

**ANÁLISIS DE LA NOTACIÓN ESPINORIAL
COMO FORMALISMO PARA LA
ENSEÑANZA DE LA FÍSICA MODERNA.**

**ESTUDIANTE:
ROBINSON FRANCISCO VERANO PALOMINO**

**ASESORA:
SANDRA BIBIANA AVILA TORRES**

Trabajo de grado para optar por el título de:
Licenciado en física

Tabla de Contenido

Lista de Figuras.....	4
Lista de Tablas.....	4
INTRODUCCIÓN.....	5
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
1.1. La Importancia de la Enseñanza de la Física Moderna.....	8
1.2. La física, sus Formalismos y La Teoría Espinorial.....	8
2. OBJETIVOS.....	11
2.1. GENERAL.....	11
2.2. ESPECIFICOS.....	12
2.2.1. Objetivo Especifico 1:.....	12
2.2.2. Objetivo Especifico 2:.....	12
2.2.3. Objetivo Especifico 3:.....	12
4. ANTECEDENTES.....	12
4.1. Aportes de Penrose y Rindler a la teoría de Twistores.....	13
4.2. La Descripción Espinorial del espacio-tiempo de Penrose y Rindler.....	13
4.3. De la ecuación de Dirac a los espinores.....	14
4.4. What are Spinors?.....	15
5. MARCO TEÓRICO.....	16
5.1. El Operador de Rotación:.....	17
5.2. El Operador Momento Angular total:.....	18
5.3. La Relación de Conmutación para el Momento Angular.....	20
5.4. Matrices de Pauli.....	23
5.6. Estado Arbitrario de un Sistema con Espín $\frac{1}{2}$	27
6. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.....	29
7. CAPÍTULO I. SOBRE LA IMPORTANCIA DE LOS ESPINORES.....	31
7.1. El Concepto de Espinor.....	35
7.2. El concepto de Espinor: Definición de Espinor de Élie Joseph Cartan.....	37
8. CAPÍTULO II. CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN DE CARTAN PARA EL ESPINOR.....	46
8.1. Representación Espinorial de las Transformaciones de Lorentz.....	46
8.2. Grupos de Representación Irreducibles.....	52
8.3. Reducción de $\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}_j$	55

9.	CAPÍTULO III. CARACTERIZACIÓN DE LA DOCUMENTACIÓN.....	58
9.1.	Sistema de Clasificación y Herramientas Meta-analíticas.....	58
9.2.	Textos analizados.	63
9.3.	Reflexiones finales.....	64
10.	CONCLUSIONES	66
11.	BIBLIOGRAFÍA.....	67
12.	Anexos.....	71
A.	Marco Teórico	71
B.	Expansión en Serie de la Función Trigonométrica Coseno desde el Polinomio de Taylor.	74
C.	Generadores de la Rotación, Rotaciones en el espacio	76
D.	Capítulo I	80
E.	Definiciones.....	80
	Definición 1. Forma Bilineal sobre un Espacio Vectorial.....	80
	Definición 1.1. Conjunto de Formas Bilineales sobre V.....	81
	Definición 1.2. Generalización de las Formas Bilineales entre Espacio Vectoriales	81
	Definición 1.3. Definición Analítica de una Forma Bilineal.....	81
	Definición 1.4. Cambio de Base y Matrices Congruentes	82
	Definición 1.5. Formas Bilineales Simétricas y Antisimétricas	83
	Definición 2. Formas Cuadráticas	83
	Definición 2.1. Formas Cuadráticas (Definición Formal).....	84
	Definición 2.2. Matriz de una Forma Cuadrática (Cambio de Base y Rango)	84
	Definición 2.3. Espacios Vectoriales de las Formas Cuadráticas.....	85
	Definición 2.4. Conjugado Respecto de una Forma Cuadrática.....	85
	Definición 2.5. Vectores Conjugados:.....	85
	Definición 2.6. Subespacios Conjugados de un Vector	86
	Definición 2.7. Formas Cuadráticas Ordinarias y Degeneradas “Núcleo”	86
	Definición 2.8. Aplicación Lineal Asociada a una Forma Cuadrática	87
	Definición 2.9. Aplicación Asociada a ω	88
	Definición 3. Espacio Dual.....	88
	Definición 3.1 Espacio Vectorial $\mu m \times n$	88
	Definición 3.2 Base Dual	89
	Definición 4. Mutivector simple r -vector.....	89
	Definición 5. Producto Geométrico	90

ra optar por el título de:
Licenciado en Física

F. Herramienta Metacognitiva (1): Espinores Cuatridimensionales	91
G. Herramienta Metacognitiva (2): Introducción a la teoría espinorial (Informe Monográfico Parte 1) 92	
H. Herramienta Metacognitiva (3): Teoría de Campos y Partículas	93

Lista de Figuras

Figura 1. Proyección del vector n en coordenadas esféricas con respecto a un sistema de coordenada rectangular (Construcción propia).....	19
Figura 2 Banda de Möbius.....	39
Figura 3 Representación de las rotaciones en el espacio de las direcciones nulas [tomada de Tristan Needhand: visual complex Anayisis [pág. 153].....	52
Figura 4 Representación de los Boost en el espacio de las direcciones nulas [tomada de Tristan Needhand: visual complex Anayisis [pág. 153].....	52

Lista de Tablas

Tabla 1 Ecuación de Dirac para una partícula libre en su forma covariante y espinorial.....	15
Tabla 2. Cuatro tipos de transformaciones de Lorentz.....	44
Tabla 3 Cuadro Comparativo entre los Tipos de Relaciones y sus Respectiveas Representaciones Esquemáticas en los Mapas Conceptuales	63
Tabla 4. Cuadro Comparativo Presentando las Propiedades de los Grupos Algébricos y las Propiedades de los Operadores de Rotación.....	71
Tabla 5. Deducción de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular total a partir de los operadores de rotación	72
Tabla 6 Deducción de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular intrínseco a partir de las relaciones de anti-conmutación heredadas del momento angular total.....	73
Tabla 7 Deducción de Sz	74
Tabla 8 Calculos para el poloinomio de Tayler de las derivadas de las funciones Evaluadas en cero.....	76
Tabla 9. Ecuaciones de Transformación para las Rotaciones Infinitesimales en un Ángulo ϵ	79
Tabla 10 Comprobación de que la descomposición de la forma cuadrática para un vector isotópico en términos se puede dar en de ξ_0, ξ_1	80

INTRODUCCIÓN

El trabajo, que a continuación se presenta; parte de una pueril revisión de una recomendada bibliografía, la cual pretende hacer un acercamiento a la comprensión, quizás no acertada; más sí meticulosa y por tal meticulosidad no deja de ser ingenua.

J. J. Serna Hernández

La teoría de los espinores se encuentra en el saber humano desde de década de los 20 del siglo XX, es una teoría que aparece fruto de las reformulaciones de la ecuación de Dirac a partir del álgebra de Clifford; con esta teoría se estudió las propiedades de los espinores bajo transformaciones por parte de Hermann Weyl y por Van Der Waerden (H & Jose, 1981) lo que dio inicio a diferentes planteamientos teóricos sobre los espinores y con ellas definiciones particulares de espinor, algunas equivalentes entre sí. Sin embargo, es conocido que, de manera temprana objetos similares a los espinores ya habían sido descubiertos por Élie Cartan en 1913 como fruto de su estudio en matemáticas sobre las representaciones lineales simples, en una compilación de sus notas de manera póstuma “*Theory of Spinors*” Cartan busca explicar los espinores desde un punto de vista más intuitivo y próximo a la geometría, argumentado que este planteamiento permitiría ver con más calidad los alcances de esta teoría.

La preocupación que motiva el desarrollo del presente trabajo de grado es adquirida. Pues, nace de la lectura de un artículo del profesor Wolfgang Rindler (1924-2019) publicado en el año 1966; titulado “*whats are Spinors*” en el que se propone explicar el “formalismo” espinorial, entendiéndolo, como una herramienta matemática heurística. El mencionado artículo ínfimamente apela a la necesidad de llevar el formalismo espinorial a la enseñanza, como una materia prerrequisito en las carreras enfocadas a las ciencias físicas. Como un formalismo con un alcance que puede permear los diferentes planteamientos de las teorías físicas.

La línea argumental que emplea Rindler parte y se fundamenta en una revisión del estado de las leyes de la física. Derivando de lo anterior él por qué los espinores son **los ladrillos de construcción para cualquier ley o teoría invariante Lorentz** (Rindler, 1966). Retomando la argumentación de Rindler, en particular, lo que él llama: “la revisión actual de las leyes de la

física” entendiendo las leyes de la física como modelos, cuyas interrogantes y explicaciones gobiernan los modos, mas no las razones que gobiernan su objeto de estudio, la naturaleza. En los modos existe, permanentemente, una validez suficiente del modelo, aludiendo al hecho de que un modelo se restringe al limitado número de fenómenos que explica y predice. Ahora, en función de lo mencionado, recurrimos a la definición formal de “formalismo” (entendida como: una corriente de pensamiento matemática que busca atender a los problemas de la fundamentación, empleando el método de construcción esencialmente axiomática en su concepción más formal) (Lundi, s.f.) para afirmar que, la ineficiencia de un modelo para predecir un fenómeno trae como consecuencia la necesidad de un nuevo “formalismo”, y la labor de “formalizar” (proceso por el cual el conocimiento se hace más preciso y más detallado u específico al revelar y determinar su forma y naturaleza, este proceso consiste en enfrentar los contenidos de una esfera determinada del conocimiento, relativamente estable, con objetos, fenómenos y procesos de estudio de tal forma que se logre detallar y establecer los aspectos esenciales sujetos a las leyes junto con los objetos empelados para su estudio) (Lundi, s.f.).

Antes de continuar con esta idea, se debe tener muy presente que existe a pesar de lo dicho anteriormente, una pretensión de verosimilitud que nos permite asumir como “verdaderas” las leyes y teorías físicas; la razón radica en que ellas deben estar perfectamente en armonía con los planteamientos teóricos e ideas físicas que en el momento actual se acepten por la mayoría de la comunidad científica. A esto último se le llamará el principio de realidad de las leyes y teorías físicas o principio de continuidad. Ahora, continuando con la idea anterior, segundo párrafo de la introducción. A saber, las antinomias en los teorías y formalismos. En nuestro caso particular, el formalismo en las ciencias fácticas: donde el valor de la prueba se haya en la experimentación y predictibilidad. Donde la antinomia¹ (contradicción) presenta un conflicto o contradicción entre dos leyes, principios racionales, ideas o actividades. La antinomia de la que nos ocupamos aparece con el experimento de Stern-Gerlach y lo que hoy conocemos como el momento angular intrínseco de las partículas en mecánica cuántica, Esta antinomia trae como consecuencia la necesidad de formalizar y con ello un nuevo formalismo el formalizo espinorial.

¹ La antinomia como se presenta aquí no es una contradicción entre los diferentes planteamientos teóricos entre la mecánica cuántica y la teoría espinorial, por el contrario se asume como una contradicción entre los hechos facticos y la teoría preexistente que requieren para su correcta comprensión de un nuevo planteamiento teórico llamado formalismo espinorial.

Teniendo en cuenta las apreciaciones anteriores, en este documento en el primer capítulo titulado “Sobre la Importancia de los Espinores”, se presenta en un primer momento posiciones a favor de la importancia de la física moderna, que toma como base un estudio del arte sobre la enseñanza y aprendizaje de la física moderna. Luego, en un segundo momento se aborda el concepto de espinor a partir de las formas fundamentales llegando a la definición de espinor de Cartan. En el Segundo Capítulo titulado “Consecuencias de la Definición de Espinor de Cartan” se presentan algunas de las aplicaciones de este formalismo teórico dentro de la teoría de grupos de Lie y se hablará de los grupos de representación irreducibles, finalmente en el capítulo número tres titulado “caracterización de documentos” se presentan los criterios de sistematización y la construcción de las herramientas meta-analíticas, junto con los textos analizados y las reflexiones finales en relación con los textos trabajados.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. La Importancia de la Enseñanza de la Física Moderna

Para responder a esta cuestión, en primer lugar, es preciso identificar el significado de la física moderna; ésta es presentada con frecuencia como la disciplina académica que comprende al periodo entre finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, hasta aproximadamente la década de 1920 donde erige sus bases dando un primer acercamiento a la cuantización. En particular conforme al planteamiento de dos teorías físicas de la época: la teoría cuántica primigenia cuyo inicio se da en 1900 y la teoría de la relatividad en 1905, las cuales marcan el comienzo de la física moderna y un gran número de investigaciones en dichas disciplinas. Los desarrollos propuestos en esta época contemporáneamente son aceptados por académicos, quienes hacen uso de dichas teorías para dar explicación al mundo, además, con frecuencia son usadas como bases conceptuales primordiales en investigaciones de punta en ciencias exactas o ciencias aplicadas durante el siglo XX.

1.2. La física, sus Formalismos y La Teoría Espinorial

Los formalismos de la física son el “lenguaje” que posibilita la abstracción de los fenómenos de la naturaleza, a través de ella es posible expresar las ideas y conceptos relacionados con los fenómenos propios de la física, de esta forma podemos distinguir dos elementos esenciales en la investigación en ciencias física, a saber, la primera es su forma y la segunda serán sus conceptos. Estos elementos esenciales pueden alcanzar individualmente estadios de abstracción superiores y aun así no poseer realidad física alguna, por ejemplo, si pensamos exclusivamente en la forma, la lógica y estructura interna, se puede tender rápidamente a supuestos demasiado ideales encontrando correlaciones con “belleza” y simetrías altamente complejas pero incapaces de explicar el mundo físico. Si por el contrario nos concentramos excesivamente en los conceptos, sin relación con la forma, fácilmente se pueden mezclar pretensiones y prejuicios sobre un punto de vista particular y personal del mundo de tal forma que cuanto más compleja sea está abstracción tanto más difícil será expresar en términos generales dichas abstracciones y desligarlas de los prejuicios de construcción, provocando que se pierda por completo la realidad física. En tal caso, se deben estudiar de forma conjunta reconociendo la correlación

entre forma y conceptos, es así como toda investigación de un concepto físico debe reconocer este proceder metodológico. En la física en particular esta correlación entre la forma y los conceptos dan pasos a las teorías, a este respecto, es usual encontrar una tendencia hacia la preservación de las teorías en cuanto a su estructura (forma y conceptos), por ejemplo: los Principios matemáticos de la filosofía natural de Isaac Newton publicado por primera vez en 1686 donde se desarrollan los principios de la mecánica en términos del cálculo diferencial, siguen siendo usados en la enseñanza de la física con la misma notación o forma, para los mismos conceptos. La preservación de la estructura solo se pone en duda cuando se encuentra una incongruencia en cuanto a sus conceptos y el mundo físico, como lo puede ser la omisión de alguna característica fundamental de la naturaleza capaz de provocar que la teoría no sea exacta en algunos casos particulares. En tal caso se usa la teoría teniendo muy presente los casos para los cuales se restringen sus conceptos y se aplica las matemáticas de tal teoría, de esta manera se preserva la teoría en cuanto a sus conceptos y forma. (W. Rindler, 1966) Esto lleva a los formalismos de una teoría a permanecer en cuanto a los conceptos que expresa y si tales conceptos presentan algún tipo de omisión, usualmente, ya se habrá desarrollado una nueva teoría con conceptos nuevos corrigiendo los anteriores y con un nuevo formalismo, evitando cambiar los conceptos previos y junto con ellos el formalismo que los expresa, en el ejemplo anterior la nueva teoría sería: la Teoría de la Relatividad² de Einstein.

Otro punto de vista sobre los formalismos pensándolos menos desde lo general y más desde lo particular, es un uso preferencial para una notación con relación a otra, como una herramienta heurística que aporte a la comprensión de ecuaciones y conceptos físicos, en especial cuando la notación con la que se construyó alguna ecuación o concepto presente omisiones en cuanto a la limitación de su propio formalismo o que por el contrario no exista la omisión, aunque la forma de expresar los conceptos termine por ser extremadamente compleja, llevado a que la comprensión del tema sea inteligible, obligando al estudioso del tema a realizar operaciones engorrosa que le permitan mayores claridades respecto al concepto. El más claro ejemplo sobre un formalismo que presente omisiones respecto a las limitaciones de su notación se encontrar en la ecuación de Paul A.M. Dirac³ la ecuación relativista del electrón; la cual presenta el comportamiento del electrón en un marco relativista, ecuación que es considerada la primera

² Albert Einstein (1905)

³ 1928, The Quantum Theory of the Electron

capaz de unir la teoría cuántica y relativista. Para tal hazaña, Paul A.M. Dirac introdujo un formalismo que él mismo desarrolló, para resolver este problema, unificar la cuántica con la relatividad, este formalismo se denomina los espinores de Dirac y expresan la forma en que se comportan las partículas subatómicas, en particular, el electrón. Para M. Carolina Spinel es posible usar el algebra de Clifford para generalizar esta ecuación permitiendo que no se limite la descripción a los electrones. En este caso el formalismo que sirve de herramienta heurística sería el algebra de Clifford, con esto se evidencia que en la física el uso de formalismos de manera específica ayuda en la comprensión de las ecuaciones más allá de los alcances de sus primeras notaciones, aquella con las que se construyen. (Spinel.1990).

En particular para esta misma ecuación, existe una herramienta heurística que se puede usar en lugar del algebra de Clifford y son los espinores, en particular los de Élie Cartan⁴ son muy útiles por su capacidad interpretativa y su facilidad de uso (Sánchez. R, Cesar. M, 2018), respecto a este formalismo se tiene un especial interés ya que a diferencia del algebra de Clifford es posible encontrar conceptos físicos fundamentales como lo son los comportamientos de espín del electrón y los grupos de transformación de Lorentz o como usualmente se llaman transformaciones restringidas de Lorentz.

Esto permite que la notación no se limite al caso específico de la ecuación de Paul A.M. Dirac y sea posible extender este concepto a casos más avanzados en la Relatividad General y en la Mecánica Cuántica. Ciertamente cada autor que se interesó por el formalismo espinorial, avizora gran utilidad para los estudiosos del futuro en campos como la cosmología, las radiaciones gravitacionales y la geometría pura y el álgebra del espacio hiperbólico de cuatro dimensiones (Rindler, 1966) y esperan que dicho formalismo pueda ser estudiado con mayor rigor en la academia al punto de ser, para los años venideros, parte de una materia prerequisite no solo para el estudio de la física relativista, sino también para la física cuántica.

Es por ello, que en este proyecto de grado se presenta la posibilidad de llevar los espinores al alcance de los cursos de pregrado, con el fin de hacer visible esta formalización, la cual sería capaz de convertirse en un eje fundamental para las teorías físicas contemporáneas; si bien, los estudiosos de la relatividad se han casado con el formalismo tensorial, educar a los nuevos académicos en el formalismo espinorial posibilitaría que las nuevas generaciones puedan

⁴ The Theory of Spinors (1938)

encontrar métodos innovadores en el estudio de la física e incluso poder encontrar mayores relaciones entre la teoría cuántica y relativista por medio de este elemento. Por lo tanto, se considera importante el estudio de las condiciones necesarias y suficientes con las cuales se puede llevar este tema a estudiantes de pregrado, qué elementos pueden ser exceptuados al momento de su enseñanza y cuales son imprescindibles para una comprensión suficiente del tema.

Para tal propósito se partirá desde lo esencial o lo estructural del tema, y que esto sirva de piedra angular para futuras investigaciones, para lo cual se debe retomar dos fechas históricas. La primera el surgimiento de las matrices de Pauli o formalización de los comportamientos de espín aproximadamente desarrolladas en la primavera de 1927 (Kragh. H, 1981) que en particular fueron los elementos que posibilitaron la formulación de la ecuación de Dirac y la segunda es la primera publicación del libro Teoría de los Espinores por parte de Élie Cartan 1938, en el que se presentan los espinores de Cartan y la posibilidad de expresar los comportamientos de espín, es en esta brecha donde se busca relacionar la notación de los espinores con las matrices de Pauli, para luego indagar en mayores profundidades de la notación su estructura matemática, intentando precisar el sentido físico matemático del elemento. Por lo cual se presenta la siguiente pregunta problema:

¿Cuáles son las condiciones necesarias que se deben tener en cuenta en torno al espinor de Cartan y su sentido físico, como un formalismo para la enseñanza y aprendizaje de la física moderna?

2. OBJETIVOS

2.1. GENERAL

Realizar un análisis sistemático de la notación espinorial vislumbrando los aspectos más relevantes al momento de abordarlo, como formalismo para la enseñanza de la física moderna.

2.2. ESPECIFICOS

2.2.1. Objetivo Especifico 1:

Realizar una revisión bibliográfica alrededor de libros de texto establecidos para el tema, así como documentos que desde la historia brinden un acercamiento a la notación espinorial a partir de los espinores de Cartan, usando el método meta-analítico.

2.2.2. Objetivo Especifico 2:

Presentar las reflexiones que permitan detallar los elementos constitutivos para el espinor de Cartan, priorizando su formalización en torno a la interpretación y estructura matemática en el campo disciplinar.

2.2.3. Objetivo Especifico 3:

Presentar una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de los espinores desde la notación de Cartan, señalando una posible ruta que considere los elementos relevantes para ser usados en física moderna, haciendo uso de herramientas metacognitivas.

4. ANTECEDENTES

Los documentos que se toman como antecedentes son cuatro artículos que, desde su argumentación particular, pretenden introducir el formalismo espinorial, en específico aquellos afines a la teoría de los espinores de Cartan. Los primeros dos pertenecen a una revista de enseñanza mexicana, en los que se buscaba divulgar el trabajo realizado por Penrose y Rindler en dicho artículo se pone de presente los alcances de la notación espinorial de manera descriptiva y matemática teniendo presente que los trabajos de Penrose y Rindler son una profundización de la teoría espinorial de Elie Cartan, situando la teoría de Cartan en un estudio del espacio-tiempo en términos de los espinores. El tercero es un artículo de una revista de la ciudad de México en el que se presenta la transformación de la ecuación de Dirac a espinores, sirviéndose de muchas de las elaboraciones realizadas por Cartan, sin embargo, se hacen manifiestas las preocupaciones del autor frente a la comprensión de los espinores, es decir, del abordaje de esta teoría, predominantemente matemática poco intuitiva. El último documento es

el artículo de Rindler en que se expresan las razones por las cuales se debería introducir el formalismo espinorial en la enseñanza, dando su propia introducción la cual es demasiado general.

4.1. Aportes de Penrose y Rindler a la teoría de Twistores

Sánchez. R, Cesar. M, Aportes de Penrose y Rindler a la teoría de Twistores⁵, 2018, Ciudad de México, Latin-American Journal of Physics Education.

En este artículo se presenta dos formas alternativas en las que se pueden representar los problemas concernientes a la relatividad general, a saber, la conveniencia de usar Espinores o Twistores en lugar de Tensores. Intentado, de forma conjunta, evidenciar la eficacia de los Twistores al momento de estudiar el espacio-tiempo, sin embargo estos no se trabajarán en el presente trabajo. Además, como muchos artículos y documentos sobre los espinores, obvia las concepciones propedéuticas sobre la naturaleza del Espinor. No obstante, presenta una ruta para la comprensión de los espinores (A saber, en el orden presentado: correspondencia de las coordenadas de espacio tiempo con los espinores, álgebra de los espinores, base de los espinores y tétrada nula del espacio tiempo) Por lo tanto, este documento se asume como un marco y guía para referenciar los conceptos matemáticos a los cuales se debe llegar, interpretar y explicitar. Este documento ayuda argumentar la idea en la que se asume al espinor como un formalismo alternativo al tensorial, aunque sin explicitar cuales son esos distintivos particulares que diferencian ambos formalismos.

4.2. La Descripción Espinorial del espacio-tiempo de Penrose y Rindler

Sánchez. R, Mora. C, Serrano. J, 2019, La Descripción Espinorial del espacio-tiempo de Penrose y Rindler, Ciudad de México, Latin-American Journal of Physics Education.

En este artículo se presenta de forma discursiva el proceso histórico por el cual se definen los espinores presentando los atributos más importantes para esta notación, partiendo de la ecuación de Klein-Gordon, pasando a su linealización en la ecuación de Dirac, para luego hablar de los espinores de Dirac y sus descomposición es espinores más pequeños, los espinores de Catan, y termina con la aplicación de esta teoría para describir propiedades geométricas importantes en la relatividad general, como lo es la curvatura y la torsión en términos de los

⁵ Forma diferencial de los espinores.

espinores de descomposición de los espinores de Dirac. Dentro de los detalles que se pueden encontrar están, por ejemplo: su aspecto complejo en la primigenia y sus aspectos reales covariantes en las interpretaciones más actuales. Este documento supone una guía metodológica que condujo el proceso de la investigación partiendo de un presupuesto histórico, resaltando el valor físico de la notación, similar a la propuesta del artículo, pero desde las consideraciones física matemáticas en un sentido más amplio y específico. En el artículo, se destina una sección para mencionar la existencia de una teoría espinorial con mayor alcance interpretativo desde la geometría, se habla de la teoría de Cartan y en especial del espacio espinorial de Cartan. Un tema que se puede matizar un poco más con el fin de mejorar la comprensión que posibilita este artículo. Por lo tanto, de este documento rescata la idea de que es necesario profundizar en la descomposición de los espinores de Dirac e indagar sobre la teoría que permite tal descomposición.

4.3. De la ecuación de Dirac a los espinores

G.F. Torres del Castillo (1986) De La Ecuación de Dirac a los Espinores, Puebla, Revista Mexicana de física No. 1 (1987)

En este artículo se evidencia la utilidad de los espinores en un estudio de caso que es considerado un punto de encuentro en lo que se refiere a los espinores: La Ecuación de Dirac Covariante, donde se muestra de manera detallada y sistemática como se puede transformar esta ecuación en una que dependa de los espinores de dos componentes y no de los espinores de Dirac de cuatro componentes. En especial las dos características evidentes en su planteamiento son los grupos de transformación de Lorentz y los comportamientos de espín, En el documento se presentan de manera referencial pero no explicita cuáles con las razones por las que esta transformación matemática es posible, cómo la teoría espinorial se construye para que sea posible una transformación semejante. No obstante, presenta una explicación clara de lo que implica su uso, además, cómo con la teoría espinorial se pueden reformular otras teorías de la física como lo es el electromagnetismo. Deja claro desde el principio la preocupación sobre la difícil interpretación de los formalismos espinoriales para dar cuenta de la naturaleza de estos objetos matemáticos, en cuanto a las explicaciones del sentido físico de las teorías reformuladas con los espinores, se limita a describir los procedimientos matemáticos. En este orden de ideas, este artículo comparte la misma preocupación sobre el

sentido de los espinores su comprensión, más allá de las operatividades matemáticas. En la Tabla 1 se presentan las diferentes formas en las que se puede expresar la ecuación de Dirac, lo cual es el eje central del artículo y de lo cual se hablará a profundidad en el numeral 7, capítulo 1.

Tabla 1 Ecuación de Dirac para una partícula libre en su forma covariante y espinorial

Ecuación de Dirac para una Partícula Libre en Forma Covariante	Ecuación de Dirac para una Partícula Libre en Forma Espinorial
$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - mc\psi = 0$ <p style="text-align: center;">$\psi \equiv$ Espinores</p> <p style="text-align: center;">$\gamma^\mu \equiv$ Matrices de Dirac</p>	$\partial_{AB}\phi^{\dot{B}} = \frac{mc}{\hbar}x_A$ $\partial_{A\dot{B}}x_A = \frac{mc}{\hbar}\phi_{\dot{B}}$ <p style="text-align: center;">$x_A \equiv$ Componente espinorial izquierda de ψ</p> <p style="text-align: center;">$\phi_{\dot{B}} \equiv$ Componente espinorial derecha de ψ</p>

4.4. What are Spinors?

W. Rindler, 1966, What are Spinors? Southwest Center for Advanced Studies, Dallas, Texas. (No. 75230)

En el artículo se argumenta por qué los espinores deben ser considerados los “building bricks”, esta argumentación presenta el sesgo metodológico bajo el cual no es necesario comprobar que un principio se aplica a todas las leyes habidas y por haber de la física, testeándolas individualmente, por el contrario, afirma que toda notación que en su estructura presente las simetrías de una teoría física puede considerarse “building bricks” y por lo tanto, solo se requiere el expresar las leyes en tal notación para comprobar que se cumple la teoría, es por ellos que el espinor es un símil heurístico del tensor. Este artículo además es útil por presentar el álgebra de los espinores como anexo, además de presentar algunas de las ecuaciones que se pueden pasar de los tensores a los espinores evidenciado que se reduce el número de elementos como en el tensor de Maxwell o en la ecuación de Dirac. Se destaca que la presentación del álgebra en este artículo se limita a un cuarto de página lo cual se califica de insuficiente como propedéutica al formalismo espinorial.

Este último apunte, apela a la necesidad de que es absolutamente necesario crear una ruta de aprendizaje que muestre con mayor claridad una guía que aspire a subsanar la esperanza de un aprendizaje suficiente de la teoría espinorial que permita comprender la naturaleza de estos objetos matemáticos.

5. MARCO TEÓRICO

Uno de los elementos teóricos a tratar previamente, que permite dar un panorama ampliado del sentido físico de los espinores debido a su estrecha relación, además de ser una de las teorías que aparecen de manera natural al indagar sobre el formalismo de los espinores, es la teoría del momento angular; específicamente aquella que versa sobre los comportamientos de partículas con espín $\frac{1}{2}$. Las teorías del momento angular cuántico y clásico se diferencian fundamentalmente en que los comportamientos, para la clásica, se pueden describir a partir de las tres componentes espaciales cartesianas, mientras que en la teoría cuántica las tres componentes espaciales (formalmente se habla de los observables), no están perfectamente definidas, a diferencia del caso clásico (Spinel, 2010). Es decir que, para el formalismo de la mecánica cuántica los operadores pueden ser compatibles e incompatibles. En mecánica clásica los observables son en general compatibles, mientras que en mecánica cuántica varios de los operadores u observables son incompatibles, razón por la cual se debe definir una nueva operación. Dicha relación de compatibilidad e incompatibilidad logra su definición gracias a la operación antisimétrica denominada conmutador, en consecuencia, con lo anterior, se debe tener presente que: dos observables son compatibles sí su conmutador es nulo, por el contrario, si el conmutador no es nulo los observables son incompatibles. Por lo cual, se muestra a continuación cómo se definen los observables desde los operadores (teniendo presente que los operadores que se trabajarán tienen la importante función de generar las rotaciones en el espacio en el que son definidos “generadores del grupo⁶”) y las relaciones de conmutación de los generadores de rotación (estos presentes en la teoría como consecuencia de estar cimentada en la teoría de los grupos de Lie, donde adquiere su definición: aquella en la que se le asume como un álgebra asociativa y no conmutativa, con elemento identidad, donde es definida una

⁶ En algunos textos también se suelen llamar ecuaciones de estructura.

operación “corchetes de Lie” que se suele representar de la siguiente forma “[,]”⁷) (Rodríguez, 2007)

Aquí, se evidencian algunas de las cualidades importantes para la teoría cuántica del momento angular, principalmente las relaciones de conmutación para los observables, que posteriormente se relacionarán con la teoría de los espinores (Capítulo 1).

A continuación, se iniciará con la definición de los grupos de rotación expresando sus propiedades y su correlación con los grupos de Lie, para luego presentar el operador de momento angular; elemento que en conjunto con los grupos de rotación darán paso a la formulación del operador de rotación $\hat{R}(\phi, \vec{n})$, ya con éste se da la primera definición aproximada de espinor; el operador de momento angular \hat{J} será el objeto que estará bajo la operación definida por el algebra asociativa no conmutativa y con identidad. Esta es una de las razones por las que en el siguiente apartado se menciona los ángulos infinitesimales ya que, gracias a estos, es posible establecer una relación con la identidad y es posible definir al operador \hat{J} de tal forma que pueda aplicada la operación definida[,], teniendo en cuenta que \hat{J} es una matriz antisimétrica, presentadas en las propiedades del grupo número III.

5.1. El Operador de Rotación:

Se iniciará aquí con la definición de los grupos, pues, ellos darán las propiedades circunscritas al operador de rotación, dichos grupos son una suerte de estructuras algebraicas G y poseen como operación el producto. Esta estructura algebraica presenta cuatro propiedades (García, 2017). Para efectos prácticos se presenta un cuadro comparativo en el Anexo A, entre la notación para las propiedades en general y cómo se aplican al operador de rotación ver (Tabla 4) Cuadro Comparativo Presentando las Propiedades de los Grupos Algebraicos y las Propiedades de los Operadores de Rotación).

⁷ La operación de conmutación “los corchetes de Lie” debe comprobar la anti-simetría y la identidad de Jacobi (Rodríguez, 2007)

$$\begin{aligned} [A, B] &= -[B, A] \\ [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= 0 \end{aligned}$$

Teniendo lo anterior presente y recordando que en mecánica clásica se tiene un tipo de rotación representado por la matriz $A_n(\alpha)$, la cual da cuenta de una rotación alrededor de un eje (usualmente z) con un ángulo α ,

$$A_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

De igual forma el operador de rotación $\hat{R}_{n_i}(\phi_i, \vec{n})$ deberá representar la rotación en un ángulo alrededor de un eje, que particularmente, está orientado en la dirección del vector unitario \vec{n} : este vector debe cumplir que $\|\vec{n}\|^2 = 1$ (Ver figura 1)

5.2. El Operador Momento Angular total:

Continuando con el razonamiento anterior se introduce una definición, a saber, la del operador de momento angular total de un sistema de manera genérica: lo que implica que para un sistema de partículas situadas en torno a un eje y que presenten momento angular independiente, se define, la suma vectorial de los momentos angulares de todas las partículas individuales (Spinel, 2010),

$$\hat{J} = \hat{J}_1 \vec{e}_1 + \hat{J}_2 \vec{e}_2 + \dots + \hat{J}_i \vec{e}_i \quad (5.2)$$

Donde \vec{e}_i es el i -ésimo eje componente de cada una de las partículas individuales. Adicional a esto, es necesario definir un operador de proyección \hat{J}_n , que da cuenta de la proyección del momento angular total \hat{J} del sistema de partículas dado, sobre un vector unitario \hat{n} el cual pertenece a \mathbb{R}^3 en dirección del eje de rotación \vec{n} , de esta forma damos continuidad a la afirmación que presenta la introducción de este marco teórico y definimos todos los posibles momentos angulares de las partículas en función de un solo sistema mediado por el eje \vec{n} para \mathbb{R}^3

$$\hat{J}_n = \langle \hat{J}, \vec{n} \rangle \quad (5.2.1)$$

Se debe tener en cuenta que los paréntesis \langle, \rangle expresan el producto interno de dos vectores. Para explicitar lo anterior en la *Ec.* (5.2.2) se presenta la forma como se deduce el producto interno con el vector unitario \hat{n} expresado en función del sistema de coordenadas cartesianas,

la deducción geométrica de estas proyecciones se presenta en la Figura 1. Nótese además que los parámetros, tomando los ejes cartesianos, son en total tres (x_1, x_2, x_3) , mientras que al emplear un eje de rotación reducimos sus parámetros a, únicamente, dos (α, β) que indican dos ángulos, esto es importante debido al hecho de que ciertos grupos de Lie pueden ser calificados a partir del número de parámetros libres:

$$\hat{J}_n = \hat{J}_1 \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \hat{J}_2 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle + \hat{J}_3 \cos(\beta) \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle \quad (5.2.2)$$

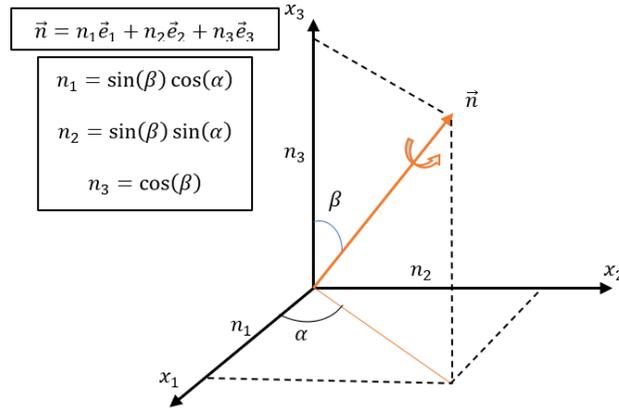


Figura 1. Proyección del vector \vec{n} en coordenadas esféricas con respecto a un sistema de coordenada rectangular (Construcción propia).

Ahora formalmente se presenta, el operador de rotación para la teoría cuántica el cual integra en su definición los dos elementos teóricos presentados con antelación: los grupos algebraicos (las propiedades enunciadas) y los operadores \hat{J} , \hat{J}_n : momento angular total de un sistema y proyección del momento angular total sobre el vector unitario de \vec{n} en \mathbb{R}^3 respectivamente, el primero implícito en la definición del segundo, los cuales hacen parte del argumento de la función exponencial con la que con frecuencia se suele denotar al operador de rotación en mecánica cuántica, para rotaciones finitas:

$$\hat{R}_n(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{J}_n \phi} \quad (5.2.3)$$

O de forma equivalente para ángulos muy pequeños $\epsilon \ll 1$ es decir para rotaciones infinitesimales,

$$\hat{R}_n(\epsilon) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{J}_n \epsilon \quad (5.2.4)$$

Por tanto, este operador de rotación dará cuenta de las rotaciones del espacio en \mathbb{R}^3 en función del operador de momento angular que se encuentra en su argumento, estas rotaciones se darán en un ángulo ϕ o por conveniencia operacional en ángulos muy pequeños ε . El emplear estos ángulos infinitamente pequeños tiene a la base la necesidad de definir la ecuación (5.2.3) a partir de la ecuación (5.2.4) la cual nos permite definir una matriz de rotación clásica (en cuyo argumento se encuentran funciones trigonométricas, ver Ec.(5.2.2)) como la suma entre la matriz identidad $\hat{1}$ y el producto del ángulo infinitesimal por una matriz antisimétrica \hat{j}_n , o generador de rotación Ec.(5.2.4). Esto como consecuencia de evaluar las expresiones trigonométricas de la matriz de rotación con los ángulos infinitesimales ε , este tratamiento se verá con más detalle en la sección siguiente (para profundizar en los generadores de la rotación ver Anexo C. Generadores de la rotación, Rotaciones en el espacio), nótese que el expresar el operador de rotación como la suma entre la identidad más un término que contiene el ángulo, procura que se cumpla la propiedad para los grupos, número III (ver Tabla.1 Anexo A) denominada identidad o elemento neutro como operador de identidad.

A continuación, se indagará en las relaciones de conmutación para el momento angular en su acepción más operacional y explícita posible, puesto que estos resultados se retomarán en los subsecuentes capítulos: allí se explicitará su interpretación dentro de la teoría de los espinores.

En particular se indagará sobre la relación existente entre el número de variables discretas para el momento angular cinético $(2s + 1)$ con las representaciones irreducibles que son invariantes bajo rotaciones y reversiones, en el que se argumentará que es posible construir representaciones como consecuencia del producto de representaciones irreducibles $(2s + 1)(2s' + 1)$.

5.3. La Relación de Conmutación para el Momento Angular

Al comienzo del marco teórico se realizaron dos afirmaciones importantes con respecto a la naturaleza del momento angular referido a la cuántica y cómo se diferenciaba de la teoría del momento angular de la clásica. Se estableció que, se hacía mención a la definición del momento en función de las componentes cartesianas en mecánica clásica y mecánica cuántica, aunque en la clásica existía una descripción precisa de las componentes cartesianas de esta magnitud, mientras que, en mecánica cuántica no están definidas simultáneamente, añadiendo

a esta última afirmación el hecho de ser “mutuamente incompatibles” (Spinel, 2010), con lo cual se postula al comienzo de la siguiente deducción que la forma en que sus componentes se relacionan es de forma anti-conmutativa, por consiguiente, se emplearán las propiedades del grupo algebraico definido con anterioridad y se deducen los observables para el momento angular total de un sistema cuántico.

Se parte desde las matrices de rotación para el sistema coordenado cartesiano A_n donde las rotaciones en consideración son del tipo infinitesimal, es decir que $\cos(\varepsilon) \cong 1$ y $\text{sen}(\varepsilon) \cong \varepsilon$ (Ver Tabla 9. Anexo C, para este caso se busca que los operadores de rotación no conmuten, esto se logra expresando coseno de un ángulo infinitesimal en forma de serie con el polinomio de Taylor (Anexo B- Ec.(F)) considerando solo hasta su segunda aproximación (Spinel, 2010), llegando las matrices de rotación de la forma

$$A_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix} \quad A_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, a continuación, se demuestra la anti-conmutatividad del primer orden de la aproximación de la función coseno para A_x y A_y : con la intención de evidenciar que la no anti-conmutatividad del primer orden se da por aproximación:

$$A_x(\varepsilon)A_y(\varepsilon) - A_y(\varepsilon)A_x(\varepsilon) \tag{5.3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [0]$$

Aquí se hizo la simplificación de los términos que estaban en el segundo orden, tomando en consideración únicamente los de primer orden, por lo tanto, siguiendo el razonamiento anterior, se hará la revisión del segundo orden con el fin de establecer una relación:

$$\begin{aligned} & A_x(\varepsilon)A_y(\varepsilon) - A_y(\varepsilon)A_x(\varepsilon) \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2} \\ -\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2} & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & \varepsilon^2 & \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2} \\ 0 & 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2} & 1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{4} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & \frac{\varepsilon^3}{2} \\ \varepsilon^2 & 0 & \frac{\varepsilon^3}{2} \\ \frac{\varepsilon^3}{2} & \frac{\varepsilon^3}{2} & 0 \end{pmatrix} = [0] \end{aligned}$$

Al igual que en la primera aproximación se eliminan los términos de segundo orden o superiores, en consecuencia, esta última matriz toma la forma:

$$\begin{aligned} & A_z(\varepsilon^2) - \hat{1} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$A_x(\varepsilon)A_y(\varepsilon) - A_y(\varepsilon)A_x(\varepsilon) = A_z(\varepsilon^2) - \hat{1} \quad (5.3.1)$$

Esto implica que se obtiene la matriz generadora de la rotación entorno al eje z, pero al cuadrado. Luego procedemos, con el equivalente cuántico de los grupos clásicos con lo que se busca obtener las relaciones de conmutación con los operadores de rotación, el desarrollo completo se puede ver en el Anexo A, Tabla 2: Deducción de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular total a partir de los operadores de rotación.

En este caso, las componentes cartesianas del momento angular se resumen, en función de la relación de conmutación:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad (5.3.2)$$

Recapitulando, la deducción que precede se realiza desde las propiedades del grupo de matrices de rotación clásicas (Ma. Spinel.pág.339) y se puede afirmar que:

- La ecuación deducida resume las propiedades del grupo.
- La ecuación define el algebra que satisface los generadores del grupo de rotación.

(Spinel, 2010)

Finalmente, se menciona la importancia de la ecuación (5.3.2) ya que ella permite deducir el formalismo de Pauli, el cual surge de la representación matricial de los estados y los operadores del momento angular de espín, lo cual se trabajará a continuación.

5.4. Matrices de Pauli

Para la obtención de las matrices de Pauli se debe tener presente la manera en que conmutan los generadores de la rotación en el caso de \mathbb{R}^3 los cuales representan lo obtenido en la Ec. (5.3.2) de manera explícita \hat{J}_n :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De manera compacta, se presentan como:

$$j_x j_y - j_y j_x = j_z \quad (5.4)$$

$$j_y j_z - j_z j_y = j_x \quad (5.4.1)$$

$$j_z j_x - j_x j_z = j_y \quad (5.4.2)$$

Por su parte, el momento angular intrínseco notado por \hat{S}_n debe cumplir con esta misma ley de conmutación ya que hemos demostrado en la sección anterior que el momento angular para el caso de la mecánica cuántica obedece a la ecuación deducida (5.3.2) lo que en términos prácticos hemos notado por las Ec. (5.4), (5.4.1), (5.4.2), además téngase en cuenta que experimentalmente conocemos el autovalor \hat{S}_z (5.4.6), en consecuencia las reglas de conmutación para el momento angular intrínseco quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x \sim \hat{S}_z \quad (5.4.3)$$

$$\hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y \sim \hat{S}_x \quad (5.4.4)$$

$$\hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z \sim \hat{S}_y \quad (5.4.5)$$

De estas ecuaciones, se requiere la deducción de \hat{S}_y y \hat{S}_x ya que conocemos a \hat{S}_z , la cual se obtiene de manera empírica en 1922 gracias al experimento de Stern- Gerlach, este desarrollo se encuentra completo en el Anexo 1, Tabla 3, Deducción de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular intrínseco a partir de las relaciones de anti-conmutación heredadas del momento angular total, Por tanto, la matriz que representa el operador \hat{S}_z , queda expresada como:

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \quad (5.4.6)$$

$$\text{traza } \hat{S}_z = 0 \quad (5.4.7)$$

$$\det \hat{S}_z = -\frac{\hbar^2}{4} \quad (5.4.8)$$

Esta matriz, además, adiciona la necesidad, por simetría, que las matrices \hat{S}_y y \hat{S}_x deberían tener el mismo determinante, la misma traza \hat{S}_z y ser invariantes bajo transformaciones unitarias al igual que \hat{S}_z . Por lo tanto, se empleará la matriz hermitiana o auto-adjunta para atender a las condiciones previamente presentadas⁸, de esta forma se busca construir un sistema maximal completo tal que los operadores que se están construyendo correspondan a observables en la mecánica cuántica, para ello se emplea el hecho de que los valores propios de una matriz hermítica son reales, se elige, una matriz hermítica 2x2 con entradas indeterminadas a, b, c , que se determinarán a partir de las propiedades de \hat{S}_z . Por lo tanto, de manera general se propone la matriz \hat{S}_y en la base de estados propios de \hat{S}_z así:

$$\hat{S}_y = \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & -a \end{pmatrix} \quad (5.4.9)$$

⁸ Se debe tener presente que las matrices que se buscan determinar son operadores simétricos, en el caso del espacio Euclídeo (E) la condición para que el operador T sea simétrico radica en que sea igual a su transpuesto, Esto último explica el momento angular en mecánica clásica. (discusión que apoya lo mencionado al comienzo del capítulo) por lo tanto, como consecuencia del operador:

- ⊗ T es simétrico si y solo si la matriz asociada A a T es ortogonal:
- ⊗ Si B es una base cualquiera de un espacio E , G es la matriz de Gram, en la base B y A es la matriz asociada del operador T en B , entonces, T es ortogonal $\Leftrightarrow GA = A^t G$
- ⊗ Dos subespacios propios de T que corresponden a valores propios distintos son ortogonales
 - Todo operador simétrico en un espacio Euclídeo de dimensión n posee n valores propios reales
 - El subespacio ortogonal a un vector propio de un operador simétrico T en un espacio Euclídeo es invariante por este operador

Para espacios de dimensión finita, específicamente en el espacio de Hilbert, para que el operador simétrico con el que se está trabajando sea un observable en mecánica cuántica, es necesario que cuando se realice su descomposición espectral, sus autovalores sean reales, y sus autovectores sean ortogonales. Por lo cual se propone la expresión de la ecuación (5.4.9), la cual cumple con los requisitos para ser un observable.

(Sáenz, 2022)

$$\text{traza } \hat{S}_y = 0 \quad (5.4.10)$$

$$\det \hat{S}_y = -a^2 - b^2 - c^2 = -\frac{\hbar^2}{4} \quad (5.4.11)$$

De la misma forma, se obtiene la matriz que representa a \hat{S}_x :

$$\hat{S}_x = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & ib - c \\ -ib - c & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.12)$$

Usando las expresiones (5.4.9) y (5.4.12) y empleando la relación de composición (5.4.3), se debe cumplir la relación de conmutación entre los operadores \hat{S}_x y \hat{S}_y , (el cual se desarrolla completamente en el Anexo 1, Tabla 5), obteniendo el siguiente resultado para el conmutador:

$$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x = \hbar i \begin{pmatrix} \frac{2}{\hbar}(b^2 + c^2) & -\frac{2}{\hbar}a(b + ic) \\ -\frac{2}{\hbar}(b - ic) & -\frac{2}{\hbar}(b^2 + c^2) \end{pmatrix} \quad (5.4.13)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta el resultado anterior, y la ecuación (5.4.3) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\hbar}(b^2 + c^2) & -\frac{2}{\hbar}a(b + ic) \\ -\frac{2}{\hbar}(b - ic) & -\frac{2}{\hbar}(b^2 + c^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \quad (5.4.14)$$

De esta forma, es ineludible que el coeficiente "a" sea igual a cero para cumplir con la igualdad.

Con lo cual se redefinen las matrices para \hat{S}_y y \hat{S}_x de la siguiente manera:

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & ib - c \\ -ib - c & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.15)$$

$$\hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & b + ic \\ b - ic & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.16)$$

A partir de las definiciones(5.4.14) y (5.4.15), Pauli eligió, históricamente, para los coeficientes que satisfacen la relación:

$$b = 0 \quad (5.4.19)$$

$$c = -\frac{\hbar}{2} \quad (5.4.20)$$

Sin embargo, si se emplea la relación que impone al coeficiente "a" ser inevitablemente igual a cero, los coeficientes pueden ser opcionalmente descritos por la siguiente definición (García, 2017):

$$b^2 + c^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (5.4.21)$$

Que equivaldría al determinante de las matrices \hat{S}_x , \hat{S}_y y \hat{S}_z . Ec.(5.4.11) y (5.4.8). Finalmente, la representación matricial de los operadores que expresan el momento angular intrínseco, serán para las componentes cartesianas las siguientes:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.22)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.23)$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.4.24)$$

Estos operadores, al igual que \hat{j}_n , serán los generadores de la rotación de los sistemas cuánticos con espín $1/2$.

5.6. Estado Arbitrario de un Sistema con Espín $1/2$

Retomando el operador de rotación el cual representa la rotación sobre el eje z para un ángulo finito ϕ , como:

$$\hat{R}_n(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{j}_z \phi} \quad (5.4.25)$$

En este caso al tratar con un sistema con espín $\frac{1}{2}$, en lugar de emplear el operador de proyección \hat{j}_z , emplearemos el operador de momento intrínseco o de espín \hat{S}_z . De esta forma se expresa el operador de rotación como:

$$\hat{R}_n(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{S}_z\phi} \quad (5.4.26)$$

La representación del estado arbitrario de espín se expresa como el ket $|\psi\rangle$ y su respectivo ket imagen se define por la aplicación que involucra el operador de rotación. Así que, la representación del estado arbitrario será: (Spinel, 2010)

$$|\psi\rangle = \hat{R}_n(\phi)|\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{S}_z\phi}|\psi\rangle$$

Ahora se establecen las bases de los kets propios para que de esta forma se pueda determinar el estado arbitrario de espín:

$$|\psi\rangle = C_+|s_z +\rangle + C_-|s_z -\rangle$$

$$|\psi\rangle = C_+e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{S}_z\phi}|s_z +\rangle + C_-e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{S}_z\phi}|s_z -\rangle$$

$$|\psi\rangle = C_+e^{-\frac{i\phi}{2}}|s_z +\rangle + C_-e^{\frac{i\phi}{2}}|s_z -\rangle$$

Aquí los estados $|s_z +\rangle$ y $|s_z -\rangle$ representan los estados propios del operador de espín \hat{S}_z . En este paso se remplazarán los valores de \hat{S}_z , que son $\hbar/2$ y $-\hbar/2$ respectivamente. Con lo cual se concluye que:

“...comparado con el estado original, se observa que el efecto de la rotación es cambiar la fase relativa de los estados componentes, de manera que la superposición que define el estado imagen es en general diferente del estado original...” (Spinel, 2010)

De esta manera, se presenta que el estado de espín es arbitrario y no depende del estado originalmente definido; y como segunda conclusión:

“...el ket imagen es igual al ket original, cada vez que el ϕ es un múltiplo entero de 4π , mientras que el valor esperado en... [”⁹

$$\langle \hat{S}_i \rangle = \sum_k A_{ik} \langle \hat{S}_k \rangle$$

]... coinciden con los valores originales cada vez que ϕ es un múltiplo entero de 2π , por lo tanto, el periodo para los kets es el doble del periodo de los valores esperados cuánticos o de las matrices de rotación clásicas...” (Ma. Spinel. Pág.342)

Fiablemente ya deducido el formalismo de Pauli, expresadas las propiedades asociadas al momento angular de espín y dejado de forma detallada cómo se hallaron estos, se han manifestado los aspectos más importantes de la teoría del momento angular cuántico, sin que se pueda afirmar más del espín 1/2 desde la teoría. Procedemos a conectar estas nociones y conceptos con el de la teoría de los espinores, donde las regularidades y conexiones, más que confirmar la teoría, buscan enriquecer conceptualmente la definición desde una perspectiva no dimensionada de la teoría inicialmente tratada. Es solo desde este estudio cuidadoso que se puede empezar a indagar las hipótesis planteadas para el presente trabajo de grado.

6. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Para este proyecto y su naturaleza se usó la metodología cuantitativa analítica de tal forma que se pudo estudiar a los espinores como fenómenos debido a sus atributos, los pasos que guiaron esta metodología según Muñoz-Razo (1998) fueron:

- Para la observación del fenómeno se recurrió a los escritos de Élie Cartan, particularmente el escrito póstumo titulado “teoría de los espinores”, tratando de discernir cómo los espinores se emplean en su teoría; el papel y definición que le merecen en función de esta, limitando los alcances de la indagación a fin de debelar aspectos generales como lo son naturaleza, elementos necesarios para definición, algebra y operatividad a nivel propedéutico.

⁹ Se emplean los paréntesis cuadrados “[...]” para hacer un alto en la cita e introducir la aclaración

- Con base en lo anterior, conociendo las componentes y comportamientos que describen al espinor, se procedió a caracterizar individualmente estos aspectos; presentando de forma más detallada sus atributos y la matemática que subyace. Profundizando tanto como sea posible, particularmente sobre el momento angular intrínseco que se asume de forma natural en la teoría, con un interés especial por la forma natural con la que se encuentran las matrices de Pauli, es decir, de los observables de este momento angular intrínseco.
- Luego se realizó un examen riguroso de cada uno de los elementos que le componen desde el punto de vista físico y pedagógico en aspectos como claridad de la notación, lo explícito de sus contenidos y la facilidad de acceso.
- Para continuar se requirió que se descomponga el examen previo en componentes y partes formales con el fin de evitar ambigüedades en tales análisis, haciendo indispensable extenderse en cuanto fue necesario en formas explicativas de elementos accesorios, si estos dan claridad a los elementos de los que se derivan.
- Con la descomposición y análisis se procedió a mirar cómo sus componentes se relacionan y cómo son ese tipo de relaciones, si son contingentes o necesarias.
- Con esto se pudo clasificar las partes gracias al proceso de análisis realizado. Para ello se hizo indispensable el uso de la herramienta metodológica meta-analítica, en la cual se sirvió como instrumento de recolección de información la ficha bibliográfica y posteriormente de herramientas metacognitivas para la clasificación y categorización, enfocándose en documentos que tengan como intención realizar una presentación propedéutica del espinor.
- Finalmente se concluyó con los resultados obtenidos, donde primero se deja una explicación del fenómeno observado y segundo se presentan algunas recomendaciones acerca de la notación al momento de introducirla en el aula. Esto se entiende como la ruta sugerida para el proceso de aprendizaje en función de la clasificación y categorización de los documentos.

7. CAPÍTULO I. SOBRE LA IMPORTANCIA DE LOS ESPINORES

En este capítulo se pondrá de presente la importancia de la enseñanza de los espinores en la educación superior, esgrimiendo entre las dificultades de la enseñanza desde una perspectiva global, hasta llegar al caso particular de los espinores, concepto en el que se centra el trabajo. Posteriormente se pasa a dar un primer esbozo del espinor, centrado en los trabajos de Élie Joseph Cartan, uno de los principales autores que han aportado en la comprensión de este concepto.

La búsqueda de una teoría del momento angular intrínseco a comienzos del siglo XX dio como resultado la formulación de la famosa ecuación de Dirac, esta ecuación requirió para su comprensión, diversas reformulaciones a partir del algebra de Clifford¹⁰. Quienes realizaron estas reformulaciones también dieron sus propias definiciones de espinores, entre ellas los 3-espinores de los cuales es posible deducir posteriormente los 4-espinores de Van Der Weerden, los espinores derechos e izquierdos de Weyl, los espinores de Majorana definidos a partir de los espinores de Weyl, además de los espinores de Dirac. Para que finalmente entre los años de 1928 y 1933 físicos como Weyl, Fock, Schödinger entre otros demostraron que la ecuación de onda para el electrón de Dirac se podía incorporar dentro del marco de la relatividad general (Castillo, 1986) , y de los que nos ocupamos en este trabajo, los espinores de Cartan¹¹.

Enfatizando particularmente en este periodo histórico, se destaca el trabajo de Élie Cartan sobre la teoría de los espinores realizado durante la primera década del siglo XX (Streater, 1966). Así, para dar respuesta a la pregunta que guía el presente trabajo, se requiere profundizar tanto más en las implicaciones fundamentales que trajo consigo la teoría de Cartan, usualmente calificada como generadora de una revolución cognitiva en el campo disciplinar

¹⁰ Un algebra asociada a un espacio vectorial cuadrático (V, h) , es un par $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ que será un álgebra que satisfaga ciertas reglas de compatibilidad con \mathcal{J} un mapa lineal, donde \mathcal{A} es un algebra unital, asociativa y real y \mathcal{J} es una aplicación lineal e inyectiva que satisface las siguientes propiedades. i). $1_{\mathcal{A}} \notin \mathcal{J}(V) \subset \mathcal{A}$ (La identidad de \mathcal{A} no pertenece a la imagen de \mathcal{J}). ii). $\mathcal{J}(v)^2 = h(v, v) 1_{\mathcal{A}}$ con $v \in V$ (Los elementos en la imagen de \mathcal{J} satisfacen la regla de compatibilidad con los elementos existentes en \mathcal{A})” Regla de composición”. iii). $\mathcal{J}(V)$ genera \mathcal{A} (la imagen de V por \mathcal{J} genera \mathcal{A}). (Carlos Shahbazi, 2021, álgebras de Clifford y Grupos de espín)

¹¹ En algunos textos también mencionados como bi-espinores

(Cuesta-Beltrán, 2018), a causa de ser capaz de evidenciar una idea de la naturaleza del espacio-tiempo en función del momento angular intrínseco de los electrones.

La teoría espinorial presenta un antes y un después en cuanto a la forma de concebir los fenómenos físicos, es decir, los conceptos que habían sido acumulados y progresivamente consolidados, como se muestra en el marco teórico, para afianzarlos firmemente por parte de la cultura científica en general; referenciada como conocimiento físico aceptado, que fue desplazada a un marco muy concreto por estas nuevas ideas y, en consecuencia, sus concepciones se reducen a la par con su propio alcance; donde conceptos como localidad, estado, determinismo junto con causalidad, trayectoria y espacio-tiempo, etc. (Greca.M, 2002) se abordan de una manera diferente gracias a la física moderna, en contraste al abordaje clásico.

En ese orden de ideas, una teoría de estas características, a saber, capaz de modificar tan profundamente en el pensamiento científico, sin lugar a duda puede ser llevada a las academias especializadas para su enseñanza, de tal forma que los futuros académicos tengan la posibilidad de acercarse a teorías de mayores alcances y de significativos cambios conceptuales profundos durante el desarrollo del pensamiento humano.

Esta idea es ya bastante aceptada entre estudiosos de la educación, sin embargo, se ha evidenciado que la necesidad de enseñar teorías de este tipo que se oponen y suponen un cambio a las ideas clásicas, pueden naturalmente, ser resistidas por los estudiantes. Ahora bien, las propuestas de investigación que ponen de presupuesto este inconveniente suelen enfocarse en la enseñanza media y muy pocas de ellas se orientan en propuestas para los estudiantes universitarios (Greca.M, 2002) (Greca I. M., 2001)

En consecuencia, es importante ahondar en esta cuestión, entiéndase, cuáles son las dificultades por las que se ve la necesidad de investigar la enseñanza de la física moderna. Para ello se hace uso a continuación de un estado del arte¹² respecto a las tendencias en la enseñanza de la física cuántica entre 1986 y 2016, presentada en una charla TED (Tecnología,

¹² Un estado del arte presenta un estudio del conocimiento acumulado en documentos que emplean la escritura respecto a un saber específico de tal forma que se les permita sistematizar, inventariar y presentar reflexiones en relación con el conocimiento que se está empleando, dichas reflexiones permiten reconocer tendencia en los documentos revisados, así como también las omisiones en los mismos (Vargas y Clavo 1893)

Entretención y Diseño) (Cuesta-Beltrán, 2018). El propósito de dicho documento es mostrar siete tendencias útiles para futuras investigaciones encaminadas al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la física moderna. Sin embargo, aquí se presentarán, solo aquellas que apoyan y motivan esta investigación. A continuación, se muestran las principales ideas y autores.

Inicialmente se propone que, frente a las afirmaciones, [...“se privilegia en las clases los procesos algorítmicos sobre los procesos de construcción conceptual, y se añade la dificultad frente a la obtención de conocimientos cuando los educandos no poseen una base matemática sólida”...¹³] [...“respecto a los cursos introductorios de FC (Física Cuántica) los temas presentados son abordados con formalismos matemáticos superiores, ..., provocando que los estudiantes se alejen de la “realidad”, ocasionando principalmente que las múltiples abstracciones algorítmicas se presenten con escasas interpretaciones y reflexiones”]...¹⁴ Por lo tanto, es posible afirmar, que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se presenta la ausencia de cursos **introductorios** que den satisfactoriamente la proporción adecuada entre formalismo propio del tema de enseñanza, desarrollo conceptual y, en un menor grado, atención a las bases matemáticas de los estudiantes que en general se consideran débiles.

Además, genera una visión instrumentalista de la teoría, lo que aleja tanto más a los estudiantes de la ciencia, se presenta que dicha visión es producto de la forma procedimental: en la que se comienza con formalismo y se concluye con desarrollo conceptual, sin embargo, se resalta que [...“los libros de texto de enseñanza de FC se centran en desarrollos matemáticos por encima de los desarrollos conceptuales... en términos generales los textos presentan ausencias en fenómenos físicos y significado de las abstracciones, dejando como producto una visión instrumentalista de la física transmitida a los estudiantes y a los maestros” (Koopman, Kaper, & Ellermeijer, 2005), (Vizcaino, 2016)...] pero particularmente Koopman resalta que: la discontinuidad entre la formalización matemática y la construcción conceptual, abordados en

¹³ (Akarsu, 2010), (Cid M. R., 2012), (Solbes, 1987), (Fanaro, a enseñanza de la mecánica cuántica en la Escuela Media (tesis doctoral), 2009), (Frechina J. , 1996), (Greca I. M., 2001), (Hobson, 1994), (Monteiro, Discursos de profesores e de livros didáticos de física do nível médio em abordagens sobre o ensino da física moderna e contemporânea: algumas implicações educacionais (tesis doctoral), 2010), (Moreno & Guarín, 2010), (Muller, 2008), (Pantoja, Moreira, & Herscovitz, 2013), (Sinarcas & Solbes, 2013)

¹⁴ (Greca & Herscovitz, onstruyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario., 2002))

los textos se realiza en ese orden respectivamente. Esto nos deja ver que será primordial que dichos procesos no se enseñen de manera sedimentada o discontinua pues lleva a vacíos importantes en la comprensión.

Con lo cual, se debe examinar ahora, cuáles son los posibles factores que provocan y causan que en el aula existan errores conceptuales profundos. En primera medida tenemos escritos de gran alcance formal y sentido matemático, útil para las ciencias físicas, pero escritos desde una cosmovisión no pensada a partir de la rama disciplinar que pretende abordar, por el contrario, se realiza desde estadios más axiomáticos y con reglas y entes a estudiar distintos que, naturalmente, se relacionan pero que en un sentido estricto no son similares.

Es el caso de escritores con formación netamente matemática que encuentran en su disciplina abstracciones más eficientes que las empleadas en la física y que pretenden transitar desde su rama de conocimiento a la rama que pretenden llevar sus avances y descubrimientos (en el caso puntual a la física), lo cual termina por ser, frente al modelo aceptado, sinuosamente insuficiente si se desea abordar el fenómeno o la teoría desde este único marco.

Sin embargo, esto puede ser omitido por un estudiante que apenas se enfrenta a un tema que desconoce, por lo tanto, se considera primordial que existan investigaciones que clarifiquen cuales documentos pueden presentar errores, desde el punto de vista pedagógico, es decir, que en sí mismo la teoría está bien fundada, pero que al abordarle desde ese punto particular puede presentar omisiones que dificulten la comprensión o por el contrario información que para el fenómeno o la teoría que se está enseñando y aprendiendo, terminen por ser obstáculos, estas afirmaciones se corroboran con declaraciones del tipo [...“Algunos libros presentan errores conceptuales”...]¹⁵ Identificando dentro de sus causas “... que los libros en muchas ocasiones son escritos por personas que no conocen la FC a profundidad...”¹⁶

Particularmente:¹⁷ opinan que los errores conceptuales son producto de la falta de argumentación por parte de los autores respecto a un modelo, su origen y causas, así como la visión científica positivista sobre la que realizan la mayoría de sus afirmaciones certeras”]). Lo que incentiva una investigación que clasifique y categorice los documentos de indagación

¹⁵ (Gil, Senent, & Solbes, 1986), (Solbes, 1987) (Frechina J. , 1996).

¹⁶ (Frechina J. , 1996).

¹⁷ (Cid, R., & Dasilva, 2012)

y sobre este desarrolle una ruta de aprendizaje: Este enfoque de investigación se conoce como metaanálisis. Entendiendo por metaanálisis una revisión de documentos presentados para un tema en específico y muy particular; se distingue de un estudio del arte porque en este último se mira un conjunto de temas que se enmarcan en una teoría, en cambio, el metaanálisis se centra en un concepto en específico y posteriormente se estudia su empleo e interacción con la teoría que lo acobia. (Stalker,1998).

Finalmente, respecto a las afirmaciones [“muchos de los textos que se escriben sobre FC se abordan de manera cronológica, sin embargo, el abordar estos libros desde una mirada no cronológica, bajo la idea de conocimiento no lineal, puede brindar mayores alcances respecto a la comprensión de teorías y conceptos”¹⁸] y [“Considera que los libros de texto deben ser actualizados con respecto a áreas de interés para la investigación actual, pues muchos de los temas contemporáneos no son incluidos. Además, presenta que dichos documentos influyen determinantemente en la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje de ciencias exactas y aplicadas”]¹⁹, por tanto, se tiene que los textos en física son presentados de manera cronológica dando a entender que el conocimiento es lineal, sin embargo, estos autores consideran bajo la mirada de Cuesta-Beltrán, 2018 que los textos y temas pueden ser abordados de manera no lineal y en consecuencia permitiría mayores alcances en cuanto al aprendizaje y la comprensión de los temas abordados y sustenta además la idea que estarían de base, a saber, que el conocimiento es no lineal, eje fundamental en la enseñanza de la ciencia desde los análisis histórico-críticos, temática que no se profundizará en este documento. Y como segundo elemento tenemos que se hace una inquisición respecto a aquellas áreas de interés en investigación contemporánea que actualmente no se incluyen en los libros de texto. Uno de los conceptos y/o teorías que presenta toda esta serie de dificultades son los espinos.

7.1. El Concepto de Espinor

Los espinos, como ya se mencionó en las primeras secciones de este trabajo, tienen diferentes sistemas teóricos y con ellos definiciones particulares, no obstante. Dentro de todos estos

¹⁸ (Monteiro, Discursos de professores e de livros didáticos de física do nível médio em abordagens sobre o ensino da física moderna e contemporânea: algumas implicações educacionais (tesis doctoral), 2010), (Fanaro, a enseñanza de la mecánica cuántica en la Escuela Media (tesis doctoral), 2009)

¹⁹ (Aubrecht, 1989)

planteamientos, es bien conocido que son un formalismo equiparable al tensorial. Por lo que, a continuación, se mencionan algunas de las distinciones y semejanzas que se pueden encontrar entre los espinores y los tensores desde su algebra: (Rindler, 1966)

- Los espinores son cantidades con índices al igual que los tensores, no obstante, los espinores varían únicamente entre dos cantidades (en los diferentes planteamientos, están: el uno y el cero, el uno y el dos, o índices puntuados y sin puntuar²⁰)
 - En comparación con sus equivalentes los 4-tensores que poseen cuatro índices
- Las transformaciones espinoriales involucran matrices “binarias unimodulares” (Matrices complejas 2×2 con determinante 1) y su respectiva inversa: que permiten índices covariantes y contravariantes.
 - Los tensores presentan índices covariantes y contravariantes
- Los espinores constan de las cuatro operaciones
 - Suma
 - Producto externo
 - Contracción
 - Permutación de índices
- Los espinores se diferencian de los tensores en que poseen conjugación compleja puesto que los espinores son cantidades complejas. Usualmente se presentan con índices primados.

De las principales diferencias entre los formalismos, a saber, la conjugación compleja y un menor número de índices, provoca que ciertas operaciones con el algebra espinorial se consideren más sencillas (Rindler, 1966).

Teniendo en cuenta lo señalado respecto a las semejanzas y diferencias entre los 4-tensores y los espinores, se debe resaltar que un espinor es un vector isotrópico cuyas componentes son ξ_0, ξ_1 , las cuales representan los autovalores del espín (lo cual se desarrolla en la siguiente sección). Nótese que estos autovalores son utilizados como criterio de igualdad (Ec.5.4.6) para la deducción de las matrices de Pauli, realizada en el marco teórico, lo que permite afirmar

²⁰ Estos últimos se pueden observar en la tabla 1 columna 2.

que los generadores de la rotación en el espacio complejo 2-dimensional, se pueden construir a partir de los espinores de Cartan.

7.2. El concepto de Espinor: Definición de Espinor de Élie Joseph Cartan

Élie Joseph Cartan (1859-1951) fue un matemático francés quien de manera temprana descubre los espinores en 1913 como parte de su investigación en los grupos de representación simple, No obstante, la publicación del documento que contiene todos sus descubrimientos y desarrollos frente a los espinores llega de manera póstuma, como una recopilación de notas en 1984, cincuenta y seis años después de la primera publicación formal sobre espinores, (Cartan, 1984), por esta razón es de vital importancia abordar esta primera concepción. Particularmente el documento titulado “*Theory of Spinors (1984)*” pretende, en palabras del autor, procurar un análisis geométrico ya que los documentos previos a su construcción que versan sobre este tema tendían a ser excesivamente formales y poco intuitivos, provocando una irremediable inaplicabilidad a problemas contemporáneo (para atender a estas dificultades Cartan emplea una descripción finita guiada por una construcción geométrica) como consecuencia de la falta de comprensión. Su documento, para efectos de este trabajo se abordará de manera no lineal, pues el documento de Cartan realiza en la primera parte toda una propedéutica a la que nos remitiremos cuando las claridades lo merezcan, para comenzar iniciaremos con la definición de espinor.

La concepción de Cartan sobre el espinor parte de la definición de las formas cuadráticas (Ver Definición 2-Anexo D), de manera general, para ejemplificar este hecho se toma una ecuación cuadrática homogénea en un espacio tridimensional lo que muestra necesariamente que esta ecuación se relaciona con un sistema ortonormal coordinado ver (1), esta ecuación expresa la longitud al cuadrado de un vector tridimensional tomado desde el origen cuyas componentes o coordenadas son (x_1, x_2, x_3)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (1)$$

Al estar la ecuación igualada a cero, indica que se trata de un vector isotrópico (vector de norma nula). Retomando el hecho de que se está trabajando con una forma cuadrática: se sabe del algebra lineal que las formas cuadráticas se pueden estudiar con base a las formas bilineales (Ver Definición 1.-Anexo D) y toda forma bilineal se puede expresar como la suma de una

forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica (Ver definición 1.5-Anexo D). Conforme al método de Lagrange para la reducción de una forma cuadrática a una suma de cuadrados denominada “completar cuadrados” se obtienen dos valores ξ_0, ξ_1 o componentes y se auto definen por el vector isotrópico, ahora surge la interrogante ¿son ξ_0, ξ_1 las únicas soluciones posibles para la reducción del vector isotrópico? O planteada de otra forma ¿en función de las diversas formas de reducción de una forma cuadrática existe alguna certeza de que dichas componentes ξ_0, ξ_1 se garanticen como únicas para la reducción de un vector isotrópico? Para responder a estas interrogantes se recurre a una de las leyes clásicas para el tratamiento de formas cuadráticas “La ley de inercia de Sylvester” la cual se enuncia de la siguiente manera: “en el dominio de los reales, el número de cuadrados positivos y cuadrados negativos son independientes del método de reducción...” (E. Cartan. Pág.11) es decir que el número de cuadrados ξ_0, ξ_1 se mantendrá sin importar el método de reducción. A continuación, se muestra la reducción de vector isotrópico en términos de ξ_0, ξ_1

$$x_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2 \quad (1.1)$$

$$x_2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2) \quad (1.2)$$

$$x_3 = -2\xi_0\xi_1 \quad (1.3)$$

De lo anterior se sigue determinar qué representan las cantidades ξ_0 y ξ_1 de lo que se obtiene

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}} \quad (1.4)$$

$$\xi_1 = \pm \sqrt{\frac{-x_1 - ix_2}{2}} \quad (1.5)$$

Estas dos ecuaciones representan las componentes que constituyen los espinores.: Tal y como lo indica los términos, para las cantidades no es posible dar un cambio consistente de signo para todos los vectores isotrópicos, de aquí que la solución variará continuamente con el vector.

Ahora de la definición presentada se debe tener en cuenta que no es posible dar un cambio consistente de signo para todos los vectores isotrópicos, de aquí que la solución variara

continuamente con el vector. Para evidenciar lo anterior, Se considera elección del vector ξ_0 , para el que se hará rotar alrededor de $0x_3$, sobre el eje x_3 , por medio de un ángulo α , si se toma la expresión $x_1 - ix_2$, que da cuenta de la orientación del vector, ahora será necesario transformar dicha ecuación la cual da cuenta de la variación angular, por lo que se usa la exponencial compleja $e^{-i\alpha}$. Para comenzar el análisis es necesario realizar una rotación completa angular 2π , lo que indicara, por medio de las ecuaciones definidas, que la rotación ocasionaría que el vector isotrópico retornara a su posición original, pero no debemos olvidar que circunscrita a la ecuación se encuentra una raíz lo que causa que nuestra exponencial compleja tenga la forma $e^{-1\alpha/2}$, es decir, en lugar de tomar el valor: $e^{-2i\pi} = 1$, tomara: $e^{i\pi} = -1$. Esto quiere decir que su signo es opuesto a la selección original. (Cartan,1934. Pag 48)

Esto es usualmente representado por banda de Möbius; una superficie de un solo borde y una sola cara. Ver figura 1. Donde se toma el borde de dicha superficie como la dirección en la que apunta el vector para una rotación sobre un eje de un ángulo 2π .

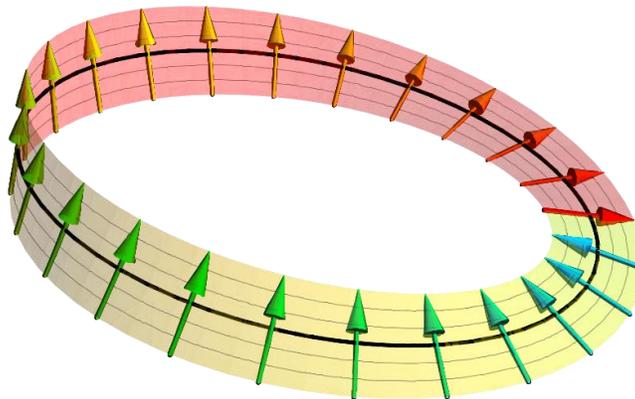


Figura 2 Banda de Möbius.

De lo anterior se debe tener en cuenta que:

- a) Los espinores solo representan direcciones en el espacio, pues al ser vectores isotrópicos su magnitud al cuadrado es igual a cero.
- b) Para que un espinor retorne a su origen es necesaria una doble rotación en un Angulo continuo de 4π

- c) Un par de cantidades ξ_0, ξ_1 constituyen un espinor, entonces, un espinor es entonces un vector isotrópico “dirigido” o “polarizado”; de donde se sigue que una rotación sobre un eje a través de un ángulo 2π cambia la polarización de este vector isotrópico²¹

Uno de los logros importantes de la teoría espinorial es la capacidad de ser comparable a la teoría de los tensores, para ver un poco este grado de comparabilidad debemos recordar la definición de tensor Euclídeo; remitiéndonos a la definición particular de Cartan: En la que un tensor asociado a un grupo G se define por una representación lineal de G , Tal representación lineal tiene unas componentes (u) que definen un objeto. Se restringe la familia de objetos para que se cumplan ciertas relaciones algebraicas²² con tal suerte de que se determine que las componentes de la representación lineal dentro del grupo tengan una interpretación concreta. Las relaciones algebraicas para las que se definió esta familia restringida se encuentran determinadas o sujetas a una doble condición:

- A. Las componentes de los objetos de la familia restringida no satisfacen cualquier relación lineal con coeficientes constantes
- B. La relación algebraica que determina la familia restringida debe permanecer invariante bajo las transformaciones S de la representación lineal

(Cartan, 1984)

A la familia de objetos restringida asociada con un punto cero se le denominara **Tensor Euclídeo**²³.

Ahora, podemos proceder con la afirmación “un espinor es un tensor euclídeo” considerando una rotación o una reversión en un espacio tridimensional, es decir, sean tres direcciones ortogonales y a dichas direcciones ortogonales se les puede asociar nueve cosenos directores $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$. con lo anterior podemos expresar las ecuaciones para las rotaciones (o reversiones) como:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\x'_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 \\x'_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3\end{aligned}$$

²¹ Ibidem.p.49

²² Entre las más relevantes tenemos la Reducibilidad e irreducibilidad de un tensor

²³ Téngase presente que: Dos tensores euclídeos son equivalentes si surgen de la misma representación lineal del grupo s de rotación o de representaciones lineales equivalentes

Ahora considerando el par de componentes asociadas a un vector isotrópico (ξ_0, ξ_1) , sea el par de componentes asociadas al vector transformado (ξ'_0, ξ'_1) entonces, empleando las defunciones obtenidas para la reducción de un vector isotrópico se obtiene:

$$\xi'^2_0 = \frac{1}{2}(\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_0^2 - (\gamma - i\gamma')\xi_0\xi_1 + \frac{1}{2}(-\alpha + i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_1^2 \quad (1.6)$$

Ahora se puede empelar el discriminante²⁴ de una ecuación cuadrática para determinar si ξ'_0 es lineal con respecto al par (ξ_0, ξ_1) , al realizar el cálculo lo que se espera obtener es un cuadrado perfecto²⁵ y que se cumpla la condición de isotropía. Es fácil verificar que esto se cumple, verificando lo mismo para:

$$\xi'^2_1 = \frac{1}{2}(\alpha + i\alpha' - i\beta + \beta')\xi_1^2 + (\gamma + i\gamma')\xi_0\xi_1 + \frac{1}{2}(-\alpha - i\alpha' - i\beta + \beta')\xi_0^2 \quad (1.7)$$

Podemos afirmar que ξ'_1 es lineal con respecto al par (ξ_0, ξ_1) , finalmente para determinar la tercera componente espacial se emplea la ecuación $x_3 = -2\xi_0\xi_1$ y se obtiene:

$$\xi'_0\xi'_1 = -\frac{1}{2}(\alpha'' + i\beta'')\xi_0^2 + \gamma''\xi_0\xi_1 + \frac{1}{2}(\alpha'' - i\beta'')\xi_1^2 \quad (1.8)$$

(Cartan, 1984)

Ahora para mostrar los alcances de la teoría espinorial es pertinente ver la matriz asociada a las direcciones isotrópicas del vector asociado con el espinor ξ

$$\xi_0x_3 + \xi_1(x_1 - ix_2) = 0$$

$$\xi_0(x_1 + ix_2) - \xi_1x_3 = 0$$

Nos interesaremos por ver la base en la que se encuentra expresada las ecuaciones para las direcciones isotrópicas asociadas con el espinor ξ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_3 \right] \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = 0$$

²⁴ E decir, $b^2 - 4ac$

²⁵ A saber: $(\alpha - i\alpha')^2 + (\beta - i\beta')^2 + (\gamma - i\gamma')^2 = 0$

Como se puede observar, la base en la que se expresa el vector asociado a las direcciones isotrópicas se refiere a las matrices de Pauli²⁶.

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$[H_1x_1 + H_2x_2 + H_3x_3] \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = 0$$

Ahora estudiando el algebra de endomorfismo²⁷ de la matriz asociada obtenemos que:

$$\det \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

permite retomar la definición del vector isotrópico. Ahora se indagará sobre la naturaleza de los generadores de la rotación particularmente se busca saber que tipo de operadores son y como se estudian. Para responder a estas preguntas formuladas, recordemos que estas matrices antisimétricas con entradas complejas 2×2 , son operadores cuánticos para la rotación, y para conocer como son estos operadores, es decir, como es su comportamiento, se requiere de indagar sobre el espectro de cada uno de los operadores; de esta forma se evidenciará de manera más clara la naturaleza de los generadores de la rotación, para lo cual se emplea la siguiente expresión:

$$e^{\theta M} = e^{\theta\lambda_1} |v_1\rangle\langle v_1| + e^{-\theta\lambda_2} |v_2\rangle\langle v_2|$$

Aquí λ representa los autovalores de los generadores de la rotación y $|v_i\rangle$ sus vectores propios, al mirar el espectro de los siguientes operadores:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Naturalmente esperamos algo parecido a lo que se obtendría en el espacio 3-dimensional, es decir, una matriz de rotación cuyo argumento sean funciones trigonométricas que den cuenta de la rotación en función de un ángulo, el primer generador H_1 presenta el siguiente espectro

²⁶ Ver Marco teórico (Ec. 5.4.23), (Ec. 5.4.24) y (Ec. 5.4.25)

²⁷ Dado un capto vectorial $V: Endo(V) = \{\zeta: V \rightarrow V\}$ es una aplicación lineal con la estructura de espacio vectorial heredada de V . (Shahbazi, 2021)

$$e^{\theta H_1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Este es un elemento de importancia cardinal; primero porque permite construir la intuición de que el espectro del generador se asemeja al operador que se emplearía en un espacio real, y la segunda razón, es porque muestra que el grupo de las rotaciones es continuo, a saber, que es posible conectar la identidad por medio de una serie continua de rotaciones (Cartan, 1984). Este criterio de grupo continuo será de utilidad en la siguiente sección.

Puntualizando un poco más la definición, teniendo presente la forma fundamental, también se puede afirmar que en un espacio tanto real o complejo Euclídeo donde nuestra forma fundamental se define positiva, el grupo de las rotaciones es continuo. Gracias a esto, más adelante nos será posible definir lo que se denomina “las transformaciones espinoriales asociadas a las rotaciones”

Ahora corresponde revisar lo que se obtiene al calcular el espectro del operador o generador H_2 , del que se obtiene:

$$e^{\theta H_2} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

Intentando emplear un razonamiento inverso al presentado anteriormente, se afirma que se parte de un espacio Pseudo-Euclídeo cuya forma fundamental se define no positiva (ver ecuación (2)) la cual consta de dos grupos disjuntos/inconexos; particularmente Cartan afirma que este grupo disjunto no forma un grupo continuo, no obstante, el grupo homogéneo de Lorentz, uno de los grupos que lo configuran, si es continuo. Esto se debe a que para la época de Cartan este grupo no había sido definido, por lo que, a lo largo de su documento no es mencionado (ver tabla 3. Anexo C), por lo tanto, el espectro del operador no muestra que existe una relación de correspondencia entre los generadores de la rotación en el espacio complejo dos dimensional (aquí se esboza la relación resaltando su carácter intuitivo capaz de permitir construir desde este punto los conceptos más formales, objeto de siguiente apartado), en lo que se conoce como las transformaciones de Lorentz, esto nos permitirá más adelante definir lo que se denominan “ las transformaciones espinoriales asociadas a las transformaciones de Lorentz”

En la siguiente tabla se muestran los cuatro tipos de transformaciones de Lorentz, de esta clasificación solo una de ellas forma un grupo, las transformaciones de Lorentz ortocronas y propias, donde sus elementos son transformaciones continuas “un grupo continuo” capaz de conectar con la identidad mediante sucesivas transformaciones lineales.

Tabla 2. Cuatro tipos de transformaciones de Lorentz

<p>Ortocronas ($\Lambda^0_0 \geq 1$)</p> <p>Rotaciones: las tres direcciones espaciales</p> <p>Boost: Transformaciones de Lorentz puras</p>	<p>Propias ($Det \Lambda = +1$)</p> <p><<Forman un Grupo>></p>
<p>Ortocronas ($\Lambda^0_0 \geq 1$)</p> <p>Transformaciones de Tipo</p> $\Lambda_p \times \left\{ \begin{array}{l} dig(+, +, +, -), \\ dig(+, +, -, +), \\ dig(+, -, -, -) \end{array} \right\}$ <p>Incluye las inversiones espaciales</p>	<p>Impropias ($Det \Lambda = +1$)</p> <p><<No Forman un Grupo>></p>
<p>No Ortocronas ($\Lambda^0_0 \leq -1$)</p> <p>Transformaciones de Tipo</p> $\Lambda_p \times \left\{ \begin{array}{l} dig(-, -, -, -), \\ dig(-, -, +, +), \\ dig(-, +, +, -) \end{array} \right\}$ <p>Incluye las inversiones totales</p>	<p>Propias ($Det \Lambda = +1$)</p> <p><<No Forman un Grupo>></p>
<p>No Ortocronas ($\Lambda^0_0 \leq -1$)</p> <p>Transformaciones de Tipo</p> $\Lambda_p \times \left\{ \begin{array}{l} dig(-, -, -, +), \\ dig(-, -, +, -), \\ dig(-, +, +, +) \end{array} \right\}$ <p>Incluye las inversiones Temporales</p>	<p>Impropias ($Det \Lambda = +1$)</p> <p><<No Forman un Grupo>></p>

Estas representan todos los tipos de transformaciones de Lorentz, para evidenciar que las operaciones contenidas en esta descripción pueden ser estudiadas desde los espinores de Cartan. En términos formales la descripción que él emplea se fundamenta en la descomposición del grupo de rotaciones y reversiones en un número par de reflexiones y un

numero impar de reflexión respectivamente, y la distinción que se debe tener si se trabajó en un espacio euclídeo (el caso anterior), o en un espacio pseudo-euclidiano pues en este no solo existen vectores de espacio, también existen vectores de tiempo, en este orden de ideas citamos el siguiente teorema

[...TEOREMA: En un espacio pseudo-Euclidiano los grupos de rotación constan de dos conjuntos disjuntos/inconexos: el primero consta de los grupos de rotación propios, los cuales resultan de un número par de reflexiones de espacio y un numero par de reflexiones de tiempo; el segundo consta del grupo de rotaciones impropias, las cuales resultan de un numero impar de reflexiones de espacio y un numero impar de reflexiones de tiempo; este segundo conjunto no es un grupo...]

(Cartan, 1984)

De esta forma se culmina el análisis que nos permite concatenar la definición de los espinores con los grupos de rotación y el grupo de Lorentz, el cual se detallara con mayor cuidado en el capítulo siguiente. Téngase en cuenta que el grupo de Lorentz es un grupo simple lo que puede ser verificado con la identidad del Jacobi²⁸ de sus constantes de estructura, Para revisar a profundidad ver (Igancio)

²⁸ $a^{ij}a^{kh} + a^{jk}a^{ih} + a^{ki}a^{jh} = 0$ ($i, j, k, h = 1, 2, \dots, n$) la cual se expresa en términos de los conmutadores como $[A[B, C]] + [B[C, A]] + [C[A, B]] = 0$ Esto nos indica que las constantes de estructura (en general) satisfacen el algebra de Lie del grupo

8. CAPÍTULO II. CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN DE CARTAN PARA EL ESPINOR

En el apartado anterior se presentó con detalle la definición que realizó Cartan para su espinor, esta definición contine implícita un gran número de afirmaciones que dentro de la física serán de vital importancia en esta sección. Para considerarlo como un formalismo válido que permita que cualquier teoría construida a partir del formalismo de los espinores sea considerada válida o con algún grado de verosimilitud, este formalismo debe ser un “invariante bajo las transformaciones de Lorentz” pues, cualquier teoría que quiera ser considerada válida en el contexto de la física moderna y que no sea un “invariante de Lorentz” estará condenada a ser descartada (Rindler, 1966). En este apartado se darán las explicitaciones necesarias que derivan de la definición de Cartan haciendo uso de las concepciones ya construidas desde el marco teórico.

8.1. Representación Espinorial de las Transformaciones de Lorentz

Retomando algunas de las ecuaciones anteriores, comenzando por las ecuaciones (5.2.1) (5.3.2), (5.4). (5.4.1) y (5.4.2) hemos obtenido gracias a ellas el operador de rotación el cual reemplaza la matriz (5.1), sin embargo, no se hizo mención del hecho, de vital importancia, en el que la matriz (5.1) pertenece al grupo de representación $SO(3)$, el cual refiere al grupo de todas las rotaciones en \mathbb{R}^3 , algo que es evidente, pero de ahora en adelante se mencionará este grupo para cualquier matriz que cumpla las siguientes condiciones:

$$SO(3) = \{A | A_{3 \times 3} \in \mathbb{R}, AA^{t29} = I, \det A = 1\}$$

Condiciones que se pueden verificar para la matriz (5.1), sin embargo, naturalmente el operador de rotación (5.2.3) no pertenece a este grupo de representación $SO(3)$; Pues el operador de momento angular está definido para la FC de tal forma que el operador de rotación que describirá los comportamientos de espín $\frac{1}{2}$ pueda ser obtenido a partir del operador de momento angular J heredando sus propiedades³⁰. Teniendo presente lo anterior procedemos a caracterizar de manera exacta lo que representan las matrices antisimétricas J , como se

²⁹ El super índice t hace referencia a la traspuesta de la matriz, esto para no confundirle con el superíndice † que hace referencia a la traspuesta conjugada de una matriz.

³⁰ La forma como se logra esto se presenta en el Marco Teórico

presentan en el Anexo C para ver su relación tomaremos el momento angular de la mecánica clásica: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, definido desde el sistema de referencia K :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{p} &= p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k}\end{aligned}$$

Si operamos estos vectores para hallar el momento angular, pero además deseamos expresar el momento angular en un sistema de referencia rotado K' , se emplearán los vectores unitarios, de tal forma que $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$, que se encuentra expresado en la base primada, se multiplica por el momento angular \vec{l} de la siguiente forma:

$$\vec{l} = \langle \vec{n}, \vec{l} \rangle^{31}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\vec{l} = x(\vec{n}_3 p_y - \vec{n}_2 p_z) + y(\vec{n}_1 p_z - \vec{n}_3 p_x) + z(\vec{n}_2 p_x - \vec{n}_1 p_y)$$

En forma matricial el momento angular se puede expresar como:

$$\vec{l} = (x \ y \ z) \left[\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \vec{n}_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Como se observa se obtienen las matrices generadoras de la rotación. Estas matrices encontradas nos permiten afirmar que existe una relación muy estrecha entre los grupos $SO(3)$ y el momento angular, razón por la cual nos fue posible en el marco teórico definir el operador de rotación. La anterior ecuación puede ser expresada en términos más prácticos así:

$$\langle \vec{n}, \vec{l} \rangle = \vec{r}_i^t [\vec{n} * G] \vec{p}_i$$

Donde G representa las matrices antisimétricas generadoras de la rotación, \vec{r} el vector posición traspuesto y \vec{p} el vector momento angular lineal. Esto nos permitirá redefinir los operadores de rotación en términos del momento angular \vec{l} , multiplicando a ambos lados de la igualdad por la derecha por el momento lineal traspuesto y por la izquierda por el vector posición.

$$[\vec{n} * G] = \vec{r} \langle \vec{n}, \vec{l} \rangle \vec{p}_i^t$$

³¹ Aquí se realiza la proyección vectorial y no la proyección escalar del momento angular de la mecánica clásica respecto de un sistema de referencia rotado K' que se describe por medio de la terna $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$, de direcciones ortonormales

Con esto se puede expresar el operador de rotación tenemos de la siguiente forma:

$$R(\theta, \vec{n}) = e^{\theta \vec{r}(\vec{n}, \vec{l}) \vec{p}^t_i}$$

Esto demuestra de manera más explícita que las rotaciones son generadas por el momento angular tanto para el caso de la FC como de la física clásica, por lo tanto, cualquier magnitud que refiera al momento angular estará referida a las rotaciones en el sistema en el que se construya.

En el marco teórico realizamos la deducción de las matrices de Pauli como generadores de rotación, para los cuales las rotaciones hacen referencia a los comportamientos de espín $\frac{1}{2}$ o momento angular intrínseco, empleando el hecho de que j puede ser remplazado por los generadores de la rotación para el espín $\frac{1}{2}$, sin dificultad, ya que como mostramos anteriormente los momentos angulares están estrechamente relacionados con los generadores de la rotación y definen la rotación en el sistema construido. Para este caso particular el operador será:

$$\hat{R}_n(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} J_n \theta} \rightarrow R_{\hat{n}}(\theta) = e^{-i \left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \vec{S}, \vec{n} \rangle}$$

Lo que muestra de manera más clara la forma en que los espinores rotan, es decir, que en estos objetos para poder llegar a su punto inicial bajo la transformación por rotación, es necesario que se realicen dos vueltas en lugar de una (ver apartado (1.2.1) de la sección inicial), a esta operación se le conoce con el nombre de “transformación espinorial asociada a la rotación”; en este momento las matrices que conforman el grupo S , también llamado matrices de Pauli ecuaciones (5.4.22), (5.4.23) y (5.4.24) poseen un parámetro constante $\hbar/2$ el cuál es el que le dan la forma al argumento de la función exponencial. Este operador, al igual que hicimos con el operador genérico puede ser aproximado infinitesimalmente, de tal forma que demos cuenta del grupo de representación para los grupos de Lie $SU(2)$.

Primero la aproximación infinitesimal

$$R_{\hat{n}}(d\theta) = I - \frac{id\theta}{2} \langle \vec{S}, \vec{n} \rangle$$

pertenece al grupo $SU(2)$ que se define de la siguiente manera:

$$SU(2) = \{B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}), \quad BB^t = I, \det b = 1\}^{32}$$

³²³² (R & Obregón, Volumen 1)

Aquí $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ representa el conjunto de matrices 2×2 complejas (hermíticas), este grupo $SU(2)$ debe cumplir que las rotaciones dejen invariante una magnitud, pero antes de revisar eso, pasamos a ver como a partir de una aplicación es posible expresar un vector de \mathbb{R}^3 a $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, esto con el propósito de ser rotado por la transformación de espín asociada a la rotación, basta con expresar el vector en función del sistema coordenado $SU(2)$ como una combinación lineal de las bases:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}' &= \langle S, \vec{x}' \rangle \\ \mathcal{X} &= \langle S, \vec{x} \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto, la rotación de un vector se puede expresar de la siguiente manera

$$\vec{x}' = \vec{x}R(\theta, \hat{n})$$

Puesto que \mathcal{X}' y \mathcal{X} son matrices para expresar su rotación es necesaria una transformación de similitud, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{X}' = R_{\hat{n}}(\theta) \mathcal{X} R_{\hat{n}}(\theta)^\dagger$$

Ya habiendo realizado todas las explicitaciones en cuanto a la transformación espinorial asociada a la rotación, procedemos a realizar la descripción de las transformaciones espinoriales asociadas a las transformaciones de Lorentz.

Se comenzó en el primer capítulo con las formas fundamentales en particular, mostramos como la forma fundamental, una forma³³ cuadrática definida no positiva se emplea para deducir los espinores de Cartan. La necesidad de emplear la forma cuadrática radica en que esta forma es un invariante Lorentz, sin embargo, las transformaciones de Lorentz para este caso se refieren a un grupo específico, el grupo de Lorentz propio $O(3,1)^+$ el cual se define así

$$O(3,1)^+ = \{A \in O(3,1)^{34} \mid \det = 1\}$$

Que hace referencia las rotaciones propias y las transformaciones de Lorentz ortocronas (propias)³⁵, en este caso las transformaciones restringidas contienen en su descripción los Boost y las rotaciones propias. Este tipo de transformaciones deberán estar estrechamente ligadas al formalismo de espinores, aunque estrictamente los espinores si cumplen con todas

³³ Cuando se trabaja con grupos de lie, existe un grupo denominado el grupo de Poincare el cual es referido como el conjunto de las rotaciones y las transformaciones de Lorentz generalizadas o también llamadas Boost

³⁴ Grupo de Lorentz Homogéneo, $O(3,1) = \{\Lambda \mid \Lambda_{4 \times 4} \in \mathbb{R}, \Lambda g \Lambda^t = g\}$ con g como la métrica, es decir, que deje invariante la métrica.

³⁵ Cuyo determinante es igual a 1

las condiciones del grupo de Lorentz homogéneo, es decir las reflexiones y las transformaciones impropias o no ortocronas (Cartan, 1984), para efectos de esta investigación se trataran las transformaciones restringidas ya que dan una mayor intuición sobre lo que implica emplear el formalismo espinorial.

Una de las diversas formas en las que se puede representar las transformaciones de Lorentz es la siguiente³⁶:

$$\vec{x} = \{\vec{x} * \hat{n}[\vec{x} * \hat{n}(\gamma - 1) - \vec{v}t\gamma]\} R(\theta, \vec{n})$$

$$t' = [t - (\vec{x} * \hat{n}) \frac{v}{c^2}] \gamma$$

Donde se expresan las transformaciones de Lorentz partiendo de un eje unitario \hat{n} donde el símbolo * representa el producto escalar, además:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

Agrupando algunos términos tenemos que

$$\left[\{\vec{x} * \hat{n}[\vec{x} * \hat{n}(\gamma - 1) - \vec{v}t\gamma]\} + [t - (\vec{x} * \hat{n}) \frac{v}{c^2}] \gamma \right] R(\theta, \vec{n})$$

Podemos expresar de manera más general, teniendo en cuenta que η hace referencia al ángulo hiperbólico de los Boost, mientras que θ representa el ángulo de rotación de las transformaciones espinoriales, por lo tanto, las transformaciones de Lorentz hacen referencia a los Boost junto con las rotaciones:

$$\Lambda(\eta, \hat{n}, \theta, \hat{n}) = B(\hat{n}) * R(\theta, \hat{n})$$

Para hacer más evidente la definición anterior mostraremos la transformación espinorial infinitesimal asociada a los Boost, es decir, al algebra de las matrices complejas 2×2 $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$:

$$B(\eta, \hat{n}) = \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \langle \vec{S}, \vec{n} \rangle$$

Esto nos permite, por lo tanto, hacer una definición más acorde a los espinores, a saber: “transformación espinorial asociada a las transformaciones de Lorentz” denotada por la letra L mayúscula:

³⁶ “The Theory Of Relativity: C. Moller” Pág[41,42] link:
<https://archive.org/details/theoryofrelativi029229mbp/page/n57/mode/2up>

$$L = B(\eta, \hat{n})R_{\hat{n}}(\theta) = e^{-\frac{\eta}{2}\langle \vec{s}, \vec{n} \rangle} e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle \vec{s}, \vec{n} \rangle}$$

Esta definición de transformaciones de Lorentz a partir de los comportamientos de espín está relacionada con un grupo que hemos utilizado en repetidas ocasiones pero que no hemos nombrado explícitamente, que se llama grupo especial lineal³⁷, el cual se define de la siguiente manera:

$$SL = \{B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})[\det B = 1]\}$$

Retomando la forma fundamental nula, y el hecho bajo el cual los espinores de Cartan adquieren su definición de ella, decimos que los espinores pertenecen al espacio de direcciones nulas, en dicho espacio se deben definir de forma natural las transformaciones de Lorentz, los Boost y las rotaciones, ambas en función de las transformaciones de espín, estas rotaciones ya se habían mostrado que están presentes en el formalismo mientras que los Boost fueron recientemente mostrados, con lo anterior procedemos a mostrar cómo son representadas las transformaciones de Lorentz en el espacio de direcciones nulas, Figura 3 y Figura 4.

Teniendo en cuenta que las posibles direcciones de la luz está indicado por el espacio de las direcciones nulas S^+ (media esfera superior) y S^- (media esfera inferior) se relaciona por antípodas (los antípodas en la superficie de una esfera es lugar situado opuestamente el otro), Por lo tanto, por medio de la proyección estereográfica es posible mapear las dos esferas en el plano complejo con tal suerte que es posible expresar cualquier punto del plano complejo en términos de x, y, z)

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z} \quad \bar{\zeta} = \frac{x - iy}{1 - z} \quad 38$$

Donde las componentes vectoriales están dadas por:

$$\frac{\zeta \bar{\zeta} - 1}{1 + \zeta \bar{\zeta}} = z$$

$$\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta \bar{\zeta} + 1} = x$$

³⁷ También llamado Grupo de Möbius

³⁸ Transformaciones de möebius

$$\left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \right) i = y$$

El par $(\zeta, \bar{\zeta})$ son otra forma de representar (ξ_0, ξ_1) ,

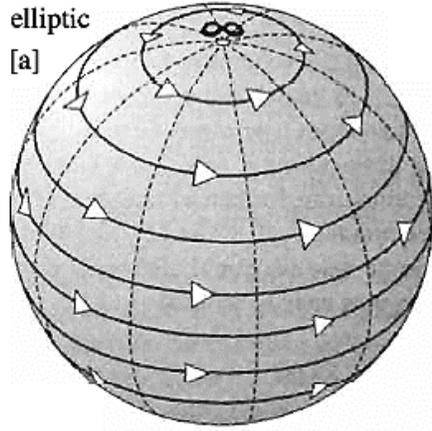


Figura 3 Representación de las rotaciones en el espacio de las direcciones nulas [tomada de Tristan Needhand: visual complex Anayisis [pág. 153]

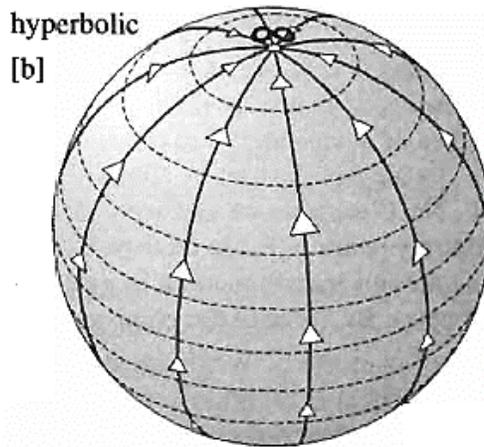


Figura 4 Representación de los Boost en el espacio de las direcciones nulas [tomada de Tristan Needhand: visual complex Anayisis [pág. 153]

8.2. Grupos de Representación Irreducibles

Una simple construcción será descrita a continuación, por medio de la cual una ilimitada serie de representaciones lineales irreducibles de cualquier grupo de rotaciones, o del grupo de rotaciones y reversiones en un espacio Euclídeo complejo o real tresdimensional puede ser generada. Todas las representaciones pueden ser así construidas, es decir, cualquier otra

representación de ese grupo puede ser completamente reducible por lo tanto cualquier representación lineal del grupo real proporciona una representación del correspondiente grupo complejo, y que esas dos representaciones son ambas reducibles, o ambas irreducibles.

Comenzamos desde el espinor (ξ_0, ξ_1) , donde el conjunto de polinomios de grado p en ξ_0 y ξ_1 constituyen un tensor y por lo tanto forman una representación lineal del grupo de rotaciones. Este tensor puede ser representado simbólicamente por el polinomio generador $(a\xi_0 + b\xi_1)^p$ presentado a y b son dos parámetros arbitrarios, es decir, son los coeficientes de los diferentes monomios, por tanto a y b en la expresión de este polinomio son las componentes del tensor. Denotamos el tensor, o las correspondientes representaciones lineales, por $\mathfrak{D}_{p/2}$.

TEOREMA: La representación $\mathfrak{D}_{p/2}$ es irreducible. Solamente es necesario probar esto para el grupo de rotaciones complejas. Una rotación a través de un ángulo real θ del eje x_3 esta dado por la operación. (Cartan, 1984)

$$\begin{aligned}\xi'_0 &= \xi_0 e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \xi'_1 &= \xi_1 e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

Bajo esta operación $\xi_0^\alpha \xi_1^\beta$ es multiplicada por $e^{i(\alpha-\beta)\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, a menos que θ posea un valor especial, la multiplicación corresponde a diferentes componentes $\xi_0^\alpha \xi_1^\beta$ del tensor, serán diferentes, asumiendo que la representación $\mathfrak{D}_{p/2}$ no es irreducible. Entonces, debe haber un tensor \mathfrak{F} formado de $q < p + 1$ polinomios de grado p en ξ_0 y ξ_1 ; dejando $A_0 \xi_0^p + A_1 \xi_0^{p-1} \xi_1 + \dots + A_p \xi_1^p$ ser uno de estos polinomios.

La rotación descrita anteriormente transforma esto en

$$A_0 e^{i\left(\frac{p}{2}\right)\theta} \xi_0^p + A_1 e^{i\left(\frac{p-1}{2}\right)\theta} \xi_0^{p-1} \xi_1 + \dots + A_p$$

Al repetir esta operación p veces, se obtienen $p + 1$ combinaciones linealmente independientes de los siguientes términos.

$$A_0 \xi_0^p \quad A_1 \xi_0^{p-1} \xi_1 \quad A_2 \xi_0^{p-2} \xi_1^2, \dots, \quad A_p \xi_1^p$$

(Cartan, 1984)

De esto se sigue que hay al menos un monomio $\xi_0^h \xi_1^k$ con $(h + k = p)$ conteniendo el tensor \mathfrak{F} . Y, por lo tanto, que todos los polinomios $(\alpha \xi_0 + \beta \xi_1)^h (\gamma \xi_0 + \delta \xi_1)^k$ con $\alpha\beta - \gamma\delta = 1$ ³⁹ también son irreducibles en \mathfrak{F} . Si tomamos las cuatro constantes α, β, γ y δ todas diferentes de cero. Entonces los coeficientes de ξ_0^p en el correspondiente polinomio no son cero. Por lo tanto, el tensor \mathfrak{F} incluye ξ_0^p y por lo tanto también $(a\xi_0 + b\xi_1)^p$, es decir todos los monomios $\xi_0^h \xi_1^k$.

Para $p = 0$, se obtiene un tensor de grado 1, es decir, un escalar; para $p = 1$ un espinor; y para $p = 2$ un vector. Las cantidades $\xi_0^2, \xi_0, \xi_1, \xi_1^2$ de hecho, después de una apropiada sustitución lineal, se transforman como lo hacen las componentes de un vector.⁴⁰

Hay otra representación de grado $p + 1$ del grupo de rotaciones y reversiones. Este es formado de las mismas componentes, pero bajo reversiones ellos sufren la anterior sustitución seguida por un cambio de signo para todas las componentes. Esta representación será denotada por $\mathfrak{D}_{p/2}^-$ y la primera representación será denotada por $\mathfrak{D}_{p/2}^+$; por el argumento aquí dado ellos no son equivalentes. Este se matiné para $\mathfrak{D}_{1/2}^-$; el cual da un espinor de segundo tipo, \mathfrak{D}_1^- un bivector, y \mathfrak{D}_0^- un trivector (es decir $\xi_0 \xi'_1 - \xi_1 \xi'_0$). El polinomio generador de $\mathfrak{D}_{p/2}^-$ se puede tomar como:

$$(\xi_0 \xi'_1 - \xi_1 \xi'_0) (a\xi_0 + b\xi_1)^p$$

³⁹ En algunos libros se le denomina transformación binaria como en el Landau teoría cuántica relativista

⁴⁰ Lo descrito aquí se trabajó en el capítulo 1 del presente trabajo de grado cuando se presentó al espinor como un tensor euclídeo, no obstante. Se recomienda para llegar a un acercamiento muy similar de las representaciones irreducible el texto (Ignacio Illana, Teoría de Campos y Partículas, s.f.) donde se habla de las representaciones irreducibles tensoriales

(Cartan, 1984)

Toda la construcción hasta ahora realizada pretende mostrar lo fundamental que puede llegar la teoría espinorial de Cartan como ladrillos de construcción (Rindler, 1966), tal como se muestra en este caso los polinomios generadores de las representaciones (Cartan, 1984) continuación se muestra como con estos polinomios generadores se pueden construir y estudiar las formas cuadráticas: formas fundamentales.⁴¹

8.3. Reducción de $\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}_j$

Sean $u_1, u_2, \dots, u_{2i+1}$ las variables de la representación lineal \mathfrak{D}_i y sean $v_1, v_2, \dots, v_{2j+1}$ las variables de la otra representación lineal \mathfrak{D}_j . El producto $u_\alpha v_\beta$, será conducido a una nueva representación lineal de grado $(2i + 1)(2j + 1)$ la cual denotaremos por $\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}_j$. En general esta representación no es irreducible; su reducción a la representación irreducible se presentará a continuación.

Primero, téngase en cuenta que si ξ y ξ' denotan dos espinores arbitrarios, el polinomio generador

$$P = (a\xi_0 + b\xi_1)^p (a\xi'_0 + b\xi'_1)^q,$$
$$Q = (a\xi_0 + b\xi_1)^p (a\xi_0 + b\xi_1)^q = (a\xi_0 + b\xi_1)^{p+q}$$

definen dos representaciones equivalentes. Esto se sigue del hecho de que bajo cualquier rotación o reversión los coeficientes de los diferentes monomios $a^\alpha b^\beta$ los dos polinomios se transforman entre sí de la misma manera. Tal que ξ'_0 y ξ'_1 se transforman de la misma forma como lo hacen ξ_0 y ξ_1 .

Nosotros tomamos por las componentes de $\mathfrak{D}_{p/2} \times \mathfrak{D}_{q/2}$ los polinomios en $\xi_0, \xi_1, \xi'_0, \xi'_1$ que son de grado p en ξ_0, ξ_1 y de grado q en ξ'_0, ξ'_1 . Considerando los polinomios

$$\Phi_0 = (a\xi_0 + b\xi_1)^p (a\xi'_0 + b\xi'_1)^q$$

⁴¹ Primera forma fundamental, Segunda forma fundamental y tercera forma fundamental.

recuerda al lector que las mencionadas operatividades y otras relaciones de vital importancia se encuentran ya sistematizadas en los esquemas meta-analíticos que se presentarán en el capítulo III.

Por último, se resalta que la teoría espinorial es una de las teorías de la física y de las matemáticas en las que se tiene contemporáneamente muchas aplicaciones prácticas: desde la mecánica cuántica, la teoría de campos cuánticos hasta la relatividad general, pasando por la teoría cuántica de campos relativista. Se emplea para el estudio de variedades complejas debido a la forma natural ya que aparecen propiedades como la curvatura y la torsión (Shahbazi, 2021), y otros invariantes topológicos. Se encuentra presente en las álgebras de Clifford y los grupos y álgebras de Lie. Por lo que es una teoría con un alto impacto académico.

9. CAPÍTULO III. CARACTERIZACIÓN DE LA DOCUMENTACIÓN

9.1. Sistema de Clasificación y Herramientas Meta-analíticas

Para el análisis meta-analítico es importante recordar, que para este trabajo es un análisis del concepto de espinor y subsecuentemente su papel en la teoría homónima, de tal forma que se den claridades en cuanto al concepto, se brinden herramientas interpretativas para la comprensión eficaz del concepto (una ruta de aprendizaje), lo que nos proporciona un marco para indagar respecto a problemas concretos para la enseñanza del concepto, y la propuesta de la forma para subsanar tales inconvenientes en la enseñanza de los espinores.

En los Capítulos I y II se realizó un acercamiento inicial a la teoría de los espinores de Cartan, en donde se presenta una descripción que no se centra en el álgebra de índices. Esto permitió explorar a partir de la definición finita, el potencial descriptivo de estos objetos, que permiten hablar de una representación irreducible en los complejos y por medio del producto de representaciones, construir transformaciones equivalentes para generar otros grupos ortogonales, como lo pueden ser las transformaciones de Lorentz restringidas o el grupo de Poincaré. Sin embargo, lo presentado no abarca la totalidad de los alcances y matices que contiene la teoría espinorial.

Para lograr una mayor profundidad en este tema, en el presente capítulo se presenta una propuesta para la categorización de libros frente al concepto, desembocando en una ruta de aprendizaje a través de los textos previamente caracterizados y categorizados. Para ello se recurre al análisis y síntesis enunciado por (Carlos & Marcela, 1998), que establece una serie de pasos para lograr que el proceso de análisis y síntesis lleguen a término, a saber:

- Observación
- Descripción e identificación
- Examinación rigurosa
- Descomposición
- Enumeración
- Reacomodación
- Clasificación

- Conclusión

Estos pasos se tomarán en la acepción general de su mención, aunque ya en la metodología se ha dejado expreso este mismo orden, puntualizando para el tema de los espinores se debe hacer la salvedad de que este en esencia no constituye el análisis meta-analítico propiamente dicho, pero si es su punto de partida. Aclarado lo anterior para (Neil J, 1998) el metaanálisis busca establecer tendencias generales respecto a numerosos estudios que han sido diseñados con propósitos semejantes. Ya como se mencionó en el planteamiento del problema de investigación: en esta investigación se busca una manera de aproximar a los licenciados en física al concepto de espinor, y para ello el grupo de estudio que se tiene en cuenta (sección 1.1) serán los libros de texto que buscan llevar este concepto de forma propedéutica, esto nos lleva a indagar sobre un amplio cuerpo de información acerca del material pensado para este propósito, por lo tanto, la concepción de análisis y síntesis enunciada requiere una corrección o adecuación de sus métodos, con tal suerte que se logre dar un tratamiento mejor al grupo de estudio. Por lo tanto, dentro del análisis y síntesis deben incluirse los siguientes pasos:

1. Reunir un grupo de estudio (para este grupo de estudio se tomaron 3 elementos)
2. Determinar unas métricas o variables que les sean comunes al grupo de estudio para la comprobación de resultados.
3. La codificación de datos, la cual sugiere, entre otras, una descripción del grupo de estudio.
4. Y finalmente la aplicación de técnicas descriptivas y correlativas para examinar los resultados de los diferentes estudios realizados a los individuos de la muestra. (para este caso se realizará un muestreo de frecuencias)

El grupo de estudio, es decir, los documentos, pretenden ser textos que no abarquen extensiones mayores a las 100 páginas, debido a que se busca tratar con documentos concretos de forma que el número de temáticas dentro del muestreo no sean demasiado extensas, llegando a exceder la muestra internamente, esto implica artículos, secciones de libro, informes monográficos entre otros.

Luego la métrica con la que contara será en función de los textos: **la pertinencia en la información**, ya en la sección anterior se enumeraron las particularidades por las que los textos pueden llegar a presentar problemas respecto a el contenido manejado y presentado, ya sea por ser

escritos del tipo matemático o por tendencia excesiva a ser abordados cronológicamente, etc. dificultades manifestadas en la (Sección 1.1 inicial). Otro punto respecto a este criterio es la existencia de documentos excesivamente generales que no profundizan en los temas y se bastan con dar información curiosa o nada rigurosa sobre el tema en cuestión, y si la intención es estrenarse en la disciplina estos documentos no darán más que generalidades (en principio los documentos que trata la investigación no presentan la última dificultad ya que se eligieron textos formales) por lo tanto, lo que tratará de revisar este apartado consiste en la coherencia y cohesión del tema, para ellos sus subcriterios serán: la referencia del documento, para esto se indaga la pertinencia según autor, fecha de publicación, casa editorial, etc. este como un primer criterio no a evaluar directamente pero que constantemente estará dejando expresa la trascendencia del texto junto con su importancia.

A continuación, se indaga sobre el tema tratado de manera general, el propósito del autor y la tesis del autor, pues en función de la coherencia debemos contrastar estos tres aspectos, por ejemplo, el caso de no corresponder la suposición original con la que el texto se elaboró y el producto final, como en el caso de la causa de una publicación póstuma de notas dispersas, como es el caso de “The Theory of Spinors” entre otras.

Otros de los aspectos que deben ser caracterizados son aquellas omisiones producto de algunas pretensiones del documento, por lo que se deben enunciar con el fin de detectar, más allá de las falencias, el contenido exceptuado o asumido ya conocido, o innecesario, pero que el proceso de aprendizaje puede no ser tan fácilmente saltado, en este se intentara dejar algo de lo omitido y no solo decir que hace falta.

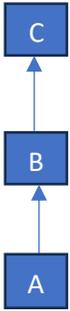
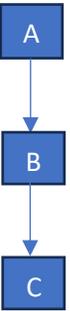
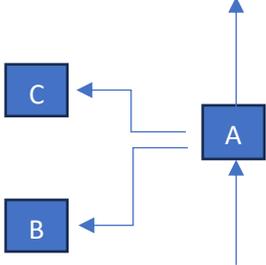
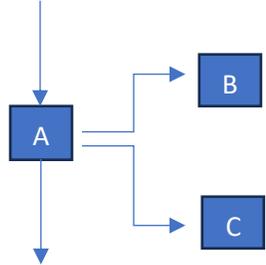
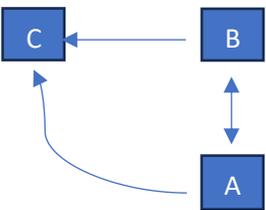
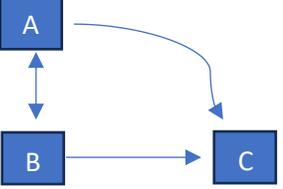
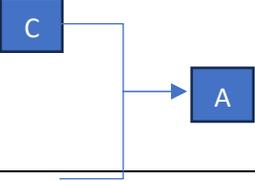
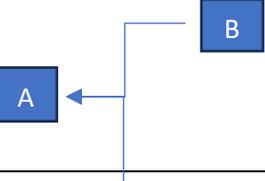
El segundo criterio o variable del estudio será **la facilidad de acceso**, aspecto primordial en la intención de introducir el concepto de espinor, ya que sin este el presupuesto de “pertinencia en la información” no puede caracterizar y categorizar documentos excesivamente formales y complejos sin que importe en lo más mínimo el aspecto pedagógico con el que deseamos dimensionar esta investigación. Para este criterio se tienen en cuenta subcriterios como: si en el texto se realizan reflexiones del corte físico, reflexiones del corte interpretativo frente al tema, el tipo de metodología con que aborda el tema y cuales aspectos se pueden aprender en función del texto. Estos dos criterios pueden llegar a complicar el modo en que el texto se desarrolle por la dimensión con la cual debe tratar en cuanto al análisis, es por ello por lo que las herramientas metacognitivas

toman en este punto de la investigación un papel importante para simplificar las enormes reflexiones que pueden derivar de estos dos criterios. En la figura que continua se deja expresas de una mejor forma los dos criterios.

La estructura general que guía la construcción de los esquemas metacognitivos (mapas conceptuales, organización bidimensional que muestra la dependencia que guardan los conceptos dentro de la teoría espinorial preservando en su lógica organizacional los planteamientos y abordajes particulares de diversos autores) se centra en una argumentación serial, es decir, las conclusiones de una primera premisa se convierten en una premisa para ayudar o argumentar una conclusión (Vallverdú & Farrés). Cada uno de los esquemas presentan una estructura medular, es decir, se ramifica desde un eje central. Este eje de ramificación presenta una orientación dextrógira; entiéndase, lo anterior como, que la organización de los conceptos básicos se encontrara en la parte derecha siguiendo una relación descendente mientras que los conceptos con un mayor grado de complejidad se presentan en la parte izquierda bajo una relación ascendente.

Esta relación descendente permite la organización de cada una de las ramas “Conceptos” de tal manera que sigan una estructura en la que es posible construir una argumentación serial, esto último implica que cada concepto “rama-conceptos” representa conceptos comprendidos y correctamente delimitados a partir de sus derivaciones, “Derivación de las ramas-ideas”, donde las derivaciones siguen una lógica de argumentación convergente para con sus ramas. Es necesario aclarar que, aunque las ideas o derivaciones de las ramas se presentan bajo esta lógica de convergencia, ellas pueden cumplir este tipo de relaciones con otras derivaciones que no pertenezcan necesariamente a su rama de origen, razón por lo cual, con base en lo anterior las ramas guardan con sus derivaciones una argumentación divergente.

Finalmente, de este hecho se presentarán líneas fuera de la estructura modular que no obedecen a los tipos de relaciones mencionadas y que permiten argumentar otro tipo de dependencias entre la teoría. A continuación, se presenta los tipos de relaciones y la forma como se representan esquemáticamente en los mapas conceptuales

Tipo de Relación	Forma de Representación Esquemática	
<p>Por Argumentación Serial</p> <p>[La conclusión de una primera premisa se convierte en una nueva premisa para argumentar o apoyar una conclusión]</p>		
<p>Por Argumentación Divergente</p> <p>[De una misma premisa se pueden derivar dos conclusiones diferentes]</p>		
<p>Por Argumentación Dependiente</p> <p>[Las premisas se relacionan entre ellas para dar lugar a una conclusión]</p>		
<p>Por Argumentación Convergente</p> <p>[Las premisas son independientes entre sí y cada una apoya por su lado a la conclusión]</p>		

	B		C
--	---	--	---

Tabla 3 Cuadro Comparativo entre los Tipos de Relaciones y sus Respectivas Representaciones Esquemáticas en los Mapas Conceptuales

9.2. Textos analizados.

Teniendo en cuenta esta forma de organización en los Anexos *F*, *G*, *H* se muestran los mapas conceptuales realizados para los tres documentos analizados.

Respectivamente los tres documentos analizados fueron: Introducción a la Teoría Espinorial (primera parte) Informe Monográfico (Pedro R & OBregón), Espinores Cuadridimensionales (Landau & Lifhmit, L. D. Landau; E. M. Lifhmit); Teoría de campos y Partículas (Ignacio Illana, Teoría de Campos y Partículas, s.f.).

Del análisis realizado mediante los mapas conceptuales se puede encontrar que, en el primer documento, “Introducción a la Teoría Espinorial (primera parte) Informe Monográfico” existen como fortalezas del documento las explicites en cuanto a los desarrollos matemáticos de la teoría espinorial, presenta una buena secuencia de los conceptos abordados (presenta primero todos las definiciones que le servirán posteriormente como herramientas demostrativas) y presentan ilustraciones de las relaciones entre grupos y la modelización de las rotaciones. Estas fortalezas ayudan al entendimiento del concepto de espinor porque muestran la estructura matemática con la que se opera en la teoría espinorial, así como ciertas demostraciones que dejan ver parte de la naturaleza del espinor cuando se hace necesario hacer ciertas transformaciones... el concepto que mejor se presenta en este documento es la relación entre espinores y tensores y la representación espinorial de las transformaciones de Lorentz. Las dificultades u omisiones encontradas, fuera de las algorítmicas y de las definiciones que plantea, se encaminan a que no se presenta ninguna reflexión sobre la naturaleza de estas representaciones espinoriales, más allá de ser capaces de estar presentes en un marco teórico de donde toma sus definiciones es decir los objetos que definen, lo cual se puede subsanar al hacer una pequeña introducción en la que se presenten las cualidades geométricas del espinor, su definición desde las formas cuadráticas y una introducción a las operaciones entre multivectores, que si bien son presentados, su única finalidad es completar demostraciones. Finalmente, cabe mencionar que las fuentes presentaban problemas para poderse

visualizar correctamente por lo que solucionar este problema constituye construir un documento en base al indagado, lo que ya se logró con el mapa conceptual.

Del análisis realizado mediante los mapas conceptuales se puede encontrar que, en el segundo documento analizado, Espinores Cuatridimensionales (Landau & Lifhmit, L. D. Landau; E. M. Lifhmit) existen como fortalezas del documento el amplio número de reflexiones des sentido físico sobre los espinores, particularmente en este documento se muestran varias definiciones para el espinor y se muestra como pasar entre definiciones. Estas fortalezas ayudan al entendimiento del concepto de espinor, porque muestran las distinciones que se deben tener presentes según el tipo de definición de espinor que se esté trabajando y las relaciones algorítmicas están bien definidas. Las dificultades u omisiones encontradas se relacionan con los adecuados ejercicios que pusieran a prueba la comprensión del lector, lo cual se puede subsanar al hacer una construcción de un conjunto de ejercicios que ayuden a verificar y utilizar las diferentes definiciones de espinor

Finalmente, del análisis realizado mediante los mapas conceptuales se puede encontrar que, en el tercer documento analizado, Teoría de campos y Partículas existen como fortalezas del documento una definición más formal de los espinores desde la teoría de grupos. Estas fortalezas ayudan al entendimiento del concepto de espinor, porque desde esta definición se pueden encontrar explicaciones que emplean las definiciones como grupo de irreductibilidad y grupo de representación, que es donde se encuentra gran parte de la teoría formal de los espinores y desde aquí se pueden encontrar relaciones con otras teorías, como lo pueden ser las algebras de Clifford. Las dificultades u omisiones encontradas son falta de ejemplificaciones de la teoría y aplicaciones de esta, se centra exclusivamente en la lógica interna de sus definiciones presentando problemas físicos que pongan a prueba la teoría.

9.3. Reflexiones finales

Los espinores y el abordaje que se dio en este documento los conciben como un formalismo de grandes alcances teóricos, muestran la necesidad de definiciones más precisas, elaboradas y generales entendiéndolo como fruto de una aporía. Se mostraron varias de las diciplinas académicas de la ciencia que se pueden y se han venido beneficiando de esta teoría. Su construcción apuesta por los ideales de irreductibilidad y axiomatización de la teoría física comprendida desde la covarianza de las leyes de la física se trabaja con elementos fundamentales para el estudio de la

física. Integra en su conglomerado teórico muchas concepciones geométricas necesarias no solo para la modelización sino también para la comprensión de las elaboraciones teóricas que empleamos para explicar el mundo, razón por la cual, este formalismo puede ser de importancia cardinal para la enseñanza de la física moderna, pues, gran parte de sus formulaciones ya están capturadas dentro de la teoría.

Respecto a la revisión bibliográfica se debe tener presente que el principal problema que deseamos resolver era mejorar la comprensión de los espinores en cuanto a su naturaleza, el texto que mejor logra este objetivo desde un acercamiento propedéutico es el de Cartan y lo logra gracias a su contricción que aboga por las comprensiones geométricas de espinor. En segunda medida, encontramos documentos que se centran cardinalmente en la demostración, los que representarían el siguiente grado de complejidad donde los procedimientos algorítmicos, ya con una intuición geométrica de base, pueden ayudar al estudiante de esta teoría a un mayor grado de comprensión y entender de manera más clara las intenciones y alcances de teoría. Finalmente debemos pasar a las cuestiones del sentido físico y consecuencias prácticas de todas estas formulaciones, es allí donde la realidad física de toda la teoría puede presentarse de manera acabada.

Como recomendación final para el acercamiento de la teoría espinorial es importante tener buenas bases en geometría diferencial, puesto que desde esta teoría se encuentran muchas correlaciones y explicaciones que facilitarán el abordaje, también es importante el abordar antes los documentos sobre el formalismo como estructura matemática, es decir, es importante conocer toda lo referente a la teoría demostrativa, para dar paso así a las explicaciones físicas de la teoría, este camino aunque más arduo permitirá mayores comprensiones.

10. CONCLUSIONES

- Dada la íntima relación que tienen los espinores con las operaciones geométricas de rotaciones, reversiones, reflexión e inversiones, entendiéndolos como elementos constitutivos son un buen punto de abordaje inicial. Para luego emplearles como elementos capaces de describir la geometría de superficies.
- La teoría de los espinores tiene la cualidad de que cualquier teoría representada en términos de espinores es invariante bajo las transformaciones de Lorentz, condición necesaria para que una teoría tenga realidad física. Enseñar los espinores con esto en mente, implica pensar en la posibilidad de las reformulaciones de las teorías desde un abordaje espinorial, es decir, la enseñanza de la física desde objetos físicos supone una posibilidad enorme en cuanto a las formas de llevarla al aula.
- La formulación de Cartan, comparada con otras formulaciones busca su explicación por medio de una intuición geométrica, además, su descripción llega a una forma irreducible desde la cual se pueden abordar otras definiciones del espinor, es decir, el espinor de Cartan o mejor dicho la teoría de Cartan nos permite estudiar otras definiciones de espinores y nos permite guiarnos por una descripción geométrica
- Los documentos relacionados con el aprendizaje de la teoría espinorial abordados en el capítulo III, de manera individual presentan dificultades que argumentamos que llevan a comprensiones sesgadas de los espinores. Abordados de manera conjunta los documentos y vislumbradas las faltas que pueden llegar a presentar, no de manera formal o teórica, más bien en cuanto al aprendizaje de los mismos, suponen una propuesta de enseñanza y aprendizaje.

11. BIBLIOGRAFÍA

- Akarsu, B. (2010). Einstein's redundant triumph "quantum physics": An extensive study of teaching/learning quantum mechanics in college. In B. Akarsu, *Einstein's redundant triumph "quantum physics": An extensive study of teaching/learning quantum mechanics in college* (pp. 273-285). Lat. Am. J. Phys. Educ.
- Aubrecht, G. (1989). Redesigning courses and textbooks for the twenty-first century. *American Journal of Physics*.
- Carlos, M. R., & Marcela, B. F. (1998). *Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis*. Mexico: Prentice Hall Hispanoamerica, S.A.
- Cartan, É. (1984). *Theory of Spinors*. Chicago, Londres: The University of Chicago Press.
- Castillo, G. T. (1986). *De la Ecuación de Dirac a los Espinores*. Ciudad de Mexico: Revista Mexicana: física 33.
- Cid, M. R. (2012). Estudiando cómo los modelos atómicos son introducidos en los libros de texto de Secundaria. In M. R. Cid, *Estudiando cómo los modelos atómicos son introducidos en los libros de texto de Secundaria* (pp. 329-337). Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias.
- Cid, M., R., & Dasilva, A. (2012). Estudiando cómo los modelos atómicos son introducidos en los libros de texto de Secundaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*.
- Cuesta-Beltrán. (2018). Estados del arte: tendencias en la enseñanza de la física entre 1986 y 2016. *TED Bogotá-Colombia, universidad Distrital Francisco José de Caldas*.
- Dirac, P. (1928). The Quantum Theory of Electron. *Royal Society*.
- Fanaro, M. (. (2009). a enseñanza de la mecánica cuántica en la Escuela Media (tesis doctoral). *Universidad de Burgos, Burgos, España*.
- Fanaro, M. (. (2009). la enseñanza de la mecánica cuántica en la Escuela Media (tesis doctoral). *Universidad de Burgos, Burgos, España*.
- Frechina, J. (1996). El uso de los textos originales de los científicos y sus dificultades en el caso de la enseñanza de la mecánica cuántica. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*. In J. Frechina, *El uso de los textos originales de los científicos y sus dificultades en el caso de la enseñanza de la mecánica cuántica. Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales* (pp. 93-100).
- Frechina, J. (1996). I uso de los textos originales de los científicos y sus dificultades en el caso de la enseñanza de la mecánica cuántica. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*.
- G, S. (n.d.). Álgebras de Clifford. *Revista de Física de la Universidad Nacional de Colombia*.

- García, J. (2016, febrero 23). 34. *Rotaciones en Mecánica Cuántica (Parte 1)*. Retrieved from Javier García : https://www.youtube.com/watch?v=HlaQ-UPG7Ag&list=PLAnA8FVrBI8DwNkN_3f_vahmE0PHjBWQM&index=34
- García, J. (2017, Junio 9). ¿Qué es realmente el espín? Barcelona, España.
- Gil, D., Senent, F., & Solbes, J. (1986). Análisis crítico de la introducción de la física moderna en la enseñanza media. *Revista de Enseñanza de la Física*.
- Greca, I. M. (2001). Uma revisão da literatura sobre estudos relativos ao ensino da mecânica quântica introdutória. In I. M. Greca, *Uma revisão da literatura sobre estudos relativos ao ensino da mecânica quântica introdutória*. (pp. 29-56). Investigações em Ensino de Ciências.
- Greca, I., & Herscovitz, V. (2002). construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. *Enseñanza de las Ciencias*.
- Greca, I., & Herscovitz, V. (2002). onstruyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. *Enseñanza de las Ciencias*.
- Greca, M. (2002). Construyendo significado en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. *Enseñanza de las ciencias/innovaciones didácticas*.
- H, K., & Jose, S. (1981). *The genesis of Dirac's relativistic theory of electron*. Berlin: Springer-Verlag; *Revista de filosofía de la Universidad de Costa Rica*.
- Hobson, A. (1994). Teoría cuántica y educación concerniente. *Revista de Enseñanza de la Física*. In A. Hobson, *Teoría cuántica y educación concerniente*. *Revista de Enseñanza de la Física* (pp. 48-50).
- Igancio, I. j. (n.d.). Introducción. Simetrías de Lorentz, Poincare. In I. j. Igancio, *Teoría de Campos y partículas*. Granada : Universidad de Granada.
- Ignacio Illana, J. ([<http://www.ugr.es/~jillana/Docencia/TCP/>]). Teoría de Campos y Partículas . Granada , Universidad de Granada, Departamento de Física Teórica y del Cosmos.
- Ignacio Illana, J. (n.d.). *Teoría de Campos y Partículas*. Retrieved from Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Univesidad de Granada: [<http://www.ugr.es/~jillana/Docencia/TCP/>]
- Koopman, L., Kaper, H., & Ellermeijer, A. (2005). Understanding student difficulties in first year quantum mechanics courses. In *Ponencia presentada en The First European Physics Education Conference (EPEC-1) Conference (4-8)*. Bad Honnef, Alemania.
- Landau, L. D., & Lifhmit, E. M. (L. D. Landau; E. M. Lifhmit). Física Teórica: Teoría Cuntica Reativista Parte 2 Volumen 4. In L. D. Landau, & E. M. Lifhmit, *Fermiones (Espinores Cuadrimensionales)* (pp. 67-86). Barcelona: Reverte.
- Lundi, R. (n.d.). *Diccionario Filosófico*. Retrieved from chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www.une.edu.pe/formacion-docente/wp-content/uploads/2020/09/Diccionario-Filosofico.pdf

- Monteiro, M. (2010). *Discursos de professores e de livros didáticos de física do nível médio em abordagens sobre o ensino da física moderna e contemporânea: algumas implicações educacionais (tesis doctoral)*. São Paulo, Brasil: Universidade Estadual Paulista.
- Monteiro, M. (2010). *Discursos de professores e de livros didáticos de física do nível médio em abordagens sobre o ensino da física moderna e contemporânea: algumas implicações educacionais (tesis doctoral)*. São Paulo, Brasil: Universidade Estadual Paulista.
- Monteiro, M. (2010). *Discursos de professores e de livros didáticos de física do nível médio em abordagens sobre o ensino da física moderna e contemporânea: algumas implicações educacionais (tesis doctoral)*. São Paulo, Brasil.: Universidade Estadual Paulista.
- Moreno, & Guarín. (2010). Nociones cuánticas en la escuela secundaria: Un estudio de caso. In Moreno, & Guarín, *Nociones cuánticas en la escuela secundaria: Un estudio de caso* (pp. 669-6676). Lat. Am. J. Phys. Educ.
- Muller, D. (2008). *Designing effective multimedia for physics education (tesis doctoral)*. Sydney, Australia: University of Sydne.
- Neil J, S. (1998). *Métodos de Investigación*. México: Prentice Hall.
- Pantoja, G., Moreira, M., & Herscovitz, V. (2013). La enseñanza de conceptos fundamentales de mecánica cuántica a alumnos de graduación en física. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*.
- Pedro R, F., & OBregón, O. (n.d.). Introducción a la Teoría Espinrial Primera Parte (Informe Monográfico) - Notas del seminario de relatividad General. *Universidada Autónoma Metropolitana - Iztapalapa*, Vol 1-N°12.
- R, A. (1973). *Ecuación de Onda Relativista*. Santiago de Chile: IGOR SAVEDRA.
- R, F. P., & Obregón, O. (Volumen 1). *Introducción a la teoría de Espinores (primera parte)*. Iztapalapa: Universidad autónoma metropolitana .
- R, S., & C, M. (2018). *Aportes de Penrose Y Rindler a la teoria de Twistores*. Ciudad de México: Latin-American Journal of Physics Education.
- Rindler, W. (1966). What are Spinors? *Journal south west center for advanced studies*.
- Rodriguez, M. A. (2007). *Álgebras de Lie*. Madrid, españa: Universidad Complutence, Departamento de física teórica II, Facultad de física.
- Roman, J. d. (2006). *Álgebra Lineal y Geometria Cartesiana*. Madrid: McGrawHill.
- Sanchez, R., Mora, C., & Serrano, J. (2019). *La Descripción Espinorial del espacio-tiempo de Penrose y Rindler*. Ciudad de Mexico: Latin-American Journal of Physics Education.
- Shahbazi, C. (2021, Marzo 7). *Álgebras de Clifford y Grupos de Espín*. Retrieved from Javier Garcia (Youtube): https://www.youtube.com/watch?v=Nb3VW9Bkl-8&ab_channel=JavierGarcia, <https://crul.github.io/CursoTeoriaCuanticaDeCamposJavierGarcia/#seminario-1>

- Sinarcas, V., & Solbes, J. (2013). Dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la física cuántica en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*.
- Solbes, J. C. (1987). Errores conceptuales en los modelos atómicos cuánticos. *Enseñanza de las Ciencias*. In J. C. Solbes, *Errores conceptuales en los modelos atómicos cuánticos. Enseñanza de las Ciencias* (pp. 189-195).
- Spinel G, M. C. (n.d.). *Álgebra de Clifford*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia .
- Spinel, M. C. (2010). *Introducción al Formalismo de la Mecánica Cuántica No Relativista* . Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Streater, R. (1966). Foreword. In É. Cartan, *The Theory of Spinors* (pp. 2-2). New York: Dover Publications, Inc.
- Swokowski, E. W. (1986). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. California: Grupo Editorial Iberoamericano .
- Vallverdú, J., & Farrés, O. (n.d.). *¿Cómo persuadir? Jugando con palabras imágenes y números*. Barcelona: Universidad autónoma de Barcelona (Couser).
- Vizcaino, D. (2016). Significados de matematización en la enseñanza de la física presentes en libros didácticos de física universitaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, ted, número extraordinario.

12. Anexos

A. Marco Teórico

- 1) Cuadro Comparativo Presentando las Propiedades de los Grupos Algébricos y las Propiedades de los Operadores de Rotación

Tabla 4. Cuadro Comparativo Presentando las Propiedades de los Grupos Algébricos y las Propiedades de los Operadores de Rotación

Grupos	Operador de Rotación
<p>I. Cierre:</p> <p>$a, b \in G$ entonces $a * b \in G$</p>	<p>I. Relación de Clausura para el producto de elementos del conjunto $\{\hat{R}_n(\phi)\}$</p> $\hat{R}_{n_1}(\phi_1)\hat{R}_{n_2}(\phi_2) = \hat{R}_{n_3}(\phi_3)$
<p>II. Asociatividad:</p> <p>$(a * b) * c = a * (b * c)$</p>	<p>II. Propiedad asociativa para el Producto</p> $\{\hat{R}_{n_1}(\phi_1)\hat{R}_{n_2}(\phi_2)\}\hat{R}_{n_3}(\phi_3) = \hat{R}_{n_1}(\phi_1)\{\hat{R}_{n_2}(\phi_2)\hat{R}_{n_3}(\phi_3)\}$
<p>III. Identidad:</p> <p>$\exists e$ tal que</p> $a * e = e * a = a$	<p>III. Elemento neutro como operador identidad $\hat{1}$</p> $\hat{R}_n(\phi) _{\phi=0} = \hat{1}$

<p>IV. Inverso:</p> <p>$\forall a, \exists a^{-1}$ tal que</p> $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$	<p>IV. Existencia del reciproco o inverso de cada elemento del grupo</p> $\hat{R}_n^{-1}(\phi) = \hat{R}_n^\dagger(\phi) = \hat{R}_n(-\phi)$
--	--

En este existe un único e y un único a^{-1} para cada a (García, 2017).

- 2) Deducción de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular total a partir de los operadores de rotación

$\hat{R}_x(\varepsilon)\hat{R}_y(\varepsilon) - \hat{R}_y(\varepsilon)\hat{R}_x(\varepsilon)$	
$\left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_x\varepsilon\right)\left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_y\varepsilon\right) - \left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_y\varepsilon\right)\left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_x\varepsilon\right)$	Sea $\hat{R}_n(\varepsilon) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_n\varepsilon$
$\hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_x\varepsilon - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_y\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\hat{j}_x\hat{j}_y$ $- \left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_x\varepsilon - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_y\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\hat{j}_y\hat{j}_x\right)$	
$-\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\hat{j}_x\hat{j}_y + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\hat{j}_y\hat{j}_x$	
$-\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}(\hat{j}_x\hat{j}_y - \hat{j}_y\hat{j}_x)$	
$\hat{R}_x(\varepsilon)\hat{R}_y(\varepsilon) - \hat{R}_y(\varepsilon)\hat{R}_x(\varepsilon) = \hat{R}_z(\varepsilon^2) - \hat{1}$	Teniendo en cuenta la Ec. (5.3.1) e igualmente $\hat{R}_n(\varepsilon^2) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_n\varepsilon^2$
$-\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}(\hat{j}_x\hat{j}_y - \hat{j}_y\hat{j}_x) = \left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{j}_z\varepsilon^2\right) - \hat{1}$	
$-\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}(\hat{j}_x\hat{j}_y - \hat{j}_y\hat{j}_x) = \frac{i}{\hbar}\hat{j}_z\varepsilon^2$	
$\hat{j}_x\hat{j}_y - \hat{j}_y\hat{j}_x = i\hbar\hat{j}_z$	La relación de conmutación
$[\hat{j}_x, \hat{j}_y] = i\hbar\hat{j}_z$	q.e.d

Tabla 5. Deducción de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular total a partir de los operadores de rotación

- 3) Dedución de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular intrínseco a partir de las relaciones de anti-conmutación heredadas del momento angular total.

$\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y \sim \hat{S}_x$	Usando la relación de conmutación (5.4.4)
$\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix}$	Sustituyendo (5.4.9) y (5.4.6)
$\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}a & -\frac{\hbar}{2}(b+ic) \\ \frac{\hbar}{2}(b-ic) & \frac{\hbar}{2}a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}a & \frac{\hbar}{2}(b+ic) \\ -\frac{\hbar}{2}(b-ic) & \frac{\hbar}{2}a \end{pmatrix}$	Operando
$\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}a - \frac{\hbar}{2}a & -\frac{\hbar}{2}(b+ic) - \frac{\hbar}{2}(b+ic) \\ \frac{\hbar}{2}(b-ic) + \frac{\hbar}{2}(b-ic) & \frac{\hbar}{2}a - \frac{\hbar}{2}a \end{pmatrix}$	
$\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y \sim \begin{pmatrix} 0 & \hbar(-b-ic) \\ \hbar(b-ic) & 0 \end{pmatrix}$	
$\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y \sim \hbar \begin{pmatrix} 0 & -b-ic \\ b-ic & 0 \end{pmatrix}$	
$\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y \sim i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -ib+c \\ ib+c & 0 \end{pmatrix}$	
$\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y \sim -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & ib-c \\ -ib-c & 0 \end{pmatrix}$	

Tabla 6 Dedución de las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular intrínseco a partir de las relaciones de anti-conmutación heredadas del momento angular total

4) Dedución de \hat{S}_z a partir del conmutador $[\hat{S}_x, \hat{S}_y]$

$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x \sim \hat{S}_z$
$\begin{pmatrix} 0 & ib - c \\ -ib - c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ib - c \\ -ib - c & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} (ib - c)(b - ic) & -a(ib - c) \\ a(-ib - c) & (-ib - c)(b + ic) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (b + ic)(-ib - c) & a(ib - c) \\ a(-ib - c) & (b - ic)(ib - c) \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} ib^2 + ic^2 & -a(ib - c) \\ a(-ib - c) & -ib^2 - ic^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -ib^2 - ic^2 & a(ib - c) \\ -a(-ib - c) & ib^2 + ic^2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2i(b^2 + c^2) & -2a(ib - c) \\ 2a(-ib - c) & -2ai(b^2 + c^2) \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2i(b^2 + c^2) & 2a(c - ib) \\ -2a(ib + c) & -2ai(b^2 + c^2) \end{pmatrix}$
$\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x = \hbar i \begin{pmatrix} \frac{2}{\hbar}(b^2 + c^2) & -\frac{2}{\hbar}a(b + ic) \\ -\frac{2}{\hbar}(b - ic) & -\frac{2}{\hbar}(b^2 + c^2) \end{pmatrix}$

Tabla 7 Dedución de \hat{S}_z

B. Expansión en Serie de la Función Trigonométrica Coseno desde el Polinomio de Taylor.

Un polinomio es una expresión algebraica que consta de dos o más términos cuya expresión es:

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (A)$$

Donde $a_k x^k$ son los términos del polinomio con a_k como el coeficiente, y si este coeficiente es cero se omite el término del polinomio que lo contenga, el coeficiente a_k corresponderá al término con mayor grado y k será un entero positivo mientras que los a_k serán números reales (Swokowski, 1986) esto se puede expresar desde una serie empelando la noción de polinomio y la expresión (A) de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \quad (B)$$

Ahora considerando la k -ésima derivada de una función polinómica evaluada en cero $F'^k(0)$ se tiene:

$$F(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n$$

$$F(0) = a_0 (x)^0 = a_0$$

$$F'(x) = 1 * a_1 + 2 * a_2 x^{2-1} + 3 * a_3 x^{3-1} + 4 * a_4 x^{4-1} + \dots + n * a_n x^{n-1}$$

$$F'(0) = 1 * a_1$$

$$F''(x) = 1 * 2 * a_2 + 2 * 3 * a_3 x^{3-1-1} + 3 * 4 * a_4 x^{4-1-1} + \dots + (n-1) * n * a_n x^{(n-1)-1}$$

$$F''(0) = 1 * 2 * a_2$$

$$F'''(x) = 1 * 2 * 3 * a_3 + 2 * 3 * 4 * a_4 x^{4-1-1-1} + \dots + (n-2) * (n-1) * n * a_n x^{(n-2)-1}$$

$$F'''(0) = 1 * 2 * 3 * a_3$$

...

$$F'^k(0) = k! a_k \quad (C)$$

Podemos observar que la k -ésima derivada evaluada en $x = 0$ es igual a k factorial, por el k -ésimo coeficiente a , si despejamos de la Ec.(C) el coeficiente a_k tenemos:

$$a_k = \frac{F'^k(0)}{k!} \quad (D)$$

Ahora si reemplazamos la ecuación (D) en la ecuación (B)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F'^k(0)}{k!} x^k \quad (E)$$

Así se obtiene el polinomio de Taylor, dado por la expresión (E). El cual nos permite replantear cualquier función suave en términos de una serie infinita. Ahora haciendo uso del polinomio de Taylor vamos a re-expresar la función trigonométrica $\cos(\varphi)$ en términos de una serie infinita.

La k-ésima Derivada de la Función $\cos(x)$	Funciones derivadas evaluadas en cero
$F(x) = \cos(x)$	$F(0) = 1$
$F'(x) = -\sin(x)$	$F'(0) = 0$
$F''(x) = -\cos(x)$	$F(0) = -1$
$F'''(x) = \sin(x)$	$F'(0) = 0$
$F''''(x) = \cos(x)$	$F(0) = 1$
...	...

Tabla 8 Cálculos para el polinomio de Taylor de las derivadas de las funciones Evaluadas en cero

Finalmente, solo hace falta reemplazar los valores de las k -ésima derivada evaluadas en cero en la expansión de la serie en la ecuación (E) tenga en cuenta que la sustitución se presenta en negrilla:

$$f(x) = \frac{\mathbf{1}x^0}{0!} + \frac{\mathbf{0}x^1}{1!} + \frac{-\mathbf{1}x^2}{2!} + \frac{\mathbf{0}x^3}{3!} + \frac{\mathbf{1}x^4}{4!} + \frac{\mathbf{0}x^5}{5!} + \frac{-\mathbf{1}x^6}{6!} + \dots$$

y nos queda

$$f(x) = 1 - \frac{1x^2}{2!} + \frac{1x^4}{4!} - \frac{1x^6}{6!} + \dots \quad (F)$$

C. Generadores de la Rotación, Rotaciones en el espacio

Teniendo en mente que esencialmente el momento angular se compone de rotaciones en el espacio, se considera un vector en \mathbb{R}^2 tal como se ve en la figura 2, el cual rota un ángulo ϕ en dirección contraria a las manecillas del reloj de tal forma que es posible describirlo por sus componentes en x y y , dichas componentes estarán dadas por las funciones trigonométricas $\sin(\phi)$ y $\cos(\phi)$.

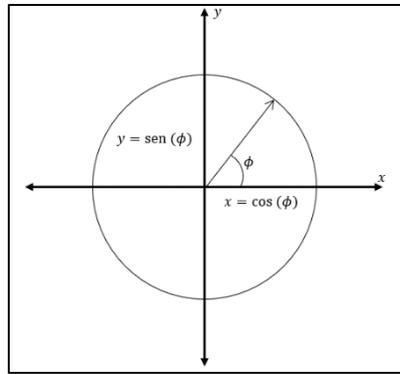


Figura 2. Vector en (R^2) rotado un ángulo ϕ

Si sobre el anterior vector rotado, se aplica otra rotación en un ángulo α las componentes del vector estarán dadas por las funciones trigonométricas $\sin(\phi + \alpha)$ y $\cos(\phi + \alpha)$ tal y como se muestra en Figura 2

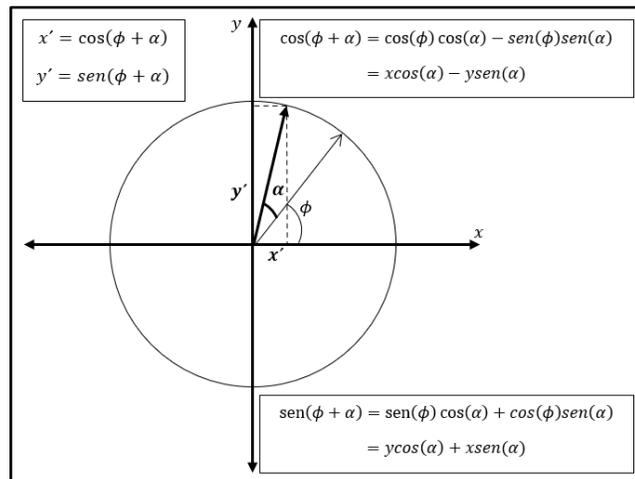


Ilustración 1 .Segunda rotación de un vector en R^2 en un ángulo α

Las ecuaciones que dan cuenta de la rotación pueden expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.3.1)$$

Cuyas ecuaciones serán, de acuerdo con la ilustración 2 y la matriz (4)

$$x' = x\cos(\phi) - y\text{sen}(\phi) \quad (4.1)$$

$$y' = y\cos(\phi) + x\text{sen}(\phi) \quad (4.2)$$

$$z' = z \quad (4.3)$$

Ahora para ilustrar los generadores de rotación se empleará la noción de rotación infinitesimal que es: la rotación de un vector a través de un ángulo infinitesimal ε tal y como se muestra en la Figura 3. Para estas rotaciones infinitesimales la proyección del vector sobre el eje x es aproximadamente igual a la del vector sin rotar ($\cos(\varepsilon) \cong 1$); mientras que la proyección sobre el eje y será aproximadamente igual a la del vector sin rotar más al incremento u ángulo ε , ($\text{sen}(\varepsilon) \cong \varepsilon$).

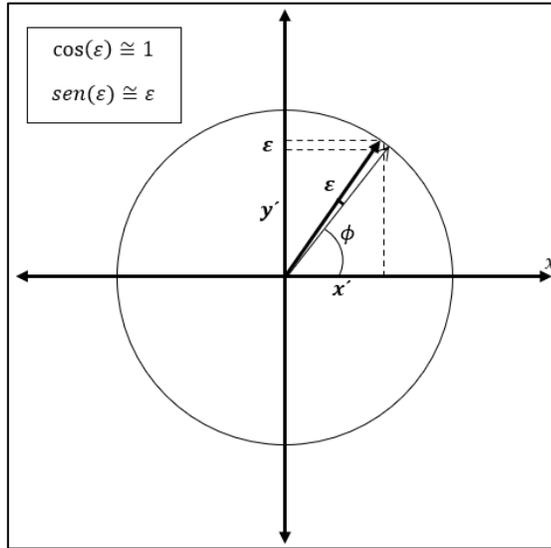


Ilustración 2. Vector en R^2 Rotado un Ángulo Infinitesimal ε

Ahora tenemos que x' y y' se representarían en función de la rotación infinitesimal, teniendo presente las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3). de la siguiente manera.

$$x' = x\cos(\varepsilon) - y\text{sen}(\varepsilon) \quad (5.1)$$

$$y' = y\cos(\varepsilon) + x\text{sen}(\varepsilon) \quad (5.2)$$

$$z' = z \quad (5.3)$$

Ya que $\cos(\varepsilon) \cong 1$ y $\text{sen}(\varepsilon) \cong \varepsilon$, Para el caso de la rotación en 3 dimensiones sobre el eje z , tenemos que las ecuaciones de transformación directa serán:

$$x' \cong x - \varepsilon y \quad (5.1.1)$$

$$y' \cong \varepsilon x + y \quad (5.2.1)$$

$$z' = z \quad (5.3.1)$$

En consecuencia, se deduce que su representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

La ecuación (5) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6)$$

Donde la matriz en negrilla representara el generador de la rotación alrededor del eje z. De manera similar se encuentran los generadores de la rotación para los demás ejes cartesianos, a estas matrices se le suele notar con G_n . Las ecuaciones de transformación directa y sus generadores de rotación son:

Tabla 9. Ecuaciones de Transformación para las Rotaciones Infinitesimales en un Ángulo ε

Ecuaciones de Transformación Directa	Generadores de Rotación
<i>Rotación sobre el eje x</i> $\begin{cases} x' = x \\ y' \cong y - \varepsilon z \\ z' \cong \varepsilon y + z \end{cases}$	$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
<i>Rotación sobre el eje y</i> $\begin{cases} x' \cong x + \varepsilon z \\ y' = y \\ z' \cong -\varepsilon y + z \end{cases}$	$G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<i>Rotación sobre el eje z</i> $\begin{cases} x' \cong x - \varepsilon z \\ y' = \varepsilon x + y \\ z' = z \end{cases}$	$G_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(García, 2017)}

De esta forma se encuentra de forma explícita la manera en que se obtienen los generadores de rotación; un tópico necesario para abordar las relaciones de conmutación para el momento angular de la teoría cuántica.

D. Capítulo I

Tabla 10 Comprobación de que la descomposición de la forma cuadrática para un vector isotópico en términos se puede dar en de ξ_0, ξ_1

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	
$(\xi_0^2 - \xi_1^2)^2 + (i(\xi_0^2 + \xi_1^2))^2 + (-2\xi_0\xi_1)^2 = 0$	Con: $x_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2; x_2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2);$ $x_3 = -2\xi_0\xi_1$
$\xi_0^4 - 2\xi_0^2\xi_1^2 + \xi_1^4 + (-1)(\xi_0^4 + 2\xi_0^2\xi_1^2 + \xi_1^4) + 4\xi_0^2\xi_1^2 = 0$	
$\xi_0^4 - 2\xi_0^2\xi_1^2 + \xi_1^4 + \xi_0^4 - 2\xi_0^2\xi_1^2 - \xi_1^4 + 4\xi_0^2\xi_1^2 = 0$	
$-4\xi_0^2\xi_1^2 + 4\xi_0^2\xi_1^2 = 0$	

E. Definiciones

Definición 1. Forma Bilineal sobre un Espacio Vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$, siendo f^{42} una aplicación que a cada par de vectores le asigna un escalar, es decir:

$$f: V \times V \rightarrow k, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$$

Donde f es una forma bilineal sobre V si cumple si se verifica que

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda \vec{x} + \lambda' \vec{x}', \vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda' f(\vec{x}', \vec{y}) \\ f(\vec{x}, \lambda \vec{y} + \lambda' \vec{y}') &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda' f(\vec{x}, \vec{y}') \end{aligned} \right\} \forall \vec{x}, \vec{x}', \vec{y} \in V, \forall \lambda, \lambda' \in k$$

(Roman, 2006)

Definición 1.1. Conjunto de Formas Bilineales sobre V

Se denotará con $\mathcal{B}(V)$ al conjunto de formas bilineales sobre V , este también es un espacio vectorial sobre k respecto a las operaciones usuales (suma de funciones y producto de funciones por un escalar)

(Roman, 2006)

Definición 1.2. Generalización de las Formas Bilineales entre Espacio Vectoriales

Sean tres espacios vectoriales U, V, W todos ellos sobre un mismo cuerpo k se dice que una aplicación f es bilineal

$$f: U \times V \rightarrow W$$

Para cualquier

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}, \vec{u}' \in U \\ \vec{v}, \vec{v}' \in V \end{aligned} \right\} \text{ y } \lambda, \lambda' \in k$$

Si se verifica que

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}', \vec{v}) &= \lambda f(\vec{u}, \vec{v}) + \lambda' f(\vec{u}', \vec{v}) \\ f(\vec{u}, \lambda \vec{v} + \lambda' \vec{v}') &= \lambda f(\vec{u}, \vec{v}) + \lambda' f(\vec{u}, \vec{v}') \end{aligned} \right\}$$

(Roman, 2006)

Definición 1.3. Definición Analítica de una Forma Bilineal

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo k y sea f una forma bilineal

$$f: V \times V \rightarrow k$$

Si la dimensión de V es n , y si $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V . Entonces para cualquier par de vectores de $\vec{x}, \vec{y} \in V$, por lo tanto

⁴² A la función f se le llamara <<forma>> debido a que toma los valores en el cuerpo k .

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j}^n a_{ij} x_i y_j = X^T A X^{43} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Donde

a_{ij} : Son los escalares $a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$

x_i, y_j : Denotan las coordenadas de los vectores $\vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i$ y $\vec{y} = \sum y_j \vec{e}_j$

$A^{44} = [a_{ij}]$: la matriz $n \times n$ ⁴⁵

(Roman, 2006)

Definición 1.4. Cambio de Base y Matrices Congruentes

Sea f una forma bilineal

$$f: V \times V \rightarrow k$$

Donde V es un espacio vectorial sobre el cuerpo k que tiene dimensión n si A es la matriz asociada a f en una primera base de V , y si A' es la matriz asociada a f respecto de la otra base, entonces se tiene que:

$$A' = P^T A P$$

Donde P es la correspondiente matriz del cambio de coordenadas

Nota: La matriz P permite poner $X' = P X$, donde X y X' son las matrices columna de las coordenadas de un mismo vector genérico en la primera y segunda base respectivamente.

- ⊗ Dos matrices cuadradas A y A' del mismo tamaño $n \times n$ se dicen matrices congruentes si existe alguna matriz P que cumpla $A' = P^T A P$
- ⊗ Dos matrices son congruentes si estas asociadas, ambas, a la misma forma bilineal respecto de distintas bases
- ⊗ Para el conjunto μ_n la congruencia de matrices es una relación de equivalencia⁴⁶

(Roman, 2006)

⁴³ Téngase en cuenta que $X^T A X$ es una matriz de tamaño 1×1 cuyo único elemento es el escalar $\sum a_{ij} x_i y_j$ con el que se identifica dicha matriz.

⁴⁴ Se suele referir a A como la matriz de Gram de la forma bilineal f en la base B . En otras palabras, la matriz de Gram es el producto interno de todos los vectores. En el caso real la matriz de Gram es simétrica. En el caso complejo la matriz de Gram es hermitica (auto adjunta) Si los vectores son ortogonales la matriz de Gram es diagonal, si los vectores son ortonormales la matriz de Gram es la identidad.

⁴⁵ La correspondencia $f \rightarrow A$ es un isomorfismo del espacio vectorial $B(V)$ de las formas bilineales sobre el espacio V de dimensión n , en el espacio vectorial μ_n de las matrices cuadradas $n \times n$.

⁴⁶ Para mostrar que μ_n es una relación de equivalencia tiene que ser: reflexiva (A es congruente consigo misma), Simétrica (A es congruente con A' , A' es congruente con A), y transitiva (si A es congruente con A' , A' es congruente con A'' . Entonces, A es congruente con A'')

Definición 1.5. Formas Bilineales Simétricas y Antisimétricas

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k y f una forma bilineal

$$f: V \times V \rightarrow k$$

Se dice que

$$\odot f \text{ es simétrica si } f(\vec{y}, \vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

$$\odot f \text{ es antisimétrica si } f(\vec{y}, \vec{x}) = -f(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

Toda forma bilineal se puede expresar como la suma de una forma bilineal simétrica (f_s) y una forma bilineal antisimétrica (f_a)

$$f = f_s + f_a$$

Donde

$$f_s(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x})]$$

$$f_a(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{y}, \vec{x})]$$

1. Los conjuntos de formas bilineales simétricas se representan con $\mathcal{B}_s(V)$ y Los conjuntos de formas bilineales antisimétricas se representan con $\mathcal{B}_a(V)$ son subespacios suplementarios del espacio $\mathcal{B}(V)$ de las formas lineales.
2. Si el espacio V tiene dimensión finita y si A es la matriz asociada a la forma bilineal $f: V \times V \rightarrow k$ respecto de una base cualquiera, entonces:

$$[f \text{ es simétrica} \leftrightarrow A \text{ es simétrica}]$$

$$[f \text{ es Antisimétrica} \leftrightarrow A \text{ es Antisimétrica}]$$

- I. Si A es la matriz asociada a la forma bilineal f , entonces, las matrices A_s y A_a de f_s y f_a son:

$$A_s = \frac{1}{2} [A + A^T]$$

$$A_a = \frac{1}{2} [A - A^T]$$

- II. Nótese que $A = A_s + A_a$

(Roman, 2006)

Definición 2. Formas Cuadráticas

Considerando el polinomio de segundo orden de dos variables como:

$$\omega(\vec{x}, \vec{y}) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Para su estudio se recurre a las formas bilineales simétricas

$$f((\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}', \vec{y}')) = axx' + \frac{b}{2}(xy' + x'y) + cyy'$$

Si $\vec{x} = \vec{x}'$ y $\vec{y} = \vec{y}'$ entonces

$$f((\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}', \vec{y}')) = ax^2 + bxy + cy^2$$

(Roman, 2006)

Definición 2.1. Formas Cuadráticas (Definición Formal)

Si V es un espacio vectorial, sobre un cuerpo K . Se llaman formas cuadráticas definidas en V a las aplicaciones

$$\omega: V \rightarrow k$$

Que cumple lo exigido en cualquiera de los dos siguientes puntos⁴⁷

- i. Dada una forma bilineal simétrica $f: V \times V \rightarrow k$ se llama forma cuadrática asociada a f a la aplicación

$$\omega: V \rightarrow k, \quad \vec{x} \mapsto \omega(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$$

- ii. La aplicación $\omega: V \rightarrow k$ es una forma cuadrática si se verifica

- a. $\omega(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\omega(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in V \quad \text{y} \quad \forall \lambda \in k$

- b. La función $f: V \times V \rightarrow k$ definida mediante la relación

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}[\omega(\vec{x} + \vec{y}) - \omega(\vec{x}) - \omega(\vec{y})]^{48}$$

Es bilineal (simétrica)

(Roman, 2006)

Definición 2.2. Matriz de una Forma Cuadrática (Cambio de Base y Rango)

Sea V un espacio vectorial sobre el campo k , y sea $\omega: V \rightarrow k$ una forma cuadrática cuya forma polar es f . Si V tiene dimensión n y si $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V , entonces para cualquier vector $\vec{x} \in V$ es:

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{ij}^n a_{ij}x_i x_j = X^T A X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde

$A = [a_{ij}]$: es la matriz simétrica $n \times n$ con $a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$

$\omega(\vec{x})$: Matriz de la forma cuadrática ω en la base B

$X = [x_i]$: matriz columna de las coordenadas x_i en la base B

☞ Si A' es la matriz de ω en otra base B' , entonces

⁴⁷ Equivalentes entre sí

⁴⁸ A f se le llama forma polar de ω . Otra forma de escribirlo es: $f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}[\omega(\vec{x} + \vec{y}) - \omega(\vec{x} - \vec{y})]$

$$A' = P^T A P$$

Donde P es una matriz regular que permite el cambio de coordenadas de B a B' , por lo tanto, A y A' son congruentes

- ☞ Todas las matrices asociadas a la forma cuadrática ω , en las distintas bases de V tienen el mismo rango, al cual se le llama “rango de la forma cuadrática”

$$\text{Rang } \omega = \text{Rang } A$$

(Roman, 2006)

Definición 2.3. Espacios Vectoriales de las Formas Cuadráticas

- ⊗ Sea V un espacio vectorial, sobre el cuerpo k , el conjunto de formas cuadráticas de V en k al que se denotara por $\mathcal{L}(V)$ es un espacio vectorial sobre k respecto a las operaciones usuales⁴⁹
- ⊗ La correspondencia en la que, a cada forma cuadrática, de $\mathcal{L}(V)$, se le asigna su forma polar, forma bilineal simétrica de $\mathcal{B}_s(V)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales
- ⊗ Si V tiene dimensión n y se elige una base una base de V . La correspondencia en la que, a cada forma cuadrática, de $\mathcal{L}(V)$, le asigna su matriz asociada, en esa base, es un isomorfismo en el espacio vectorial de las matrices simétricas de tamaño $n \times n$.

(Roman, 2006)

Definición 2.4. Conjugado Respecto de una Forma Cuadrática

Comparación entre la ortogonalidad y la conjugación:

✚ Ortogonalidad: El producto escalar entre dos vectores es nulo

✚ Conjugación: La forma bilineal entre dos vectores es nula.

La conjugación conserva algunas de las propiedades de la ortogonalidad, pero no todas:

- ◆ Un vector, diferente del nulo, $\vec{a} \neq 0$ no puede ser ortogonal a todos los vectores del espacio
 - No obstante, en general, puede existir un vector, diferente del nulo, $\vec{a} \neq 0$, tal que:

$$f(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in V$$

(Roman, 2006)

Definición 2.5. Vectores Conjugados:

- Sea $\omega: V \rightarrow k$ una forma cuadrática, en el espacio vectorial V , sobre el cuerpo k , y sea f la forma polar de la forma cuadrática ω . Se dice que $\vec{x}, \vec{y} \in V$ son vectores conjugados respecto de ω o respecto de f que se verifica que:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

- Si V tiene dimensión finita y si A es la matriz simétrica de la forma cuadrática ω de una cierta base del espacio vectorial V , entonces, $\vec{x}, \vec{y} \in V$ son conjugados con respecto de la forma cuadrática ω si y solo si:

⁴⁹ Suma de funciones y producto de funciones por un escalar

$X^T AY = 0$ (Relación de Conjugación)

Donde X y Y son matrices columna de las coordenadas de \vec{x}, \vec{y} respectivamente.

Observaciones:

1. El vector nulo es el conjugado de todos los vectores del espacio

$$f(\vec{x}, \vec{0}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in V$$

2. La relación de conjugación respecto de la forma cuadrática ω es simétrica

- 1) Si \vec{x} es conjugado de \vec{y} , entonces

- 2) \vec{y} es conjugado de \vec{x}

- i. Lo anterior es evidente porque $f(\vec{y}, \vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{y})$ la forma polar de la forma cuadrática f es simétrica

3. Dos conjuntos de vectores (en particular, dos subespacios) son conjugados respecto de la forma cuadrática ω ; Si cualquier vector de uno de ellos es conjugado de todos los vectores del otro.

(Roman, 2006)

Definición 2.6. Subespacios Conjugados de un Vector

Sea $\omega: V \rightarrow k$ una forma cuadrática, en el espacio vectorial V , sobre el cuerpo k , y f la forma polar de ω . Sea $\vec{x}_0 \in V$ un vector fijo tal que:

- I. El conjunto que forman los vectores conjugados del vector fijo \vec{x}_0 , es decir,

$$\ell(\vec{x}_0) = \{ \vec{x} \in V \mid f(\vec{x}_0, \vec{x}) = 0 \}$$

es un subespacio vectorial de V , se le llama subespacio conjugado del vector \vec{x}_0 respecto de la forma cuadrática ω .

- II. Si la forma cuadrática ω del vector fijo \vec{x}_0 es diferente de cero $\omega(\vec{x}_0) \neq 0$

El subespacio $\ell(\vec{x}_0)$ es suplementario⁵⁰ de subespacio $\nu(\vec{x}_0)$ que engendra \vec{x}_0

- III. Si la forma cuadrática ω del vector fijo \vec{x}_0 es diferente de cero $\omega(\vec{x}_0) \neq 0$

Si $(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1})$ es una base de V (Suponiendo que la $Dim V = n$) entonces, $\ell(\vec{x}_0)$ admite por base a $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1})$

Siendo

$$\vec{u}_i = \vec{x}_i - \lambda_i \vec{x}_0 \quad \text{con } \lambda_i = \frac{f(\vec{x}_0, \vec{x}_i)}{\omega(\vec{x}_0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1)$$

(Roman, 2006)

Definición 2.7. Formas Cuadráticas Ordinarias y Degeneradas “Núcleo”

⁵⁰ En un espacio vectorial V , dos subespacios U_1 y U_2 se dicen suplementarios si cualquier vector $\vec{u} \in V$ se puede expresar de una sola manera, como la suma: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ de un vector $\vec{u}_1 \in U_1$ y otro $\vec{u}_2 \in U_2$, según la suma directa de dos subespacios se verifica que:

(Los subespacios U_1 y U_2 de V son suplementarios) $\Leftrightarrow U_1 \oplus U_2 = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_1 + U_2 = V \\ U_1 \cap U_2 = 0 \end{pmatrix}$

Sea $\omega: V \rightarrow k$ una forma cuadrática, en el espacio vectorial V sobre el cuerpo k , se llama núcleo de la forma cuadrática ω al conjunto que forman los vectores de V que son conjugados, respecto de ω , de todos los vectores de V

Este subconjunto es un subespacio de V y se lo denota por

$$Nuc(\omega) = \{\vec{x} \in V \mid f^{51}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{y} \in V\}^{52}$$

Se dice que:

- I. La forma cuadrática ω es una **forma cuadrática ordinaria** si $Nuc(\omega) = 0$
- II. La forma cuadrática ω es una **forma cuadrática degenerada** si $Nuc(\omega) \neq 0$, sin no es ordinaria⁵³
 - a. Si la $Dim V = n$ y A es la matriz asociada de la forma cuadrática ω en una cierta base de V . Entonces, el núcleo de ω esta formado por los $\vec{x} \in V$ tales que:

$$Nuc(\omega): AX = 0$$

Donde X es la columna de coordenadas de \vec{x}

- b. En el caso, de dimensión finita n , se verifica que:

$$Rang(\omega) = n - Dim[Nuc(\omega)]$$

$$(\omega \text{ ordinaria}) \Leftrightarrow Rang(\omega) = n$$

$$(\omega \text{ degenerada}) \Leftrightarrow Rang(\omega) < n$$

(Roman, 2006)

Definición 2.8. Aplicación Lineal Asociada a una Forma Cuadrática

Dada una forma cuadrática $\omega: V \rightarrow k$, y llamase a f la forma polar de ω . Para cada vector $\vec{u} \in V$, las aplicaciones parciales $f(_, \vec{u})$ y $f(\vec{u}, _)$ definidas por

$$f(_, \vec{u}): \vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{u})$$

$$f(\vec{u}, _): \vec{x} \mapsto f(\vec{u}, \vec{x})$$

Son aplicaciones lineales de V en k . Son aplicaciones lineales o **elementos del espacio dual V^*** . Puesto que f es simétrica estas dos formas lineales

$$f(_, \vec{u}) \text{ y } f(\vec{u}, _)$$

Son iguales. La aplicación ω_a (asociada a ω)

$$\omega_a: V \rightarrow V^*$$

$$\vec{u} \mapsto \omega_a(\vec{u}) = f(_, \vec{u}) = f(\vec{u}, _)$$

Es una aplicación lineal ya que para cualquier $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\lambda, \mu \in k$

⁵¹ Aquí f corresponde a la forma polar de la forma cuadrática ω

⁵² Para que un vector \vec{x} pertenezca al núcleo, no es suficiente que sea $f(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Cuando se verifica esta relación, es decir, cuando $\omega(\vec{x}) = 0$ se puede decir que el vector es auto adjunto respecto a la forma cuadrática ω .

⁵³ Esto quiere decir que: Existe un vector $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ que es conjugado respecto de la forma cuadrática ω de todos los vectores del espacio vectorial V .

$$\omega_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\omega_a(\vec{u}) + \mu\omega_a(\vec{v})$$

$$\omega_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})(\vec{x}) = (\lambda\omega_a(\vec{u}) + \mu\omega_a(\vec{v}))(\vec{x})$$

Definición 2.9. Aplicación Asociada a ω

Dada la forma cuadrática $\omega: V \rightarrow k$ a cuya forma polar se le llama f , se llama aplicación asociada a ω a la

$$\omega_a(\vec{v}): V \rightarrow V^*$$

$$\vec{u} \mapsto \omega_a(\vec{u}) = f(_, \vec{u}) = f(\vec{u}, _)$$

Que es lineal

El núcleo de ω_a está formado por aquellos vectores $\vec{u} \in V$ tal que $f(\vec{u}, _)$ es la aplicación nula, esto es,

$$f(\vec{u}, \vec{y}) = 0 \quad \forall \vec{y} \in V$$

Lo que es equivalente a decir que \vec{u} pertenece al núcleo de ω , por lo tanto, el núcleo de la forma cuadrática no es más que el núcleo de su aplicación lineal asociada a ω_a .

(Roman, 2006)

Definición 3. Espacio Dual

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k , se llama a f forma lineal V a toda aplicación del espacio vectorial V en k ⁵⁴. Es decir, la aplicación

$$\varphi: V \rightarrow k$$

Es una forma lineal para $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\forall \mu, \lambda \in k$ se verifica

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v})$$

Al espacio vectorial $\mathcal{L}(V, k)$ de formas lineales de V se le denota por V^* Y recibe el nombre de espacio dual de V .

(Roman, 2006)

Definición 3.1 Espacio Vectorial $\mu_{m \times n}$

Se denota por $\mu_{m \times n}$ al conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con elementos de un cierto cuerpo k ; cada una de ellas, A , se corresponde biyectiva mente con su aplicación lineal asociada f_A (de k^n en k^m) respecto de las bases canónicas, con:

- Suma $A + B \quad \forall A, B \in \mu_{m \times n}$

⁵⁴ Espacio vectorial sobre sí mismo

- Producto $\lambda A \forall A \in \mu_{m \times n} \forall \lambda \in k$

Las operaciones permiten asegurar que la biyección entre $\mu_{m \times n}$ y $\mathcal{L}(k^n, k^m)$ es un isomorfismo

(Roman, 2006)

Definición 3.2 Base Dual

La base dual se puede construir a partir de las siguientes formas lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$$\varphi_1: (x, y, z) \mapsto \varphi_1(x, y, z) = x$$

$$\varphi_2: (x, y, z) \mapsto \varphi_2(x, y, z) = y$$

$$\varphi_3: (x, y, z) \mapsto \varphi_3(x, y, z) = z$$

Cualquier forma lineal se puede poner como una combinación de las tres formas lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$$\varphi(x, y, z) = ax + by + cz$$

$$\varphi(x, y, z) = a\varphi_1(x, y, z) + b\varphi_2(x, y, z) + c\varphi_3(x, y, z)$$

Es decir

$$\varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3$$

si V es un espacio vectorial, sobre un cuerpo k con dimensión n y $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V , entonces el espacio dual V^* también tiene dimensión n una de sus bases es $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ que se llama base dual de B para $(i = 1, 2, \dots, n)$ siendo

$$\varphi_i: V \rightarrow k \quad \vec{x} \mapsto \varphi_i(\vec{x}) = x_i$$

Donde

$$(x_i, i - \text{ésima coordenada de } \vec{x} \text{ en } B)$$

Las coordenadas de la forma lineal $\varphi \in V^*$ en la base dual son escalares $\psi(\vec{e}_1), \psi(\vec{e}_2), \dots, \psi(\vec{e}_n)$.

(Roman, 2006)

Definición 4. Mutivector simple r -vector

Se define como el producto exterior de vectores linealmente independientes (ortogonales)

$$A_r = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3 \wedge \dots \wedge \vec{a}_n \quad r \leq n$$

Donde n es el número de dimensiones del espacio

- **Interpretación Geométrica:** Un r -vector⁵⁵ se puede interpretar geoméricamente como un volumen r dimensional de un espacio vectorial V_n .cuyos vectores son linealmente independientes

⁵⁵ Se puede interpretar como la extensión de la definición de número dirigido

- Bivector: Segmento de área dirigido
- Trisector: Volumen orientado de V_n , volumen dirigido

➤ El producto Exterior de Vectores es Asociativo

$$(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) \wedge \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \wedge (\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3)$$

➤ Permutación y Dependencia Lineal Multivectorial: Se pueden emplear las permutaciones para estudiar la dependencia lineal de un conjunto de vectores; un multivector se dice dependiente linealmente de otro multivector si es posible por medio de la permutación obtener el multivector con el que se compara

➤ Conmutatividad y Anti-conmutatividad: En el producto exterior de vectores y r -vectores estos pueden conmutar o anti-conmutar, casos:

- Para r par (se presenta conmutatividad)
- Para r impar (se presenta Anti-conmutatividad)

Expresión general

$$\vec{a} \wedge A_r = (-1)^r A_r \wedge \vec{a} = \begin{cases} r \text{ par} & \vec{a} \wedge A_r = A_r \wedge \vec{a} \\ r \text{ impar} & \vec{a} \wedge A_r = -A_r \wedge \vec{a} \end{cases}$$

(Spinel G)

Definición 5. Producto Geométrico

En general no es conmutativo ni anti conmutativo

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})$$

Correspondencia del producto genético vector y multivector

$$\vec{a}A_r = \frac{1}{2}(\vec{a}A_r + (-1)^r A_r \wedge \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{a}A_r - (-1)^r A_r \wedge \vec{a})$$

$$\vec{a}A_r = \vec{a} \cdot A_r + \vec{a} \wedge A_r$$

Producto geométrico de tres vectores linealmente independiente

➤ Axioma: Cualquier Multivector del álgebra de Clifford se puede descomponer en la suma de r -vectores de diferente grado

$$M = M_0 + M_1 + \dots + M_n$$

