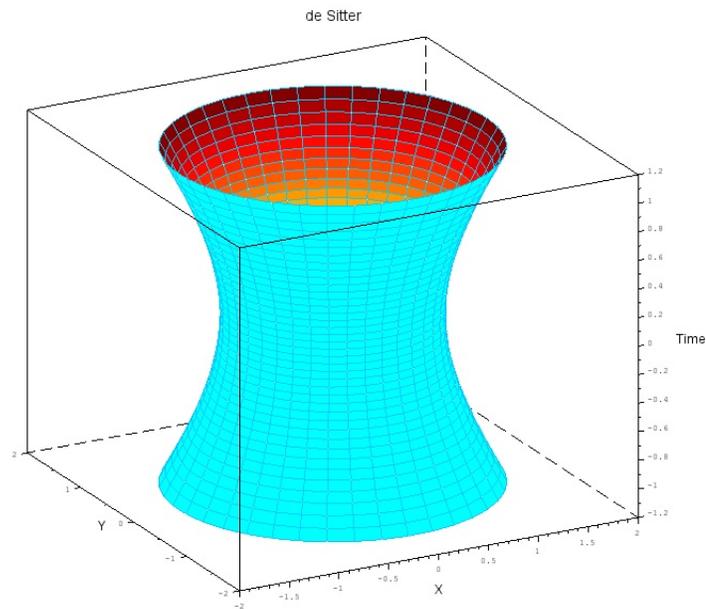


# Análisis geométrico del modelo cosmológico de de Sitter



Tomás David Campo Martínez

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física  
Bogotá, D.C, Colombia

2022

# Análisis geométrico del modelo cosmológico de de Sitter

**Tomás David Campo Martínez**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Licenciado en Física**

Director(a):  
M.Sc. Yecid Javier Cruz Bonilla

Línea de Investigación:  
Enseñanza de la Física y su relación física-matemática  
Semillero de Investigación:  
Semillero Estudiantil de Investigación en Física-Matemática

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física  
Bogotá, D.C, Colombia  
2022

## Dedicatoria

Dedico este trabajo principalmente a mi madre, Vanesa Martínez, quien contribuyó a mi formación como ser humano con todo su esfuerzo, lo que me permite estar más cerca de la persona que quiero llegar a ser. Dedico este trabajo a mi hijo, Enam Campo, quien me llenó de motivación e inspiración para continuar retándome intelectualmente en el paso de esta carrera. Dedico este trabajo a mi perrita, Kika, quien me acompañó fielmente durante el desarrollo de este documento y quien me hizo entender que todos los asuntos humanos tienen una solución, siempre y cuando se quiera encontrar.

El pensamiento es solo un destello entre dos largas noches, pero este destello lo es todo.

Henri Poincaré

# Agradecimientos

Agradezco, de manera exclusiva, a mi asesor de trabajo de grado, Yecid Javier Cruz Bonilla, Profesor del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional, quien siempre compartió abiertamente su experiencia y sus grandes conocimientos conmigo, guiándome apropiadamente por el camino de la investigación. Es para mí un honor el haber trabajado con él, pues el tener intereses afines nos permitió ser muy creativos en los espacios asesorías. Siempre me trató como a un igual y con mucho respeto, lo que conllevó a que me sintiera como un profesional sin siquiera terminar la carrera. Larga vida a mi Profesor.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Capítulo 1</b>	<b>3</b>
1.1 Álgebra . . . . .	3
1.2 Variedades . . . . .	9
1.2.1 Variedades topológicas y diferenciables . . . . .	9
1.2.2 Espacios tangentes . . . . .	13
1.3 Cálculo en variedades . . . . .	15
<b>2 Capítulo 2</b>	<b>20</b>
2.1 Estructuras matemáticas que subyacen a la teoría especial de la relatividad .	20
2.2 Elementos de la Teoría General de la Relatividad y del modelo estándar de la Cosmología . . . . .	26
<b>3 Capítulo 3</b>	<b>30</b>
3.1 Solución de las ecuaciones de Killing para el Universo de de Sitter . . . . .	30
<b>4 Reflexiones finales y conclusiones</b>	<b>43</b>

# Introducción

En el presente trabajo de grado, se abordará una solución global de tipo de *de Sitter* desde un análisis geométrico, con el propósito de estudiar sus simetrías, las cuales conducirán a cantidades físicas conservadas en un universo como este.

Para el año 1915 Albert Einstein (1879 – 1955) publica un artículo titulado *Die Feldgleichungen der Gravitation* en el cual muestra de forma definitiva las ecuaciones de campo de la teoría general de la relatividad. Las ecuaciones de campo son un conjunto de diez ecuaciones diferenciales<sup>1</sup> cuya solución describe la dinámica del espacio-tiempo, que en este contexto es el fenómeno de la gravitación. En el año 1917 Einstein publica una solución global de las ecuaciones de campo donde describe a un Universo no vacío y estático, conocido como *universo cilíndrico de Einstein*. En este mismo año, el matemático Willem de Sitter (1872 – 1934), por su cuenta, publica una solución global en la cual describe a un Universo vacío y en expansión acelerada, posteriormente conocido como *Universo de de Sitter*. Con estos dos sucesos, se originó la *cosmología relativista*.

El tema principal está basado en una solución desarrollada bajo las condiciones dadas por de Sitter, pero bajo el marco del *modelo estándar de la Cosmología*, que es una colección de modelos de Universo que obedecen datos observacionales[22]. Al ser el Universo de de Sitter tan exótico, da pie a diferentes problemas, en particular con relación en que si no hay masa, no existe la estructura de la materia y, debido a esto, no hay emisores de luz. Como consecuencia, tampoco hay interacciones fundamentales que afecten el estado de movimiento de algún cuerpo secundario o que causen el confinamiento del mismo, por lo cual se hace bastante interesante entender cómo emergen las leyes de conservación de las cantidades físicas más fundamentales, concretamente, el *momentum lineal*, el *momentum angular* y la *energía*.

Naturalmente, surge una pregunta muy general: *¿Cómo deducir las cantidades físicas fundamentales que se conservan en el Universo de de Sitter?*

Esta pregunta induce un panorama bastante amplio en cuanto a la búsqueda de su respuesta, razón por la cual, el problema se simplifica en conocer las simetrías de este Universo para dar unos primeros indicios a tal respuesta. Este problema, entonces, se trabaja desde un corte netamente disciplinar, así que será abordado mediante un enfoque geométrico, ya que en la Física actual hay una fuerte tendencia en encontrar simetrías físicas que se derivan de estructuras matemáticas simétricas, lo cual implica obtener cantidades conservadas. Entonces, es posible deducir las propiedades físicas más fundamentales del Universo de de Sitter con el

---

<sup>1</sup>Considerando tensores de segundo orden simétricos.

cálculo de las simetrías, mediante la solución de una ecuación diferencial conocida como *la ecuación de Killing*, y la solución es un campo vectorial que apunta en la dirección de tales simetrías.

## Problema y objetivos del trabajo de grado

### Planteamiento problema

Para conocer la dirección de las simetrías del Universo de de Sitter se plantea encontrar los vectores de Killing asociados a este modelo cosmológico. Entonces, debido a esto, surge la pregunta que motiva el desarrollo de este trabajo de grado:

¿Cómo a través de un análisis de carácter geométrico se pueden encontrar las simetrías del modelo cosmológico de de Sitter?

### Objetivos

#### Objetivo general

Encontrar los vectores de Killing asociados al modelo cosmológico de de Sitter mediante un análisis geométrico para conocer las direcciones de simetría.

#### Objetivos específicos

- Construir la *variedad de Riemann* para estudiar la estructura matemática de la teoría general de la relatividad.
- Realizar la solución de de Sitter según el *modelo estándar de la cosmología* para conocer la métrica de dicho Universo.
- Solucionar las *ecuaciones de Killing* para el modelo cosmológico de de Sitter para así obtener los vectores asociados a tales simetrías.

# 1 Capítulo 1

En el presente capítulo se retomarán algunas ideas y definiciones fundamentales del álgebra y la topología que permitirán construir, de forma precisa y cuidadosa, el concepto de *variedad suave*, que es un espacio topológico localmente euclidiano al que se le pueden extender propiedades del cálculo diferencial. Dicho de una forma simple de imaginar, una variedad suave es un espacio suavemente curvado, que en las cercanías de un punto cualquiera no es posible reconocer la curvatura que tiene, por lo que parece plano desde dicho punto.

Este concepto de variedad suave es requerido para la *geometría de Riemann*, debido a que se toma como punto de partida para establecer *funciones métricas*, que son importantes para tomar medidas, y, con esto, motivar la implementación de las nociones básicas de la geometría analítica y diferencial. Para esto, se necesita reajustar la definición de *derivada* para los espacios curvos, ya que a definición usual sólo es válida para espacios planos. Esta construcción es conveniente para la *Teoría General de la Relatividad* de Einstein, por lo que en sus postulados integran a una *pseudo-variedad de Riemann* como el espacio-tiempo, y, con base en esto, en los *modelos cosmológicos* es el propio Universo.

## 1.1. Álgebra

Sea  $V$  un conjunto diferente de vacío y  $\mathbb{K}$  un *cuerpo algebraico*<sup>1</sup>. Se dice que  $V$  es un *espacio vectorial* si y sólo si  $(V, +)$  es un *grupo abeliano*<sup>2</sup> y bajo una operación binaria externa  $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ , denominada como *multiplicación por escalar*, se satisface que

1.  $\forall u \in V, a \in \mathbb{K} \mid a \cdot u = u \cdot a$ ,
2.  $\forall u \in V, a, b \in \mathbb{K} \mid a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$ ,
3.  $\forall u \in V, a, b \in \mathbb{K} \mid (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
4.  $\forall u, v \in V, a \in \mathbb{K} \mid a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ ,

---

<sup>1</sup>Un cuerpo algebraico es una estructura algebraica en donde la suma, resta, multiplicación y división están bien definidas.

<sup>2</sup>Un grupo abeliano es una estructura algebraica que cumple las propiedades *asociativa*, *conmutativa*, *existencia de elemento neutro* y *existencia de elemento inverso*.

5.  $\forall u \in V, e \in \mathbb{K} \mid e \cdot u = u \cdot e = u$ , &
6.  $\forall u \in V, e^{-1} \in \mathbb{K} \mid e^{-1} \cdot u = u \cdot e^{-1} = u^{-1}$ .

Donde a  $e$  se le llama *elemento neutro multiplicativo* de  $\mathbb{K}$  y a  $e^{-1}$  *inverso aditivo del elemento neutro multiplicativo* de  $\mathbb{K}$  [13]. Usualmente, el símbolo  $(\cdot)$  es suprimido y la multiplicación por escalar es expresada como  $\alpha u$ .

Un espacio vectorial  $V$  es denominado *finito* si existe un conjunto finito de elementos que generen todos los demás. A este conjunto finito, representado como una sucesión finita  $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se le dice *base* de  $V$  si y sólo si satisface que [13]

1. Los elementos de  $B$  son linealmente independientes,
2. Si todos los elementos  $u$  de  $V$  pueden ser escritos como una combinación lineal de  $B$ , esto es,  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ , entonces se dice que  $B$  genera a  $V$  &
3.  $\emptyset$  es la base del espacio vectorial cero  $V = \{0\}$ .

La *dimensión* de  $V$  es la cardinalidad<sup>3</sup> de  $B$ , denotado como  $|B|$ , por lo que a  $V$  se le dice *finito-dimensional*, o, si  $|B| = n$ , se le dice *n-dimensional*.

Existe un espacio en particular donde los *axiomas de Euclides* son completamente válidos, por lo que se le denomina como *espacio euclidiano*. Este espacio se construye con el producto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ , donde se acoge la notación de potencia para abreviar,  $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ . Este es el conjunto de todas las  $n$ -tuplas ordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ , ...,  $x_n \in \mathbb{R}$ . Gráficamente, cada  $n$ -tupla ordenada representa un punto en el espacio euclidiano [13].

Considerar la tripla  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , donde  $+$  es la adición de  $n$ -tuplas ordenadas y  $\cdot$  es la multiplicación de un escalar por una  $n$ -tupla. De esta manera, al espacio euclidiano se le puede dotar de estructura de espacio vectorial finito sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ , con neutro aditivo  $(0_1, 0_2, \dots, 0_n)$ , inverso aditivo  $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ , neutro multiplicativo 1 e inverso aditivo del neutro multiplicativo  $-1$ . La base de este espacio es la base unitaria  $B = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$ , por lo que la dimensión es  $n$ . Finalmente, se le dota de una estructura de *espacio métrico*<sup>4</sup> con la función distancia  $d_u$  definida como

$$d_u(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$  [17].

<sup>3</sup>Número de elementos de un conjunto.

<sup>4</sup>Un espacio métrico es una estructura en la cual se define una *función distancia*.

Sea  $\mathcal{F}$  una función de  $V$  en  $W$ , esto es,  $\mathcal{F} : V \longrightarrow W$ , donde  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales finito-dimensionales arbitrarios sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ . Es posible preservar esta estructura de espacio vectorial finito-dimensional si  $\mathcal{F}$  es definido como  $\mathcal{F}(au + bv) = a\mathcal{F}(u) + b\mathcal{F}(v)$ , para todo  $a, b \in \mathbb{K}$  y  $u, v \in V$ . A esta función se le denomina *función lineal* o, como le llamará posteriormente, *mapeo lineal* [13].

Al conjunto de todos los elementos de la forma  $\mathcal{F}(u) \in W$ , para todo  $u \in V$ , se le denota como  $Im\mathcal{F}$  y es llamado como *imagen de  $\mathcal{F}$* . Si  $Im\mathcal{F} = W$ , pues  $\mathcal{F}$  es *sobreyectiva*.

Por otra parte, se establece la colección de todos los mapeos lineales de  $V$  en  $W$  como

$$L(V, W) := \{\mathcal{F} : V \longrightarrow W\},$$

con  $V$  y  $W$  espacios vectoriales finito-dimensionales [7]. Se considera un caso de particular importancia, en que  $W = \mathbb{K}$ , es decir, los mapeos lineales son de la forma  $\mathcal{F} : V \longrightarrow \mathbb{K}$ . Estos mapeos son denominados *formas lineales* o *funcionales lineales*, y son elementos del espacio vectorial  $V^* := L(V, \mathbb{K})$ . A  $V^*$  se le llama *espacio dual* de  $V$  [7].

Si  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  es una base para  $V$ , entonces una base para  $V^*$  será un conjunto  $B^* = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ , si satisface las propiedades de la base y si satisface que  $\mathcal{F}_i(e_j) = \delta_{ij}$ , para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ , entonces, a  $B^*$  se le llama *base dual*.  $\delta_{ij}$  es la *delta de Kronecker*, definida como 1 si  $i = j$  o 0 si  $i \neq j$ , con  $e_j \in B$  [8]. Actualmente, es utilizada una notación más conveniente para los elementos del espacio dual, que consiste en escribir a estos elementos con supraíndices. Entonces, la base para el espacio dual queda expresada como  $B^* = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\} = \{e^1, \dots, e^n\}$ , y, consecuentemente,  $\mathcal{F}_i(e_j) = \delta_{ij}$  se cambia por  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ . Los elementos de  $V$  pueden ser representados como

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i,$$

donde  $v^i$  es un *coeficiente*, es decir, un elemento de  $\mathbb{K}$ , lo que equivale a ser un elemento de  $V^*$  [13]. Así mismo, los elementos de  $V^*$  pueden ser escritos como combinación lineal de la base dual, y, por convención de notación, se escriben como [8]

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i e^i.$$

Ahora, se generalizan las definiciones anteriores. Sea  $Vect_{\mathbb{K}} = \{V_1, V_2, \dots, W, \dots\}$  un conjunto de espacios vectoriales arbitrarios finito-dimensionales<sup>5</sup> sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  [7]. Se establece al producto cartesiano de  $m$  elementos de  $Vect_{\mathbb{K}}$ , para  $m \in \mathbb{N}$ , como la productoria

$$\prod_{k=1}^m V_k := V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m,$$

<sup>5</sup>Pueden ser de diferente dimensión.

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces, sea  $\mathcal{F}$  una función de  $\prod_{k=1}^m V_k$  en  $W$ , esto es,  $\mathcal{F} : \prod_{k=1}^m V_k \longrightarrow W$ , que es denominada *función multilínea* o *mapeo multilínea* [7] si y sólo si satisface que

$$\mathcal{F}(u_1, \dots, u_{j-1}, av_j + bw_j, u_{j+1}, \dots, u_m) = a\mathcal{F}(u_1, \dots, u_{j-1}, v_j, u_{j+1}, \dots, u_m) + b\mathcal{F}(u_1, \dots, u_{j-1}, w_j, u_{j+1}, \dots, u_m)$$

para todo  $u_i \in V_i$ ,  $v_j, w_j \in V_j$ , con  $i, j \in \mathbb{N}$  y  $a, b \in \mathbb{K}$ .

Análogamente a los mapeos lineales, también se conforma la colección de todos los mapeos multilineales  $L(V_1, \dots, V_m; W) := \left\{ \mathcal{F} : \prod_{k=1}^m V_k \longrightarrow W \right\}$ , que, por supuesto, establecen un nuevo espacio vectorial [7].

En el caso en que  $m = 2$ , el mapeo  $\mathcal{F}$  es *bilineal* [4], es decir que tiene la forma  $\mathcal{F} : V_1 \times V_2 \longrightarrow W$  y cumple que  $\mathcal{F}(au_1 + bu_2, v) = a\mathcal{F}(u_1, v) + b\mathcal{F}(u_2, v)$ , para todo  $u_1, u_2 \in V_1, v \in V_2$  y  $a, b \in \mathbb{K}$ . La colección de todos los mapeos bilineales es el espacio vectorial  $L(V_1, V_2; W) := \{ \mathcal{F} : V_1 \times V_2 \longrightarrow W \}$ , con el cual, si se hace que  $W = \mathbb{K}$ , pues se tiene al espacio vectorial  $L(V_1, V_2; \mathbb{K})$ , cuyos elementos son llamados *formas bilineales* [4].

Teniendo entonces un mapeo bilineal  $\mathcal{F}$  de  $V \times V$  en  $\mathbb{K}$ , es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u_i, u_j) &\longmapsto \mathcal{F}(u_i, u_j), \end{aligned}$$

con  $u_i, u_j \in V$  y  $i, j \in \mathbb{N}$ . Al mapeo bilineal  $\mathcal{F}$  se le dice *producto interno* en  $V$  si y sólo si satisface que [7]

1.  $\forall u_i, u_j \in V \mid \mathcal{F}(u_i, u_j) = \overline{\mathcal{F}(u_j, u_i)}$ ,
2.  $\forall u_i \in V \mid \mathcal{F}(u_i, u_i) \geq 0$ , &
3.  $\forall u_i \in V \mid \mathcal{F}(u_i, u_i) = 0 \Leftrightarrow u_i = 0_V$ .

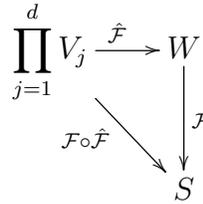
El primer axioma es denominado como *simetría conjugada*, donde  $\overline{\mathcal{F}(u_j, u_i)}$  denota al complejo conjugado de  $\mathcal{F}(u_i, u_j)$ . El segundo es denominado como *definido positivo*. El tercero es denominado como *no degenerado*. Usualmente, al producto interno se le denota como  $\langle u_i, u_j \rangle := \mathcal{F}(u_i, u_j)$  [4].

Coherentemente, para generalizar aún más esto último, sea  $Vect_{\mathbb{K}} = \{V_1, V_2, \dots, W, \dots\}$  y sea  $\hat{\mathcal{F}}$  un mapeo multilínea de  $\prod_{k=1}^m V_k$  en  $W$ , es decir,  $\hat{\mathcal{F}} : \prod_{k=1}^m V_k \longrightarrow W$ . A este mapeo se le dice *producto tensorial para múltiples espacios vectoriales*, denotado por  $\otimes$ , si y sólo si satisface que [7]

1. El mapeo multilínea de los elementos  $u_1 \in V_1, \dots, u_m \in V_m$  en  $W$ , es decir,  $u_1 \otimes \dots \otimes u_m$ , generan a  $W$ , lo que quiere decir que  $Im \hat{\mathcal{F}} = W$  o que  $\hat{\mathcal{F}}$  es sobreyectiva, &

2. Si  $\psi$  es un mapeo multilinear de  $\prod_{k=1}^m V_k$  en un espacio vectorial arbitrario  $S$ , esto es,

$\psi : \prod_{k=1}^m V_k \rightarrow S$ , entonces, existe un único mapeo lineal  $\mathcal{F} : W \rightarrow S$  de tal manera que el mapeo bilinear  $\psi$  queda definido como  $\psi := \mathcal{F} \circ \hat{\mathcal{F}}$ . Diagramáticamente, esto es,



El segundo axioma, siendo consecuente con el primero, se refiere a que todo producto tensorial implica un mapeo lineal [7].

Tomando esta definición del producto tensorial para múltiples espacios vectoriales, sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $\bigotimes_{k=0}^m V := V \otimes \dots \otimes V$ , denominado como *espacio producto tensorial*, cuyos elementos son llamados *tensores* de rango  $m$  [8]. Los mapeos bilineales, denotados por  $\Phi$ , entre espacios tensoriales cumplen la propiedad de que [7]

$$\Phi : \bigotimes_{k=0}^m V \times \bigotimes_{k=0}^r V \rightarrow \bigotimes_{k=0}^{m+r} V$$

lo que quiere decir que este mapeo bilinear es un producto tensorial entre  $\bigotimes_{k=0}^m V$  y  $\bigotimes_{k=0}^r V$ , cuyos elementos son tensores de rango  $m + r$ . Se tiene también que  $\bigotimes_{k=0}^0 V = \mathbb{K}$ ,  $\bigotimes_{k=0}^1 V = V$ ,

$\bigotimes_{k=0}^2 V = V \otimes V$ ,  $\bigotimes_{k=0}^3 V = V \otimes V \otimes V$ , etc. El producto tensorial no es conmutativo y satisface

que  $\alpha \otimes u$ , donde  $\alpha \in \bigotimes_{i=0}^0 V$  y  $u \in \bigotimes_{k=0}^m V$ , es la multiplicación de un tensor por un escalar,

donde el resultado es nuevamente un tensor en  $\bigotimes_{k=0}^m V$  [7].

Los espacios tensoriales, análogamente a los espacios vectoriales finito-dimensionales, también pueden ser generados a partir de un conjunto mínimo de elementos, es decir, existe una base de espacios tensoriales [4]. Para definir esta base, se parte de una base  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  para  $V$ , tal que cada elemento  $u \in V$  esté representado como [8]

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$$

con esto, se hace el múltiple producto tensorial  $m$  veces,

$$v \otimes \cdots \otimes v = \left( \sum_{i=1}^n v^{i_1} e_{i_1} \right) \otimes \cdots \otimes \left( \sum_{i=1}^n v^{i_m} e_{i_m} \right)$$

Por la propiedad de multilinealidad, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n v^{i_1} \cdots v^{i_m} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m})$$

donde el producto de escalares  $v^{i_1} \cdots v^{i_m}$  queda denotado por  $\xi^{i_1, \dots, i_m}$ , y es la componente del tensor  $v \otimes \cdots \otimes v$ , con base  $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m}$ . La cardinalidad de la base de este espacio define la dimensión. Este tensor es llamado *tensor contravariante* de rango  $m$  [8] y se representa como

$$v \otimes \cdots \otimes v = \sum_{i=1}^n \xi^{i_1, \dots, i_m} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m})$$

Tomando en consideración al espacio dual de  $V$ , se obtienen espacios tensoriales de la forma  $\bigotimes_{i=0}^r V^* := V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ , que satisfacen las mismas propiedades ya dadas para un espacio tensorial [7]. Un tensor perteneciente a este espacio tensorial es llamado *tensor covariante* de rango  $r$  y se representa como

$$\omega \otimes \cdots \otimes \omega = \sum_{i=1}^n \xi_{i_1, \dots, i_r} (e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r})$$

También se pueden obtener espacios tensoriales definidos por el producto tensorial múltiple entre  $m$  veces el espacio vectorial  $V$  y  $r$  veces el espacio dual  $V^*$ , es decir,  $V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ , que también satisfacen las propiedades del espacio tensorial [7]. Un tensor perteneciente a este espacio tensorial es llamado *tensor mixto* [8], que es  $m$  veces contravariante y  $r$  veces covariante, el cual, en términos de su base tensorial se representa como

$$v \otimes \cdots \otimes v \otimes \omega \otimes \cdots \otimes \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \xi_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_m} (e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m})$$

Esta es una forma práctica de escribir a los tensores, pues al operarlos es cuestión de manipular, principalmente, los coeficientes<sup>6</sup> [8], ya que estos salen del producto tensorial como un producto usual.

<sup>6</sup>Posteriormente, se utilizará esta estructura tensorial y su notación para desarrollar la teoría de las *variedades de Riemann*.

## 1.2. Variedades

### 1.2.1. Variedades topológicas y diferenciables

Sea  $(\mathcal{M}, \tau)$  un *espacio topológico*<sup>7</sup> con topología  $\tau$ . Se dice que  $\mathcal{M}$  es una *variedad topológica* si y sólo si satisface que [12]

1. Es *espacio de Hausdorff*,
2. Es *2-contable*, y
3. Es *localmente euclidiana*.

Que sea de Hausdorff significa que todos sus puntos pueden ser separados por medio de abiertos disyuntos [2], es decir, todos sus puntos pueden ser desconectados. Que sea 2-contable significa que su topología tiene una base contable [5], es decir, la familia de abiertos que conforman la topología puede ser generada a partir de una colección de básicos a los que se les puede asignar un número natural. Finalmente, que sea localmente euclidiana significa que si se toma un abierto  $\mathcal{U}$  de la variedad, es posible establecer un *homeomorfismo*<sup>8</sup> o mapeo a un abierto  $\mathcal{V}$  del espacio euclidiano<sup>9</sup>, esto es, si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  y  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  entonces  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  [12]. Se determina la dimensión de  $\mathcal{M}$  vía homeomorfismo, es decir, si el homeomorfismo es  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , con  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ , pues la dimensión de  $\mathcal{M}$  se dice que es  $n$  [15]. Por otro lado, el *teorema de la invariancia del dominio* [12] establece que sólo puede haber homeomorfismos entre espacios de la misma dimensión, .

Un ejemplo clásico de variedad topológica es pensar en una superficie  $\mathcal{M}$  suavemente curvada embebida<sup>10</sup> en  $\mathbb{R}^3$ . Luego, sea  $p_\alpha \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ , con  $\alpha \in \mathbb{N}$ , siendo  $\mathcal{U}$  un abierto. Si existe un homeomorfismo  $\varphi$  de  $\mathcal{U}$  en un abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a la imagen de este punto  $\varphi(p_\alpha)$ , la representación se puede ver en figura **2-2** [12].

Los homeomorfismos tienen un papel de suma importancia, ya que pueden dotar de coordenadas a la variedad por medio de parches coordenados que, dicho en un lenguaje poco técnico, se *pegan* sobre la variedad [4]. Estos parches son denominados como *cartas coordenadas* [15]. Entonces, sea  $\mathcal{M}$  una variedad topológica, un abierto  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  y un abierto  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Una carta coordenada en  $\mathcal{M}$  es un par  $(\mathcal{U}, \varphi)$ , donde  $\varphi$  es un homeomorfismo de  $\mathcal{U}$  en  $\mathcal{V}$  y a  $\mathcal{U}$  se le llama *dominio coordenado* [12].

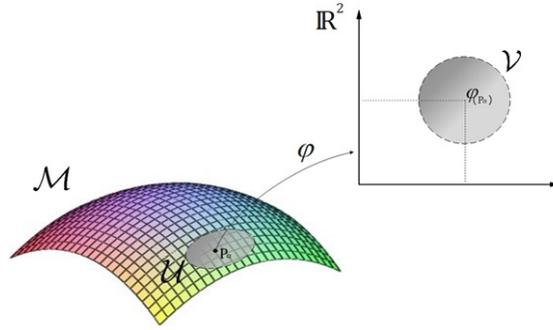
El homeomorfismo  $\varphi$  es llamado *mapa local coordenado* y genera la *imagen* del dominio coordenado  $\mathcal{U}$  en  $\mathbb{R}^n$ , denotada como  $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ , pero descrito de forma precisa, cada punto  $p_\alpha$  del dominio coordenado viene dado por las componentes  $(x^1, \dots, x^n)$ , que son los valores de entrada del mapeo  $\varphi$  en  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ , tal que el mapeo de cada punto será  $\varphi(p_\alpha) = (x^1(p_\alpha), \dots, x^n(p_\alpha))$ ,

<sup>7</sup>Un espacio topológico es una estructura que define conexiones o relaciones de proximidad entre los elementos de un conjunto.

<sup>8</sup>Un homeomorfismo es una función continua que tiene inversa continua.

<sup>9</sup>Denotado como  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>10</sup>O inmersa.



**Figura 1-1:** Homeomorfismo de un abierto  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  y un abierto  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^2$ . *Fuente propia.*

y a esto se le llama *coordenadas locales en  $\mathcal{U}$*  [15].

Generalmente, en la variedad pueden haber dos cartas coordenadas  $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$  y  $(\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta)$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  y  $\alpha \neq \beta$ , cuyos dominios coordenados se superponen en una cierta región, la cual es una intersección de puntos de ambos dominios [11], esto es,

$$\forall p \in \mathcal{M} \mid p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \subset \mathcal{M}$$

Si  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ , se dice que  $\mathcal{U}_\alpha$  y  $\mathcal{U}_\beta$  son *compatibles* [12].

Haciendo mapeos respectivos  $\varphi_\alpha$  y  $\varphi_\beta$  de los dominios en abiertos  $\mathcal{V}_\alpha$  y  $\mathcal{V}_\beta$  de  $\mathbb{R}^n$ , es decir,  $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$  y  $\varphi_\beta : \mathcal{U}_\beta \rightarrow \mathcal{V}_\beta$ , teniendo en cuenta que  $\mathcal{V}_\alpha = \varphi(\mathcal{U}_\alpha)$  y  $\mathcal{V}_\beta = \varphi(\mathcal{U}_\beta)$ . Luego, para cada carta coordenada se mapea la región superpuesta de tal manera que cada punto  $p$  de la intersección es especificado por distintas coordenadas de acuerdo a cada carta. Así, se busca una estrategia para pasar de un sistema coordenado a otro que permita identificar este punto específico, y, de forma práctica, todo punto de la intersección [15]. Para lograr dicha estrategia, se toma la inversa de una de las cartas, es decir, se vuelve a la variedad, para, posteriormente, ir a la otra carta, lo que implica una composición de mapeos  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ . Este mapeo compuesto es llamado *mapa de transición* [12], el cual es una transformación de coordenadas entre espacios euclidianos, esto es, una función  $\mathcal{F} : \mathcal{V}_\alpha \rightarrow \mathcal{V}_\beta$  y se define formalmente como

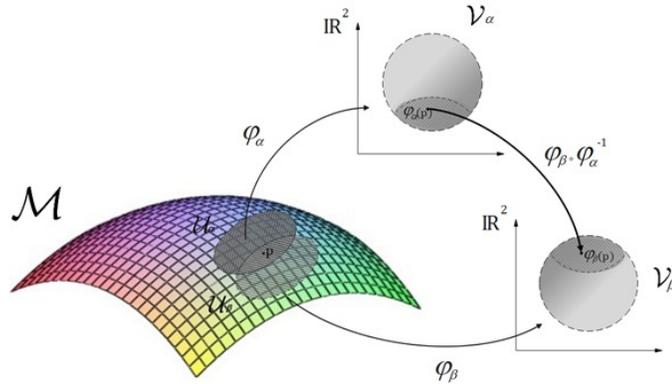
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

cuya inversa es

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

Para ilustrar lo anterior, se toma como ejemplo una variedad de dimensión 2 y mapeos a abiertos de  $\mathbb{R}^2$  como se muestra en la figura 1-2 [15].

A la colección de suficientes cartas coordenadas  $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}$ , cuyos dominios coordenados son compatibles, se le llama *atlas* [12], tal que  $\mathcal{U}_\alpha$  es un cubrimiento de  $\mathcal{M}$ , esto es,



**Figura 1-2:** Mapa de transición entre cartas con regiones superpuestas. *Fuente propia.*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}$$

Si el mapa de transición es una función continuamente diferenciable, se le llama de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si es  $r$  veces diferenciable, se le llama de clase  $\mathcal{C}^r$ , que significa que existen sus derivadas parciales de orden  $r$  que son continuas. Si es infinitamente diferenciable, que es el principal interés, se le llama de clase  $\mathcal{C}^{\infty}$ , que significa que existen sus derivadas parciales de todos los órdenes y además son continuas, a lo que se le denomina como *estructura de suavidad* [21]. Como esta función es una composición de mapeos anteriormente definidos como homeomorfismos, es, por tanto, también un homeomorfismo, y al ser diferenciable, se le llama *difeomorfismo* [15]. Posteriormente, se dice que el atlas de  $\mathcal{M}$  es suave si para cada par de cartas existe un difeomorfismo, y a la variedad  $\mathcal{M}$  se le denomina *variedad diferenciable* o *variedad suave* [12].

Las variedades diferenciables<sup>11</sup> permiten reproducir estructuras conocidas como las representaciones coordenadas y los espacios vectoriales [4]. Entonces, sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable y sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función, con  $m \in \mathbb{N}$ .  $f$  es llamada suave si para cada  $p \in \mathcal{M}$  existe una carta coordenada  $(\mathcal{U}, \varphi)$  con estructura de suavidad para  $\mathcal{M}$  [12]. Entonces,  $p \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ , de tal manera que la composición de funciones  $f \circ \varphi^{-1}$  es suave en el abierto  $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Luego, se tiene una nueva función denotada por  $\hat{f}$ , con la forma  $\hat{f} : \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que es llamada la *representación coordenada de  $f$*  [12], tal que  $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$ . Esto puede ser visualizado en la figura **1-3**.

Por otra parte, se define una colección  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{M})$  de todas las funciones suaves [12]  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , denominadas como *funciones de valor real*, tal que es posible dotar con la estructura de espacio vectorial a  $\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{M})$  sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ , ya que la adición de funciones suaves es suave y la multiplicación de un escalar por una función suave es suave [21].

<sup>11</sup>También las variedades suaves

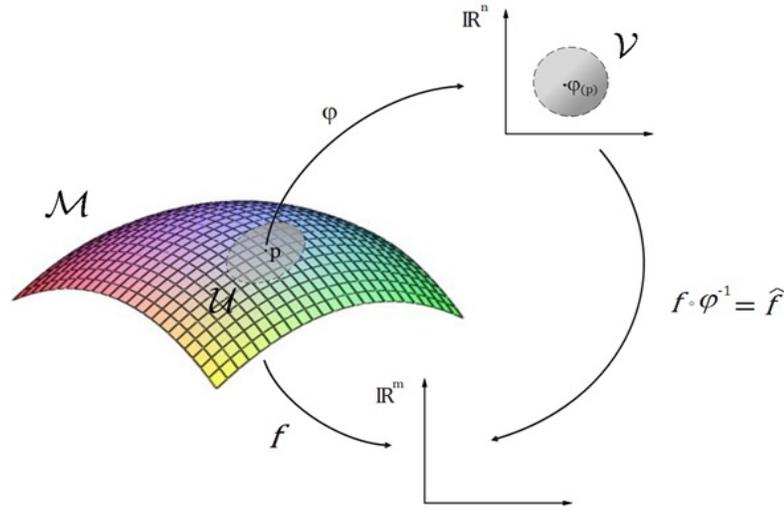


Figura 1-3: Representación coordenada de  $f$ .

### El espacio de configuraciones como variedad diferenciable

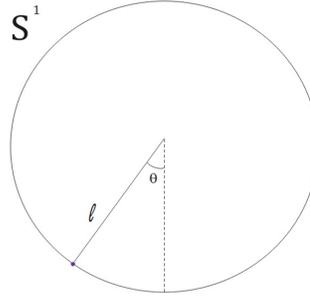
Para complementar lo anterior, se hace relevante mencionar al *espacio de configuraciones*, que es una colección de todas las configuraciones posibles de un sistema físico [3]. Se define a una configuración como

$$\mathfrak{q} = \{q_i \in \mathbb{R}^n \mid i \in I \subset \mathbb{N}\}$$

donde  $q_i$  representa al sistema de coordenadas generalizadas del sistema e  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{N}$  [3]. Entonces, debe existir una colección  $\mathfrak{C}$  de todas las configuraciones del sistema de manera que

$$\forall \mathfrak{q} \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{C} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Esta colección  $\mathfrak{C}$  significa la colección de todos los posibles estados que un sistema físico puede tomar, y, de acuerdo a ciertas restricciones, se piensa en transiciones de estados de manera continua y suave, por lo que se forman objetos geométricos como curvas, superficies, volúmenes y demás, pero es común obtener objetos geométricos muy concretos, como esferas, cilindros, toros, etc., y estos objetos geométricos conforman la familia de soluciones del sistema. En síntesis, el espacio de configuraciones es una variedad suave [3]. Como ejemplo, se puede considerar al péndulo restringido a moverse en un plano, cuyo espacio de configuraciones es la esfera  $S^1$ , ver la figura 1-4, o el péndulo restringido a moverse en el espacio tridimensional, cuyo espacio de configuraciones es la esfera  $S^2$ .



**Figura 1-4:** Espacio de configuraciones mecánico para el péndulo restringido al plano. *Fuente propia.*

### 1.2.2. Espacios tangentes

Sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  una curva sobre  $\mathcal{M}$ , donde  $I$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}$ , que coincide<sup>12</sup> exactamente con un intervalo de una función de valor real suave  $f$  [12]. Se establece un punto  $p$  sobre la variedad de tal manera que la curva  $\gamma$  pase por él, es decir, el punto es simplemente  $p = \gamma(\lambda_0)$ , donde  $\lambda_0$  es un parámetro fijo de  $\gamma$  con  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  [12]. De esta manera, si se quiere conocer cómo varía la función  $f$  de acuerdo a la curva  $\gamma$  en  $p$ , se hace una composición de funciones de la manera  $f \circ \gamma$ , por lo que  $f(\gamma(\lambda_0))$  [12]. Así, sólo bastaría conocer  $(f \circ \gamma)'(\lambda_0)$ , lo que equivale a conocer la velocidad en  $p$ , por lo que se le denota como  $v_p(f)$  [11]. Esta derivada es una función

$$v_p(f) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R},$$

es decir,  $v_p(f)$  es una función lineal, por las propiedades de las derivadas, que va desde el espacio vectorial  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  a los reales [11]. Esto último tiene como consecuencia que todos los vectores tangentes a un punto  $p \in \mathcal{M}$  se pueden coleccionar en un conjunto de funciones lineales  $L(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R})$  [12].

Se define al *espacio tangente a un punto  $p$  de la variedad* concretamente como<sup>13</sup>

$$T_p\mathcal{M} := \{v_p(f) \in L(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R}) \mid \gamma : I \rightarrow \mathcal{M} \wedge \gamma(\lambda_0) = p \in \mathcal{M}\}$$

Todo  $p \in \mathcal{M}$  admite un espacio tangente [11]. Como este es un modelado lineal para la vecindad de cada punto  $p$  de  $\mathcal{M}$  [12], la colección de todos los espacios tangentes  $T_p\mathcal{M}$  reconstruyen a la variedad<sup>14</sup>.

El espacio dual de  $T_p\mathcal{M}$  será entonces la colección de todas las funciones lineales de la forma  $\mathcal{F} : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  [8], esto es,  $T_p^*\mathcal{M} := L(T_p\mathcal{M}, \mathbb{R})$ , pero, adicionalmente a esto, este espacio dual es denominado como *espacio cotangente al punto  $p$  de la variedad* [8].

Ahora, se define la operación suma [11] como

<sup>12</sup>Es decir, que está contenida en la función  $f$  como una parametrización respecto a  $\lambda \in R$  en un intervalo dado.

<sup>13</sup>La colección de todos los mapeos lineales  $v_p(f)$  para toda posible curva  $\gamma$  que pasa por  $p$ .

<sup>14</sup>Por medio del concepto de *haz vectorial* [12], se define *el haz tangente*, pero esto no será tema estudio en este escrito.

$$\begin{aligned}
+ : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} &\rightarrow L(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R}) \\
(v_{\gamma,p} + v_{\delta,p})(f) &\mapsto v_{\gamma,p}(f) + v_{\delta,p}(f),
\end{aligned}$$

para todo  $v_{\gamma,p}, v_{\delta,p} \in T_p\mathcal{M}$ .

Al multiplicar un real por un elemento de  $T_p\mathcal{M}$ , el resultado es un producto usual entre dos números reales, por lo que se define la operación multiplicación [11] por escalar como

$$\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{R} \times T_p\mathcal{M} &\rightarrow L(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R}) \\
(a \cdot v_{\gamma,p})(f) &\mapsto a \cdot v_{\delta,p}(f),
\end{aligned}$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$  y  $v_{\gamma,p} \in T_p\mathcal{M}$ .

Finalmente, se evidencia que estas operaciones en  $T_p\mathcal{M}$  satisfacen la estructura de un espacio vectorial [11].

Para tomar distancias entre dos vectores  $u_p$  y  $v_q$  tangentes a  $\mathcal{M}$  y se aplica su producto interno, que, en este caso, será una forma bilineal [11]

$$\begin{aligned}
g : T_p\mathcal{M} \times T_q\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(v_p, v_q) &\longmapsto g(v_p, v_q)
\end{aligned}$$

que es denominada como *métrica de Riemann*, si y sólo si, satisface que

1. Si  $v_p \in T_p\mathcal{M}$  y  $v_q \in T_q\mathcal{M}$ , entonces,  $g(v_p, v_q) \geq 0$ . Esto es, que  $g$  es *definido positivo*.
2. Si  $v_p \in T_p\mathcal{M}$  y  $v_q \in T_q\mathcal{M}$ , entonces,  $g(v_p, v_q) = g(v_q, v_p)$ . Esto es, que  $g$  es *simétrico*.
3. Si  $v_p \in T_p\mathcal{M}$  y  $v_q \in T_q\mathcal{M}$ , entonces,  $g(v_p, v_q) = 0$ , si y sólo si,  $v_p = 0$ . Esto es, que  $g$  es *no degenerativo*.

Es posible construir un espacio tensorial utilizando espacios tangentes<sup>15</sup> a puntos arbitrarios de la variedad mediante el múltiple producto tensorial  $T_p\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M}^* \otimes \cdots \otimes T_p\mathcal{M}^*$ , el cual es denominado *espacio tensorial sobre la variedad diferenciable*, cuyos elementos son llamados, consecuentemente, *tensores tangentes a la variedad diferenciable* [8].

En este contexto, la métrica de Riemann puede ser contruida como un producto tensorial  $T_p\mathcal{M}^* \otimes T_q\mathcal{M}^*$ , por lo que también es llamada como *tensor métrico* [11]. Este es uno de los tensores más importantes y se le considera el *tensor fundamental*. Para un espacio vectorial  $T_p\mathcal{M}$  con una base  $\{e_i\}$ , se establece el tensor métrico como el producto interno de la base, esto es,  $g_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$ . Entonces, este tensor, es asignado a cada punto de la variedad suave y, así, toda variedad suave  $\mathcal{M}$  equipada con un tensor métrico  $g$ , establece un par  $(\mathcal{M}, g)$ , denominado como *variedad de Riemann* [11].

---

<sup>15</sup>También cotangentes.

### 1.3. Cálculo en variedades

Aplicando las nociones del cálculo sobre la variedad de Riemann permite empezar a construir elementos heredados de la *geometría diferencial*. Los vectores y formas lineales, al ser cambiados de base, sufren el efecto del cambio de sus componentes, lo que implica que los tensores también son afectados de la misma manera [8]. Los vectores cambian de base de acuerdo a la regla

$$e_i = A_i^j \bar{e}_j,$$

mientras que las formas lineales cambian de base de acuerdo a la regla

$$e^i = A_j^i \bar{e}^j;$$

donde  $A_i^j$  y  $A_j^i$  son las componentes de la *matriz jacobiana*, es decir, que  $A_i^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$  y  $A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$  [8]. Luego, aplicando el producto múltiple sobre el espacio vectorial  $V$ , se obtiene la *regla de transformación contravariante*

$$\begin{aligned} v \otimes \cdots \otimes v &= \sum_{i_1=1}^n \xi^{i_1, \dots, i_d} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}) = \sum_{i_1=1}^n v^{i_1} \cdots v^{i_d} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n v^{i_1} \cdots v^{i_d} \left\{ \sum_{j_1=1}^n \left( \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \bar{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial \bar{x}^{j_d}}{\partial x^{i_d}} \bar{e}_{j_d} \right) \right\} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{i_1}} v^{i_1} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{j_d}}{\partial x^{i_d}} v^{i_d} (\bar{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}_{j_d}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^n \bar{v}^{j_1} \cdots \bar{v}^{j_d} (\bar{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}_{j_d}) = \sum_{j_1=1}^n \bar{\xi}^{j_1, \dots, j_d} (\bar{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}_{j_d}) = \bar{v} \otimes \cdots \otimes \bar{v} \end{aligned}$$

Aplicando el producto múltiple sobre el espacio dual  $V^*$ , se obtiene la *regla de transformación covariante*

$$\begin{aligned} \omega \otimes \cdots \otimes \omega &= \sum_{i_1=1}^n \xi_{i_1, \dots, i_r} (e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r}) = \sum_{i_1=1}^n \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_d} (e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_d}) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_d} \left\{ \sum_{j_1=1}^n \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \bar{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial x^{i_d}}{\partial \bar{x}^{j_d}} \bar{e}^{j_d} \right) \right\} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \omega_{i_1} \cdots \frac{\partial x^{i_d}}{\partial \bar{x}^{j_d}} \omega_{i_d} (\bar{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}^{j_d}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^n \bar{\omega}_{j_1} \cdots \bar{\omega}_{j_d} \{ (\bar{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}^{j_d}) \} = \sum_{j_1=1}^n \bar{\xi}_{j_1, \dots, j_d} (\bar{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}^{j_d}) = \bar{\omega} \otimes \cdots \otimes \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la regla transformación para un tensor  $d$  veces contravariante y  $r$  veces covariante es

$$\begin{aligned} v \otimes \cdots \otimes v \otimes \omega \otimes \cdots \otimes \omega &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{i_1=1}^n \xi_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_d} (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r}) = \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{i_1=1}^n v^{j_1} \cdots v^{j_d} \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_r} (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v^{j_1} \dots v^{j_d} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_r} \left( \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial \bar{x}^{k_d}}{\partial x^{j_d}} \bar{e}_{k_d} \otimes \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{h_1}} \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \bar{x}^{h_r}} \bar{e}^{h_r} \right) = \\
& \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{j_1}} v^{j_1} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_d}}{\partial x^{j_d}} v^{j_d} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{h_1}} \omega_{i_1} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \bar{x}^{h_r}} \omega_{i_r} (\bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{k_d} \otimes \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{h_r}) = \\
& \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \bar{v}^{k_1} \dots \bar{v}^{k_d} \bar{\omega}_{h_1} \dots \bar{\omega}_{h_r} (\bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{k_d} \otimes \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{h_r}) = \\
& \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_{h_1, \dots, h_r}^{k_1, \dots, k_d} (\bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{k_d} \otimes \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{h_r}) = \bar{v} \otimes \dots \otimes \bar{v} \otimes \bar{\omega} \otimes \dots \otimes \bar{\omega}.
\end{aligned}$$

Para sintetizar de una manera práctica la escritura de este tipo de sumas, se define que para cada par de índices repetidos se asume una suma, de esta manera es posible suprimir el símbolo de sumatoria, y esta notación es conocida como *convenio de Einstein*. Como ejemplo, se reescribe la regla de transformación para un tensor mixto genérico como

$$\begin{aligned}
v \otimes \dots \otimes v \otimes \omega \otimes \dots \otimes \omega &= \xi_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_d} (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_d}) = \\
& v^{j_1} \dots v^{j_d} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_r} (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}) = \\
v^{j_1} \dots v^{j_d} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_r} &\left( \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial \bar{x}^{k_d}}{\partial x^{j_d}} \bar{e}_{k_d} \otimes \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{h_1}} \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \bar{x}^{h_r}} \bar{e}^{h_r} \right) = \\
\frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{j_1}} v^{j_1} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_d}}{\partial x^{j_d}} v^{j_d} &\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{h_1}} \omega_{i_1} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \bar{x}^{h_r}} \omega_{i_r} (\bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{k_d} \otimes \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{h_r}) = \\
\bar{v}^{k_1} \dots \bar{v}^{k_d} \bar{\omega}_{h_1} \dots \bar{\omega}_{h_r} &(\bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{k_d} \otimes \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{h_r}) = \\
\bar{\xi}_{h_1, \dots, h_r}^{k_1, \dots, k_d} (\bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes &\bar{e}_{k_d} \otimes \bar{e}^{h_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{h_r}) = \bar{v} \otimes \dots \otimes \bar{v} \otimes \bar{\omega} \otimes \dots \otimes \bar{\omega}
\end{aligned}$$

Ahora, es necesario introducir la *derivada de Lie*, que es la primer noción propia de derivada sobre las variedades de Riemann. La derivada de Lie es necesaria para conocer el cambio de alguna cantidad tensorial sobre el flujo de cierto campo vectorial definido por los vectores tangentes a la variedad [8].

Teniendo un campo vectorial  $u = u^i e_i$  dado sobre una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$ , cuyas *curvas integrales* son funciones escalares de la forma  $x^i(\lambda)$  y  $x^i(\eta)$ , donde las componentes del vector  $u$  son derivadas de la forma  $u^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ . Para poder definir a esta derivada se plantea la regla de transformación de las componentes de los vectores

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j$$

y se define una transformación lineal en forma de desplazamientos infinitesimalmente pequeños como

$$\bar{x}^i = x^i + dx^i$$

y, por la regla de la cadena, se tiene que

$$\bar{x}^i = x^i + \frac{dx^i}{d\lambda} d\lambda = x^i + u^i d\lambda$$

Así, la derivada parcial es

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} d\lambda$$

Luego, se sustituye en la regla de transformación

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j = \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} d\lambda \right) v^j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} v^j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j d\lambda$$

La derivada parcial de una función respecto a variables de la que es independiente y respecto a sí misma es 0 si es diferente y 1 si es la misma, por lo que se vuelve el tensor de Kronecker, esto es,  $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$  [11], entonces, se tiene que

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} v^j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j d\lambda = \delta_j^i v^j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j d\lambda$$

De esta manera, se tiene que la transformación es

$$\bar{v}^i = v^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j d\lambda.$$

Por otro lado, se hace una aproximación lineal del vector tangente que ha tenido un desplazamiento diferencial del punto  $p$  al punto  $q$  mediante una expansión de Taylor [11],

$$v^i(x + dx) = v^i(x) + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(x) dx^j$$

que es equivalente a

$$v^i(q) = v^i(p) + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(p) dx^j$$

Teniendo en cuenta a estas dos aproximaciones hechas, se hace una diferenciación denominada como *derivada de Lie* de un vector, definida por

$$\mathcal{L}_u v^i(p) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{v^i(q) - \bar{v}^i(q)}{\lambda}$$

Sustituyendo en esta derivada se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u v^i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{v^i + \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j - v^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j d\lambda}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j - \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j d\lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \left( \frac{dx^j}{\lambda} \right) - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j \left( \frac{d\lambda}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{d\lambda} - \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j \frac{d\lambda}{d\lambda} \end{aligned}$$

Y así, se obtiene la expresión para la derivada de Lie de las componentes de un vector como

$$\mathcal{L}_u v^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}.$$

Siguiendo con esto, se procede a obtener una expresión que permita calcular la derivada de Lie del tensor métrico, donde se ha hecho un desplazamiento desde un punto  $p$  hasta un punto  $q$  de la variedad de Riemann [11]. Entonces, se plantea la regla de transformación del tensor métrico por medio de la regla de transformación de los vectores de la base sobre el punto  $q$

$$\bar{g}_{ij} = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \left\langle \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} e_k, \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} e_l \right\rangle = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \langle e_k, e_l \rangle = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl}$$

Se tiene la transformación lineal de desplazamiento

$$x^k = \bar{x}^k - dx^k = \bar{x}^k - \frac{dx^k}{d\lambda} d\lambda = \bar{x}^k - u^k d\lambda$$

la cual se deriva parcialmente respecto a las coordenadas del punto  $q$ , para obtener

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda = \delta_i^k - \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda$$

Luego, se sustituye en la regla de transformación

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl} = (\delta_i^k - \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda) (\delta_j^l - \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda) g_{kl} \\ &= (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^k \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda - \delta_j^l \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda + \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda^2) g_{kl} \end{aligned}$$

Como el término  $d\lambda^2$  es prácticamente nulo, se desprecia, y se tiene que

$$\begin{aligned} &= (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^k \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda - \delta_j^l \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda) g_{kl} = \delta_i^k \delta_j^l g_{kl} - \delta_i^k g_{kl} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda - \delta_j^l g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda \\ &= g_{ij} - g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda - g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda; \end{aligned}$$

De este procedimiento, se concluye que la transformación del tensor métrico del punto  $p$  al punto  $q$  es

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda - g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda.$$

Por otro lado, se hace una aproximación lineal del tensor métrico que ha tenido un desplazamiento diferencial del punto  $p$  al punto  $q$  mediante una expansión de Taylor, entonces, se tiene que

$$g_{ij}(x + dx) = g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x) dx^k$$

que es equivalente a

$$g_{ij}(q) = g_{ij}(p) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) dx^k.$$

Teniendo en cuenta a estas dos aproximaciones hechas, se define a la *derivada de Lie* del tensor métrico como

$$\mathcal{L}_u g_{ij}(p) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g_{ij}(q) - \bar{g}_{ij}(q)}{\lambda}$$

Sustituyendo en esta derivada se tiene que

$$\mathcal{L}_u g_{ij} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^k - g_{ij} + g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^j} d\lambda + g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^k + g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^J} d\lambda + g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} d\lambda}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \left( \frac{dx^k}{\lambda} \right) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^J} \left( \frac{d\lambda}{\lambda} \right) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} \left( \frac{d\lambda}{\lambda} \right) \\
&= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \left( \frac{dx^k}{d\lambda} \right) + g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^J} \left( \frac{d\lambda}{d\lambda} \right) + g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i} \left( \frac{d\lambda}{d\lambda} \right);
\end{aligned}$$

Así, se obtiene la expresión para la derivada de Lie del tensor métrico, y en general para cualquier tensor covariante de segundo orden, como

$$\mathcal{L}_u g_{ij} = u^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^J} + g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i}$$

pero se tiene que la derivada parcial del tensor métrico es nula, por lo que, exclusivamente para el tensor métrico, se tiene que

$$\mathcal{L}_u g_{ij} = g_{il} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{x}^J} + g_{kj} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{x}^i}.$$

Considerando a la derivada covariante, es posible sustituirla en lugar de la derivada parcial, en el caso de la derivada de Lie, se reescribe como

$$\mathcal{L}_u g_{ij} = g_{il} \bar{\nabla}_j u^l + g_{kj} \bar{\nabla}_i u^k,$$

Por propiedades del tensor métrico, se tiene que

$$\bar{\nabla}_j (g_{il} u^l) + \bar{\nabla}_i (g_{kj} u^k) = \bar{\nabla}_j u_i + \bar{\nabla}_i u_j;$$

Así, se tiene que la derivada de Lie del tensor métrico es

$$\mathcal{L}_u g_{ij} = \bar{\nabla}_j u_i + \bar{\nabla}_i u_j.$$

Tomando a esta última expresión de la derivada de Lie, es posible ver que es una ecuación diferencial en términos del flujo de campo vectorial definido sobre la variedad de Riemann. Si se asume que el cambio del tensor métrico es nulo<sup>16</sup>, esto es,  $\mathcal{L}_u g_{ij} = 0$ , este flujo de campo vectorial será constante, es decir, será un flujo sin cambio alguno. La implicación de esto es que un campo vectorial como este estaría definido sobre alguna dirección donde la variedad de Riemann se mantiene *invariante*, y así, se sabe que en esa dirección hay simetría. Según esto, la expresión resultante será

$$\bar{\nabla}_j u_i + \bar{\nabla}_i u_j = 0,$$

A esta ecuación diferencial se le conoce como *ecuación de Killing* y al campo vectorial sobre la variedad de Riemann que satisface esta ecuación se le llama *campo vectorial de Killing*. Es común denotarlo con la letra  $\xi$ , entonces, finalmente, la ecuación queda reescrita como

$$\bar{\nabla}_j \xi_i + \bar{\nabla}_i \xi_j = 0.$$

---

<sup>16</sup>Una minimización.

## 2 Capítulo 2

En el presente capítulo se estudiarán las ideas fundamentales de la teoría general de la relatividad, de los cuales hacen parte sus postulados y las ecuaciones de campo de la gravitación, que toman al espacio-tiempo como una variedad suave con una métrica pseudoriemanniana. Dicha métrica tiene el importante papel de resolver las ecuaciones de campo, pues da cuenta de la geometría local del espacio-tiempo debido al contenido de materia-energía presente. Las soluciones globales permiten obtener la geometría y evolución temporal del Universo, entonces, de acuerdo a las condiciones que sean definidas para las ecuaciones de campo, se pueden realizar modelaciones del Universo denominadas *modelos cosmológicos*. Particularmente, para este análisis, es necesario entender el modelo cosmológico desarrollado por el matemático y astrónomo *Willem de Sitter*.

### 2.1. Estructuras matemáticas que subyacen a la teoría especial de la relatividad

La teoría especial de la relatividad establece dos postulados que consisten en la covariancia de las leyes físicas en marcos inerciales y la invariancia de la medida de la velocidad de la luz en marcos inerciales. Con estos postulados se puede desarrollar toda la teoría, pero estos, a su vez, implican una estructura matemática mucho más general, que es la de *grupo de Lie* [20]. Un grupo de Lie es un par  $(\mathcal{M}, \odot)$  que satisface la usual estructura de grupo<sup>1</sup> con una operación interna  $\odot$ , pero el conjunto  $\mathcal{M}$  es una variedad suave, de tal manera que los mapeos

$$\begin{aligned}\mu : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (x, y) &\longmapsto x \odot y,\end{aligned}$$

$\forall x, y \in \mathcal{M}$ , y

$$\begin{aligned}i : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ x &\longmapsto x^{-1}\end{aligned}$$

$\forall x, x^{-1} \in \mathcal{M}$ , son siempre suaves.

---

<sup>1</sup>El grupo puede o no ser conmutativo.

Uno de los grupos más importantes de la teoría de grupos es el *grupo lineal general real* [20], definido como

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n | \det \varphi \neq 0\}$$

lo que quiere decir que cada mapeo lineal de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  satisface que su determinante es diferente de cero, es decir, que es invertible [13].

Por otra parte, al definir un *pseudo-producto interno* como una forma bilineal, pero cambiando el tercer axioma de *definido positivo* por el axioma de *no degenerativo*, se obtiene un teorema relevante que dice que hay tantos pseudo-productos internos en un espacio vectorial  $V$  como hayan diferentes signaturas. Entonces, al definir una base en  $V$ , se tiene que

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \begin{bmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $p$  representa la cantidad de veces que aparece el número  $-1$  en la diagonal principal y  $q$  representa la cantidad de veces que aparece el número  $1$ , de tal manera que la dimensión de  $V$  es dada por  $p + q$  [8].

De acuerdo con esto anterior, sea el grupo ortogonal respecto al pseudo-producto interno recientemente definido

$$O(p, q) := \{\varphi : V \longrightarrow V | \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle\}$$

$\forall v, w \in V$ , y de esta manera es posible notar que este no es más que un subgrupo de  $GL(p + q, \mathbb{R})$ , puesto que cumple la misma estructura del grupo lineal general real [8]. La teoría especial de la relatividad satisface esta última definición del grupo ortogonal, con  $p = 1$  y  $q = 3$ , es decir,  $O(1, 3)$ , y este es denominado como *grupo de Lorentz*.

Las transformaciones de Lorentz son organizadas de forma matricial y pueden ser escritas como [8]

$$\bar{x}^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu$$

donde  $\Lambda_\mu^\nu$  satisface que

$$\frac{\partial \Lambda_\mu^\nu}{\partial x^\sigma} = 0$$

y, junto con el tensor de Minkowski, definido como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

se cumple que

$$(\Lambda_\mu^\nu)^T \eta_{\mu\nu} \Lambda_\mu^\nu = \eta_{\mu\nu}$$

se pueden evidenciar ciertas condiciones particulares de simetría.

Las simetrías en el espacio de Minkowski pueden ser bien estudiadas mediante el cálculo de los vectores de Killing, ya que encontrar simetrías de carácter geométrico en un espacio-tiempo, que es una entidad física, debe implicar una relación con alguna o algunas cantidades físicas. Los vectores de Killing pueden ser obtenidos a partir de la ecuación

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

que al estar en una variedad de Minkowski, los símbolos de Christoffel que aparecen en la derivada covariante se anulan, debido a que estos símbolos son correcciones de las derivadas parciales usuales respecto a la curvatura del espacio, pero como en este espacio las trayectorias de la luz en el vacío son rectas, pues la curvatura es inexistente. Por lo anterior, la ecuación se reduce a cambiar las derivadas covariantes por derivadas parciales usuales

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} = 0$$

Por cuestiones de simplicidad en la notación, los operadores diferenciales parciales se cambiarán de la siguiente manera [11]:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} = \partial_\sigma$$

así que la ecuación de Killing en Minkowski queda escrita como

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0 \quad (2-2)$$

Ahora, para resolverla, lo que se hará diferenciar una segunda vez para hacer una permutación de índices que permita sumar y restar términos de la suma y, de esta manera, reducir la ecuación a solucionar. Para esto, se procede de la siguiente manera

$$\partial_\sigma \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\sigma \partial_\nu \xi_\mu = 0$$

Las permutaciones en los subíndices son

$$\partial_\sigma \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\sigma \partial_\nu \xi_\mu = 0 \quad (2-3)$$

$$\partial_\mu \partial_\sigma \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \xi_\sigma = 0 \quad (2-4)$$

$$\partial_\nu \partial_\mu \xi_\sigma + \partial_\nu \partial_\sigma \xi_\mu = 0 \quad (2-5)$$

Se suma (2-3) con (2-4) y se les resta (2-5)

$$\partial_\sigma \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\sigma \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \partial_\sigma \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \xi_\sigma - \partial_\nu \partial_\mu \xi_\sigma - \partial_\nu \partial_\sigma \xi_\mu = 0$$

Con lo que se llega a

$$2\partial_\sigma \partial_\mu \xi_\nu = 0$$

Esto es, que

$$\partial_\sigma \partial_\mu \xi_\nu = 0 \quad (2-6)$$

La solución general de la ecuación (2-6) es de la forma [3]

$$\xi_\nu = h_{\nu\mu} x^\mu + k_\nu \quad (2-7)$$

Esta solución general muestra la forma general de unas transformaciones de coordenadas de rotación y de traslación en el espacio-tiempo. Es necesario encontrar algunas propiedades de esta solución, particularmente, del término  $h_{\nu\mu}$ , que parece tener relación alguna con las rotaciones.

Al sustituir la solución (2-7) en la ecuación (2-2), se observa que

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = h_{\nu\mu} + h_{\mu\nu} = 0$$

Que inmediatamente revela la propiedad de antisimetría de la matriz  $h_{\nu\mu}$ , esto es, que

$$h_{\nu\mu} = -h_{\mu\nu} \quad (2-8)$$

Es decir, por la forma general de las matrices antisimétricas, tiene la siguiente forma

$$h_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -A & -B & -C \\ A & 0 & -D & -E \\ B & D & 0 & -F \\ C & E & F & 0 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Para obtener soluciones con algún significado físico de la forma como se explicó de la solución general 2-7, se hace que la constante de integración  $k_\nu = 1$  y  $h_{\nu\mu} = 0$ , para representar traslaciones unitarias, obteniendo los cuatro primeros vectores de Killing para el espacio de Minkowski, estos son

$$\vec{\xi} = \partial_t \quad (2-10)$$

$$\vec{\xi} = \partial_x \quad (2-11)$$

$$\vec{\xi} = \partial_y \quad (2-12)$$

$$\vec{\xi} = \partial_z \quad (2-13)$$

Ahora, fijando la constante de integración  $k_\nu = 0$ , para tener un enfoque en las rotaciones, la solución queda como

$$\xi_\nu = h_{\nu\mu}x^\mu \quad (2-14)$$

cuyas componentes de índice arriba son escritos como  $\vec{\xi} = \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \xi^\alpha \partial_\alpha$ , por lo que se multiplica al tensor métrico de Minkowski (2-1), pero con sus componentes contravariantes, por (2-14), obteniendo así

$$\xi^\alpha = \eta^{\alpha\nu} \xi_\nu = \eta^{\alpha\nu} h_{\nu\mu} x^\mu \quad (2-15)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -A & -B & -C \\ A & 0 & -D & -E \\ B & D & 0 & -F \\ C & E & F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

De esta manera, para dar una primer solución, se anulan todas las componentes de  $h_{\nu\mu}$ , pero  $D = 1$ , así

$$\xi^\alpha = \eta^{\alpha\nu} \xi_\nu = \eta^{\alpha\nu} h_{\nu\mu} x^\mu \quad (2-17)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

$$= (0, -y, x, 0) \quad (2-19)$$

Como  $\vec{\xi} = \xi^\alpha \partial_\alpha$ , pues

$$\vec{\xi} = (\eta^{\alpha\nu} h_{\nu\mu} x^\mu) \partial_\alpha \quad (2-20)$$

así,

$$\vec{\xi} = (0, -y, x, 0) \begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = -y\partial_x + x\partial_y \quad (2-21)$$

Esto implica rotaciones en el espacio tridimensional alrededor del eje  $z$ , y todo debido a la matriz  $h_{\nu\mu}$ , que tiene la cualidad de ser un generador de rotaciones en el espacio de

Minkowski.

Debido a lo anterior, teniendo las siguientes matrices generadoras,

$$h_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con las cuales se obtienen, respectivamente, los últimos seis vectores de Killing faltantes, completando así, diez vectores Killing para el espacio de Minkowski, siendo coherente con la propiedad de *espacio maximalmente simétrico* [6]

$$\vec{\xi}_{[4]} = -y\partial_x + x\partial_y \tag{2-22}$$

$$\vec{\xi}_{[1]} = x\partial_t + ct\partial_x \tag{2-23}$$

$$\vec{\xi}_{[2]} = y\partial_t + ct\partial_y \tag{2-24}$$

$$\vec{\xi}_{[3]} = z\partial_t + ct\partial_z \tag{2-25}$$

$$\vec{\xi}_{[5]} = -z\partial_x + x\partial_z \tag{2-26}$$

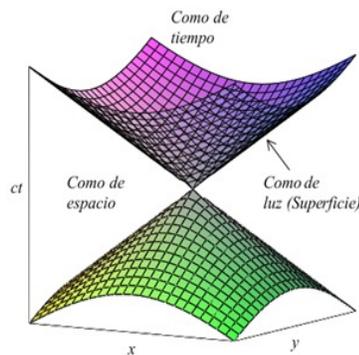
$$\vec{\xi}_{[6]} = -z\partial_y + y\partial_z \quad (2-27)$$

Estos vectores de Killing representan todas las simetrías del espacio de Minkowski. Cualquier rotación en este espacio, puede ser escrita como una combinación lineal de las matrices generadoras, por lo que generan al *grupo de rotaciones* de Minkowski [22].

## 2.2. Elementos de la Teoría General de la Relatividad y del modelo estándar de la Cosmología

En la teoría especial y general de la relatividad el espacio y el tiempo son unificados en una única entidad denominada *espacio-tiempo*, que se define como la colección de todos los eventos. El espacio-tiempo es representado matemáticamente como una variedad suave de cuatro dimensiones y se le asigna un tensor métrico de *Lorentz*. Este tensor métrico de Lorentz es llamado *pseudoriemanniano*, que, junto con la variedad, establecen el par  $(\mathcal{M}, g)$ , denominado *pseudovariedad de Riemann* [9]. Este tensor métrico pseudoriemanniano es un tensor que satisface las propiedades del tensor métrico, pero el producto interno es de tipo *Lorentz*, que significa que la propiedad de *definido positivo* se intercambia por la propiedad de *indefinido*. Esto anterior implica que no es definido positivo ni negativo, permitiendo longitudes mayores, iguales y menores que cero. La propiedad de indefinido tiene como consecuencia a los tipos de conexión que existen en el espacio-tiempo, donde el intervalo relativista es llamado *como de tiempo* si es mayor que cero, *como de luz* o *nulo* si es igual que cero y *como de espacio* si es menor que cero.

La teoría general de la relatividad es sostenida por medio tres postulados fundamentales.



**Figura 2-1:** Representación de las regiones del espacio-tiempo. *Fuente propia.*

El primero de ellos es conocido como *causalidad local*, que consiste en que si se escoge un abierto<sup>2</sup>  $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$ , en el cual se toman dos puntos  $p, q \in \mathcal{M}$ , se puede emitir una señal de luz que parte desde  $p$  y llega a  $q$ , de tal manera que la trayectoria de un único fotón que va

<sup>2</sup>En el espacio-tiempo, representado como la variedad  $\mathcal{M}$ .

de  $p$  a  $q$  puede ser descrita por una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  que une a ambos puntos y que queda completamente dentro del abierto  $\mathcal{U}$ .

El segundo postulado es conocido como *conservación local del momentum y la energía*, que consiste en que las ecuaciones que describen el comportamiento de los campos de materia contienen un tensor simétrico representado por el tensor  $T^{\alpha\beta}$ , denominado *tensor de momentum-energía* y que satisface que este tensor desaparece en un abierto  $\mathcal{U}$  del espacio-tiempo si todos los campos de materia desaparecen en el abierto  $\mathcal{U}$  y que este tensor obedece la ecuación de continuidad

$$\nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta} = 0, \quad (2-28)$$

que implica que el momentum y la energía se conservan en el abierto  $\mathcal{U}$  donde esté definida [9].

El tercer postulado es conocido como *las ecuaciones de campo*, que consiste en la existencia de las ecuaciones de la gravitación, construidas por A. Einstein<sup>3</sup> y publicadas en el año 1915, las cuales describen toda la dinámica del espacio-tiempo de acuerdo a su contenido de energía [9]. Las ecuaciones de campo covariantes son entonces

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (2-29)$$

Siendo  $R_{\alpha\beta}$  el *tensor de curvatura de Ricci*,  $R$  el *escalar de curvatura*,  $g_{\alpha\beta}$  el *tensor métrico*,  $\Lambda$  la *constante cosmológica*,  $\kappa$  una constante que relaciona la velocidad de la luz con la *constante de gravitación universal* y  $T_{\alpha\beta}$  el *tensor de materia-energía*. Con base en esto, es posible entonces cambiar a la preocupación de determinar la solución de Universo que será utilizada en el estudio de este escrito. El *modelo estándar de la cosmología* es una colección de soluciones de las ecuaciones de campo de la gravitación que satisfacen el *principio cosmológico*. Este principio consiste en dos condiciones que determinan propiedades espaciales y que están asociadas a simetrías globales. La primer condición es la de *isotropía* del Universo, que es una invarianza de este bajo rotaciones. La segunda condición es la de *homogeneidad* del Universo, que es una invarianza de este bajo traslaciones [22].

Ahora, con base en estas condiciones, las soluciones se suelen asumir para un Universo que está en expansión acelerada, donde las distancias entre objetos suele incrementarse a un ritmo cada vez más rápido. Se introduce un término  $a(t)$ , denominado como *factor de escala*, el cual afecta el tamaño del espacio en función del tiempo [22]. Estas soluciones son, entonces, escritas en coordenadas esféricas como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2-30)$$

Para el *Universo de de Sitter*, estas condiciones se satisfacen, pero la curvatura espacial se considera nula, esto es,  $k = 0$ , y, además, se considera vacío [22]. Por tanto, las soluciones

---

<sup>3</sup>A la par con D. Hilbert.

son de la forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2-31)$$

Entonces, el problema se reduce a encontrar el factor de escala, para lo cual, se utiliza la *ecuación de Friedmann* [18], de segundo orden, ya que esta ecuación se deduce de utilizar únicamente las componentes temporales de las ecuaciones de campo (2-29), con el fin de solucionar una ecuación diferencial mucho más sencilla. La ecuación de Friedmann es

$$\frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2-32)$$

donde  $\rho$  es la densidad del Universo y  $p$  es la presión, pero como el Universo de de Sitter es vacío, se anulan [18]. Luego, la ecuación se reduce a

$$\frac{1}{a(t)} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} = \frac{\Lambda}{3} \quad (2-33)$$

La solución a esta ecuación se obtiene a partir del *ansatz*<sup>4</sup>  $a(t) = Ae^{\alpha t}$ , por lo que se sustituye en (2-33)

$$\frac{1}{Ae^{\alpha t}} \alpha^2 Ae^{\alpha t} = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\Lambda}{3} \quad (2-34)$$

Se toma la solución positiva de la raíz cuadrada, debido a que esta representa un crecimiento exponencial que es necesario para modelar la expansión acelerada del espacio. Esto es,

$$\alpha^2 = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (2-35)$$

Se sustituye (2-35) en el *ansatz*, que queda como  $a(t) = Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$ . Luego, se toma esta expresión para un tiempo inicial  $t_0$

$$a(t_0) = Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t_0} \quad (2-36)$$

Y se dividen

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}}{Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t_0}} \Rightarrow \frac{a(t)}{a(t_0)} = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)} \quad (2-37)$$

Haciendo que  $a(t_0) = a_0$ , se llega, finalmente,

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)} \quad (2-38)$$

---

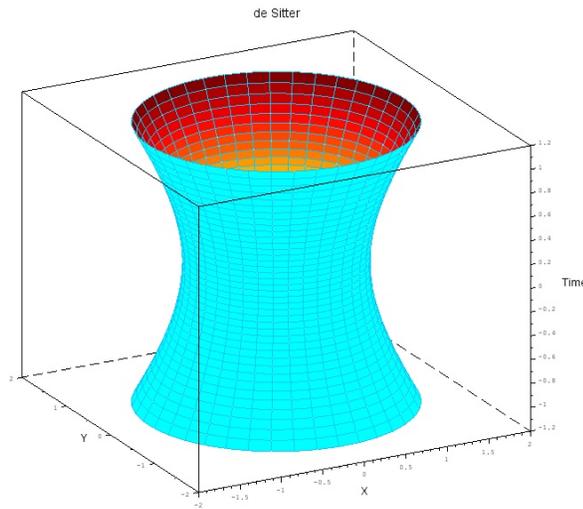
<sup>4</sup>Ansatz es un término utilizado para referirse a una solución conocida.

Este factor de escala se sustituye en (2-31). También se tiene que la *constante de Hubble* es precisamente el término  $\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ , que se denota como  $H_0$ . Finalmente, se expresa la solución para el Universo de de Sitter como [22]

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 e^{2H_0(t-t_0)} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2-39)$$

A modo de análisis de esta solución, el factor de escala encontrado  $a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)}$ , muestra un comportamiento de crecimiento exponencial respecto al tiempo, que multiplica a las componentes espaciales del Universo de de Sitter, es decir, hace que el espacio crezca a este ritmo acelerado a medida que el tiempo transcurre.

Al hacer una representación gráfica de este Universo, representado como un círculo, el factor de escala muestra cómo este Universo se expande en un ritmo acelerado. La solución (2-39) se muestra en la gráfica **2-2** por encima del 0, mientras que la solución negativa, que no se tomó, se muestra por debajo del tiempo igual a 0



**Figura 2-2:** Representación gráfica del Universo de de Sitter. *Fuente propia.*

De esta manera, se tiene una visualización aproximada del comportamiento de este Universo de de Sitter.

## 3 Capítulo 3

En el presente capítulo se plantearán las ecuaciones de Killing asociadas al modelo cosmológico de de Sitter, que requerirán de suposiciones que faciliten resolverlas de manera particular, reduciéndolas a ecuaciones conocidas que permitan aplicar métodos simples. De esta manera, se encontrará un conjunto de vectores que satisfagan estas ecuaciones. Adicionalmente, se hará una exploración sobre la estructura matemática que estos vectores obedecen, para así clasificarlos formalmente.

### 3.1. Solución de las ecuaciones de Killing para el Universo de de Sitter

Se procede a encontrar los vectores de Killing del Universo de de Sitter [6]. Entonces, retomando la ecuación

$$\nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = 0$$

que al expandir, se llega a las siguientes diez ecuaciones [6]

$$\partial_t \xi_t = 0$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_r + \partial_r \xi_t - 2\Gamma_{tr}^r \xi_r = 0$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_{\theta} + \partial_{\theta} \xi_t - 2\Gamma_{t\theta}^{\theta} \xi_{\theta} = 0$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_{\varphi} + \partial_{\varphi} \xi_t - 2\Gamma_{t\varphi}^{\varphi} \xi_{\varphi} = 0$$

$$\partial_r \xi_r - \Gamma_{rr}^t \xi_t = 0$$

$$\partial_r \xi_{\theta} + \partial_{\theta} \xi_r - 2\Gamma_{r\theta}^{\theta} \xi_{\theta} = 0$$

$$\partial_r \xi_{\varphi} + \partial_{\varphi} \xi_r - 2\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} \xi_{\varphi} = 0$$

$$\partial_{\theta} \xi_{\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^t \xi_t - \Gamma_{\theta\theta}^r \xi_r = 0$$

$$\partial_{\theta} \xi_{\varphi} + \partial_{\varphi} \xi_{\theta} - 2\Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} \xi_{\varphi} = 0$$

$$\partial_{\varphi} \xi_{\varphi} - \Gamma_{\varphi\varphi}^t \xi_t - \Gamma_{\varphi\varphi}^r \xi_r - \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} \xi_{\theta} = 0$$

Símbolos de Christoffel no nulos		
$\Gamma_{rr}^t = \frac{a(t)}{c} \frac{da(t)}{dt}$	$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{a(t)r^2}{c} \frac{da(t)}{dt}$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^t = \frac{a(t)r^2 \sin^2 \theta}{c} \frac{da(t)}{dt}$
$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{ca(t)} \frac{da(t)}{dt}$	$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \theta$
$\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{1}{ca(t)} \frac{da(t)}{dt}$	$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$
$\Gamma_{t\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi t}^\varphi = \frac{1}{ca(t)} \frac{da(t)}{dt}$	$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta$

**Tabla 3-1:** Tabla de símbolos de Christoffel no nulos para el modelo estándar de la cosmología. Cálculos hechos por el autor.

Símbolos de Christoffel no nulos		
$\Gamma_{rr}^t = \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)}$	$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 e^{2H_0(t-t_0)}$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^t = \frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 \sin^2 \theta e^{2H_0(t-t_0)}$
$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{H_0}{c}$	$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \theta$
$\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{H_0}{c}$	$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$
$\Gamma_{t\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi t}^\varphi = \frac{H_0}{c}$	$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta$

**Tabla 3-2:** Tabla de símbolos de Christoffel con sus respectivos valores. Cálculos hechos por el autor.

En la tabla **3-1** se muestran los *símbolos de Christoffel* previamente calculados [22]. Teniendo en cuenta que, en la solución de la ecuación de Friedmann para el Universo de de Sitter, se obtuvo que  $a(t) = a_0 e^{H_0(t-t_0)}$ , pues los símbolos de Christoffel quedan expresados como se muestra en la tabla **3-2**.

Sustituyendo los símbolos de Christoffel con el factor de escala ya calculado, se tiene el siguiente sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales de Killing

$$\partial_t \xi_t = 0 \tag{3-1}$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_r + \partial_r \xi_t - \frac{2H_0}{c} \xi_r = 0 \tag{3-2}$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_\theta + \partial_\theta \xi_t - \frac{2H_0}{c} \xi_\theta = 0 \tag{3-3}$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_\varphi + \partial_\varphi \xi_t - \frac{2H_0}{c} \xi_\varphi = 0 \tag{3-4}$$

$$\partial_r \xi_r - \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t = 0 \tag{3-5}$$

$$\partial_r \xi_\theta + \partial_\theta \xi_r - \frac{2}{r} \xi_\theta = 0 \tag{3-6}$$

$$\partial_r \xi_\varphi + \partial_\varphi \xi_r - \frac{2}{r} \xi_\varphi = 0 \tag{3-7}$$

$$\partial_\theta \xi_\theta - \frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t + r \xi_r = 0 \quad (3-8)$$

$$\partial_\theta \xi_\varphi + \partial_\varphi \xi_\theta - 2 \cot \theta \xi_\varphi = 0 \quad (3-9)$$

$$\partial_\varphi \xi_\varphi - \frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 \sin^2 \theta e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t + r \sin^2 \theta \xi_r + \sin \theta \cos \theta \xi_\theta = 0 \quad (3-10)$$

Imponiendo la condición de que  $\xi_\theta = \xi_\varphi = 0$ , pensando como referencia en las soluciones de las ecuaciones de Killing desarrolladas para el espacio-tiempo de Minkowski en el *Capítulo 2*, para así obtener soluciones que involucren dos componentes, pues así se hace visible la relación entre parejas de componentes y además facilita las soluciones. Este argumento se utilizará en cada uno de los posteriores sistemas de ecuaciones. Entonces, el presente sistema se reduce a

$$\partial_t \xi_t = 0 \quad (3-11)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_r + \partial_r \xi_t - \frac{2H_0}{c} \xi_r = 0 \quad (3-12)$$

$$\partial_\theta \xi_t = 0 \quad (3-13)$$

$$\partial_\varphi \xi_t = 0 \quad (3-14)$$

$$\partial_r \xi_r - \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t = 0 \quad (3-15)$$

$$\partial_\theta \xi_r = 0 \quad (3-16)$$

$$\partial_\varphi \xi_r = 0 \quad (3-17)$$

$$-\frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t + r \xi_r = 0 \quad (3-18)$$

$$-\frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 \sin^2 \theta e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t + r \sin^2 \theta \xi_r = 0 \quad (3-19)$$

Para empezar a resolver, se despeja el término  $\xi_r$  de la ecuación (3-18)

$$\xi_r = \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} r \xi_t \quad (3-20)$$

Al derivarlo respecto a  $r$ , se tiene que

$$\partial_r \xi_r = \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t + \frac{H_0 a_0^2}{c} r e^{2H_0(t-t_0)} \partial_r \xi_t \quad (3-21)$$

Que al sustituir en (3-15), se llega a que

$$\frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t + \frac{H_0 a_0^2}{c} r e^{2H_0(t-t_0)} \partial_r \xi_t - \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t = 0 \quad (3-22)$$

$$\frac{H_0 a_0^2}{c} r e^{2H_0(t-t_0)} \partial_r \xi_t = 0 \quad (3-23)$$

Esto es,

$$\partial_r \xi_t = 0 \Rightarrow \xi_t = \alpha_1 \quad (3-24)$$

Siendo  $\alpha_1$  una constante, por lo que la ecuación (3-20) queda escrita como

$$\xi_r = \frac{\alpha_1 H_0 R_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \quad (3-25)$$

La cual se verifica, para lo cual se deriva respecto a  $t$

$$\partial_t \xi_r = \frac{2\alpha_1 H_0^2 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \quad (3-26)$$

Y se sustituye en (3-12)

$$\frac{2\alpha_1 H_0^2 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} - 2H_0 \left[ \frac{\alpha_1 H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \right] = 0 \quad (3-27)$$

$$\frac{2\alpha_1 H_0^2 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} - \frac{2\alpha_1 H_0^2 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} = 0 \quad (3-28)$$

Por lo que se puede evidenciar que estas dos componentes satisfacen el sistema de ecuaciones. De esta manera, el vector de Killing será

$$\vec{\xi}_{[1]} = \alpha_1 \partial^t + \frac{\alpha_1 H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \partial^r \quad (3-29)$$

Imponiendo la condición de que  $\xi_r = \xi_\varphi = 0$ , el sistema se reduce a

$$\partial_t \xi_t = 0 \quad (3-30)$$

$$\partial_r \xi_t = 0 \quad (3-31)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_\theta + \partial_\theta \xi_t - \frac{2H_0}{c} \xi_\theta = 0 \quad (3-32)$$

$$\partial_\varphi \xi_t = 0 \quad (3-33)$$

$$-\frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t = 0 \quad (3-34)$$

$$\partial_r \xi_\theta - \frac{2}{r} \xi_\theta = 0 \quad (3-35)$$

$$\partial_\theta \xi_\theta - \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} r^2 \xi_t = 0 \quad (3-36)$$

$$\partial_\varphi \xi_\theta = 0 \quad (3-37)$$

$$-\frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} r^2 \sin^2 \theta \xi_t + \sin \theta \cos \theta \xi_\theta = 0 \quad (3-38)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3-34), se puede deducir que

$$\xi_t = 0 \quad (3-39)$$

Ahora, con la ecuación (3-30), (3-31) y (3-33), se evidencia que  $\xi_t = \xi_t(\theta)$ . Por otro lado, tomando la ecuación (3-38), se despeja la componente  $\xi_\theta$  y se llega a la relación

$$\xi_\theta = \frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} r^2 \tan \theta \xi_t \quad (3-40)$$

que, debido al resultado (el de  $\xi_t = 0$ ), se llega a que

$$\xi_\theta = 0 \quad (3-41)$$

Por lo tanto, el vector de Killing resultante será

$$\vec{\xi}_{[2]} = \vec{0} \quad (3-42)$$

Imponiendo la condición de que  $\xi_r = \xi_\theta = 0$ , el sistema se reduce a

$$\partial_t \xi_t = 0 \quad (3-43)$$

$$\partial_r \xi_t = 0 \quad (3-44)$$

$$\partial_\theta \xi_t = 0 \quad (3-45)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t \xi_\varphi + \partial_\varphi \xi_t - \frac{2H_0}{c} \xi_\varphi = 0 \quad (3-46)$$

$$-\frac{H_0 a_0^2}{c} e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t = 0 \quad (3-47)$$

$$\partial_r \xi_\varphi - \frac{2}{r} \xi_\varphi = 0 \quad (3-48)$$

$$-\frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t = 0 \quad (3-49)$$

$$\partial_\theta \xi_\varphi - 2 \cot \theta \xi_\varphi = 0 \quad (3-50)$$

$$\partial_\varphi \xi_\varphi - \frac{H_0 a_0^2}{c} r^2 \sin^2 \theta e^{2H_0(t-t_0)} \xi_t = 0 \quad (3-51)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3-47) y (3-49), se puede deducir que

$$\xi_t = 0 \quad (3-52)$$

De acuerdo a esto, tomando la ecuación (3-51), se llega a que

$$\partial_\varphi \xi_\varphi = 0 \tag{3-53}$$

y, además, la ecuación (3-46) se vuelve

$$\partial_t \xi_\varphi - 2H_0 \xi_\varphi = 0 \tag{3-54}$$

cuya solución es

$$\xi_\varphi = C(r, \theta) e^{2H_0 t} \tag{3-55}$$

y solucionando las ecuaciones (3-48) y (3-50) se tiene respectivamente

$$\xi_\varphi = A(t, \theta) r^2 \tag{3-56}$$

$$\xi_\varphi = B(t, r) \sin^2 \theta \tag{3-57}$$

que implican que

$$\xi_\varphi = \alpha_2 e^{2H_0 t} r^2 \sin^2 \theta \tag{3-58}$$

Por lo tanto, el vector de Killing será

$$\vec{\xi}_{[3]} = \alpha_2 e^{2H_0 t} r^2 \sin^2 \theta \partial^\varphi \tag{3-59}$$

Imponiendo la condición de que  $\xi_t = \xi_\varphi = 0$ , el sistema se reduce a

$$\partial_t \xi_r - 2H_0 \xi_r = 0 \tag{3-60}$$

$$\partial_t \xi_\theta - 2H_0 \xi_\theta = 0 \tag{3-61}$$

$$\partial_r \xi_r = 0 \tag{3-62}$$

$$\partial_r \xi_\theta + \partial_\theta \xi_r - \frac{2}{r} \xi_\theta = 0 \tag{3-63}$$

$$\partial_\varphi \xi_r = 0 \tag{3-64}$$

$$\partial_{\theta}\xi_{\theta} + r\xi_r = 0 \quad (3-65)$$

$$\partial_{\varphi}\xi_{\theta} = 0 \quad (3-66)$$

$$r \sin^2 \theta \xi_r + \sin \theta \cos \theta \xi_{\theta} = 0 \quad (3-67)$$

Para solucionar este sistema, se toman las ecuaciones (3-60) y (3-61) de la siguiente manera

$$\partial_t \xi_r = 2H_0 \xi_r \quad (3-68)$$

$$\partial_t \xi_{\theta} = 2H_0 \xi_{\theta} \quad (3-69)$$

Cuyas soluciones son, respectivamente, mediante el método de *variables separables*

$$\xi_r = R(\theta)e^{2H_0 t} \quad (3-70)$$

$$\xi_{\theta} = \Theta(r, \theta)e^{2H_0 t} \quad (3-71)$$

Tomando la ecuación (3-67), se despeja  $\xi_{\theta}$ , para obtener una función de la siguiente manera

$$\xi_{\theta} = -r \tan \theta \xi_r \quad (3-72)$$

por lo que sólo queda por hallar  $\xi_r$ . Entonces, tomando la ecuación (3-63), se sustituye la ecuación (3-72), y se llega a

$$-\tan \theta \xi_r + \partial_{\theta} \xi_r + 2 \tan \theta \xi_r = 0 \quad (3-73)$$

que es lo mismo que

$$\partial_{\theta} \xi_r + \tan \theta \xi_r = 0 \quad (3-74)$$

y su solución es

$$\xi_r = T(t) \cos \theta \quad (3-75)$$

Así, juntando esta solución (3-75) con (3-70), se llega a que

$$\xi_r = \alpha_3 e^{2H_0 t} \cos \theta \quad (3-76)$$

siendo  $\alpha_3$  una constante de proporcionalidad. De esta manera, sustituyendo (3-76) en (3-72), se tiene que

$$\xi_{\theta} = -\alpha_3 e^{2H_0 t} r \sin \theta \quad (3-77)$$

Por lo tanto, el vector de Killing es

$$\vec{\xi}_{[4]} = \alpha_3 e^{2H_0 t} \cos \theta \partial^r - \alpha_3 e^{2H_0 t} r \sin \theta \partial^\theta \quad (3-78)$$

Imponiendo la condición de que  $\xi_t = \xi_\theta = 0$ , el sistema se reduce a

$$\partial_t \xi_r - 2H_0 \xi_r = 0 \quad (3-79)$$

$$\partial_t \xi_\varphi - 2H_0 \xi_\varphi = 0 \quad (3-80)$$

$$\partial_r \xi_r = 0 \quad (3-81)$$

$$\partial_\theta \xi_r = 0 \quad (3-82)$$

$$\partial_r \xi_\varphi + \partial_\varphi \xi_r - \frac{2}{r} \xi_\varphi = 0 \quad (3-83)$$

$$r \xi_r = 0 \quad (3-84)$$

$$\partial_\theta \xi_\varphi - 2 \cot \theta \xi_\varphi = 0 \quad (3-85)$$

$$\partial_\varphi \xi_\varphi + r \sin^2 \theta \xi_r = 0 \quad (3-86)$$

Por lo tanto, el vector de Killing será

$$\vec{\xi}_{[5]} = \alpha_2 e^{2H_0 t} r^2 \sin^2 \theta \partial^\varphi \quad (3-87)$$

Imponiendo la condición de que  $\xi_t = \xi_r = 0$ , el sistema se reduce a

$$\partial_t \xi_\theta - 2H_0 \xi_\theta = 0 \quad (3-88)$$

$$\partial_t \xi_\varphi - 2H_0 \xi_\varphi = 0 \quad (3-89)$$

$$\partial_r \xi_\theta - \frac{2}{r} \xi_\theta = 0 \quad (3-90)$$

$$\partial_r \xi_\varphi - \frac{2}{r} \xi_\varphi = 0 \quad (3-91)$$

$$\partial_\theta \xi_\theta = 0 \quad (3-92)$$

$$\partial_\theta \xi_\varphi + \partial_\varphi \xi_\theta - 2 \cot \theta \xi_\varphi = 0 \quad (3-93)$$

$$\partial_\varphi \xi_\varphi + \sin \theta \cos \theta \xi_\theta = 0 \quad (3-94)$$

Para empezar a solucionar este sistema de ecuaciones diferenciales se comienza tomando las cuatro primeras ecuaciones, cuyas soluciones, respectivamente, no son más que

$$\xi_\theta = \Theta_1(r, \varphi) e^{2H_0 t} \quad (3-95)$$

$$\xi_\varphi = \Phi_1(r, \theta, \varphi)e^{2H_0t} \quad (3-96)$$

$$\xi_\theta = \Theta_2(t, \varphi)r^2 \quad (3-97)$$

$$\xi_\varphi = \Phi_2(t, \theta, \varphi)r^2 \quad (3-98)$$

por lo que se tiene,

$$\xi_\theta = f(\varphi)e^{2H_0t}r^2 \quad (3-99)$$

$$\xi_\varphi = g(\theta, \varphi)e^{2H_0t}r^2 \quad (3-100)$$

Entonces, sustituyendo (3-97) y (3-100) en (3-94), se tiene que

$$e^{2H_0t}r^2\partial_\varphi g(\theta, \varphi) + e^{2H_0t}r^2 \sin \theta \cos \theta f(\varphi) = 0 \quad (3-101)$$

que, simplificado y reordenado, queda escrito como

$$\partial_\varphi g(\theta, \varphi) = -\sin \theta \cos \theta f(\varphi) \quad (3-102)$$

La solución de esta última se obtiene mediante la expresión

$$g(\theta, \varphi) = -\sin \theta \cos \theta \int f(\varphi)d\varphi \quad (3-103)$$

que es equivalente a

$$g(\theta, \varphi) = -\sin \theta \cos \theta \int f(\varphi')d\varphi' + h(\theta) \quad (3-104)$$

Derivando la expresión (3-104) respecto a  $\theta$ , se tiene que

$$\partial_\theta g(\theta, \varphi) = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \int f(\varphi')d\varphi' + \partial_\theta h(\theta) \quad (3-105)$$

y, entonces, se sustituyen las funciones (3-99) y (3-100) junto con (3-104) en (3-93), por lo que se tiene que

$$\partial_\theta g(\theta, \varphi) + \partial_\varphi f(\varphi) - 2 \cot \theta g(\theta, \varphi) = 0 \quad (3-106)$$

que es equivalente a

$$(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \int f(\varphi')d\varphi' + \partial_\theta h(\theta) + \partial_\varphi f(\varphi) + 2 \cos^2 \theta \int f(\varphi')d\varphi' - 2 \cot \theta h(\theta) = 0 \quad (3-107)$$

el cual, simplificado y reordenado, queda escrito como

$$\sin^2 \theta \int f(\varphi')d\varphi' + \cos^2 \theta \int f(\varphi')d\varphi' + \partial_\theta h(\theta) + \partial_\varphi f(\varphi) - 2 \cot \theta h(\theta) = 0 \quad (3-108)$$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \int f(\varphi') d\varphi' + \partial_\theta h(\theta) + \partial_\varphi f(\varphi) - 2 \cot \theta h(\theta) = 0 \quad (3-109)$$

$$\int f(\varphi') d\varphi' + \partial_\theta h(\theta) + \partial_\varphi f(\varphi) - 2 \cot \theta h(\theta) = 0 \quad (3-110)$$

y esta última se deriva respecto a  $\varphi$ , por lo que se obtiene una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2}(\varphi) + f(\varphi) = 0 \quad (3-111)$$

cuya solución general es

$$f(\varphi) = \alpha_5 \sin \varphi + \alpha_6 \cos \varphi \quad (3-112)$$

donde  $\alpha_5$  y  $\alpha_6$  son constantes. De manera similar, se procede a hallar la función  $h(\theta)$ , al retomar (3-111) tal que, reordenando, se escribe como

$$\partial_\theta h(\theta) - 2 \cot \theta h(\theta) = - \int f(\varphi') d\varphi' - \partial_\varphi f(\varphi) \quad (3-113)$$

que es equivalente a

$$\frac{dh}{d\theta}(\theta) - 2 \cot \theta h(\theta) = -\alpha_7 \quad (3-114)$$

donde  $\alpha_7$  es una constante de separación. La solución a esta ecuación (3-114) es

$$h(\theta) = \alpha_7 \sin \theta \cos \theta + \alpha_8 \sin^2 \theta \quad (3-115)$$

Así, se tienen todas las funciones necesarias para poder obtener las componentes del vector de Killing. De esta manera,

$$\xi_\theta = \alpha_9 e^{2H_0 t} r^2 (\alpha_5 \sin \varphi + \alpha_6 \cos \varphi) \quad (3-116)$$

y, a su vez, para obtener  $\xi_\varphi$ , se debe encontrar primero  $g(\theta, \varphi)$ , entonces

$$g(\theta, \varphi) = -\sin \theta \cos \theta \int (\alpha_5 \sin \varphi' + \alpha_6 \cos \varphi') d\varphi' + \alpha_7 \sin \theta \cos \theta + \alpha_8 \sin^2 \theta \quad (3-117)$$

$$g(\theta, \varphi) = -\sin \theta \cos \theta (-\alpha_5 \cos \varphi' + \alpha_6 \sin \varphi') + \alpha_7 \sin \theta \cos \theta + \alpha_8 \sin^2 \theta \quad (3-118)$$

pero  $\varphi' = \varphi$ , por lo que

$$g(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \theta (\alpha_5 \cos \varphi - \alpha_6 \sin \varphi + \alpha_7) + \alpha_8 \sin^2 \theta \quad (3-119)$$

de lo que se tiene entonces que

$$\xi_\varphi = \alpha_{10} e^{2H_0 t} r^2 [\sin \theta \cos \theta (\alpha_5 \cos \varphi - \alpha_6 \sin \varphi + \alpha_7) + \alpha_8 \sin^2 \theta] \quad (3-120)$$

Por lo tanto, el vector de Killing será

$$\vec{\xi}_{[6]} = \alpha_9 e^{2H_0 t} r^2 (\alpha_5 \sin \varphi + \alpha_6 \cos \varphi) \partial^\theta + \alpha_{10} e^{2H_0 t} r^2 [\sin \theta \cos \theta (\alpha_5 \cos \varphi - \alpha_6 \sin \varphi + \alpha_7) + \alpha_8 \sin^2 \theta] \partial^\varphi \quad (3-121)$$

Reuniendo las componentes solución de sus respectivos sistemas de ecuaciones, se propone que la forma de los vectores sea  $\vec{\xi} = \xi^\sigma \partial_\sigma$ , pero estas soluciones son componentes covariantes, por lo que se debe hacer que  $\vec{\xi} = g^{\sigma\rho} \xi_\rho \partial_\sigma$ . Como las componentes del tensor métrico con supraíndices mezclados son nulos, se reescribe esto como  $\vec{\xi} = g^{\sigma\sigma} \xi_\sigma \partial_\sigma$ . Así,  $\vec{\xi} = g^{tt} \xi_t \partial_t + g^{rr} \xi_r \partial_r + g^{\theta\theta} \xi_\theta \partial_\theta + g^{\varphi\varphi} \xi_\varphi \partial_\varphi$ .

Como cada sistema corresponde a un campo vectorial particular, se denota a cada vector con un subíndice de esta manera  $\vec{\xi}_{[i]}$ . Ahora, se escriben cada uno de los vectores de Killing como

$$\vec{\xi}_{[1]} = \partial_t \quad (3-122)$$

$$\vec{\xi}_{[2]} = \partial_r \quad (3-123)$$

$$\vec{\xi}_{[3]} = \partial_\theta \quad (3-124)$$

$$\vec{\xi}_{[5]} = -\alpha_1 \partial_t + \frac{\alpha_1 H_0}{c} r \partial_r \quad (3-125)$$

$$\vec{\xi}_{[6]} = \frac{e^{2H_0 t_0}}{a_0^2} \cos \theta \partial_r - \frac{e^{2H_0 t_0}}{a_0^2} \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \quad (3-126)$$

$$\vec{\xi}_{[7]} = \frac{e^{2H_0 t_0}}{a_0^2} \partial_\varphi \quad (3-127)$$

$$\vec{\xi}_{[8]} = \frac{e^{2H_0 t_0}}{a_0^2} (A \cos \varphi + B \sin \varphi) \partial_\theta + \frac{e^{2H_0 t_0}}{a_0^2} \cot \theta (-A \sin \varphi + B \cos \varphi + \alpha_2 \tan \theta + k) \partial_\varphi \quad (3-128)$$

Escogiendo que  $\alpha_1 = \frac{\alpha_1 H_0}{c} = \frac{e^{2H_0 t_0}}{a_0^2} = 1$ ,  $\alpha_2 = C$  y  $k = 0$ , se obtiene, finalmente, que

$$\vec{\xi}_{[1]} = \partial_t \quad (3-129)$$

$$\vec{\xi}_{[2]} = \partial_r \quad (3-130)$$

$$\vec{\xi}_{[3]} = \partial_\theta \quad (3-131)$$

$$\vec{\xi}_{[5]} = -\partial_t + r \partial_r \quad (3-132)$$

$$\vec{\xi}_{[6]} = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \quad (3-133)$$

$$\vec{\xi}_{[7]} = \partial_\varphi \quad (3-134)$$

$$\vec{\xi}_{[8]} = (A \cos \varphi + B \sin \varphi) \partial_\theta + (-A \cot \theta \sin \varphi + B \cot \theta \cos \varphi + C) \partial_\varphi \quad (3-135)$$

Cada uno de ellos, como se describió en el *Capítulo 1*, es elemento del espacio tangente a la variedad,  $T\mathcal{M}$ , en este caso, el Universo de de Sitter. Estos vectores encontrados son un conjunto de siete vectores que apuntan en dirección de las simetrías de dicho Universo. Se toma el producto interno entre el vector (3-129) y el *cuadrimentum* con el propósito de encontrar las proyecciones del cuadrimentum sobre la dirección temporal, ya que esto permite entender cómo se comporta el momentum en dicha dirección de simetría. También se deriva respecto al tiempo para entender cómo se comporta el momentum a medida que avanza el tiempo mientras se proyecta sobre este vector. De esta manera, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \partial_t, p^\mu \partial_\mu \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \partial_t, p^t \partial_t \rangle + \frac{d}{dt} \langle \partial_t, p^i \partial_i \rangle = \frac{dp^t}{dt} \langle \partial_t, \partial_t \rangle + \frac{dp^i}{dt} \langle \partial_t, \partial_i \rangle \\ &= \frac{dp^t}{dt} \langle \partial_t, \partial_t \rangle + 0 = \frac{dp^t}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, que

$$\frac{d}{dt} \langle \partial_t, p^\mu \partial_\mu \rangle = \frac{dE}{dt} = 0 \quad (3-136)$$

lo que significa que la energía se conserva.

Se toma el producto interno entre los vectores (3-130), (3-131) y (3-134) y el *cuadrimentum*, con el propósito de encontrar las proyecciones del cuadrimentum sobre dichos vectores que apuntan en direcciones espaciales de simetría. Se deriva respecto al tiempo para entender cómo se comporta el cuadrimentum a medida que avanza el tiempo mientras se proyecta sobre estos vectores. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \partial_r, p^\mu \partial_\mu \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \partial_r, p^t \partial_t \rangle + \frac{d}{dt} \langle \partial_r, p^i \partial_i \rangle = \frac{dp^t}{dt} \langle \partial_r, \partial_t \rangle + \frac{dp^i}{dt} \langle \partial_r, \partial_i \rangle \\ &= 0 + \frac{dp^i}{dt} \langle \partial_r, \partial_i \rangle = \frac{dp^i}{dt} = 0 \end{aligned}$$

el término  $\langle \partial_r, \partial_i \rangle = 1$  debido a que el subíndice corresponde a la componente espacial  $r$ . Así,

$$\frac{d}{dt} \langle \partial_r, p^\mu \partial_\mu \rangle = \frac{dp^i}{dt} = 0 \quad (3-137)$$

lo que significa que el momentum lineal se conserva.

Los vectores (3-130), (3-131) y (3-134) representan traslaciones unitarias espaciales, por lo cual están asociadas al momentum lineal, y el vector (3-129) representa traslaciones unitarias temporales que, tal como se mostró, está asociado a la energía. El vector (3-135) es una manifestación explícita de las rotaciones espaciales que se trabaja en la mecánica clásica [19]. Por lo anterior, la interpretación física de estos vectores tiene relación con las tres cantidades

físicas principales que se conservan<sup>1</sup>, ya que estos vectores representan traslaciones y rotaciones en este Universo de de Sitter expresados en coordenadas esféricas. De esta manera, es posible notar la importancia de los vectores de Killing para expresar geoméricamente la invarianza de cantidades físicas, como el momento lineal y la energía, que están asociadas con las traslaciones espacio-temporales, y el momento angular y, nuevamente, la energía, que se relacionan con las rotaciones espacio-temporales.

---

<sup>1</sup>Momentum lineal, momentum angular y la energía.

## 4 Reflexiones finales y conclusiones

El conjunto de conceptos abordados en el Capítulo 1 permitieron profundizar sobre las estructuras matemáticas subyacentes a la teoría general de la relatividad desde un punto de vista actual, lo cual se evidencia en la amplia terminología utilizada al estudiar esta teoría. Como ejemplo, es común referirse a los términos de *vector tangente* o *cotangente*, *tensor métrico*, *tensor de Ricci*, *derivada covariante*, entre otros más. La geometría de Riemann es el suelo teórico sobre el cual la teoría general de la relatividad descansa, y puede entenderse, en simples palabras, como la unificación del Álgebra, la Topología y el Cálculo.

En este primer capítulo se logró realizar una contextualización de la definición de espacio tangente a la variedad de acuerdo a la convicción de querer expresar de manera escrita y rigurosa la típica imagen de este concepto, es decir, una superficie suavemente curvada y un plano tangente a un punto de la superficie. A este plano se le da la connotación de espacio tangente, pero, a pesar de que no sea una idea errónea, no es la más precisa, puesto que existen infinitas maneras de representar a los espacios tangentes y, además, a las variedades. Así, la solución consistió en pensar cómo describir textualmente esta imagen y luego tratar de capturar las condiciones que permanecerían invariantes bajo una idea general y abstracta de variedad suave. Entre estos invariantes, se consideró un punto de referencia y un conjunto de curvas sobre la variedad que pasan por este punto, lo cual establece una relación entre estas curvas. Una vez entendiendo cuáles eran estos invariantes, se procedió a estudiar la naturaleza de los vectores tangentes, que consistió en definir funciones reales sobre la variedad que cambiaran al ritmo de las curvas mencionadas anteriormente, por lo que se evaluó este ritmo de cambio mediante una derivada total respecto al parámetro previamente establecido con las curvas. Este parámetro en Física puede ser un tiempo. Estas derivadas son los vectores tangentes a la variedad suave, por lo que su colección resulta ser el espacio vectorial  $L(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R})$ . Finalmente, el espacio tangente toma elementos de  $L(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \mathbb{R})$  y les pone como restricción las condiciones invariantes que fueron identificadas anteriormente.

Este concepto fue clave para el trabajo de grado, puesto que todos los objetos matemáticos que fueron útiles para cumplir con los objetivos planteados son elementos de este espacio o son derivados del mismo.

En el Capítulo 2 se abordaron algunas estructuras matemáticas aplicadas a la teoría especial de la relatividad, con el objetivo de mostrar un referente importante para el posterior tratamiento teórico del Universo de de Sitter. Principalmente, se solucionan las ecuaciones de Killing para el espacio-tiempo de Minkowski de forma canónica. Para estas soluciones se

escogen unas condiciones particulares que permiten obtener unos vectores que evidencian una relación con las rotaciones y traslaciones en el espacio-tiempo.

Posteriormente, se explica brevemente en qué consiste la teoría general de la relatividad, partiendo de una definición de espacio-tiempo formal, entendiendo a esta entidad como una *pseudovariiedad de Riemann* debido a su métrica lorentziana. Luego, se describieron los postulados de la teoría, de los cuales uno de ellos introduce las ecuaciones de campo de Einstein. Después se explicó, también brevemente, el modelo estándar de la Cosmología, mostrándolo como un conjunto de universos que satisfacen el principio cosmológico, es decir, la hipótesis de un Universo isotrópico y homogéneo. Este modelo postula una métrica en coordenadas esféricas que soluciona globalmente las ecuaciones de Einstein, satisfaciendo el principio cosmológico. Se introdujeron las condiciones para un Universo de de Sitter, es decir, un Universo vacío y en expansión acelerada, por lo que el problema se redujo a encontrar el factor de escala  $a(t)$ . Para este propósito, se acudió a las ecuaciones de Friedmann, que, afortunadamente para el caso, fue una alternativa bastante simple para hallar el factor de escala. Finalmente, se tiene el factor de escala y se plantea la métrica que permite determinar el modelo de Universo de de Sitter.

En el Capítulo 3 se establecieron las ecuaciones de Killing para el Universo de de Sitter, que resultó ser un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales y acopladas. Al comienzo, se plantearon diferentes conjuntos de soluciones que fueron desechados, puesto que no tenían la forma de las soluciones halladas en el Capítulo 2 para el espacio-tiempo de Minkowski. Debido a esta dificultad, se consideró hacer suposiciones similares a las hechas en Minkowski, así que se anularon parejas de componentes, por lo que salieron diez casos de ecuaciones diferenciables, pero con la facilidad de que podían ser desacopladas utilizando el método de variables separables. La resolución de las ecuaciones de Killing implicó encontrar un conjunto de siete vectores linealmente independientes en coordenadas esféricas que apuntan en dirección de las simetrías del Universo de de Sitter. Las constantes que aparecieron en los vectores a medida que se solucionaban las ecuaciones fueron calibradas de manera que se hiciera una simplificación, es decir, se igualaron a la unidad para hacer explícita la forma matemática, ya que estas constantes representan un conjunto de infinitas soluciones. Se demostró que estos vectores de Killing permiten deducir cantidades físicas que se conservan, por ejemplo, tomando el producto interno entre los vectores de Killing y el momentum lineal y luego derivándolo respecto al tiempo, ya que esto permite proyectar al momentum lineal sobre los vectores para entender cómo sería su evolución temporal sobre tales direcciones de simetría, arrojando las clásicas leyes de conservación de momentum lineal, asociado a traslaciones espaciales, energía, asociado a traslaciones temporales y momentum angular, asociado a rotaciones espaciales.

Finalmente, este trabajo es una introducción que permite explorar nuevas experiencias de profundización disciplinar para las y los maestros en formación que quieran estudiar este tipo de temas relacionados con la Astronomía y la Cosmología Moderna.

# Bibliografía

- [1] Adámek, J., Herrlich, H. y Strecker, G. (2004). Abstract and Concrete Categories.
- [2] Arkhangel'skii, A. (1990). General Topology I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [3] Arnold, V. (1989). Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag.
- [4] Cruz, Y., Salas, J. y Duque, R. (2014). Notas de Geometría Diferencial y Aplicaciones a la Física. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.
- [5] Engelking, R. (1989). General Topology. Heldermann Verlag Berlin.
- [6] Das, N.D.H. and Desiraju, H. (2016). Killing vectors of FLRW metric (in comoving coordinates) and zero modes of the scalar Laplacian.
- [7] Greub, W.H. (1967). Multilinear Algebra. Springer-Verlag.
- [8] Hackbusch, W. (2012). Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus. Springer-Verlag.
- [9] Hawking, S., Ellis, G. (1973). The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press.
- [10] Lang, S. (1985). Differential Manifolds. Springer-Verlag.
- [11] Lang, S. (1995). Differential and Riemannian Manifolds. Springer-Verlag.
- [12] Lee, J. (2012). Introduction to Smooth Manifolds. Springer-Verlag.
- [13] Liesen, J., Mehrmann, V. (2015). Linear Algebra. Springer-Verlag.
- [14] McMullen, C. (2013). Topology: Course Notes. Harvard University.
- [15] Milnor, J. (1965). Topology From the Differentiable Viewpoint. The University Press of Virginia.
- [16] Munkres, J. (1975). Topology. Prentice Hall.
- [17] Rubiano, G. (2010). Topología General: Un primer curso. Universidad Nacional de Colombia.
- [18] Romeu, J.A. (2014). Derivation of Friedmann equations.

- [19] Rojas, W.C. (2015). Simetrías, cantidades conservadas y vectores de Killing. Universidad Nacional de Colombia.
- [20] Serre, J-P. (1992). Lie Algebras and Lie Groups. Springer.
- [21] Sohrab, H. (2010). Basic Real Analysis. Springer-Verlag.
- [22] Weinberg, S. (1972). Gravitation and cosmology. Principles and applications of the general theory of relativity. John Wiley and Sons, Inc.