UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

EL INFINITESIMAL, UNA NOCIÓN DE MÚLTIPLES ROSTROS

Harol Esteban Rodríguez Delgado

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D,C., 2023

EL INFINITESIMAL, UNA NOCIÓN DE MÚLTIPLES ROSTROS

Harol Esteban Rodríguez Delgado
Código estudiantil: 2018140068

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el Título de Licenciado en Matemáticas

Director: Dr. Edgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D,C., 2023

A la memoria de mi madre. A fin de cuentas, todos resultamos ser cantidades evanescentes en este inmenso e innumerable universo hiperreal.

Tabla de contenido

Índice de figuras

Agradecimientos

Nosotros, los seres humanos, naturalmente intentamos justificarlo todo; deseamos hallar el porqué de las cosas y la mayoría de nuestro tiempo vivimos sujetos a interrogantes. Es algo que está intrínsecamente en nuestro ser. Sin embargo, tengo la férrea convicción de que Dios, incluso cuando no hay definición absoluta de él, es una manera de huir de nuestra racionalidad y adentrarnos en una forma de vida que transciende más allá de lo que nuestros sentidos pueden experimentar y asimilar. En analogía con las siguientes páginas, Dios es un infinitesimal sobre el que debemos tener una fe ciega y no justificable para alcanzar grandes resultados, aunque juzguemos muchas veces que esto no es el camino apropiado para un sentido profundo, significativo y ausente de contradicciones. Entonces, es allí, donde solo el tiempo se encargará de mostrar la transformación de la fe en la verdad. *A Dios gracias por esta oportunidad*.

A los profesores de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; cada uno de ellos fue una parte fundamental en la construcción y el enriquecimiento de mi formación profesional, académica y personal.

A cada uno de mis hermanos, pero más especialmente a: Jonathan Rodríguez, Jacqueline Rodríguez, José Rodríguez y Marisol Rodríguez. Sin su impulso, fraternidad y ayuda incondicional mi vida no sería lo que es hoy en día.

A mi Padre, quien latentemente me enseñó el valor que tiene la disciplina y la constancia cuando deseas alcanzar algo.

Al profesor Edgar Alberto Guacaneme por aceptar la aventura de sumergirnos en el mundo histórico-matemático de las cantidades infinitamente pequeñas, y ser mi guía en este proceso. De igual manera, por enseñarme que, en el aula de clase y aun en la vida en general, lo normal es que las cosas sean anormales.

A mis amigos y compañeros de clase por cada momento vivido y por enriquecer mi existencia con sus conocimientos y experiencias. Especialmente, a Angie Olarte por su singular amistad.

A Mauricio Galindo, por su apoyo, sus consejos y nuestras conversaciones sobre la vida y algunas veces sobre mis nacientes incógnitas respecto a la Medicina.

Al profesor Kemel George, por la bibliografía que me compartió y la charla que sostuvimos en una oportunidad sobre los infinitesimales.

A José Luis Guevara, por su amistad y sus sugerencias en pro de la mejora de este trabajo a partir de nuestras ingenuas reflexiones sobre la Historia de las Matemáticas. De igual manera, por haber sido un mentor infalible en la elaboración de este documento en LaTeX.

Resumen

Yo es otro. Si el cobre se despierta
clarín no es culpa suya.

Arthur Rimbaud

El presente trabajo pretende evidenciar que la noción de infinitesimal ha adquirido múltiples semblantes a lo largo del devenir histórico de las Matemáticas, mostrando cómo este ha hecho parte y ha conducido a la construcción de objetos matemáticos más sofisticados, en los cuales se esconde su sentido y significado. Así, el propósito que aquí se persigue es el reconocimiento de hitos históricos de las Matemáticas en los cuales se logra identificar que el infinitesimal está presente, con el fin de apreciar sus posibles cambios conceptuales y representativos.

Bajo esta óptica, comenzamos desde la escuela pitagórica y el problema de la inconmensurabilidad dando una mirada cronológica a esta historia; abordamos luego algunas ideas de matemáticos escolásticos y del Renacimiento que nos llevan hasta los resultados de Newton y Leibniz en los cuales la ausencia de rigurosidad y la abundancia de misticismo dan lugar a las críticas de Berkeley y Marx, que finalmente son aliviadas con la llegada de la relación épsilon-delta como herramienta matemática rigurosa que posibilita el destierro de los infinitesimales. En contraste con ello, manifestamos su resurrección como trabajo del matemático y lógico Abraham Robinson en el siglo XX. Una vez hecho esto, más allá del deleite y el placer intelectual que se consigue al estudiar y ahondar en esta noción, damos unas pinzadas sobre el provecho o beneficio que puede tener para un profesor de matemáticas el recorrido y la caracterización histórica de esta idea.

Introducción

Las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a diferentes cosas.

Henri Poincaré

Intuitivamente, desde nuestras experiencias con el mundo, evocamos algunas ideas arraigadas a cantidades infinitamente pequeñas, tales como magnitudes que se pueden hacer tan pequeñas como se quiera, o cantidades indivisibles e incrementos cercanos a cero. Estas expresiones, que ciertamente son el fruto de nuestras apreciaciones humanas, han jugado un rol transcendental en la historia y el desarrollo conceptual del Cálculo, una de las ramas más fructíferas y amplias de las Matemáticas. Sin embargo, así como el ser humano cambia ontológica y físicamente a lo largo de su tiempo de vida, a partir de este trabajo reflejamos que el infinitesimal no ha sido una noción estática, sino que, como producto del pensamiento humano, ha sido tornadiza y ha adquirido distintas facetas, representaciones y adaptaciones históricas. En tal sentido, es importante poner de relieve que el término "infinitesimal" fue usado solamente hasta el siglo XVII por Leibniz y Nicolas Mercator (Katz y Sherry, 2013), pero nosotros a lo largo de esta historia lo utilizaremos desde un principio, sin querer significar que, por ejemplo, Zenón o Euclides ya hacían mención de este, sino como una forma anacrónica de capturar esa idea de las magnitudes —no nulas— más pequeñas que cualquier magnitud finita.

Actualmente, el concepto de límite es la piedra angular que sostiene las ideas fundamentales del Cálculo; las derivadas, las integrales y las series, entre otros conceptos, están definidos en términos de este y son el foco de estudio en los cursos de Cálculo que se imparten alrededor del mundo. Estos objetos matemáticos son estudiados con base en operaciones, relaciones, rigurosidad lógica y aplicaciones a la solución de situaciones problema. Sin embargo, debido a cuestiones temporales y curriculares, es posible que se deje rezagada la posibilidad de responder o discutir en torno a preguntas tales como: cuáles son los fundamentos de estos conceptos o, mejor aún, cómo han llegado a alcanzar su aspecto moderno y cuáles circunstancias han conducido a que haya lugar a transfiguraciones conceptuales en la manera de concebirlos.

En este trabajo nuestro objetivo no es mostrar una teoría del Cálculo desarrollada por medio de un enfoque infinitesimal. En cambio, el propósito que aquí se persigue es el reconocimiento de hitos históricos de las Matemáticas en los cuales se logra identificar que el infinitesimal está presente, con el fin de apreciar sus posibles cambios conceptuales y representativos.

En un primer momento, damos un acercamiento al problema de la inconmensurabilidad que trajo crisis a las concepciones de la escuela pitagórica y, el cual se intentó resolver al considerar un segmento más pequeño que cualquiera dado. Unido a ello, abordamos la paradoja de la dicotomía, ideada por Zenón de Elea; a través de ella nos tropezamos con lo ilógico e imposible que resulta el movimiento si consideramos el tiempo como una suma infinita de instantes infinitesimales. En esa misma dirección, presentamos la postura de Aristóteles sobre el infinito, algunas de sus ideas sobre magnitudes continuas y discretas y su asimilación del continuo como una propiedad innata en la naturaleza. Junto con ello, damos una vista general del atomismo de Demócrito y la composición de los objetos geométricos. Asimismo, nos adentramos en la comprensión del ángulo de contingencia, cuyo nacimiento sobreviene de manera única, en el Libro III de *Elementos* de Euclides, permitiendo vislumbrar por primera vez una noción clara e inteligible del infinitesimal asociado a un ámbito geométrico. Posteriormente, abordamos el trabajo de Eudoxo y el método de exhausión, aludiendo igualmente a los aportes y la utilización que Arquímedes hizo sobre este, pero resaltando que hay una aparente ausencia de cantidades infinitamente pequeñas y que este método es cercano a lo que hoy en día conocemos como la idea de límite de una función.

En un segundo momento, mostramos dos posturas de la época medieval, cuyos protagonistas son Nicolas de Cusa y Thomas Bradwardine, que guardan en esencia las dos concepciones principales sobre la composición del continuo, a saber: el divisibilismo infinito y el atomismo; en estas los argumentos están presentes, pero las contradicciones también.

En un tercer momento, discutimos el problema de los toneles de vino abordado por Johannes Kepler y cómo sus ideas están relacionadas con la propuesta cavalieriana para calcular volúmenes y áreas a partir de sus elementos compositores, los indivisibles. En ese mismo punto, a partir de la paradoja del rectángulo de Torricelli, recalcamos que la utilización de estos elementos indivisibles en la conformación del continuo puede conducir a contradicciones. Además, ilustramos algunas de las ideas del trabajo del matemático inglés John Walis, cuya contribución dota a los indivisibles de una aritmética.

De este modo, en un cuarto momento arribamos en el trabajo desarrollado por los fundadores primarios del Cálculo, Newton y Leibniz; allí mostramos que los elementos base —fluxiones y diferenciales— no están muy distantes de lo que se entiende por un infinitesimal.

En un quinto momento, en disonancia con las ideas de los partidarios del Cálculo leibniciano y newtoniano, presentamos dos críticas detonadoras en el rumbo de esta historia que, en gran manera, conducen a que los infinitesimales pierdan su lugar en el campo de las matemáticas. La primera de ellas, *The analyst* (1734), formulada por el obispo George Berkeley; en esta realiza una fuerte crítica a los cimientos del Cálculo, llamándolos fantasmas por su carente fundamentación lógica y su cercana semejanza a cuestiones místicas y de fe;

la segunda de ellas, *Mathematical Manuscripts* (1983), producida por el filósofo Karl Marx en su motivación por entender la naturaleza y los sustentos del Cálculo. En respuesta a estas críticas, presentamos a Euler, un matemático desbordante en la creación matemática, quien se atrevió a afirmar que el infinitesimal era simplemente igual a cero, lo cual lo llevó a producir resultados originales, aunque no rigurosos.

En un sexto momento, penetramos en el nuevo Cálculo, el cual exilia todo rastro de los infinitesimales, imponiendo la teoría de los límites que tiene como sustento los épsilon-delta, cuya formulación viene a luz a inicios del siglo XIX con las ideas de Cauchy, Bolzano y Weierstrass, quienes ofrecen un arquetipo teórico que finalmente satisface los parámetros de rigurosidad matemática. En un séptimo momento, mencionamos algunas de las ideas del matemático alemán Abraham Robinson quien, a partir de su trabajo *Non-standard Analysis* (1966), propone un retorno a los infinitesimales, sustentándolos mediante la construcción de un sistema numérico que acata la precisión matemática y que se fundamenta en la teoría de modelos. Asimismo, damos un acercamiento intuitivo a la recta hiperreal y una interpretación de los infinitesimales dentro de esta aproximación y hacemos más evidente la naturaleza de aquellas magnitudes que no satisfacen el axioma arquimediano.

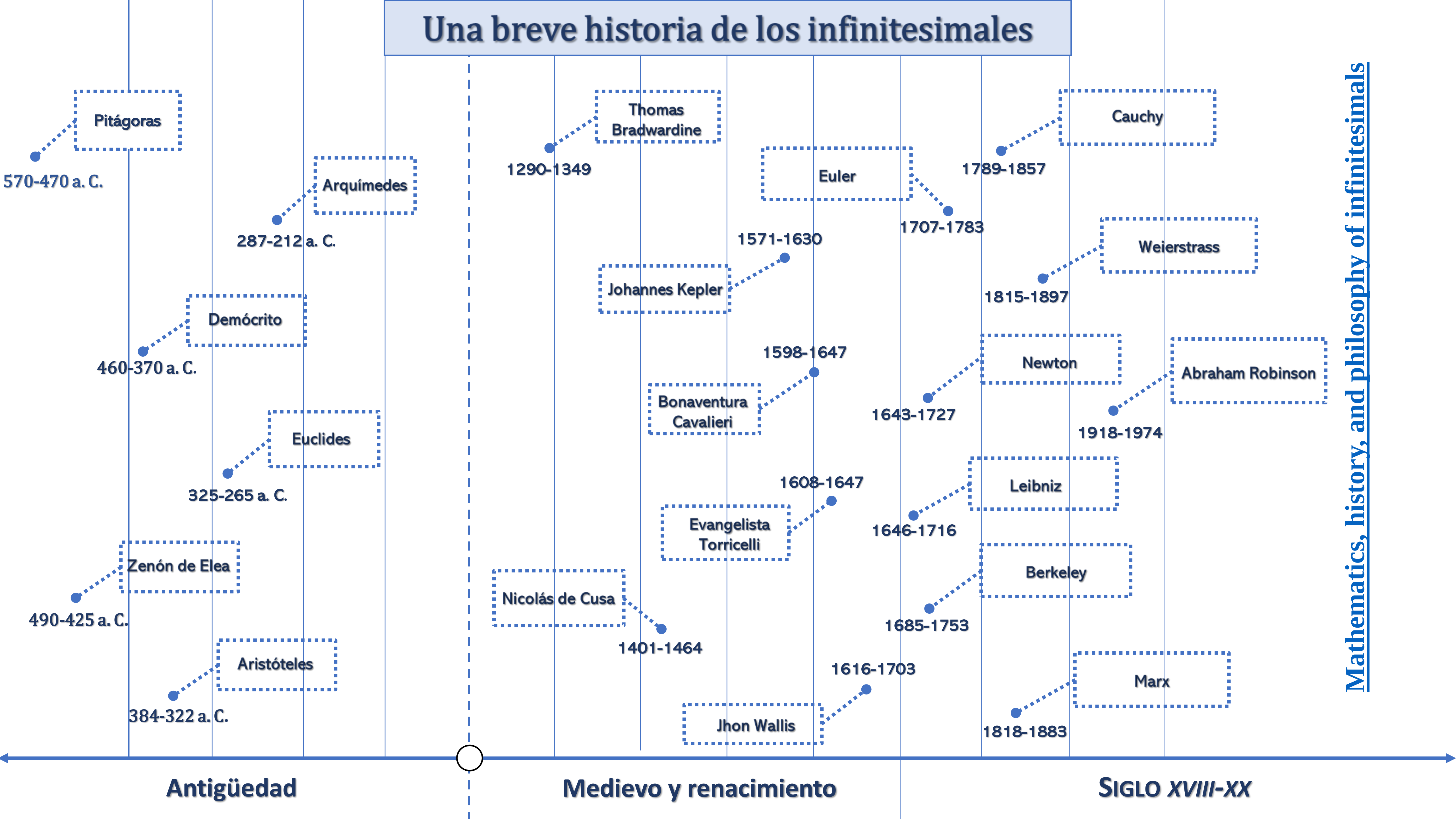
Por último, pero no por eso menos importante, nos cuestionamos sobre la importancia y los aportes que puede traer consigo la reconstrucción histórica de una idea, como lo es la de infinitesimal, para un profesor de matemáticas.

Así las cosas, los medios empleados para dicha labor son la reflexión y la lectura selectiva de las obras de los autores propiamente involucrados en el desarrollo de esta noción y también las interpretaciones que historiadores o académicos han hecho de estas. Además, utilizamos la primera persona del plural como el estilo literario que estructura la escritura de este documento, y por medio del cual queremos denotar que este trabajo no es un resultado exclusivo del autor principal, sino un fruto de las pláticas y reflexiones con su asesor, así como de las interpretaciones hechas sobre las ideas de los diferentes autores. Asimismo, no está de más aclarar que la mayoría de los documentos bibliográficos abordados en el desarrollo de este documento están originalmente en el idioma inglés y que cada uno de los apartados y de las ideas que abordamos de ellos son traducciones propias al español.

Finalmente, exponemos una situación práctica que resulta imposible en nuestra realidad sensible, pero que sí es realizable al movernos al mundo matemático, es decir, allí se posibilita la existencia de los infinitesimales y de los procesos infinitos:

> Si quisiéramos calcular el volumen de una manzana, podríamos dividirla en partes iguales hasta conseguir que una de ellas tenga un volumen conocido y posteriormente sumar cada una de estas partes. No obstante, en medio de nuestra finalidad por obtener el volumen de la manzana, ¿sería realmente imposible volverla a su forma original? Entonces, qué tal si pensamos en algo que nos permita medirla sin necesidad de dividirla, es decir, imaginemos una magnitud (una rodaja de manzana no divisible), pero ¿sorprendería si decimos que está magnitud no tiene ningún grosor? Pues bien, el lector concluirá que, si es así, entonces el grosor es cero, y nosotros responderíamos que no es posible puesto que si sumamos rodajas de manzana con grosor cero no obtendremos nada. Inmediatamente, el lector quedaría perplejo en la incertidumbre, preguntándose posiblemente cuál es la medida de esta rodaja. Finalmente, expondríamos que es una rodaja muy peculiar porque en realidad sí tiene un grosor que es infinitamente pequeño, pero mayor que cero y menor que cualquier número real positivo.

Para iniciar en firme esta travesía histórica, a continuación exhibimos de manera clara un panorama general sobre los pensadores o matemáticos que encontraremos, en virtud de que algunas de sus ideas están íntimamente relacionadas con la noción del infinitesimal. Aparte de eso, dejamos el link de acceso a una página web que contiene algunas investigaciones recientes sobre *Las Matemáticas, la historia y la filosofía de los infinitesimales.*



Una breve historia de los infinitesimales
Pitágoras
570-470 a. C.
Arquímedes
287-212 a. C.
Demócrito
460-370 a. C.
Euclides
325-265 a. C.
Zenón de Elea
490-425 a. C.
Aristóteles
384-322 a. C.
Thomas Bradwardine
1290-1349
Euler
1707-1783
1571-1630
Johannes Kepler
1598-1647
Bonaventura Cavalieri
1608-1647
Evangelista Torricelli
Nicolás de Cusa
1401-1464
1616-1703
Jhon Wallis
Cauchy
1789-1857
Weierstrass
1815-1897
Newton
1643-1727
Abraham Robinson
1918-1974
Leibniz
1646-1716
Berkeley
1685-1753
Marx
1818-1883
Mathematics, history, and philosophy of infinitesimals
Antigüedad
Medievo y renacimiento
SIGLO XVIII-XX

Capítulo 1

El infinitesimal en la Antigüedad

La historia de los infinitesimales es seguramente un caso de cantidades pequeñas generando grandes controversias.

Martin Davis y Melvin Hausner

1.1. Pitagóricos: número y magnitud infinitesimal

Un primer obstáculo en la edificación de las Matemáticas fue la inconmensurabilidad de las magnitudes descubierta por la escuela pitagórica en la antigua Grecia. Esta imposibilidad puede ser entendida desde tres perspectivas: 1) Encontrar una medida común para dos segmentos, 2) Encontrar dos números que tengan la misma relación de los dos segmentos, 3) Encontrar un segmento cuya longitud tenga como múltiplos comunes la longitud de los dos segmentos. A propósito del primero, la diagonal de un cuadrado y su lado poseen dicha característica; a continuación, se muestra esto desde un punto de vista geométrico y aritmético:

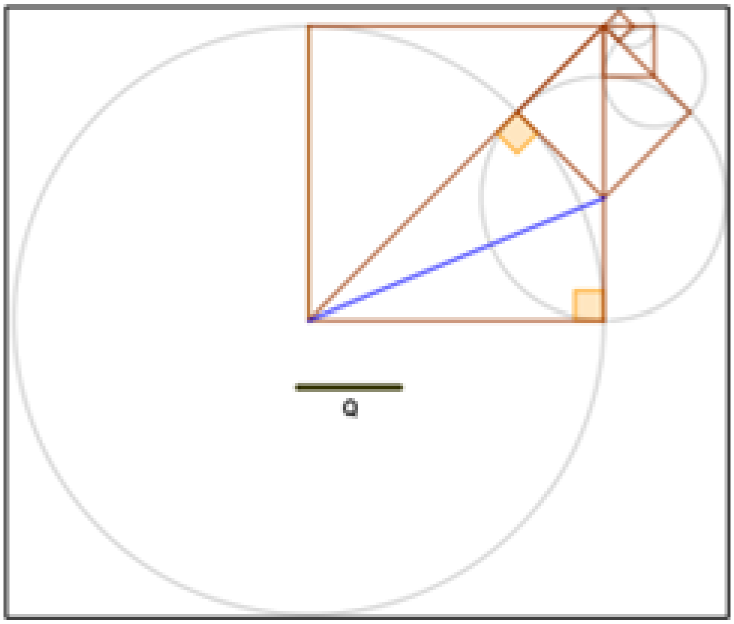


Figura 1.1: Inconmensurabilidad desde una perspectiva geométrica.

Para abordar esta demostración haremos uso del principio de reducción absurdo, con el cual se demuestra una proposición a partir de la falsedad de su negación. Es decir, para probar la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado suponemos que estos son conmensurables. Con ese propósito, basados en la representación de la Figura 1.1, consideremos un segmento Q de longitud constante que mida exactamente la diagonal y el lado, y copiemos el lado en la diagonal del cuadrado. Analicemos que la diagonal es medible por Q y el lado del cuadrado también, por lo tanto, el segmento restante al realizar la copia del lado también será medible por Q. Ahora, desde el extremo superior del segmento copiado tracemos un segmento perpendicular y determinemos la intersección con el lado considerado, con el cual construimos un nuevo cuadrado, ya que se determina un ángulo recto. Además, notemos que el segmento azul determina dos triángulos congruentes porque tiene dos lados de igual longitud y un ángulo recto. Así, podemos afirmar que los catetos menores de estos triángulos tienen la misma longitud. Además, en el lado del primer cuadrado está contenida la diagonal del nuevo cuadrado y el cateto menor de uno de los triángulos, pero sabemos que tanto el lado del cuadrado base como el cateto menor de dicho triángulo son conmensurables por Q, entonces la diagonal del nuevo cuadrado también lo será. Y si repetimos este proceso de manera infinita, ¿habrá un momento en que el lado del cuadrado que construyamos sea menor que la longitud Q? Realmente allí está la contradicción; habrá un instante en que el lado del cuadrado que construyamos sea tan pequeño que Q no pueda estar contenido en este. En otras palabras, Q no puede medir algo más pequeño que sí mismo. Por lo tanto, como probamos que es imposible que la diagonal y el lado del cuadrado sean conmensurables —porque es contradictorio—, entonces estos son inconmensurables.

Es necesario resaltar que la anterior demostración no funcionaría si consideramos la existencia de un segmento más pequeño que cualquier segmento dado. Precisamente, los pitagóricos en su lucha por sostener su convicción de que "todo es número" y que todo lo compone la unidad, se cree que pensaron en esta idea como una posible forma de aliviar el problema. Esto se puede ver en una hipótesis formulada por Hasse y Scholz (1968, citado en Campos, 1984):

> Los pitagóricos, que habían visto en peligro su hipótesis "Todo es número" debido al descubrimiento de los irracionales [inconmensurabilidad], habrían querido salvar dicha tesis mediante la consideración de un segmento como un agregado de una infinidad de partes de **segmentos infinitamente pequeños.** (p. 127; énfasis agregado)

El otro razonamiento es el aritmético, que tiene una gran conexión con el geométrico. Si consideramos un cuadrado de lado uno y hacemos uso del teorema de Pitágoras obtendremos que la diagonal tiene como longitud $\sqrt{2}$. En este caso particular, también nos basaremos en el principio de reducción al absurdo, como sigue: supongamos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, donde a y b son segmentos que no comparten una medida común, desde una vista geométrica, o números primos relativos, desde una vista aritmética. Entonces

$$a^2 = 2b^2 \tag{1.1}$$

a partir de esto a^2 es par y a también es par, ya que el cuadrado de todo número impar es impar. Es decir, podemos escribir $a = 2n$ y remplazar en la ecuación (1.1), de donde tenemos $2n^2 = b^2$ y de esto sigue que b es par. Partimos de que a y b eran números primos relativos, pero encontramos que tienen a 2 como factor común, y ello representa la contradicción puesto que desde un principio se supuso que no tenían factores comunes.

Este problema, que a primera vista puede parecer intranscendente, condujo las matemáticas a la búsqueda y precisión de las ideas que subyacían a esto. Adicionalmente, no muy distante de este percance, el matemático Zenón de Elea (490–430 a. C.) ideaba una serie de aporías que contradecirían la lógica del movimiento y que muestran aparentemente la imposibilidad de esta acción.

1.2. Las aporías de Zenón de Elea: los infinitesimales del tiempo y el espacio

Las paradojas de Zenón de Elea trajeron consigo problemas para el entendimiento del concepto de continuidad. Sus ideas sobre una posible división indefinida del tiempo y del espacio pusieron en duda hechos tan naturales como la posibilidad del movimiento (Chen, 2021). Históricamente, se reconocen cuatro aporías formuladas por Zenón relativas al movimiento: la dicotomía, Aquiles y la tortuga, la flecha y el estadio; todas ellas consideran la infinita divisibilidad ya sea del espacio, del tiempo o de ambos elementos (Campos, 1984).

Vamos a utilizar la paradoja de la dicotomía para dar una aproximación a las ideas de Zenón sobre esto. Supongamos que queremos viajar de un punto A a un punto B, la longitud entre estos es $80\ m$. Además, asumamos por hipótesis que este espacio que vamos a recorrer es infinitamente divisible y sabemos naturalmente que para recorrer un espacio finito solo necesitaremos un tiempo finito. Primeramente, debemos recorrer $40\ m$, es decir la mitad; y posteriormente la mitad de la mitad y la mitad de esa nueva mitad y así sucesivamente. Esto llevaría a pensar que nunca alcanzaríamos el punto final (B), puesto que siempre quedaría una parte por recorrer por muy pequeña que esta sea y, esto implicaría una cantidad infinita de tiempo. Ello contradice lo que habíamos dicho previamente. Entonces, ¿es posible que el espacio esté compuesto de una suma de espacios más pequeños que nunca terminan? Es exactamente allí donde está la paradoja, en la composición del espacio. Al considerar que está formado por espacios infinitamente pequeños podríamos concluir que es imposible el movimiento en un espacio finito. Sin embargo, si abordamos este problema con el lenguaje simbólico moderno esto equivaldría a calcular el valor de convergencia de la siguiente serie:

$$40 + 20 + 10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + ... + \frac{5}{2^n} + ... = 80; n \to \infty$$

Al respecto, Campos (1984) asegura que el germen de esta contradicción está precisamente en el lenguaje inapropiado utilizado para representar el movimiento. Este hecho es debido a que nuestra intuición nos dice que la suma infinita de cosas es infinita; no obstante, vimos que con un lenguaje moderno el problema es subsanado.

Ciertamente, no podemos afirmar de manera fehaciente si Zenón estaba pensando en cantidades infinitamente pequeñas y sus implicaciones; sin embargo, con base en Cajori (1987) podemos asegurar que desde aquí había un rechazo sembrado por los infinitesimales, “La negación de la existencia de lo infinitesimal se remonta a Zenón, quien, según Simplicio afirmó: Aquello que, al ser añadido a otra cosa, no la hace más grande, y al quitarlo no la disminuye, es nada” ("Dos mil años de lucha por la luz", párrafo 1). Con esta última expresión

—nada— se pone de relieve que estos objetos estaban siendo esquivados ya que parecían estorbar a la comprensión, y sencillamente eran nominados a ser innecesarios e insignificantes. Además, podemos detallar que para esta época había una falta de entendimiento sobre la sumación de infinitas cantidades (McLaughlin y Miller, 1992). Hoy en día sabemos que la suma de infinitos números no implica necesariamente una infinidad. Asimismo, algunos autores como Campos (1984) afirman que:

> No existe información histórica alguna acerca de una matemática infinitesimal[1] hacia el año 450 a. C., ni se puede ver alguna cómo y para qué habría podido darse tal matemática. La crisis de los fundamentos de la matemática griega nada tuvo que ver con Zenón [. . .] Ella no sale de la refutación de los infinitesimales sino del descubrimiento de la irracionalidad. (p. 128)

Aun cuando esa primera crisis de las matemáticas no tiene como principal causa las paradojas de Zenón, estas sí pueden ser consideradas como las ideas germinales de algunos de los principales conceptos que han atravesado la Historia de las Matemáticas; en palabras de Cajori (1987), “La historia de estas paradojas es en gran medida la historia de los conceptos de continuidad, de infinito e infinitesimal”("El propósito de los argumentos de Zenón", párrafo 1). A este respecto se puede enfatizar que estas paradojas han constituido una gruesa porción de las discusiones sobre las cuales los matemáticos y pensadores han dejado sus reflexiones e interpretaciones. Por un lado, se encuentran los que creen que Zenón quería defender el legado de su maestro —Parménides— sobre la inmutabilidad y unidad de las cosas, o sea, la inexistencia del cambio, y por otro lado, los que persiguen la creencia de que Zenón intentaba demostrar que era ilógica la idea del movimiento en la cual el espacio está hecho de puntos indivisibles (Cajori, 1987).

[1]“La matemática infinitesimal es cualquier utilización de una descomposición ficticia de las magnitudes espaciales (segmentos, superficies, etc.) en partes infinitamente pequeñas para derivaciones matemáticas.” (Campos, 1984, p. 127)

1.3. Atomismo y divisibilismo infinito: ¿los infinitesimales son átomos o es imposible llegar a ellos?

La escuela filosófica atomista, cuyo principal desarrollador fue Demócrito (460–370 a. C.), consideraba que cualquier objeto se componía de elementos o magnitudes primarias, objetos más pequeños que conformaban la totalidad de los objetos. De acuerdo con esta teoría, si consideramos un segmento este se compone de una primariedad llamada punto o si consideramos un círculo este podría estar compuesto por infinitas circunferencias concéntricas o segmentos que barren su superficie. Si miramos en detalle la Figura 1.2 percibiremos que hay una infinidad de circunferencias y segmentos que conforman el círculo, ¿pero basta con tener infinitos elementos que la conformen? Realmente no es suficiente, si bien entre dos circunferencias concéntricas encontraremos otra, esto no garantiza que entre ellas no existan vacíos; en otras palabras, no se puede garantizar que el círculo sea continuo, aunque tenga una cantidad infinita de elementos. Así, un objeto matemático puede estar compuesto por diferentes cosas. Pero ¿es indiferente decir *compuesto por* a estar *definido por*? ¿Por qué son necesarios dos puntos para determinar una recta? Una recta o un segmento se pueden determinar a partir de dos puntos, pero ello no significa que esté compuesta de los elementos que lo determinan.

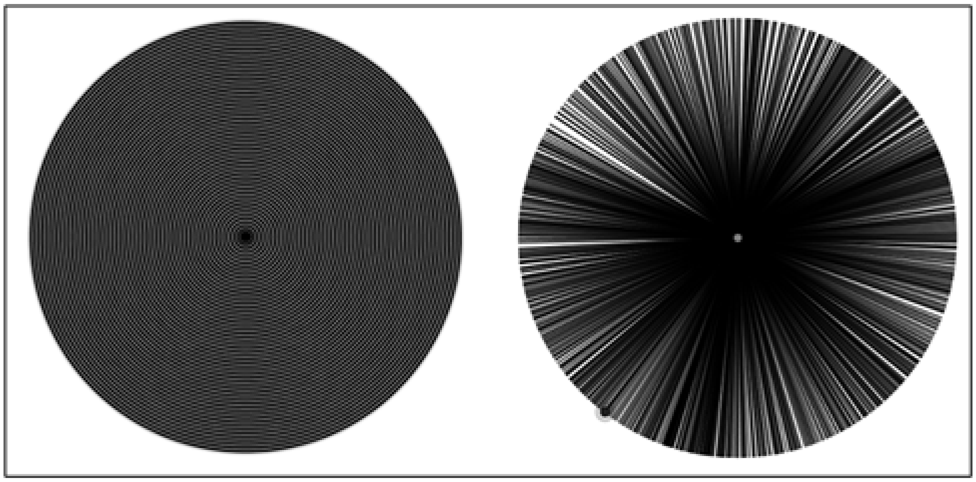


Figura 1.2: Composición del círculo.

El confrontamiento de las ideas atomistas viene con Aristóteles (384 a. C.–322 a. C.), quien define la cantidad como aquello que tiene partes, aquello que puede ser numerable y mensurable; así, una pluralidad es una cantidad si es numerable y una magnitud lo es si es mensurable. Este mismo autor menciona que existen dos tipos de cantidades: continuas y discretas; continuo es el tiempo y la recta, discreto es el discurso y el número. La magnitud es divisible en partes continuas pero el número es discontinuo y limitadamente divisible (Aristóteles, 1982). Para aclarar lo dicho por Aristóteles, consideremos un segmento y una colección de 9 elementos, ¿podemos obtener infinitos segmentos de dicho segmento? Si esto es así, ¿existe un instante en el que la parte ya no sea un segmento sino un punto? Realmente no, puesto que la continuidad impregnada en el segmento impide llegar a ese punto; a partir de la división del segmento siempre vamos a obtener más partes continuas, más segmentos (ver Figura 1.3). Ahora bien, ¿qué ocurre con el caso de la colección? ¿podemos dividirla infinitamente sin salirnos de la pluralidad? A partir de aquí podemos caracterizar la discontinuidad de la cantidad discreta, puesto que podemos dividir esta cantidad un número finito de veces, pero luego de una serie finita de pasos ya no seguiremos dentro de la pluralidad (Aristóteles, 1994).

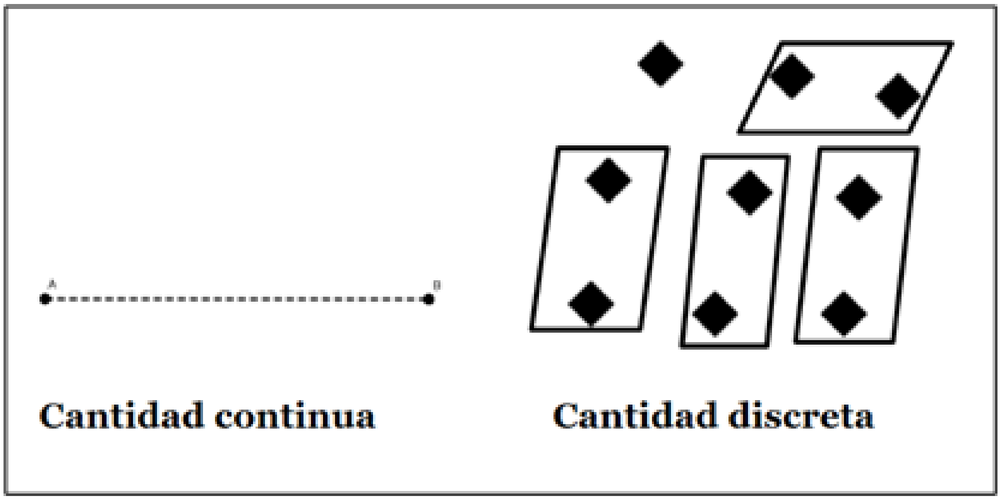


Figura 1.3: Tipos de cantidades.

El pensamiento aristotélico fue un paradigma que perduró por muchos siglos; sus ideas sobre el infinito y las cantidades permearon los trabajos de escuelas de pensamiento posteriores, entre ellas, la euclidiana.

1.4. El ángulo de contingencia: un primer avistamiento geométrico de los infinitesimales

Euclides (330 a. C.–275 a. C.) fue uno de los matemáticos griegos más representativos de la historia. Principalmente, su obra Elementos catapultó las matemáticas aproximándolas a un primer nivel axiomático-deductivo, en la cual recoge y sistematiza el conocimiento matemático de su época. Se conoce que él iba acorde a los estamentos Aristotélicos, es decir, no aceptaba cantidades infinitamente pequeñas, como lo afirma Baron (1969) “En la geometría euclidiana lo infinitamente pequeño fue rechazado” (p. 3). Sin embargo, la validez de dicha afirmación se pone en duda al encontrarnos con la proposición 16 del Libro III, que muestra la existencia de un ángulo muy particular, más pequeño que cualquier ángulo agudo dado:

La recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el mismo caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo. (Puertas, 1991, p. 198)

Este ángulo fue llamado particularmente como el ángulo de contingencia por el matemático alemán Jordanus Nemorarious (1225–1260). No obstante, además de ser estudiado por matemáticos de diferentes periodos históricos, ha sido nombrado de múltiples formas, a saber: ángulo corneado, ángulo curvilíneo, ángulo de contacto, ángulo de tangencia, entre otros (González, 1999). Este ángulo es propiamente el que se determina entre la recta tangente a una circunferencia en un punto dado y un arco de esta (ver Figura 1.4).

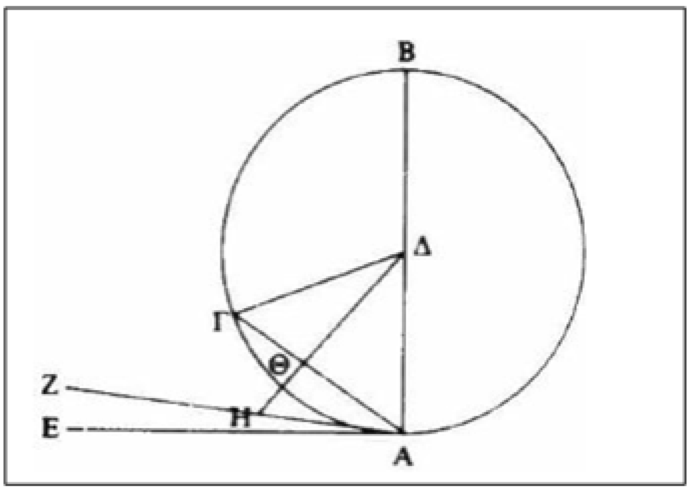


Figura 1.4: Ángulo de contingencia, tomada de (Puertas, 1991)

Esta proposición está compuesta esencialmente por cuatro proposiciones; para nuestros intereses, nos ocuparemos únicamente de las tres últimas. Con ese propósito, seguiremos literalmente la demostración propuesta por Euclides que es presentada en Puertas (1991):

> Interpóngase como ZA, y trácese a partir del punto Δ la (recta) ΔH perpendicular a ZA. Y como el (ángulo) $AH\Delta$ es recto y el ángulo ΔAH es menor que un recto, entonces $A\Delta$ es mayor que ΔH. Pero ΔA es igual a $\Delta\Theta$; entonces $\Delta\Theta$ es mayor que ΔH, la menor que la mayor; lo cual es imposible. Por tanto, en el espacio entre la recta y la circunferencia no se interpondrá otra recta.
>
> Digo también que el ángulo del semicírculo, comprendido por la recta BA y la circunferencia $\Gamma\Theta A$ es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo, y el restante, comprendido por la circunferencia $\Gamma\Theta A$ y la recta AE es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.
>
> Pues si un ángulo rectilíneo es mayor que el (ángulo) comprendido por la recta BA y la circunferencia $\Gamma\Theta A$, pero menor que el comprendido por la circunferencia $\Gamma\Theta A$ y la recta AE, en el espacio entre la circunferencia $\Gamma\Theta A$ y la recta AE se interpondrá una recta que hará mayor el ángulo comprendido por las rectas que el comprendido por la recta BA y la circunferencia $\Gamma\Theta A$, y menor que el comprendido por la circunferencia $\Gamma\Theta A$ y la recta AE. Pero no se interpone; por tanto, el ángulo agudo comprendido por rectas no será mayor que el ángulo comprendido por la recta BA y la circunferencia $\Gamma\Theta A$, ni menor que el comprendido por la circunferencia $\Gamma\Theta A$ y la recta AE. (p. 198)

La demostración a esta curiosa declaración está sustentada en el principio de reducción al absurdo. Se prueba la veracidad de estas proposiciones a partir de sus imposibilidades, es decir, no se puede interponer una recta entre la circunferencia $\Gamma\Theta A$ y la recta AE porque esto conduce a un absurdo lógico. Pero, si no puede haber rectas allí, ¿cuál es la composición del interior de este ángulo? ¿Cómo se mide este ángulo? ¿Es discreto o es continuo? ¿Se puede comparar un ángulo rectilíneo con este ángulo? La discusión a estas preguntas se presenta sucintamente en el trabajo desarrollado por Rodríguez y Guacaneme (2022), quienes se basaron en el trabajo de Koshkin (2020) para abordar las bisectrices de algunos ángulos corneados (ver Apéndice A). A su vez, en una conferencia dada —por estos mismos autores— en el Seminario de Cálculo del *Cinvestav* se presentaron algunos hallazgos adicionales sobre este tema (ver Apéndice C). Empero, aquí, complementaremos dicho estudio presentando cada una de las construcciones y los núcleos principales que conducen a estos resultados. Veremos entonces conexiones preciosas y precisas, a través de ángulos corneados y secciones cónicas.

A continuación, mostramos la construcción que conduce a que la parábola, la elipse y la hipérbola son la bisectriz de ciertos tipos de ángulos corneados[2], a saber, el ángulo que se determina entre la circunferencia y su tangente; el que se determina entre dos circunferencias tangentes tanto interiores como exteriores.

1.4.1. Parábola como bisectriz

La Figura 1.5 muestra el resultado refinado de la construcción. El lector puede acceder al paso a paso de la construcción en GeoGebra desde Parábola Bisectriz.

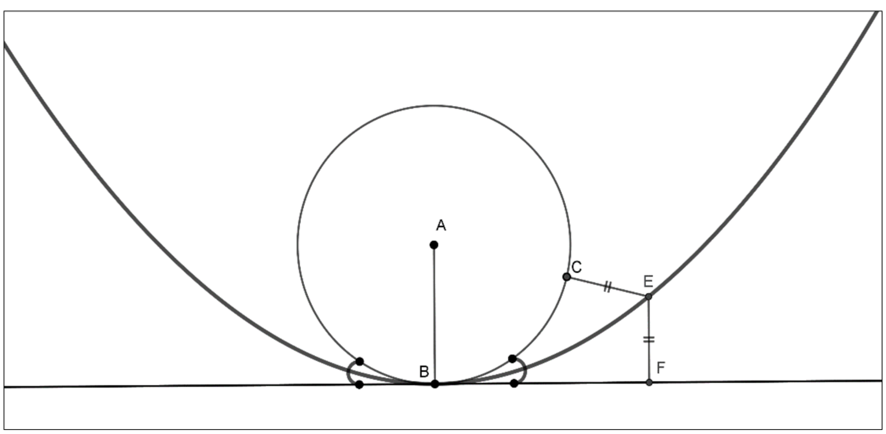


Figura 1.5: Parábola como bisectriz.

[2]A diferencia de Matos (1990), nosotros aquí abordamos indistintamente los tipos de ángulos corneados, esto es, no hacemos una clasificación de ellos. Sin embargo, invitamos al lector a revisar tal documento para profundizar sobre ello.

Sea $\odot_{A,\,\overline{AB}}$ y l la recta tangente a $\odot_{A,\,\overline{AB}}$ por B. A partir de esto, se determinan dos ángulos corneados. Ahora, consideremos otro punto C sobre la circunferencia, tracemos la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y la recta tangente m a $\odot_{A,\,\overline{AB}}$ por C, con la que se determina $m \cap l = \{D\}$. Finalmente, construimos la bisectriz de $\angle CDG$ $(\{G\} = l \cap \overleftrightarrow{AC})$, esta se intersecará con $\overleftrightarrow{AC}$ en E, y trazamos una recta perpendicular a l por E, donde F es el punto de intersección entre ellas. De esta manera, como E pertenece a la bisectriz del ángulo rectilíneo, por definición, tenemos que $CE = EF$. Con esto, cualquier punto E equidistará tanto de la circunferencia como de la recta tangente, es decir, el conjunto de puntos E será la bisectriz de los ángulos corneados determinados.

Ahora bien, demostremos que el conjunto de puntos que se generó es efectivamente una parábola. Esto es, debemos buscar su recta directriz y su foco, y demostrar que cada punto equidista de mencionados elementos. Sabemos que A es el centro de la circunferencia, entonces construimos $\odot_{E,\,\overline{AE}}$ y determinamos el punto de intersección de esta circunferencia con $\overleftrightarrow{EF}$, a través del cual construiremos una recta tangente n a $\odot_{E,\,\overline{AE}}$, y que en consecuencia será paralela a la recta tangente a $\odot_{A,\,\overline{AB}}$. De esta manera, tenemos que el conjunto de puntos E, desde otra referencia, equidista de A y de n. Y con esto probamos, por definición, que dicho conjunto de puntos es una parábola.

1.4.2. Elipse como bisectriz

Al igual que el caso anterior, la Figura 1.6 muestra el resultado refinado de la construcción. El lector puede acceder al paso a paso de la construcción en GeoGebra desde Elipse bisectriz.

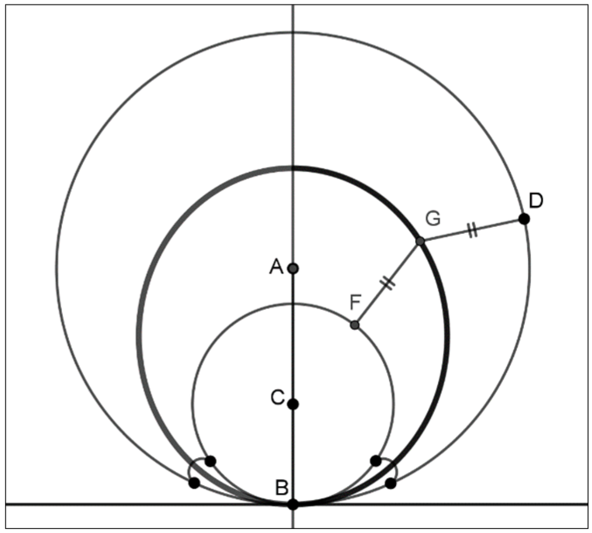


Figura 1.6: Elipse como bisectriz

Sea $\odot_{A,\overline{AB}}$ y l la recta tangente a $\odot_{A,\overline{AB}}$ por B. Asimismo, construimos C un punto sobre $\overline{AB}$ y $\odot_{C,r}$, con lo que quedan determinados dos ángulos corneados que tienen como lados arcos de las circunferencias. Atendiendo a que el propósito es encontrar el conjunto de puntos que equidistan de estos arcos, construimos D sobre $\odot_{A,\overline{AB}}$ y determinamos $\overleftrightarrow{AD}$, trazamos n tangente a $\odot_{A,\overline{AB}}$ por D y que se intersecará con l, llamemos esta intersección E. Desde este punto, construiremos la recta tangente m a $\odot_{C,r}$ que determinará el punto de tangencia F. Ahora, trazamos $\overleftrightarrow{CF}$ que se intersecará con $\overleftrightarrow{AD}$ en G. Detallemos que, como E está fuera de $\odot_{A,\overline{AB}}$ y $\odot_{C,r}$, por el teorema punto exterior a una circunferencia[3], tenemos que $EF = ED$ y, por lo tanto, a partir del hecho de que $\triangle EFG \cong \triangle EDG$ (Teorema LAL), obtenemos que $FG = GD$. Es decir, cualquier punto G equidistará de los lados de los ángulos corneados.

En último lugar, comprobemos cuál es el lugar geométrico que se genera. Primeramente, sabemos que $AD = r_1$, $CF = r_2$ y $FG = GD$, para cualquier D y F sobre la circunferencia. Además, por colinealidad tenemos que, $AG + GD = r_1$ y $r_2 + FG = CG$.

[3] *Teorema punto exterior a una circunferencia*: Dados dos segmentos tangentes a una circunferencia, determinados desde punto exterior a ella, entonces dichos segmentos son congruentes.

De esto se sigue que $GD = FG = CG - r_2$; sustituyendo, $AG + CG - r_2 = r_1$. Por lo tanto, $AG + CG = r_1 + r_2$, pero la suma de constantes es una constante, así que, $AG + CG = r$. Con lo que hemos probado que, el lugar geométrico de los puntos G es una elipse ya que cumple que $AG + CG = r$.

1.4.3. Hipérbola como bisectriz

La Figura 1.7 muestra una representación acabada de la hipérbola como bisectriz de los ángulos corneados entre dos circunferencias tangentes. El lector puede acceder al paso a paso de la construcción en GeoGebra desde Hipérbola bisectriz.

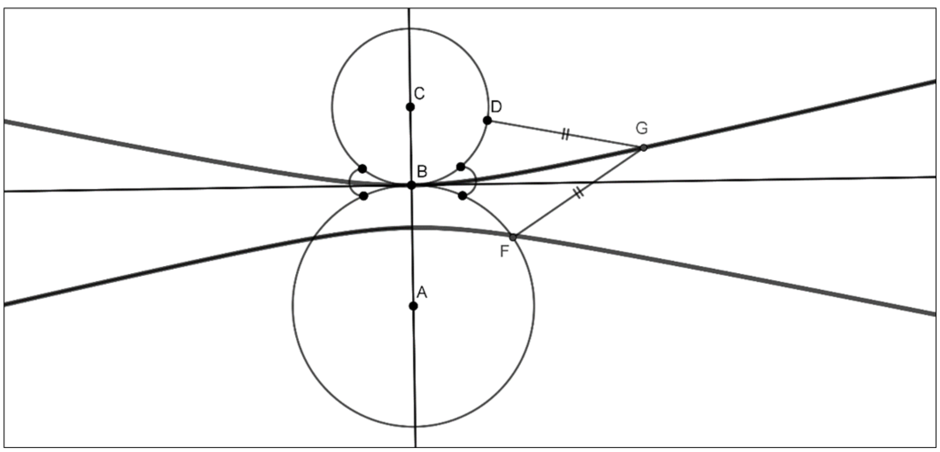


Figura 1.7: Hipérbola como bisectriz

Sea $\odot_{A,\ \overline{AB}}$ y l la recta tangente a $\odot_{A,\overline{AB}}$ por B. Construimos C, sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, de tal manera que no pertenezca al exterior de $\odot_{A,\overline{AB}}$, ya que si pertenece al interior estamos frente al caso anterior, luego determinamos $\odot_{C,\overline{CB}}$, donde se determinaran dos ángulos corneados. Ahora busquemos las bisectrices de dichos ángulos. Sea D un punto sobre $\odot_{C,\overline{CB}}$, trazamos $\overleftrightarrow{CD}$ y determinamos la recta tangente a $\odot_{C,\ \overline{CB}}$ por D que se intersecará con l en E, desde donde construiremos la recta tangente a $\odot_{A,\ \overline{AB}}$, punto de tangencia que llamaremos

F. Finalmente, construimos AF que se intersecará en G con $\overleftrightarrow{CD}$. Ahora bien, como E es un punto externo a ambas circunferencias, tenemos que $EF = ED$ y por $\triangle EDG \cong \triangle EFG$ (Teorema LLA), obtenemos que $DG = FG$, es decir, cualquier punto G equidistará de los arcos de las circunferencias.

Así como hicimos con las anteriores construcciones, probaremos cuál es el lugar geométrico que se genera. En primer lugar, tenemos que $AF = r_1$, $CD = r_2$ y $DG = GF$, para cualquier D y F sobre las circunferencias. Por colinealidad y sustituyendo, tenemos que, $r_2 + DG = CG$ y $r_1 + FG = AG$. Luego, restando estas ecuaciones obtenemos $r_1 - r_2 = AG - CG$ o $r_2 - r_1 = CG - AG$. Sin embargo, la resta de constantes es una constante y por definición de valor absoluto, se sigue que, $r = |AG - CG|$. Esto era lo que queríamos probar, por definición, el conjunto de puntos G es una hipérbola cuyos focos son los centros de las circunferencias dadas.

1.5. El método de exhausión: ¿Arquímedes pesó infinitesimales?

El método de exhausión, creación atribuida a Eudoxo de Cnido (390 a. C.–337 a. C.), fue uno de los procesos que dio soporte matemático en la época griega. En un primer momento, como medio de demostración y, posteriormente, como una herramienta que permitía encontrar áreas, volúmenes, longitud de curvas y permitía resolver problemas de tangentes; podríamos continuar enunciando así la abundancia de sus usos. El más usual y, quizás, el más reconocido ejemplo de su utilidad puede ser vislumbrado en el problema de la cuadratura de la parábola de Arquímedes, que consiste en la búsqueda de un cuadrado cuyo tamaño sea el mismo que el tamaño del área que se determina entre una parábola y una de sus cuerdas. Lo interesante de este hallazgo es que la superficie encerrada es cuatro tercios del área del triángulo ABC inscrito en ella.

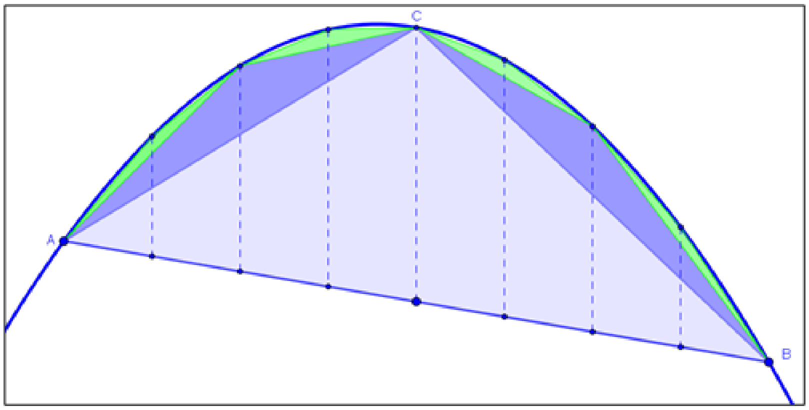


Figura 1.8: Cuadratura parabólica.

Como se observa en la Figura 1.8, la estrategia para calcular el área que se determina entre la curva y el segmento consiste en cubrir esa superficie con infinitos triángulos de distintos tamaños, de tal manera que en un momento finito se consiga llenarla completamente o como Canizales y Erazo (2013) aseguran, "con este método se busca demostrar que la diferencia entre dos magnitudes es cero, tomando una variable con la cual se busca agotar la dada inicialmente" (p. 49). De manera general, el método de exhausión se basa en el agotamiento de la superficie que queremos calcular, a partir de polígonos cuya área es conocida. No satisfecho con ello, Arquímedes (287–212 a. C.) abordó el problema desde otros enfoques. El primero de ellos es el método mecánico el cual hace uso de la teoría de las palancas y de propiedades geométricas; el otro es el método geométrico que está relacionado con la suma de áreas conocidas, el cual conduce a una progresión geométrica (Gómez, 1997).

Por otra parte, en la Historia de las Matemáticas encontramos momentos en los que la carencia de rigurosidad lógica y de explicaciones racionales a los problemas conducen a la creación de nuevos métodos cuyo principal objetivo es sortearlos. A propósito de esto, el método de exhausión nació como un modelo para dar solución a muchos problemas matemáticos de la antigüedad, y con el propósito de superar algunos infortunios lógicos propios del atomismo y el divisibilismo. Como lo afirma Bell (1937), "Eudoxio en su método de exhausión, aplicado al cálculo de áreas y volúmenes, demostró que no necesitamos aceptar la 'existencia' de 'cantidades infinitamente pequeñas'. Para los fines de un matemático es suficiente poder llegar a una cantidad tan pequeña como queramos por la división continuada de una cierta cantidad" (p. 30). En esta declaración es evidente la exclusión que se quería hacer a los infinitesimales y para ello Eudoxo, como contribuyente de la teoría de la proporcionalidad, esgrimía que en lugar de considerar estas cantidades, solo bastaba dividir un segmento un número de veces y obtener uno tan pequeño como lo necesitáramos. En esa dirección, Davis y Hersh (1982) afirman, de manera contundente, que en el método de exhausión se evita la utilización de infinitésimos (p. 179), con el propósito de evitar la incomprensión que había en aquel momento sobre estos objetos.

Aunque había una clara ambición de apartar los infinitesimales del terreno de las matemáticas, siendo el método de exhausión un ejemplo concreto de ello, estos seguían utilizándose como una herramienta heurística poderosa para producir resultados matemáticos. Incluso, algunos historiadores, concluyen que Arquímedes no los dejó de lado y los utilizó en el proceso de la creación matemática, pero cuando deseaba ser "riguroso" hacia uso de su método de exhausión. Como evidencia de lo anterior, en la nota introductoria de la obra *The Method of Archimedes*, Arquímedes (1897) expone que:

> Supongamos que X es una figura plana y se desea encontrar su área. El método consiste en **pesar los elementos infinitesimales** de X (con o sin la adición de los elementos correspondientes de otra figura C) contra los elementos correspondientes de una figura B, B y C son figuras cuyas áreas o volúmenes, y la posición del centro de gravedad de B, se conocen de antemano. Para este propósito, las figuras se colocan primero en tal posición que tienen, como diámetro común o eje, una y la misma línea recta; si los **elementos infinitesimales** son secciones de las figuras hechas por planos paralelos perpendiculares (en general) al eje y cortando las figuras, entonces los centros de gravedad de todos los elementos se encuentran en un punto u otro en el diámetro o eje común. (p. 7; énfasis agrega-

do)

Las anteriores afirmaciones también pueden ser reforzadas por medio de las interpretaciones de Cajori (1987), quien da un complemento aclaratorio sobre la funcionalidad conveniente que Arquímedes daba a los infinitesimales en el acto creativo de las matemáticas:

> *El Método de Arquímedes*, un libro que se pensaba que se había perdido, pero afortunadamente fue descubierto por Heiberg en 1906 en Constantinopla, da la interesante evidencia de que **Arquímedes, aunque no usaba la noción de infinitesimales en demostraciones formales, la empleaba en la búsqueda tentativa como un método de descubrimiento**. Consideraba a los infinitesimales lo suficientemente científicos para sugerir la verdad de los teoremas, pero no para proporcionar pruebas rigurosas. El proceso es mecánico, consistente en **la ponderación de los elementos infinitesimales**, a los que llama líneas rectas o áreas planas, pero que son en realidad tiras infinitamente angostas o láminas planas infinitamente delgadas. ("Dos mil años de lucha por la luz", párrafo 2; énfasis agregado)

Estas afirmaciones pueden verse develadas más claramente a partir de la Figura 1.9. Esto es, damos por sentado que el triángulo está compuesto por elementos indivisibles y ponemos este en una palanca de manera que alcancemos el equilibrio a partir del fulcro (punto de apoyo de la palanca) en relación con el área de la parábola la cual desconocemos.

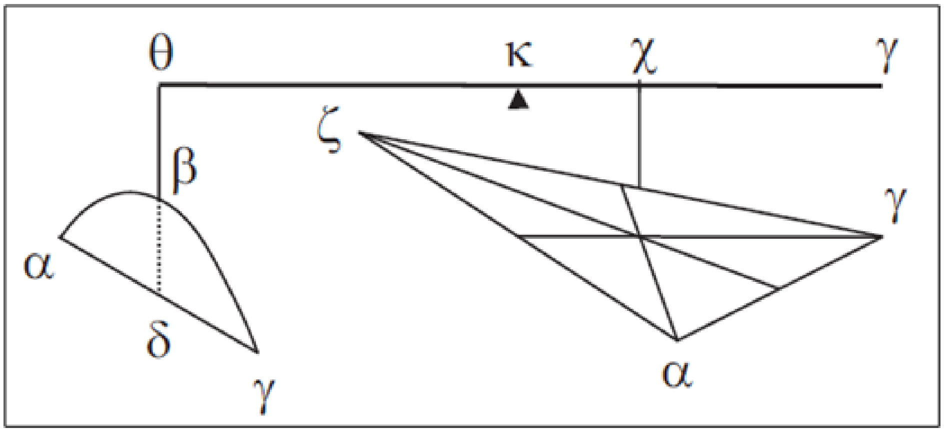


Figura 1.9: Triángulo y cuerda parabólica en equilibrio, tomada de (Assis y Magnaghi, 2012)

El hecho de que Arquímedes haya considerado, de manera particular, las figuras como una colección de líneas de anchura infinitamente pequeña es, como lo asegura Boyer (1949), "una anticipación al uso del concepto de indivisible" (p. 50). Así, en contraste con las dos posturas anteriores pareciera que esos dos términos —infinitesimal e indivisible— fueran indistinguibles a la luz de las referencias que ellos hacen sobre la colección de líneas o elementos infinitesimales. A este respecto, veremos en páginas posteriores que, esta nominalidad de los infinitesimales jugó un rol creador y al mismo tiempo fue un centro de crítica debido a la velada y opaca claridad de su naturaleza, en la cual su significado está oculto pero su esencia posibilita la creación y el descubrimiento matemático.

Capítulo 2

Infinitesimales en el pensamiento escolástico

En toda ciencia ciertas cosas deben ser aceptadas como primeros principios para que el tema sea entendido; y estos primeros postulados descansan sobrela fe.

Nicolas de Cusa

2.1. Bradwardine: ¡Los indivisibles son contradictorios!

Thomas Bradwardine (1290-1349) fue un teólogo, matemático y filosofo escolástico. Principalmente, sus trabajos en matemáticas estuvieron enfocados sobre la búsqueda de comprensión del continuo, como lo asegura Boyer (1949) "en su Geometria speculativa y Tractatus of continuo Bradwardine discutió, entre otras cosas, la naturaleza de las magnitudes continuas" (p. 66).

En ese sentido, haciendo énfasis en la discusión sobre sí el continuo está compuesto por indivisibles o sí es posible dividirlo infinitamente; la postura que asumió Bradwardine fue la aristotélica. En palabras de Boyer (1949) "Bradwardine afirmó que una magnitud continua está compuesta de un infinito número de continuos del mismo tipo. El infinitesimal, por lo tanto, evidentemente posee según él, como para Aristóteles, únicamente existencia potencial"(p. 67). Esto último hace referencia a que vamos a llegar a los infinitesimales a partir del infinito potencial, del infinito que crece incontrolablemente, pero teniendo en cuenta la postura de Bradwardine que el continuo está conformado de continuos, nos posibilita a asegurar que los infinitesimales son divisibles ya que cualquier continuo está formado de más continuos, o, en otras palabras, los infinitesimales están compuestos de infinitesimales más pequeños. En consecuencia, nunca alcanzaremos esa partícula atómica, es imposible y contradictorio concebir el continuo formado por indivisibles usando el infinito potencial, dado que este proceso no termina en ningún momento.

Así también, podríamos preguntar que objeto hay entre los continuos, es decir, una vez dividimos un continuo en más continuos y se desea "unirlos" nuevamente, ¿cuál es el elemento que permite conectarlos? ¿otro continuo? ¿Cuál es esa frontera en la cual se cortan los continuos? Y, además, ¿es el continuo matemático igual al continuo físico? A este respecto, Dudley (2021) afirma que "esto podría considerarse la principal contribución de Bradwardine a la historia de los conceptos de continuidad, es decir, la distinción entre la continuidad física y matemática" (p. 53). Dicha distinción juega un papel transcendental en la medida en que las relaciones que funcionan en el universo matemático no necesariamente son verdad o posibles en el mundo real, en otras palabras, los procesos infinitos son concebibles en las matemáticas pero resultan ser quiméricos en la realidad, es más, no tenemos la certeza si vivimos en un universo sin límites pero lo que sí sabemos es que como seres humanos somos simplemente transitorios y por ende finitos, en consecuencia, estamos mediados por la temporalidad de los procesos finitos.

2.2. ¿Existe alguna relación entre el infinito actual y el infinitesimal?

Nicolás de Cusa (1401–1464) fue un teólogo, filósofo y matemático de la época medieval. Sus principales aportes se ubican en el campo de la teología, pero sus ideas y posturas intelectuales también permearon el desarrollo de las matemáticas, principalmente sobre el infinito, las cuales constituyeron para él una forma de abordar temas relacionados con el conocimiento y la naturaleza de Dios (Murawski, 2019).

En el transcurso de su vida mostró un gran interés por la comprensión del continuo y los infinitesimales o las cantidades infinitamente pequeñas, habiendo previamente estudiado algunos apartados de *Elementos* e ideas de Thomas Bradwardine y Campanus de Novara (Murawski, 2019). En su forma de pensamiento es posible encontrar una gran influencia atomista, pero diferenciadora y aclarante en cuanto a lo que él entendía por ello.

> ¿Qué entiende por un átomo? A esa pregunta, él responde: «Bajo consideración mental lo que es continuo se divide en lo siempre divisible, y la multitud de partes progresa hasta el infinito. Pero por la división real llegamos a una parte indivisible que llamo átomo. Un átomo es una cantidad, que por su pequeñez es realmente indivisible. (Stones, 1928, p. 447)

A partir de esta perspectiva Cusiana se denotan dos formas de ver el continuo, una de ellas es semejante a la postura aristotélica, pero haciendo la aclaración expresa de que el proceso es mental, es decir, llevado a cabo en los lugares recónditos de nuestra imaginación donde es posible, por más pequeña que sea esta magnitud, dividirla infinitamente. En cambio, la otra es la postura que atiende más cercanamente a la realidad sensible, como nuestra existencia es efímera entonces no tenemos infinito tiempo para quedarnos haciendo procesos infinitos, es por esto por lo que se asume un infinito real o actual que permite aproximarnos a lo que queremos, pero en un instante y pasos finitos (ver Figura 2.1). En ese sentido, él estuvo en contra de la doctrina de la infinita divisibilidad, como lo asegura Murawski (2019) "Cusanus objetó la idea del infinito potencial de Aristóteles porque esto está basado sobre una progresión infinita de finitas cantidades. Infinito no puede ser medido" (p. 482)

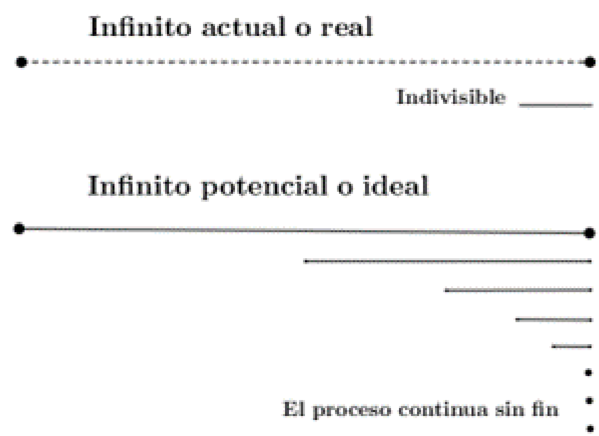


Figura 2.1: Noción del infinito actual y potencial.

Por lo tanto, desde esta mirada si deseamos encontrar un indivisible debemos considerar un infinito terminado puesto que de lo contrario no sería posible llegar a este. Por otro lado, si abordamos dicho problema con el infinito que nunca se detiene, es decir el infinito potencial, conjeturamos que lo indivisible resultaría ser divisible, ya que nuestra imaginación se presta para ello.

La divisibilidad infinita y el atomismo son las dos principales posturas que habían atravesado la historia del continuo hasta aquella época. Cada una de estas tenía sus seguidores y sus adversarios, quienes intentaban convencer con sus argumentos y demostrar que la otra postura parecía errónea y conducía a contradicciones. En lo que sigue mostramos que estás ideas persisten y son la semilla que germina más vitalmente para dar fruto en los trabajos desarrollados por otros matemáticos.

Por último, enunciemos un ejemplo dado por Nicolas de Cusa en el cual es posible denotar el uso los infinitesimales y su misteriosa pero útil naturaleza:

> Deseamos hallar la relación entre el área de un círculo y su circunferencia. Por sencillez, supondremos que el radio del círculo es igual a 1. Ahora, podemos concebir la circunferencia integrada por una **infinidad de segmentos rectilíneos, todos iguales entre sí, e infinitamente pequeños**. El círculo es entonces **suma de triángulos infinitesimales**, todos los cuales tiene altura 1. Para los triángulos, el área es la mitad de la base por la altura. Por consiguiente, la suma de las áreas de estos triángulos es la mitad de la suma de las bases. Ahora, la suma de las áreas de estos triángulos es el área del círculo, y la suma de las bases de los triángulos, su circunferencia. Así pues, el área del círculo de radio 1 es la mitad de su circunferencia. (Davis y Hersh, 1982, p. 179; énfasis agregado)

En la búsqueda de la razón entre el área y el perímetro de la circunferencia, él da cuenta de la utilización de infinitesimales como medio o herramienta para alcanzar dicho fin. En tal sentido, la pregunta que emerge de esto es ¿qué significa un triángulo infinitesimal? O ¿qué tan pequeño es lo infinitamente pequeño? Lo cierto y llamativo es que sin responder o reflexionar sobre estas preguntas él tenía razón sobre la aseveración o el resultado que obtuvo.

Capítulo 3

Infinitesimales en el Renacimiento (siglo XV-XVII)

El rigor es un asunto de la filosofía, no de las matemáticas.

Bonaventura Cavalieri

3.1. Kepler: ¿para qué sirven los infinitesimales?

En 1615, Johannes Kepler (1571–1630) escribe *Nova stereometria doliorum vinariorum*, obra en la cual da a conocer algunos métodos infinitesimales para calcular volúmenes y áreas, y cuyo interés nace principalmente de un suceso que alteró su cordura en el desarrollo de su segundo matrimonio, al encontrar inapropiada la manera que el comerciante usó para medir el volumen de un barril de vino que le había comprado (Cardil, 2012).

El método de Kepler consistía en la deconstrucción de la figura en volúmenes conocidos y en la posterior suma de infinitesimales, en un infinito actual, que son superpuestos uno sobre otro hasta llenar el sólido. Tal y como lo señala Edwards (1979):

> El planteamiento de Kepler en la estereometría consiste en diseccionar un sólido dado en un número infinito de piezas infinitesimales, o sólidos "indivisibles", de tamaño y forma convenientes para la solución del problema concreto. Luego sumaba de alguna manera para obtener el área o el volumen de la figura dada. (p. 102)

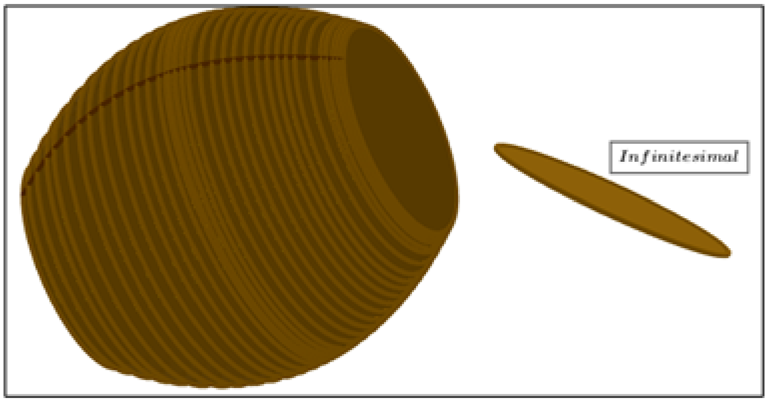


Figura 3.1: Volumen del tonel de vino a partir de infinitesimales.

Es importante señalar que para Kepler los infinitesimales tenían la misma dimensión del objeto abordado, es decir, cada infinitesimal poseía un volumen, aunque este fuera infinitamente pequeño (ver Figura 3.1) (Edwards, 1979). Esto nos lleva a suponer que él en realidad estaba abordando este problema desde un "infinito discreto", puesto que de lo contrario si sumamos infinitamente cada uno de los volúmenes vamos a obtener una cantidad desbordantemente grande, y esto no es posible debido a que tenemos una cantidad finita de vino. Además, en relación con la composición de los objetos geométricos, Kepler considerada que estos estaban formados por partes infinitamente pequeñas y que estos se podían obtener al sumar nuevamente las partes conocidas en una determinada manera (Ribnikov, 1987).

Otro resultado importante que vale la pena resaltar de la obra de Kepler es el cálculo del área del círculo, en cuyo caso considera el círculo formado por triángulos isósceles de base infinitesimal (Baron, 1969), la Figura 3.2 ilustra lo anterior.

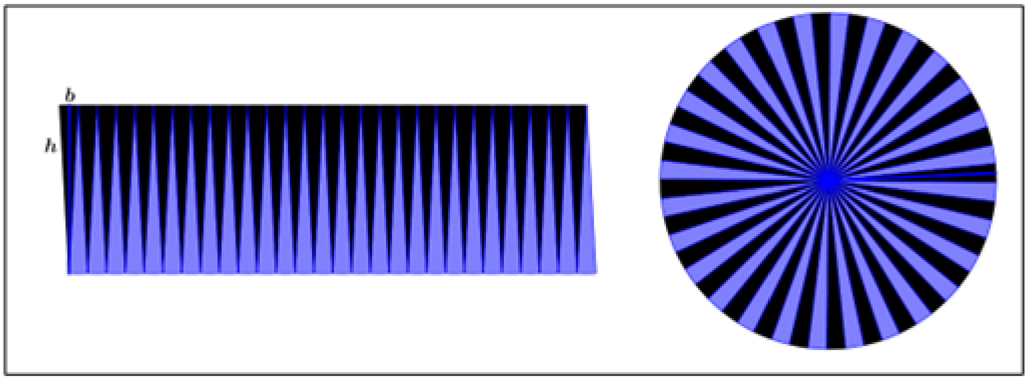


Figura 3.2: Área del círculo con infinitesimales.

Es importante mencionar que Kepler no tenía un valor exacto del número π. Sin embargo, bajo esta idea intuitiva de Kepler y con el uso del lenguaje moderno hallemos el área del círculo. Notemos que h es la altura (radio de la circunferencia) y b es la base infinitesimal que conforma cada uno de los triángulos, por lo tanto, su área es $\frac{bh}{2}$. Además, detallemos que si sumamos cada una de estas bases lo que obtendremos es el perímetro de la circunferencia $(2\pi h)$. En consecuencia, el área del círculo es $\frac{(2\pi h)h}{2} = \pi h^2$, resultado que conocemos hoy pero donde h suele ser representada por r. A pesar de que no es un resultado rigurosamente comprobado, es claro que dejarnos llevar por ideas intuitivas produce también resultados correctos, es decir, como a partir de estas formas heurísticas llegamos al conocimiento, aunque no necesariamente desde un enfoque teórico sino más bien natural.

Los cuerpos de revolución o cuerpos generados al hacer girar una figura plana alrededor de un eje fueron también otros de los problemas que este matemático y astrónomo abordó. De acuerdo con Ribnikov (1987), "en total consideró 92 tipos de cuerpos de revolución, denominándolos según su forma exterior, limones, manzanas, guindas, turbantes turcos, etc." (p. 171). Con ese propósito siguió usando infinitesimales y considerando la figura como un rompecabezas la cual quedaba perfectamente configurada al sumar sus partes. No obstante, el rigor científico no era saciado y se deseaba develar que significaba realmente que una cantidad fuera infinitamente pequeña. Ante tal ansia, resulta una naciente preocupación por encontrar un algoritmo que permitiera trabajar lógica, racional y rigurosamente con los infinitesimales, dicho proceso inicia con el realce de los indivisibles de Cavalieri (Ribnikov, 1987).

3.2. Los indivisibles de Cavalieri: ¿una sinonimia de los infinitesimales?

Geometria Indivisibilibus fue una obra significativa para la historia del Cálculo; a través de la cual Bonaventura Cavalieri (1598–1647) da a conocer una forma diferente de ver los indivisibles, uno de los objetos fundamentales en la construcción y el desarrollo del Cálculo, y que en aquella época sirvieron como fundamento instrumental que permitió dar solución a diversos problemas, como el cálculo de volúmenes y áreas.

Antes de entrar en la discusión general sobre los indivisibles, nos gustaría mencionar un acontecimiento histórico que tilda a Cavalieri de plagiador. Como lo mencionamos previamente, en la obra de Arquímedes e implícitamente en los trabajos de Kepler se logra encontrar un primer acercamiento a la idea de indivisible, lo cual permite mostrar que Cavalieri estuvo influenciado por estos trabajos, dejando entrever un anudamiento de ideas que atraviesa las matemáticas, en otras palabras, los resultados alcanzados no son originalmente producto de la imaginación de un solo ser humano, sino una evolución progresiva de ideas en la que la intervención de cada sujeto modifica de cierta manera al objeto. Pero, por otra parte, también se puede evidenciar que esto en algunos casos es malinterpretado, "en 1635 Paul Guldin[4] acusa a Cavalieri de haber tomado el método de indivisibles de Johannes Kepler. Sin embargo, esta acusación infundada de plagio no fue un gran golpe para el método" (Sonar, 2020, p. 220). Ante esto, hipotetizamos que probablemente "los cambios infinitamente pequeños no son perceptibles".

[4]En la obra Infinitesimal: *How a dangerous mathematical theory shaped the modern world* (Alexander, 2014), el lector puede acceder a un amplio desarrollo de la disputa entre Paul Guldin (1577-1643) y Cavalieri.

Ahora sí adentrémonos en la idea de indivisible, estableciendo como él los entendía. Por ejemplo, el cilindro podía ser configurado en partes conocidas, como un círculo con altura infinitesimal (indivisible) y a través de la sobreposición de estas formar el volumen de este sólido geométrico (ver Figura 3.3); hecho que nos permite mencionar que él concebía los objetos conformados de objetos cuya dimensión es menor al original (por ejemplo: de acuerdo con esto, la recta estaría compuesta de puntos) (Malet, 1996). Sin embargo, un hecho que no resulta claro, en la naturaleza de estos objetos, es si de lo finito es posible obtener los indivisibles, o si a partir de los indivisibles puede ser configurado lo finito.

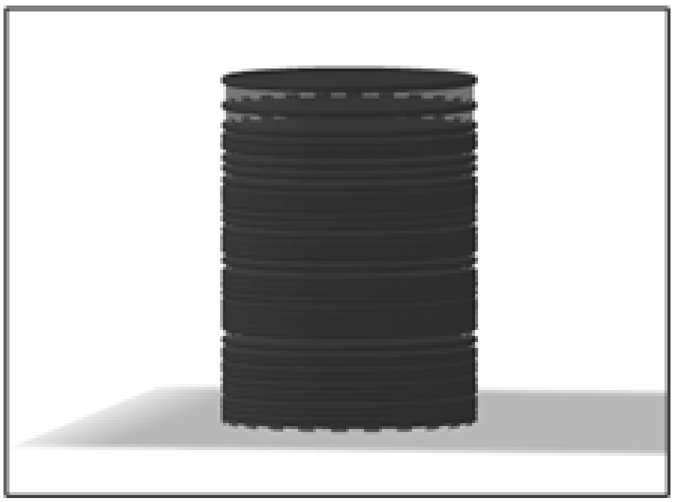


Figura 3.3: Cilindro como suma de círculos infinitesimales.

Siguiendo con este ejemplo, nos preguntamos cuál es el grueso de cada uno de los círculos, o de manera más general ¿cuál es el largo de un punto, el ancho de un segmento, o el grueso de una superficie? Para Cavalieri, es infinitamente pequeño pero mayor que cero, pero no puede ser cero porque la suma de ceros no es más que cero. Igualmente, las líneas resultan tener un grosor para armar una superficie. Sin embargo, desde la geometría euclidiana sabemos que un punto, una recta y una superficie no tienen grosor. Así las cosas, la construcción y el desarrollo del Cálculo parecen estar cimentados en una perspectiva intuitiva que juega con nociones no matemáticas, sino esotéricas y místicas. Es decir, esta parte de las matemáticas resulta tratar con ideas que, en sí mismas, no son lógicas, sino que proceden de nuestras experiencias sensoriales. Los objetos parecen ser y no ser al mismo tiempo, pero claramente esta dificultad recae desde cuál perspectiva es vista el objeto. Esto significa que euclidianamente la teoría de Cavalieri conduce a inconsistencias, ya que un punto desde está esta teoría un punto es aquello que no tiene partes, ni una superficie anchura, y la nada no puede formar algo.

Contrariamente, si miramos los indivisibles, a la manera de Cavalieri, es posible que un punto tenga grosor y una superficie también. A pesar de que esto va en contra del pensamiento tradicional, resulta funcionar y ser útil para la solución de problemas matemáticos. En ese sentido, además de mostrar la riqueza, la diversidad del pensamiento matemático y los caminos hacia la emancipación del pensamiento, muestran que el sustento de sus teorías no es propiamente matemático, sino externo a ellas y basadas principalmente en actividades o ideas metafísicas.

Una de las preguntas filosóficas, quizás, más profundas y difíciles de responder en matemáticas es ¿cuál es la composición de los objetos de los que trata esta ciencia? En particular, la composición de un objeto geométrico no está definida por la tenencia o pertenencia de dichos elementos; que una recta tenga puntos no quiere decir que esté compuesta de ellos, un objeto geométrico euclidiano puede estar compuesto de muchas maneras, pero no significa que esas posibles maneras sean principio generador del objeto.

El pensamiento creativo y la profundidad de las ideas matemáticas a lo largo de la historia han sido fructíferas para el conocimiento humano y, de cierta manera, los partícipes de esta construcción han querido alejarse de argumentos sensibles y perceptibles para darle solidez y consistencia lógica a la teoría. Pero, también, es evidente la conexión entre estas ideas y una metafísica que refiere a intuiciones y, a productos de la imaginación que ulteriormente se acaparan en una rigurosidad lógica. Los objetos matemáticos parecen, en un principio, estar en un mundo silvestre y antagónicos a cualquier comprensión, causando repulsión al entendimiento al no ser propiamente objetos de esta ciencia. Es decir, viven en una rebeldía hasta que son definitivamente capturados y trasladados a un lugar carente de falacias y contradicciones lógicas.

El verdadero problema está en si podemos construir lo infinitamente pequeño o lo asumimos. A modo de ilustración, si tenemos un cilindro ¿podemos medir su volumen asumiendo lo infinitamente pequeño o podemos construir algo infinitamente pequeño que nos permita hacerlo? Referirnos a lo infinitamente pequeño nos conduce a la cuestión cómo y que tipo de infinito estamos trabajando; desde nuestra perspectiva e imaginación concebimos dos infinitos, que posiblemente causen rareza y asombro al lector. Por un lado, el infinito continuo (el infinito de los números reales) que genera puntos, mediante el cual no podemos reconstruir los objetos geométricos porque resultaría imposible alcanzar la completitud de este. Por otro lado, el infinito discreto (el infinito de los números naturales) que da lugar a infinitesimales, cuya naturaleza no es nula y hace posible la reconstrucción y medición de un objeto.

Podemos, ahora, preguntarnos qué semejanzas hay entre el concepto de indivisible e infinitesimal. Como lo señala Bell (2022):

> El concepto de indivisible está estrechamente relacionado con el de un infinitesimal, pero debe distinguirse de él. Un indivisible es, por definición, algo que no se puede dividir, lo que generalmente se entiende que no tiene partes propias. Sin embargo, una entidad sin partes o indivisible no necesariamente tiene que ser infinitesimal: las almas, las conciencias individuales y las mónadas leibnizianas supuestamente carecen de partes, pero seguramente no son infinitesimales; sin embargo, estos tienen en común la característica de ser inextensos; entidades extendidas tales como líneas, superficies y volúmenes prueban una fuente mucho más rica de "indivisibles". (p. 5)

La anterior distinción se basa en la posibilidad de que no todo aquello que no tiene partes es un infinitesimal, es decir, no hay una relación total entre ellos, ya que no todo lo indivisible resulta ser un infinitesimal, y no todo infinitesimal es un indivisible. Así, por ejemplo, el ángulo de contacto es un infinitesimal, pero, como lo vimos previamente es divisible. Lo anterior, no quiere decir que no exista ninguna relación, como lo asegura Bell (2022), "el indivisible en cuestión es infinitesimal en el sentido de que posee una dimensión menos que la figura a partir de la cual se genera" (p. 6), de esta manera, el indivisible de una recta será un punto y de un volumen será un plano, que en cada caso resultarían ser infinitesimales. En consonancia con esto, Malet (1996) hace evidente esa trasfiguración o cambio de vestidura del indivisible en el infinitesimal:

> Mientras indivisibles e infinitesimales llegaron a ser palabras intercambiables para la mayoría de los profesionales de las matemáticas, sobre todo después de 1650, originalmente dos muy diferentes, nociones estaban detrás de ellos. **Los indivisibles genuinos de Cavalieri (puntos, líneas, etc.) pronto fueron descartados, para ser sustituidos por infinitesimales.** (p. 9; énfasis agregado)

Por otro lado, como lo menciona Andersen (1984), "Cavalieri creyó que un fundamento sólido, para superar las inconsistencias lógicas, podría ser obtenido siguiendo la tradición griega de no usar infinitesimales en las pruebas matemáticas. Por lo tanto, él tuvo que suprimir todas las ideas intuitivas sobre cómo una figura plana está compuesta y qué papel jugaban 'todas las líneas' en la composición" (p. 12). Con esto, la formación de un objeto geométrico resultaba ser un problema fundamental; así, un segmento formado por infinitos puntos, resultaba contradictorio, puesto que algo, como el punto, que no tiene medida, no puede formar algo que tiene medida, o si cada uno los puntos tuvieran medida la unión infinita de ellos crearía un segmento de longitud infinita.

En contraste con los dos capítulos anteriores, por un lado; los métodos infinitesimales de Arquímedes emplean indivisibles (Katz y Sherry, 2013); esto es, en el caso particular de la cuadratura de la parábola, él usaba estos elementos al buscar el equilibrio o la relación entre "el peso" de la parábola y el triángulo. Por otra parte, Edwards (1979) hace una clara distinción entre los elementos infinitesimales de Kepler y Cavalieri, puesto que para este último los infinitesimales no son de la misma dimensión del objeto, como se ha mencionado, pero los indivisibles de Kepler si poseían esta característica (p. 104). De igual forma, podríamos preguntarnos si los elementos de la teoría atomista, de Demócrito, tienen relación alguna con los indivisibles de Cavalieri, ya que, según esta, los objetos geométricos están compuestos por átomos indivisibles, lo cual trae luz a una clara encadenación y correspondencia entre las ideas de Demócrito, Kepler y Cavalieri.

3.3. El rectángulo paradójico de Torricelli

Evangelista Torricelli (1608–1647) fue un físico y matemático italiano. En el ámbito físico, entre otros hechos, fue reconocido por inventar el barómetro de mercurio y, en el ámbito matemático, por su paradoja sobre el área de un rectángulo muy peculiar, la cual está íntimamente relacionada con la utilización de los indivisibles, y cuya naturaleza nos permitirá particularmente ver que para este caso los infinitesimales conducen a una clara contradicción.

Consideremos un rectángulo $\square ABCD$ que no sea cuadrado (ver Figura 3.4). Seguido a esto, determinemos una de sus diagonales, en este caso, $\overline{BC}$, la cual divide el rectángulo en dos triángulos, cuyas áreas en consecuencia son iguales. Ahora bien, a partir de indivisibles intentemos encontrar el área de esto; notemos que hay una correspondencia entre cada par de segmentos, esto es, para cada $\overline{XY}$ indivisible horizontal existe $\overline{YZ}$ indivisible vertical. No obstante, $\overline{XY} > \overline{YZ}$, por lo tanto, si sumamos todos los segmentos $\overline{XY}$ obtenemos que ¡el área de $\triangle ABC$ es mayor que el área de $\triangle CBD$! Pero por propiedades geométricas habíamos afirmado que sus áreas eran iguales, es decir, **¡el área de estos triángulos es igual y al mismo tiempo es desigual!** (Sergeyev, 2022, p. 142).

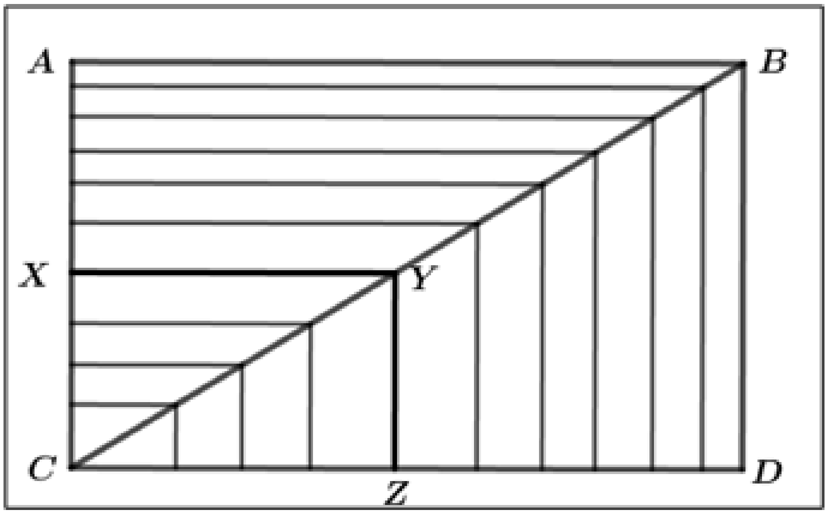


Figura 3.4: Triángulo paradójico de Torricelli.

Esta paradoja es fruto de la consideración de que el continuo está conformado por indivisibles, porque realmente no sabemos cuál es la magnitud —anchura— de esas líneas y además si sumamos infinitamente esos segmentos obtendremos un área infinitamente grande, lo cual no es posible. Entonces, **¿Qué compone el continuo geométrico?**

3.4. Wallis y la aritmética de los infinitesimales

John Wallis (1616-1703) fue un matemático ingles que al igual que muchos otros impulsó el desarrollo del Cálculo moderno. Además, fue el primero en utilizar el símbolo ∞ para referirse al infinito. En su obra *The arithmetic of infinitesimals* Wallis:

> Proporciona un gran aparato teórico conformado por una serie de proposiciones, donde uno de los elementos conceptuales claves para encontrar dichas cuadra-

turas son las razones entre sumas finitas e infinitas. La obra de Wallis apunta a la introducción de los infinitesimales como una potente herramienta a la hora de calcular cuadraturas. (Mendoza, 2013, p. 79)

En conexión con las ideas de Cavalieri, lo que Wallis realiza es un cambio representativo de los indivisibles, dándoles un enfoque aritmético a estos, por ejemplo, para él $\frac{1}{\infty}$ era un número infinitesimal (Bell, 2019). De esto que:

> La manera en que Wallis hace la transición de la geometría de líneas a la aritmética de números es claramente producto de su prueba de que el área de un triángulo es el producto de la base por la mitad de la altura. Él asume desde un principio, como Cavalieri, que una figura plana puede ser considerada construida de un número infinito de líneas paralelas, o como él lo prefiere decir, de un número infinito de paralelogramos [de altura infinitamente pequeña]. (Boyer, 1949, p. 170)

Detallemos el siguiente ejemplo (ver Figura 3.5). El propósito que perseguimos es encontrar el área de $\triangle ABC$. Para ello, consideremos que ∞ es el número total de líneas l que conforman el interior de dicho triángulo. Ahora bien, notemos que si podemos sumar los infinitos paralelogramos que tenemos en su superficie, el problema sería solucionado, porque sabemos que el área de esto es su base por su altura. Teniendo esto presente, ¡calculemos la suma total del número de líneas! Esto se reduce a calcular la suma de una progresión aritmética, a saber $s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$, donde n es el número total de términos (∞) y a_1, a_n son la medida de primera línea (0) y la *n-esima* (b) respectivamente. De esta manera $s_n = \frac{\infty(0+b)}{2} = \frac{\infty b}{2}$, y además la altura de cada paralelogramo es $\frac{a}{\infty}$. Por lo tanto, el área de $\triangle ABC$ es $\frac{\infty b}{2} \cdot \frac{a}{\infty} = \frac{ab}{2}$ (Baron, 1969). Siendo esta la expresión que conocemos hoy en día para calcular el área de un triángulo.

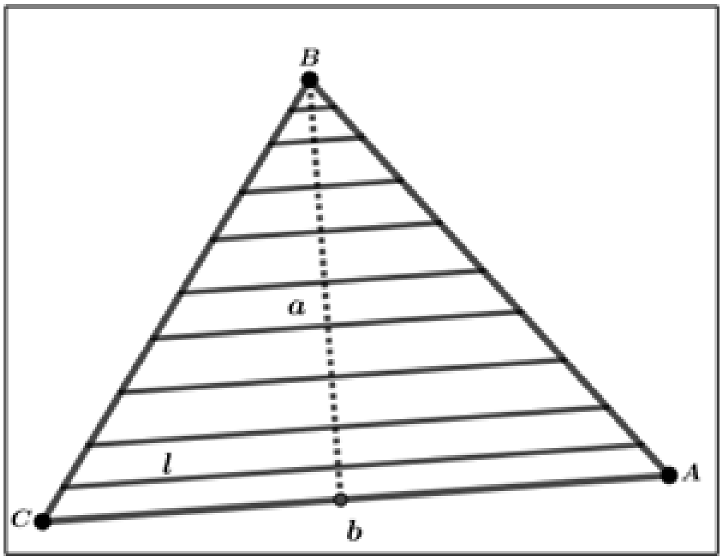


Figura 3.5: Área de un triángulo según la postura de Wallis

Los cambios de representación han jugado un rol importante en el desarrollo de las matemáticas como resultado de la facilidad que esto puede traer consigo, ya que un problema geométrico puede ser resuelto más fácilmente desde una percepción aritmética. A este respecto, "la mayor contribución de Wallis al desarrollo de las matemáticas del siglo XVII fue quizás, como él mismo reconoció, la transformación de los problemas geométricos en la suma de secuencias aritméticas" (Wallis, 2004, p. 21).

Capítulo 4

Siglo XVII-XVIII: cantidades ficticias y evanescentes y otros asuntos místicos del Cálculo

El tipo de conocimiento que es apoyado solo por observaciones y aún no ha sido probado debe ser cuidadosamente distinguido de la verdad; es ganado por inducción, como solemos decir. Sin embargo, hemos visto casos en los que la mera inducción llevó al error.

Leonhard Euler

4.1. Goffried Leibniz: ¿Los diferenciales son una nueva máscara de los infinitesimales?

Leibniz (1646-1716) fue un matemático y filósofo alemán de gran importancia en la historia y el desarrollo de las matemáticas. En particular, en la invención del Cálculo infinitesimal. Sus contribuciones, apoyadas en las obras de matemáticos anteriores a él, le permitieron llegar más lejos que sus coetáneos, descubriendo la fuerte relación que existe entre la integración y la diferenciación. El cálculo Leibniciano tuvo como elementos primarios los diferenciales (Δx o dx) o como él las llamaba cantidades *inasignables* —que parecían fantasmales—, distinguiéndolas de las *asignables* tales como x, y; pero, además nunca considero el infinitesimal como cero y "trabajaba con una relación de igualdad generalizada 'hasta' un término despreciable" (Bair y col., 2021, p. 3). En otras palabras, él utilizaba una relación de igualdad extendida para operar con los infinitesimales.

En ese sentido, como lo asiente George (2001) este cálculo se reducía a sumas y restas, contrariamente, a la aproximación que conocemos actualmente, cuya aproximación se basa en la teoría de los límites.

Iniciemos adentrándonos directamente en un ejemplo sobre el cómo Leibniz hacia uso de los infinitesimales. Sea $y = x^2$, intentemos hallar la derivada de esta función a su estilo. Lo que él nos proponía para desarrollar esto era considerar un incremento infinitesimal de esta (Δx o dx). Por lo tanto,

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2$$

Pero como dx no es cero, entonces podemos dividir por esto,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

Después de eso, él argumenta que dx es una cantidad infinitamente pequeña con respecto a las otras, o *inasignable*, entonces, $\frac{dy}{dx} = 2x$. Lo curioso y remarcable de la anterior igualdad es que Leibniz parecía considerar que esas magnitudes, que a primera vista eran de diferente naturaleza, tienen la misma aritmética de los números reales, es decir, el conjunto de estas magnitudes bajo las operaciones usuales también tiene propiedades como la conmutatividad, asociatividad, elemento neutro, entre otras. Esto es lo que él llamó el principio de continuidad. Como lo asegura Harnik (1986):

> Con el propósito de trabajar con sus nuevos números [infinitesimales] Leibniz expone un general, pero no claro, “principio de continuidad”. En términos simples, este principio sostiene que los infinitesimales son realmente pequeños, pero por lo demás se comportan como los números reales habituales. (p. 1)

Además del principio de continuidad al que este autor hace alusión, también hay una idea que es importante hacer énfasis en la interpretación del pensamiento Leibniciano sobre el tratamiento de cantidades infinitesimales; a saber, el concepto de igualdad, puesto que este parece tener una ampliación al considerar que una cantidad es igual a sí misma más un infinitesimal. Uno de los historiadores que respaldan esta hipótesis es Cajori (1987) al afirmar que “Leibniz extendió la definición de igualdad hasta declarar a las magnitudes como iguales aun cuando difieren una de otra por una cantidad incomparablemente pequeña” ("Dos mil años de lucha por la luz", párrafo 1). En relación directa con lo anterior, es como si la cualidad de igualdad resultara ser relativa o no totalmente, sino en determinado grado, en palabras más exactas, “una cuasigualdad”.

Por otra parte, al igual que los indivisibles de Cavalieri, la utilidad de los diferenciales de Leibniz resultó ser limitada al no haber forma de mostrar, completa y rigurosamente, la naturaleza de estos objetos (Vargas, 1987, p. 2). Asimismo, como lo afirma Ribnikov (1987) “quedaba sin aclarar qué explicación racional se puede dar a los conceptos fundamentales que se apoyan en la proximidad finita, pequeñez infinita o proceso infinitamente ilimitado” (p. 203). Además, ¿cómo es posible que algo que aparentemente existe deja de hacerlo a causa de su pequeñez? Las futuras críticas estuvieron centradas en ese punto, esas magnitudes parecían tener un tipo de encanto difuminado o espiritualidad porque aparecían cuando se necesitaban, pero cuando estorbaban eran eliminadas, como se vio en el ejemplo anterior. En ese sentido Koyre (2007) afirma que:

> La influencia del pensamiento científico y de la visión del mundo que se determina no está sólo presente en sistemas —tales como los de Descartes o Leibniz—

que abiertamente se apoyan en la ciencia, sino también en doctrinas —tales como **las doctrinas místicas**— aparentemente ajenas a toda preocupación de este género. (p. 9, énfasis agregado)

Leibniz se mantuvo en una constante búsqueda de la verdad sobre los fundamentos del Cálculo, como lo afirma Ribnikov (1987) "en sus obras puede encontrarse un tratamiento de los infinitesimales como magnitudes no arquimedianas, utilización de la apreciación de un infinitesimal potencial" (p. 203), es decir, estas cantidades son diferentes a las conocidas, tienen una peculiaridad que las diferencia del resto; no obedecen ese comportamiento usual cimentado en el axioma arquimediano[5] y pueden "desaparecer y aparecer convenientemente". Al respecto de esta naturaleza fantasmal, Esquisabel (2021) menciona que los infinitesimales leibnizianos son como ficciones matemáticas, entendiendo estos desde una noción simbólica y representativa del objeto, ya que no están en el plano de la realidad sino en un ambiente imaginario. A partir de lo anterior surge la pregunta, ¿cuál es el grado de realidad de los objetos matemáticos? En particular, ¿cuál es el grado de realidad de los infinitesimales? Raffo (2020) señala que "estas cantidades ficticias no son objetos que estén dados para los matemáticos, sino que, para poder usarlos, los matemáticos deben decidirse por suponerlos" (p. 4). Lo anterior, muestra que la existencia de los objetos matemáticos no es esencialmente algo que se pueda justificar con total certeza, por el contrario, es necesario aceptarlos y dar por sentado su existencia para poder dar vida a grandes conocimientos, lo que invita a dejar de lado un poco la razón y guiarnos más por la fe y en hechos inmateriales.

Al respecto de la utilidad de los infinitesimales, más allá del adecentamiento riguroso de los mismos, Esquisabel (2021) muestra una parte de un tratado inédito que Leibniz escribió:

[5] La propiedad arquimediana enuncia que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x > 0$ entonces $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : nx > y$ (Apóstol, 1988). Es por media de ella que se garantiza que un conjunto es arquimediano. Sin embargo, los infinitesimales no la satisfacen, ya que si tomamos, por ejemplo, uno de ellos σ y lo sumamos consigo mismo, por ejemplo, jamás será mayor que uno

> Poco importa que tales cantidades (a saber, las infinitas e infinitamente pequeñas) sean naturales o no; nos podemos contentar con introducirlas a modo de una ficción, en la medida en que ofrecen abreviaciones para la formulación, para el pensamiento y finalmente tanto para la invención como para la demostración. (p. 5)

En este apartado Leibniz hace una clara exaltación de la utilidad que tiene aceptar estas cantidades como ficciones, por la simplicidad que esto nos da al abordar diferentes problemas, así como lo intuitivo que puede llegar a resultar al momento de generar resultados.

Por lo que refiere al problema de la composición o conformación de la continuidad, se muestra que también fue un asunto que captó profundamente la atención de Leibniz, como lo afirma Bell (2022):

> Él estaba muy preocupado por el problema de la composición del continuo, el "laberinto del continuo", como él lo llamaba. De hecho, lo tenemos en su propio testimonio de que su sistema filosófico, —el monadismo— surgió de su lucha con el problema de cómo, o si, se puede construir un continuo a partir de elementos indivisibles. Leibniz se preguntó: si aceptamos que cada entidad real es una unidad simple o una multiplicidad, y que una multiplicidad es necesariamente una agregación de unidades, entonces, ¿bajo qué título debería clasificarse un continuo geométrico como una línea? (p. 21)

Como hemos mostrado a lo largo de este trabajo la respuesta a tales preguntas no es un ejercicio sencillo. Si bien, existen y se han construido diferentes teorías al respecto, ¿cuál es la composición del continuo?, no hay una respuesta absoluta. Cada una de ellas ha tenido críticos que han mostrado su sinsabor frente a estas, proveyendo posibles contradicciones o faltas de aclaración conceptual, cuyas falencias se intentaron remediar, pero resultaron infructuosas. Más adelante abordaremos a un matemático del siglo XX que logró corregir las inconsistencias lógicas de los infinitesimales y que dio vida a una nueva teoría, a una nueva forma de entender los infinitesimales.

Finalmente, Raffo (2020) advierte que, "Leibniz defiende que la existencia de cantidades infinitamente pequeñas implicaría la admisión de líneas infinitas terminadas, lo cual conlleva consecuencias absurdas, tales como la existencia de un tiempo terminado, es decir, dotado de extremos, aunque infinito" (p. 134). A partir de esta afirmación Leibniz rechaza la existencia sensible y palpable de cantidades infinitamente pequeñas, asintiendo que estas son producto de la menta humana y de un arduo trabajo de la imaginación, que, aunque no podían ser justificables bajo la rigurosidad lógica, lo más importante eran que funcionaban y daban respuesta a un grueso número de problemas matemáticas de aquel entonces.

4.2. Newton: una forma diferente de hacer lo mismo; fluxiones y fluentes

Isaac Newton (1643-1727) fue uno de los más importantes matemáticos y físicos de la historia, sus contribuciones lo llevaron lejos y permitieron, de cierta manera, tener una comprensión más amplia de la naturaleza y del universo que nos rodea. Especialmente, en el desarrollo del Cálculo, hizo visible, al mismo tiempo que Leibniz, la relación que existe entre la integración y la derivación. A pesar de eso, sus ideas y los sustentos teóricos de su cálculo no estuvieron exentos de la lupa científica, que cuestionaba la falta de aclaración y los misterios indescifrables que los objetos del cálculo de Newton tenían.

Las fluentes, definidas por él, como cantidades que son gradual e indefinidamente crecientes x, y, z, etc, y las fluxiones como las velocidades de las fluentes simbolizadas $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, etc, fueron las herramientas que utilizó para soportar sus ideas, intentando evitar las inconsistencias lógicas que venían permeando el desarrollo del Cálculo hasta aquel entonces, es decir, prevenir el uso de los infinitesimales. No obstante, parece que Newton solo hubiera puesto otra máscara al mismo objeto. Como lo afirma Stillwell (2005) "Newton trató los infinitesimales como números positivos que eran más pequeños que cualquier número real positivo", lo que da cuenta de la misma idea que hemos abordado, pensar en algo más pequeño que lo dado naturalmente. Para comprender la naturaleza de los objetos utilizados, veamos un ejemplo similar al abordado por él (Newton, 1736, p. 25). Sea $y - x^2 = 0$, entonces definimos un incremento infinitesimal en cada una de las variables, por ejemplo, en x hacemos $(x + \dot{x}o)$, donde el producto $\dot{x}o$ es llamado *momento* de x y es un incremento infinitamente pequeño de la variable; así como o, según él, es un intervalo infinitamente pequeño de tiempo. Recordemos que el cálculo Newtoniano está estrechamente relacionado con el movimiento de los cuerpos, por eso hay referencia a nociones cinemáticas. Ahora bien, sustituimos y tenemos que:

$$(y + \dot{y}o) - (x + \dot{x}o)^2 = 0$$

Posteriormente, desarrollamos el binomio y tenemos en cuenta que $y - x^2 = 0$

$$(y + \dot{y}o) - x^2 - 2x\dot{x}o - (\dot{x})^2o^2 = 0$$

Como o no es cero, en consecuencia, podemos dividir por ello,

$$\dot{y} - 2x\dot{x} - (\dot{x})^2o = 0$$

Sin embargo, el término $(\dot{x})^2o$ es despreciable porque es casi cero. Finalmente,

$$\dot{y} - 2x\dot{x} = 0$$

Un hecho que es importante resaltar, como aludimos previamente en el trabajo de Leibniz, es que Newton consideró que estas fluxiones tenían las mismas propiedades que las magnitudes reales y se podía operar con ellas como si fueran del mismo tipo, pero ¿en realidad son magnitudes de la misma naturaleza? ¿Son magnitudes homogéneas? Como lo hemos mencionado, en cada una de las nociones de infinitesimal abordadas hasta aquí, quedaba faltándole una pieza a este inmenso rompecabezas Newtoniano; la ausencia de rigurosidad lógica, la falta de aclaración y explicación de algunos procedimientos técnicos -como el anterior- no era justificable bajo el arquetipo científico, sino más bien místico, lo cual siempre conllevaba a profundas críticas sobre la naturaleza de estos objetos. En otras palabras, Ribnikov (1987) afirma que:

> El lado operativo del asunto presupone la eliminación de los infinitesimales. Demostrar la legitimidad de esta operación, aclarar la esencia misteriosa de estas magnitudes que no son cero, ni magnitudes finitas, este problema no se resolvía con los medios de que disponía Newton. En búsqueda de la salida, él creó el método de las primeras y últimas relaciones que es una de las primeras formas de la teoría de los límites. (p. 196)

Este último método —de las primeras y últimas razones— es lo que hoy en día conocemos como velocidad promedio e instantánea, respectivamente. Por ejemplo, efectuemos este método para $x = t^3$. Por lo tanto, definimos un incremento Δt. De esto tenemos que,

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = (t + \Delta t)^3 - t^3$$

Desarrollamos el binomio. En consecuencia,

$$\Delta x = t^3 - t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3$$

Como Δt es diferente de cero podemos dividir por ello,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 3t^2 + 3\Delta t + (\Delta t)^2$$

Es así como Newton obtenía la primera razón de las variables, que en un sentido físico es la velocidad promedio de una partícula. Ahora bien, si queremos obtener la última razón o velocidad instantánea (en un sentido físico) tenemos que hacer que Δt tienda a cero;

lo que conocemos actualmente como la noción de límite. En consecuencia, a partir de esto obtenemos la razón última, y haciendo uso del lenguaje moderno:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} 3t^2 + 3\Delta t + (\Delta t)^2 = 3t^2$$

Los conceptos matemáticos a través de la historia sufren transfiguraciones parciales y en determinadas ocasiones totales, y esto se debe ante todo a las interpretaciones y el uso que sus creadores le dan. Particularmente, Newton trató de inventar estos nuevos objetos como una forma de subsanar los problemas existentes, pero ¿qué tan diferente son las fluxiones de los infinitesimales? Selles (1999) muestra que, basado en pensadores como Boyer y Kitcher, en realidad, Newton no renunció a los infinitesimales, sino que les asignó otra apariencia. Por otro lado, Recalde (2017) afirma que "Newton considera que las cantidades no están formadas por partes infinitesimales, sino descritas por un movimiento continuo" (p. 236). A partir de esto podemos notar que no hay una postura e interpretación totalmente clara de lo que el infinitesimal representaba para Newton. No obstante, considerando sus proximidades académicas se creería que la propuesta más acertada es la que está arraigada al movimiento, la cual no considera los infinitesimales, pero en su obra *Method of fluxions and infinite series* hay una clara mención sobre cantidades infinitamente pequeñas. En efecto, como lo señala Cajori (1894) "se debe observar que en el método de fluxiones (así como en su *De Analysi*), el método empleado por Newton es estrictamente infinitesimal, y en sustancia es como el de Leibniz" (p. 208), es decir, los infinitesimales resultan estar presentes tanto en el cálculo de Newton como en el de Leibniz; sin embargo, se encuentran disfrazados de manera distinta.

Como es señalado por Recalde (2017), en la obra académica de Newton, referente al Cálculo, es posible ver una evolución de sus ideas matemáticas que yace precisamente como una forma de subsanar la falta de rigurosidad de sus ideas. Por una parte, el método de las fluxiones y las fluentes funcionaba desde un punto de vista aplicativo, pero había concepciones sombrías que no tenían aclaración desde una perspectiva matemática. Y, por otra parte, el método de las primeras y últimas razones no solo traía ideas alejadas del misticismo y del "racismo" por cantidades infinitamente pequeñas, sino novedosas al tener en su esencia la idea originaria de la teoría moderna de los límites. Sin embargo, los esfuerzos por desterrar enteramente los infinitesimales –de sus ideas matemáticas– no parecen conducir a una catarsis terminante, por el contrario, hay una clara alusión de estos que se resiste a desaparecer totalmente (Lai, 1975).

Capítulo 5

Berkeley y Marx: una travesía por los cimientos del Cálculo Newtoniano y Leibniciano

En mi tiempo libre hago cálculo diferencial e integral.

Karl Marx

5.1. Berkeley y su rivalidad hacia los infinitesimales

The Analist, publicado en 1734, fue una obra que le dio un vuelco a la historia del Cálculo[6]. Su autor, George Berkeley (1685-1753), filósofo irlandés y aparentemente un neófito de las matemáticas, hace una crítica que desborda la solidez de las ideas de prominentes matemáticos como Newton y Leibniz. Su crítica y su búsqueda estaba basada en la analogía que existía entre los sustentos teóricos de esta rama de las Matemáticas y la creencia religiosa de la cual él era participe. Esta crítica principalmente se centra en una exhibición precisa sobre las inconsistencias lógicas que tenía el Cálculo de su época en sus planteamientos. Así, la finalidad de su obra era "examinar si el objeto, los principios y los métodos de demostración del Cálculo son más claramente concebidos, o más evidentemente deducidos, que los misterios religiosos y los puntos de fe" (Berkeley, 1734).

[6] En la *colección sigma: el mundo de las matemáticas* se pueden encontrar algunos fragmentos traducidos al español de la obra *The Analist*, mediante los cuales el lector puede acceder a un panorama general de esta obra.

El objeto al que Berkeley hace referencia manifiestamente es el infinitesimal y su naturaleza, aludiendo a este mediante las fluxiones, diferenciales, cantidades evanescentes y cantidades infinitamente pequeñas. Su foco de atención estaba dado a analizar como estas referencias no tenían precisamente una firmeza en el campo matemático. De acuerdo con Robles (1993):

> El blanco de su ataque era la tesis de la existencia de infinitesimales. [. . .] Berkeley dedica su energía y su agudeza mental, en gran parte de los comentarios filosóficos, al ataque y burla de la noción de infinitesimal; considera que la expresión misma es un sinsentido y muestra, con agudeza e ingenio, que filosóficamente la noción que deseada expresarse con ese término estaba plagada de problemas y confusiones y que, por esta razón, el término mismo resultaba inútil y, por tanto, inaceptable su uso. (p. 27)

En consecuencia, al principio de su obra, Berkeley enuncia un lema que cautiva la atención desde el primer momento y que probablemente, desde nuestra configuración del mundo, lo consideraríamos totalmente obvio:

> Si, en vistas a demostrar cualquier proposición, se supone cierto punto en virtud del cual pueden alcanzarse ciertos otros puntos: y dicho punto supuesto se destruye o se rechaza por un supuesto contrario; en ese caso, todos los puntos así alcanzados y consecuentes, así como, desde entonces en adelante, no pueden suponerse ni aplicarse más en la demostración. Es tan evidente que no necesita prueba. (Berkeley, 1734, p. 5)

Con base en dicho lema, el pretendía derribar ese edificio "fantasmagórico", donde habitaban las demostraciones que daban los fundadores del Cálculo a sus resultados. Efectivamente, este lema anulaba cualquier validez sustentada en las pruebas de Leibniz y Newton, porque estas tenían un semblante espiritual que utilizaba los objetos —diferenciales, fluentes y fluxiones—, pero que a lo largo de la demostración eran eliminados debido a su infinita pequeñez o insignificancia. Análogo a la preparación de una receta; añadimos un ingrediente que es esencial, pero posteriormente, una vez hemos terminado, nos deshacemos de él, esto es, ¿obtendremos la misma gustosidad y resultará ser lo mismo? Pues bien, seguramente desde nuestro sentido del gusto esto no es así, pero en las matemáticas esto sí funcionaba perfectamente, era una receta que llevaba enigmáticamente a verdades, cuya certeza no estaba en discusión, más la manera en que se venía a ella. Al respecto, Berkeley se pregunta ¿y que son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes, ¿y qué son estos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni son nada. ¿Podemos llamarlas los fantasmas de cantidades difuntas? (Berkeley, 1734, p. 18)

Si bien los infinitesimales eran útiles y conducían a resultados correctos, estos eran fantasmales desde un panorama lógico. Entonces, ¿cómo era posible que algo erradamente lógico y con tantas inconsistencias suministrara hechos matemáticos correctos? El mismo Berkeley planteó que la explicación a esto estaba en la compensación de errores, es decir, se estaban cometiendo imprecisiones que se anulaban unas con otras: Por lo tanto, los dos errores, siendo iguales y contrarios, se destruyen mutuamente; el primer error de defecto es corregido por un segundo error de exceso. Si hubieras cometido un solo error, no habrías llegado a la verdadera solución del problema. Pero en virtud de un doble error llegas, aunque no a la ciencia, sí a la verdad. Porque no se puede llamar ciencia, cuando procedes con los ojos vendados, y llegas a la verdad sin saber cómo o por qué medio. (Berkeley, 1734, p. 10)

A pesar de que este principio de compensación parece razonable, consideramos que no es precisamente por el doble error que se obtienen resultados correctos. En su lugar, percibimos que el problema recae en la forma en que se están comprendiendo estas cantidades, como si tuvieran las mismas propiedades de los números reales, y que además son precisamente de otra naturaleza, esto es, una naturaleza no arquimediana.

Al final de su obra, Berkeley deja un listado de 67 preguntas, a quien correspondiera[7] cuestionarse más profundamente sobre los fundamentos del Cálculo. A continuación, listaremos algunos de los cuestionamientos que consideramos más llamativos:

Pregunta 4: ¿puede decirse con propiedad que los hombres proceden con un método científico sin concebir claramente el objeto que persiguen, el fin que se proponen y el método por el que lo persiguen?

Pregunta 23: ¿Si las incoherencias pueden ser verdades? ¿Si los puntos repugnantes y absurdos deben ser admitidos en cualquier tema, o en cualquier ciencia? ¿Y si el uso de infinitos debe ser permitido, como un pretexto suficiente y una disculpa, para la admisión de tales puntos en Geometría?

Pregunta 35: ¿No hay un modo de llegar a la verdad, aunque los principios no sean científicos, ni el razonamiento justo? ¿Y si tal camino debe ser llamado una maña o ciencia?

Pregunta 47: ¿No parece más bien que el punto de vista de los matemáticos modernos es el de llegar a una expresión por artificio, que el de llegar a la ciencia por demostración?

Pregunta 51: ¿Hay otra cosa que no sea metafísica y lógica que pueda abrir los ojos de los matemáticos y sacarlos de sus dificultades?

Pregunta 54: ¿No pueden hacerse las mismas cosas que se hacen mediante cantidades infinitas, por medio de cantidades finitas? ¿No sería esto un consuelo para las imaginaciones y comprensiones de los hombres matemáticos?

Las preguntas que resaltamos evidencialmente representan un cuestionamiento al tipo de ciencia que se estaba haciendo, para Berkeley, aunque se estaba llegando a verdades, la metodología de este proceder no encajaba en ningún arquetipo científico, eran verdades a partir de “procedimientos místicos”.

[7] Se dice que este tratado iba destinado a Edmund Halley (Astrónomo y matemático inglés, allegado de Isaac Newton) (Recalde, 2017)

5.2. Karl Marx; un intento por develar el antifaz de los infinitesimales

Karl Marx (1818-1883) fue una polímata de origen judío quien fue notoriamente reconocido por sus aportes a la Filosofía, pero, por otra parte, fue desconocido por sus trabajos en matemáticas. Particularmente, su crítica, *Mathematical Manuscripts*, está orientada a la explicación de la naturaleza y los fundamentos del Cálculo de su época, y da cuenta y razón de su postura crítica al respecto. En esta obra, él señala que los conocidos incrementos, Δx, $\dot{x}$y dx son postulados con una explicación mística y que el tratamiento de estos parece un acto de malabarismo, puesto que son removidos sin argumento alguno con el propósito de obtener un resultado convenientemente (Marx, 1983, p. 77).

En efecto, Marx, al igual que Berkeley, critica el misticismo que habitaba en los diferenciales y en las fluxiones, a la luz de sus espontaneas apariciones y desapariciones misteriosas en los procedimientos matemáticos. En sus propias palabras "ellos creían en el carácter misterioso del Cálculo, lo que preveía resultados correctos por medios de procedimientos matemáticamente incorrectos" (Marx, 1983, p. 78). A pesar de que no había duda de la funcionalidad y la calidad del fruto que estas potentes herramientas producían, lo que continuaba en juicio era su naturaleza, bajo que razones lógicas se podían manipular estos objetos como entidades "cuasi-existentes" y esto que significaba. En otros términos, Ribnikov (1987) asegura que:

> Marx se propuso el problema de quitar el velo del misterio que rodeaba los conceptos y métodos fundamentales del cálculo infinitesimal desde la época de Newton y Leibniz [. . .] Para la resolución de este problema Marx realizó un trabajo previo. Estudió y comparó críticamente los numerosos textos de análisis matemático para las escuelas superiores de Inglaterra y Francia y estudió algunas obras clásicas de Newton, Euler, Maclaurin y otros. (p. 238)

En sus manuscritos, Marx expone propiamente tres enfoques del Cálculo. En primer lugar, **el cálculo diferencial místico**, cuyos fundamentos se salían del ámbito matemático y se adentraban en convicciones de fe, como ya se ha expuesto. En segundo lugar, **el cálculo diferencial racional**, a la vista de los trabajos de d'Alembert[8] y Euler, y el cual refiere a la utilización de herramientas propiamente matemáticas. Finalmente, **el cálculo diferencial puramente algebraico**, cuyo acercamiento es directamente algebraico, pero valiéndose de ideas tantos místicas como racionales y cuyo representante fue Lagrange[9] (Marx, 1983, pp. 77-82). Con respecto a este último, en una de sus obras más conocidas *Teoría analítica de funciones* (1979), como lo afirma Bottazzini (1986):

> Lagrange retomó las consideraciones que había tratado previamente en su trabajo (1772), relativo a la habilidad para mostrar los principios del cálculo en una **manera sistemática sin hacer ninguna referencia a los infinitesimales**, cantidades evanescentes, diferenciales o límites. Él hizo hincapié en la necesidad de reducir el cálculo a una simple manipulación de expresiones algebraicas. (p. 48; resaltado nuestro)

Por otro lado, en lo que respecta al cálculo racional, Marx resalta que d'Alembert hace un cambio fundamental sobre las ideas de Newton y Leibniz, cuya principal transfiguración se refiere a la manera de concebir y simbolizar los infinitesimales (Δx, $\dot{x}$ y dx). Por un lado, ya no se denotan estos desde un enfoque infinito, sino desde un enfoque finitista. Por otro lado, lo que conocimos como Δx y $\dot{x}$, ahora eran representados como h, lo cual representa una modificación en la simbología del objeto (Marx, 1983, p. 79). En otras palabras, un ser con una nueva máscara, y una metamorfosis epistemológica de por medio.

[8]Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) fue un matemático y filósofo francés quien hizo grandes contribuciones al mundo académico. Además, jugó un rol importante en el desarrollo de Encyclopédie, unas de las enciclopedias más importantes del siglo XVIII, cuyo propósito principal era reconocer y reunir el conocimiento existente de su época.

[9]Joseph Louis Lagrange (1736-1813) fue un matemático y físico francés. Sus contribuciones fueron en los campos del análisis, la teoría de números y la mecánica celeste.

¡Veamos un ejemplo! Deseamos encontrar el incremento de la función y con respecto a x —la derivada, hablando en términos modernos—. Sea $y = f(x) = x^2$, entonces consideramos un incremento en la variable x, el cual es $x + h$, así tenemos que,

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2$$

Obteniendo,

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

Dividimos por h ambos lados de la igualdad, por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h$$

Ahora, hacemos $h = 0$, lo cual implica que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 2x$$

Por transitividad,

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Pero ¡hay una imprecisión! ¿qué significa la fracción $\frac{0}{0}$? Marx (1983) afirma que, $\frac{0}{0}$ es preservado como una razón de diferencias extintas (p. 65), y además se refiere a esto como el "cálculo de los ceros" cuyo precursor fue Euler, este cálculo suponía que los diferenciales eran ceros, que tenían una magnitud nula, pero a la vez no eran cero (Marx, 1983, p. 316).

Claramente, esto muestra una contradicción ontológica del objeto, es y al mismo tiempo no es, entonces, ¿qué resulta ser? En ese mismo sentido, Marx (1983) muestra una definición clara y contundente que Euler expresa en su obra *Differential Calculus* sobre el infinitesimal:

> Una cantidad infinitesimal no es nada más que una cantidad evanescente, que en esencia es exactamente igual a cero. Esto está de acuerdo con esa definición de los infinitesimales, según la cual son más pequeños que cualquier cantidad dada. Efectivamente, si una cantidad es tan pequeña, que es más pequeña que cualquier cantidad dada, entonces, tiene que ser igual a cero; porque si no hubiera sido igual a cero, entonces sería posible postular una cantidad igual a ella, pero que contradeciría la presuposición. Por lo tanto, si alguien pregunta, lo **que es un infinitesimal en matemáticas**, entonces vamos a responder, que **es exactamente igual a cero**. Por lo tanto, este concepto no tiene secretos ocultos en él, los similares a los que suelen estar unidos a él y que hace que el cálculo infinitesimal sea altamente sospechoso a los ojos de muchos (p. 316, énfasis agregado)

Esto quiere decir que, aunque este camino nos lleva a un resultado que es correcto, ahora hay un procedimiento matemático incorrecto que resta por resolver, referente a la división por 0, porque si detallamos, en la igualdad previa, los diferenciales resultan ser simplemente 0, y $\frac{0}{0}$ no es permitido en matemáticas, al menos no en las teorías usualmente conocidas. En consecuencia, miremos una posible solución a esto que es presentada en los manuscritos de Marx en su intento por mostrar la diferencia entre el concepto de límite y el valor límite.

Sea $f(x) = x^3$ y $f(x+h) = (x+h)^3$, con h un incremento finito. Deseamos hallar la derivada de $f(x)$. Entonces se sigue que,

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3$$

Desarrollando lo que hay en el paréntesis,

$$f(x+h) - f(x) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3$$

Dividimos ambos lados de la igualdad por h,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

Habiendo dicho esto, h no puede ser cero, puesto que conduce a inconsistencias lógicas. Además, sabemos de antemano, que lo que buscamos es simplemente $3x^2$. Así las cosas, miremos que ocurre con el binomio $3xh + h^2$. A medida que h va disminuyendo (se acerca a cero, pero no es cero), la expresión $3x^2 + 3xh + h^2$ se va acercando a $3x^2$, pero jamás es exactamente esto, en otros términos, $3x^2$ es el valor límite de $3x^2 + 3xh + h^2$ (Marx, 1983, p. 97).

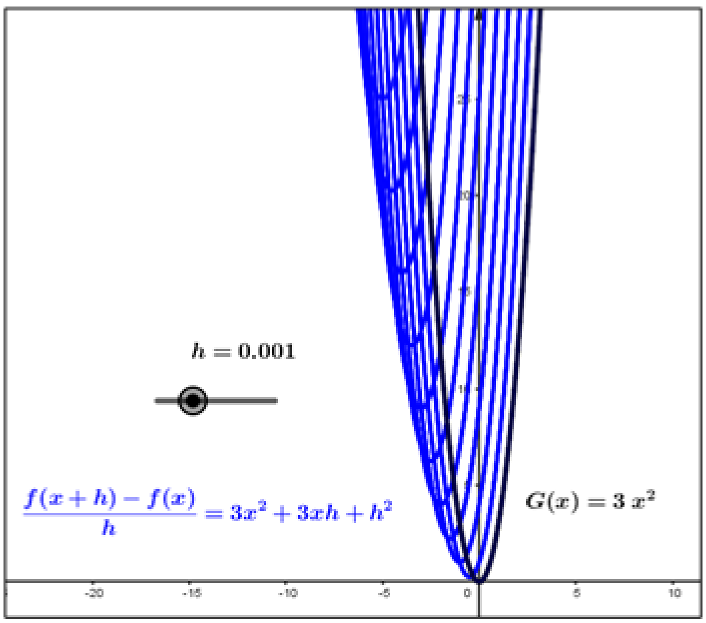


Figura 5.1: Aproximación al valor límite.

La Figura 5.1 muestra que a medida que h toma diferentes valores y se va aproximando a 0 (sin ser 0), esa familia de funciones —parábolas en azul— está acercándose a la función derivada $G(x) = 3x^2$; lo cual es un procedimiento por aproximación, es decir, esto no es un sinónimo de exactitud, ya que h no puede ser 0, de lo contrario volveríamos al mismo error.

Además de su intento por entender la naturaleza de los fundamentos del Cálculo, en los manuscritos de Marx se pueden evidenciar algunas de sus correspondencias con pensadores de su época. En especial, una epístola dirigida a su amigo cercano Engels,[10] a través de la cual intenta explicarle las bases del cálculo diferencial a partir del problema de la recta tangente (Marx, 1983, p. 114).

Aunque Marx no fue un matemático estrictamente hablando, en sus manuscritos se logra ver su intención y afán por entender la naturaleza del Cálculo, mostrando las debilidades lógicas y las diferentes posturas que asumieron los matemáticos al contribuir en la construcción de esta herramienta científica (Gerdes, 2014). También, en su obra, es notable que la derivada fue un elemento primordial y que en determinado punto fue el foco principal de estudio en esta historia. Sin embargo, era necesario ahondar más en esas ideas previas y mirar que subyacía en ellas, puesto que esto no sentaba las bases sólidas para el Cálculo, se necesita una herramienta más poderosa, la conexión entre los épsilon y los delta.

5.3. Euler y el Cálculo en el cual $\frac{0}{0}$ tiene sentido

Uno de los matemáticos que intentó responder a las fuertes críticas de Berkeley fue el suizo Leonhard Euler (1707-1783), reconocido por ser uno de los más prolíficos de la historia. Su esencia creadora dio fruto en diferentes campos de las matemáticas, desde la teoría de números hasta el Cálculo. En este último, se destaca por su facilidad para entender las cantidades infinitamente pequeñas, que para él eran "nada más que cantidades que se desvanecían y eran igual a cero" (Euler, 2000, p. 51). Sin importar la rigurosidad, Euler explotó el potencial de los infinitesimales en la creación de resultados matemáticamente fascinantes.

[10]Friedrich Engels (1820-1895) fue también un polimata alemán, quien dedicó su vida a la filosofía, historia y antropología, entre otras. Fue amigo íntimo de Karl Marx, con quien escribió algunas obras filosóficas y desarrollo conocimientos profundos del socialismo.

Como lo afirma Imaz y Moreno (2010):

> Nadie como él entendió como sacar provecho de los infinitesimales. Parece que hubiese penetrado en el intelecto de Leibniz para comprender el uso de los infinitesimales como cantidades que se usan en un Cálculo para hacerlo posible y, una vez que se ha logrado obtener el resultado, no quedan trazas de esas cantidades "incómodas". (p. 25)

Para explicar el colosal ingenio de este matemático y la respuesta a Berkeley sobre qué son los infinitesimales, adentrémonos en un paraje realmente cautivante de su obra, *Foundations of the differential Calculus* (Euler, 2000, p. 51), en el cual intenta convencernos de que una cantidad infinitamente pequeña es cero:

> Primero debemos responder a la objeción de por qué no usamos siempre el mismo símbolo 0 para cantidades infinitamente pequeñas, en lugar de algunos casos especiales. Ya que todas las nadas son iguales, parece superfluo tener diferentes signos para designar tal cantidad.

Euler sigue su justificación mostrando la manera geométrica y aritmética de comparar dos ceros:

> La razón aritmética entre dos ceros cualesquiera es una igualdad. Este no es el caso de un cociente geométrico. Podemos verlo fácilmente en esta proporción geométrica $2 : 1 = 0 : 0$, en la que el cuarto término es igual a 0, al igual que el tercero. Por la naturaleza de la proporción, como el primer término es el doble del segundo, es necesario que el tercero sea el doble del cuarto. [...] Todo el mundo sabe que cuando se multiplica cero por cualquier número, el producto es cero y que $n \cdot 0 = 0$, por lo tanto $n : 1 = 0 : 0$. Entonces, está claro que dos ceros cualesquiera pueden estar en una razón geométrica, aunque desde la perspectiva de la aritmética, la razón es siempre de iguales cantidades.

Una vez él posibilita la existencia de estas razones infinitamente pequeñas, expresa que la necesidad de diversas representaciones de estas emerge de la necesidad de que la utilización única de una de ellas no es suficiente para evitar caer en contradicciones: En el cálculo de lo infinitamente pequeño, tratamos precisamente con relaciones geométricas de cantidades infinitamente pequeñas. Por esta razón, en estos cálculos, si no utilizamos símbolos diferentes para representar estas cantidades, caeremos en la mayor de las confusiones sin que podamos salir de ella.

Brevemente, lo que nos dice Euler es que, por ejemplo, $dx = 0$ o $dy = 0$, y que incluso podemos tener que $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, donde $\frac{0}{0}$ es una razón y es otra representación de $\frac{dy}{dx}$. Veamos un ejemplo sobre el uso que Euler (2000, p. 100) hace de los infinitesimales al momento de solucionar un problema matemático: deseamos hallar la diferencial de la función $y = \ln(x)$, es decir, queremos conocer $\frac{dy}{dx}$. Euler, similar al tratamiento que propuso Leibniz, nos propone realizar el aumento de la variable independiente y dependiente, esto es:

$$y + dy = \ln(x + dx) \rightarrow dy = \ln(x + dx) - \ln(x)$$

Y asintiendo que dx es una cantidad homogénea a x, se cumple que la resta de logaritmos es igual al logaritmo de un cociente:

$$dy = \ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$$

Para la solución de este tipo de problemas, Euler hacía uso del desarrollo en serie de potencias de las funciones trascendentes. Así para la función logaritmo:

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \dots$$

En este caso particular, teniendo en cuenta que $t = \frac{dx}{x}$,

$$\ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \frac{dx^4}{4x^4} + \frac{dx^5}{5x^5} + \dots$$

Pero, si comparamos las potencias mayores o iguales que 2 con respecto a dx estas serán anuladas, puesto que son completamente despreciables en magnitud. Entonces obtenemos que:

$$dy = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

En pocas palabras, en el desarrollo de su obra se puede detallar que él no estaba preocupado por la rigurosidad, aunque define lo que entiende por cantidades infinitamente pequeñas, su principal objetivo no era el decoro lógico y la evitación de imprecisiones, en cambio, lo importante eran los frutos que todo este engranaje producía. A este respecto, Ferraro (2012) afirma que una mejor manera para entender los infinitesimales de Euler es tratarlos como ficciones simbólicas que podamos operar como cantidades reales (p. 1), es decir, de manera semejante a como lo hizo Leibniz y Newton.

Capítulo 6

Siglo XIX: los infinitesimales son reemplazados por epsilones y deltas

Las matemáticas no son una ciencia deductiva –eso es un cliché–. Cuando usted intenta probar un teorema, usted no lista hipótesis y luego inicia a razonar. Lo que usted hace es prueba y error, experimentación, conjeturación.

Paul Halmos

6.1. Los epsilones y deltas, los nuevos fundamentos del Cálculo

Los enfoques del Cálculo que existían, hasta aquel entonces, perduraron por muchos años dependiendo de la ubicación geográfica, verbigracia, en Francia prevalió el enfoque de Leibniz y en Inglaterra, hasta a principios del siglo XIX, se mantuvo el enfoque de Newton (Marx, 1983, p. 80). Lo que resulta indudable es que aquel árbol teórico había crecido formidablemente, y por ende era imposible listar en unas cuantas páginas el conocimiento desarrollado y las discusiones que se habían gestado relativas al Cálculo y a sus fundamentos. Empero, aún quedaban sinsabores sobre la manera injustificable de proceder en una demostración y a esto se añadía las criticas contundentes que se hacían a propósito de la rara naturaleza de los infinitesimales, sus comportamientos y sus configuraciones incomprensibles no agradaban a muchos matemáticos. De modo que, la crítica siempre fue el deleite de muchos adversarios de los infinitesimales o lo que se entendía de ellos. Siempre se buscó darles uno explicación racional y eliminar de su naturaleza todo rastro místico, pero ellos parecían indomables ante la comprensión humana y con más fuerza se resistían a la obediencia de una lógica matemática. Así que, ante tal desacato ininteligible, no quedó otra opción que desterrarlos del mundo matemático y darle paso a los epsilones y los deltas, cuya conexión pasaría a ser el soporte del Cálculo estándar o clásico que conocemos hoy, basado en la teoría de los límites.

Los trabajos del matemático francés Augustin Cauchy (1789–1857) y el matemático italiano Bernard Bolzano (1781–1848) fueron un punto de partida para el trabajo que Weierstrass (1815–1897) finalizó. En efecto, como lo asegura Abeles (2001) "Weierstrass, fue quien quitó los infinitesimales de las matemáticas formales, al eliminar el componente dinámico e intuitivo del movimiento continuo, y que en su lugar lo sustituyó por una definición estática y abstracta épsilon–delta" (p. 8) o en palabras de Boyer (1970):

> Las nociones de el Cálculo que fueron presentadas por Cauchy y Bolzano son bastantes similares a la forma actual, pero ciertas frases en sus exposiciones denotaban imprecisiones. ¿Qué son los "valores sucesivos"? ¿Qué significa una "aproximación indefinida"? ¿Qué es una "cantidad suficientemente pequeña"? Con la creciente aritmetización de las matemáticas en el siglo XIX tales frases fueron dejadas, en las conferencias de Karl Weierstrass, por la elegancia y precisión de la definición de límite en términos de "épsilon–delta", en la cual la vaga idea de aproximación es abandonada por un lenguaje puramente numérico. (p. 85)

Sus ideas indudablemente proveían un nuevo panorama para las matemáticas. Por un lado, Cauchy desenvolvía un papel sistematizador, similar al de Euclides en la geometría griega, concediendo organización a las ideas de límite, la continuidad de las funciones y conceptos propios del desarrollo del Cálculo (Imaz y Moreno, 2010). Asimismo, como lo afirma Tall (1980):

> La noción de infinitesimal como una cantidad variable que se acerca a cero tiene un antecedente muy respetable en el trabajo de Cauchy en la primera mitad del siglo XIX. Esto fue esencialmente desterrado de las matemáticas por las técnicas $\epsilon - \delta$ de Weierstrass en la segunda mitad de este siglo. Los infinitesimales no murieron. Hilbert los utilizó tan tarde como en 1920 y los matemáticos aplicados los siguieron encontrando útiles. (p. 3)

Y, por otro lado, "Bolzano realizaba algunos intentos para formalizar la teoría de los números reales como secuencias de números racionales, pero este trabajo no fue conocido hasta 1962" (Segura y Sepulcre, 2015, p. 3). A pesar de esos esfuerzos y de su empeño por eliminar los sinsentidos existentes, en su lenguaje se seguían conservando indicios de cantidades pequeñas y continuaban haciendo deducciones basados en hechos meramente geométricos, los cuales se deseaban eliminar rotundamente, en términos más claros, seguían usando infinitesimales (Laugwitz, 1989). En consecuencia, la propuesta de Weierstrass trae consigo vientos de cambio, el Cálculo adquiere un aspecto riguroso y deja completamente de lado todo indicio infinitesimal, así como ideas intuitivas y geométricas, que fueron remplazadas y soportadas en una teoría robusta y precisa del número real. Más llanamente, en palabras de Bell (2022):

> El matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) completaba el destierro de la intuición espaciotemporal y lo infinitesimal de los cimientos del análisis. Para inculcar un rigor lógico completo, Weierstrass propuso establecer el análisis matemático sobre la base del número únicamente, para "aritmetizar”, en efecto, para reemplazar lo continuo por lo discreto. **La "aritmetización" puede verse como una forma de atomismo matemático**. En la búsqueda de este objetivo, Weierstrass primero tuvo que formular una definición "aritmética" rigurosa de número real. Hizo esto definiendo un número real (positivo) como un conjunto contable de números racionales positivos para los cuales la suma de cualquier subconjunto finito siempre permanece por debajo de algún límite preasignado, y luego especificando las condiciones bajo las cuales dos de esos "números reales" deben considerarse iguales o estrictamente menores entre sí. (p. 36; énfasis agregado)

La construcción de los números reales fue una tarea laboriosa que estuvo llena de intentos y de búsquedas incansables por encontrar un concepto y una definición lógicamente rigurosa. Asimismo, fue un proceso que hizo parte de extensas discusiones debido a su compleja naturaleza, como se puede ver en (Guevara, 2020). Sin embargo, a falta de una forma lógica de abordarlos, fueron desarrolladas diferentes versiones (sintética, sucesiones de Cauchy, cortaduras de Dedekind, entre otras) que permitieron darles sentido desde un punto de vista matemático.

Teniendo en cuenta mencionados antecedentes, enunciemos la definición dada por Weierstrass y sigamos una demostración basada en ella para comprender algunas ideas en detalle, así como para denotar la ausencia de ideas relativas a los infinitesimales —aproximación sucesiva, cantidad evanescente o rastros de indivisibles—.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (no necesariamente definida en dicho punto) entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in$ ***Dom(f)***, $|x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$; ϵ y δ números reales.

Demostraremos que $\lim_{x \to b} x^n = b^n$. Esto es, teniendo en cuenta la definición de Weierstrass, dado cualquier $\epsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|x^n - b^n| < \epsilon \text{ siempre que } |x - b| < \delta$$

Ahora bien, para nuestro caso.

$$|x^n - b^n| = |(x - b)(x^{n-1} + x^{n-2}b + x^{n-3}b^2 + \cdots + x^2b^{n-3} + xb^{n-2} + b^{n-1})| < \epsilon$$

Que en términos de sumatoria y efectuando propiedades de valor absoluto es igual a:

$$|x - b| \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k b^{n-1-k} \right| < \epsilon \qquad (6.1)$$

Ante esta expresión, debemos encontrar una cota superior[11] para el segundo término de lado izquierdo de 6.1. Como sigue, si "exigimos"[12] que $\delta = 1$, por lo tanto $|x - b| < 1$, y obtenemos, haciendo uso de la desigualdad triangular inversa, que:

$$|x| - |b| < |x - b| < 1$$

De donde,

$$|x| < 1 + |b|$$

[11]Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número B tal que $x \leq B$ *para todo* x de S. Entonces se dice que S está acotado superiormente por B, y B es una cota superior de dicho conjunto (Apóstol, 1988).

[12]¿Por qué se exige o damos por sentado que δ toma ese valor? ¿Cómo puede eso ocurrírsenos naturalmente? Probablemente después de muchos intentos de pruebas y errores que conduzcan a una respuesta acertada.

Entonces basados en esto procedemos a encontrar la cota superior,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k b^{n-1-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |b|^{n-1-k}$$

Pero de lo anterior,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |b|^{n-1-k} < \sum_{k=0}^{n-1} |(1+|b|)|^k |b|^{n-1-k} < \sum_{k=0}^{n-1} (1+|b|)^k (1+|b|)|^{n-1-k}$$

Entonces,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+|b|)^k (1+|b|)|^{n-1-k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} (1+|b|)^{n-1} = n(1+|b|)^{n-1}$$

De esta manera, hemos encontrado una cota superior para dicha expresión, y con ello un posible candidato a ser delta. En consecuencia,

$$|x-b| < \frac{\epsilon}{n(1+|b|)^{n-1}} = \delta$$

Estas pruebas realmente están haciendo uso de argumentos abductivos, veamos el porqué. La razón es que no resulta fácilmente suponer el δ que necesitamos. En su lugar, debemos comenzar desde la consecuencia de la definición. Hecho esto, consideramos el mínimo entre el valor supuesto y el que hallamos,

$$\delta(\epsilon) = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{n(1+|b|)^{n-1}}\right\}$$

Si deseamos ser rigurosos, matemáticamente hablando, debemos notar que lo hicimos solo fue un pretexto para encontrar el delta y que no hemos acabado la demostración. En virtud de esto, tenemos que proceder de manera deductiva.

Sea $\epsilon > 0$, con $\delta = \frac{\epsilon}{n(1+|b|)^{n-1}}$, entonces

$$|x^n - b^n| = |x - b| \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k b^{n-1-k} \right|$$

Pero, del producto de nuestras abducciones,

$$|x - b| < \frac{\epsilon}{n(1 + |b|)^{n-1}} \text{ y } \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k b^{n-1-k} \right| < n(1 + |b|)^{n-1}$$

Multiplicando las desigualdades,

$$|x - b| \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k b^{n-1-k} \right| < \frac{\epsilon}{n(1 + |b|)^{n-1}} \cdot n(1 + |b|)^{n-1}$$

Obteniendo finalmente

$$|x^n - b^n| < \epsilon$$

Con lo que hemos probado que siempre que $|x-b| < \delta$ con $\delta = \text{mín}\{1, \frac{\epsilon}{n(1+|b|)^{n-1}}\}$, $\lim\limits_{x\to b} x^n = b^n$, para $b > 0$.

Es innegable la belleza y la perfecta conexión simbólica y lógica que existe en estas nuevas matemáticas. Sin embargo, al mismo tiempo, es evidente la anulación de la intuición, siendo un proceso que no se sigue con naturalidad ya que requiere de una práctica y madurez intelectual, debido al extenso engranaje matemático requerido y lo artificioso que muchas veces puede llegar a ser. Como lo afirma Courant y Robbins (2017):

> La definición de limite en términos de ϵ y δ **es el resultado de más de cien años de ensayo y error** e incorpora en unas pocas palabras el fruto de un esfuerzo persistente de dotar a este concepto de una base matemática sólida. (p. 342, énfasis agregado)

El ensayo y el error han sido una fuente de creación matemática; algunas ideas no nacen a partir de un intento primario, sino del sostenimiento de muchos intentos tras el cual está el correcto. Sin embargo, muchas veces se sostiene la hipótesis de la exactitud, es decir se muestra únicamente el resultado final pero no el camino cuyo transito conduce a este, llevando a anular el esfuerzo intelectual realizado para obtenerlo.

Capítulo 7

Abraham Robinson; los infinitesimales son enjaulados

Uno de los aspectos infinitamente atractivos de las matemáticas es que sus paradojas más espinosas tienen una manera de florecer en hermosas teorías.

Philip J. Davis

7.1. ¿Ahora sí podemos usar los infinitesimales sin preocupación?

Los infinitesimales realmente nunca fueron dejados de lado, algunos físicos e incluso matemáticos siguieron usándolos a pesar de la nueva moda rigurosa de los épsilon-delta de la cual estos carecían (Singh y Singh, 1992). Sin embargo, un matemático alemán, Abraham Robinson (1918-1974) se arriesgó a creer en ellos para darles una esencia libre de inconsistencias lógicas y jacta de rigurosidad, y cuyo premio sería ocupar un lugar en las matemáticas. De acuerdo con López (2014):

> A mediados del siglo XX el matemático Abraham Robinson inicia el análisis no estándar usando la teoría de modelos en la fundamentación de los infinitesimales.

> Sin embargo, algunos elementos de su teoría ya habían sido introducidos por el lógico noruego Thoralf Skolem[13]. (p. 294)

A partir de esto es importante mencionar dos aspectos que merecen la pena ser resaltados. Uno de ellos es la encadenación continua de ideas que primariamente carecen de sustento teórico, pero que posteriormente florecen y son cimentadas en grandes teorías, y con base en objetos matemáticos sofisticados. Particularmente, Robinson no originó las ideas y los sustentos de su Análisis no estándar de manera inmediata, sino que su teoría fue fruto de las ideas prematuras de matemáticos previos. Por lo tanto, no es extraño que Gray (2015) asegure que:

> Recientemente ha habido intentos de argumentar que Leibniz, Euler e incluso Cauchy podrían haber estado pensando en alguna versión informal rigurosa del análisis moderno no estándar, en el que existen cantidades infinitas e infinitesimales. Sin embargo, una interpretación histórica como la esbozada anteriormente que pretende entender a Leibniz en sus propios términos, y que le confiere perspicacia y coherencia, tiene mucho que recomendar sobre una interpretación que solo ha sido posible defender en las últimas décadas. Es parsimonioso y no requiere una defensa experta para la que los conceptos modernos parecen esenciales y por lo tanto crean más problemas de los que resuelven (por ejemplo: con las series infinitas). (p. 11)

Y el segundo, es que las matemáticas mismas muestran que algunos de sus objetos han sido abandonados por falta de la rigurosidad lógica o de las formas precisas de comunicar sus ideas sin necesidad de caer en mundos paradójicos. Aun así, una vez estos problemas son sorteados y es encontrada la forma precisa de comunicación de dichos objetos es posible

[13]Thoralf Skolem (1887-1963) fue un matemático de origen noruego, conocido principalmente por sus trabajos en teoría de conjuntos y lógica matemática. También fue uno de los principales pioneros e impulsores en el estudio de modelos no estándar.

desarrollar una teoría transparente y limpia de impurezas lógicas propias de las licencias que hacemos de la intuición. A este respecto, Kleiner (2001) señala que:

> Alrededor de un siglo después de que Weierstrass había desterrado los infinitesimales —para bien o así todos pensamos hasta 1960— fueron traídos de nuevo a la vida como objetos matemáticos genuinos y rigurosamente definidos en el 'análisis no estándar', concebido por el lógico matemático Abraham Robinson. Otro ejemplo de la resurrección de un concepto previamente desterrado son las series divergentes, criticadas, como recordamos, por Cauchy y Abel a principios del siglo XIX, pero rigurosamente reintroducidas como series asintóticas por Poincaré y Stieltjes en la última parte de ese siglo. (p. 169)

Es evidente que el desarrollo del Cálculo, hasta este punto, fue resultado de una ardua labor intelectual. En consecuencia, es vital recalcar que las ideas primigenias dadas por matemáticos predecesores fueron el germen de creación y punto de arranque de otros. A este respecto,

> Robinson, de manera similar a lo sugerido por Leibniz, emplea los infinitesimales como una herramienta que le permite abreviar y simplificar las operaciones: al final del proceso los infinitesimales desaparecen, pues el resultado que se buscaba, se buscaba en términos de reales y eliminar una cantidad infinitesimal no introduce ninguna diferencia en el resultado en términos de reales. (Robles, 1993, p. 361)

Con el propósito de abordar algunas de las ideas de Robinson, sobre el análisis no estándar, vamos a seguir algunos apartados de su obra *Methaphysics of the Calculus* (1967), en la cual él muestra un bosquejo de las ideas principales y generales de la construcción con la que dota a los infinitesimales de un semblante riguroso, mencionando que un desarrollo más detallado y comprensivo de estas ideas puede ser encontrado en su obra más representativa *Non-standard Analysis* (1966).

Primeramente, él menciona un lenguaje L[14] para hacer declaraciones sobre los números reales ($\mathbb{R}$) y recalcando que este lenguaje es suficientemente rico que incluye todos los símbolos, conectores, variables, cuantificadores y relaciones de distinto tipo entre los elementos de este conjunto. Además, define $\mathbb{K}$ como el conjunto de todas las afirmaciones que pueden ser formuladas a partir de L en $\mathbb{R}$. Con esto en mente, afirma que:

> De los resultados estándares de la lógica de predicados se deduce que existe una extensión apropiada ${}^*\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ que es un modelo de $\mathbb{K}$; por ejemplo, tal que todas las oraciones de $\mathbb{K}$ son verdaderas también en ${}^*\mathbb{R}$. Sin embargo, esta declaración solo es correcta si las oraciones de $\mathbb{K}$ son interpretadas en ${}^*\mathbb{R}$ en el sentido de Henkin. Es decir, cuando se interpretan frases como 'para todas las relaciones' (de cierto tipo, cuantificación universal) o 'para alguna relación' (de cierto tipo, cuantificación existencial) no tenemos en cuenta la totalidad de todas las relaciones (o conjuntos) del tipo dado, sino solo un subconjunto de estos, las llamadas relaciones internas o admisibles (o conjuntos). En particular, si $\mathbb{S}$ es un conjunto o relación en $\mathbb{R}$, entonces hay un conjunto o relación interna correspondiente ${}^*\mathbb{S}$ en ${}^*\mathbb{R}$, donde $\mathbb{S}$ y ${}^*\mathbb{S}$ se denotan con el mismo símbolo en L. Sin embargo, no todas las entidades internas de ${}^*\mathbb{R}$ son de este tipo. (Robinson, 1967, pp. 29-30)

Esto significa que las propiedades básicas (elemento neutro, asociatividad, conmutatividad, etc.) de los números reales pueden ser extrapoladas a esta nueva extensión ${}^*\mathbb{R}$, es decir, podemos hacer afirmaciones sobre elementos de este como si estuviéramos haciéndolo en los reales. No obstante, debemos ir más precavidamente cuando lo hacemos sobre conjuntos o colecciones. De este mismo modo, Robinson menciona una de las principales características que diferencian los números reales de este nuevo conjunto. "${}^*\mathbb{R}$ es un campo ordenado no arquimediano. ${}^*\mathbb{R}$ contiene números no triviales infinitamente pequeños (infinitesimales), por

[14] Un lenguaje es una colección de símbolos que son usados para hacer aserciones acerca de un conjunto universal, por ejemplo, sobre el conjunto de los números reales (Davis, 1977).

ejemplo, $a \neq 0$, tal que $|a| < r$ para todo real positivo r (0 se cuenta como infinitesimal, trivialmente)” (Robinson, 1967, p. 30).

A partir de la construcción de $^*\mathbb{R}$ se abre el espacio que los infinitesimales necesitaban, quitándoles toda característica mística y alejándolos de interpretaciones apartadas del mundo matemático. Análogamente, es valioso resaltar que matemáticos como Leibniz y Newton no estaban errados al afirmar que estas cantidades infinitamente pequeñas cumplían las mismas propiedades de los números usuales. Como lo confirma Keisler (1994):

> Leibniz (1646-1716) anticipó correctamente el punto de vista moderno; consideró los infinitesimales como ideales tales como los números imaginarios, y propuso su ley de continuidad: "En cualquier supuesta transición, terminando en cualquier término, es permisible instituir un razonamiento general, en el cual el término también puede ser incluido." Esta ’ley’ es demasiado imprecisa para los estándares actuales, pero fue un precursor del principio de transferencia moderno de que el sistema de los números hiperreales tiene las mismas propiedades de primer orden que el sistema de los números reales. (p. 207)

Los infinitesimales ahora son lógicamente entendidos y capturados; pasando de ser herramientas incomprendidas —misteriosas, fantasmagóricas, ficticias, evanescentes, entre otras— a convertirsen en una herramienta que propicia el desarrollo y la creación matemática al facilitar la demostración de resultados que resultan más artificiosos por medio de la definición épsilon-delta, en palabras de Davis y Hersh (1982, p. 188), “los infinitesimales fueron elevados de un nivel heurístico al riguroso”, lo cual posibilita su utilización de manera libre y sin contradicciones lógicas.

7.2. La recta hiperreal y lo no arquimediano

En este apartado no mostraremos ni daremos una definición precisa de lo qué es la recta hiperreal o un número hiperreal, porque ello requiere de un conocimiento de lógica matemática que desborda los propósitos de este trabajo. En su lugar, daremos a conocer algunas ideas que resultan intuitivas.

Si pensamos en un número real sabemos que a cada punto de la recta le podemos asociar uno de ellos, esto es, existe una correspondencia biunívoca entre estos dos conjuntos.[15] Pero, qué ocurre si pensamos en un infinitesimal, ¿en dónde lo ubicamos? La respuesta es que necesitamos hacer un zoom, como si estuviéramos usando una lupa capturadora de infinitesimales, o como algunos autores lo llaman un microscopio, sobre un número de la recta real para encontrarlos (ver Figura 7.1). Por ejemplo, si fijamos la lupa sobre el 0 vamos a localizar una nube de infinitesimales alrededor de este; sin embargo, no solo es posible encontrar infinitesimales en esta nueva recta [hiperreal], también se pueden encontrar números finitos y números infinitamente grandes al considerar el recíproco de los infinitesimales (Keisler, 1994).

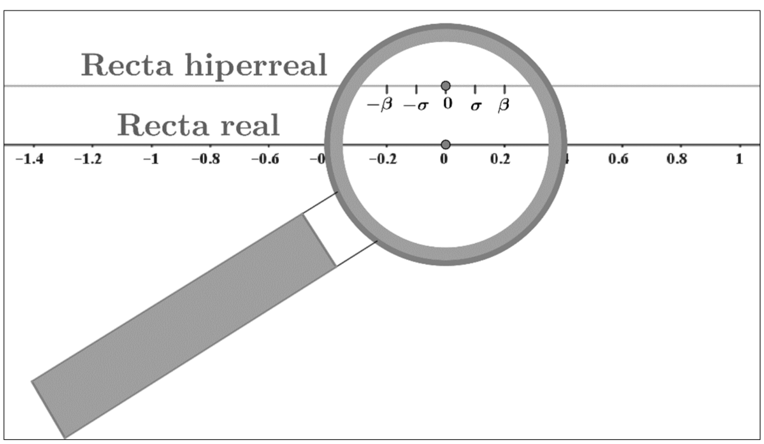


Figura 7.1: Infinitesimales en la recta hiperreal.

[15]Este hecho es conocido como el axioma Cantor-Dedekind, en honor a estos dos grandes matemáticos. A partir de él se afirma que la recta geométrica continua es isoforma al conjunto de los números reales (Ehrlich, 1994, p. 8).

En adición, con el fin de aclarar la naturaleza de los infinitesimales y mostrar una "aclaración lógica" a esa desaparición mística y evanescente de cantidades infinitamente pequeñas, estudiemos nuevamente el ejemplo abordado en el apartado de Leibniz, teniendo en cuenta la aclaración fundamental que Keisler (2000) realiza:

> Lo que se necesita es una aguda distinción entre los números que son suficientemente pequeños para ser despreciados y los que no lo son. En realidad, ningún número real es infinitesimal excepto el cero. Para esquivar esta dificultad, nosotros tomamos el atrevido paso de introducir un nuevo tipo de número, que es infinitamente pequeño pero que no es igual a cero. Un número ϵ es infinitamente pequeño, o infinitesimal, si $-a < \epsilon < a$, para cada a número real positivo. [...] Utilizaremos un nuevo sistema numérico llamado números hiperreales, que contiene los números reales y los infinitesimales que no son cero. (p. 24)

Sea $y = x^2$, definimos un incremento en x y en y. Entonces $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$, de esto, haciendo el desarrollo respectivo, $y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, en consecuencia,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Entonces, ¿a qué conjunto pertenece este número? $2x + \Delta x$ es un número hiperreal, y sabemos Δx es un infinitesimal. ¡Aquí viene la gran diferencia! Si hacemos una extensión de los números reales a los hiperreales, fijando nuestra lupa obtendremos que $2x + \Delta x$ está infinitamente cerca al número real $2x$, y por lo tanto $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ (Keisler, 2000), o sea, al dejar de considerar Δx como un número real y notar que, bajo el enfoque hiperreal, $2x + \Delta x$ está infinitamente cerca de $2x$, el problema de la aparición fantasmagórica de los infinitesimales desaparece y es remplazado por una explicación racional.

Además, los números que están a una distancia infinitamente pequeña del cero o de un número ordinario real se les suele llamar mónada y a los que están a una distancia finita se les conoce como la galaxia de ese número (Keisler, 1994). En ese sentido, una pregunta que surge en analogía o comparación con los números reales es; así como en este conjunto existen números con características especiales como π y e, ¿existen números infinitesimales con características genuinas o todos son iguales cuando se trata de su representatividad? En consonancia con los términos utilizados por Keisler (2000) para referirse a las vecindades de los infinitesimales con respecto a los números reales, conjeturamos que es probable que existan "vías lácteas".

Ahora bien, veamos las implicaciones geométricas que tiene el aceptar los infinitesimales desde un punto de vista geométrico. Cuando decimos que una magnitud es arquimediana estamos diciendo en resumidas cuentas que dado un segmento de cualquier longitud siempre podemos obtener un segmento de mayor longitud (Fleuriot, 2001). Sin embargo, ¿qué ocurre con las magnitudes que no lo cumplen? Dan vida a otro mundo, en donde los segmentos infinitesimales son aceptados y ninguna sumación de ellos nos permite obtener la longitud del segmento dado (Ver Figura 7.2).

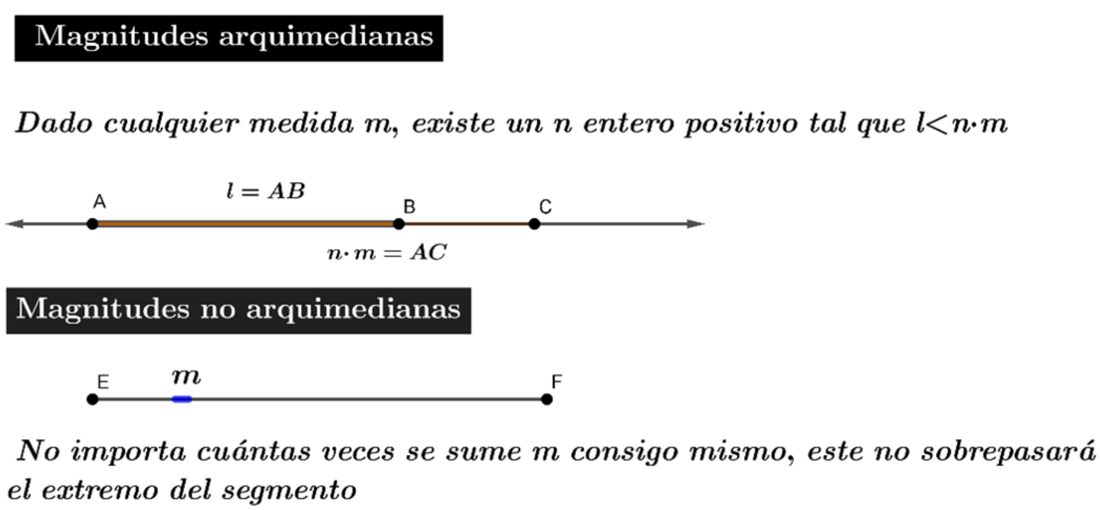


Figura 7.2: Magnitudes no-arquimedianas.

Finalmente, veamos un ejemplo que nos enseña Poincaré (citado en Fleuriot, 2001, p. 60), en el cual se devela en gran manera la existencia y la relación de lo no arquimediano con lo arquimediano:

> Si, por ejemplo, D_0 es una línea recta ordinaria, y D_1 es una recta no arquimediana; si P es cualquier punto ordinario de D_0, y si este punto divide a D_0 en dos rayos S y S' (Añado, por precisión, que considero que P no pertenece a S o S') entonces habrá en D_1 una infinidad de nuevos puntos, así como entre P y S como entre P y S'. Entonces habrá en D_1 una infinidad de puntos que se encuentran a la derecha de todos los puntos ordinarios de D_0. En pocas palabras, nuestro espacio ordinario es solo una parte del espacio no arquimediano.

Esto puede verse más claramente representado mediante la Figura 7.3. A este respecto, es necesario aclarar que los espacios entre cada uno de los nuevos infinitos puntos no quieren significar que hay discontinuidad en la recta no arquimediana; esto es solo un medio para comunicar la idea de Poincaré.

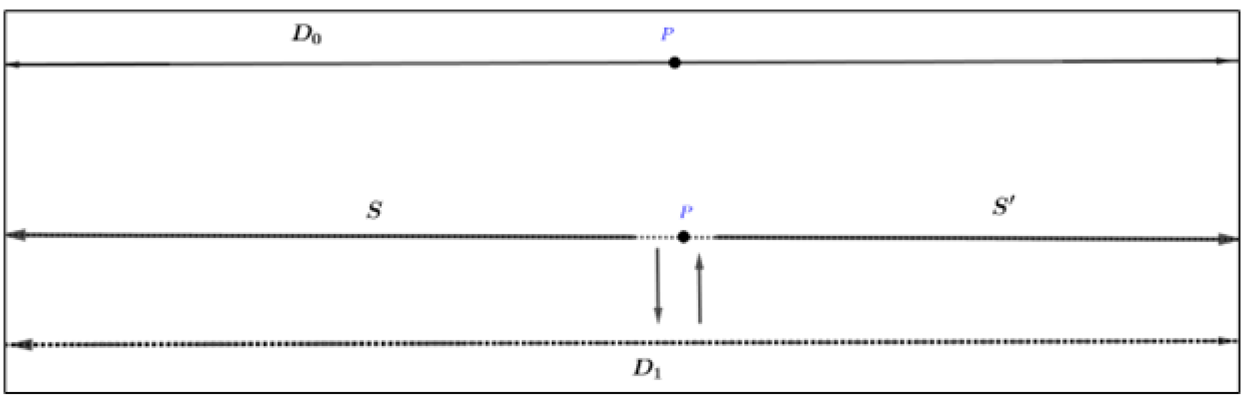


Figura 7.3: Recta no arquimediana.

Esto nos lleva a un hecho que puede resultar metafórico desde un punto de vista matemático; ya que, como lo expresa Poincaré, al dividir la recta D_0 en dos partes parece que quedaran infinitos puntos flotando entre P y los rayos S o S', es decir, es como si existiera un pegante que sigue conectando estos elementos, incluso si fueron cortados, o en términos literales:

> La primera infinidad de nuevos puntos mencionados por Poincaré corresponde a los infinitamente cerca de P. Y entonces, también tenemos los nuevos puntos en D_1 que se encuentran más allá de los de D_0. Estos puntos a la derecha de todos los puntos de D_0 corresponden a los hiperreales infinitos. (Fleuriot, 2001, p. 60)

Estos primeros puntos hacen referencia a los infinitesimales o aquellos que están infinitamente cerca a P, mientras que los últimos son aquellos que resultan ser de cierta manera infinitamente grandes o alejados de P. En suma, todo esto conduce a una correspondencia biunívoca de estos elementos con un nueva recta real diferente a la que conocemos (Fleuriot, 2001).

Capítulo 8

Aportes al profesor de matemáticas desde la reconstrucción histórica del infinitesimal

Es el deber de todos los profesores, y de los profesores de matemáticas en particular, exponer sus estudiantes a los problemas más que a los hechos.

Paul Halmos

Una vez concluida esta mirada panorámica sobre la noción del infinitesimal, direccionamos nuestro foco sobre el para qué hemos hecho esto, porque si bien hemos ganado cierto grado de comprensión sobre el infinitesimal y hemos evidenciado que su sentido nominal y existencial no es único, sino totalmente multiforme; ahora, nos falta preguntarnos si el haber recorrido este camino nos aportó algo más que erudición sobre este objeto. A continuación, basados en la caracterización realizada por Guacaneme (2016), alrededor del papel que cumple la Historia de las Matemáticas en la formación de un profesor de esta disciplina, mostramos que este recorrido histórico permeó nuestras visiones y miradas sobre las matemáticas y su enseñanza.

8.1. La visión de la actividad matemática

La actividad matemática, en particular la referente al desarrollo del Cálculo, ha atravesado la historia en general; podemos notar que su germen creador ha sido indetenible y ha perdurado sin importar sus estancamientos y descubrimientos contradictorios, lo que significa que un día cualquiera apareció, pero no se detuvo ni en la Edad Media, ni en el Renacimiento, ni en un punto particular de la historia, es más, perdura hasta nuestros días. Lo anterior también nos lleva a insistir en la evolución no lineal de las ideas presentes en cada uno de los pensadores partícipes de esta construcción, progresivamente siempre hay un cambio que transforma el sentido y algunas veces el significado del objeto discutido; por ejemplo, es remarcable el cambio ontológico entre los trabajos utilitarios de Kepler y las contribuciones hechas por Wallis quien equipara a estos objetos de una aritmética.

Esta aproximación histórica a los infinitesimales igualmente nos permite reconocer que la crítica[16] está en el foco de la actividad matemática creativa y se presenta como uno de los elementos primordiales que propicia la perfección y el avance de las matemáticas. De este modo, consideramos que las críticas de ninguna manera son destructivas, al menos no las referentes al desarrollo del Cálculo, y aquello que no parece afortunado resulta ser el motor de crecimiento para el conocimiento matemático. Al respecto, nuestra pregunta detonadora es, ¿qué sería de las matemáticas si no hubiera existido lugar a la crítica y que en cambio todo hubiera sido aceptado naturalmente? Podemos aproximarnos cortamente a esta respuesta esgrimiendo que las matemáticas no serían tal y como las conocemos hoy en día o posiblemente su desarrollo podría haber seguido otros rumbos, como los puramente metafísicos.

Asimismo, podemos asegurar que el desarrollo conceptual del Cálculo fue un extenso proceso que implicó una constante interrelación entre la filosofía y la técnica matemática. Las críticas y los cuestionamientos siempre estuvieron presentes como resultado de las

[16]Entendida como el cuestionamiento y la búsqueda del discernimiento de las ideas subyacentes al desarrollo y la naturaleza de un concepto matemático.

ausencias racionales a determinadas preguntas y procedimientos técnicos, direccionando el infinitesimal al despojo de cualquier rastro impuro y no cientificidad, como la fe o la misma sensibilidad humana. Igualmente, es fundamental volver a la idea y resaltar que el Cálculo no fue el producto de la imaginación e inteligencia de únicamente dos hombres; en cambio, fue una concatenación de resultados, en la cual las ideas de matemáticos previos servían como alimento a la creación y el perfeccionamiento de estas, cuyo proceso daba como fruto una versión de su objeto germinal —el infinitesimal—, o más propiamente dicho, una nueva máscara de este.

8.2. La visión de las matemáticas

Nuestro significado de las matemáticas es naturalmente estrecho cuando tenemos un primer contacto con ellas. Cándidamente creemos que se basan en el tratamiento de cantidades, la búsqueda de sus relaciones y generalidades, pero a medida que nos adentramos en este extenso mundo esto va cambiando; nos encontramos que son mucho más que eso, que no basta con solo operar y utilizar resultados intuitivos, sino que además, en algunos casos, se debe demostrar que eso es así teniendo en cuenta la teoría que estemos estudiando. Este último hecho parece mostrar un "antifaz" de las matemáticas que oculta su naturaleza esencial, es decir, la actividad demostrativa y del rigor matemático está antecedida por otras etapas que también deben ser llamadas matemáticas. En ese sentido la historia del infinitesimal da cuenta y razón de ello, contraria a la convicción común de que las matemáticas las configura la exactitud y la perfección; aquí se refleja que, en especial, el desarrollo del Cálculo estuvo lleno de misterios, contradicciones y hechos de fe que lo han llevado a sus estados modernos: clásico y no estándar (Lakatos, 1978).

En otros términos, las matemáticas y particularmente los objetos que la conforman parecen ser pasados a través de un cernidor que los purifica y permite su aparente perfección dentro de la teoría en que son domesticados. En efecto, este decurso histórico, muestra una guía de como las impurezas de la noción del infinitesimal quedaron atrapadas en un filtro, cuyo tamaño de los agujeros son principalmente las discusiones en torno a la falta de rigurosidad y la búsqueda de precisión y entendimiento de este objeto.

8.3. La visión del conocimiento matemático

Para hablar del rigor matemático es vital situarnos sobre qué época lo estamos haciendo, ya que es una norma que también ha evolucionado de acuerdo con las herramientas matemáticas y el conocimiento existente (Kleiner, 1991). En la historia del infinitesimal hubo ciertas aproximaciones hacia la idea de rigurosidad —como la realizada por Arquímedes[17]— que intentaron subsanar las inconsistencias que la noción de infinitesimal tenía; sin embargo, ninguna de ellas llegó a buen término y se tuvo que esperar por más de dos milenios para que ese concepto fuera finalmente concebido dentro de una teoría mediante la cual es posible sustentar su existencia y por qué es admisible tratarlos como cantidades que "desaparecen convenientemente".

La piedra angular de las matemáticas no fue necesariamente la búsqueda y la satisfacción de la verdad —no en un sentido absoluto—; su historia muestra que, aunque esto fue un elemento primordial, no fue su fundamento primario. De manera particular, en la historia del Cálculo, existieron unos elementos con cualidades muy peculiares, los infinitesimales —unos dichos raros o diferentes a lo estándar—, que atravesaron el pensamiento de muchos humanos y que fueron los objetos primarios conducentes al descubrimiento de la verdad por medios inexactos, pero funcionales para el desarrollo y la solución de problemas.

[17] Arquímedes diferencia entre la actividad creativa y la actividad demostrativa. En la primera de ellas hacía uso de los infinitesimales, pero cuando se tratada de rigurosidad matemática en el procedimiento utilizaba el método de exhaución (Cajori, 1987). En tal dirección, este mismo autor asegura, de manera general, que "H. Hankel y otros historiadores recientes de matemáticas, sacaron la conclusión, probablemente correcta, de que en la geometría clásica griega fueron sacrificados el infinito y lo infinitesimal en aras de mayor rigor."

8.4. La visión de los objetos matemáticos

La madurez de un objeto matemático no es inmediata, por el contrario, lleva años o incluso siglos para adquirir la forma deseada. En un principio, habita en un mundo silvestre, donde simplemente divaga con su rebeldía y es inatrapable para el entendimiento humano; después, en cierto grado, su proceder es comprensible y sus comportamientos son predecibles, pero aún no hay un entendimiento total del objeto, y finalmente este es enjaulado con miras a su posible dominación. Dicho de otra manera, Harnik (1986) resalta tres etapas en la génesis de un concepto matemático. La primera de ellas es la etapa preliminar, en la cual el objeto nace como causa de una necesidad y su naturaleza no es totalmente asimilada por su creador; la segunda es la etapa de familiarización, donde después de varios intentos y múltiples utilizaciones de este, el creador lo maneja de manera natural, y por último, la etapa de axiomatización compuesta de dos partes: la axiomatización material en la cual se definen los axiomas y las demás propiedades son implicación de estos, y la axiomatización formal donde se elimina cualquier semblante intuitivo del objeto, y cuyo sustento se encuentra modernamente en la teoría de modelos para garantizar la ausencia de contradicciones dentro de la teoría creada (p. 47).

Ontológicamente, recalcamos que existe una ingente división entre el objeto matemático y la comprensión total de quien intenta capturar o entender su naturaleza. De manera general, pareciera que la objetividad del objeto matemático estuviera determinada por la subjetividad de quien lo estudia, y en esa dirección, como esta última cualidad favorece la variedad y la riqueza en las respuestas, entonces es manifiesto por qué existen diversos significados e interpretaciones del infinitesimal; a modo de ejemplo, la perspectiva de Kepler difería de la de Cavalieri en la forma de concebir la dimensión de estos objetos. Sin embargo, independientemente de sus formas de pensar lo que resulta cautivador y deleitable es que a través de ambas se llegaba a resultados correctos según las aproximaciones utilizadas en la época.

Por otra parte, si nos referimos al elemento constituyente de la continuidad de un objeto geométrico, nos encontraremos en un terreno fangoso cuyos caminos llevan a severas contradicciones, como lo vimos, la respuesta va a depender de la lupa con la que esto sea observado. En suma, ¿un segmento está formado por puntos o por segmentos más pequeños o por infinitesimales? Realmente es arriesgado decir que tenemos la respuesta absoluta a esto. En realidad, en esta discusión no existen respuestas últimas y exactas, existen interpretaciones y argumentos que intentan esgrimir cada postura.

En definitiva, el infinitesimal no solo ha sido una noción polémica, sino también multifacética. Cada uno de sus rostros muestran que su marcha histórica ha estado antecedida por cuestionamientos filosóficos y ontológicos sobre su naturaleza y, cuyos efectos lo han encaminado a desdibujarse y a vestirse con un nuevo semblante. En algunos de ellos solo ocurrió un cambio simbólico, pero en otros, fue lo más próximo a una metamorfosis, es decir, un cambio total en su forma. Es así como esta noción, que para Leibniz era una ficción provechosa y que parecía guiarse por actos de fe, desemboca en el Análisis no estándar, cuyo entendimiento profundo requiere de un conocimiento y un espectro amplio de las Matemáticas modernas.

8.5. Mirada epistemológica y del pensamiento matemático

El "pensamiento no estándar", en algunas oportunidades, ha sido rechazado y tildado como intruso e ilícito ante lo clásico o lo estándar, en un principio hay una aversión por aquello que no sigue y es desligado de los parámetros usuales. Sin embargo, la historia refleja que este pensamiento —que toma otras vías distintas a las usuales— catapulta la creación de nuevos conocimientos y muestra formas incluso más ricas del pensamiento. En tal contexto, resaltamos ese hecho al que posiblemente todos los profesores de matemáticas se han enfrentado alguna vez en su vida. Cuando se aborda la división en un nivel primario los estudiantes se encuentran con la imposibilidad de la división por cero, porque esto es ilógico y la operación no funciona para ese caso; pero lo cierto es que muchos matemáticos también tuvieron este mismo problema; un ejemplo de ello es Euler quien parecía hacer cálculos sin preocuparse de este “absurdo”, pero lo interesante es que sus resultados fueron significativos y trascendentes para la historia del Cálculo.

8.6. Maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo

En muchas aulas de clase hay una ausencia de espacios de crítica y en su lugar el profesor de matemáticas es un impositor de lo que él ha aprendido, sin posibilitar que los estudiantes se cuestionen sobre la verdadera procedencia y naturaleza del conocimiento. Todo parece ser seguido de verdades. Lo cierto es que, si en las clases de matemáticas se propiciará la crítica, de tal manera que los estudiantes pusieran en duda las verdades (por ejemplo, planteándose preguntas tales como por qué se procede así y por qué se está pensando de esta y no de otra manera), el aula sería un espacio de libertad de pensamiento y nuevas creaciones; no obstante, este cambio depende precisamente del ejercicio del profesor al posibilitar, proponer y fomentar el aula de clase como un espacio donde las matemáticas no sean construidas por aceptación, más por discusión y proposición de todos los integrantes. A este respecto, en miras a favorecer y construir espacios para la comprensión del Cálculo consideramos que, como lo muestran y afirman algunos autores como George (2001), Keisler (2000), Harnik (1986), una aproximación a las ideas del Cálculo con los infinitesimales es más intuitiva y natural que la que permite la teoría de los límites.

En este zarpar histórico también es posible reconocer algunos métodos heurísticos que pueden ser más naturales para la asimilación y el acercamiento a las ideas introductorias de conceptos[18] cuya comprensión, mediante la perspectiva moderna, resulta ser más confusa.

[18] El área del triángulo y el círculo, así como el concepto de derivada, entre otros.

Adicionalmente, a la luz de estos sale a flote el nacimiento de ideas primigenias que, aunque no son tan sofisticadas y rigurosas como las trabajadas actualmente, permitían construir conocimientos útiles para el desarrollo de las matemáticas.

Por otro lado, consideramos la importancia de la intuición, la imaginación y la formalización del conocimiento en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas escolares. La primera de ellas, como el numen que inspira la creación de mundos nuevos e ideas alternas a las usuales; pero que, al mismo tiempo, al delimitar en sus excesos produce existencias ambivalentes, en las cuales el ser y el no ser están presentes coincidentemente. Por tal razón, debemos ser precavidos al deambular por dichos mundos, porque, aunque es precisamente la semilla de la cual revienta el conocimiento auténtico, también es paradójicamente "el caudal que arrastra las rocas en ambos sentidos". La segunda de ellas, como aquella facultad ensanchadora de nuevos mundos en donde es posible "pensar sobre lo impensable" y el caudal se desborda para abrir otras brechas. Y finalmente, como lo muestra la historia de las matemáticas, es con el tiempo y el tratamiento del conocimiento primario —surgido de la intuición y la imaginación— que es notable la necesidad de encontrar una claridad sobre el objeto a partir del perfeccionamiento de herramientas como el lenguaje con miras a evitar ambigüedades e imprecisiones lógicas.

8.7. Competencias personales y profesionales

Estudiar la historia de las matemáticas, y en particular la del infinitesimal, aparte del mejoramiento que aporta a las habilidades básicas de un profesional de la educación matemática —lectura, escucha y escritura—, es una marcha que permite la contemplación y caracterización de aspectos inusuales de la naturaleza de las matemáticas, mostrando diferentes tonalidades y formas diversas de pensamiento que han impulsado la evolución de objetos matemáticos particulares.

Asimismo, leer la historia de las matemáticas no solo implica seguir una narración, es un proceso que involucra intensamente al lector, teniendo en cuenta cuáles son sus objetivos y su foco de reflexión primaria. En ese sentido, se destaca que la reflexión es un proceso que permea esta actividad, haciéndola mucha más rica al permitir una discusión crítica entre el lector y la historia, y cuyo puente fundamental es el deseo de conocer mediante la búsqueda de la "verdad" y los actos inquisitivos, refiriéndonos con esto último a la formulación de preguntas que orientan este la dirección del derrotero investigativo. Así, al mismo tiempo de reflexionar, esto permite la construcción de habilidades investigativas como la búsqueda y el entendimiento de documentos especializados de la Historia de las Matemáticas que son necesarios para un mayor alcance comprensivo e interpretativo del objeto estudiado.

Por último, resaltamos que el estudio de la historia le ofrece al profesor de matemáticas una habilidad que consideramos trascendental en el aula; a saber, el aprender a diferenciar y comparar formas de pensamiento. La historia de las matemáticas muestra la diversidad y multitud de ideas en torno a un solo concepto, en los cuales se pueden rescatar aproximaciones y lejanías en cada una de ellas, y en esa dirección, es importante reconocer que los estudiantes desde sus subjetividades comprenden el objeto distintamente, lo que conlleva a la existencia de diferentes posturas y maneras de verlo.

Conclusiones

La siguiente combinación de palabras intenta dar cuenta y razón de una de las principales conclusiones que deben quedar aquí expuestas, a saber, una exposición tajante de la historia que devele brevemente las diferentes tonalidades del infinitesimal:

> El infinitesimal no es uno en esencia, es una pluralidad, es muchas cosas. Este no puede ser pensado únicamente como una cantidad infinitamente pequeña, porque eso anularía su historia y su naturaleza; tiene que ser pensado igualmente como un segmento infinitesimal, como posiblemente lo hicieron los pitagóricos para subsanar la inconmensurabilidad. Pero, además, puede ser pensado como un ángulo corneado, como lo hizo superficialmente Euclides, y como un elemento de creación matemática que puede ser pesado, como lo hizo Arquímedes. Paulatinamente, el infinitesimal es un indivisible, como lo hizo Kepler o Cavalieri. Pero, el infinitesimal también es el inverso del infinito, idea que atravesó la mente de Wallis. Esto no es suficiente, el infinitesimal fue para Leibniz un diferencial matemático, una fuente de creación matemática, un imaginario útil; el infinitesimal es una fluxión, una velocidad, de acuerdo con Newton. En otras mentes, es el fantasma de una cantidad evanescente, como lo pensó Berkeley. Para Euler, el infinitesimal es cero, una cantidad nula. Para Weierstrass, quizás un estorbo, era un elemento intuitivo que debía ser eliminado del discurso matemático, de su poesía matemática perfeccionista. Finalmente, para Robinson, el infinitesimal es un número hiperreal, un elemento que merece ocupar un espacio de su teoría.

En una segunda apuesta, desde el panorama que este caminar histórico nos permitió detallar, rescatamos que hay una carencia de instantaneidad en la evolución de las ideas matemáticas. Si bien hay un avance gradual y progresivo de ellas, el inmediatismo no tiene cabida en la construcción ideal del conocimiento matemático, y esto es efectivamente debido a que la historia de las matemáticas está íntima y directamente relacionada con la evolución histórica del ser humano. En ese sentido, la lentitud de dicha evolución se puede ver a la luz de la ausencia de herramientas tales como los conceptos esenciales y las imperfecciones de un lenguaje preciso. Por otra parte, también se logra ver que en la naturaleza del conocimiento está la idea de perfección. La presentación de los objetos matemáticos no es la misma en los puntos históricos abordados, primeramente, hay un acercamiento profundo con lo geométrico, lo visual, pero a medida que transcurre el tiempo se quiere dejar de lado esto y tornar la dirección hacia lo aritmético, permitiendo el alejamiento de ideas intuitivas o arraigadas al mundo sensible.

Igualmente, resaltamos el poder que tiene la contradicción de las ideas en la evolución de las matemáticas. Ello no es un sinónimo de fatiga intelectual, es un tipo de germen que propaga las matemáticas a niveles de mejoría y a la búsqueda de una perfección, cuyo objetivo es la precisión y la organización del conocimiento matemático.

Finalmente, es necesario mencionar el poder de la relación profesor–Historia de las matemáticas, no solo como una fuente de sabiduría sobre objetos particulares, sino como un soporte general que permite capturar diferentes herramientas en miras a hacer de la actividad educativa un escenario de reflexión y no de imposición.

Referencias

Abeles, F. (2001). The enigma of the Infinitesimal: Toward Charles L. Dodgson's Theory of Infinitesimals. *Modern Logic*, *8*, 7-19 (vid. pág. 69).

Alexander, A. (2014). *Infinitesimal how a dangerous mathematical theory shaped the modern world*. United states of America: Farrar, Straus; Giroux. (Vid. pág. 36).

Andersen, K. (1984). Cavalieri's method of indivisibles. *Archive For History of Exact Sciences*, *31*(4), 291-367 (vid. pág. 40).

Apóstol, T. (1988). *Calculus I*. Editorial Reverte. (Vid. págs. 48, 72).

Aristóteles. (1994). *Metafísica* (T. Martínez, Trad.). Gredos S.A. (Vid. pág. 15).

Aristóteles. (1982). *Tratados de Lógica (Órganon)* (M. San Martín, Trad.). Gredos S.A. (Vid. pág. 15).

Arquímedes. (1897). *The Works of Archimedes.* (T. Heath, Ed.). Cambridge University Press. (Vid. pág. 25).

Assis, A. & Magnaghi, C. (2012). *The illustrated method of Archimedes : utilizing the law of the lever to calculate areas, volumes, and centers of gravity*. C. Roy Keys Inc. (Vid. pág. 27).

Bair, J., Błaszczyk, P., Ely, R., Katz, M. G. & Kuhlemann, K. (2021). Procedures of Leibnizian infinitesimal calculus: an account in three modern frameworks. *British Journal for the History of Mathematics*, *36*(3), 170-209 (vid. pág. 46).

Baron, M. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Pergamon Press. (Vid. págs. 16, 34, 43).

Bell, E. (1937). *Los grandes matemáticos*. http://www.librosmaravillosos.com/grandesmatematicos/pdf/Los%5C%20Grandes%5C%20Matematicos%5C%20-%5C%20E.%5C%20T.%5C%20Bell.pdf.. (Vid. pág. 24)

Bell, J. (2022). Continuity and Infinitesimals. En E. Zalta (Ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/continuity/. (Vid. págs. 39 s., 49, 70)

Bell, J. (2019). *The Continuous, the discrete and the infinitesimal in Philosophy and Mathematics*. Editorial Springer. (Vid. pág. 43).

Berkeley, G. (1734). *The analyst*. Library of trinity college. (Vid. págs. 4, 55 ss.).

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Editorial Springer. (Vid. pág. 60).

Boyer, C. (1970). The history of the calculus. *Mathematics Journal*, *1*(1), 60-86. (Vid. pág. 69).

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development:The concepts of the calculus*. Dover Publications Inc. (Vid. págs. 27 s., 43).

Cajori, F. (1987). *Historia de los argumentos de Zenón sobre el movimiento.* Revista del semanario de enseñanza y titulación. (Vid. págs. 12 s., 26, 47, 89).

Cajori, F. (1894). *A history of mathematics*. Mcmillan; co. (Vid. pág. 53).

Campos, A. (1984). *De Pitágoras a Euclides*. Universidad Nacional de Colombia. (Vid. págs. 10 ss.).

Canizales, G. & Erazo, J. (2013). *Métodos heurísticos para el cálculo de volúmenes en el siglo XVII bajo la idea naciente de integral definida: una aproximación desde Arquímedes, Cavalieri y Torricelli*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional- Universidad Pedagógica Nacional. (Vid. pág. 24).

Cardil, R. (2012). Kepler: the volume of a wine barrel. *The Mathematical Association of America MAA*. https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/kepler-the-volume-of-a-wine-barrel. (Vid. pág. 33)

Chen, L. (2021). Do simple infinitesimal parts solve Zeno's paradox of measure? *Synthese*, *198*(5), 4441-4456 (vid. pág. 11).

Courant, R. & Robbins, H. (2017). *¿ Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. Editorial fondo de cultura. (Vid. pág. 74).

Davis, M. (1977). *Applied non-standard analysis*. Dover publications, inc. (Vid. pág. 79).

Davis, P. & Hersh, R. (1982). *Experiencia matemática*. Birkhäuser. (Vid. págs. 25, 32, 80).

Dudley, E. (2021). *The history of continua* (S. Shapiro & G. Hellman, Eds.). Oxford. (Vid. pág. 29).

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag. (Vid. págs. 33 s., 41).

Ehrlich, P. (1994). Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua. *Synthese Lybrary*, *242* (vid. pág. 81).

Esquisabel, O. (2021). ¿Qué es una ficción en matemáticas? Leibniz y los infinitesimales como ficciones". *Anales del Seminario de Metafísica*, *54*(2), 279-295 (vid. pág. 48).

Euler, L. (2000). *Foundations of Differential Calculus* (J. Blanton, Trad.). Springer. (Vid. págs. 64 ss.).

Ferraro, G. (2012). Euler, infinitesimals and limits. https://shs.hal.science/halshs-00657694. (Vid. pág. 67)

Fleuriot, J. (2001). Infinitesimal and Analytic Geometry. *En Combination of Geometry Theorem Proving and Nonstandard Analysis with Application to Newton's Principia. Distinguished Dissertations* (pp. 59-75). Springer. (Vid. págs. 83 ss.).

George, K. (2001). *Cálculo con infinitesimales*. Santa Marta, Colombia.Editorial Gente Nueva. (Vid. págs. 46, 92).

Gerdes, P. (2014). *The philosophic-mathematical manuscripts of Karl Marx on differential calculus: An introduction*. MEP Publications, University of Minnesota, Minneapolis, USA. (Vid. pág. 64).

Gómez, A. (1997). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Universidad de Antioquia. (Vid. pág. 24).

González, J. (1999). The History of Horn Angles: A Bird's-eye View, parts 1-3. *Math Forum Archives: Historia Mathematica* (vid. pág. 17).

Gray, J. (2015). *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*. Springer International Publishing. (Vid. pág. 77).

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. [Tesis del Doctorado Interinstitucional en Educación – Énfasis en Educación Matemática]. Universidad del Valle. (Vid. pág. 86).

Guevara, J. (2020). *¿Cambió el concepto de número con la crisis de los fundamentos de las matemáticas?* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional- Universidad Pedagógica Nacional. (Vid. pág. 71).

Harnik, V. (1986). Infinitesimals from Leibniz to Robinson time to bring them back to school. *The Mathematical Intelligencer*, *8*(2), 41-47 (vid. págs. 46, 90, 92).

Imaz, C. & Moreno, L. (2010). *La Genesis y la enseñanza del Cálculo: las trampas del rigor*. Editorial Norma. (Vid. págs. 65, 70).

Katz, M. & Sherry, D. (2013). Leibniz's Infinitesimals: Their Fictionality, Their Modern Implementations, and Their Foes from Berkeley to Russell and Beyond. *Erkenntnis*, *78*(3), 571-625 (vid. págs. 2, 41).

Keisler, H. (2000). *Elementary calculus: An infinitesimal approach*. University of Wisconsin. (Vid. págs. 82 s., 92).

Keisler, H. (1994). The Hyperreal Line. *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua* (pp. 207-237). (Vid. págs. 80 s., 83).

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 137-174 (vid. pág. 78).

Kleiner, I. (1991). Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective. *Mathematics Magazine*, *64*(5), 291-314 (vid. pág. 89).

Koshkin, S. (2020). Bisecting Horn Angles. *The College Mathematics Journal*, *51*(2), 124-131 (vid. pág. 18).

Koyre, A. (2007). *Estudios de historia del pensamiento científico*. Universidad Catolica de Cordoba. Argentina. (Vid. pág. 47).

Lai, T. (1975). Did Newton renounce infinitesimals? *Historia Mathematica*, *2*(2), 127-136 (vid. pág. 54).

Lakatos, I. (1978). Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, *1*(3), 151-161. (Vid. pág. 88).

Laugwitz, D. (1989). Definite values of infinite sums: Aspects of the foundations of infinitesimal analysis around 1820. *Archive for History of Exact Sciences*, *39*(3), 195-245 (vid. pág. 70).

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología*, *1*(14), 277-298 (vid. pág. 76).

Malet, A. (1996). *From Indivisibles to Infinitesimals: Studies on Seventeenth Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona. (Vid. págs. 37, 40).

Marx, K. (1983). *Mathematical manuscripts*. New Park Publications; Labor Publications. (Vid. págs. 5, 59 ss., 63 s., 68).

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle (2). *The Mathematics Educator*, *1* (vid. pág. 19).

McLaughlin, W. & Miller, S. (1992). An epistemological use of nonstandard analysis to answer Zeno's objections against motion. *Synthese*, *92*, 371-384 (vid. pág. 13).

Mendoza, J. (2013). *Curvas, ecuaciones y series de potencias en el desarrollo histórico de la noción de función*. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. (Vid. pág. 43).

Murawski, R. (2019). Mathematics and Theology in the Thought of Nicholas of Cusa. *Logica Universalis*, *13*(4), 477-485 (vid. págs. 30 s.).

Newton, I. (1736). *The method of fluxions and infinite series; with its application to the geometry of curve-lines*. London. (Vid. pág. 51).

Puertas, M. (1991). *Elementos, Libros I-IV*. Editorial Gredos. (Vid. pág. 17).

Raffo, F. (2020). Sobre compendios y ficciones en el pensamiento juvenil de Leibniz. *Revista Latinoamericana De Filosofía*, *46*(1), 131-150 (vid. págs. 48, 50).

Recalde, L. (2017). *Lecturas sobre la historia de las Matemáticas*. Universidad del Valle. (Vid. págs. 53, 58).

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir, Moscú. (Vid. págs. 34 ss., 47 s., 52, 59).

Robinson, A. (1967). The Metaphysics of the Calculus. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, *47*, 28-46 (vid. págs. 78 ss.).

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Princeton University Press. (Vid. págs. 5, 78).

Robles, J. (1993). *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. México. (Vid. págs. 56, 78).

Rodríguez, H. & Guacaneme, É. (2022). ¿Infidelidades geométricas?: Aventuras del ángulo corneado. (P. Perry, Ed.). *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, *25*, 187-194. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional (vid. pág. 18).

Segura, L. & Sepulcre, J. (2015). Arithmetization and Rigor as Beliefs in the Development of Mathematics. *Foundations of Science*, *21*(1), 207-214 (vid. pág. 70).

Selles, M. (1999). Isaac Newton y el infinitesimal. *Segunda Epoca*, *14*(3), 431-460 (vid. pág. 53).

Sergeyev, Y. (2022). Some Paradoxes of Infinity. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *19*(3) (vid. pág. 42).

Singh, D. & Singh, S. (1992). Pre-robinson approach to the theory of infinitesimals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(2), 249-255 (vid. pág. 76).

Sonar, T. (2020). *3000 Years of Analysis*. Editorial Springer. (Vid. pág. 36).

Stillwell, J. (2005). *Infinitesimals.* https://www.britannica.com/topic/Infinitesimals-1368274.. (Vid. pág. 50)

Stones, G. (1928). The Atomic View of Matter in the XVth, XVIth, and XVIIth Centuries. *Isis*, *10*(2), 445-465 (vid. pág. 30).

Tall, D. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. *Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education* (vid. pág. 70).

Vargas, J. (1987). *Cálculo infinitesimal en el siglo XX*. [Tesis de pregrado, Universidad de Sonora]. (Vid. pág. 47).

Wallis, J. (2004). *The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656.* (J. Stedall, Trad.). Springer. (Vid. pág. 44).

Anexos

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: AVENTURAS DEL ÁNGULO CORNEADO

Harol Rodríguez y Édgar Guacaneme
Universidad Pedagógica Nacional
herodriguezd@upn.edu.co, guacaneme@pedagogica.edu.co

En el marco de la Licenciatura en Matemáticas estamos realizando el trabajo de grado *El infinitesimal, una noción de múltiples rostros*. En este identificamos una idea primigenia de la noción de infinitesimal en el contexto de la geometría euclidiana; en efecto, la proposición 16 del Libro III de *Elementos* revela la existencia del ángulo corneado, que tiene la peculiaridad de ser menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo dado. En el estudio de este ángulo nos encontramos con preguntas tales como: ¿en efecto es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo?, ¿este ángulo constituye una magnitud?, ¿cuál es su medida?, ¿es posible sumarlos? o ¿es posible bisecarlo? Las aproximaciones a las respuestas a estas preguntas serán discutidas someramente en este artículo.

INTRODUCCIÓN

Iniciemos con un breve cuento de nuestra autoría, que podría corresponder al título de este artículo.

> Érase una vez Euclidicia, una ciudad donde reinaba el orden y la tranquilidad. Sus habitantes, los rayos rectilíneos, eran seres bastante amorosos; permanecían en una constante búsqueda de relaciones y configuraciones sentimentales y geométricas. Sus más perfectos amoríos, que consistían en juntarse por sus vértices y formar ángulos rectilíneos, tenían como producto las bisectrices, seres especiales y perfectos que embellecían esta unión.
>
> Sin embargo, esto cambió cuando descubrieron que entre ellos había seres de otra especie, las sensuales curvas de las circunferencias, y que con ellas también podían establecerse el mismo tipo de relaciones, a condición de juntar su vértice con la curva y ser tangente a esta en ese sensual punto de contacto. Tal desliz geométrico-amoroso generaba seres conflictivos y realmente anormales, los ángulos corneados (aunque algunos preferían el calificativo “cornudos”). Como ellos eran fruto del amor que no obedecía a los principios éticos, un sector de la sociedad llegó a declarar que “los corneados eran menores que cualquier rectilíneo”; otro sector, más liberal, abogó por la idea de que sencillamente eran incomparables.

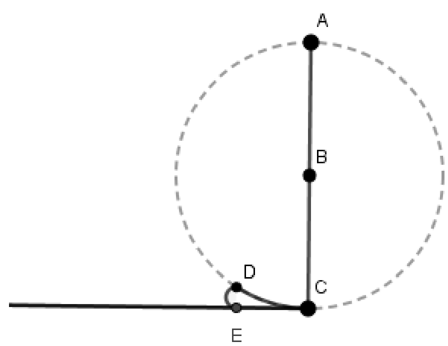
El fruto del amor de los corneados también era su bisectriz, pero era extraña y totalmente diferente a los amantes; no parecía provenir de ellos. Las malas lenguas alcanzaron a vociferar que eran curvas endemoniadas; las buenas lenguas advirtieron que eras preciosas curvas parabólicas. Pero, la verdadera trama de la historia comenzó cuando la sociedad abrió su mente y reconoció que también había relaciones afectivas entre circunferencias y que estas generaban otro tipo de ángulos corneados cuando ellas se juntaban tangencialmente; de tales relaciones nacían bellísimas curvas cónicas, con las que se formaban nuevos ángulos corneados y, con ello, la evolución de la especie.

EUCLIDES Y LOS ÁNGULOS CORNEADOS

El concepto de ángulo ha recorrido múltiples culturas y no ha sido siempre el mismo; su significado y utilidad han dependido de su ubicación en el transcurrir histórico. En un principio, como medio de comprensión del universo y la naturaleza y, en tiempos posteriores, estudiado por el placer que brinda la búsqueda de la verdad y la claridad del intelecto (Matos, 1990).

En el desarrollo conceptual de esta noción matemática se dio un momento histórico que estuvo impregnado de controversia. En el Libro III de *Elementos* de Euclides, específicamente la proposición 16[1], se alude a la existencia de un ángulo muy exótico y particular, un ángulo más pequeño que cualquier ángulo agudo dado, llamado "ángulo de contingencia" por el matemático alemán Jordanus Nemorarius (1225-1260). Este se forma a partir de una circunferencia y una tangente a esta en un punto dado (véase Figura 1).

Figura 1: $\sphericalangle DCE$ ángulo de contingencia, de contacto o corneado



[1] "La recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo". (Puertas, 1991, p. 198; el subrayado no está en el original)

En el Libro I de *Elementos* Euclides define un ángulo plano como "la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta" (Puertas, 1991, p. 110). Al respecto, es preciso aclarar que para Euclides los ángulos eran posibles también entre líneas curvilíneas y no solamente entre líneas rectas. Desde ese punto de vista, el ángulo de contingencia existe en el marco de la geometría euclidiana, ya que la definición lo admite.

ÁNGULO CORNEADO VERSUS ÁNGULO RECTILÍNEO

La comparación de un ángulo corneado con uno rectilíneo, explicitada en la proposición euclídea a la que se aludió antes, dio lugar a gruesas discusiones entre famosos matemáticos y filósofos de diferentes épocas, desde coetáneos de Euclides hasta nuestros tiempos, como Klein (1939)[2]. Para algunos la comparación sí es posible, pero esto lleva a inconsistencias lógicas e imprecisiones conceptuales. Al respecto, Boyer (1986) señala:

> Campano observó que, si uno compara el ángulo de contacto o de contingencia […] con el ángulo entre dos semirrectas, parece haber una clara inconsistencia con la proposición X. l de los *Elementos* de Euclides, que es la proposición fundamental del método de exhausción. (p. 333)

Examinemos esto con detenimiento. Para ello, consideremos la proposición X. l[3] de *Elementos*. Para nosotros es claro que si se aplicara esta proposición a los ángulos en cuestión, sí se obtendría un ángulo rectilíneo menor que un ángulo corneado, lo cual contradeciría lo señalado en la proposición 16 del Libro II; ello nos lleva a colegir, al igual que lo hizo Campano, que la proposición X. 1 exige que las magnitudes sean homogéneas y que los ángulos corneados y rectilíneos no lo son. Esto hace que tampoco, en el marco de la geometría euclidiana, sea coherente hablar de la razón entre las magnitudes de estos ángulos pues la definición 3 del Libro V exige la homogeneidad de estas.

Basándose en la definición 4 del Libro V de *Elementos*, Wallis (1685) argumenta la imposibilidad de comparar un ángulo rectilíneo agudo con este pecu-

[2] En la parte final de esta obra, Klein dedica varias páginas al Axioma de Arquímedes y a los ángulos corneados como ejemplo de un sistema de magnitudes excluidos por el axioma.

[3] "Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada". (Puertas, 1996, p. 12)

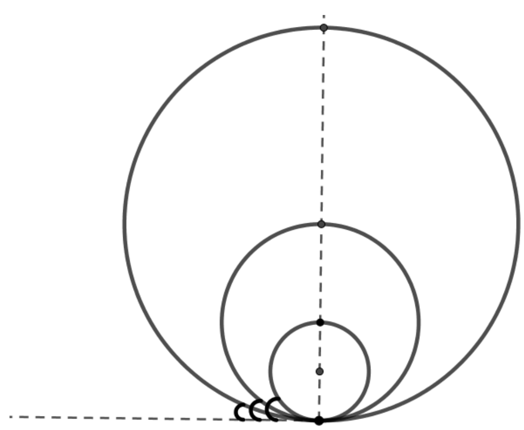
liar ángulo, ya que si se multiplica la medida de este por cualquier número positivo nunca se va a sobrepasar en tamaño un ángulo rectilíneo agudo dado; sostiene que esto implica un quiebre en lo que se conoce como el Axioma de Arquímedes o la propiedad arquimediana, dando vida a magnitudes de otra naturaleza.

MAGNITUD Y MEDIDA EN EL ÁNGULO CORNEADO

El desentrañamiento de la naturaleza de los ángulos corneados se abrió paso en la mente de muchos matemáticos. Desde distintos periodos históricos se intentó dar solución a preguntas como: ¿este ángulo conlleva una magnitud? y si así fuera, ¿cuál sería su medida? Como lo menciona Boyer (1949), Galileo, Wallis y otros matemáticos aseguraban que la medida de este ángulo era 0 y otros, como Hobbes, Newton y Leibniz, defendían lo contrario.

Wallis (1685) asegura que "el ángulo de contacto no es una magnitud, pero es a un ángulo real como 0 es a un número" (p. 71). En esta afirmación reconocemos que más que estar asintiendo que la medida de este ángulo era 0, lo que estaba planteando era una cierta "proporción" o analogía. Un razonamiento al otro extremo de la propuesta de Wallis fue hecho por el filósofo Hobbes (1956, como se citó en Bräting, 2012), quien consideraba que este ángulo sí era una magnitud porque era posible observarlo visualmente y aseguraba que el tamaño de este variaba dependiendo de qué tan grande o pequeña fuera la circunferencia (ver Figura *2*).

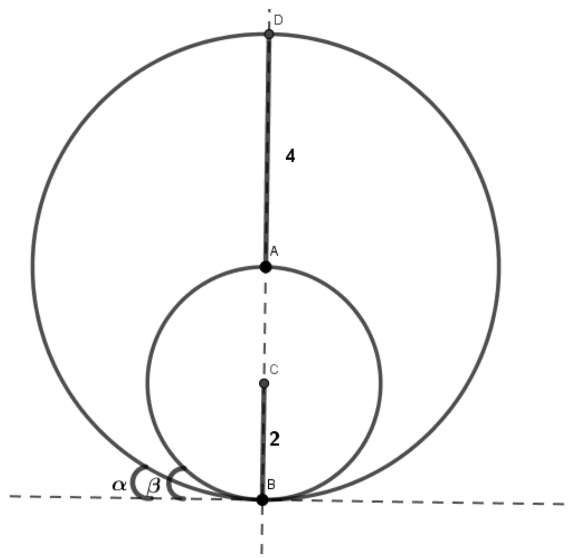
Figura 2: variación del tamaño del ángulo de contingencia según el tamaño de la circunferencia



Como se observa en la Figura 2, la abertura de este ángulo va a depender de la longitud del radio de la circunferencia; entre más pequeño sea el radio, mayor será este ángulo (Bair y Henry, 2008).

Al respecto, Jahnke (2003) propone que el recíproco del radio de la circunferencia puede servir como medida de los ángulos corneados, lo cual está directamente asociado con la curvatura de la circunferencia. Para ilustrarlo, tomemos dos circunferencias interiores tangentes y la tangente común a estas, una de ellas de radio 4 y la otra de radio 2 (véase Figura 3). Por la forma establecida de medición, la medida del ángulo asociado a la circunferencia de radio 4 (es decir, $\frac{1}{4}$) es la mitad de la medida del ángulo de radio 2 (es decir, $\frac{1}{2}$).

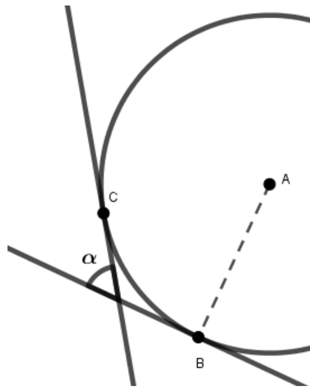
Figura 3: medida del ángulo corneado



Este procedimiento puramente aritmético entra en crisis cuando lo miramos desde un punto de vista geométrico, pues no parece existir una construcción que permita asegurar que el ángulo α es la mitad del ángulo β, o que $2\alpha = \beta$. En realidad, estamos enfrentados a magnitudes no arquimedianas que tienen un comportamiento algebraico diferente a las magnitudes geométricas arquimedianas tratadas en *Elementos*.

Ahora bien, como lo afirma Bräting (2012), la claridad del concepto de ángulo corneado (y de su medida) va a estar mediada por la definición de ángulo que construyamos o que tengamos presente. Como muestra de esto, Sonar (2020) plantea que “[s]i definimos los ángulos corneados como los ángulos entre las tangentes, entonces (la medida de) cada ángulo corneado es simplemente cero, y el sistema numérico arquimediano es nuevamente restaurado" (p. 40), (véase Figura 4).

Figura 4: ángulo α entre rectas tangentes, como ángulo de contingencia



Con base en lo anterior, y ligado al trabajo de grado en desarrollo, nuestra hipótesis respecto de la medida del ángulo corneado se expresa en la siguiente analogía: el ángulo corneado es al infinitesimal, como su medida es a los hiperreales.

SUMA DE ÁNGULOS CORNEADOS

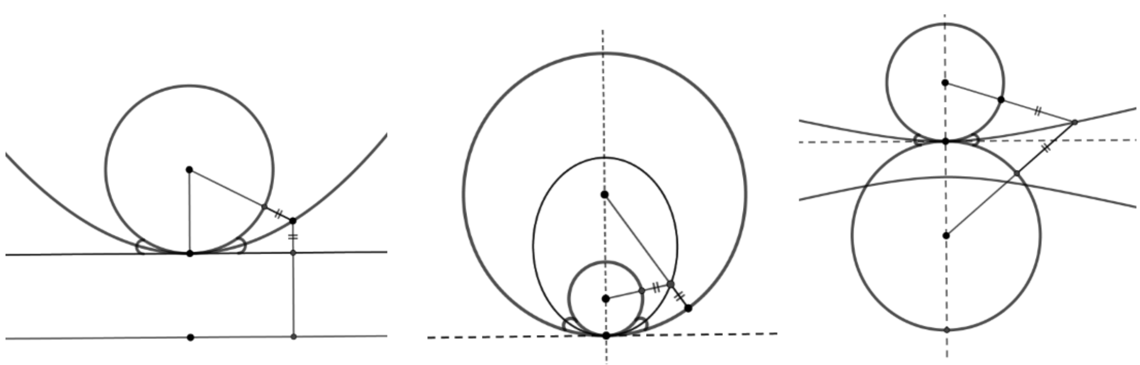
En la bibliografía consultada hasta el momento no hemos localizado algún procedimiento geométrico que pueda ser considerado como algoritmo para sumar ángulos corneados. No obstante, consideramos que sí puede existir o se puede llegar a crear. Esta consideración se basa en el reconocimiento de que en *Elementos* existen algoritmos para sumar longitudes de segmentos, superficies de regiones y amplitudes de ángulos rectilíneos. Precisamente, la suma de superficies lleva a reconocer al Teorema de Pitágoras como algoritmo para sumar superficies de cuadrados y a advertir que la cuadratura es una "operación" que genera cuadrados del mismo tamaño de una superficie poligonal. A partir de ello, conjeturamos sobre la posibilidad de "transformar" ángulos corneados en unos tales que sí se puedan sumar. También intuimos que si estudiamos la aritmética de los hiperreales e intentamos emularla en el ámbito geométrico, dispondremos de un algoritmo para sumar ángulos corneados y rectilíneos, sin caer en inconsistencias.

LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO CORNEADO

La bisectriz de cualquier ángulo rectilíneo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los rayos que lo conforman. En virtud de esto, podemos extrapolar esta idea y preguntarnos si los ángulos corneados tienen bisectriz. Al respecto, en el siglo V d. C. Proclo señaló que la bisección de ángulos no es un asunto para un tratado elemental, ya que incluso se cuestiona si la bisección de un ángulo es siempre posible; además agrega que se podría dudar de si es posible bisecar el ángulo corneado (Proclus, 1970, p. 271). Sin embargo, no realizó un desarrollo de esta idea.

Al respecto de los comentarios de Proclo, Koshkin (2020) expone el hallazgo e identificación de las bisectrices de tres tipos de ángulos corneados: el primero de ellos es el formado por la circunferencia y la tangente en un punto de esta; el segundo, formado por dos circunferencias tangentes interiores; y, el último, formado por dos circunferencias tangentes exteriores. La belleza de estos resultados recae en que las secciones cónicas resultan ser las bisectrices de estos ángulos (véase Figura *5*).

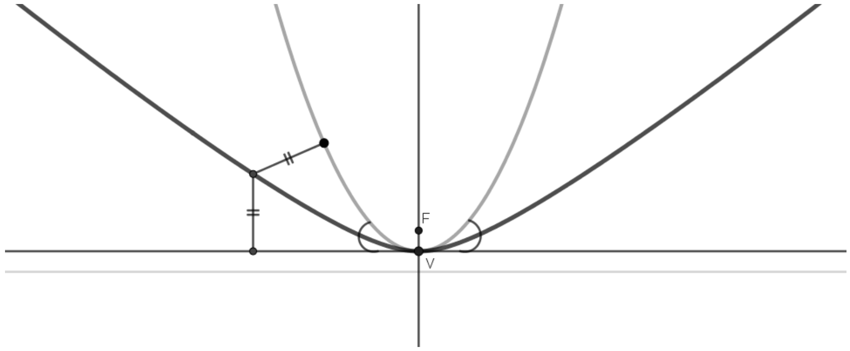
Figura 5: bisectriz para distintos tipos de ángulos corneados



a) Parábola como bisectriz **b) Elipse como bisectriz** **c) Hipérbola como bisectriz**

Finalmente, consideremos una curva diferente a la circunferencia: la parábola y su tangente también forman ángulos corneados. De esta manera, se abre la posibilidad de que estos tengan bisectriz. En la Figura 6 se muestra el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de la parábola y su tangente. Aunque, a primera vista, podríamos decir que la bisectriz es otra parábola o incluso una hipérbola, aún no tenemos las pruebas para afirmarlo de manera fehaciente, ya que podemos construirla y visualizarla, pero no logramos caracterizarla algebraicamente.

Figura 6: bisectriz de un ángulo corneado establecido por una parábola y su tangente



REFERENCIAS

Bair, J. y Henry, V. (2008). From mixed angles to infinitesimals. *The College Mathematics Journal*, *39*(3), 230-233.

Bräting, K. (2012). Visualizations and intuitive reasoning in mathematics. *Mathematics Enthusiast*, *9*(1 y 2), 1-18.

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications Inc.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* (Mariano Martínez Pérez, trad.) Madrid: Alianza Editorial S. A.

Jahnke, H. (Ed.) (2003). *A history of analysis*. *American Mathematical Society* & London Mathematical Society.

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry* (vol. 2, 3.ª ed., E. Hedrick y C. Noble trad.). New York: Macmillan.

Koshkin, S. (2020). Bisecting horn angles. *The College Mathematics Journal*, *51*(2), 124-131.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, *1*(1), 4-11.

Sonar, T. (2020). *3000 years of analysis: Mathematics in history and culture*. Alemania: Editorial Birkhäuser.

Puertas, M. L. (1991). *Elementos, Libros I-IV*. Madrid: Editorial Gredos.

Puertas, M. L. (1996). *Elementos, Libros X-XIII*. Madrid: Editorial Gredos.

Proclus, (1970). *A commentary on the First Book of Euclid's Elements* (G. Morrow trad.) Princeton: Princeton University Press.

Wallis, J. (1685). *A treatise of algebra.* Max Planck Institute for the History of Science, Library. http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:GK8U243K

SEMINARIO VIRTUAL SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO,

Enseñanza de la ciencia y la matemática

CONFERENCIA VIRTUAL

¿Infidelidades geométricas?: Aventuras del ángulo corneado

Expositor: Dr. Edgar Guacaneme y Harol Esteban Rodríguez
Institución: Universidad Pedagógica Nacional-Colombia

Replica: Dr. Miguel Delgado
Institución: Universidad Nacional de Educación a Distancia-UNED, España

Fecha: 21 de Abril 2023
Horario: 10:00 a 12:00 hrs CDMX

LIVE

zoom

SCAN ME

@MateduCinvestav

https://bit.ly/3J8oPXm

Cinvestav

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

UNED

UNAD
Universidad Nacional Abierta y a Distancia

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México

UFPS
Universidad

Universidad del Valle

SEMINARIO VIRTUAL SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO,

Enseñanza de la ciencia y la matemática

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
guacaneme@pedagogica.edu.co

Harol Esteban Rodríguez Delgado
herodriguezd@upn.edu.co

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Cinvestav

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA EDUCATIVA

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Introducción

1. El infinitesimal, una noción de múltiples rostros

2. Ángulo euclideano y la existencia del ángulo corneado

3. Controversias y claridades en torno a la naturaleza del ángulo corneado

4. Medir ángulos corneados: algunas propuestas para hacerlo

5. Bisectriz de un ángulo corneado: perspectiva griega y geometría conforme

6. Ideas generales sobre las construcciones de las bisectrices

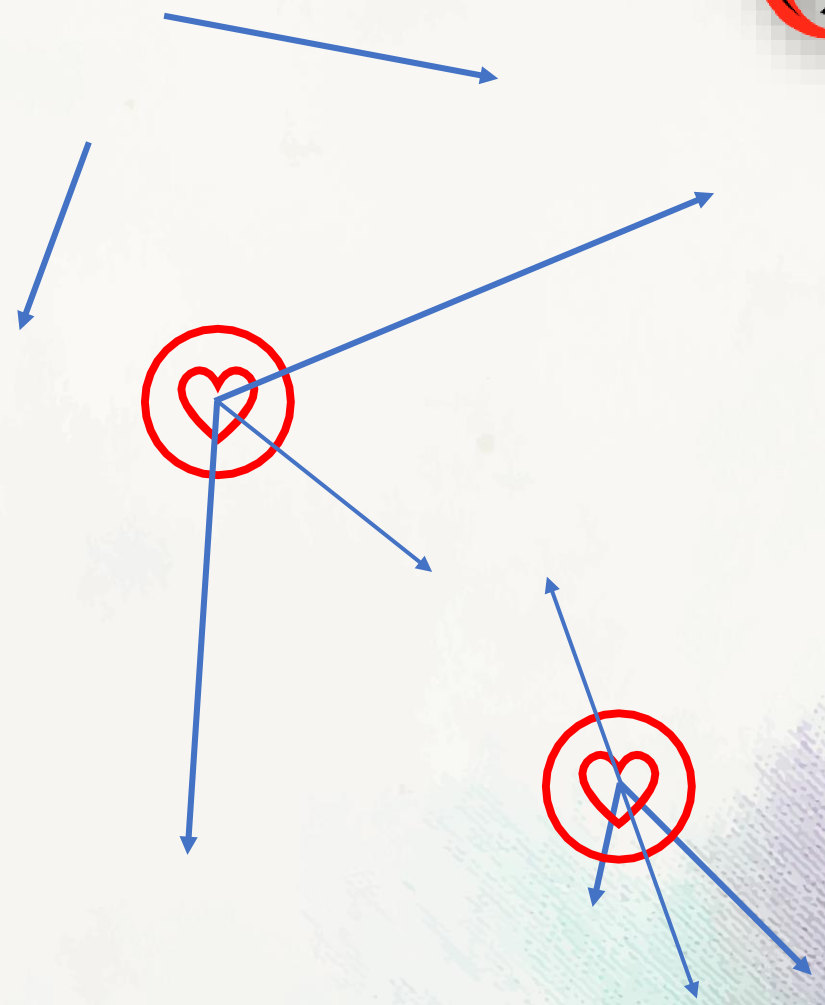
7. Conclusiones

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Érase una vez Euclidicia, una ciudad donde reinaba el orden y la tranquilidad. Sus habitantes, los rayos rectilíneos, eran seres bastante amorosos; permanecían en una constante búsqueda de relaciones y configuraciones sentimentales y geométricas.

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Sus más perfectos amoríos, que consistían en juntarse por sus vértices y formar ángulos rectilíneos, tenían como producto las bisectrices, seres especiales y perfectos que embellecían esta unión.



¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Sin embargo, esto cambió cuando descubrieron que entre ellos había seres de otra especie, las sensuales curvas de las circunferencias, y que con ellas también podían establecerse el mismo tipo de relaciones, a condición de juntar su vértice con la curva y ser tangente a esta en ese sensual punto de contacto.

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Tal desliz geométrico-amoroso generaba seres conflictivos y realmente anormales, los ángulos corneados (aunque algunos preferían el calificativo "cornudos"). Como ellos eran fruto del amor que no obedecía a los principios éticos, un sector de la sociedad llegó a declarar que "los corneados eran menor que cualquier rectilíneo"; otro sector, más liberal, abogó por la idea de que sencillamente eran incomparables.

¿Infidelidades Geométricas?: Aventuras del ángulo corneado

El fruto del amor de los corneados era también su bisectriz, pero era extraña y totalmente diferente a los amantes; no parecían haber provenido de ellos. Las malas lenguas alcanzaron a vociferar que eran curvas endemoniadas; las buenas lenguas advirtieron que eras preciosas curvas parabólicas.

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Pero, la verdadera trama de la historia comenzó cuando la sociedad abrió su mente y reconoció que también había relaciones afectivas entre circunferencias y que estas generaban otro tipo de ángulos corneados cuando ellas se juntaban tangencialmente; de ello nacían bellísimas curvas cónicas, con las que se formaban nuevos ángulos corneados y, con ello, la evolución de la especie.

(Guacaneme & Rodríguez, 2022)

¿Infidelidades Geométricas?: Aventuras del ángulo corneado

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

EL INFINITESIMAL, UNA NOCIÓN DE MÚLTIPLES ROSTROS

Harol Esteban Rodríguez Delgado
Código estudiantil: 2018140068

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al Título de Licenciado en Matematicas

Director: Édgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2023

Asesoria de trabajo de grado

HAROL ESTEBAN RODRIGUEZ DELGADO
Para: EDGAR ALBERTO GUACANEME SUAREZ
Jue 05/08/2021 20:29

Cordial Saludo Estimado profesor Edgar Guacaneme,

Soy Harol Esteban Rodríguez Delgado, estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN. Me encuentro en séptimo semestre y deseo comenzar a redactar mi anteproyecto de grado.

Me gustaría hacer un trabajo de grado sobre los infinitesimales, su evolución histórica desde los griegos hasta el análisis no estándar que propone Abraham Robinson, en el cual fundamenta de man

Expuesto lo anterior,

Quedo atento a su r

sin más,

Harol E. Rodriguez D.
Universidad Pedagógi
Est.lic.matematicas

RE: Asesoria de trabajo de grado

EDGAR ALBERTO GUACANEME SUAREZ
Para: HAROL ESTEBAN RODRIGUEZ DELGADO
Vie 06/08/2021 8:14

Cordial saludo.

Recibo con beneplácito tu mensaje; siempre es grato encontrar personas que se interesen por la Historia de las Matemáticas.

Con mucho gusto podemos iniciar a trabajar en el diseño de la propuesta de trabajo de grado. Al respecto te propongo que escribas un breve documento en el que sintetices en qué quieres trabajar, por qué quieres trabajar en ello, qué esperas lograr con el trabajo y cómo crees que se pueda llevar a cabo el trabajo. Una vez dispongas de dicho documento me avisas y definimos un encuentro virtual para conversar a partir de tus ideas.

Seguimos en contacto.

Dr. Edgar Alberto Guacaneme Suárez

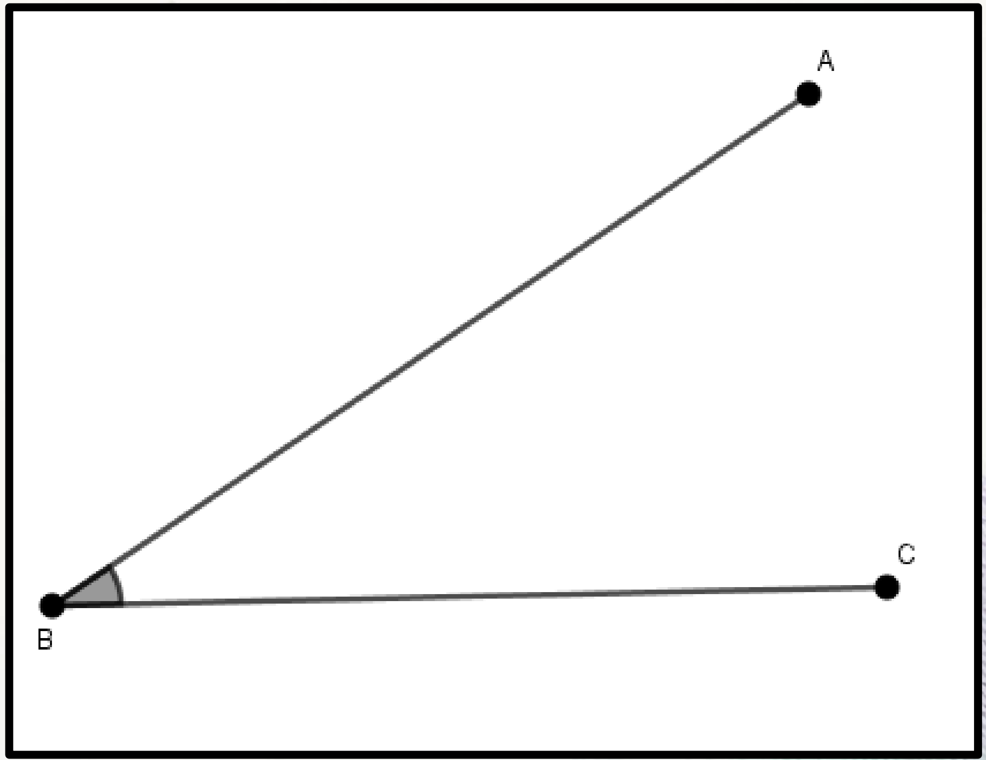
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Facultad de Ciencia y Tecnología - Departamento de Matemáticas
Calle 72 # 11-86 (Bogotá, D.C., - Colombia) Edificio B, Oficina 306.
Código postal 110221

¿Infidelidades Geométricas?: Aventuras del ángulo corneado

Según Euclides, ¿qué es un ángulo?

Libro I. Def.VIII: un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.



Según Euclides, ¿qué es un ángulo?

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

EL CURRÍCULO PROPUESTO EN TEXTOS ESCOLARES EN TORNO A LA MAGNITUD AMPLITUD ANGULAR

Tesis de Maestría en Docencia de la Matemática

Sandra Rocío Suavita Menjura

Director
Edgar Alberto Guacaneme Suárez

1

2

ACTIVIDADES

2.2 Mirada a la amplitud en *Elementos* de Euclides

Categoría	Sección
Significados del concepto	Definición: (8), (9) y (10) Postulado: (5) Teorema: (4), (11), (13) y (14)
Igualdad entre ángulos	Definición: (10) Postulado: (4) Noción común: (1) Teorema: (4), (5), (6), (7), (8), (9), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (23), (24), (26), (27), (28), (29), (30), (33), (34), (35) y (47)
Comparación entre ángulos	Definición: (11) y (12) Postulado: (5) Noción común: (5) Teorema: (7), (14), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (24), (25), (28), (29)
Suma entre ángulos	Postulado: (5) Noción común: (2) Teorema: (5), (7), (9), (13),(14), (15), (17), (18), (20), (28), (29), (32), (34),(46) y (47)
Construir y copiar ángulos	Teorema (11), (24), (44), (45) y (46) (23), (31), (42) y (43)
Dividir ángulos	Teorema (9), (10) y (16)

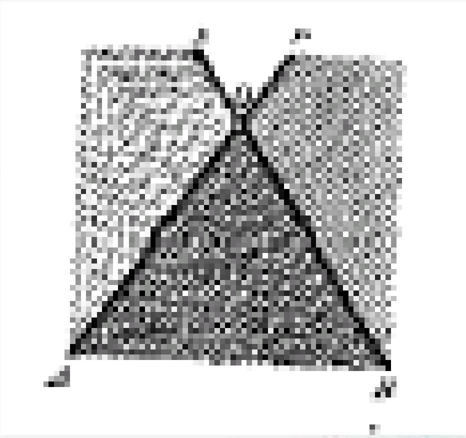
12

Según Euclides, ¿qué es un ángulo?

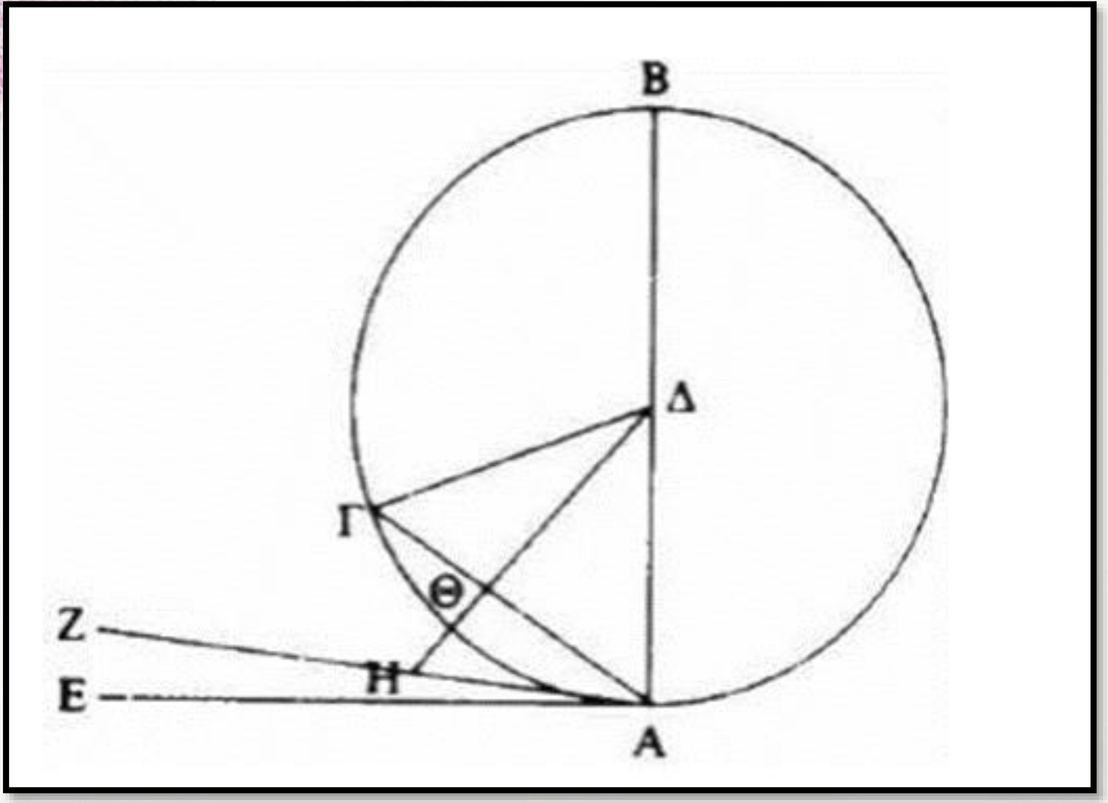
Libro I. Def. IX:

"Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo." (p. 17)

•Significado del concepto atendiendo a la región comprendida por las líneas.



Ángulos corneados en *Elementos* de Euclides



Elementos de Euclides (Puertas, 1996)

Proposición III-16: "La recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y **el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo**"

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

Un mismo objeto, diferentes nombres

Ángulo corneado

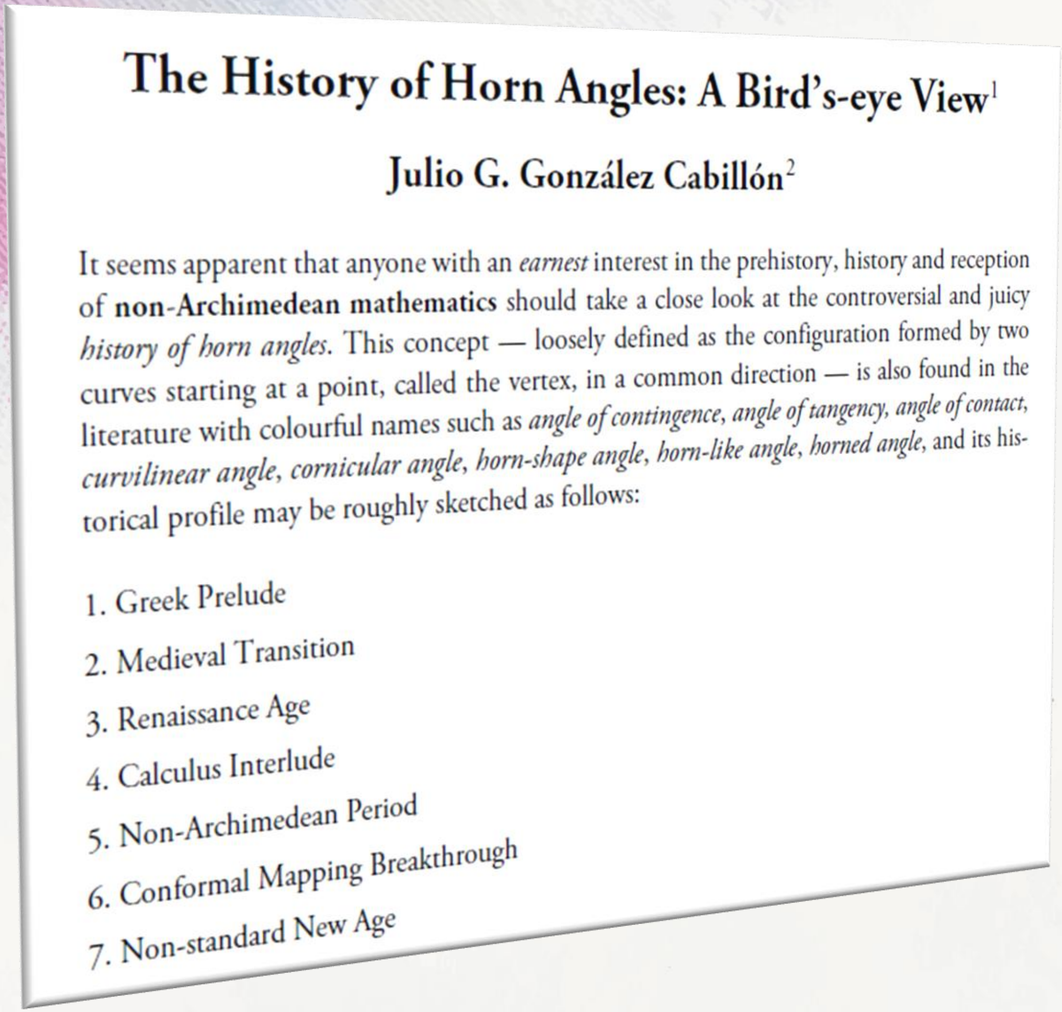
Ángulo de tangencia

Ángulo de contacto

Ángulo curvilíneo

Ángulo de contingencia

Discusión sobre su naturaleza



The History of Horn Angles: A Bird's-eye View[1]

Julio G. González Cabillón[2]

It seems apparent that anyone with an *earnest* interest in the prehistory, history and reception of **non-Archimedean mathematics** should take a close look at the controversial and juicy *history of horn angles*. This concept — loosely defined as the configuration formed by two curves starting at a point, called the vertex, in a common direction — is also found in the literature with colourful names such as *angle of contingence*, *angle of tangency*, *angle of contact*, *curvilinear angle*, *cornicular angle*, *horn-shape angle*, *horn-like angle*, *horned angle*, and its historical profile may be roughly sketched as follows:

1. Greek Prelude
2. Medieval Transition
3. Renaissance Age
4. Calculus Interlude
5. Non-Archimedean Period
6. Conformal Mapping Breakthrough
7. Non-standard New Age

Cualidad

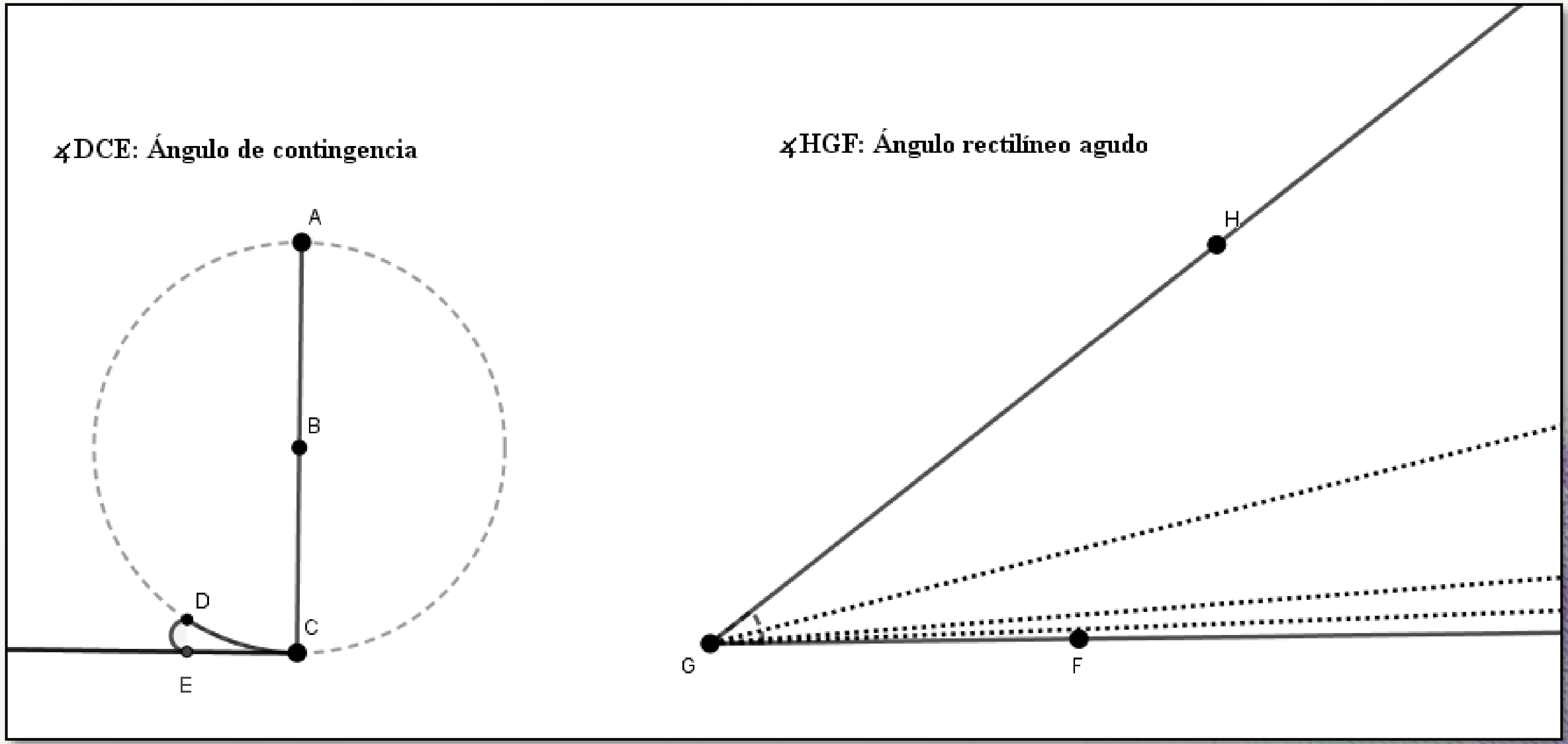
Relación

Cantidad

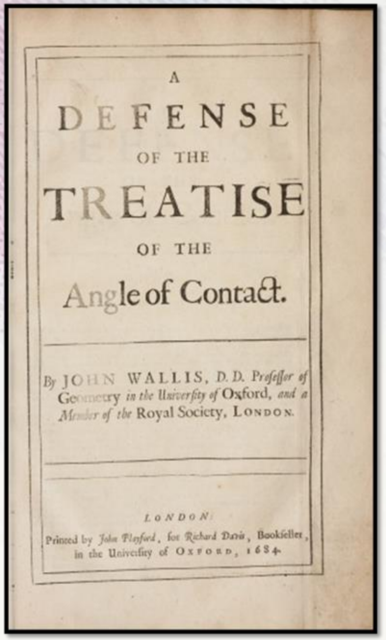
Cabillon, J. (1999). The History of Horn Angles: A Bird's-eye View, parts 1–3, *Math Forum Archives: Historia Mathematica*

Ángulo corneado versus ángulo rectilíneo: magnitudes de diferente naturaleza

Campanus de Novara (1205-1296)



La naturaleza del ángulo corneado

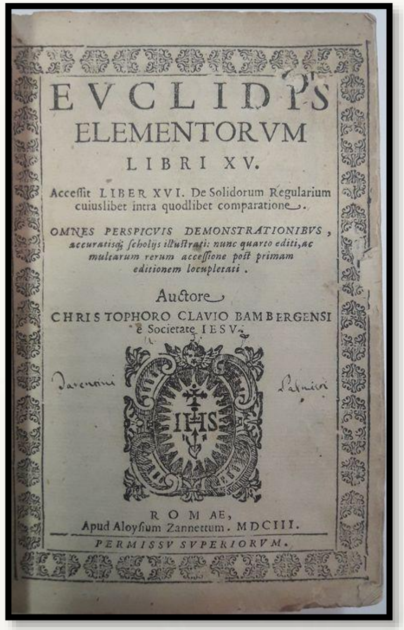

A
DEFENSE
OF THE
TREATISE
OF THE
Angle of Contact.

By JOHN WALLIS, D.D. Professor of Geometry in the University of Oxford, and a Member of the Royal Society, LONDON.

LONDON:
Printed by John Playford, for Richard Davis, Bookseller, in the University of OXFORD, 1684.

"El ángulo de contacto no es una magnitud, pero es a un ángulo real como 0 es a un número" (Wallis,1685)

No es una magnitud	Es una magnitud
	Clavius (1537—1612)
Wallis (1616—1703)	Leibniz (1646-1716)
Peletier (1517—1582)	Newton (1642-1727)
Galileo (1564—1642)	Hobbes (1588-1679)


EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
Accessit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; scholijs illustrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.
Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI e Societate IESV.
ROMAE,
Apud Aloysium Zannettum. MDCIII.
PERMISSV SVPERIORVM.

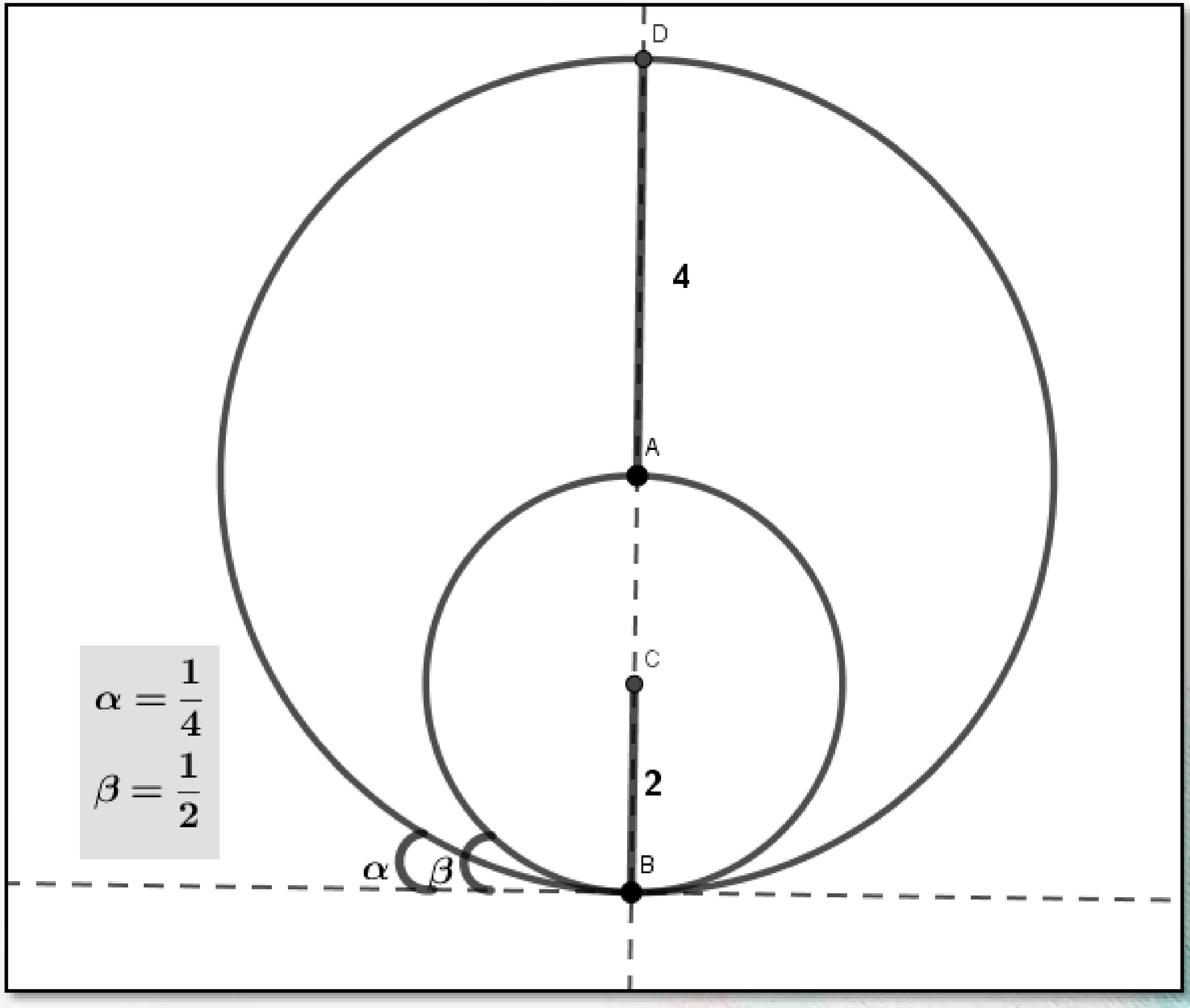
"Si el ángulo de contacto fuera nulo, Euclides no hubiera demostrado que este es menor que cualquier ángulo agudo" (Clavius,1589)

¿Infidelidades Geométricas?: Aventuras del ángulo corneado

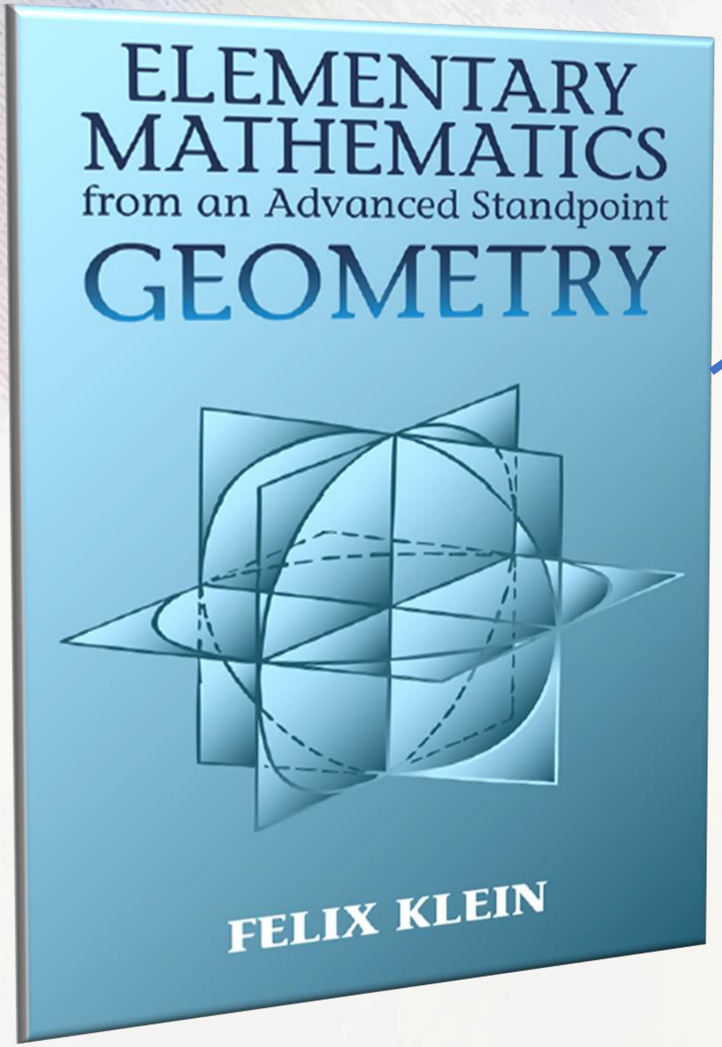
Medida del ángulo corneado

Isaac Newton (1642-1727)

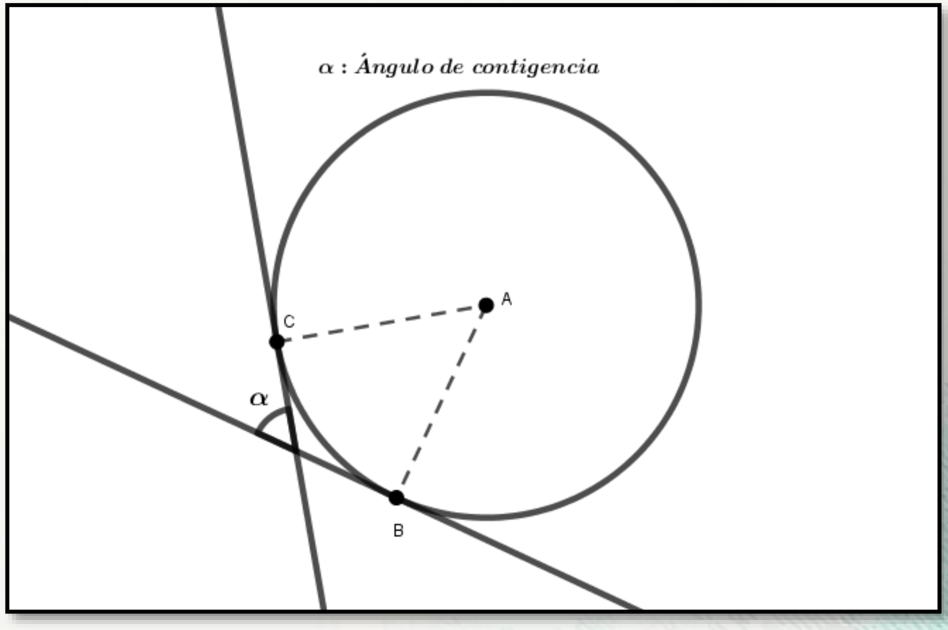
Gottfried Leibniz (1646-1716)



Medida del ángulo corneado

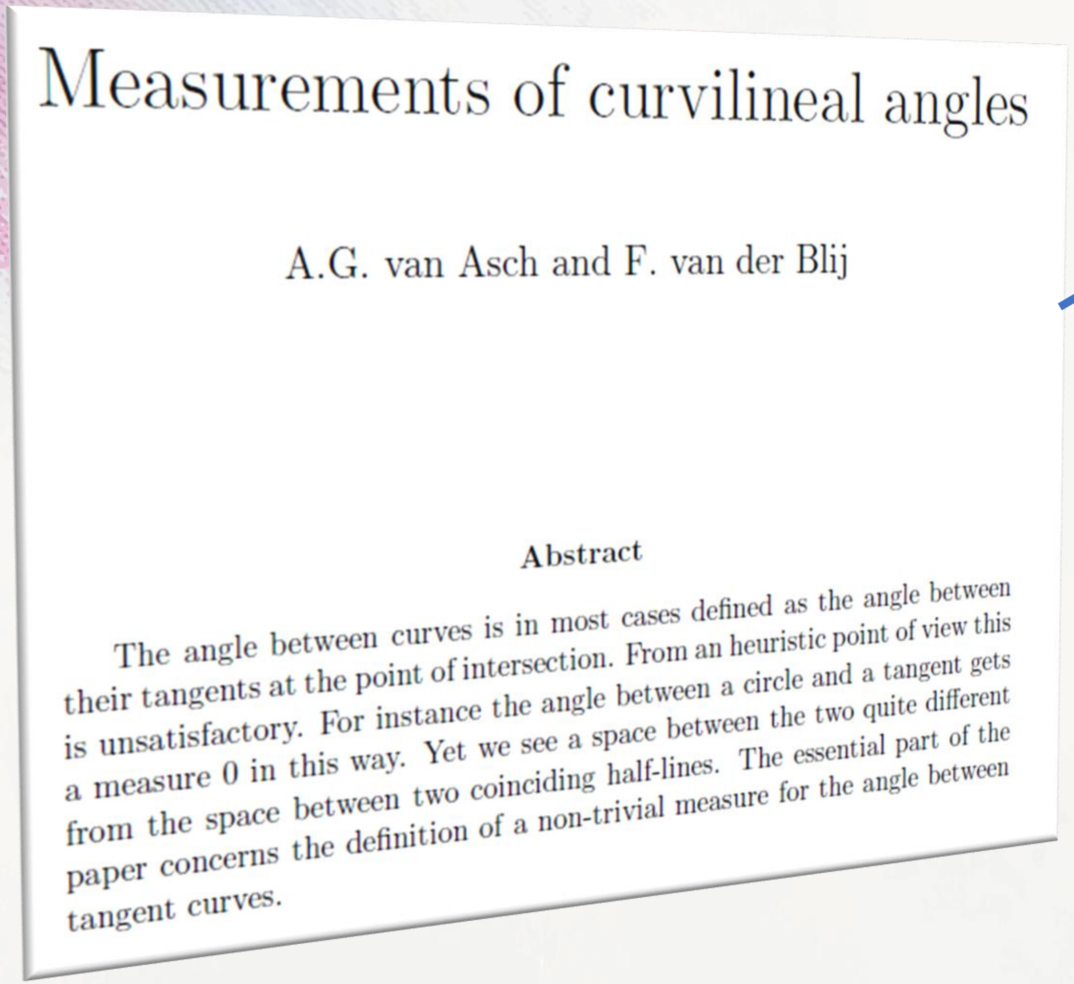


"Actualmente, cuando hablamos de ángulos, nosotros pensamos en **ángulos entre rectas**; y particularmente, por **ángulo entre dos curvas**, nosotros entendemos ángulo entre sus tangentes" (Klein, 1939)



Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry* (vol. 2, 3.a ed., E. Hedrick y C. Noble trad.). New York: Macmillan.

Algunas propuestas para medir ángulos corneados

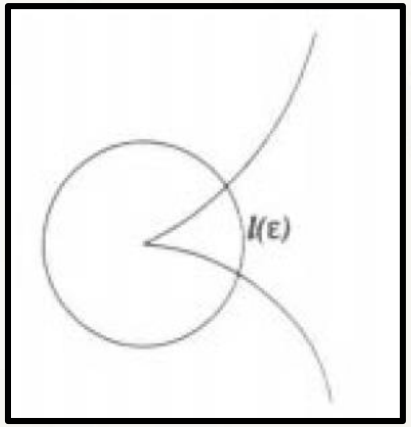

Measurements of curvilineal angles

A.G. van Asch and F. van der Blij

Abstract

The angle between curves is in most cases defined as the angle between their tangents at the point of intersection. From an heuristic point of view this is unsatisfactory. For instance the angle between a circle and a tangent gets a measure 0 in this way. Yet we see a space between the two quite different from the space between two coinciding half-lines. The essential part of the paper concerns the definition of a non-trivial measure for the angle between tangent curves.

Un ángulo dirigido es un par ordenado (F_1, F_2) de curvas que parten del mismo vértice



$$\varphi(\varepsilon) = \frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Geometría diferencial

van Asch, A., van der Blij, F. (1995). Measurements of curvilineal angles. *Bull. Belg. Math. Soc.-Simon Stevin*. 2(5): 573–589.

Propiedades de la medida propuesta

μ es una medida si:

1. (F_1, F_2) y (G_1, G_2) son ángulos congruentes entonces $\mu(F_1, F_2) = \mu(G_1, G_2)$,
2. Es aditivo, es decir, $\mu(F_1, F_2) + \mu(F_2, F_3) = \mu(F_1, F_3)$
3. $\mu(F, F) = 0$
4. $\mu(F_1, F_2) = -\mu(F_2, F_1)$

$$\mu(F_1, F_2) = \frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

van Asch, A., van der Blij, F. (1995). Measurements of curvilineal angles. *Bull. Belg. Math. Soc.-Simon Stevin*. 2(5): 573–589.

Angles corniculaires et nombres superréels

J. Bair V. Henry

Abstract

Following the works of van Asch and van der Blij, we show that the horn angles introduced by Euclide can be measured by superreal numbers as Tall defined them. We deduce from this the possibility to estimate, on the one hand, the ratio of the measures of a horn angle and of the mixed angle formed by a spiral of Archimede and, on the other hand, the ratio of the measures of two horn angles.

Números superreales

Generalización a ángulos mixtilíneos

Asignación de la medida de un ángulo mixtilíneo a un número superreal

$$\alpha = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varepsilon^k.$$

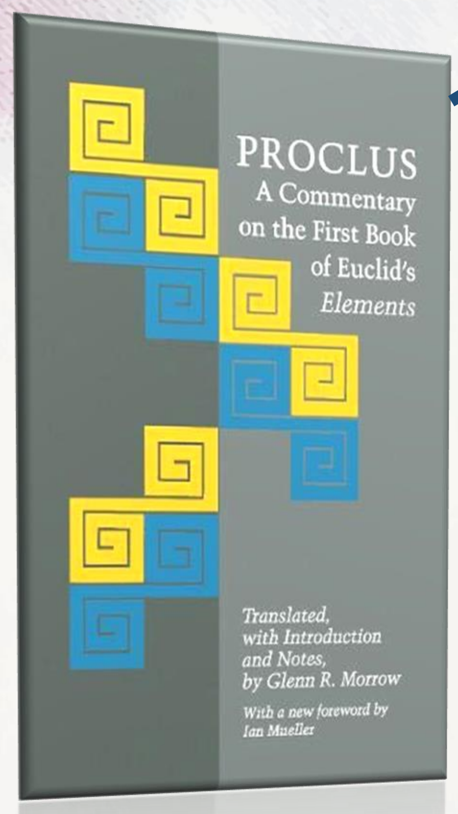
$$\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \varepsilon^j,$$

Bair, J., Henry, V. (2008). Angles corniculaires et nombres superréels. *Bull. Belg. Math. Soc.-Simon Stevin.15(1): 77–86.*

¿Infidelidades Geométricas?: Aventuras del ángulo corneado

La bisectriz de un ángulo corneado

Proclo (412-485)



La bisección de ángulos no es un asunto para un tratado elemental, ya que incluso se cuestiona si la bisección de un ángulo es siempre posible.

Bisecting Horn Angles

Sergiy Koshkin

Sergiy Koshkin (koshkins@uhd.edu, MR ID 656404, ORCID 0000-0001-8264-3701) is an associate professor of mathematics at the University of Houston-Downtown. His research is in analysis and geometry, and he loves all kinds of geometry, classical, differential, algebraic, recreational, etc. He is also fond of history of mathematics, and good literature and film.

Koshkin, S. (2020). Bisecting horn angles. *The College Mathematics Journal*, *51*(2), 124-131.

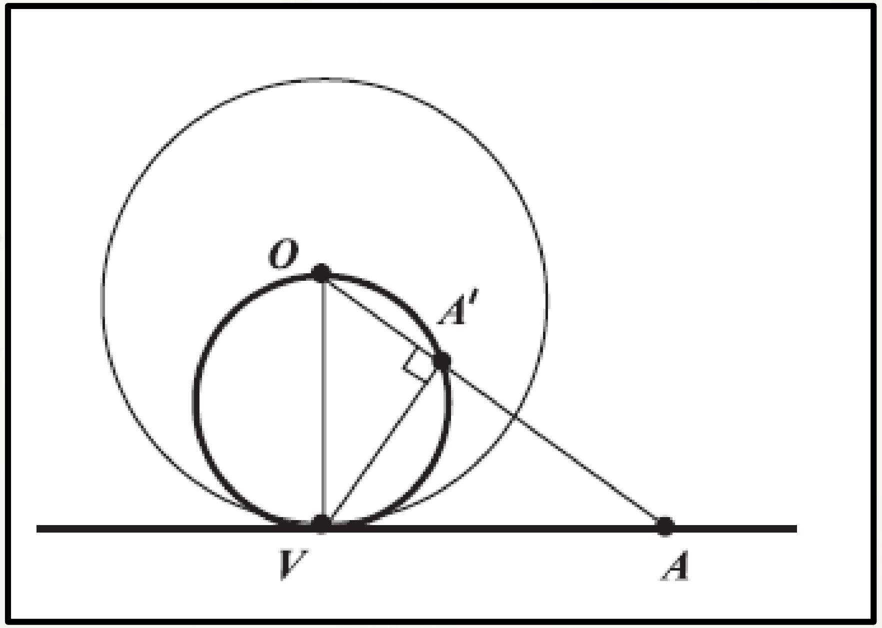
Bisección conforme

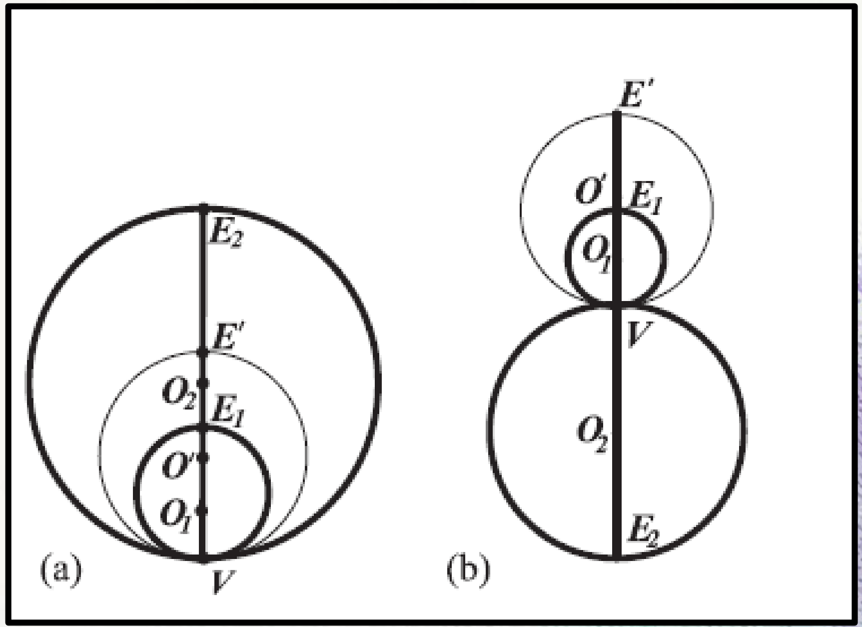
¡Las bisectrices de los ángulos curvilíneos ya no son las cónicas!

¿Y entonces qué resultan ser?

Edward Kasner (1878-1955)

Geometría conforme

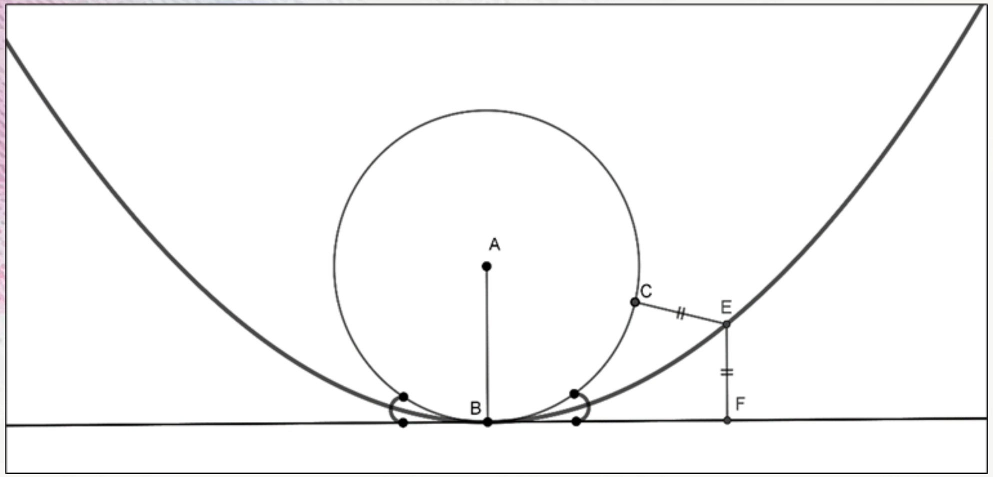




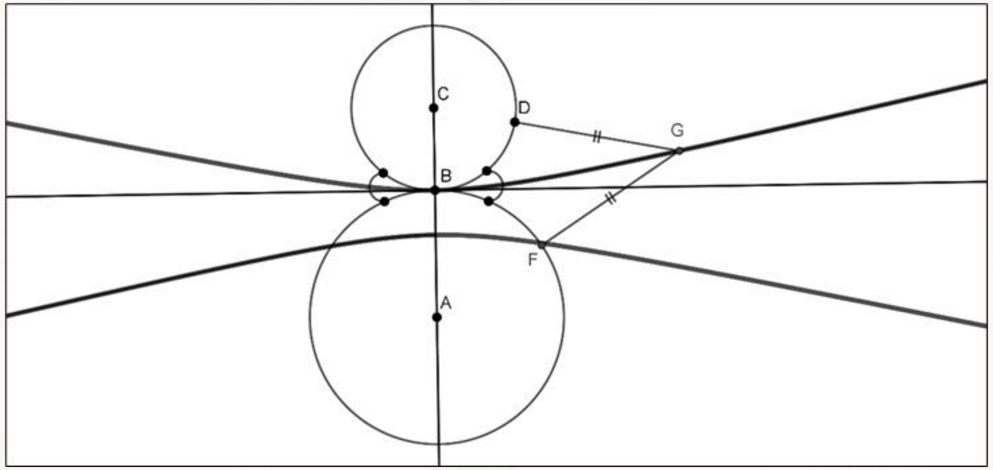
Koshkin, S. (2020). Bisecting horn angles. *The College Mathematics Journal*, *51*(2), 124-131.

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

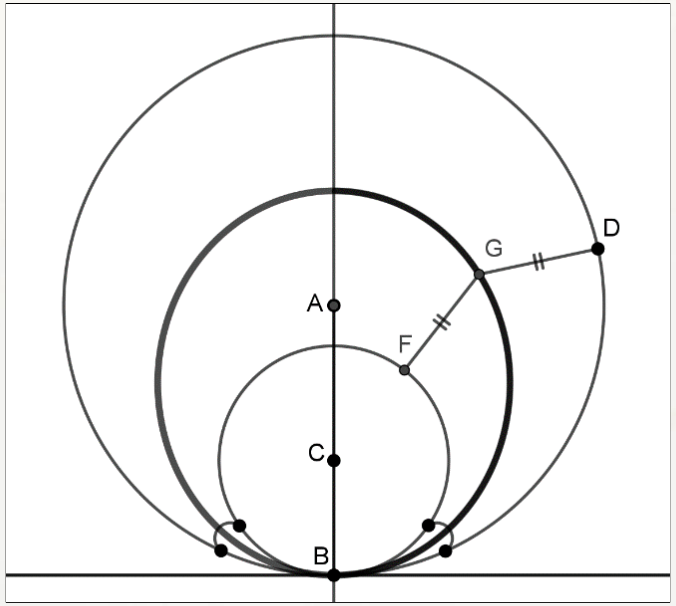
Cónicas como bisectrices



Parábola bisectriz

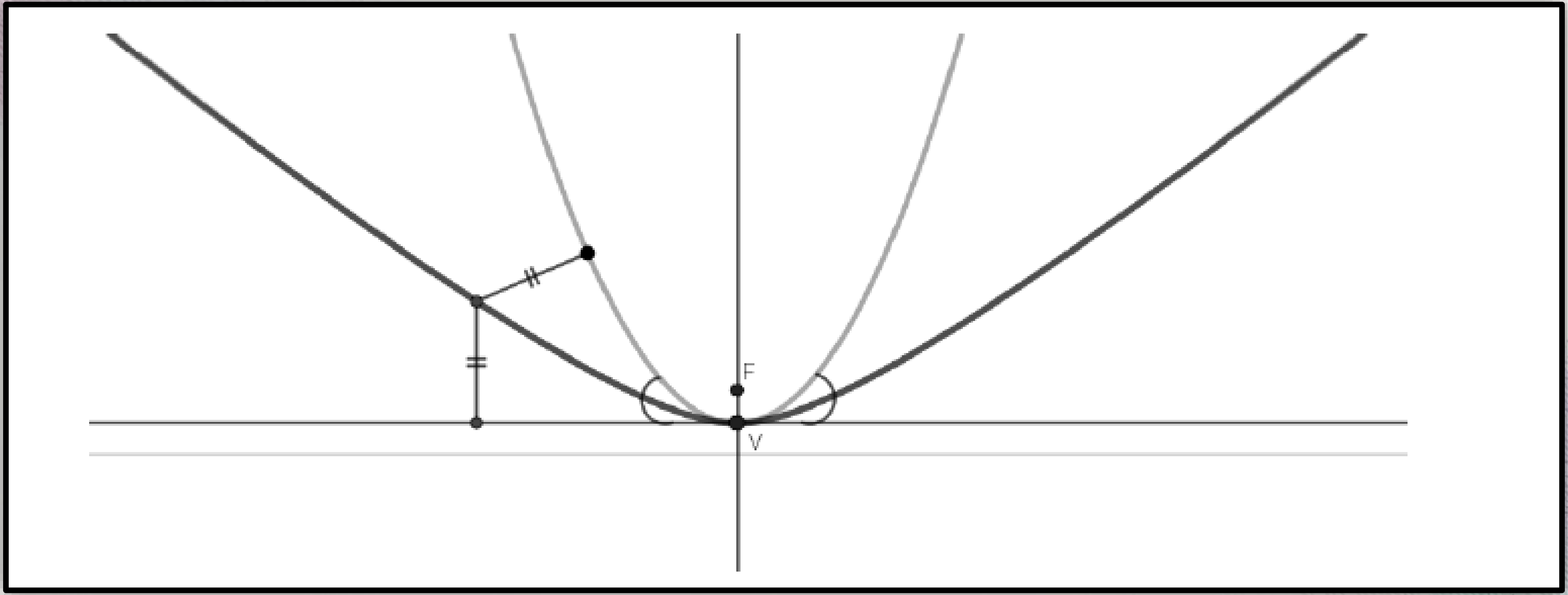


Hipérbola bisectriz



Elipse bisectriz

Bisectrices de otros ángulos corneados



¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: Aventuras del ángulo corneado

- Los ángulos corneados tuvieron una primera aparición en *Elementos* de Euclides. Sin embargo, en su devenir histórico, han sido y fueron la causa de gruesas discusiones entre matemáticos y filósofos, que intentaron darle claridad a su naturaleza y superar las paradojas a las que estos conducían.
- Los ángulos corneados son una clara evidencia de las magnitudes infinitesimales, ya que tienen la característica de ser menor que cualquier ángulo agudo dado, pero no nulo.
- Haciendo alusión a la idea de Proclo; "medir ángulos corneados no es un asunto para un tratado elemental".
- La bisectriz de un ángulo corneado es una nueva perspectiva de abordar y entender las secciones cónicas.

SEMINARIO VIRTUAL SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO,

Enseñanza de la ciencia y la matemática

¿Infidelidades Geométricas?: Aventuras del ángulo corneado

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
guacaneme@pedagogica.edu.co

Harol Esteban Rodríguez Delgado
herodriguezd@upn.edu.co

Cinvestav

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA EDUCATIVA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

XXIII Congreso Colombiano de Matemáticas 2023

Bogotá D.C., 5 de mayo de 2023

Estimado(as),

HAROL RODRIGUEZ

Es para mí un placer informarle que su propuesta de presentación para el XXIII Congreso Colombiano de Matemáticas, UTPC, TUNJA 2023, titulada:

EL INFINITESIMAL, UNA NOCIÓN DE MÚLTIPLES ROSTROS

en modalidad DIVULGACION ha sido aceptada.

Más adelante podrá consultar la programación de su ponencia en la página del congreso: www.scm.org.co/ccm2023, agradezco su interés en el Congreso y espero poder contar con su participación.

Cordial saludo,

Alf Onshuus
Presidente
Sociedad Colombiana de Matemáticas
presidente@scm.org.co