslava, D., Dhillon, S., Berger, J., Homel, P., Bergmann, S. (2009). Interpretation of electrocardiograms by first-year residents: the need for change. *J Electrocardiol*, 42(6),693-697.
- Einthoven, W. (1893). Nieuwe methoden voor klinisch onderzoek. *Ned T Geneesk.* 29:263–86.
- Einthoven, W. (1895). Ueber die Form des menschlichen electrocardiogramms. *Pflügers Arch Eur J Physiol*, 60(3), 101–23.
- Finger, S., Piccolino, M., & Stahnisch, F. W. (2013). Alexander von Humboldt: Galvanism, Animal Electricity, and Self-Experimentation Part 1: Formative Years, Naturphilosophie, and Galvanism. *Journal of the History of the Neurosciences*, 22(3), 225–260.
- François J. (1999). *La lógica de los viviente. Una historia de la herencia.* Barcelona: Tusquets.
- Forbes, E.G. (1977). Descartes and the birth of analytic geometry. *Historia Mathematica*, 4(2), 141–151.
- Fye, W.B. (1987). The origin of the heart beat: a tale of frogs, jellyfish, and turtles. *Circulation*, 76, 493-500.
- Galabin, AL. (1875). On the Construction and Use of a New Form of Cardiograph. *Medico Chirurgical Transactions*, 58:353-368.
- Geddes, L. A., & Geddes, L. E. (1998). How did Georg Simon Ohm do it? *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 17(3), 107–109.
- Goldberger, A., Rigney, D., & West, B. (1990). Caos y fractales en fisiología humana. *Investigación y Ciencia*. 163, 31–38.
- González, M., León, F y Villegas, M. (1988). *Matemática práctica.* Editorial Voluntad. S.A.
- Granés, J. (1988). *Newton y el empirismo. Una exploración de las relaciones entre sus concepciones del conocimiento del mundo natural.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Gregg, RE., Zhou, SH., Lindauer, JM., Helfenbein, ED & Giuliano, KK. (2008). What is inside the electrocardiograph? *J Electrocardiol*, 41(1):8-14.
- Gómez, A. (2014). *Estudio del sistema de marcapasos auriculares en el corazón del perro.* Punto Rojo Libros. S.L.

- Hardy, G. (1999). *Apología de un matemático*. Madrid: Nivola Libros y Ediciones.
- Hellström, S. (1998). The discovery of static electricity and its manifestation. *ESD — The Scourge of Electronics*, 1–20.
- Henson, J. (1971). Descartes and the ECG lettering Series. *Journal of the history of medicine*. 26,181-186.
- Herrera, F. (2005). Algunos aspectos bioelectroquímicos de la fisiología y la farmacología. *Gaceta Médica de Caracas*. Recuperado: http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0367-47622005000200008
- Hessen, J. (1980). *Teoría del conocimiento*. México: Editores Mexicanos Unidos.
- Keyt, A. T. (1885). Cardiography. *Journal of the American Medical Association*, 6, 141-145.
- Kübra A, Erdinç O, Taşçıkaraoğlu A. (2019). History of electricity. Pathways to a Smarter Power System. Capítulo 1. 1-27. Elsevier Ltd.
- Krauss, L. (1996). *Miedo a la Física: una guía para perplejos*. Santiago: Editorial Andrés Bello.
- Lawrence, C. (1979). Gerald L. Geison, Michael Foster and the Cambridge School of Physiology: The scientific enterprise in late Victorian society, Princeton University Press, 1978, 8vo, pp. xxi, 401, £18.40. *Medical History*, 23(2), 238-239.
- López, J. (2006). *La alegría de leer el electrocardiograma*. Bogotá: Editorial Médica Celcus.
- Lovejoy, A.O. (1936). *The Great Chain of Being: A Study of the History of an Idea*. Cambridge, Cambridge University Press
- Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament*, Nueva York, Bellevue Literary Press.
- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156(3775), 636–638.
- Mettini, M. (2018). Experimentos mentales y conocimiento *a priori*. *Praxis filosófica*, 47, 71-90.
- Micheli, A. (2011). En torno a los primeros estudios de electrofisiología. *Archivos de Cardiología de México*, 81(4), 337-342.
- Mølgaard, H. Hermansen, K & Bjerregaard, P. (1994). Spectral components of short-term RR interval variability in healthy subjects and effects of risk factors. *European Heart Journal*, 15, 1174–1183.

- Munro G. (1883). The Cardiograph in Medicine. *Bristol Medico Chirurgical Journal*, 1, 71-81.
- National Institutes of health: Tipos de arritmia (2022, 24 de marzo), <https://www.nhlbi.nih.gov/es/salud/arritmias/tipos>
- Naylor, R. (1990). Galileo's Method of Analysis and Synthesis. *Isis*, 81(4), 695–707.
- Núñez H (2013). Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia. *Revista Mexicana de Física*. 59, 91-100.
- Obregón, I. (2007). *Magia y belleza de la matemática y algo de su historia*. Bogotá: Intermedio.
- Orozco, J., Valencia, S, Méndez, O., Jiménez, G y Garzón, J. (2003). Los problemas de conocimiento una perspectiva compleja para la enseñanza de las ciencias. TED: Tecné, Episteme y Didaxis, 1-12.
- Ørsted (1820). Expériences sur l'effet du conflit électrique sur l'aiguille aimantée, annotations par Arago, *Annales de Chimie et de Physique*, tome 14, 417-425.
- Oliva, J. (2004). El papel del razonamiento analógico en la construcción histórica de la noción de fuerza gravitatoria y del modelo del sistema solar (primera parte). *Revista Ureka sobre la Enseñanza y la Divulgación de las ciencias*, 1, 31-44.
- Porter, T.M. (2022) Probability and statistics. *Encyclopedia Britannica*, 27. Recuperado: <https://www.britannica.com/science/probability>
- Poveda, G (2003). La electricidad antes de Faraday. Parte 1. *Revista facultad de ingeniería*, 30,130-147.
- Rabinovitch, N. L. (1970). Rabbi Levi Ben Gershon and the origins of mathematical induction. *Archive for History of Exact Sciences*, 6, 237–248.
- Roberts, W., Salandy, S., Mandal, G., Hołda, M.K., Tomaszewski, K.A., Gielecki, J.S., Tubbs, R.S., & Loukas, M. (2019). Across the centuries: Piecing together the anatomy of the heart. *Translational Research in Anatomy*. 100051: 1-8.
- Rodríguez, J., Prieto, S., Avilán, N., Correa, C., Bernal, P., Ortiz, L., (2008). Nueva metodología física y matemática de evaluación del Holter. *Revista Colombiana Cardiología*; 15:50-54.
- Rodríguez, J., Prieto, S., Ortiz, L., Ronderos, M., y Correa, C. (2010). Diagnóstico matemático de ecocardiografías pediátricas con medidas de dimensión fractal

- evaluadas con armonía matemática intrínseca. *Revista Colombiana Cardiología*, 17(2):79-86.
- Rodríguez, J. (2011). Mathematical law of chaotic cardiac dynamic: Predictions of clinic application. *J Med. Med. Sci*, 2(8):1050-1059.
- Rodríguez, J., Prieto, S., y Ramírez, L. (2021). *Armonía del Caos: Fractales, sistemas dinámicos y dinámica cardíaca*. Colombia: Editorial Neogranadina.
- Salvat, J. (1986). *Universitas, gran enciclopedia del saber*. Tomo 12. España: Salvat Editores S.A.
- Schagrin, M. L. (1963). Resistance to Ohm's Law. *American Journal of Physics*, 31(7), 536–547.
- Schafer, R.W. & Rabiner, L.R. (1973). A digital signal processing approach to interpolation. In *Proceedings of the IEEE*, 61, 692-702.
- Schmickler, W. (1996). *Interfacial Electrochemistry*. New York, 1996; online edn, Oxford Academic.
- Science Photo Library Limited (2023). *Marey's cardiography machine, 19th century illustration*. Recuperado de: <https://www.sciencephoto.com/media/1288703/view/marey-s-cardiography-machine-19th-century-illustration>
- Steinke, H. (2005). *Haller's Concept and the European Controversy on Irritability and Sensibility, 1750-90*. Availability: Published.
- Soracipa, R. (2021). *Estrategia para la construcción e interpretación de atractores cardíacos caóticos con estudiantes de pregrado de la facultad de medicina*. [Tesis de posgrado]. Universidad Pedagógica Nacional.
- Sweeney, Dennis J., Williams, Thomas, A and Anderson, David R. (2023). *Statistics*". Encyclopedia Britannica. Recuperado: <https://www.britannica.com/science/statistics>.
- Strogatz, S. (2013). *El placer de la x ; una visita guiada por las matemáticas del uno al infinito*. Bogotá: Distribuidora y Editora Aguilar, Altea, Taurus, Alfaguara, S.A.
- Tapia, F. (2003). Historia de los logaritmos. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 2(2),5-22.
- Valencia, S., Méndez, O. M., Garzón, J. P., y Jiménez, G. (2021). De la contemplación a la compresión de los seres vivos. *Campo Abierto. Revista De Educación*, 20(2), 31-46.

- Valencia, S., Méndez O y Jiménez G. (2021). La respiración: de soplo vital a problema de conocimiento. Maestría en Docencia de las Ciencias Naturales. Universidad Pedagógica Nacional.
- Veeraraghavan R, Gourdie RG, Poelzing S. Mechanisms of cardiac conduction: a history of revisions. *Am J Physiol Heart Circ Physiol*. 2014 Mar 1;306(5):H619-27.
- Vince, J. (2010). Cartesian Coordinates. In: *Mathematics for Computer Graphics. Undergraduate Topics in Computer Science*. Springer, London.
- Waller, A. (1889). On the electromotive changes connected with the beat of the mammalian heart, and of the human heart in particular. *Phil Trans R Soc Lond B*, 180:169–94.
- Williams, D.P., Joseph, N., Gerardo, G.M., Hill, L.K., Koenig, J & Thayer, J.F. (2022). Gender Differences in Cardiac Chronotropic Control: Implications for Heart Rate Variability Research. *Applied Psychophysiology and Biofeedback*, 47, 65–75.

Anexo 1

Para confirmar que hay comportamiento exponencial para cada una de las combinaciones o parejas de la tabla 10 del capítulo tres se va a tomar los datos de la segunda fila de esta tabla para realizar los mismos pasos que fueron descritos para la primera fila de esta tabla.

Tabla 1. Número de combinaciones, parejas, cuadros ocupados al superponer sobre el atractor una rejilla con 17 cuadros grandes (Kg) y el número mínimo y máximo de cuadros pequeños (Kp), la proporción entre Kp/Kg y su dimensión fractal (D).

Combinaciones	Parejas	Kg	Kp	Kp/Kg	D
1	(17,17)	17	17	1,0	0
2	(17,18)	17	18	1,0588	0,0825
3	(17,19)	17	19	1,1176	0,1605
4	(17,20)	17	20	1,1765	0,2345
5	(17,21)	17	21	1,2353	0,3049
6	(17,22)	17	22	1,2941	0,3720
7	(17,23)	17	23	1,3529	0,4361
8	(17,24)	17	24	1,4118	0,4975
9	(17,25)	17	25	1,4706	0,5564
10	(17,26)	17	26	1,5294	0,6130
11	(17,27)	17	27	1,5882	0,6674
12	(17,28)	17	28	1,6471	0,7199
13	(17,29)	17	29	1,7059	0,7705
14	(17,30)	17	30	1,7647	0,8194
15	(17,31)	17	31	1,8235	0,8667
16	(17,32)	17	32	1,8824	0,9125
17	(17,33)	17	33	1,9412	0,9569
18	(17,34)	17	34	2,0000	1,0000
19	(17,35)	17	35	2,0588	1,0418
20	(17,36)	17	36	2,1176	1,0825
21	(17,37)	17	37	2,1765	1,1220
22	(17,38)	17	38	2,2353	1,1605
23	(17,39)	17	39	2,2941	1,1979
24	(17,40)	17	40	2,3529	1,2345
25	(17,41)	17	41	2,4118	1,2701
26	(17,42)	17	42	2,4706	1,3049
27	(17,43)	17	43	2,5294	1,3388
28	(17,44)	17	44	2,5882	1,3720
29	(17,45)	17	45	2,6471	1,4044
30	(17,46)	17	46	2,7059	1,4361

31	(17,47)	17	47	2,7647	1,4671
32	(17,48)	17	48	2,8235	1,4975
33	(17,49)	17	49	2,8824	1,5272
34	(17,50)	17	50	2,9412	1,5564
35	(17,51)	17	51	3,0000	1,5850
36	(17,52)	17	52	3,0588	1,6130
37	(17,53)	17	53	3,1176	1,6405
38	(17,54)	17	54	3,1765	1,6674
39	(17,55)	17	55	3,2353	1,6939
40	(17,56)	17	56	3,2941	1,7199
41	(17,57)	17	57	3,3529	1,7454
42	(17,58)	17	58	3,4118	1,7705
43	(17,59)	17	59	3,4706	1,7952
44	(17,60)	17	60	3,5294	1,8194
45	(17,61)	17	61	3,5882	1,8433
46	(17,62)	17	62	3,6471	1,8667
47	(17,63)	17	63	3,7059	1,8898
48	(17,64)	17	64	3,7647	1,9125
49	(17,65)	17	65	3,8235	1,9349
50	(17,66)	17	66	3,8824	1,9569
51	(17,67)	17	67	3,9412	1,9786
52	(17,68)	17	68	4,0000	2

La representación gráfica de los valores que aparecen en la columna 5 y 6 de la tabla 1 sería la siguiente:

Figura 1. Comportamiento de la proporción entre pequeños (K_p) y grandes (K_g) y su dimensión fractal de la tabla 1.

