

**Estudio del Conocimiento Didáctico-Matemático de Dos Profesores sobre Argumentación,
Entornos de Geometría Dinámica y Diseño de Tareas**

Haliaphne Annh Acosta Aguilar

Michael Yhair Montana Páez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Diciembre de 2022

**Estudio del Conocimiento Didáctico-Matemático de Dos Profesores sobre Argumentación,
Entornos de Geometría Dinámica y Diseño de Tareas**

Haliaphne Annh Acosta Aguilar

Michael Yhair Montana Páez

Codirectores:

Mg. Carmen Samper

Dr. Carlos Roberto Pérez Medina

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

Magister en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá, D. C. 2022

Dedicatoria

A mi papá, por demostrarme que los cambios son necesarios.

A mi mamá, por enseñarme a cumplir mis metas.

A mis abuelos, por su ánimo, paciencia y amor.

Haliaphne Acosta

A mis padres, por su apoyo incondicional,

por sus enseñanzas y consejos,

por su ejemplo, presencia y compañía.

A mis hermanas, por el amor y la complicidad,

por sus ocurrencias y alegrías.

Michael Montana

Agradecimientos

Deseamos agradecer a nuestras familias por el apoyo y el ánimo constante durante el desarrollo de este trabajo. Agradecemos a la Universidad Pedagógica Nacional y a todos los miembros de la Maestría en Docencia de la Matemática, por los aportes tanto académicos como personales ya que estos nos permitieron cuestionarnos, reflexionar, contrastar, pero, sobre todo, transformar nuestro conocimiento didáctico-matemático.

A la profesora Carmen Samper, por su paciencia, tiempo, esfuerzo y dedicación durante el desarrollo de este trabajo. Gracias a ella logramos consolidar ideas y ejecutarlas, y crear acuerdos que nos permitieron finalizar nuestro trabajo.

De igual forma, agradecemos al Dr. Carlos Pérez, por su acompañamiento, orientación y por el tiempo dedicado en los inicios del desarrollo de este trabajo. También, deseamos agradecer especialmente a la Dra. Leonor Camargo, quien motivó, en muchos instantes, la realización de este proyecto; nos apoyó y brindó muchas herramientas, prácticas y teóricas, necesarias para el desarrollo de este.

Tabla de Contenidos

Resumen	11
Introducción	12
1. Planteamiento del Problema	15
1.1. Motivaciones Iniciales	15
1.2. Delimitación del Problema	16
1.3. Justificación	22
1.4. Objetivo General	25
1.5. Objetivos Específicos	25
1.6. Antecedentes	26
2. Marco de Referencia	31
2.1. Modelos del Conocimiento del Profesor	31
2.2. Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemáticos Basado en el EOS	36
3. Metodología	42
3.1. Perspectiva Investigativa	42
3.2. Estrategia Investigativa	43
3.3. Desarrollo del Estudio	45
3.4. Descripción de los Momentos 1 y 2	47
3.4.1. Momento 1	47
3.4.2. Momento 2	52

	6
3.5. Descripción de los Momentos 3 y 4	53
3.5.1. Momento 3	53
3.5.2. Momento 4	58
3.6. Momento 5	59
3.7. Momento 6	63
3.8. Análisis de la Información	64
3.8.1. Categorías de Caracterización del Conocimiento	64
3.8.2. Categorías de Análisis para la Transformación del Conocimiento	69
3.9. Consideraciones éticas del estudio	71
4. Análisis de los Datos	72
4.1. Procedimiento de Análisis de los Datos del Momento 2 y el Momento 4	72
4.2. Análisis del Conocimiento de Hali	76
4.2.1. Procedimiento de Análisis de Datos del Conocimiento de Hali en los Momentos 2 y 4	77
4.2.2. Compendio del Conocimiento de Hali Después del Momento 4	82
4.3. Análisis del Conocimiento de Michael	84
4.3.1. Procedimiento de análisis de datos del conocimiento de Michael en los Momentos 2 y 4	84
4.3.2. Compendio del Conocimiento de Michael Después del Momento 4	90
4.4. Procedimiento de Análisis del Compendio de Conocimiento y el Momento 6	91
4.4.1. Procedimiento de Análisis de Datos del Conocimiento de Hali en el Momento 6	94

	7
4.4.2. Procedimiento de Análisis de Datos del Conocimiento de Michael en el Momento 6	98
5. Conclusiones y Proyecciones	103
5.1. Conclusiones	103
5.1.1. Sobre la Transformación de Nuestro Conocimiento Didáctico-Matemático	104
5.1.2. Sobre el Objetivo General	107
5.2. Aportes del Trabajo de Grado a Nosotros como Profesores	109
5.3. Aportes del trabajo a la línea de estudio sobre el conocimiento del profesor	113
5.4. Limitaciones y Proyecciones del Estudio	114
Referencias	116
Anexos	120

Listado de Figuras

Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza. Tomada de Pino-Fan y Godino (2015, pág. 91)	35
Figura 2. Momentos del estudio	45
Figura 3. Momentos 1 y 2.....	48
Figura 4. Momento 3 y Momento 4.....	54
Figura 5. Fases del Momento 5.....	60

Listado de Tablas

Tabla 1. Ejemplo de registro y clasificación de afirmaciones - Hali	50
Tabla 2. Ejemplo de registro y clasificación de afirmaciones - Michael	50
Tabla 3. Afirmación extraída Tabla de Insumos – Michael.....	51
Tabla 4. Afirmación extraída Tabla de Insumos – Hali.....	51
Tabla 5. Tabla de Insumos – Michael.....	52
Tabla 6. Tabla de Insumos – Hali	52
Tabla 7. Organización cronológica de afirmaciones – Hali.....	57
Tabla 8. Tabla de Insumos Momento 3 – Michael	57
Tabla 9. Tabla de Insumos Momento 3 – Hali.....	58
Tabla 10. Tabla de Insumos Momento 4 - Michael	58
Tabla 11. Tabla de insumos Momento 4 – Hali.....	59
Tabla 12. Insumo Depurado Tabla de Insumos – Hali	61
Tabla 13. Distinción entre Dato e Insumo – Hali	62
Tabla 14. Criterios de Conocimiento según las Facetas del CDM	66
Tabla 15. Categorías de Análisis para la Caracterización del Conocimiento	68
Tabla 16. Categorías de Análisis para la Transformación del Conocimiento.....	71
Tabla 17. Tipificación de Datos de Hali con las Categorías de Caracterización del Conocimiento	73
Tabla 18. Tipificación de Datos de Michael con las Categorías de Caracterización del Conocimiento.....	73
Tabla 19. Síntesis por Categorías de Caracterización del Conocimiento de Hali para el Momento 2.....	74

Tabla 20. Síntesis por Categorías de Caracterización del Conocimiento de Michael para el Momento 2	74
Tabla 21. Tipificación del Conocimiento de Hali a partir de las Categorías Emergentes de Transformación	75
Tabla 22. Tipificación del Conocimiento de Michael a partir de las Categorías Emergentes de Transformación	76
Tabla 23. Resumen del Conocimiento sobre cada Asunto para los Momentos 2 y 4 - Hali.....	79
Tabla 24. Resumen del Conocimiento sobre cada Asunto para los Momentos 2 y 4 – Michael.	86
Tabla 25. Tipificación de los Datos del Momento 6 de Hali con las Categorías de Caracterización del Conocimiento	92
Tabla 26. Tipificación de los Datos del Momento 6 de Michael con las Categorías de Caracterización del Conocimiento	92
Tabla 27. Tipificación del Conocimiento de Hali a partir de las Categorías Emergentes de Transformación	93
Tabla 28. Tipificación del Conocimiento de Michael a partir de las Categorías Emergentes de Transformación	94

Resumen

El presente trabajo estudia la transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemático en torno al diseño de tareas escolares que promuevan la argumentación, mediados por algún entorno de geometría dinámica. Para el estudio, se adopta algunos elementos del modelo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino, Batanero y Font (2007). La estrategia investigativa usada en este trabajo es una adaptación de lo denominado estudio en primera persona; esta nos permite reflexionar y obtener mayor comprensión del conocimiento de dos profesores sobre los asuntos argumentación, entornos de geometría dinámica y diseño de tareas. Con base en el modelo y la estrategia investigativa es posible caracterizar nuestro propio conocimiento y construir categorías para describir la transformación del mismo, motivada por un programa de formación avanzada enfocado en el estudio del conocimiento del profesor. El trabajo se desarrolla en el campo de argumentación y prueba, en la línea de la geometría, y está vinculado a intereses del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional.

Palabras claves: Diseño de tareas, entornos de geometría dinámica (EGD), argumentación, argumento, conocimiento del profesor, conocimiento didáctico-matemático.

Introducción

El presente trabajo parte del interés conjunto de los autores por estudiar el conocimiento que debe tener un profesor para diseñar tareas escolares enfocadas en la dimensión fractal, con la intención de ampliar el trabajo de grado de la Licenciatura que cada uno de nosotros desarrolló previamente. El enfoque del programa de la Maestría en Docencia de la Matemática para la cohorte 2020-I, que estaba ubicado en la línea de investigación *Argumentación y Prueba*, se centra específicamente en el conocimiento didáctico-matemático del profesor para diseñar tareas que propicien la argumentación en el aula escolar. Al tener en cuenta dicho enfoque y nuestro interés, reconocimos que el primer paso para lograr nuestro objetivo inicial es adquirir el conocimiento didáctico-matemático requerido para diseñar tareas escolares que versaran sobre fractales y que se enfoquen en un proceso específico, que podría ser la argumentación.

Así, nuestro objetivo comenzó a centrarse en la necesidad de reconocer cuál debe ser el conocimiento del profesor de matemáticas para diseñar dichas tareas, mediadas por entornos de geometría dinámica, que promuevan la argumentación de los estudiantes. Teniendo en cuenta que somos dos profesores con diferente formación inicial, pero con intereses comunes, nos preguntamos de qué manera el camino común que transitamos en la Maestría nos aportó a la transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemático sobre los asuntos: diseño de tareas (DT), argumentación (AR) y entornos de geometría dinámica (EGD). Específicamente, queríamos saber si lo aprendido en los seminarios propuestos por la Maestría en Docencia de la Matemática para la cohorte 2020-I, la reflexión continua sobre dichos aprendizajes y la experiencia adquirida día a día, posibilitan llegar a un lugar común respecto al conocimiento de los asuntos mencionados.

Este trabajo tiene como propósito analizar el proceso de transformación del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores sobre el diseño de tareas, entornos de geometría dinámica y argumentación. Para ello nos basamos en algunos elementos del modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), el cual tomamos como referente conceptual. Realizamos un estudio de caso intrínseco, mediante el desarrollo de seis momentos en los que se establecieron y analizaron datos sobre nuestro conocimiento, respecto a los asuntos mencionados, en tres momentos: antes del ingreso al programa, durante el primer semestre de la Maestría (2020-I) y una vez terminado el análisis de los datos usados en este estudio. Para ello recolectamos insumos, de estos determinamos los datos investigativos y se construimos categorías emergentes para la caracterización del conocimiento y la transformación de este.

En el Capítulo 1, presentamos la motivación inicial y la problemática que nos llevó a realizar este trabajo. Luego, presentamos la justificación que incluye la importancia y relevancia de este estudio en el campo de investigación. Además, exponemos el objetivo general, los objetivos específicos de este trabajo y la revisión de algunos antecedentes teóricos provenientes de investigaciones en educación matemática.

En el Capítulo 2, presentamos algunos modelos del conocimiento del profesor y describimos el referente conceptual en el cual nos basamos para cumplir con el objetivo de este estudio. Abordamos las características generales del modelo CDM y la interpretación de este modelo en nuestro trabajo.

En el Capítulo 3, presentamos el enfoque y la aproximación que adoptamos en esta investigación. También, describimos la estrategia investigativa y el desarrollo del estudio ahondando en las características de cada uno de los momentos respecto a la recolección de

insumos y a la construcción de los datos investigativos. Además, exponemos y explicamos los dos conjuntos de categorías que usamos para hacer el análisis de nuestro conocimiento didáctico-matemático.

En el Capítulo 4, exhibimos el análisis que cada uno realizó del conocimiento del otro en tres de los momentos, centrando la atención en describir y caracterizar la transformación, si la hubo, con el fin de compararla entre un momento y otro. Además, cada uno presenta un compendio del conocimiento del otro, respecto a cada asunto de interés, evidenciado durante el análisis realizado.

En el Capítulo 5, presentamos las conclusiones y proyecciones del estudio. Estas están relacionadas con la pregunta de investigación, el objetivo general, los objetivos específicos, la transformación que se evidenció de nuestro conocimiento didáctico- matemático sobre cada asunto y algunas consideraciones personales.

En los anexos se encuentran las tablas de insumos que constan de afirmaciones, respecto a los asuntos de interés, extraídas por cada uno de nosotros, de nuestras notas de clase, diarios de campo, tareas presentadas en los seminarios, pruebas de ingreso a la Maestría. Luego, presentamos las tablas en las que cada uno consignó los datos del estudio, la tipificación de estos y resultados obtenidos.

1. Planteamiento del Problema

1.1. Motivaciones Iniciales

Al buscar un tema para desarrollar nuestro trabajo de grado, nos dimos cuenta que teníamos un interés común: los fractales, la inquietud sobre cómo abordar la noción de dimensión fractal en el aula escolar y sobre cuáles procesos matemáticos se favorecerían.

Ambos, en nuestros respectivos trabajos de grado para la licenciatura, Hali en Artes Visuales y Michael en Matemáticas, nos enfocamos en el potencial de la teoría fractal para el desarrollo en la escuela de diversos procesos matemáticos, entre ellos: la visualización, la abstracción y el desarrollo del pensamiento espacial.

Hali, en su trabajo (Acosta, 2017), abordó la noción de fractal a partir de la interdisciplinariedad del arte y la ciencia, y se enfocó particularmente en los saberes teóricos y visuales de la teoría fractal. Michael, en su trabajo (Castiblanco & Montana, 2018), estudió la noción de dimensión desde tres enfoques matemáticos: algebraico, topológico y el de la geometría fractal.

El enfoque del programa propuesto para la cohorte 2020-I, con la que ingresamos a la Maestría en Docencia de la Matemática, ofrecida por el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se ubica en la línea de investigación *Argumentación y Prueba*, específicamente con el conocimiento didáctico-matemático del profesor para diseñar tareas que propicien la argumentación en el aula escolar. Inicialmente pensamos hacer el trabajo de grado en ese escenario, pero con miras hacia la enseñanza de fractales en el aula escolar. Al considerar lo que queríamos desarrollar, reconocimos que el primer paso para lograr dicho objetivo era adquirir el conocimiento didáctico-matemático requerido para diseñar tareas que tuvieran como objeto matemático a los fractales y que se enfocara en un proceso específico, que

podría ser la argumentación. Según lo afirman Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki (2011), los profesores de matemáticas y algunos investigadores reconocen que el estudio de la argumentación es una necesidad formativa, pues ello lleva a obtener el conocimiento que permita diseñar tareas que promuevan este proceso matemático.

1.2. Delimitación del Problema

Al enfocar la atención en la argumentación, observamos que en las reuniones de área algunos de nuestros colegas se cuestionaban por qué los estudiantes no logran los resultados esperados de acuerdo con los programas curriculares, con respecto a conceptos, relaciones y procesos, entre ellos, la argumentación. Nos resultó interesante cuestionarnos y reflexionar sobre las ideas de nuestros pares cuando se preguntan “¿por qué no argumentan los estudiantes?” Cuando nuestros colegas hablan de argumentación ¿a qué se refieren?, ¿qué es lo que realmente están esperando que digan o hagan los estudiantes? Además, en estos mismos espacios de interacción entre profesores se generaban discusiones en torno a las distintas dificultades de los estudiantes que se traducen en bajo rendimiento académico, actitud no del todo positiva, entre otros. Percibimos que en determinados momentos se culpaba únicamente a los estudiantes por los malos resultados y no se reflexionaba respecto a la labor del profesor, a su actuar, a lo que hace bien o mal dentro del aula de clase, a las tareas que propone, a las herramientas que usa y que espera que usen sus estudiantes. Muchas veces como profesores pensamos que hacemos las cosas bien pero no analizamos nuestras acciones, por lo que es importante reflexionar sobre el quehacer y conocimiento didáctico-matemático del profesor. Esto, junto con nuestro interés original y lo que ofrecía la Maestría, nos llevó a concretar el foco de nuestro estudio: el conocimiento didáctico-matemático del profesor para diseñar tareas que fomenten la argumentación y en las cuales sea útil el uso de una herramienta digital. El interés por los

fractales nos condujo a querer realizar el trabajo de grado juntos. Durante la discusión de intereses y posibilidades para este, decidimos primero enfocarnos en el conocimiento didáctico-matemático del profesor en relación con los asuntos propuestos por la Maestría; por lo anterior, dejamos de lado, provisionalmente, el tema de los fractales.

Para ampliar lo mencionado previamente en relación con la percepción de la argumentación en la escuela, acudimos a las dificultades que distintos autores han citado respecto a la enseñanza de la argumentación y la demostración, enfocadas en el conocimiento del profesor, que, para nuestro caso, se convirtió en el objeto de estudio. Jones y Herbst (2011) puntualizan que, si se pretende favorecer en el aula escolar la argumentación y la demostración, el profesor de matemáticas debe tener un conocimiento sólido de estos asuntos, aun cuando ellos en sí mismos no sean el objeto principal de la enseñanza. La implementación de tareas que propendan el desarrollo de la argumentación en el aula escolar no es simple, entre varias razones, porque los profesores tenemos grandes vacíos sobre este asunto. Kaiser, Schwarz y Krackowitz (2009) muestran que la mayoría de los profesores que escogieron para hacer un estudio al respecto no pudieron construir demostraciones formales a pesar de que estas requieren únicamente contenido matemático de secundaria; es decir, pretenden enseñar algo cuando realmente no lo tienen claro.

Douek (2009), basándose en su experiencia con maestros de secundaria, identifica dos dificultades que tienen estos para establecer el hábito de argumentar en clase: diseñar y gestionar tareas que impulsen a la producción de conjeturas, dado que esto es una actividad propicia para la argumentación. Según Douek, la incorporación de la argumentación y la demostración en la práctica docente requiere un cambio profundo en los hábitos ya establecidos por los profesores para el desarrollo de sus clases, por lo que el profesor debe considerar cómo renegociar,

productivamente, el contrato didáctico y llegar a establecer normas socio-matemáticas más adecuadas para dicha práctica.

En concordancia con lo que dice Douek, varios autores, como Hill, Ball, y Schilling (2008) y, Godino, Batanero y Font (2007) no sólo aluden a los problemas que tienen los profesores para el abordaje de la argumentación y la demostración en sus clases, sino que también concuerdan en que los profesores necesitan idear alternativas a las tareas tradicionales que proponen a sus estudiantes, pues es frecuente que usen tareas descritas en libros de texto, repliquen las que les propusieron durante su formación inicial o las tomen de otros materiales didácticos. Concluyen que es importante y necesario que cuando el profesor proponga una determinada tarea a sus estudiantes, no sólo tenga el conocimiento para resolverla, sino que además pueda identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en su resolución, que le ayuden a prever posibles conflictos, elaborar ampliaciones y variaciones de las tareas, y que pueda planificar posibles institucionalizaciones de los conocimientos implicados.

Hasta este momento hemos descrito una perspectiva que tomamos como punto de partida para la configuración inicial del problema relacionado con la argumentación y el diseño de tareas. Esta incluye el desconocimiento del profesor para demostrar y enseñar a hacerlo, su concepción de argumentación y argumento, la falta de autocrítica a los diseños de tareas que realizan, claridad en objetivos, comprensión en el uso de recursos, y la enunciación de lo que se pretende que el estudiante deba realizar y aprender.

Por lo anterior, nuestro interés comienza a perfilarse en la necesidad de reconocer cuál debe ser el conocimiento del profesor de matemáticas para diseñar tareas, mediadas por entornos de geometría dinámica, que promuevan la argumentación de los estudiantes. Teniendo en cuenta que somos dos profesores con diferente formación inicial, pero con intereses comunes, nos

preguntamos cómo el camino común que transitamos en el primer semestre de la Maestría nos aportaría a la transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemático sobre los asuntos: tarea, diseño de tareas (DT), argumento, argumentación (AR) y entornos de geometría dinámica (EGD). Específicamente, si lo aprendido en los seminarios propuestos por la Maestría en Docencia de la Matemática para la cohorte 2020-I, la reflexión continua de dichos aprendizajes y la experiencia adquirida día a día, nos permitiría llegar a un lugar común respecto a los asuntos en cuestión. Dicho lugar común podría ser nuestro eventual punto de partida para resolver y abordar la inquietud inicial sobre qué conocimiento debería tener el profesor para poder trabajar fractales, en el contexto escolar, como escenario para favorecer la argumentación.

Para esto, es importante reconocer el punto de partida inicial de cada uno de nosotros, recordando que nuestra formación pregradual fue en distintas áreas del conocimiento. Michael se formó como Licenciado en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional. Él expresa que en ningún momento estableció semejanzas o diferencias, ni discutió sobre a qué hacía referencia cada uno de los siguientes términos: tarea, taller, actividad, problemas y ejercicios. En cuanto al diseño de tareas, Michael reconoce que tuvo un acercamiento a ello en las asesorías de práctica y en los distintos cursos de Enseñanza y Aprendizaje (álgebra, cálculo y geometría) ofertados por la Universidad. En estos espacios se establecían los objetivos de cada una de las tareas que se esperaba proponer, se situaba el objeto matemático en el nivel y contexto escolar de los estudiantes, se pensaba en las formas de interacción, en las formas de agrupamiento y en las herramientas que iban a ser utilizadas durante la resolución de la tarea. Sin embargo, él reconoce que la propuesta de tarea que se llevaba al aula era tomada de libros de texto, de situaciones vistas en internet o de modificaciones que hacían de talleres de clase que habían aplicado otros

compañeros exitosamente. Así, Michael considera que en ninguna de las asignaturas cursadas en el pregrado le enseñaron o le dieron pautas puntuales para diseñar tareas.

En los cursos de geometría plana y del espacio, Michael participó como resolutor de problemas abiertos de conjeturación, lo que le permitió explorar, conjeturar y demostrar. Esos cursos fueron los únicos en los que él usó diferentes softwares de geometría dinámica. En las otras líneas como cálculo, álgebra o estadística, sus clases se limitaban a resolver los ejercicios propuestos en los libros de texto.

En cuanto a los EGD, en ningún momento durante la carrera escuchó puntualmente ese término. Siempre se mencionaban programas o software de geometría y él los relacionaba directamente con GeoGebra, Cabri Geometry o, Regla y Compás. Desde su primer semestre, en todos los cursos de la línea de Geometría, él hacía uso de calculadoras-graficadoras que permitían la exploración y construcción de situaciones geométricas.

Respecto a la argumentación, Michael la relacionaba con una estructura que aprendió en el curso Elementos de Geometría; esta se componía de tres partes: Qué sé, Qué uso y Qué concluyo. Afirma, además, que nunca se puntualizó nada más de este concepto en alguna de sus clases.

Por otro lado, Hali se formó como Licenciada en Artes Visuales de la Universidad Pedagógica Nacional y en el momento en que comenzó la Maestría estaba también estudiando matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia. Respecto a los tres asuntos del énfasis correspondiente a la cohorte 2020-1, ella reconoce que se vieron de distintas formas, dependiendo en gran medida del contexto.

Respecto a la argumentación, ella reconoce este aprendizaje en dos sentidos. El primero de ellos en relación con cursos de escritura y argumentación, los cuales se centraban en la

redacción de textos académicos y científicos, donde cada afirmación debía ser “argumentada”, es decir, justificada a partir de antecedentes investigativos tanto empíricos como teóricos. El segundo escenario son las matemáticas, y en este sentido la argumentación iba directamente relacionada con la demostración; por ejemplo, si se pedía argumentar porqué el conjunto de los números racionales es un cuerpo, se debía justificar que el conjunto de los números racionales cumple con las características o propiedades que determinan que un conjunto, junto con una operación, sean un cuerpo, probando esto matemáticamente. En relación a la licenciatura, no se abordó nada más allá de argumentos artísticos, entendiéndolos como aquellas razones que determinaban si algo era o no arte.

En cuanto al diseño de tareas, en su paso por la Universidad Nacional jamás se habló o se trabajó en relación con ello. Su experiencia respecto a este asunto viene del desarrollo de monitorías con estudiantes de primeros semestres mientras culminaba su pregrado; para ello, había un espacio de reunión semanal en la que se discutían ideas sobre el desarrollo de las sesiones de monitorías y allí se hablaba de diseñar tareas como el acto de planear o diseñar actividades para desarrollar con los estudiantes, además de diseñar quices y tareas (actividades para desarrollar en casa). En la licenciatura en artes visuales, Hali tomó un curso dirigido a la planeación de tareas; en él aprendió a reconocer elementos importantes a la hora del diseño, como: temporalidad, materiales, tipo de población, edades, técnica, proceso a desarrollar e intereses del estudiante; en dicho curso sólo se hicieron varias planeaciones que fueron discutidas, pero no llevadas a cabo. Luego, en sus prácticas pedagógicas se basó en dichas planeaciones, y recuerda que, si bien se hacía una planeación general para cada escenario y contexto, se tenía un amplio margen para modificarla de acuerdo con los recursos con los que se contara en el momento de llevarla a cabo, y a las necesidades, habilidades, destrezas e intereses

de los estudiantes. Por último, respecto a los EGD, no se mencionó nada respecto a ello durante todo su pregrado. Ella puede asociar EGD al trabajo y uso de Wolfram, Mathematica, UltraFractal5 o Derive.

Al tener en cuenta cada uno las diferentes asociaciones, experiencias y acercamientos respecto a los asuntos: argumentación, EGD y diseño de tareas, nos interesamos por reconocer y reflexionar sobre la posible transformación de nuestro conocimiento al pasar por la Maestría en Docencia de la Matemática, dado el enfoque de esta: conocimiento del profesor. Es así como los fractales pasaron a un segundo plano y dejaron de ser el foco en el desarrollo de este estudio.

A continuación, presentamos la pregunta que orientó el desarrollo de nuestro estudio. Esta pregunta atiende a las ideas expuestas anteriormente y pretende fijar la atención en los asuntos que abordamos y fueron nuestra guía:

¿Qué transformación del conocimiento didáctico-matemático, necesario para el diseño de tareas que promuevan la argumentación de estudiantes escolares y que requieren el uso de entornos de geometría dinámica, se evidencia en dos profesores tras haber cursado el primer semestre del programa de la Maestría Docencia de la Matemáticas de la UPN?

1.3. Justificación

La importancia del presente trabajo se sustenta en tres aspectos: investigativos, curriculares e institucionales. Cada uno de ellos, de manera independiente y en conjunto, evidencian la razón de ser y la relevancia de este trabajo. Para sustentar lo dicho es necesario revisar los tres aspectos mencionados a la luz de las investigaciones realizadas en torno a la argumentación, el diseño de tareas y el conocimiento del profesor; de este modo, podemos brindar una mejor idea de la importancia de nuestra investigación.

En relación con los aspectos investigativos, Mariotti (2006) menciona que en los últimos años se han acrecentado las investigaciones orientadas a analizar y estudiar los procesos de argumentación y demostración en geometría; dicho interés radica, entre muchas otras razones, en la importancia y utilidad que tienen en la enseñanza. Hanna (2000) enfatiza en que la demostración, una de las formas de argumentar, proporciona una explicación satisfactoria de porqué una conjetura es cierta. De Villiers (1999) puntualiza que la demostración, entendida en un sentido amplio, tiene varias funciones importantes que incluye: verificación, descubrimiento, explicación, comunicación, desafío intelectual y sistematización. Un valor importante de la demostración vista como forma de argumentar es que fomenta el debate y esto, a su vez, impulsa a los estudiantes a evolucionar en la producción de argumentos.

Respecto a la importancia del diseño de tareas mediante el uso de herramientas tecnológicas, Leung y Bolite-Frant (2015) hacen énfasis en que las herramientas deben considerarse más que elementos auxiliares, puesto que influyen en la cognición e impactan el conocimiento matemático. En esta vía, Hanna (2000) señala que, por sus capacidades gráficas, los programas de geometría dinámica tienen el potencial para estimular tanto la exploración como la demostración, lo que hace más fácil proponer y probar conjeturas. Específicamente, estas conjeturas pueden surgir de la coordinación entre las propiedades que se utilizan durante la construcción y las propiedades destacadas como invariantes bajo el arrastre.

Hasta ahora, hemos indicado la importancia que los autores asignan a la argumentación y al diseño de tareas, de forma independiente. Con lo anterior como referencia, consideramos que una razón importante para la realización de este trabajo es poder aportar en el campo de investigación sobre el conocimiento del profesor, ya que podríamos hacer una contribución

relevante pues este estudio articulará argumentación, diseño de tareas y entornos de geometría dinámica como elementos del conocimiento del profesor.

Respecto a los referentes curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, mencionan que uno de los procesos generales de la actividad matemática, que enfatiza en lo que significa ser matemáticamente competente, es “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 51). Además, en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas se propone como sugerencia y reto para los profesores puesto que las tareas que diseñen deben permitir a los estudiantes: “explorar, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos, estimular representaciones informales y múltiples, y al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción del conocimiento” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pág. 37).

Por lo tanto, en los documentos que brindan orientaciones curriculares se reconoce la importancia del diseño de tareas que propendan a lo ya mencionado. Además, contribuyan a llenar el vacío referido en la delimitación del problema. Mediante la elaboración de este trabajo podríamos aportar un insumo para que profesores de la comunidad educativa evidencien consideraciones didácticas y matemáticas que podrían aportar a la transformación del conocimiento y sean útiles para la formación profesional.

Finalmente, en lo que respecta a los asuntos institucionales, consideramos que este estudio puede contribuir para hacer la reflexión y, de ser necesario, la modificación de los seminarios o de sus objetivos ofrecidos en la Maestría en Docencia de la Matemática. Dado que “este espacio pretende contribuir al desarrollo profesional e investigativo de los educadores en

matemáticas, apoyando procesos de profesionalización e investigación, para atender asuntos sociales y culturales de la Educación Matemática” (MDM, 2022), es posible que los resultados y conclusiones de este estudio dejen entrever cuánto y cómo los seminarios del primer semestre contribuyeron a la transformación del conocimiento didáctico-matemático de nosotros como profesores.

1.4. Objetivo General

Analizar el proceso de transformación del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores, respecto al diseño de tareas, a entornos de geometría dinámica y a la argumentación; motivado por el transitar en la Maestría en Docencia de la Matemática.

1.5. Objetivos Específicos

- Determinar los asuntos específicos del conocimiento requeridos para diseñar tareas escolares que, usando geometría dinámica, favorezcan la argumentación.
- Presentar el fundamento teórico del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor, propuesto por Pino-Fan y Godino (2015).
- Estudiar posibles estrategias investigativas para decidir cuál sería útil para guiar el proceso de recolección de datos, construir categorías de análisis para clasificar el conocimiento de cada profesor y determinar la transformación de este.
- Caracterizar la transformación, si la hubo, del conocimiento de cada profesor.
- Dar cuenta de los aportes y el impacto que tuvo en nuestra formación el ser partícipes de los seminarios ofrecidos por un programa de formación avanzada enfocado en el estudio del conocimiento del profesor.

1.6. Antecedentes

En este apartado presentamos una breve descripción de algunos trabajos previos que se relacionan con nuestra investigación y que nos aportan elementos conceptuales y herramientas metodológicas para el desarrollo de esta. Realizamos la búsqueda en bases de datos especializadas teniendo como foco la *educación matemática*. También hicimos uso de la bibliografía proporcionada en los seminarios de la Maestría. A partir de lo anterior, elegimos trabajos que ponen en evidencia los aportes investigativos alrededor del diseño de tareas mediadas por el uso de entornos de geometría dinámica, y que están en relación con el conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Pincheira y Vásquez (2018) en su investigación dan cuenta del proceso de diseño, construcción y validación de un instrumento que tiene el propósito de evaluar aspectos relacionados al conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de Educación Básica en relación con las matemáticas elementales. Ellas se situaron en la perspectiva del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS); esto les brindó herramientas de análisis que les permitió aportar evidencias sobre el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido. Pretenden que las evidencias recolectadas permitan, a futuro, mejorar la formación inicial docente. El estudio les permitió concluir la necesidad de contar con un instrumento de evaluación para describir el conocimiento didáctico-matemático que poseen los futuros profesores para enseñar matemáticas elementales. Por medio de los resultados parciales que obtuvieron afirman que existe el desafío de poder reconocer el conocimiento didáctico-matemático del profesorado en las distintas áreas del conocimiento matemático como: álgebra,

estadística, probabilidad, geometría, entre otras, áreas que los futuros profesores desarrollarán en diferentes niveles educativos.

Consideramos relevante el trabajo de Pincheira y Vásquez (2018) porque nos proporciona un ejemplo de diseño, construcción y validación de un instrumento para reconocer el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemáticas, todo esto a partir del enfoque onto-semiótico, el cual es de nuestro interés. Pero lo que realmente se resalta de la investigación es la conclusión respecto a la importancia de reconocer el conocimiento didáctico-matemático del profesor para poder evaluar asuntos programáticos y de estructuras en las respectivas instituciones de formación de profesores. Además, esta investigación nos proporciona claridad respecto al conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado propuestos por el EOS.

Velásquez y Cisneros (2013) proponen un taller orientado a profesores de matemáticas en formación inicial y continuada, en el que se discute respecto a los conocimientos que debe tener un profesor que enseña matemáticas. Ahí se analizan los modelos del conocimiento del profesor propuestos por Shulman (1987), Ball (2000) y Godino (2009), para estudiar las diversas dimensiones del conocimiento del profesor que se necesita para describir y guiar el avance de procesos de enseñanza y aprendizaje. Las actividades planteadas están orientadas tanto a diferenciar el conocimiento común del conocimiento especializado como a reconocer la idoneidad didáctica de las tareas propuestas a los estudiantes. El taller se desarrolló en tres momentos. En el primero, Velásquez y Cisneros propusieron tres situaciones matemáticas para ser analizadas por el grupo de profesores participantes; en el segundo momento, los profesores diseñaron tareas para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos. En el tercer momento se discutieron y analizaron colectivamente las propuestas realizadas por los profesores. A partir

de ello, en las discusiones finales se concluyó sobre la importancia, no sólo sobre el conocimiento del contenido, sino sobre los conocimientos que se requieren para enseñarlos.

Velásquez y Cisneros (2013) concluyeron que aún en actividades matemáticas aparentemente sencillas se manifiesta la complejidad de la estructura del conocimiento matemático y la necesidad de un conocimiento matemático para la enseñanza; por lo tanto, indican que es deseable generar espacios de formación de profesores donde se reflexione sobre los conocimientos que se requieren para asumir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por último, afirman que se requiere diseñar e implementar instrumentos que permitan valorar los conocimientos del profesor para generar procesos de transformación de las prácticas en la escuela, lo que puede contribuir al diseño de programas de formación de profesores, a la creación y ejecución de normas, y a la creación de políticas educativas que podrían permitir el mejoramiento en los procesos de formación matemática de los niños. Las conclusiones son lo que nos aporta y motiva a desarrollar nuestro estudio y cumplir el objetivo que hemos propuesto.

Además, tomamos como referencia el trabajo de Godino, Batanero y Font (2007). Aquí se presenta una síntesis del Enfoque Onto-semiótico, modelo teórico sobre el conocimiento y la instrucción metamatemática. El EOS supone que la matemática es una actividad humana, en la que las entidades u objetos involucrados en esta emergen de las acciones y el discurso a través del cual se expresan y comunican los estudiantes (Font, Godino y Gallardo, 2013; citado en Molina, Font y Pino-Fan, 2019). Como rasgos característicos se destacan la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a la resolución de problemas, a los recursos expresivos y el asumir supuestos pragmáticos coherentes y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos. Godino, Batanero y Font

(2007) afirman, además, que los postulados o supuestos básicos del EOS se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. Además, se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental de los objetos matemáticos. Este enfoque propone una ontología de los objetos matemáticos derivada de la práctica matemática, entendida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, entre otras) realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas.

Consideramos relevante el trabajo de Godino, Batanero y Font (2007), ya que tiene en cuenta las diferentes facetas del conocimiento didáctico-matemático del profesor implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos. Además, este modelo incluye una “guía” para la elaboración de enunciados sobre el conocimiento didáctico-matemático. Basándonos en dicho modelo, podemos evaluar y aportar a aspectos específicos del conocimiento (común, especializado y ampliado) entendido como la faceta epistémica del conocimiento del profesor, en la cual se incluyen algunas consideraciones matemáticas relativas al contexto institucional.

Por último, también consideramos relevante para nuestra investigación el trabajo de Ayvaz-Tuncel y Çobanoğlu (2018) debido a que ellos hacen hincapié en la importancia de formar maestros que tengan habilidades pedagógicas y competencias para enseñar en todos los niveles y tipos de educación. Afirman que, en general, los programas de formación avanzada tienen como objetivo brindar una oportunidad para mejorar los conocimientos, habilidades y destrezas de los profesores en formación. Consideran que son necesarios los procesos de autoevaluación con rigor científico de profesores en formación para poder identificar

habilidades, saberes y destrezas adquiridas en un programa de formación, elemento que además es útil para la evaluación que se debe realizar periódicamente de los espacios académicos que conforman el programa de formación, lo que les permite mejorar resultados. Es así como, a partir de lo propuesto por Ayvaz-Tuncel y Çobanoğlu (2018), se reconoce la importancia de dar cuenta de los aportes y el impacto que tuvo en nuestra formación el ser partícipes de los seminarios ofrecidos por un programa de formación avanzada.

2. Marco de Referencia

En este capítulo presentamos una síntesis de algunos modelos del conocimiento del profesor creados por diversos investigadores que trabajan en el campo de la Educación y la Educación Matemática. Luego, abordamos el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor propuesto por Pino-Fan y Godino (2015), parte del cual es referente teórico para nuestro estudio, en especial las facetas que en éste se proponen. Finalmente, ahondamos en las características generales del CDM y presentamos nuestra interpretación de este modelo a la luz de nuestros intereses investigativos.

2.1. Modelos del Conocimiento del Profesor

Desde hace algunas décadas, diversos investigadores se han interesado en la formación didáctica y matemática de los profesores de matemáticas. Producto de ello es el notable incremento de publicaciones relacionadas con la formación de profesores de matemáticas, documentadas en revistas y libros de investigación de Educación Matemática. Pino-Fan y Godino (2015) afirman que la atención de dichas investigaciones se ha centrado en la determinación de cuáles deberían ser los conocimientos didácticos y matemáticos que debería tener un profesor de matemáticas para que su labor sea idónea.

Existen diversos modelos que consolidan, describen y caracterizan los elementos que componen el conocimiento del profesor de matemáticas; sin embargo, es evidente que no hay un consenso que permita generalizar los elementos que conforman dicho conocimiento. A continuación, presentamos una síntesis de los modelos propuestos por Lee Shulman, Pamela Grossman y Deborah Ball. El primero es un psicólogo educativo que ha realizado contribuciones notables al estudio de la enseñanza y la evaluación de la enseñanza en los campos de la ciencia y las matemáticas. Pamela Grossman es doctora en Currículo y Formación

Docente, investigadora experta en preparación y desarrollo profesional docente. Deborah Ball es una investigadora que lidera equipos de trabajo enfocados en la enseñanza de las matemáticas, que se destacan por los aportes a la formación de profesores de matemáticas.

Shulman (1986) propuso un modelo compuesto por tres categorías que describen el conocimiento del profesor: *conocimiento del contenido*, *conocimiento pedagógico del contenido* y *conocimiento curricular*. El *conocimiento del contenido* hace referencia al conocimiento que tiene el profesor sobre la asignatura que enseña. Además, incluye también el por qué es importante lo que enseña y cómo lo que enseña se relacionan con otros temas del campo de estudio u otras áreas del conocimiento. Significa que el profesor debe comprender a profundidad por qué un determinado tema es fundamental para una disciplina, mientras que otro puede pasar a segundo plano. El *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) es aquel que va más allá de la materia en sí misma; se enfoca en el conocimiento de la materia para su enseñanza; es decir, es el conocimiento particular de los aspectos relacionados con la enseñanza del tema que se pretende abordar en el aula de clase. Esta categoría incluye conocer las representaciones más útiles de lo que se enseña como analogías, ejemplos, explicaciones y demostraciones. También incluye la comprensión de lo que facilita, o no, el aprendizaje de un tema particular, lo cual implica considerar las concepciones y conocimientos de los estudiantes. El *conocimiento curricular*, según Shulman (1986), se refiere al de los programas diseñados para la enseñanza de distintos tópicos en un nivel determinado. También incluye conocer la variedad de materiales sugeridos en los programas y el conjunto de indicaciones y contraindicaciones dadas para el desarrollo de estos.

Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) amplía las ideas ya mencionadas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor, que denomina categorías del

conocimiento base. La primera, *conocimiento del contenido* descrito anteriormente. La segunda es *conocimiento pedagógico general* que tiene que ver con principios y estrategias generales que ayudan a la gestión y organización de la clase. El *conocimiento curricular*, tercera categoría, es entendido como la comprensión de los materiales y programas que sirven como herramientas para los profesores. La cuarta, *conocimiento pedagógico del contenido*, se refiere a la relación entre el contenido a enseñar y la pedagogía. El *conocimiento de los estudiantes y sus características* es la quinta categoría. La sexta es el *conocimiento de los contextos educativos* que alude al conocimiento del profesor sobre el contexto de sus estudiantes y las políticas de gobierno. La séptima categoría es *conocimiento de los fines*, que son los propósitos y valores de la educación, propuestos en documentos oficiales.

Las categorías propuestas por Shulman (1987) fueron el punto de partida que permitió a otros investigadores centrar la atención en la categoría *conocimiento pedagógico del contenido*, para estudiarla a profundidad, ya que esta representó un avance importante en las concepciones sobre el conocimiento del profesor. Diferentes investigadores (Ball, 2000; Ball et al., 2001; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; citados en Godino, 2009) elaboraron interpretaciones y ampliaciones del modelo propuesto por Shulman (1987), que se constituyeron en propuestas para caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas.

Otro modelo es el propuesto por Grossman (1990) quien también toma como base los desarrollos de Shulman (1987) y reorganiza dichas ideas. En su modelo considera cuatro componentes principales: *conocimiento pedagógico general*, *conocimiento del contenido*, *conocimiento pedagógico del contenido* y *conocimiento del contexto*. El primer componente, *conocimiento pedagógico general*, incluye un cuerpo de conocimiento general, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza, además de principios generales de instrucción,

conocimientos y habilidades relacionadas con la gestión de la clase y conocimiento sobre los fines y objetivos de la educación. El segundo componente, *conocimiento del contenido*, se refiere a los conceptos y hechos principales incluidos en un campo de estudio específico y las relaciones entre ellos. El tercero, *conocimiento pedagógico del contenido*, incluye cuatro componentes centrales: el primero, concepciones de las propuestas para la enseñanza de un contenido (conocimientos y creencias sobre las propuestas para la enseñanza de un contenido en diferentes cursos); el segundo, conocimiento de la comprensión de los estudiantes (concepciones correctas y erróneas de tópicos particulares en un área) que le permitan generar representaciones y explicaciones alternas; el tercero, *conocimiento curricular* se compone del conocimiento de los materiales curriculares disponibles para la enseñanza de un contenido particular y la ubicación de este contenido en el currículo escolar; el último, *conocimiento de las estrategias instruccionales*, se refiere a las estrategias y representaciones de un concepto, adquiridas por los profesores para la enseñanza de este. Finalmente, la cuarta componente del modelo, *conocimiento del contexto*, hace referencia a la comprensión del contexto escolar con el fin de adaptar su conocimiento general a las necesidades específicas de la escuela y de cada uno de los estudiantes. Este incluye el conocimiento sobre los lugares en el que trabaja el profesor y, las expectativas y limitaciones planteadas por las autoridades correspondientes; también incluye el conocimiento del entorno de la escuela y de otros factores contextuales.

Según Pino Fan y Godino (2015), Deborah Ball y colaboradores apoyándose concretamente en las nociones del *conocimiento del contenido* y *conocimiento pedagógico del contenido* propuestas por Shulman (1986), establecen la noción de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). Ball (2000) menciona que este conocimiento está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales se divide en subcategorías. La primera es

conocimiento del contenido; incluye el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático. La segunda, *conocimiento pedagógico del contenido*, está conformado por el conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo. Los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza se pueden ver de forma más clara en la Figura 1:

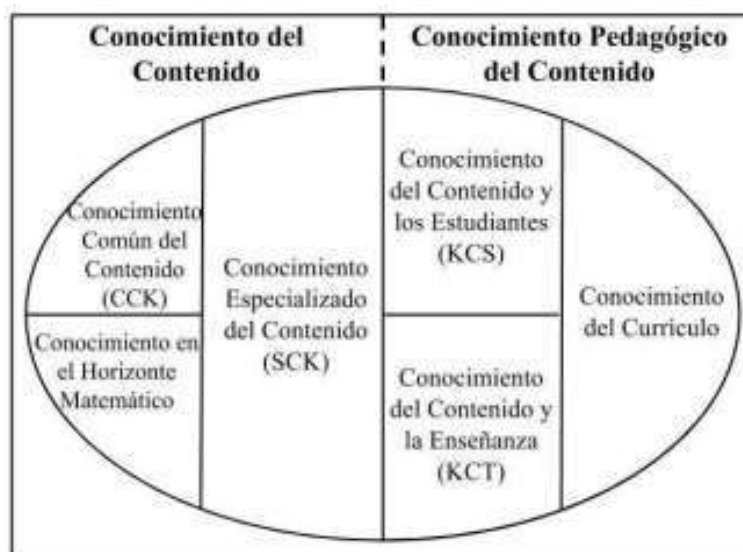


Figura 1. *Conocimiento matemático para la enseñanza.* Tomada de Pino-Fan y Godino (2015, pág. 91)

El *conocimiento común del contenido* es el usado de forma común o compartida en diferentes situaciones, problemas, profesiones u ocupaciones en las que se usan las matemáticas. En otras palabras, es el conocimiento matemático sobre un determinado tema que permite que el profesor resuelva correctamente los problemas o tareas matemáticas que asigna a sus estudiantes y que pueda proveer explicaciones cuando se requieran en la clase. El *conocimiento especializado del contenido* es el conglomerado de conocimientos y habilidades matemáticas que son usadas exclusivamente para la enseñanza. Es decir, se refiere a adecuaciones y adaptaciones

realizadas para transformar el conocimiento matemático en un contenido que pueda enseñarse a un grupo específico de estudiantes. El *conocimiento en el horizonte matemático* es el que guía los siguientes tipos de actos y responsabilidades de enseñanza: hacer juicios sobre la importancia de un concepto matemático, prestar atención al significado matemático develado por los estudiantes cuando opinan y, detectar distorsiones, confusiones o interpretaciones matemáticas erróneas.

El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* es entendido como el conocimiento matemático específico que se entrelaza con aquel sobre cómo aprenden, piensan o conocen un contenido particular los estudiantes. El conocimiento *del contenido y la enseñanza* combina conocimiento sobre la enseñanza y sobre las matemáticas, dado que para diseñar tareas matemáticas se requieren ambos. Finalmente, según Pino Fan y Godino (2015) para Ball y colaboradores, el *conocimiento curricular* coincide con lo propuesto por Grossman (1990).

2.2. Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemáticos Basado en el EOS

Para este estudio, tomamos elementos del modelo del conocimiento de un profesor de matemáticas propuesto por Pino-Fan y Godino (2015), como referencia y fundamento conceptual; a partir de este construimos el conjunto de categorías mediante las que caracterizamos nuestro conocimiento.

El modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM) interpreta y caracteriza el conocimiento del profesor teniendo en cuenta tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática. La *dimensión matemática* hace referencia a los conocimientos que debe tener un profesor sobre las matemáticas escolares que enseña; en esta dimensión se establecen dos subcategorías del conocimiento: conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido. El *conocimiento*

común del contenido es el conocimiento específico de las matemáticas, es decir, aquello que se debe saber sobre un objeto matemático que le permite al profesor resolver las determinadas tareas o problemas que propone en el aula o que hacen parte del currículo. Se caracteriza por ser un conocimiento que tiene tanto el profesor como el estudiante, y es por ello por lo que se le reconoce como conocimiento compartido. El *conocimiento ampliado del contenido* hace referencia a aquel que debe tener el profesor sobre determinadas nociones matemáticas en un momento particular y en el horizonte curricular; este conocimiento provee al profesor las bases matemáticas para vincular nociones y objetos matemáticos relacionados con el objeto principal que está enseñando, le permite plantear nuevos retos y vincular el objeto matemático con el tema que se esté trabajando.

La *dimensión didáctica* hace referencia al conocimiento que debe tener un profesor y a su capacidad para involucrarlo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; por tanto, esta dimensión centra la atención en el conocimiento del profesor sobre las matemáticas escolares, aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes y cuestiones curriculares.

La *dimensión meta didáctico-matemática* hace referencia, según D'Amore, Font y Godino (2007), a las normas socio-matemáticas y al contrato didáctico; es decir, es el estudio de las normas que regulan la construcción social del conocimiento matemático. "Otros aspectos del CDM que forman parte de esta dimensión "meta" son el conocimiento sobre las normas y meta-normas (epistémicas, ecológicas, cognitivas, interaccionales, mediacionales, afectivas), las condiciones y restricciones contextuales" (Pino-Fan & Godino, 2015, pág. 103). Además, de esta dimensión hacen parte el conocimiento del profesor respecto a los criterios de idoneidad didáctica.

Godino (2009) propone categorías para analizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor. Estas surgen al considerar la Didáctica de la Matemática como una disciplina que pone en diálogo aspectos sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Estas categorías están relacionadas directamente con los tipos de herramientas de análisis propuestas por Godino, Batanero y Font (2007) en lo que denominan *Enfoque Onto-Semiótico* (EOS).

“El EOS es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje” (Godino J. , 2009, pág. 20). Este marco teórico considera varios modelos. Un modelo epistemológico basado en presupuestos antropológicos/socioculturales, respecto a las matemáticas; un modelo de cognición matemática a partir de bases semióticas; un modelo instruccional con bases socio-constructivistas; un modelo sistémico-ecológico que se basa en las relaciones de los diferentes modelos mencionados y en las condiciones biológicas y socioculturales en que se desarrolla la actividad de estudio y la comunicación matemática. Estas nociones teóricas del EOS se proponen para que sean tenidas en cuenta como herramientas de análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La idea es que dichas herramientas sean utilizadas por los profesores para indagar y reflexionar sobre su propia práctica, ya que ponen en juego su conocimiento didáctico- matemático.

Estas herramientas ayudan a analizar y comprender los diversos aspectos que se deben tener en cuenta para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Se proponen dos tipos de herramientas: las *facetos* y los *niveles de análisis*. De estas dos herramientas, nuestro interés se centra únicamente en el de las *facetos*. Las *facetos* están relacionadas con los procesos de instrucción matemática que categorizan el conocimiento didáctico-matemático del profesor; estas son: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

Pino-Fan y Godino (2015) describen cada una de las *facetas* del CDM de la siguiente manera:

- *Faceta epistémica*: El profesor debe tener un conocimiento matemático “perfilado”, que es distinto al conocimiento matemático que le permite resolver problemas cuando logra hacer la transición entre el conocimiento común y el conocimiento ampliado. Este conocimiento “perfilado” hace referencia a la capacidad de movilizar conceptos y objetos matemáticos, de ubicarlos en los respectivos niveles educativos y relacionarlos con los niveles anteriores y posteriores; de resolver una misma tarea haciendo uso de diferentes procedimientos, proporcionando justificaciones y argumentaciones; de reconocer y comprender la diversidad de significados y de lograr integrarlos; y de identificar los conocimientos necesarios previos para la resolución de una tarea. Así, el profesor puede proporcionar diferentes definiciones, argumentaciones y justificaciones que le permiten identificar el conocimiento puesto en juego al momento de resolver una tarea matemática.
- *Faceta cognitiva*: Tiene como objetivo entender cómo aprenden y cómo se debería enseñar las matemáticas a los estudiantes. Incluye los conocimientos necesarios para reflexionar y evaluar la cercanía entre los significados y conocimientos de los estudiantes respecto a aquellos que, desde el punto de vista de la institución, deberían tener. Para ello, el profesor tiene que ser capaz de prever, durante el ejercicio de planeación y diseño, las posibles respuestas que darán los estudiantes a un problema determinado, las concepciones erróneas que pueden presentar, los conflictos o errores que puedan surgir, y los vínculos que los estudiantes puedan formar entre el objeto matemático de estudio y otros objetos matemáticos necesarios para resolver el problema. El EOS considera que la

enseñanza implica la participación del estudiante en una comunidad de aprendizaje y que esta tiene en cuenta los significados institucionales. Además, el EOS asume que el estudiante debe aprender y que la institución debe hacer lo posible para ello, por lo que se deben considerar las siguientes normas: el estudiante tiene los conocimientos previos necesarios; lo que se le va a enseñar está dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante; la institución se adaptará a la diversidad de los estudiantes (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009).

- *Faceta afectiva*: Está relacionada con los conocimientos que son necesarios para enfrentar, comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, que están vinculados a la motivación para aprender y para desarrollar actividades propuestas. En general, consiste en conocimientos que permiten describir experiencias y sensaciones de los estudiantes respecto al contexto escolar o durante el desarrollo de un determinado problema matemático.
- *Faceta interaccional*: Está relacionada con los conocimientos que se consideran necesarios para prever, implementar y evaluar secuencias de interacciones entre los participantes del proceso de enseñanza y aprendizaje. Dichas interacciones no sólo son profesor–estudiante, sino que también puede ser estudiante–estudiante, estudiante–recursos y profesor–recursos–estudiantes. El objetivo central de las interacciones es lograr el aprendizaje de los estudiantes de la forma más autónoma posible por medio de su participación en una comunidad de práctica, en la que se pueden identificar los conflictos de los estudiantes y la que pone los medios adecuados para resolverlos.
- *Faceta mediacional*: Está relacionada con los recursos y medios utilizados para los procesos de aprendizaje, puesto que se considera que los materiales fomentan el

desarrollo del conocimiento. Es decir, esta faceta toma en cuenta los conocimientos que debería tener un profesor para proponer, usar y evaluar la conveniencia del trabajo con materiales y recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje del objeto matemático en cuestión. También considera la previsión de la asignación de tiempo a distintas acciones y procesos de aprendizaje.

- *Faceta ecológica*: Está relacionada con el conocimiento que tiene el profesor sobre el currículo de matemáticas y su relación con otros currículos respecto a determinado objeto matemático. Considera aspectos sociales, políticos y económicos, que condicionan el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje; es decir, considera los contextos educativos y sus respectivos currículos.

Estas facetas son las que componen la dimensión didáctica del conocimiento didáctico-matemático y, son útiles y necesarias para analizar, describir y desarrollar el conocimiento que los profesores requieren para los procesos de aprendizaje y enseñanza.

3. Metodología

En este capítulo presentamos el proceso metodológico llevado a cabo para el desarrollo de nuestro estudio. Inicialmente, exponemos el enfoque investigativo asumido a partir del marco de referencia y la aproximación metodológica usada. Luego, describimos la estrategia investigativa, caracterizando los momentos del estudio, aludiendo a las acciones desarrolladas en cada uno de estos para recolectar y construir los datos investigativos. Finalmente, presentamos los dos conjuntos de categorías utilizados para analizar los datos.

3.1. Perspectiva Investigativa

En este estudio, adoptamos un enfoque fenomenológico (Strauss y Corbin, 1998) y crítico (Camargo, 2021). El primero es considerado como el conjunto de supuestos, visiones y prácticas que pueden ser descritos, interpretados, cuestionados o explicados para construir significados sobre acciones o discursos en busca de la transformación de estos. Lo consideramos adecuado ya que pretendemos describir, interpretar y caracterizar, de manera sistemática, la transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemático. En cuanto al enfoque crítico, lo entendemos como el conjunto de visiones y prácticas investigativas en busca la autorreflexión y el cuestionamiento de determinados juicios, valores o intereses particulares que son usados en busca de alcanzar un objetivo específico. Nuestra hipótesis es que, mediante la reflexión crítica y el autocuestionamiento, podemos obtener descripciones e inferencias de los insumos recolectados, que nos permiten analizar críticamente el proceso de transformación de nuestro conocimiento para el diseño de tareas que promuevan la argumentación de estudiantes escolares mediante el uso de herramientas tecnológicas.

En cuanto a la aproximación investigativa, asumimos la hermenéutica interpretativa con algunos rasgos de la colaborativa social propuesta por Camargo (2021). Adoptamos la

aproximación interpretativa ya que pretendemos determinar, sin asignar un juicio de valor, cómo transformamos nuestro conocimiento didáctico-matemático a partir de la interpretación de reflexiones sobre nuestras producciones e interacciones. En cuanto a la aproximación colaborativa social asumimos algunos de sus rasgos, puesto que no seremos observadores sino participantes de la investigación, dado que estudiamos la transformación de nuestro propio conocimiento.

Es importante resaltar que la metodología no sólo la constituyen un conjunto de criterios y principios teóricos sobre la práctica educativa, sino que también está compuesta por un marco de referencia y un contenido matemático específico. Para efectos de nuestro trabajo, el marco de referencia son las facetas contempladas en el Modelo del Conocimiento didáctico-matemático del profesor (CDM) propuesto por Pino-Fan y Godino (2015). Este modelo nos permite interpretar y caracterizar el conocimiento del profesor a partir de tres dimensiones; estas son: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática (Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemáticos Basado en el EOS).

3.2. Estrategia Investigativa

Como no encontramos una estrategia investigativa que se amoldara completamente al estudio que pretendíamos hacer, decidimos diseñar una estrategia que en algunos momentos del proceso tiene características de lo denominado: estudio en primera persona, pero en otros momentos no. Entendemos estudio en primera persona, de acuerdo con lo que plantea Camargo (2021), como aquellas investigaciones en las que se estudia un fenómeno estando dentro de este, es decir, cuando se estudia el fenómeno a profundidad estando inmerso en él. Esta estrategia también es usada cuando se quiere describir o interpretar el significado que las personas otorgan a fenómenos de su cotidianidad relacionados con situaciones individuales, colectivas o

circunstancias específicas. Es habitual que esta estrategia sea usada cuando los profesores se enfocan en estudiar su práctica, ya que les permite hacer una indagación sistemática de sus propias acciones en aras de adquirir descripciones, interpretaciones, narrativas o reflexiones que contribuyan a comprender y mejorar su quehacer docente. De esta forma, el profesor no solo es investigador sino también es el sujeto investigado (Camargo, 2021). A partir de la reflexión sistemática y de la fundamentación teórica, el investigador-investigado va recopilando y analizando evidencias del fenómeno de estudio, no solo estando dentro del escenario en el que este se desarrolla, sino también desde fuera de él. En general, los productos que se obtienen mediante el uso de esta estrategia captan matices de los significados, el lenguaje y las acciones que no pueden ser captados por alguien ajeno al desarrollo del estudio.

Es importante mencionar que para aprovechar las ventajas de analizar su propia práctica el investigador debe generar mecanismos para alejarse de sí mismo y ver sus acciones desde otra perspectiva, pues de lo contrario le será difícil avanzar en el análisis más allá de describir el contexto. El éxito de esta estrategia consiste en que el investigador tenga la capacidad de analizar la práctica propia como si se tratara de la de otra persona.

El estudio en primera persona los usamos para interpretar lo que cada uno había consignado en notas de clase, diarios de campo y tareas presentadas en los seminarios con la intención de dilucidar el conocimiento didáctico-matemático que estaba inmerso en los documentos mencionados. Este proceso se realizó a través de unas rutinas de pensamiento visible (ver sección 3.4.2).

Ball (2000), citada en Camargo (2021), menciona que el hecho de que el investigador sea actor y a la vez crítico puede generar dudas respecto a la naturaleza de los resultados y de la validez del ejercicio investigativo. Queriendo que el análisis del conocimiento didáctico-

matemático de dos profesores sobre el diseño de tareas, entornos de geometría dinámica y argumentación fuera objetivo y no sesgado, dejamos de usar la estrategia en primera persona para que no fuera el mismo profesor el que decidiera cuáles de los insumos serían los datos e hiciera el análisis de ellos con las categorías establecidas. Es decir, cada uno de nosotros trabajamos sobre los insumos del otro profesor para determinar y analizar los datos del estudio.

3.3. Desarrollo del Estudio

El estudio se desarrolló en seis momentos relacionados entre sí como se muestra en la Figura 2. En cada momento recogimos insumos que nos permitieron construir los datos investigativos que dan cuenta de nuestro conocimiento didáctico-matemático en un determinado tiempo. Cabe aclarar que en los primeros cuatro momentos cada uno de nosotros trabajó sobre su propia producción. En los Momentos 1 y 3 se realizó el proceso de organización, reducción, depuración y fragmentación de las afirmaciones extraídas de los propios insumos, con miras de formar un banco de posibles datos. En los Momentos 2 y 4 se usó la estrategia en primera persona para interpretar los propios insumos.

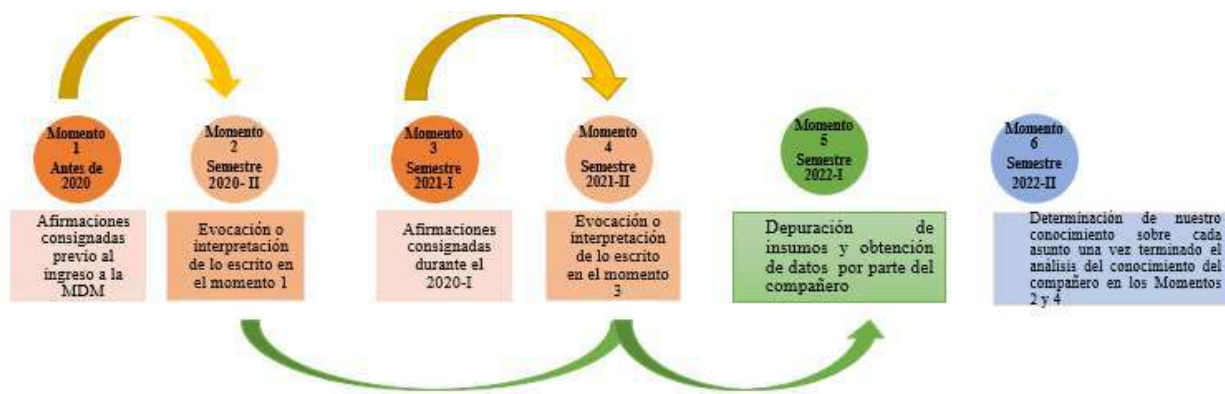


Figura 2. Momentos del estudio

Específicamente, en el *Momento 1*, cada profesor extrajo de afirmaciones consignadas en documentos producidos previo al ingreso a la MDM (pruebas de ingreso y el anteproyecto de

trabajo de grado), aquellas afirmaciones que consideraba daban cuenta de su conocimiento de cada uno de los asuntos del énfasis: argumentación, diseño de tareas, EGD. En el *Momento 2*, cada uno realizó una evocación o interpretación de las afirmaciones escogidas en el *Momento 1*. Cabe aclarar que las afirmaciones se eligieron durante el semestre 2020- II y fueron interpretadas durante ese periodo y parte del 2021-I. Para ello, realizamos rutinas de pensamiento visible individualmente, guiados por el primer asesor de este trabajo de grado, puesto que con ello pretendíamos evocar nuestro propio conocimiento ligado a cada afirmación escrita, puesto que lo escrito no era algo detallado ni exhaustivo. Ritchhart (2015) define rutinas de pensamiento como procedimientos o patrones para la reflexión, que se pueden aplicar repetidas veces en las actividades de aula. Estas rutinas juegan un rol importante en la organización y sistematización del pensamiento y pueden convertirse en parte integral del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Además, suelen ser sencillas, cuentan con pocos pasos que ayudan a focalizar la atención en la movilización del pensamiento y generan un andamiaje para desarrollar la reflexión y comprensión. Es esta última característica la que nos convenció de que el uso de dichas rutinas permitiría que cada uno de nosotros pudiera completar la idea expresada o aclarar cuál era su conocimiento sobre argumentación, EGD y diseño de tareas, evidenciado en cada una de las afirmaciones.

En el *Momento 3* consignamos en tablas las afirmaciones sobre los asuntos de interés recolectadas en diarios de campo, apuntes de clase y trabajos realizados durante el primer semestre de la MDM. En el *Momento 4* nuevamente realizamos una evocación o interpretación de los insumos del *Momento 3*; buscábamos que cada profesor pudiera aclarar y ampliar su conocimiento en relación con las afirmaciones extraídas. Cabe aclarar que las afirmaciones se eligieron durante el semestre 2020-II y se interpretaron durante los semestres 2021-I y 2021-II

En el *Momento 5*, cada profesor revisó los insumos de los *Momentos 2 y 4*, producidos individualmente por el otro profesor, para obtener los datos que analizaría. Durante este proceso, escogimos de los insumos solamente las afirmaciones que proveían ideas claras, precisas y que no se repetían.

Una vez que cada uno analizó los datos correspondientes, se dio el *Momento 6* en el que cada uno reportó lo que era su propio conocimiento respecto de cada asunto en cuestión en ese instante. Esto se hizo con el fin de rastrear posibles cambios en el conocimiento didáctico-matemático producto del análisis realizado.

Determinamos que, a partir de los insumos recogidos en los *Momentos 2, 4 y 6*, saldrían los datos porque las afirmaciones consignadas en los *Momentos 1 y 3* incluían parafraseo de ideas expuestas en artículos o por los profesores en los cursos. Por ello, pensamos que lo producido a través de las rutinas de pensamiento eran expresiones genuinas que reflejaban nuestro conocimiento. Además, teniendo en cuenta el tiempo limitado para realizar este estudio, no era posible considerar otros conjuntos de datos.

A continuación, describimos a profundidad cada uno de los *Momentos*, especificando cómo se hizo la recolección de los insumos, cómo se realizó la evocación del conocimiento y cómo se construyeron los datos investigativos.

3.4. Descripción de los Momentos 1 y 2

3.4.1. *Momento 1*

Dada la estrategia de investigación diseñada, describimos las tres fases mediante las cuales se desarrollaron el primer y segundo *Momento* de la investigación, y la forma en que estas se relacionan (Figura 3).

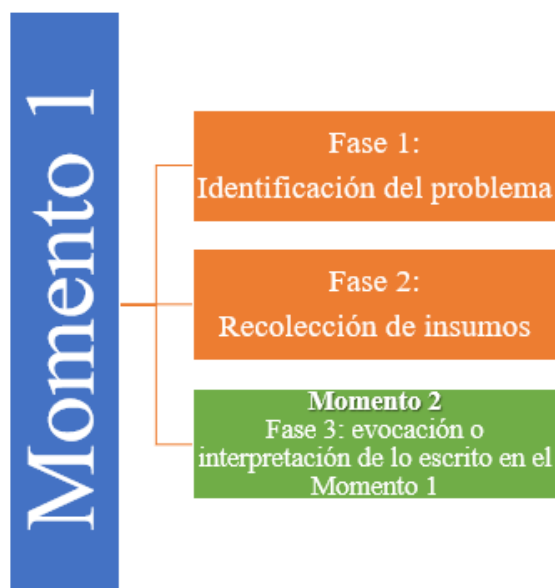


Figura 3. Momentos 1 y 2

Fase 1: Identificación del Problema.

La cohorte 2020-1 de la Maestría en Docencia de la Matemática tenía como énfasis el conocimiento del profesor en relación con la argumentación, el diseño de tareas y los EGD. El equipo integral de profesores de la cohorte *a priori* había evidenciado falencias en el conocimiento de muchos profesores de matemáticas sobre los tres asuntos. Por lo anterior, decidieron diseñar e implementar un programa de formación posgradual que permitiera a los profesores reconocer el estado de su conocimiento didáctico-matemático respecto a los tres asuntos ya mencionados y les ofreciera la posibilidad de transformarlo. En esta fase, a diferencia de las demás, las acciones llevadas a cabo fueron planeadas e implementadas por el equipo de profesores del grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, de la Universidad Pedagógica Nacional, responsables de la cohorte.

Fase 2: Recolección de Insumos.

El proceso de ingreso a la Maestría dio lugar a tres documentos de cada uno. Uno fue la prueba de conocimiento didáctico-matemático en la cual se buscaba que resolviéramos una tarea propuesta mediante el uso de geometría dinámica. Debíamos resolver el problema mediante dos procedimientos diferentes, reportar los pasos de las construcciones, explicar por qué la solución era válida, describir los objetos matemáticos abordados, los procesos matemáticos de la actividad matemática realizada y establecer de qué forma se podía vincular dicha tarea en el currículo escolar colombiano. En la prueba de competencias escriturales en español debíamos escribir un ensayo sobre las TIC en la educación: necesidad, aportes y alcance de su aplicación. Lo último que presentamos fue la propuesta de anteproyecto de trabajo de grado en la que debíamos abordar y vincular la argumentación, los EGD y el diseño de tareas.

Con la intención de evidenciar la transformación de nuestro conocimiento, consideramos que el punto de partida tenía que ser lo que sabíamos de los tres asuntos del énfasis antes de participar en el programa de formación que nos proponía la Maestría. Por lo tanto, tomamos como insumos la propuesta de trabajo de grado y las pruebas de ingreso (prueba de conocimiento didáctico-matemático y prueba de competencias escriturales en español) realizadas previo al ingreso al programa, en busca de afirmaciones que dieran cuenta de nuestro conocimiento.

A partir de lo anterior, fuimos nosotros, como informantes, quienes proporcionamos la información mediante todos y cada uno de los insumos que generamos en las distintas pruebas. De sus propios documentos, cada uno de nosotros extrajo únicamente las afirmaciones que consideraba hacían referencia a argumentación, diseño de tareas o tareas y EGD.

Una vez recolectada la información, realizamos un proceso de organización y reducción de esta, para obtener los insumos del *Momento 1*. Después cada uno de nosotros elaboramos una

tabla discriminando para cada afirmación, el asunto al que considerábamos que hacía referencia.

En la Tabla 1 y Tabla 2 presentamos un ejemplo de lo que hizo cada profesor con las afirmaciones escogidas.

Afirmación	Elemento
Es importante mencionar que para el abordaje del problema se hizo uso de GeoGebra. A continuación, se describen los pasos de la construcción y luego se explicará el razonamiento utilizado.	EGD
(...) la función del profesor es la de propiciar, a través del diseño e implementación de una actividad, un encuentro entre el estudiante y el medio (tecnológico) para que surja el conocimiento.	Diseño de tareas

Tabla 1. Ejemplo de registro y clasificación de afirmaciones - Hali

Afirmación	Elemento
A partir de lo anterior ha sido posible probar que el uso de juegos, aplicativos y en general ambientes de aprendizaje mediados por tecnología contribuyen al mejoramiento del proceso de aprendizaje de las Matemáticas.	EGD
(...) la propuesta de investigación sugiere el uso de GeoGebra para el diseño de tareas o recursos, pues posibilita el uso simultáneo de múltiples representaciones de objetos 2D,3D y 4D.	Diseño de tareas EGD

Tabla 2. Ejemplo de registro y clasificación de afirmaciones - Michael

Luego en la tabla obtenida, incluimos una columna en la cual se escribimos la idea central de la afirmación extraída mediante las rutinas de pensamiento. Buscamos que cada uno pudiera expresar qué es lo que realmente quería decir o qué develaba esa afirmación de nuestro conocimiento. Este proceso generó una base de datos diferente, la cual denominamos *Tabla de insumos*. En ella, consignamos consecutivamente las afirmaciones sobre cada asunto de interés

obtenidas de cada documento y les asignamos un número. Para todas utilizamos PI (prueba de ingreso) y las diferenciamos por el número, ejemplo, PI-1 hace referencia a la primera afirmación extraída de la propuesta de ingreso. En la Tabla 3 y Tabla 4 presentamos un ejemplo de las tablas elaboradas, por cada uno de nosotros, de la base de datos mencionada.

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento
PI-9	[Prueba de conocimiento didáctico-matemático. Apartado conocimiento matemático] (...) traté de abordarlo [el problema] desde un planteamiento netamente geométrico, valiéndome de las definiciones de diámetro y mediatriz, pero durante la exploración inicial no llegué a una construcción robusta.		EGD

Tabla 3. Afirmación extraída Tabla de Insumos – Michael

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento
PI-1	[Propuesta de ingreso] Me interesé, primeramente, en la formación secundaria y la necesidad de conocer –reconocer una geometría a partir de las formas de la naturaleza, para ello fue supremamente importante el uso del software UltraFractal5, pues fue quién nos permitió crear (jugar) e interactuar, a partir de talleres planteados, con los fractales allí ejecutados.		EGD DT

Tabla 4. Afirmación extraída Tabla de Insumos – Hali

En esta tabla se incluyeron notas aclaratorias o complementarias a la afirmación que se presenta. Se utilizan los paréntesis cuadrados para acompañar las afirmaciones y proporcionar información que explica detalles de la actividad en la se produjeron. Finalmente, clasificamos las afirmaciones a partir del asunto al que nosotros consideramos que hacen referencia.

3.4.2. Momento 2

Fase 3: Reflexión y Evocación de lo que se Interpreta o se Evoca de lo Escrito en el

Fase 1.

Durante el desarrollo de la investigación pudimos evidenciar que el *Momento 2* está anidado en el *Momento 1*, cuando llevamos a cabo la Fase 3. Presentamos en la Tabla 5 y Tabla 6 dos ejemplos en los que se puede evidenciar, en la columna idea central, la evocación o interpretación que cada uno realizó de sus propias afirmaciones.

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento
TI-9	[Prueba de conocimiento Didáctico-Matemático. Apartado conocimiento matemático] (...) traté de abordarlo [el problema] desde un planteamiento netamente geométrico, valiéndome de las definiciones de diámetro y mediatriz, pero durante la exploración inicial no llegué a una construcción robusta.	Entendía las construcciones robustas como aquellas construcciones que resuelven un determinado problema de forma general, es decir, la que incluye todos los casos posibles	EGD

Tabla 5. *Tabla de Insumos – Michael*

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento
TI-1	[Propuesta de ingreso] Me interesé, primeramente, en la formación secundaria y la necesidad de conocer –reconocer una geometría a partir de las formas de la naturaleza, para ello fue supremamente importante el uso del software UltraFractal5, pues fue quién nos permitió crear (jugar) e interactuar, a partir de talleres planteados, con los fractales allí ejecutados.	Se sabe la importancia de un software particular como medio para el desarrollo, la comprensión y la visualización de los fractales, en una experiencia previa de trabajo en aula.	EGD
		Se entendían los talleres en relación con las actividades propuestas a los estudiantes para el trabajo en aula.	DT

Tabla 6. *Tabla de Insumos – Hali*

El desarrollo del *Momento 2* estuvo centrado en escribir la idea central de cada afirmación consignada en la Tabla de Insumos. Este proceso se llevó a cabo en las asesorías de trabajo de grado realizadas durante el semestre 2020-II, mediante la aplicación de algunas rutinas de pensamiento visible que el primer asesor del trabajo de grado realizó con cada uno de nosotros.

Ritchhart (2015) propone distintas rutinas de pensamiento las cuales usamos en el desarrollo del *Momento 2*. Entre estas estaban: “preguntas provocadoras” y “¿qué te hace pensar eso?” La primera consta de preguntas que promuevan el pensamiento y la indagación. El objetivo de hacer esas preguntas es llegar a la complejidad y profundidad de un tema, por lo que a través del uso de esta rutina se logra una reflexión y evocación profunda de las afirmaciones extraídas. Por ejemplo, el primer asesor nos preguntaba constantemente ¿qué quería decir en la afirmación? ¿cuál es el conocimiento que quería comunicar? El usted de ese momento, ¿qué era lo que sabía sobre el elemento? La segunda rutina tiene como propósito ayudar a describir qué se ve o se sabe e invita a construir explicaciones. Además, promueve el razonamiento basado en la evidencia. Esto nos permitió compartir nuestras interpretaciones de las afirmaciones y nos permitió contrastar lo que estaba escrito y el conocimiento que realmente teníamos en ese momento.

3.5. Descripción de los Momentos 3 y 4

3.5.1. *Momento 3*

A continuación, describimos las tres fases mediante las cuales se desarrollaron el tercer y cuarto momento de la investigación y la forma como estas se relacionan (Figura 4).



Figura 4. Momento 3 y Momento 4

Fase 1: Participar en el programa de formación.

Como estudiantes del programa de Maestría (MDM), fuimos partícipes de seminarios que aportaron a la reflexión crítica de nuestro conocimiento didáctico-matemático y que nos impulsaron a emprender esfuerzos investigativos para caracterizar la transformación de este. Durante el primer semestre de la Maestría (2020-I) cursamos los seminarios titulados: Innovación e Investigación (II), Profundización en Matemáticas Elementales (PME) y, Diseño y Desarrollo Curricular (DDC). El seminario PME estaba enfocado en el estudio de la argumentación y el seminario DDC en el diseño de tareas. En ambos seminarios se desarrollaron tres tipos de actividades: resolver tareas propuestas por el profesor, proponer tareas para luego ser resueltas por los miembros de la clase y discutir los resultados obtenidos al resolver las tareas a la luz de los propósitos de cada curso. En el seminario II, se estudiaron elementos para caracterizar el campo de estudio del conocimiento del profesor para el diseño de tareas mediadas por un software de geometría, que favorezcan la producción de argumentos y así, escribir el anteproyecto del trabajo de grado, producto final en dicho seminario

Como parte del plan de acción, también hubo otras actividades como asistir a determinadas conferencias y grupos de estudio sobre argumentación realizadas por expertos; también en los cursos se promovieron espacios para la conversación y discusión de temáticas específicas de los asuntos correspondientes a cada curso, con la intención de que se reflexionara sobre el conocimiento que íbamos adquiriendo.

A continuación, presentamos una breve descripción de los seminarios de los que fuimos partícipes.

- **Profundización en Matemáticas Elementales:** tenía como propósito que los estudiantes de la Maestría pudieran ampliar sus conocimientos sobre el proceso de argumentación en matemáticas de dos formas. La primera fue favoreciendo la práctica de la argumentación matemática, suscitada en el proceso de resolución de tareas que proponía el profesor, las cuales incluían problemas de conjeturación y demostración con el uso de EGD. La segunda era analizando argumentos que surgían al resolver las tareas y que presentaban los participantes, a la luz de directrices y teoría presentadas por el profesor. Además, se pretendía enriquecer la conceptualización sobre objetos de la geometría escolar, a partir de la relación entre ellos y su abordaje desde distintos dominios como: Geometría Plana Sintética, Geometría Plana Analítica y Geometría del Espacio Sintética.
- **Diseño y Desarrollo Curricular:** se centró en el diseño de tareas, específicamente en el reconocimiento y aplicación de los principios para diseñar una tarea propuestos por Gómez (2018). Inicialmente, se abordó teóricamente la noción de tarea y los elementos para su diseño. Luego, se realizó un estudio de diseños de tareas medidas por softwares específicos. Durante el desarrollo del seminario, los estudiantes adoptamos el rol de resolutor o diseñadores de tareas, para analizar las tareas a la luz de la teoría. Lo anterior,

con el fin de adquirir herramientas y evidenciar la importancia de los principios dados para diseñar tareas que promovieran la argumentación.

- **Innovación e Investigación:** tuvo como objetivo proveer elementos para elaborar el anteproyecto del Trabajo de Grado. Estos son: cómo identificar un problema de investigación que atiende un asunto de interés de la vida profesional o de la comunidad de investigación, cómo construir la pregunta de investigación, cómo ubicar el campo de investigación, la apropiación de referentes conceptuales pertinentes que permiten vislumbrar un asunto problemático que interesa atender y la documentación empírica e investigativa del mismo. a partir de las propuestas iniciales de los aspirantes admitidos y del interés del equipo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*.

Fase 2: Determinación de Insumos.

Los escenarios para la recolección de la información fueron los tres seminarios descritos anteriormente. Participar en dichos espacios académicos nos permitió realizar y diseñar tareas, recibir realimentaciones de nuestras producciones, hacer reflexiones de las temáticas abordadas, consultar bibliografía especializada y ser partícipes de las discusiones generadas entre pares; todo esto alimentaba las ideas que consignábamos en las tareas, apuntes de clase, anotaciones de lecturas realizadas en cada uno de los cursos y nuestros respectivos diarios de campo. Esto lo organizamos cronológicamente en carpetas, una por curso. Luego, realizamos el proceso de reducción, seleccionando únicamente las afirmaciones que consideráramos hacían referencia a alguno de los asuntos del énfasis. Recopilamos todo el material y elaboramos, cada uno de nosotros, una base de datos discriminada por seminarios y meses en un formato que fue propuesto por el equipo integral de profesores de la MDM. Por lo anterior, somos nosotros, como informantes, quienes proporcionamos los insumos de los cuales extrajimos las afirmaciones

respecto a los tres asuntos de interés. En la Tabla 7 ejemplificamos algunos registros del curso PME.

Seminario	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Profundización en matemáticas escolares	Me di cuenta de que para empezar a estudiar la argumentación es necesario reconocer: los pasos de una construcción de un ejercicio propuesto, la exploración realizada para encontrar propiedades o invariantes de esa construcción, la importancia de formular una conjetura que reporta ese invariante encontrado y por último proveer la demostración de esa conjetura.	Reflexioné en torno a los argumentos: conocer lo que está dado, la aserción que se tiene y a distinguir de esto las garantías. Además, conocí, o reconocí, los tipos de argumentos de manera general: deductivo, abductivo, inductivo y analógico.	De las tareas aprendí a distinguir los tipos de argumentos y a definir en qué momento de la actividad estos estaban emergiendo, si era en un proceso de construcción, de exploración, de formulación de la conjetura o de la demostración de esta misma.		El último trabajo propuesto entre ambas asignaturas me permitió reconocer de manera detallada qué de todo lo que había aprendido durante el semestre había quedado con fallas en relación, principalmente, al análisis del diseño de tareas, pues no me eran claras bastantes cuestiones como: los objetos primarios, la declaración de metas en relación con los objetivos planteados, al análisis de la eficacia y la eficiencia de los materiales y recursos.

Tabla 7. Organización cronológica de afirmaciones – Hali

Luego, depuramos nuevamente la información recolectada adaptándola al formato de la Tabla de Insumos. A continuación, presentamos un ejemplo (Tabla 8 y Tabla 9) de las afirmaciones escogidas por cada uno de nosotros.

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento	Mes
PME-1	“La demostración es un tipo de argumentación y el argumento tiene una estructura ternaria” (Apuntes de clase)		AR	Febrero

Tabla 8. Tabla de Insumos Momento 3 – Michael

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento	Mes
II-4	A pesar de no contar con un espacio propio para su estudio, los fractales son abordados cuando se quiere presentar algo “curioso o diferente” a los estudiantes, pero no trasciende más allá de esto. Todo lo anterior, nos cuestionó y nos llevó a reflexionar y buscar entender las consideraciones que debe tener un profesor de matemáticas para diseñar tareas en relación con la dimensión fractal. (Clase 1 de DDC y clase 1 PME)		DT	Febrero

Tabla 9. Tabla de Insumos Momento 3 – Hali

3.5.2. Momento 4

Fase 3: Reflexión y, Evocación o Interpretación de lo Escrito en el Momento 3.

Evidenciamos que el *Momento 4* estuvo anidado en el *Momento 3*. Como describimos previamente, el *Momento 4* también se realizó mediante el uso de rutinas de pensamiento visible para construir la idea central de las afirmaciones consignadas en la tabla de insumos de cada profesor. A continuación, presentamos un ejemplo de ello en la Tabla 10 y la Tabla 11.

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento	Mes
PME-1	“La demostración es un tipo de argumentación y el argumento tiene una estructura ternaria” (Apuntes de clase)	Representaciones de un argumento. Reconocimiento de un argumento a partir del Modelo de Toulmin (aserción, garantía, datos). Entendía la demostración como una justificación o una validación teórica para una conjetura, la idea de demostración como argumento era nueva para mí.	AR	Febrero

Tabla 10. Tabla de Insumos Momento 4 - Michael

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento	Mes
II-4	A pesar de no contar con un espacio propio para su estudio, los fractales son abordados cuando se quiere presentar	Se considera que con el saber matemático sobre Dimensión Fractal es	DT	Febrero

<p>algo “curioso o diferente” a los estudiantes, pero no trasciende más allá de esto. Todo lo anterior, nos cuestionó y nos llevó a reflexionar y buscar entender las consideraciones que debe tener un profesor de matemáticas para diseñar tareas en relación con la dimensión fractal. (Clase 1 de DDC y clase 1 PME)</p>	<p>suficiente conocimiento para que un profesor diseñe Tareas en relación con la Dimensión Fractal que promuevan la Argumentación.</p>
--	--

Tabla 11. *Tabla de insumos Momento 4 – Hali*

Para la construcción de esta versión de cada Tabla de Insumos se vio la necesidad de incluir una columna que indicara el mes en el que se produjo la afirmación, para poder hacer un rastreo cronológico. También se incluyeron notas aclaratorias entre paréntesis cuadrados que tienen el uso descrito en el *Momento 2*. Las tablas completas realizadas por cada uno para el Momento 2 y 4 se encuentran en los Anexos 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

3.6. Momento 5

Como mencionamos previamente, los primeros cuatro momentos se realizaron de forma individual para producir los insumos de la investigación. En el *Momento 5*, cada uno de nosotros usó los insumos del otro para determinar los datos que analizaría con el fin establecer y describir el conocimiento de nuestro compañero. Determinamos que analizar los datos de nuestro compañero, en vez de los propios, haría que el proceso fuese objetivo y que el resultado fuera más genuino. El Momento 5 se desarrolló en tres fases como se muestra en la **Figura 5**. Fases del Momento 5 Figura 5 y que se describen a continuación.



Figura 5. Fases del Momento 5

Fase 1.

Cada uno realizó la lectura de las dos tablas producidas en el Momento 2 y el Momento 4 por nuestro compañero. El propósito de esta lectura era, *grosso modo*, identificar visos del conocimiento de nuestro compañero sobre argumentación, diseño de tareas y EGD, a partir de las afirmaciones extraídas y la interpretación que hizo de sus ideas en el proceso de construir los insumos de la investigación. Pretendíamos que cada uno tuviera una visión general del conocimiento del otro para poder entender la naturaleza de los insumos y discutir sobre las posibles categorías emergentes para realizar el análisis.

Fase 2.

Producto de la lectura, y a partir de lo allí evidenciado, cada uno depuró los insumos para determinar los datos de la investigación con el fin de dar cuenta del conocimiento del otro. Este proceso de depuración estuvo enfocado en el producto de los *Momentos 2 y 4*; tenía como finalidad eliminar insumos que repetían ideas y determinar si la idea central que se comunicó era

clara y permitía develar el conocimiento respecto a alguno de los asuntos de interés. Además, la lectura de los insumos nos permitió evidenciar que en algunas evocaciones (*Momento 2 y 4*) tan solo se parafraseaba lo dicho en la afirmación extraída (*Momento 1 y 3*) o se trataba de mencionar o explicar qué era lo que no se sabía del elemento y por qué no lo sabía. Afirmaciones como las mencionadas también fueron descartadas dado que no aportaban al objetivo de la investigación. A continuación, presentamos un ejemplo de afirmaciones descartadas y explicamos las razones por las que no se consideraron como datos.

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento	Mes
PME-9	No tenía claridad sobre la diferencia entre el Teorema y la Definición de <i>Mediatriz</i> . Además, no reconocía su importancia en relación a demostraciones o argumentos entorno a la Geometría Sintética. Por último, había perdido habilidad y reconocimiento de la demostración a partir de <i>Afirmación/Garantía</i> . (Clase 1 de DDC y Clase 1 PME)	A partir de la reflexión respecto a la poca importancia que se daba a una definición en particular en relación a algunos argumentos o demostraciones, se reconoce el aprendizaje adquirido respecto a qué es la Argumentación y la importante relación entre argumentos y demostraciones que no se reconocía.	AR	Febrero

Tabla 12. *Insumo Depurado Tabla de Insumos – Hali*

Como se evidencia en la columna de la idea central de la Tabla 12, lo que allí se expresa hace referencia a una reflexión generada en torno al uso de una definición en argumentos. Además, no expresa cuál fue el aprendizaje adquirido respecto a la argumentación, ni cuáles son las relaciones que evidenció entre argumentos y demostraciones. Por lo anterior no se consideró como dato.

Fase 3.

Una vez realizada la depuración nos dimos cuenta de que, aunque las afirmaciones extraídas en las tablas ya estaban codificadas, era necesario hacer una nueva codificación para aquellas que eran datos de la investigación, puesto que facilitaría el trabajo con los datos. Por lo anterior, en la columna idea central de las tablas de insumos incluimos, al inicio de cada dato, el código del insumo (siglas del curso y número, PME.8) acompañada de la sigla correspondiente al elemento, es decir, diseño de tareas (DT), argumentación (AR) y entornos de geometría dinámica (EGD). Cabe aclarar que a los insumos que no se consideraron no se les puso la respectiva codificación. A continuación, presentamos un ejemplo:

Código	Texto del documento	Idea central	Elemento	Mes
PME-8	¿Un contraejemplo puede ser entendido como la negación de un argumento o los argumentos siempre son verdades? ¿Se pueden refutar cualquiera de los tres elementos para un contra ejemplo?	PME8-AR A partir de la reflexión respecto a la negación de argumentos, se concluye que es posible negar dados su estructura lógica y el tipo de argumento.		
PME-9	No tenía claridad sobre la diferencia entre el Teorema y la Definición de <i>Mediatriz</i> . Además, no reconocía su importancia en relación con demostraciones o argumentos entorno a la Geometría Sintética. Por último, había perdido habilidad y reconocimiento de la demostración a partir de <i>Afirmación/Garantía</i> . (Clase 1 de DDC y Clase 1 PME)	A partir de la reflexión respecto a la poca importancia que se daba a una definición en particular en relación a algunos argumentos o demostraciones, se reconoce el aprendizaje adquirido respecto a qué es la Argumentación y la importante relación entre argumentos y demostraciones en que no se reconocía.	AR	Febrero

Tabla 13. Distinción entre Dato e Insumo – Hali

Podemos evidenciar en la Tabla 13 que PME-8 es dato ya que en la columna de idea central se incluyó el código PME8-AR, mientras que PME-9 no lo es ya que no se incluyó codificación en la columna de idea central. Cabe resaltar que el proceso mencionado previamente se realizó de forma individual, aplicando las tres fases a los datos de nuestro compañero sin que él incidiera en dicho proceso. Los datos extraídos de los insumos de Hali y de Michael se encuentran en el Anexo 5 y 6 respectivamente.

3.7. Momento 6

Este Momento se realizó una vez concluido el análisis de los datos del conocimiento de nuestro compañero, dado que pretendíamos rastrear cómo la realización de dicho análisis incidió en la transformación del conocimiento didáctico-matemático de cada uno. Este Momento se realizó de manera individual. A continuación, presentamos dos ejemplos que hacen referencia a lo escrito en el *Momento 6* de Michael y Hali, respecto a la argumentación.

- **Michael:** Argumentación es un proceso comunicativo en el que se producen argumentos a partir de un conjunto de reglas compartidas por una comunidad de aprendizaje. La argumentación permite reconocer, rastrear y validar evidencias de los razonamientos realizados durante la resolución de un determinado problema. Tiene como finalidad, persuadir, contrastar o sustentar ideas con el ánimo de convencer a un grupo de personas. La exploración, conjetura y demostración son partes fundamentales del proceso de argumentación entendiendo que a través de este se desarrollan habilidades de abstracción, análisis, síntesis, comparación, clasificación, particularización y generalización.
- **Hali:** La argumentación está ligada a responder a la pregunta: ¿por qué?, y esta se responde a partir de la unión lógica y coherente de argumentos, tanto de forma inductiva como deductiva; así, la argumentación se puede entender como una demostración. La

argumentación tiene como función validar, un teorema, un corolario, un lema o una proposición, o rechazar una afirmación; los argumentos de los que hace uso la argumentación vienen de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración

3.8. Análisis de la Información

Este estudio se centra en caracterizar la transformación de nuestro conocimiento para diseñar tareas, mediadas por el uso de entornos de geometría dinámica, que promuevan la argumentación de estudiantes escolares. Para ello, realizamos el análisis de los datos obtenidos en los *Momentos 2, 4 y 6* para describir, comparar y caracterizar la transformación evidenciada en cada profesor. Para lograr lo anterior, establecimos dos conjuntos de categorías que son la base para realizar este análisis; estas son: categorías de análisis para caracterizar el conocimiento didáctico-matemático y categorías de análisis para determina la transformación de dicho conocimiento.

3.8.1. Categorías de Caracterización del Conocimiento

Para la construcción de estas categorías, centramos la atención en la naturaleza de los datos, es decir, en identificar puntualmente qué era lo que nos decía del elemento y a qué hacía referencia. Inicialmente, a partir de la descripción de cada una de las *facetas* propuestas por el CDM, propusimos unos criterios que nos ayudaron a identificar a qué faceta hace referencia una idea o expresión expuesta en un fragmento o afirmación de los insumos que da cuenta de nuestro conocimiento didáctico-matemático sobre los asuntos de interés. En la Tabla 14 presentamos los criterios que creamos a partir de la interpretación que hicimos del Modelo CDM (Ver 2.2).

Facetas del CDM	Criterios de clasificación de fragmentos
Epistémica	<ol style="list-style-type: none"> 1. Alude a su concepción de un elemento matemático mediante el uso de sinónimos o diversos significados en términos de su funcionalidad o características. 2. Identifica significados y representaciones que se utilizan sobre un objeto matemático y sus relaciones con otros. 3. Hace uso de definiciones, proposiciones o diferentes procedimientos durante el análisis de contenido e instrucción matemática. 4. Identifica los elementos que constituyen una definición de un objeto y un procedimiento matemático. 5. Hace uso de vocabulario especializado de la didáctica. 6. Reconoce criterios para diseñar tareas que favorezcan la demostración. 7. Identifica distintos procedimientos y conocimientos empleados por los estudiantes durante la resolución de una tarea. 8. Establece relaciones entre un objeto matemático y otros objetos matemáticos de un grado anterior o posterior para determinar la manera en que se abordará el objeto matemático en un grado específico.
Cognitiva	<ol style="list-style-type: none"> 1. Manifiesta sus creencias o reflexiones sobre cómo aprenden los estudiantes o cómo se les debería enseñar. 2. Hace referencia a asuntos que considera durante el diseño de una tarea para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. 3. Reconoce posibles dificultades, obstáculos o errores de los estudiantes respecto a la solución de una determinada tarea. 4. Identifica los conocimientos previos para el abordaje de un determinado objeto matemático necesarios para un grupo de estudiantes particular.
Afectiva	<ol style="list-style-type: none"> 1. Refiere las maneras que usa para motivar a los estudiantes a aprender matemáticas. 2. Identifica los aspectos que motivan a los estudiantes para el abordaje de una temática en particular. 3. Hace referencia a sus estrategias o expectativas para favorecer el desarrollo de aspectos socioemocionales de los estudiantes. 4. Describe las experiencias de los estudiantes dentro de la clase de matemáticas a partir de las características cognitivas, emocionales y sociales de las estudiantes enmarcadas en el contexto particular del aula. 5. Reconoce los estados de ánimo de sus estudiantes en la clase y los usa como información para promover estrategias para motivar a los estudiantes a aprender.

Mediacional	<ol style="list-style-type: none"> 1. Refiere las maneras como usa los materiales y recursos tecnológicos para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. 2. Hace referencia a las consideraciones que tiene en cuenta sobre los materiales y recursos tecnológicos en el diseño o gestión de una determinada tarea. 3. Refiere asuntos relativos a cómo, cuándo, para qué, cuáles y de qué manera se han de utilizar los materiales y recursos tecnológicos para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. 4. Determina los materiales y recursos tecnológicos con los que se desarrollará una tarea a partir de las características para su uso en la enseñanza de un objeto matemático. 5. Determina los materiales y recursos tecnológicos en el diseño de una tarea a partir de evaluar la utilidad de los mismos para las acciones que se implican por parte de los estudiantes. 6. Reconoce tipos de arrastres reportados por investigadores y los identifica en la resolución de las tareas de conjeturación que hacen los estudiantes. 7. Usa el dinamismo de los EGD en el diseño de una tarea de conjeturación. Asocia los EGD con programas computacionales dado que estos que permiten la comprensión e interacción con objetos geométricos. 8. Asocia los EGD con programas computacionales que permiten la comprensión en interacción con objetos matemáticos.
Interaccional	<ol style="list-style-type: none"> 1. Refiere a las formas en que interactúan los agentes involucrados en la gestión de una tarea en el aula. 2. Alude a asuntos relativos a lenguajes, representaciones, requisitos para el uso de recursos o normas socio-matemáticas implicadas en las interacciones en el aula. 3. Tiene en cuenta el rol del profesor y el de los estudiantes en la planeación de una tarea para incentivar su interacción en el aula. 4. Alude a los requerimientos generales para el uso de determinados materiales o recursos tecnológicos y su relación con los conocimientos previos de los estudiantes para ese uso. 5. Tiene en cuenta los recursos, materiales y tiempo asignado para prever los momentos de interacción en la gestión de una tarea en el aula.
Ecológica	<ol style="list-style-type: none"> 1. Alude a asuntos relativos al entorno social, político y cultural del lugar en el que se desarrolla su ejercicio de enseñanza 2. Refiere a conexiones interdisciplinarias de las matemáticas con otras áreas. 3. Tiene en cuenta las conexiones que se pueden establecer entre un objeto matemático y otros contenidos de otras áreas del currículo en el diseño de una tarea. 4. Hace referencia a cómo el contexto sociocultural de los estudiantes influye en sus decisiones sobre el tipo de tareas matemáticas que se podrían desarrollar en el aula. 5. Tiene en cuenta cómo influye el contexto sociocultural de los estudiantes en la planeación y gestión de una tarea matemática.

Tabla 14. Criterios de Conocimiento según las Facetas del CDM

Sin embargo, al estudiar la naturaleza de los datos producidos por cada uno, pudimos evidenciar que tanto el conocimiento de Michael como el de Hali tenía que ver únicamente con cuestiones correspondientes a las facetas epistémica, mediacional e interaccional. Por ello, creamos unas categorías emergentes para la caracterización de nuestro conocimiento, basados en algunos de los criterios establecidos en las facetas mencionadas, para clasificar los datos de los *Momentos 2 y 4*. Por último, a cada indicador le asignamos un código y un descriptor con el fin de facilitar el procedimiento de análisis. En la Tabla 15 presentamos las categorías que utilizamos para analizar y caracterizar nuestro conocimiento didáctico-matemático.

Cabe aclarar que cuando en un dato o un apartado de este, se identificaba conocimiento de alguna de las categorías establecidas para la caracterización de nuestro conocimiento, se añadía a los datos el código de la categoría con color rojo y entre paréntesis cuadrados.

Elemento	Categoría	Código	Descripción
Diseño de tareas	Noción de tarea	NT	Explicitación de una idea, sinónimo o expresión en la que se menciona qué se entiende por tarea o qué se considera que es una tarea.
	Planeación de la tarea	PDT	Mención de elementos que considera son parte del diseño de una tarea. Se asocia puntualmente con los principios para el diseño de tareas propuestos por Gómez et al. (2018).
	Función de la tarea	FT	Explicitación de algún objetivo que se considera tiene la tarea.
EGD	Noción EGD	Negd	Explicitación de una idea, expresión o sinónimo en la que se menciona qué se entiende o qué se considera que es un EGD. También, se refiere a la identificación o explicitación de alguna característica de las construcciones robustas o blandas.

	Función EGD	Fegd	Explicitación de una idea en la que se menciona cuáles son los usos y las distintas finalidades del EGD.
Argumentación	Noción argumentación	NArg	Explicitación de una idea en la que se menciona qué se entiende por o qué se considera que es la argumentación.
	Noción argumento	NAr	Explicitación de una idea en la que se menciona qué se entiende por o qué se considera que es un argumento. Además, puede aludir a cómo son y cuáles son los tipos de argumentos.
	Función argumento	FAr	Explicitación de algún objetivo que se asume cumple un argumento.
	Función argumentación	FArg	Explicitación de algún objetivo que se asume cumple la argumentación.

Tabla 15. *Categorías de Análisis para la Caracterización del Conocimiento*

Como mencionamos previamente, los datos del conocimiento de cada uno hacían referencia únicamente a las facetas epistémica, mediacional e interaccional. A continuación, presentamos dos ejemplos con los que buscamos explicitar cómo construimos las categorías emergentes para la caracterización del conocimiento, a partir de criterios específicos de las facetas mencionadas.

- En los datos recolectados pudimos evidenciar que se hacía un uso indistinto de palabras o sinónimos asociados a los tres asuntos de interés, por lo que a tomamos como referencia el primer criterio de la faceta epistémica y construimos la categoría Noción; esta luego fue utilizada para clasificar datos de los asuntos tarea, EGD, argumento y argumentación tal como se muestra en la Tabla 15.
- Para el diseño de una tarea se consideran diferentes elementos asociados con el uso de recursos, las formas de interacción en el aula, el planteamiento de la tarea y sus posibles

soluciones. Haciendo uso de los criterios 2 y 3 de la faceta epistémica, 1 al 5 de la faceta mediacional y 3 al 5 de la faceta interaccional, construimos la categoría *Planeación de la tarea*, teniendo en cuenta, además, lo planteado por Gómez et al. (2018) quienes describe los principios para el diseño de una tarea y las consideraciones que el profesor debe tener.

Finalmente, consideramos relevante explicar por qué los datos de cada uno se refieren específicamente a tres de las facetas propuestas por el CDM: *epistémica, mediacional e interaccional*. La mayoría de los datos aludían a las concepciones que cada uno tenía sobre los asuntos de interés, sinónimos de estos o a los distintos elementos que ambos consideramos para definirlos. Por lo anterior, los criterios de la *faceta epistémica* las incluimos en las categorías alusivas a la noción y función de cada asunto. También hay algunos datos en los que expresamos ideas que cada uno tenía respecto a qué recurso utilizar, cómo utilizarlo y cómo podrían ser las interacciones en el aula generadas por el uso de dicho recurso. Los criterios de las facetas *mediacional e interaccional* se reflejan en la categoría: *Planeación de la tarea (PDT)*. De lo propuesto por Gómez (2018), afirmamos que en la planeación de la tarea se incluye, como parte de sus elementos, la determinación de los materiales y recursos, y el agrupamiento de los estudiantes.

Las facetas *cognitiva, afectiva y ecológica* no se consideraron en este estudio porque en los insumos escogidos como datos no encontramos expresiones de conocimiento alusivos a tales facetas. Consideramos que esto se debe a que nos centramos en el conocimiento que necesitamos para diseñar una tarea y no en su diseño como tal.

3.8.2. Categorías de Análisis para la Transformación del Conocimiento

Como las categorías descritas previamente sólo permiten caracterizar el conocimiento en cada Momento sobre cada elemento, requerimos otro conjunto de categorías que nos permitieran

reconocer cualquier transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemático, respecto a cada categoría y de un Momento a otro. Estas categorías emergen cuando comparamos fragmentos de un mismo asunto, clasificados con el mismo indicador, en el mismo o en diferentes Momentos. Evidenciamos que la transformación se daba al modificar el conocimiento inicial, al profundizar o puntualizar aspectos sobre un determinado conocimiento, cuándo se realizaban aclaraciones o términos de lo que se expresó, o cuándo explícitamente se alude a que algo es un nuevo conocimiento. Los asuntos mencionados previamente se convierten en las categorías bajo las cuales analizamos la transformación del conocimiento. En la Tabla 16 presentamos las categorías de análisis con su respectiva descripción.

Categoría	Código	Descripción
Modifica idea inicial	MCa	Amplía (añadir nuevas características, elementos o vínculos) una idea ya expuesta en un momento anterior.
	MCr	Reduce (elimina características o elementos) una idea ya expuesta en un momento anterior.
	M Ct	Modifica totalmente la idea antes expuesta.
Aclara aspectos o términos específicos	AC	Define elementos mencionados previamente de los que en su momento no se hizo mayor referencia.
Provee nueva información	NC	Menciona ideas que no había reportado previamente.
No modifica idea	NM	Mantiene iguales características, elementos o vínculos reportados en el Momento 2 durante el Momento 4.
Ideas previas no retomadas	INR	Hace referencia a aspectos mencionados en los Momento 2 que no fueron retomados o mencionados en el Momento 4.

Tabla 16. Categorías de Análisis para la Transformación del Conocimiento

3.9. Consideraciones éticas del estudio

En el caso de nuestro estudio, los primeros cuatro momentos se realizaron de forma individual para producir los insumos de la investigación. A partir de las afirmaciones extraídas de los insumos, cada uno realizó evocaciones o interpretaciones de su propio conocimiento bajo el acompañamiento y orientación del primer asesor. Para ello se hicieron uso de las rutinas de pensamiento visible; estas eran aplicadas en las asesorías que teníamos semanalmente, de modo que las reflexiones y conocimiento evocado fuera discutido y se hiciera un manejo crítico, ético y sistemático de la información utilizada para la construcción de las tablas de insumos de cada uno. Cabe aclarar que, como el enfoque de la cohorte de la MDM era el conocimiento del profesor, todo el equipo a cargo del programa estaba enterado y de acuerdo con que nosotros, como estudiantes, pudiéramos llevar registros, diarios de campo, tomar ideas expresadas por los profesores porque las considerábamos relevantes, o ideas consignadas en nuestras tareas, pues en ellas era posible evidenciar conocimiento sobre alguno de los tres asuntos de interés, razón por la cual teníamos que usarlos en el desarrollo de nuestro estudio. En el anexo 19 presentamos una carta emitida por la coordinación de la MDM otorgando los permisos correspondientes para usar descripciones del programa (seminarios, pruebas de ingreso, líneas de investigación, trayectoria académica, etc.), además de afirmaciones relacionadas con el conocimiento didáctico-matemático de cada profesor vinculado con su tránsito por el programa.

4. Análisis de los Datos

En este capítulo presentamos el procedimiento y el producto del análisis de los datos para determinar cuál es y cómo se transformó nuestro conocimiento didáctico-matemático en relación con los asuntos: Argumentación, EGD y Diseño de Tareas. Inicialmente describimos cada uno de los pasos que se llevaron a cabo para realizar el análisis de los datos. Luego, presentamos los análisis de los Momentos 2 y 4 realizados a partir de los datos de cada uno. Seguido a ello, utilizando el compendio del conocimiento de dicho análisis y los datos del Momento 6, determinamos si hubo y cuál fue la transformación final del conocimiento de cada uno. Cabe resaltar que, como mencionamos en la metodología (Capítulo 3) cada uno de nosotros analizó los datos del otro para que este proceso fuera objetivo.

4.1. Procedimiento de Análisis de los Datos del Momento 2 y el Momento 4

El procedimiento de análisis de los datos se realizó en cinco pasos. El primer paso consistió en tipificar los datos de ambos Momentos a partir de las categorías emergentes para la caracterización del conocimiento (ver Tabla 15). Cuando un dato o un apartado del mismo reflejaba visos de conocimiento de alguna de las categorías establecidas para la caracterización, se intervenían los datos incluyendo, entre paréntesis, el código de la categoría con color rojo. A continuación, en la Tabla 17 y la Tabla 18 presentamos dos ejemplos de la tipificación que cada uno realizó en ambos Momentos. La tabla incluye el asunto al que hace referencia, el dato con su respectivo código y la tipificación.

Datos Momento 2 – Hali En el Momento 1, yo...		
Entornos de	PI1-EGD	Sé de la importancia de un software particular que fue quién nos permitió crear (jugar) e interactuar (Negd) y fue un medio para el

Geometría Dinámica (EGD)	desarrollo, la comprensión y la visualización de los fractales (Fegd), en una experiencia previa de trabajo en aula.
Datos Momento 4 – Hali En el Momento 3, yo...	
Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	Tenía un conocimiento previo en relación al uso de un Entorno de Geometría Dinámica y sus posibilidades en el accionar, específicamente asociaba UltraFractal como un EGD (Negd), que sabía usarlo y que me permitía crear o modificar diferentes figuras geométricas (Fegd), por ejemplo, tomar un fractal y hacerle modificaciones o empezar desde cero en la creación de uno.

Tabla 17. Tipificación de Datos de Hali con las Categorías de Caracterización del Conocimiento

Datos Momento 2 – Michael En el Momento 1, yo...	
Diseño de Tareas (DT)	PI13-DT Cuando se diseña una tarea mediada por la tecnología, es importante que el profesor considere la forma en que el estudiante se va a acercar al medio tecnológico, es decir, cuál será el rol de dicho medio para que se cumpla el propósito de la actividad y se genere conocimiento. (PDT)
Datos Momento 4 – Michael En el Momento 3, yo...	
Diseño de Tareas (DT)	PME18-DT Las normas socio-matemáticas y las normas sociales como características en la caracterización de la población para el diseño de tarea. (PDT)

Tabla 18. Tipificación de Datos de Michael con las Categorías de Caracterización del Conocimiento

En el segundo paso, agrupamos los datos según la categoría a la que pertenecían para escribir una síntesis del conocimiento de cada uno de nosotros para los Momentos 2 y 4. Las tablas realizadas incluyen la categoría a la que hace referencia, los códigos de los datos en donde se tipificó, el conocimiento evidenciado respecto a la categoría de caracterización y una síntesis

que establece qué sabía en relación con dicha categoría en un determinado Momento a partir de todos los datos agrupados. En la Tabla 19 y la Tabla 20 presentamos dos ejemplos de las tablas que cada uno realizó en este paso del análisis.

Diseño de Tareas			
Cat	Cód.	Conocimiento evidenciado	Síntesis
	PI1-DT	Taller como sinónimo de tarea.	Una tarea es un taller o actividad que se propone en el aula con un propósito específico y que se desarrolla bajo determinadas condiciones que se han planeado previamente.
	PI1-DT	Taller entendido como actividades que se proponen para el trabajo en el aula.	
NT	PI7-DT	Actividad como sinónimo de tarea y entendida como el problema que se propone para desarrollar bajo condiciones dadas	

Tabla 19. Síntesis por Categorías de Caracterización del Conocimiento de Hali para el Momento 2

Entornos de Geometría Dinámica			
Cat.	Cód.	Conocimiento evidenciado	Síntesis
Fegd	PME10-EGD	Los softwares de geometría dinámica generaron una revolución por el dinamismo en las representaciones y esto ayuda a la exploración y conjeturación.	Él reconoce que los softwares de geometría dinámica en relación con el dinamismo en las representaciones de un objeto geométrico y la verificación de inferencias ya hechas; además, afirma que permiten la exploración y la conjeturación.
	PME9-EGD	El software de geometría dinámica sirve de verificador, pues el resolutor tiene seguridad de las inferencias a las que llegó.	

Tabla 20. Síntesis por Categorías de Caracterización del Conocimiento de Michael para el Momento 2

El tercer paso, consistió en contrastar las síntesis en cada categoría de caracterización, para determinar la transformación, usando las categorías emergentes de transformación (ver Tabla 16). Para ello, nos centramos en identificar las diferencias de las síntesis en ambos Momentos, particularmente qué cambiaba, qué era nuevo conocimiento, qué del Momento 2 no se incluía en el 4 y cuándo no había ningún cambio en el conocimiento. Cabe aclarar que, cuando evidenciamos algún tipo de cambio, ampliación, ideas que previas que no considera de nuevo disminución o transformación en el conocimiento de cada uno se intervenían los datos escribiendo, entre paréntesis, el código de la categoría con color rojo. A continuación, presentamos dos ejemplos de la tipificación de transformación de conocimiento que cada uno realizó. El ejemplo de Hali (Tabla 21) se hace en relación con el asunto Diseño de tareas y la categoría de caracterización PDT para cada Momento. El ejemplo de Michael (Tabla 22) se hace en relación con el asunto EGD y la categoría de caracterización Fegd para cada Momento.

Elm.	Cat.	Momento 2	Momento 4
Diseño de tarea	PDT	<p>Se debe seguir un proceso de planeación para producir una tarea. Luego de ello, esta se debe probar para evaluarla y ajustarla. [INR]</p> <p>Se debe evaluar si el uso del software aportó al propósito de la tarea.</p>	<p>Dentro de los elementos que considera son parte de la planeación de una tarea están: descripción de la población, metas, objetivos, tiempos, materiales y recursos y reconocimiento del manejo de estos. [MCa]</p> <p>Antes de iniciar el diseño debe escoger el tema, debe saber por qué diseñarla y para qué la diseña. [NC]</p> <p>El profesor debe tener el conocimiento del tema sobre el cual va a tratar la tarea, del recurso que va a usar y del proceso que pretende favorecer para poder diseñar una tarea. [NC]</p> <p>Las metas se establecen una vez se han determinado los objetivos de la tarea. [NC]</p>

Tabla 21. Tipificación del Conocimiento de Hali a partir de las Categorías Emergentes de Transformación

Elm.	Cat.	Momento 2	Momento 4
EGD	Fegd	Los programas de geometría dinámica son un medio para la realización de representaciones de objetos geométricos 2D y 3D. El dinamismo del software permite analizar múltiples representaciones, establecer vínculos entre objetos geométricos y, favorece el proceso de exploración y conjeturación.	Los softwares de geometría dinámica están relacionados con el dinamismo en las representaciones de un objeto geométrico [MCr] y la verificación de inferencias ya hechas [MCa]; además, permiten la exploración y la conjeturación [NC].

Tabla 22. Tipificación del Conocimiento de Michael a partir de las Categorías Emergentes de Transformación

El cuarto paso, consistió en establecer el compendio del conocimiento respecto a cada asunto. Finalmente, en el paso cinco describimos, según el asunto y la categoría de transformación, cuál fue la transformación evidenciada en el conocimiento de cada uno entre el Momento 2 y 4. El compendio del conocimiento de cada uno después del Momento 4 es una caracterización sobre asunto en la que se evidencia qué permaneció igual, qué es nuevo conocimiento y qué aspectos se mencionaron en el Momento 2 que no aparecen en el 4.

4.2. Análisis del Conocimiento de Hali

En este apartado se presenta el desarrollo del procedimiento de análisis realizado a los datos de Hali. Se ejemplifica cada paso y se presenta el producto final del análisis de los Momentos 2 y 4.

4.2.1. Procedimiento de Análisis de Datos del Conocimiento de Hali en los Momentos 2 y 4

Paso 1.

Como mencionamos en la descripción del procedimiento de análisis, en el primer paso se tipifican los datos de ambos Momentos a partir de las categorías de caracterización del conocimiento. La tabla completa producto de este paso se incluye en el Anexo 7.

Paso 2.

En este paso agrupamos en dos tablas, una para cada Momento (2 y 4), los datos que hicieron referencia a la misma categoría de caracterización de conocimiento. La tabla completa se encuentra en el Anexo 9.

Paso 3.

Teniendo como referencia las síntesis obtenidas por cada categoría en el paso anterior, agrupamos en una sola tabla las síntesis de ambos Momentos (2 y 4) en aras de tipificarlas a partir de las categorías emergentes de transformación, de modo que pudiéramos identificar si hubo cambio y de qué tipo era. La tabla completa se incluye en el Anexo 11.

Paso 4.

Se producen las descripciones del conocimiento de Hali en los Momentos 2 y 4 sobre cada asunto. La Tabla 23 incluye el asunto, el Momento al cual se refiere y la respectiva descripción que se construye a partir del agrupamiento de todas las categorías de caracterización referidas a un mismo asunto. Por ejemplo, para hacer el resumen del conocimiento respecto al Diseño de tareas para los Momentos 2 y 4, se tomaron como referencia las síntesis hechas en cada uno de los momentos en relación con las categorías noción de tarea (NT), planeación de la tarea (PDT) y función de la tarea (FT).

Asunto	Momento	Compilación
Diseño tareas	Momento 2	Tarea es un taller o actividad que se propone en el aula con un propósito específico y que se desarrolla bajo determinadas condiciones. Se debe seguir un proceso de planeación para producir una tarea. Luego, esta se debe probar, evaluar y ajustar en caso de ser necesario. Dentro de dicha evaluación se debe incluir si el uso del software aportó al propósito de la tarea.
	Momento 4	Tarea es la solicitud que hace el profesor y actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante. Dicha solicitud promueve la exploración, la producción de argumentos y requiere el uso de EGD para resolverla. En cuanto al diseño de la tarea, el profesor debe tener conocimiento del tema va a tratar, del recurso que va a usar y del proceso que pretende favorecer. También, debe tener claridad respecto al por qué y para qué diseña la tarea. Además, parte de los elementos de la planeación de una tarea son: descripción de la población, metas, objetivos, tiempos, materiales y recursos y reconocimiento del manejo de estos.
EGD	Momento 2	Los EGD son programas o softwares con determinados propósitos que son usados cuando el objeto matemático que se trabaja es complejo. Entre los usos de los EGD destaca crear, jugar e interactuar con objetos geométricos y promover una experiencia innovadora en los estudiantes. Son un medio que aporta a la comprensión, resolución de problemas, a cumplir los propósitos de enseñanza y a la visualización de algunas propiedades de objetos geométricos. Un ejemplo de ello es UltraFractal 5.
	Momento 4	Los EGD son herramientas tecnológicas que permiten crear, mover y transformar objetos geométricos. Además, son una herramienta de exploración que facilita la conjeturación. Su uso genera impacto en los estudiantes, promueve la demostración y aporta al aprendizaje de la argumentación Hay dos posibles tipos de construcciones cuando se trabaja con EGD, las robustas y las blandas. Las construcciones robustas que son aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las construcciones blandas

		<p>permiten establecer una relación entre las condiciones y las consecuencias de un teorema.</p>
Argumentación	Momento 2	No reporta conocimiento en esta categoría.
	Momento 4	<p>La argumentación es secuencia de argumentos aceptados por la comunidad. Es un proceso cuyo producto es un discurso o una justificación con la finalidad de determinar la veracidad de algo particular. Argumentar y demostrar son sinónimos de argumentación y esta, a su vez, es un componente de los Estándares Básicos y un campo de investigación. La conjetura y la verificación son partes fundamentales del proceso de argumentación.</p> <p>La finalidad de la argumentación es determinar la veracidad de algo particular. Además, la argumentación permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de otros.</p>
Argumento	Momento 2	<p>Un argumento son los atributos de un objeto matemático. Un ejemplo son los fractales; en este caso, ejemplos de argumentos son: auto-similitud, dimensión e iteración. Argumento, desde un punto de vista artístico, se relaciona con conceptos como proporcionalidad, teoría del color, técnica y con la asociación de distintas nociones</p>
	Momento 4	<p>Argumentar es un proceso que consta de una serie de pasos. El argumento hace parte de los objetos primarios del proceso de argumentación, tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y datos) y una estructura lógica según el tipo de argumento que sea (deductivo, abductivo, inductivo y analógico).</p> <p>La función de los argumentos es que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o falsedad de una declaración.</p>

Tabla 23. Resumen del Conocimiento sobre cada Asunto para los Momentos 2 y 4 - Hali

Paso 5.

A continuación, se presenta la caracterización de la transformación del conocimiento de Hali para cada uno de los asuntos. Como se mencionó previamente, el objetivo de dicha

caracterización consiste en describir a profundidad cuál fue la transformación evidenciada entre un Momento y otro. Esta caracterización se realizó a partir de la tipificación realizada en el paso 3 en relación con las categorías emergentes para la transformación del conocimiento. Seguido a ello, se presenta el compendio del análisis del conocimiento de Hali. Este compendio menciona las cosas que Michael evidenció del conocimiento de Hali en los dos Momentos (2 y 4), aquellas que permanecieron igual, las que son nuevo conocimiento, y las que se mencionaron en el Momento 2 que no aparecen en el 4, a menos que contradiga algo que corresponda al nuevo conocimiento. Por lo anterior, se puntualiza cuál es el conocimiento de Hali en cada una de las categorías referidas a los tres asuntos.

Diseño de Tareas.

En cuanto a la noción de tarea se evidencia una *modificación total de conocimiento* dado que en el Momento 4 Hali diferencia específicamente tarea de actividad al presentar una definición de cada término, elementos que en el Momento 2 considera como sinónimos. Se evidencia *nuevo conocimiento* dado que en el Momento 4 menciona que para que algo sea considerado como tarea debe promover la exploración, la producción de argumentos y el uso de EGD para poder resolverlas. En el Momento 2 no hace ninguna mención al respecto.

En relación con la planeación de tareas se evidencia una *ampliación de conocimiento* en tanto que en el Momento 2 reconoce que hay un proceso de planeación para la tarea, pero no lo describe, mientras que en el Momento 4 menciona que parte de la planeación de una tarea consiste en determinar las metas, los objetivos y reconocer si es necesario o no el uso de un determinado recurso. Además, menciona que es importante poder reconocer las condiciones específicas en las que se va a proponer la tarea (Momento 2) y en el Momento 4 destaca cuáles son: metas, objetivos, cuál es la población, qué tiempo se requiere y qué materiales y recursos se

usarán. Cabe resaltar que no proporciona información respecto a cómo concibe cada uno de los elementos. Se evidencia *nuevo conocimiento* cuando alude, en el Momento 4, a qué debe saber el profesor previo al diseño de la tarea: características del recurso, identificación del proceso que pretende favorecer, la temática sobre la cual tratará la tarea. Finalmente, hay una *idea previa no retomada*, debido a que en el Momento 4 no hace referencia a la necesidad de probar, evaluar y ajustar las tareas que diseña, aspecto que sí mencionó en el Momento 2.

En cuanto a la función de la tarea, en el Momento 4 reconoce a que son un medio que promueve la argumentación y aporta al aprendizaje de un tema en particular que consiste en *nuevo conocimiento* puesto que en el Momento 2 no menciona ninguna función.

Entornos de Geometría Dinámica.

Respecto a la noción de EGD, en esencia conserva la misma noción en los Momentos 2 y 4: son herramientas tecnológicas que permiten crear, mover, interactuar, transformar objetos geométricos y generar impacto en los estudiantes. Se evidencia *nuevo conocimiento* dado que en el Momento 4 considera a los EGD como una herramienta de exploración que facilita la conjeturación, aspecto que no menciona en el Momento 2. También hay *nuevo conocimiento* ya que en el Momento 4 considera a GeoGebra como un EGD, cuando en el Momento 2 el ejemplo era Ultrafractal5. Además, todo el reconocimiento y la caracterización de las construcciones robustas y blandas realizada en el Momento 4 es *nuevo conocimiento*.

En cuanto a la función de los EGD, hay una *ampliación de conocimiento* ya que en Momento 4 incluye funciones no mencionadas en el Momento 2: exploración, conjeturación, demostración y aprendizaje de la argumentación. También hay *ideas previas no retomadas*, ya que ninguna de las funciones mencionadas en el Momento 2, medio que aporta a la visualización, comprensión y resolución de problemas, se incluyen en el Momento 4.

Argumentación y Argumento.

En relación con la noción y la función de argumentación todo lo reportado en el Momento 4 se considera *nuevo conocimiento* ya que en el Momento 2 Hali no reporta conocimiento al respecto.

Hay *modificación total* en la noción de argumento porque pasa de considerarlo como los atributos artísticos de un objeto matemático (Momento 2) a verlo, en el Momento 4, como los pasos de un proceso de argumentación que tienen una estructura ternaria, es decir, que están compuestos de dato, garantía y aserción y que son de diferentes tipos, ya sea deductivo, abductivo o inductivo. Es importante resaltar que no proporciona información respecto a cómo entiende cada elemento anterior, ni describe las características principales de los tipos de argumento.

Respecto a las funciones del argumento, se evidencia *nuevo conocimiento* dado que en el Momento 4 explicita que una de sus funciones es determinar la veracidad o falsedad de una afirmación, mientras que en el Momento 2 no menciona para qué son los argumentos.

4.2.2. Compendio del Conocimiento de Hali Después del Momento 4

La tarea es vista como la solicitud que hace el profesor a los estudiantes con un propósito específico y requiere el uso de EGD para resolverla. La actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante.

Los elementos que considera parte de la planeación de una tarea son: descripción de la población, metas, objetivos, tiempos, materiales y recursos y, reconocimiento del manejo de estos. Además, antes de iniciar el diseño el profesor debe elegir el tema de la tarea y saber por qué y para qué la diseña. También debe tener el conocimiento del tema sobre el cual va a tratar la tarea, del recurso que va a usar y del proceso que pretende favorecer. Una vez concluido el

proceso de planeación de la tarea esta se debe probar para evaluarla y ajustarla en caso de ser necesario. Finalmente, dentro de las funciones de la tarea están: promueve la exploración, la producción de argumentos y aporta al aprendizaje de un tema en particular.

Respecto a la noción de EGD, los concibe como una herramienta tecnológica que permite crear y modificar figuras geométricas. Además, las considera como una herramienta de exploración que facilita la conjeturación. El manejo de los EGD permite realizar dos tipos de construcciones, las robustas y las blandas. Las robustas que son aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las blandas son aquellas que permiten establecer una relación entre las condiciones y las consecuencias de un teorema. Finalmente, considera a GeoGebra como ejemplo de EGD.

Dentro de las funciones de los EGD, Hali reconoce: aporta al aprendizaje de la argumentación y motiva la exploración ya que permite modificar, crear, mover y transformar objetos geométricos. Son un medio que aportar a la visualización, comprensión y resolución de problemas y, favorecen la conjeturación y demostración. Además, su uso impacta a los estudiantes.

La argumentación es vista como una secuencia de argumentos aceptados por la comunidad. Es un proceso cuyo producto es un discurso o una justificación. Argumentación, argumentar y demostrar son considerados como sinónimos. Por su parte, argumentar es un proceso que consta de una serie de pasos. La conjetura y la verificación son partes fundamentales del proceso de argumentación.

El argumento es visto como parte de los objetos primarios del proceso de argumentación, tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y datos) y una estructura lógica según el tipo de argumento que sea (deductivo, abductivo, inductivo y analógico).

En cuanto a la función de argumento y de argumentación, se evidenció una confusión relativa, dado que Hali no hace una distinción de cuáles son las funciones específicas de la argumentación ni del argumento. Para ambas menciona el mismo uso: determinar la veracidad de algo particular y permitir a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de otros.

4.3. Análisis del Conocimiento de Michael

En este apartado se presenta el desarrollo del procedimiento de análisis realizado a los datos de Michael. Se ejemplifica cada paso y se presenta el producto final del análisis de los Momentos 2 y 4.

4.3.1. Procedimiento de análisis de datos del conocimiento de Michael en los Momentos 2 y 4

Paso 1.

Como mencionamos en la descripción del procedimiento de análisis, en el primer paso se tipifican los datos de ambos Momentos a partir de las categorías de caracterización del conocimiento. La tabla completa producto de este paso se incluyen en el Anexo 8.

Paso 2.

En este paso agrupamos en dos tablas, una para cada Momento (2 y 4), los datos que hicieron referencia a la misma categoría de caracterización de conocimiento. La tabla completa se encuentra en el Anexo 10.

Paso 3.

Teniendo como referencia las síntesis obtenidas por cada categoría en el paso anterior, agrupamos en una sola tabla las síntesis de ambos Momentos (2 y 4) en aras de tipificarlas a partir de las categorías emergentes de transformación, de modo que pudiéramos identificar si hubo cambio y de qué tipo era. La tabla completa se incluye en el Anexo 12.

Paso 4.

En este paso se escribe un resumen del conocimiento de Michael en los Momentos 2 y 4 para cada asunto. La Tabla 24 incluye el asunto, el Momento al cual se refiere y el respectivo resumen que se construye a partir del agrupamiento de todas las categorías de caracterización referidas a un mismo asunto. Por ejemplo, para hacer los resúmenes de Entornos de Geometría Dinámica para los Momentos 2 y 4, se tomaron como referencia las síntesis hechas en cada uno de los momentos en relación con las categorías noción de EGD (Negd) y función de EGD (Fegd).

Elemento	Momento	Síntesis
Diseño de Tareas	Momento 2	La tarea es una actividad que permitir la interacción entre el estudiante y los objetos geométricos. Además, una tarea son las preguntas que suscitan al uso de un recurso como GeoGebra. Si las tareas van a estar mediadas por una tecnología, que según parece es algún programa de geometría dinámica, es importante un acercamiento previo a esta para asegurar que los estudiantes no tengan dificultades para usarla y que conozcan las herramientas que van a necesitar. La función de la tarea es ser un medio que permite la conceptualización de alguna noción matemática.
	Momento 4	La tarea es una actividad acompañada de unas preguntas que invitan al uso de un recurso como GeoGebra. Es importante permitir el acercamiento al manejo del recurso para asegurar el conocimiento de las herramientas que este ofrece y que son necesarias. Para el diseño de una tarea se debe considerar elementos como: temporalidad, interacción, materiales y recursos, agrupamiento, caracterización de la población, las normas socio-matemáticas y el reconocimiento de las dificultades que pueden tener los estudiantes para el manejo de GeoGebra. Las tareas que se deben presentar a los estudiantes deben estar enfocadas en la exploración, para que el uso del recurso realmente aporte a la solución de la tarea. Hay diferentes recursos como: EGD, lápiz y papel, y materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc). Hay una relación entre el tipo de tarea y el tipo de argumento que pueda surgir en la solución de una tarea.
	Momento 2	Los Entornos de Geometría Dinámica permiten hacer construcciones robustas, que son las que incluyen todas las posibilidades de la situación

<p>Entornos de Geometría Dinámica</p>	<p>presentada, lo que permite resolver el problema dado. Los programas de geometría dinámica son un medio para la realización de representaciones de objetos geométricos 2D y 3D. El dinamismo del software permite analizar múltiples representaciones, establecer vínculos entre objetos geométricos y, favorece el proceso de exploración y conjeturación.</p> <hr/> <p>Un software de geometría dinámica es aquel que dota de dinamismo a las representaciones de un objeto geométrico. Los EGD permiten graficar, explorar, conjeturar y verificar inferencias y propiedades de los objetos geométricos. Las construcciones robustas son aquellas para las cuales, al hacer el arrastre, se conservan las propiedades del objeto geométrico; el arrastre en EGD posibilita visualizar los invariantes de un objeto geométrico. Las construcciones blandas permiten identificar relaciones de dependencia y son parte del proceso de exploración durante la resolución de tareas.</p>
<p>Argumentación</p>	<p>Momento 2 No reporta conocimiento en esta categoría.</p> <hr/> <p>Momento 4</p> <p>La argumentación es sinónimo de razonamiento. La argumentación es la justificación de una respuesta dada a un problema o a una pregunta planteada. La utilidad de la argumentación en la enseñanza se debe a que permite que los estudiantes transmitan sus ideas, las defiendan y las contrasten con las de los demás.</p> <p>El argumento tiene una estructura ternaria, como lo indica el Modelo de Toulmin, que tiene como elementos: una aserción, una garantía y unos datos. El argumento es lo que se dice para validar una idea que se tiene en mente. Hay argumentos inductivos y deductivos. El argumento inductivo está asociado con la búsqueda de consecuente en la estructura terciaria y también con la inducción matemática, por la similitud en las palabras; un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático.</p> <p>La demostración es una justificación o una validación teórica de una conjetura y es también como un gran argumento que se puede presentar por párrafos. Los argumentos informales son aquellos que surgen en el proceso de exploración, en particular cuando se discuten las características entre las partes que componen una construcción blanda (figura representada).</p> <p>Las funciones del argumento son: la verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación, persuadir y el desafío.</p>

Tabla 24. Resumen del Conocimiento sobre cada Asunto para los Momentos 2 y 4 – Michael

Paso 5.

A continuación, se presenta la caracterización de la transformación del conocimiento de Michael para cada uno de los asuntos. Como se mencionó previamente, el objetivo de dicha caracterización consiste en describir a profundidad cuál fue la transformación evidenciada entre un Momento y otro. Esta caracterización se realiza a partir de la tipificación realizada en el paso 3 en relación con las categorías emergentes para la transformación del conocimiento.

Seguido a ello, se presenta el compendio del análisis del conocimiento de Michael. Este compendio menciona las cosas que Hali evidenció del conocimiento de Michael en los dos Momentos (2 y 4): aquellas que permanecieron igual, las que son nuevo conocimiento, y las que se mencionaron en el Momento 2 que no aparecen en el 4, a menos que contradiga algo que corresponda al nuevo conocimiento, respecto a los tres asuntos.

Diseño de Tareas.

Respecto a la noción de tarea se evidencia *nuevo conocimiento* dado que ya no es simplemente una actividad que invita al uso de geometría dinámica (Momento 2), sino que además hay distintos tipos de tareas, según el tipo de argumento que puede surgir en la solución de una tarea (Momento 4).

Respecto a la función de una tarea, en el Momento 2 Michael indica que esta es permitir la interacción de los estudiantes con el objeto de estudio para favorecer la conceptualización; se evidencia una *idea previa no retomada* pues en el Momento 4 no hace referencia a alguna función de tarea.

Respecto a la planeación de una tarea, se evidencia una que hay *ideas previas no retomada* puesto que Michael en el Momento 4 no menciona, como lo hizo en el Momento 2, que se requiere previamente asegurar un manejo adecuado del recurso que se pretende usar. Se

evidencia *adquisición de conocimiento* en cuatro cuestiones: primero, reconoce que para diseñar tareas se deben considerar algunos elementos: temporalidad, interacción, materiales y recursos, agrupamiento, caracterización de la población, las normas socio-matemáticas y el reconocimiento de las dificultades para el manejo de GeoGebra, pero no los describe. Segundo, para Michael las tareas que se presentan a los estudiantes deben estar enfocadas en la exploración, para que el uso del recurso realmente aporte a la solución de la tarea. Tres, indica que hay diferentes recursos, como EGD, lápiz y papel, y materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc). Cuatro, él reconoce que hay una relación entre el tipo de tarea y el tipo de argumento que pueda surgir en la solución de una tarea.

Entornos de Geometría Dinámica.

Respecto a la noción de EGD, se evidencia unas *ideas previas no retomadas* dado que en el Momento 4 afirma que las construcciones robustas son las que al hacer el arrastre conservan las propiedades del objeto geométrico, pero no aclara ni profundiza respecto a la función de las construcciones robustas como lo hizo en el Momento 2. Tampoco hace referencia a las posibles dimensiones (2D y 3D) de los objetos geométricos que se pueden representar.

Se evidencia en el Momento 4 *nuevo conocimiento* dado que Michael expresa que un software de geometría dinámica es aquel que dota de dinamismo a las representaciones de un objeto geométrico. Además, afirma que los EGD permiten graficar, explorar, conjeturar y, verificar inferencias y propiedades de los objetos geométricos. Michael asocia el arrastre en EGD con la posibilidad de visualizar los invariantes de un objeto geométrico en una construcción robusta del objeto.

Por último, hay *ampliación de conocimiento* puesto que, aunque Michael en el Momento 2 había mencionado la existencia de construcciones blandas, en el Momento 4 indica que son

las que le permiten identificar relaciones de dependencia y las que son parte del proceso de exploración durante la resolución de la tarea.

Argumentación / Argumento.

Respecto a la noción de argumentación, se evidencia *nuevo conocimiento* puesto que Michael por primera vez menciona que concibe la argumentación como la justificación de una respuesta dada a un problema o a una pregunta planteada. Él reconoce, además, que la utilidad de la argumentación en la enseñanza se debe a que permite que los estudiantes transmitan sus ideas, las defiendan y las contrasten con las de los demás. Para Michael la demostración es una justificación o una validación teórica de una conjetura.

Respecto a la noción de argumento se evidencia *nuevo conocimiento* debido a que Michael expresa que el argumento tiene una estructura terciaria, como lo indica el Modelo de Toulmin, que tiene como elementos: aserción, garantía y datos. Además, reconoce como argumentos informales a aquellos que surgen en el proceso de exploración, en particular cuando se discuten las características entre las partes que componen una construcción blanda (figura representada). También, reconoce que hay argumentos inductivos y deductivos. Asocia el argumento inductivo con la búsqueda de consecuente en un problema abierto de conjeturación y también con la inducción matemática, por la similitud en las palabras; él concibe que un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático.

Respecto a la función de argumento, se evidencia *nuevo conocimiento* debido a que Michael afirma que las funciones del argumento son: la verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación y persuadir.

4.3.2. Compendio del Conocimiento de Michael Después del Momento 4

La tarea es vista como la solicitud que hace el profesor a los estudiantes con un propósito específico y que requiere el uso de EGD para resolverla. La actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante.

Los elementos que considera son parte de la planeación de una tarea son: descripción de la población, metas, objetivos, tiempos, materiales y recursos y, reconocimiento del manejo de estos. Además, antes de iniciar el diseño, el profesor debe elegir el tema de la tarea y saber por qué y para qué la diseña. También debe tener el conocimiento del tema sobre el cual va a tratar la tarea, del recurso que va a usar y del proceso que pretende favorecer. Una vez concluido el proceso de planeación de la tarea esta se debe probar para evaluarla y ajustarla en caso de ser necesario. Finalmente, dentro de las funciones de la tarea están: promover la exploración, la producción de argumentos y aportar al aprendizaje de un tema en particular.

Respecto a la noción de EGD, los concibe como una herramienta tecnológica que permite crear y modificar figuras geométricas, y explorarlas, cuestión que facilita la conjeturación. En un EGD se pueden realizar dos tipos de construcciones, las robustas y las blandas. Las robustas son aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las blandas permiten establecer una relación entre las condiciones y las consecuencias de un teorema. Finalmente, considera que GeoGebra es un ejemplo de EGD.

Dentro de las funciones de los EGD, Michael considera: aportar al aprendizaje de la argumentación y motivar la exploración ya que permite modificar, crear, mover y transformar objetos geométricos. Son un medio que aportan a la visualización, comprensión y resolución de problemas y favorecen la conjeturación y demostración. Además, su uso impacta a los estudiantes.

La argumentación es vista como una secuencia de argumentos aceptados por la comunidad. Es un proceso cuyo producto es un discurso o una justificación. Argumentación, argumentar y demostrar son considerados como sinónimos. Argumentar es visto como un proceso que consta de una serie de pasos. La conjeturación y la verificación son partes fundamentales del proceso de argumentación.

El argumento es considerado como parte de los objetos primarios del proceso de argumentación; tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y datos) y una estructura lógica según el tipo de argumento que sea (deductivo, abductivo, inductivo y analógico).

En cuanto a la función de argumento y de argumentación, Michael no indica cuáles son las funciones específicas de la argumentación y cuáles del argumento. Para ambas menciona el mismo uso: determinar la veracidad de algo particular y permitir a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de otros.

4.4. Procedimiento de Análisis del Compendio de Conocimiento y el Momento 6

El procedimiento de análisis de los datos se realizó en tres pasos. El primer paso consistió en tipificar los datos del Momento 6 a partir de las categorías emergentes para la caracterización del conocimiento. A continuación, en la Tabla 25 y la Tabla 26 presentamos dos ejemplos de la tipificación que cada uno realizó en el Momento 6.

Datos Momento 6 – Hali	
Argumentación/ argumento	El argumento es la afirmación que trae un respaldo teórico o empírico (Nar). Este argumento se crea a partir del conocimiento y la comprensión de axiomas, teoremas, colorarios, lemas y proposiciones, y a partir de evidencia obtenida de una construcción, una exploración o la visualización de un determinado objeto geométrico (Nar).

Los argumentos de los que hace uso la argumentación vienen de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración. (Nar)
Tiene como función la verificación de conjeturas a partir de unos elementos dados, unos supuestos y una conclusión. (Far)

Tabla 25. Tipificación de los Datos del Momento 6 de Hali con las Categorías de Caracterización del Conocimiento

Datos Momento 6 – Michael	
EGD	<p>Los EGD son herramientas tecnológicas, creadas bajo los principios de la geometría euclidiana, que permiten a quien los use representar, construir, modificar y verificar propiedades geométricas [Negd]. Ejemplos de EGD son: GeoGebra, Cabri Geometry y, Regla y Compás [Negd]. Promueven la interacción con objetos geométricos nuevos o predeterminados a partir de los comandos y características propias del entorno [Fegd]. Son un medio que promueve la conjeturación, visualización, aporta a la resolución de problemas abiertos y al aprendizaje de la argumentación ya que a partir de su dinamismo es posible considerar diferentes casos de una determinada situación cuando se aborda una tarea, lo cual favorece la producción de argumentos de diversos tipos [Fegd].</p> <p>A partir de su uso se reconocen las construcciones robustas y las construcciones blandas. Las robustas son aquellas que resuelven el problema de forma general, es decir, que, aunque se realice un arrastre de algún punto de la figura esta siempre mantiene las propiedades geométricas esperadas [Negd]. Las blandas, al realizar un arrastre, no conservan las propiedades esperadas dada la forma en que se construyeron por lo que podrían resolver tan solo un caso específico del problema que se está resolviendo [Negd].</p>

Tabla 26. Tipificación de los Datos del Momento 6 de Michael con las Categorías de Caracterización del Conocimiento

El segundo paso, consistió en contrastar los datos del Momento 6 con el compendio del conocimiento obtenido del análisis del Momento 2 y 4, para determinar la transformación, a partir de las categorías emergentes de transformación. A continuación, presentamos dos ejemplos (Tabla 27 y Tabla 28) de la tipificación de conocimiento que cada uno realizó. El ejemplo de

Hali se hace en relación con el asunto Argumentación. El ejemplo de Michael se hace en relación con el asunto Diseño de Tareas.

Asunto	Compendio	Momento 6
Ar	<p>El argumento hace parte de los objetos primarios del proceso de argumentación, tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y datos) y una estructura lógica según el tipo de argumento que sea (deductivo, abductivo, inductivo y analógico).</p> <p>La función del argumento es determinar la veracidad de algo particular y permitir a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de otros</p>	<p>El argumento es la afirmación que trae un respaldo teórico o empírico (MCt). Este argumento se crea a partir del conocimiento y la comprensión de axiomas, teoremas, corolarios, lemas y proposiciones, y/o a partir de evidencia obtenida de una construcción (NC), una exploración o la visualización de un determinado objeto geométrico.</p> <p>Los argumentos de los que hace uso la argumentación vienen de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración. (NC)</p> <p>Tiene como función la verificación de conjeturas a partir de unos elementos dados, unos supuestos y una conclusión. (MCt)</p>

Tabla 27. Tipificación del Conocimiento de Hali a partir de las Categorías Emergentes de Transformación

Asunto	Compendio	Momento 6
DT	<p>La tarea es una actividad acompañada de unas preguntas que guían el uso de un recurso como GeoGebra. Hay una relación entre el tipo de tarea y el tipo de argumento que pueda surgir en la solución de una tarea. Es importante permitir el acercamiento al manejo del recurso para asegurar el conocimiento de las herramientas que éste ofrece y que son necesarias. Para el diseño de una tarea se debe considerar elementos como: temporalidad, interacción, materiales y recursos, agrupamiento, caracterización de la población, las normas socio-matemáticas y el reconocimiento de las dificultades que pueden tener los estudiantes para el manejo de GeoGebra. Las tareas que</p>	<p>Tarea es la solicitud que hace el profesor a los estudiantes [MCt] con un propósito específico [MCr] y actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante [MCt]. Durante el diseño de una tarea el profesor debe considerar siete elementos que permiten describir a profundidad la tarea: requisitos (determinar el conjunto de conocimientos previos que permiten abordar la tarea), meta (propósito de la tarea), formulación (texto en el que el profesor proporciona a los estudiantes la tarea que deben resolver), materiales y recursos (cualquier medio, tecnológico o no, que se utilice para resolver una tarea), agrupamiento (determinación de cómo realizar la tarea, individual, pareja, grupo pequeño), formas de interacción (entendidas como las distintas formas en que se relacionan y comunican los diferentes actores en el aula:</p>

se deben presentar a los estudiantes deben estar enfocadas en la exploración, para que el uso del recurso realmente aporte a la solución de la tarea [INR]. Hay diferentes recursos como: EGD, lápiz y papel, y materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc). La función de la tarea es ser un medio que permite la conceptualización de alguna noción matemática.

profesor, estudiante, pareja, grupos de clase, etc.) y temporalidad (determinación del tiempo y los modos en los que se va a resolver la tarea, un primer momento individual, luego en grupos, etc.) [AC].

El profesor debe tener conocimiento del tema que va a tratar y distintas herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan diseñar la tarea y justificar por qué ese diseño permite alcanzar las expectativas de aprendizaje trazadas y superar determinadas limitaciones [NC]. La función de la tarea es ser un medio que promueve el aprendizaje, la exploración y la conjeturación [MCt]. Una vez diseñada la tarea esta se debe probar, evaluar y ajustar en caso de ser necesario [NC].

Tabla 28. Tipificación del Conocimiento de Michael a partir de las Categorías Emergentes de Transformación

En el tercer paso, escribimos, puntualmente, según el asunto y la categoría de transformación, cuál fue la transformación final evidenciada en el conocimiento de nuestro compañero.

4.4.1. Procedimiento de Análisis de Datos del Conocimiento de Hali en el Momento 6

Pasos 1 y 2.

Las tablas realizadas durante el desarrollo de estos dos pasos se incluyen en los Anexos 15 y 17, respectivamente.

Paso 3.

A continuación, se presenta la caracterización de la transformación del conocimiento de Hali para cada uno de los asuntos, contrastando el compendio del conocimiento una vez terminado el Momento 4 con los datos del Momento 6.

Diseño de Tareas.

En cuanto a la noción de tarea se evidencia una *modificación total de conocimiento* dado que en el Momento 6 la tarea es entendida como una actividad que propone y realiza el profesor para los estudiantes, mientras que antes hacía una distinción explícita entre las nociones de tarea y actividad dando una noción para cada una de ellas. Cabe resaltar que en el Momento 6 no hace referencia a la noción de actividad, por lo que esto se considera una *idea previa no retomada*. Además, al hacer un contraste entre las definiciones de tarea que propone Hali se evidencia *nuevo conocimiento* porque menciona que uno de los requisitos para que algo sea considerado tarea es que debe promover la interacción entre el trabajo del estudiante y el recurso, aspecto no mencionado en el compendio del conocimiento después del Momento 4.

En relación con la planeación de la tarea, se evidencia *nuevo conocimiento* en el Momento 6 porque incluye que dicha planeación debe considerar, además de los elementos mencionados en el compendio del conocimiento de Hali después del Momento 4 (objetivos, descripción de la población, tiempos y materiales y recursos), la interacción, las normas socio-matemáticas, el agrupamiento y reconocimiento de dificultades de los estudiantes y del uso del recurso. Se destaca que incluye una descripción de cada uno de los elementos mencionados, esto es considerado *como nuevo conocimiento*; sin embargo, también incluye la descripción de los elementos a los que alude en los Momentos 2 y 4 por lo que hay una *ampliación de conocimiento*. En cuanto a los recursos, en el Momento 6 se evidencia *nuevo conocimiento* ya que dentro de estos da como ejemplo: regla, compás, transportador o de recursos tecnológicos como los softwares de geometría dinámica, pero antes los recursos solo hacían referencia a los EGD. Al contrastar los requerimientos que Hali tiene en cuenta para planear una tarea se evidencia que *no modifica su conocimiento* ya que en ambos casos (Momento 6 y en los

Momentos 2 y 4) considera relevante que el profesor tenga conocimiento del tema que abordará en la tarea, claridad en por qué y para qué la diseña y, sea consciente del tipo de argumento que pretende promover. Cuando considera que el profesor debe contemplar el tipo de construcción que realizarán los estudiantes en la resolución de la tarea se evidencia *nuevo conocimiento* pues es mencionado únicamente en el Momento 6. Finalmente, hay una *idea previa no retomada* ya que antes (Momentos 2 y 4) considera como parte importante del proceso de la tarea poder probarla para evaluarla y ajustarla en caso de ser necesario, aspectos no tenidos en cuenta en el Momento 6.

En cuanto a la función de la tarea, en el Momento 6 destaca que su uso promueve la interacción entre el trabajo del estudiante y del recurso, la consolidación de conocimientos, la comprensión de propiedades de objetos geométricos y el desarrollo de ideas y habilidades algorítmicas, por lo que se evidencia *nuevo conocimiento* ya que no las había mencionado en los anteriores Momentos. Hay funciones como: medio que promueve la argumentación y aporta al aprendizaje de un tema en particular, que se encuentran en los tres Momentos (2,4 y 6) por lo que en relación con estas *no modificó su conocimiento*.

Entornos de Geometría Dinámica.

Respecto a la noción de EGD, en esencia conserva la misma tanto en el Momento 6 como en los Momentos previos (2 y 4): son herramientas tecnológicas que permiten crear, mover, interactuar, visualizar y transformar objetos geométricos. En ambos casos considera los EGD como una como una herramienta de exploración que promueve la conjeturación, por lo que *no modifica su conocimiento*. En el Momento 6 propone ejemplos de las herramientas que tiene un EGD, entre las que menciona: medir ángulos, crear puntos y rectas, arrastrar, etc. Esto es considerado *nuevo conocimiento*. También, propone un ejemplo de un software que no considera

EGD, aludiendo a que este no permite crear objetos geométricos; esto es considerado *nuevo conocimiento* pues antes no había mencionado nada al respecto. En cuanto a las construcciones robustas y blandas se evidencia una *ampliación de conocimiento* en el Momento 6, pues describe cada de ellas mediante el uso de un lenguaje especializado, propone ejemplos específicos y alude a que a partir de las construcciones blandas es posible identificar relaciones de dependencia entre objetos geométricos mientras que en la robustas se evidencian las propiedades que no cambian de tales objetos.

En cuanto a la función de los EGD se evidencian unas *ideas previas no retomadas* porque funciones como aportar a la visualización, comprensión, aprendizaje de la argumentación fueron tenidas en cuenta en el en los Momentos 2 y 4, pero no el Momento 6. Tampoco considera como función que el uso de EGD genera impacto en los estudiantes.

Argumentación / Argumento.

En cuanto a la noción de argumentación, en esencia Hali conserva la misma que antes: es un proceso lógico y estructurado de argumentos validados teóricamente o por una comunidad. Además, en ambos momentos (4 y 6) considera que la argumentación y la demostración son sinónimos y que, cuando se realiza una verificación durante el proceso de argumentación, se obtiene como producto una conjetura. Todo lo anterior indica que *no hubo modificación en el conocimiento* de Hali en relación con lo mencionado. Sin embargo, hay *nuevo conocimiento* dado que en el Momento 6 se evidencia que la unión lógica de argumentos conforma la argumentación, por lo que si la argumentación es diferente es porque los argumentos también lo son. En este sentido reconoce que hay distintos tipos de argumentación producidos a partir de los distintos tipos de argumentos. Cabe aclarar que no describe ni menciona puntualmente cuáles son los tipos de argumentación.

Respecto a la noción de argumento se evidencia una *modificación total de conocimiento* en tanto que en el Momento 6 la puntualiza, aludiendo a que es una afirmación que tiene un respaldo teórico, mientras que en el compendio del conocimiento de Hali se mencionó cuál es su estructura y los tipos de argumentos que hay, es decir, da características del argumento además de una definición de este. Además, en el Momento 6 se evidencia *nuevo conocimiento* cuando menciona que el argumento surge a partir del conocimiento y comprensión de una determinada teoría y que, los argumentos de los que hace uso la argumentación provienen de procesos de aprendizaje teóricos y a partir de la exploración. Es importante resaltar que Hali no hace una distinción explícita entre argumentación, argumento y argumentar lo cual hace difícil distinguir si los percibe como sinónimos o no.

Como se mencionó en el compendio del conocimiento de Hali después del Momento 4 la función de argumento y argumentación es la misma: determinar la veracidad de algo particular. En el Momento 6 se evidencia una *modificación total de conocimiento* porque puntualiza que la función la argumentación es validar o rechazar un teorema o afirmación, mientras que la función del argumento es la verificación de conjeturas, a partir de unos supuestos, para producir una conclusión. También se evidencia una *idea previa no retomada* porque en el compendio de conocimiento considera como función de argumento y argumentación que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de otro, pero en el Momento 6 no menciona nada al respecto ni para argumento ni para argumentación.

4.4.2. Procedimiento de Análisis de Datos del Conocimiento de Michael en el Momento 6

Paso 1 y 2.

Las tablas realizadas durante el desarrollo de estos dos pasos se incluyen en los Anexos 16 y 18 respectivamente.

Paso 3.

A continuación, se presenta la caracterización de la transformación del conocimiento de Michael para cada uno de los asuntos, contrastando el compendio de su conocimiento una vez terminado el Momento 4 con los datos del Momento 6.

Diseño de Tareas.

Respecto a la noción de tarea se evidencia una *modificación total del conocimiento* dado que Michael ya no define la tarea como una actividad; de hecho, ahora las presenta como dos cosas distintas, siendo la tarea la solicitud que hace el profesor a los estudiantes y la actividad la acción que realizan los estudiantes con la tarea propuesta. También se evidencia unas *ideas previas no retomadas*, puesto que en el Momento 6 Michael no menciona nada sobre la relación que hay entre los tipos de tareas y los tipos de argumentos; tampoco él explicita cuál es el propósito de la tarea ni en qué estas deben estar enfocadas al proponerla a los estudiantes.

Respecto a la función de la tarea, en el Momento 6 se evidencia una *modificación total del conocimiento* puesto que para Michael la función de una tarea ya no es que permite la conceptualización de alguna noción matemática, sino que es un medio que promueve el aprendizaje, la exploración y la conjeturación.

Respecto a planeación de tarea, se evidencia una *aclaración del conocimiento* puesto que Michael en el Momento 6 define cada uno de los siete elementos a considerar a la hora de diseñar una tarea; sin embargo, aquí también se presenta una *idea previa no retomada* debido a que en el Momento 6 él ya no presenta o lista ejemplos de recursos. También se evidencia *nuevo conocimiento* dado que Michael afirma que cualquier diseño de tarea se debe probar, evaluar y ajustar; además, por primera vez hace referencia al conocimiento que debe tener el profesor

sobre el tema que se va a tratar y, sobre las diferentes herramientas conceptuales y metodológicas que el profesor requiere para el diseño de la tarea, aunque no las especifica.

Entornos de Geometría Dinámica.

Respecto a noción de entorno de geometría dinámica, se evidencia una *modificación total del conocimiento* puesto que para Michael los EGD ya no son sólo un software de geometría dinámica que dota de dinamismo a las representaciones de un objeto geométrico de dimensión 2D o 3D. Ahora los EGD son herramientas tecnológicas creadas bajo principios de la geometría euclidiana que permiten la representación de objetos geométricos y, además, permiten verificar propiedades geométricas de dicho objeto. También se evidencia *nuevo conocimiento* dado que por primera vez da ejemplos de algunos EGD.

Se evidencia una *ampliación de conocimiento*, puesto que en el Momento 6 Michael especifica en qué condiciones o cómo debe darse el arrastre para poder verificar si se conservan las propiedades del objeto geométrico y así obtener una construcción robusta. Al hacer referencia al arrastre se evidencia una *idea previa no retomada* debido a que para el Momento 6 Michael no da información sobre lo que es un arrastre. Nuevamente se evidencia una *modificación total del conocimiento* debido a que, en el Momento 6 no considera las construcciones blandas como aquellas que permiten identificar relaciones de dependencia y que son parte del proceso de exploración durante la resolución de tareas, sino que ahora afirma que son las que, al realizar un arrastre, no conservan las propiedades esperadas, lo que permite sólo resolver un caso específico.

Respecto a la función de los EGD, se evidencia un *nuevo conocimiento* debido a que Michael añade a la idea de función de los EGD, que además de permitir graficar, explorar, conjeturar, verificar inferencias y propiedades de los objetos geométricos y favorecer el proceso de exploración y conjeturación, los EGD promueven la interacción con nuevos objetos

geométricos y aporta a resolución de problemas abiertos, al aprendizaje de la argumentación y a la producción de argumentos de diversos tipos.

Argumentación / Argumento.

Respecto a la noción de argumentación se evidencia una *modificación total del conocimiento* puesto que Michael concibe, en el Momento 6, la argumentación como un proceso comunicativo y no como un razonamiento o como la justificación de una respuesta dada a un problema o a una pregunta planteada. También se evidencia *nuevo conocimiento* puesto que por primera vez Michael afirma que en la argumentación se producen argumentos a partir de un conjunto de reglas compartidas por una comunidad de aprendizaje. Por último, se evidencia una *idea previa no retomada* en el Momento 6, debido a que no vuelve referirse a la demostración en relación con la argumentación

Respecto a la función de la argumentación, se evidencia *nuevo conocimiento* debido a que Michael menciona que la argumentación permite reconocer, rastrear y validar evidencias de los razonamientos realizados durante la resolución de un determinado problema; además, afirma que estas funciones desarrollan habilidades de abstracción, análisis, síntesis, comparación, clasificación, particularización y generalización.

En cuanto a la noción de argumento, se evidencia *nuevo conocimiento* ya que Michael define lo que es un argumento, y lo define como el producto del proceso de argumentación; además, añade que este argumento se produce de forma oral o escrita. También se evidencia una *idea previa no retomada* dado que Michael no menciona en el Momento 6 a qué hace referencia o cuáles son las características de los dos tipos de argumento (inductivo y deductivo) que menciona. Por último, se evidencia *aclaración en el conocimiento*, puesto que en el Momento 6

al hacer referencia a la estructura ternaria del argumento, especifica a qué hace referencia cada una de las partes que lo componen.

Respecto a la función del argumento, se evidencia una *modificación total del conocimiento* ya que para él las funciones de argumento ya no son la verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación, persuadir y el desafío, sino que en el Momento 6 la función es permitir que que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o falsedad de una declaración.

5. Conclusiones y Proyecciones

En este capítulo exponemos las conclusiones y proyecciones del estudio realizado. Primero presentamos algunos comentarios respecto de cómo estar inmersos en la MDM aportó a la transformación de nuestro conocimiento. Luego, mostramos los resultados relacionados con la transformación que se evidenció en nuestro conocimiento didáctico-matemático respecto de los asuntos: Argumentación, Diseño de Tareas y EGD. Luego, abordamos lo relacionado a las conclusiones respecto a la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos. Enseguida, exponemos algunos aportes que, a nuestro parecer, dejó el estudio al campo de investigación. Finalmente, presentamos las limitaciones del estudio y proyecciones que proponemos para un trabajo futuro.

5.1. Conclusiones

Durante el desarrollo del estudio evidenciamos que el proceso llevado a cabo nos permitió responder la pregunta problema: ¿qué transformación del conocimiento didáctico-matemático, necesario para el diseño de tareas que promuevan la argumentación de estudiantes escolares y que requieren el uso de entornos de geometría dinámica, se evidencia en dos profesores tras haber cursado el primer semestre del programa de la Maestría Docencia de la Matemáticas de la UPN? Afirmamos que el contenido de cada seminario cursado el primer semestre contribuyó a la transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemático respecto a cada uno de los asuntos de interés. Para dar cuenta de ello:

- i. Usamos dos conjuntos de categorías emergentes para caracterizar y constatar la transformación. El primero está basado en la Dimensión Didáctica del modelo CDM, lo que nos permitió reconocer que el conocimiento, según su naturaleza, puede ser categorizado mediante diversas facetas y que los datos que estudiamos estaban centrados,

principalmente, en las facetas epistémica, mediacional e interaccional. El prestarle atención específicamente a estas facetas nos ayudó a construir un conjunto de categorías emergentes, y los respectivos descriptores para cada faceta (ver sección 3.8.1) permitieron identificar elementos específicos para establecer cuáles eran nuestras nociones y concepciones sobre cada uno de los asuntos de interés. Ello ayudó a determinar en cada caso, lo que para cada uno era el concepto correspondiente, identificar ejemplos y no ejemplos de este, establecer para qué se usa y con qué se relaciona cada uno de los conceptos (4.2.2, 4.3.2, 4.4.1 y 4.4.2)

- ii. El segundo conjunto de categorías emergentes se diseñó para determinar si hubo, o no, transformación del conocimiento didáctico-matemático de un Momento a otro y cuál fue dicha transformación, si es que la hubo (3.8.2).

5.1.1. Sobre la Transformación de Nuestro Conocimiento Didáctico-Matemático

La transformación se evidencia debido a que ahora usamos un lenguaje más preciso o especializado para comunicar nuestras ideas sobre los asuntos de interés; lo hacemos de manera más concreta, sin divagar, ya que logramos modificar nuestras definiciones iniciales de cada asunto. Evidenciamos que en el Momento 4 se incluyen atributos que son producto de profundizar o ampliar nuestro conocimiento de cada concepto. Además, reformulamos ideas, incluimos ejemplos y proporcionamos nuevos elementos que complementan la noción sobre cada asunto de interés.

Comprobar que hubo transformación en nuestro conocimiento didáctico- matemático nos permite afirmar que los seminarios cursados en el primer semestre de la MDM incidieron positivamente en que sucediera dicha transformación, puesto que pudimos evidenciar en los datos del Momento 4 rastros de un conocimiento especializado. Además, validamos la hipótesis

que tenían los profesores que estuvieron a cargo de esta cohorte sobre la necesidad de proveer un programa formativo que permitiera profundizar en los tres asuntos centrales sobre los que se diseñó cada seminario ofrecido. Ello porque terminado el análisis de los datos de los Momentos 2 y 4, reconocimos los vacíos que teníamos en nuestro propio conocimiento profesional respecto a los asuntos argumentación, diseño de tareas y EGD.

Reconocimos que existía una diferencia entre el conocimiento inicial de Michael y Hali sobre cada asunto, posiblemente por la formación recibida durante el pregrado. Sin embargo, evidenciamos que cursar los seminarios propuestos por la MDM y el desarrollo del presente trabajo contribuyeron a zanjar la diferencia evidenciada. A continuación, presentamos ejemplos de cada asunto que validan lo mencionado previamente.

Respecto a Argumentación.

Hali concebía argumento desde dos puntos de vista, el matemático y artístico. El primero lo entendía a partir de los atributos de un objeto matemático y el segundo en relación con conceptos como proporcionalidad, teoría del color, técnica y con la asociación de distintas nociones artísticas. Por su parte, Michael, no reporta conocimiento de este asunto previo al ingreso a la MDM. Consideramos que esta diferencia se disminuyó puesto que, por ejemplo, ambos mencionan que el argumento tiene una estructura ternaria compuesta por aserción, garantía y datos. También, reconocen tipos de argumentos como: inductivos, deductivos y abductivos, e identifican las mismas funciones para los argumentos, como persuadir y comunicar.

Respecto a EGD.

Michael consideraba a los EGD como un medio que permite representar, visualizar, explorar y conjeturar a partir de figuras geométricas. Él aludía a que mediante su uso es posible

hacer construcciones robustas y presenta como ejemplo de EDG a GeoGebra. Hali, por su parte, mencionaba que los EGD son programas con determinados propósitos que son usados cuando el objeto matemático que se trabaja es complejo. Estos permiten crear, visualizar, jugar e interactuar con dichos objetos geométricos y da como ejemplo de EGD a UltraFractal 5.

Consideramos que esta diferencia se disminuyó puesto que al terminar el proceso de análisis de los datos de cada uno se evidenció que ambos mencionan que los EGD son herramientas tecnológicas que permiten graficar, explorar, crear, conjeturar, verificar inferencias, propiedades de objetos geométricos y que favorecen la argumentación. Reconocen que hay dos posibles tipos de construcciones cuando se trabaja con EGD, las robustas y las blandas, y caracterizan cada una de ellas. Ambos dan como ejemplo de EGD a GeoGebra y Hali menciona, en el Momento 6, por qué ya no considera a UltraFractal como ejemplo de EGD.

Respecto a Diseño de Tareas.

Previo al ingreso a la MDM tanto Hali como Michael usaban como sinónimos los términos tarea, taller y actividad. Michael consideraba que las tareas debían estar mediadas por la tecnología y asumía que estas son las preguntas que suscitan al uso de un recurso. La función de la tarea, para Michael, era ser un medio que permite la conceptualización de alguna noción matemática. Por otro lado, para Hali las tareas eran talleres que se proponen en el aula con un propósito específico, se desarrollan bajo determinadas condiciones y se debe seguir un proceso de planeación para producir una tarea. Terminado el proceso de análisis pudimos evidenciar que la diferencia disminuyó ya que ambos reconocen y describen los elementos que se deben considerar en la planeación de una tarea: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, formas de interacción y temporalidad. Ambos mencionan que el profesor debe tener conocimiento profundo del tema que se va a tratar y de las distintas herramientas que se

pretenden utilizar; además, afirman que una vez diseñada la tarea esta se debe probar, evaluar y ajustar en caso de ser necesario. Destacan que la función de la tarea es ser un medio que promueve el aprendizaje, la exploración y la conjeturación.

5.1.2. Sobre el Objetivo General

Nuestro objetivo general era analizar el proceso de transformación del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores, respecto al diseño de tareas, a entornos de geometría dinámica y a la argumentación. Podemos afirmar que lo hemos cumplido en su totalidad porque estudiamos datos en tres momentos diferentes del estudio: Momento 2- conocimiento antes de ingresar a la Maestría, Momento 4- terminado el primer semestre de estudio en la Maestría y Momento 6- terminado el análisis de la transformación entre los Momentos 2 y 4. El producto de tal análisis es la descripción de la transformación de conocimiento a partir de las categorías emergentes destinadas para ello, que podemos evidenciarlo en los apartados 4.2.2 y 4.3.2.

5.1.3. Sobre los Objetivos Específicos

Como primer objetivo específico nos propusimos determinar algunos asuntos requeridos para poder diseñar tareas escolares que, usando geometría dinámica, favorezcan la argumentación. Este se logró consolidar poco a poco como resultado de todo el proceso: cursar todos los seminarios y desarrollar el trabajo de grado. Estos asuntos los describimos en el apartado 5.1.1.

El segundo objetivo específico era estudiar el fundamento teórico del estudio, es decir, el Modelo CDM propuesto por Pino Fan y Godino (2015) que proviene del Enfoque Onto-Semiótico propuesto por Godino, Batanero y Font (2009), con el fin de adaptarlo para lograr el objetivo general que propusimos para este estudio. De nuestra interpretación construimos un conjunto de descriptores para cada una de las facetas de la Dimensión Didáctica del modelo, algunas de ellas sugeridos por Molina (2019) (ver sección 3.8.1).

El tercer objetivo específico consistía en adaptar la investigación en primera persona de modo que el diseño de esta nos permitiera recoger insumos en los que se pudiese evidenciar conocimiento de los asuntos específicos escogidos y determinar los datos de la investigación, respectivamente. Este se cumplió a cabalidad ya que en el Momento 1 se consideraron como insumos las pruebas de ingreso a la MDM, entre las que estaban: conocimiento didáctico-matemático, competencias escriturales en español y el anteproyecto de trabajo de grado. De cada uno de estos tomamos afirmaciones que interpretamos en el Momento 2, mediante el uso rutinas de pensamiento visible y que fueron consignadas en la tabla de insumos (ver Anexo 1 y 2). En el Momento 3, al ser partícipes de los seminarios de Diseño y Desarrollo Curricular, Innovación e Investigación y de Profundización en Matemáticas Elementales, consideramos como insumos: diseños tareas, realimentaciones que los profesores hacían de nuestras producciones, reflexiones de las temáticas abordadas, consultas de bibliografía especializada y discusiones generadas entre pares. De cada uno de estos tomamos afirmaciones que interpretamos en el Momento 4, mediante el uso de rutinas de pensamiento visible y que fueron consignadas en la tabla de insumos (ver Anexo 3 y 4). En el Momento 5, determinamos los datos de la investigación a partir de las tablas de manifestaciones e insumos de cada uno. Cabe aclarar que, en los primeros cuatro Momentos cada uno produjo y recolectó sus propios insumos para que, en el Momento 5, el otro determinara los datos de la investigación. Además, consideramos como datos lo que cada uno expresó en el Momento 6 respecto a lo que consideraba era cada asunto, una vez terminado el análisis del conocimiento de su compañero.

Además de lo anterior, se diseñaron categorías de análisis para clasificar el conocimiento de cada profesor y para determinar la transformación de este. El primer conjunto de categorías emergentes (ver Tabla 15) lo usamos para la caracterización del conocimiento; con este pudimos

centrar la atención en determinar la naturaleza de los datos, es decir, identificar puntualmente qué era lo que se decía de cada asunto y a qué hacía referencia. El segundo conjunto de categorías emergentes (ver Tabla 16) se construyó con el fin de comparar el conocimiento sobre cada asunto en momentos diferentes.

El cuarto objetivo buscaba caracterizar la transformación, si la hubo, del conocimiento de cada profesor. En las secciones 4.2.1 y 4.3.1 presentamos la aplicación del procedimiento de análisis que cada uno realizó a los datos del conocimiento del otro. Ello nos permitió determinar y reportar los resultados en el compendio del conocimiento de cada uno para los Momentos 2 y 4 (ver 4.2.2 y 4.3.2). Luego, realizamos otro análisis contrastando el compendio de conocimiento con los datos del Momento 6 de cada uno. Los resultados de dicho análisis se reportan en las secciones 4.4.1 y 4.4.2. En estas se puede evidenciar la caracterización del conocimiento de cada profesor.

El quinto objetivo específico consistía en reportar los aportes del trabajo investigativo y de la MDM hacia nuestra formación, esto lo exponemos a profundidad en el siguiente apartado 5.2.

5.2. Aportes del Trabajo de Grado a Nosotros como Profesores

A continuación, describimos cuáles fueron los aportes y reflexiones que nos dejó haber realizado el presente trabajo de grado y que contribuyen a nuestro quehacer profesional:

Identificar nuestro conocimiento sobre los tres asuntos abordados, en dos Momentos específicos, y analizarlo a la luz de la dimensión didáctica del CDM (específicamente en cuanto a las facetas epistémica y mediacional) nos permitió consolidar un compendio teórico de nociones, concepciones, usos y consideraciones para tener en cuenta cuando vayamos a evaluar y diseñar tareas que promuevan la argumentación mediante el uso de EGD. Estas son:

- Previo al diseño de una tarea es necesario hacer un estudio profundo del concepto matemático del cual va a tratar la tarea y que esperamos aprendan los estudiantes. Además, se debe tener claridad y conocimiento respecto al proceso matemático que pretendemos favorecer y las estrategias para lograrlo.
- Es importante hacer un estudio del recurso que se pretende utilizar, de modo que este realmente favorezca el desarrollo de la tarea y sea evidente su utilidad. Cabe aclarar que el uso del EGD, o de cualquier otro recurso, debe estar alineado con los requisitos, metas y formulación de la tarea.
- Para diseñar cualquier tarea se deben considerar los siguientes elementos: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, formas de interacción y temporalidad.
- La formulación de las tareas debería favorecer los problemas abiertos, es decir, aquellos en los que los estudiantes tengan la posibilidad de explorar, conjeturar y, a partir de ello, proponer una solución o conclusión al problema presentado.
- Es necesario hacer un estudio profundo sobre tipos de argumentos ya que previo al diseño de la tarea se debe determinar el tipo de argumento que se busca favorecer, de modo que el diseño y la formulación estén alineados con ello.
- Es importante disponer de espacios de discusión entre pares durante la planeación de la tarea, ya sea para modificar, complementar o escuchar una opinión sobre esta.
- El profesor debe resolver la tarea e identificar todas las posibles soluciones de esta, de modo que pueda corroborar si la formulación y las soluciones están alineadas, y apuntan al cumplimiento de las metas establecidas.

- Una vez terminado el diseño de la tarea esta se debe probar, evaluar y ajustar en caso de ser necesario.

Como se evidenció previamente, entre el Momento 2 y 4 hubo una transformación de nuestro conocimiento. Además, sospechamos que analizar el conocimiento de otra persona podría aportar a la transformación del conocimiento propio. En este estudio lo afirmamos ya que esto nos permitió cuestionarnos, reflexionar, apropiarnos e incorporar aspectos que evidenciamos en el conocimiento del otro para complementar el propio. Por eso decidimos expresar nuestra noción y diversas concepciones de cada asunto y extraer de ello datos para el Momento 6. Como resultado del análisis, concluimos que el conocimiento sí se va transformando, en especial cada vez que nosotros decidamos cursar un seminario, leer artículos sobre algún asunto y hablar o discutir con otra persona, ya que se discuten otros puntos de vista, se reciben nuevas ideas y perspectivas. Así, consideramos que la obligación de expresar las propias ideas permite reconocer confusión, poca claridad, necesidad de estudiar sobre el asunto y reflexionar respecto a cómo transformar nuestro conocimiento ya que vemos que esto si se puede hacer.

Identificar la transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemática sobre los asuntos de interés no solo nos aporta un compendio teórico de nociones y consideraciones para cuando vayamos a diseñar tareas, sino que también nos proporcionó elementos para evaluar diseños planeados por otros profesores o expertos. Para realizar dicha evaluación podríamos centrarnos en identificar y constatar si el proceso de planeación de la tarea tuvo en cuenta o se ajusta, de alguna manera, a los principios de planeación que establecimos como producto del análisis realizado (ver Sección 5.2). En el diseño de la tarea deberíamos poder evidenciar que durante su planeación se consideraron: requisitos, metas, formulación acorde al tema y al

proceso matemático que pretende favorecer, materiales y recursos, agrupamiento de los estudiantes, interacción entre estudiantes y temporalidad.

En los Momentos 2 y 4 hicimos uso de rutinas de pensamiento visible como método de evocación o interpretación de lo que consignamos en el Momento 1 y en el Momento 3 (ver 3.5.1 y 3.5.2). Consideramos que mediante el uso de dichas rutinas pudimos expresar de manera puntual cuál era nuestro conocimiento en esos Momentos. Además, nos permitieron reflexionar, organizar, sistematizar e interpretar las afirmaciones tomadas de los insumos para establecer qué era lo que realmente sabíamos de los tres asuntos de interés. Las rutinas de pensamiento favorecieron la movilización de nuestro conocimiento y fueron un andamiaje principal para la determinación y comprensión de este. Creemos que dichas rutinas pueden ser usadas no solo en contextos como el presentado en nuestro trabajo, sino que como profesores deberíamos llevarlas al aula para promover en nuestros estudiantes: reflexión, organización de opiniones y, desarrollo del pensamiento crítico, autónomo y creativo.

Aunque los análisis se hicieron individualmente, durante el desarrollo de estos cada uno discutía los avances con la asesora del trabajo de grado. Destacamos esto porque en tales discusiones evidenciamos que exponer, contrastar, describir, preguntar, avalar y reconocer asuntos relacionados con el conocimiento del otro facilitaron el proceso de transformación del conocimiento propio sobre los asuntos de interés, lo que nos condujo a la modificación o ampliación de ideas que teníamos previamente. Reconocemos la importancia del proceso colectivo en la transformación del conocimiento, pues esto nos permite construir un concepto más rico mediante el debate y la confrontación. Queremos destacar que el diálogo constante con una experta, los cuestionamientos que nos hacía y los ejemplos que presentaba sobre los asuntos

tratados en las asesorías también fueron un elemento clave para que se diera el proceso de transformación en nuestro conocimiento didáctico-matemático.

Constatamos que la transformación en nuestro conocimiento didáctico-matemático sobre los asuntos de interés está ligada principalmente a tres de las facetas propuestas por el CDM: *epistémica, mediacional e interaccional*. Sin embargo, reconocemos la importancia de estudiar, leer bibliografía especializada y diseñar tareas a partir del conocimiento adquirido para de este modo ganar experticia y conocimiento referente a las facetas que no consideramos en el desarrollo de este estudio (cognitiva, afectiva y ecológica). Creemos que al entender y considerar todas las facetas durante la planeación y desarrollo de una tarea podría hacer que nuestra labor que ser más idónea y podamos lograr nuestro objetivo inicial.

5.3. Aportes del trabajo a la línea de estudio sobre el conocimiento del profesor

La metodología utilizada en esta investigación puede ser un ejemplo de cómo caracterizar y describir la transformación del conocimiento didáctico- matemático del profesor sobre un asunto de interés. Por ello, creemos que esta metodología es una contribución a investigaciones sobre el conocimiento del profesor. Es evidente que el diseño empleado tiene características del estudio de primera persona y otras que lo hacen singular; consideramos que mediante esta metodología logramos estudiar y determinar las diferencias del conocimiento del profesor en diferentes momentos. Las características del diseño no obligan a que este sea usado solamente para analizar transformación de conocimiento y es independiente de los asuntos que se quieran tratar. Creemos que es posible replicar el diseño para hacer reflexiones sobre la práctica docente, por ejemplo.

Otro de los aportes a la línea de investigación sobre el Conocimiento del Profesor es la construcción de criterios específicos para la caracterización del conocimiento del profesor a partir de las facetas propuestas por el CDM. En la Tabla 14, proponemos criterios para rastrear visos del conocimiento del profesor cuando este diseña o gestiona tareas. Además, creemos que dichos criterios son flexibles y pueden ser adaptados a partir de las características específicas de los datos y del fenómeno que se quiera investigar. El proceso para construir las categorías para la caracterización del conocimiento fue el siguiente: primero de las definiciones de las facetas propuestas por el CDM, establecimos los criterios de conocimiento y luego los usamos para formular las categorías. Este proceso se puede replicar en otras investigaciones.

Estudiar nuestro conocimiento sobre argumentación, EGD y tareas nos mostró que el conocimiento sobre los tres asuntos construido a través de la formación recibida en el pregrado, no era completo ni especializado y que tenía contradicciones. Consideramos que este trabajo pone en evidencia los vacíos teóricos con los que algunos egresados salimos de los programas de formación inicial. Es por ello que reconocemos la importancia de estudiar y profundizar sobre los conceptos y procesos que queremos llevar al aula escolar, ya sea realizando estudios posgraduales o formando grupos de estudio con compañeros de trabajo.

5.4. Limitaciones y Proyecciones del Estudio

Dentro de las limitaciones incluimos que durante la investigación no diseñamos tareas, lo cual no nos permitió poner a prueba nuestro conocimiento respecto a ello. Tampoco realizamos discusiones con otros colegas, o personas ajenas a la investigación, respecto de nuestras nociones y consideraciones sobre cada uno de los asuntos.

Como una proyección del estudio, creemos que el siguiente paso es probar cómo este conocimiento lo usamos para diseñar tareas que promuevan la argumentación de nuestros

estudiantes, en donde un EGD sea un recurso. También consideramos importante poner a consideración de otros nuestras nociones y concepciones de cada asunto para poder discutir las con pares o miembros de la comunidad académica.

Esta investigación se enfocó específicamente en el conocimiento del profesor requerido para diseñar tareas de argumentación, por lo que realizar el diseño de ellas y llevarlas al aula permitiría aplicar las habilidades investigativas adquiridas para caracterizar, y de ser necesario, transformar nuestro actuar en el aula. De este modo, podríamos seguir transformando nuestro conocimiento y nuestro actuar para así lograr que nuestra labor sea cada vez más idónea.

En cuanto a los procesos investigativos, consideramos que es posible poner a prueba esta misma metodología en relación con otros asuntos de interés, como la dimensión fractal, y así poder ahondar sobre nuestra transformación del conocimiento respecto a este asunto con la formación que cada uno tiene. Además, nos permitiría poner a prueba las categorías propuestas y determinar si esas ayudan a evidenciar la transformación cuando se trata de objetos matemáticos vinculados a la enseñanza. De hecho, también consideramos importante el evaluar dichas categorías teniendo como objetivo el diseño de tareas no sólo a nivel escolar.

Reconocemos la importancia de divulgar y dar a conocer esta investigación para que pueda ser tenida en cuenta como herramienta metodológica para investigaciones futuras, a partir de adaptaciones convenientes y de nuevos criterios que, quien la use, considere necesarios.

Por último, mantenemos latente nuestro interés por diseñar tareas escolares relacionadas con los fractales que favorezcan la argumentación. Creemos que con este estudio hemos dado el primer paso hacia ello.

Referencias

- Acosta, H. (2017). *Creación artística a partir de la comprensión y la interacción con la teoría fractal (Tesis de pregrado)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ayvaz-Tuncel , Z., y Çobanoğlu , F. (2018). In-service Teacher Training: Problems of the Teachers as Learners. *International Journal of Instruction*, 159 - 174.
- Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241 - 247.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia y Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. .
- Castiblanco, S., y Montana, M. (2018). *Geometría y dimensión: representación y caracterización de objetos 2D, 3D y 4D (Tesis de pregrado)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- D'Amore, B., Font, V., y Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 18(2), 44-77.
- de Villiers, M. (1999). Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad. *Key Curriculum Press, Emeryville, CA.* .
- Douek, N. (2009). Approaching proof in school: from guided conjecturing and proving to a story of proof construction. *Proceedings of ICMI Study 19 International Conference 1*, 142-147.
- Flores, Á., Buendía, G., Gómez, A., Suárez, L., Testa, Y., y Trinidad, J. (2017). Investigación en Educación Matemática Educativa y Docencia. En Clame, & s. p. Capítulo 4: El

- pensamiento del profesor (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1375 - 1382). Clame.
- Godino, D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127 - 135. Obtenido de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13 - 31.
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque onto-semiótico. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 27(1), 59 - 76.
- Gómez, P., y Mora, M. (2018). Análisis de Instrucción. En U. d. Andes, *MAD*. Bogotá: Funes.
- Grossman, P. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. *New York and London: Teachers College Press*.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hill, H., Ball, D., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372 - 400.
- Jones, K., y Herbst, P. (2011). *Proof, proving, and teacher-student interaction: theories and contexts*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.). Berlín: Springer.

- Kaiser, G., Schwarz, B., y Krackowitz, S. (2009). The role of beliefs on future teacher's professional knowledge. En *The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph* (págs. 99 - 116).
- Leung, A., y Bolite-Frant, J. (2015). Designing Mathematics Tasks: The Role of Tools. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.). En *Task Design in Mathematics Education: An ICMI study* 22 (págs. 191-225). Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_6
- Mariotti, M. (2006). Proof and proving in mathematics education. En *En Handbook of research on the psychology of mathematics education* (págs. 173 - 204). Brill Sense.
- MDM. (2022). *Propuesta de Formación*. Obtenido de Universidad Pedagógica Nacional: <http://cienciaytecnologia.pedagogica.edu.co/vercontenido.php?idp=380&idh=381&idn=8338>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. *Magisterio*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (págs. 46 - 95). Colombia: MEN.
- Molina, O., Font, V., y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 37(1), 93 - 116.
- Pincheira, N., y Vásquez, C. (2018). Conocimiento Didáctico-Matemático para la Enseñanza de la Matemática Elemental en futuros profesores de educación básica: diseño, construcción

- y validación de un instrumento de evaluación. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 44(1), 25 - 48. Obtenido de <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100025>
- Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático del profesor. *Paradigma*, 36, 87 - 109. doi:<https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015.p87-109.id552>
- Ritchhart, R. (2015). Creating cultures thinking. En *The 8 forces we must master to truly transform our schools*. San Francisco: CA: Jossey-Bass.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1 - 22.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4 - 14.
- Strauss, A., y Corbin, J. (1998). Grounded theory methodology: an overview. N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry*, 158-183.
- Velázquez, H., y Cisneros, J. (2013). Conocimiento didáctico-matemático Del Maestro Que enseña matemáticas. *I CEMACYC: Primer Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*. Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC.
- Obtenido de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Velasquez&Cisneros_2013.pdf
- Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., y Winicki, G. (2011). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.). *Proof and proving in mathematics education*. Springer.

Anexos

Anexo 1: Tabla de Insumos Hali Momento 1 y 2

A continuación, se presenta una tabla que evidencia el conocimiento de la profesora antes de ingresar al programa de Maestría en Docencia de la Matemática (MDM) en relación con uno o los tres elementos del énfasis: Argumentación (AR), Entornos de Geometría Dinámica (EGD) y Diseño de Tareas (DT). Para ello se consideraron los siguientes insumos: la propuesta de ingreso a la MDM titulada: “La Teoría Fractal -Exploración e Interacción “y las dos pruebas de ingreso, que fueron: prueba de conocimiento Didáctico-Matemática y prueba de competencias escriturales en español, titulada: Evaluación – reflexiva – de las TIC.

La tabla está distribuida en tres columnas, en las cuales se encuentra: los códigos, las afirmaciones extraídas de los insumos indicados y la idea central del conocimiento de la profesora evidenciado en la afirmación. El código está compuesto de dos componentes separadas por un punto: La primera componente hace referencia al documento del que se extrae la afirmación, que son: propuesta de ingreso (PI), prueba de conocimiento Didáctico-Matemática (PC) y competencias escriturales en español (CE), y la segunda componente indica el orden de aparición de la afirmación dentro del respectivo documento.

Código Insumo	Afirmaciones Momento 1	Idea expresada Momento 2
PI.1	Me interesé, primeramente, en la formación secundaria y la necesidad de conocer –reconocer una geometría a partir de las formas de la naturaleza, para ello fue supremamente importante el uso del software UltraFractal5, pues fue quién nos permitió crear (jugar) e interactuar, a partir de talleres planteados, con los fractales allí ejecutados.	<p>PI1-EGD Se sabe la importancia de un software particular como medio para el desarrollo, la comprensión y la visualización de los fractales, en una experiencia previa de trabajo en aula.</p> <hr/> <p>PI1-DT Se entendían los talleres en relación con las actividades propuestas a los estudiantes para el trabajo en aula.</p>

PI.2	<p>En principio, aquel primer nivel estaría enfocado a la interacción y creación de dichos objetos [fractales] por medio de herramientas tecnológicas y argumentos artísticos.</p>	<p>PI2-EGD Se considera UltraFractal5 como una herramienta tecnológica para la interacción y creación de objetos fractales.</p> <hr/> <p>PI2-AR Se consideran los argumentos artísticos como las nociones en relación a proporcionalidad, teoría del color, teoría de creación (punto, línea y plano), técnica, entre otros. No sabía qué era argumentación.</p>
PI.3	<p>Por último, después de aquel recorrido teórico-experimental, vendría la parte de expansión y divulgación, es decir, se comienza con el proceso de planeación y ejecución, en caso posible, de talleres, propuestas de divulgaciones científicas, (...)</p>	<p>PI3-DT Se pensaba que los talleres se obtenían por un proceso de planeación en el que se hacía el diseño de las actividades que se propondrían a los estudiantes, se ponía a prueba y se evaluaba si funcionaba o no, para luego hacer los respectivos ajustes al diseño inicial.</p>
PI.4	<p>Para el desarrollo de toda la propuesta es necesario, por la naturaleza misma de la teoría fractal, el uso de herramientas tecnológicas, pues en principio un fractal es un objeto iterativo, de dimensión fraccionaria y con autosimilitud, argumentos difíciles de comprender sin la ayuda digital.</p>	<p>PI4-EGD Se reconoce la necesidad ineludible del uso de herramientas tecnológicas para la comprensión y visualización del fractal dadas su complejidad y naturaleza.</p> <hr/> <p>PI4-AR Se habla de argumentos en relación a los conceptos puntuales que definen un fractal: Autosimilitud, Iteración y dimensión.</p>
PI.5	<p>La maestría aportaría directamente al proyecto, pues permitiría generar una reflexión y discusión crítica sobre el uso de las herramientas tecnológicas y la discusión en torno al aporte y a la inmersión de ellas dependiendo de los contextos.</p>	<p>PI5-EGD Se consideraba que el uso de herramientas tecnológicas para la comprensión de los fractales no debía hacerse por el uso mismo, sino que requería una reflexión y discusión crítica dependiendo de los contextos.</p>

PI.6	<p>Y se estará dispuesto a conocer textos en relación al trabajo universitario, propuestas de inmersión de las tecnologías y todo lo relacionado con la experiencia de temas innovadores y de herramientas digitales.</p>	<p>PI6-EGD Se habla de “Inmersión de las tecnologías” en relación con el hecho de considerarlas dentro del aula, y de “experiencia de temas innovadores y herramientas digitales” desde el reconocimiento de la existencia de un amplio mundo de este tipo de herramientas, pero las desconocía.</p>
PI.7	<p>La solución de dicho ejercicio la propondré como actividad para mis estudiantes (...). También he de aclarar que de seguro se sorprendan con el uso de un programa como herramienta para la solución del problema, dado que en dicho curso son inexistentes las TIC</p>	<p>PI7-DT Se entiende como “propuesta de actividad” para los estudiantes al problema determinado que se propone para desarrollar bajo condiciones dadas: trabajo individual o colaborativo y trabajo en clase o en casa.</p> <hr/> <p>PI7-EGD Se entiende “programa como herramienta” a los programas computacionales que ayudan a visualizar y a solucionar problemas matemáticos de forma ágil, por eso se considera una herramienta.</p>
PI.8	<p>La evaluación de las TIC, inmersas en la educación, ha presentado diversas discusiones, dado que es de esperarse que gire en torno a los hallazgos y resultados obtenidos a partir de las prácticas educativas, donde éstas son el eje transversal; y esperar desde allí una generación de nuevas propuestas vinculadas a nuevas herramientas y procesos más efectivos para llevar a cabo el objetivo principal: ayudar a los estudiantes a aprender.</p>	<p>PI8-EGD Se entienden las “nuevas herramientas” como aquellas aplicaciones o softwares que van emergiendo en relación a los avances tecnológicos y las necesidades de la educación.</p>
PI.9	<p>La necesidad de dicha evaluación viene ligada, principalmente, con la necesidad de implementar, día tras día,</p>	<p>PI9-EGD Se entienden las herramientas tecnológicas como una ayuda importante para dar cumplimiento a los objetivos establecidos en las</p>

en ámbitos más específicos y generales, es decir, en la comprensión o aprendizaje de un tema específico, como en toda un área, las herramientas tecnológicas y entender –o darse cuenta- de la capacidad de transformación y mejora en el cumplimiento de objetivos en relación a los propósitos y el contexto.

propuestas de actividades, en relación a un propósito de enseñanza y un contexto de una actividad planteada.

PI.10

Así, la invitación es a pensar y reflexionar, constantemente, en el contexto al que los estudiantes hacen parte, a sus necesidades y a la concordancia de los objetivos a cumplir, para hacer un uso acertado y efectivo de las tecnologías. De esta manera la evaluación – reflexión-, es la base para conocer de manera analítica y experiencial las herramientas a usar, los procedimientos y las dinámicas que mejor se adecuan al cumplimiento de objetivos; y actuar-pensar desde esto está directamente relacionado a ayudar a los estudiantes a aprender.

PI10-EGD Se entienden las tecnologías como los objetos: celular, tablet y computador. Y se entienden las herramientas tecnológicas como los posibles programas o software instalados en los objetos mencionados, con usos y propósitos determinados.

Anexo 2: Tabla de Insumos Michael Momento 1 y 2

Código	Afirmaciones	Idea Expresada
Insumo	Momento 1	Momento 2

T1-1	<p>“Tareas y recursos mediados por GeoGebra que permiten mejorar la comprensión de la noción de dimensión en geometría a partir de la representación de objetos 2d, 3d y 4d.” [Título].</p>	<p>PI1-EGD Reconocía a GeoGebra como un software de geometría dinámica y conocía algunas de sus herramientas principales, por esta razón sugerí su uso.</p> <p>A lo largo del documento cuando hago alusión a uso de recursos me refiero puntualmente a recursos mediados por GeoGebra.</p>
T1-2	<p>“En el proyecto curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se contemplan tres cursos de geometría euclidiana (...). En dichos cursos, la atención se centra en formas de representar objetos geométricos del espacio tridimensional (3D) y en el plano bidimensional (2D) mediante bocetos realizados en lápiz y papel y en programas de geometría dinámica.”</p>	<p>PI2-EGD Concibe los programas de geometría dinámica como un medio para la realización de bocetos que son representaciones de objetos geométricos 2D y 3D.</p>
T1-3	<p>“(…) durante el estudio de dicha noción [dimensión] me fue posible evidenciar las dificultades que tienen los estudiantes para visualizar y determinar las características y la dimensión de algunas figuras a partir de su representación (...) una alternativa para hacer frente a las dificultades referenciadas es la inclusión de recursos o tareas que permitan a los estudiantes la manipulación de los diferentes objetos</p>	<p>PI3-EGD Se refiere a la tarea como aquello que permite al estudiante tener un contacto directo con los objetos geométricos.</p> <p>Identifica las múltiples representaciones que proporcionan los programas de geometría dinámica a un determinado objeto geométrico.</p>

<p>geométricos sin importar de qué dimensión sean, además de acceder a las múltiples representaciones de un concepto de manera simultánea. ”</p>	
<p>T1-4 “A partir de lo anterior ha sido posible probar que el uso de juegos, aplicativos y en general ambientes de aprendizaje mediados por tecnología contribuyen al mejoramiento del proceso de aprendizaje de las Matemáticas.”</p>	<p>PI4-EGD Cuando hacía alusión a aplicativos me refería puntualmente a aplicativos diseñados en GeoGebra.</p> <p>Concibe la tecnología como medio a través del cual se puede aportar al mejoramiento... con el uso de otros recursos basados en ella.</p> <p>Sí hace referencia a EGD, pero no únicamente, incluía, por ejemplo, juegos o software que me permitan hacer modelaciones. Los concebía distintos a GG.</p>
<p>T1-5 “(...) la propuesta de investigación sugiere el uso de GeoGebra para el diseño de tareas o recursos, pues posibilita el uso simultáneo de múltiples representaciones de objetos 2D,3D y 4D.”</p>	<p>PI5-DT Entendía (tarea) como las preguntas que acompañaban al aplicativo en GeoGebra.</p> <p>PI5-EGD Sabía que GeoGebra era un programa de geometría dinámica y lo entendía como lo que me permitía dinamizar los objetos geométricos que salían en la pantalla.</p>
<p>T1-6 “Pienso que al abordar este tema y desarrollar una secuencia de tareas es posible dar una visión sobre la dimensión y su potencial para entender la geometría. Si los maestros no nos limitamos a las formas 2D y 3D podemos impulsar una visión amplia de la</p>	<p>PI6-DT Concibe las secuencias de tareas como varias tareas y un medio que puede aportar a la conceptualización de una noción en particular, que en este caso es la de dimensión.</p>

	<p>geometría, fomentando y desarrollando la creatividad de nuestros estudiantes para imaginar y representar objetos de dimensiones superiores, para la composición y descomposición figuras y por qué no, llevarlos a tener una visión más completa del concepto de dimensión y de los diversos requerimientos que se deben tener en cuenta para imaginar, representar y construir objetos n-dimensionales. ”</p>
T1-7	<p>“Es necesario que los estudiantes tengan un manejo básico de GeoGebra y GeoGebra 3D, además que se espera dar el salto a la opción de realidad aumentada que trae este software.”</p> <p>PI7-EGD Reconoce que previo a la aplicación de las tareas los estudiantes deben tener un contacto con el software y un manejo básico del mismo.</p>
T1-8	<p>[Prueba de conocimiento Didáctico-Matemático. Apartado conocimiento matemático] Es importante mencionar que para el abordaje del problema se hizo uso de GeoGebra. A continuación, se describen los pasos de la construcción y luego se explicará el razonamiento utilizado.</p> <p>PI8-EGD Conocía algunas de las herramientas de GGB y a partir del tipo de problema que estaba abordando, sabía que el dinamismo del software iba a aportar para identificar las condiciones que debían tener los puntos, ya que al moverlos se podían analizar diferentes casos.</p>
T1-9	<p>[Prueba de conocimiento Didáctico-Matemático. Apartado conocimiento matemático] (...) traté de abordarlo [el problema] desde un planteamiento</p> <p>PI9-EGD Entendía las construcciones robustas como aquellas construcciones que resuelven un determinado problema de forma general, es decir, la que incluye todos los casos posibles.</p>

	<p>netamente geométrico, valiéndome de las definiciones de diámetro y mediatriz, pero durante la exploración inicial no llegué a una construcción robusta.</p>
T1-10	<p>[Prueba de conocimiento Didáctico-Matemático. Apartado conocimiento didáctico] En relación con los sistemas de representación hice uso de la simbología para describir los pasos de la construcción y de la representación gráfica.</p> <p>PI10-EGD Entendía que la representación de los objetos geométricos que se hacen en GGB es un sistema de representación.</p>
T1-11	<p>[Prueba de conocimiento Didáctico-Matemático. Apartado conocimiento didáctico] (...) pienso que el uso de la tecnología en este tipo de problemas es una gran ayuda gracias a la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en sus diversos sistemas de representación dentro de determinados esquemas de razonamiento interactivos.</p> <p>PI11-EGD Sabía que la tecnología, particularmente GGB, es importante en el desarrollo de problemas en los que se tenga que hacer una exploración para conjeturar o establecer vínculos y relaciones entre determinados objetos geométricos pues aporta a su desarrollo.</p>
T1-12	<p>[Prueba de conocimiento Didáctico-Matemático. Apartado conocimiento didáctico] Problemas como el presentado pueden aportar al acercamiento de los estudiantes con el uso de las TIC, además de</p> <p>PI12-EGD Cuando menciona las TIC, en este caso se refiere a GGB, y además considera que su uso en las aulas de clase potencia la visualización geométrica de los estudiantes.</p>

<p>potenciar el razonamiento deductivo y la visualización geométrica.</p>	
<p>T1-13 [Prueba de competencias escriturales en español] (...) la función del profesor es la de propiciar, a través del diseño e implementación de una actividad, un encuentro entre el estudiante y el medio (tecnológico) para que surja el conocimiento.</p>	<p>PI13-DT Entendía tarea y actividad como sinónimos.</p> <p>Cuando se diseña una tarea mediada por la tecnología, es importante que el profesor considere la forma en que el estudiante se va a acercar al medio tecnológico, es decir, cuál será el rol de dicho medio para que se cumpla el propósito de la actividad y se genere conocimiento.</p>
<p>T1-14 [Prueba de competencias escriturales en español] Considero que antes de planear una actividad mediada por la tecnología, es necesario tener claridad en la finalidad de lo que se quiere enseñar y en cómo la tecnología puede aportar para lograr la comprensión de dicho concepto, además de identificar los efectos tanto positivos como negativos de dicha aplicación respecto al nivel de aprendizaje logrado por los estudiantes.</p>	<p>PI14-DT Es importante identificar los aportes y las falencias que puede tener una tarea cuando está mediada por la tecnología y cómo esto impacta de forma positiva o negativa en el aprendizaje de los estudiantes.</p> <p>Es importante plantear objetivos específicos para el diseño de una tarea.</p>
<p>T1-15 [Prueba de competencias escriturales en español] (...) somos los responsables del diseño adecuado de las diversas actividades para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo con las dificultades y necesidades de los estudiantes.</p>	<p>PI15-DT Cuando se diseña una tarea mediada por algún medio tecnológico, es importante conocer las dificultades y necesidades de los estudiantes para que el diseño potencie el uso de la tecnología a partir de las características particulares de los estudiantes.</p>

T1-16	<p>[Prueba de competencias escriturales en español] (...) es necesario evaluar en qué casos y bajo qué parámetros o situaciones se hace uso de la tecnología y analizar si esta influyó en la comprensión de una determinada temática mediante las actividades propuestas, o pasó a un segundo plano por mi mala preparación.</p>	<p>PI16-DT Es importante evaluar la forma en que se hace uso de la tecnología cuando se diseñan tareas, ya que muchas veces, a partir del diseño, los medios tecnológicos no son necesarios o pasan a un segundo plano en el desarrollo de la actividad.</p>
-------	---	---

Anexo 3: Tabla de Insumos Hali Momento 3 y 4

En la siguiente tabla, constituida por 4 columnas, se encuentran: los códigos, las afirmaciones extraídas de los insumos seleccionados de los seminarios Investigación-Innovación, Profundización en Matemáticas Elementales y Diseño y desarrollo curricular. La idea principal referente a la afirmación que da cuenta de mí conocimiento en relación a uno de los tres asuntos del énfasis: argumentación. Los códigos para identificar cada afirmación están compuestos de tres componentes separadas por puntos: La primera componente hace referencia al seminario del que se extrae la afirmación, en este caso del curso de Investigación-Innovación (II) junto con la respectiva numeración de la afirmación tomada.

Código	Afirmaciones Momento 3	Idea expresada Momento 4 – Datos 2	Mes
II.1	<p>¿Cuál es mi conocimiento inicial sobre el tema del proyecto? Considero que lo único que sé justo ahora en relación al proyecto propuesto está relacionado con conceptos básicos de la Teoría Fractal, en particular de su dimensión, distinguiendo a esta como una dimensión no entera, es decir, fraccionaria.</p>	<p>III-DT Se considera una reflexión en torno al Diseño de Tareas, haciendo hincapié en el hecho que, si bien no se sabe diseñar tareas en relación a las matemáticas, se tienen</p>	Febrero

Además, a partir de labores docentes siento que sé qué tipo de actividades (tareas) son atrayentes y entrantes para estudiantes jóvenes, dado que lo necesitamos. Por último, sé manejar, de forma muy muy básica un software llamado UltraFractal que permite la creación o modificación de fractales clásicos. Por último, sé sobre algunos tipos de argumentación, ninguno a profundidad. (Clase 1 de DDC realizada el sábado anterior)

varías ideas en relación al punto de partida para el diseño de tareas en artes, que es sobre qué tema, por qué y para qué diseñarlas.

III-EGD Se reconoce un conocimiento previo en relación al uso de un Entorno de Geometría Dinámica y sus posibilidades en el accionar, específicamente asociaba UltraFractal como un EGD, que sabía usarlo y que me permitía crear o modificar diferentes figuras geométricas, por ejemplo, tomar un fractal y hacerle modificaciones o empezar desde cero en la creación de uno.

III-AR Se afirma un desconocimiento en relación a la Argumentación, pensaba que argumentar debe ser como la demostración o la justificación de algo, pero no sabía qué era argumentación, y se reconoce que se está aprendiendo sobre ello en el contexto de la Maestría puesto que ya había tenido la primera clase de DDC y se dio a conocer que durante el semestre se iba a trabajar en torno a la argumentación.

<p>II.2</p> <p>¿De dónde proviene el conocimiento que tengo sobre el tema del proyecto? Mis conocimientos tecnológicos sobre los fractales provienen de un estudio autónomo; mis conocimientos entorno a la argumentación han surgido directamente de la Maestría en Docencia de la Matemática, en cada uno de los seminarios asistidos se ha expuesto sobre ello, aunque no de manera profunda sobre alguno. (Clase 1 de DDC realizada el sábado anterior)</p>	<p>II2-EGD Se reconoce UltraFractal como un EGD a partir de la asociación de las palabras Geometría Dinámica con UltraFractal, dada la existencia de la Geometría Fractal y que el software permitía realizar movimientos y transformaciones de elementos geométricos.</p> <hr/> <p>II2-AR Fruto de la clase 1 de DDC, se reconoce la Argumentación como foco de estudio, que es útil para que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o la falsedad de una declaración, y se conoce que la demostración hace parte de la Argumentación. También, se comienza a reconocer la estructura ternaria de un argumento.</p>
<p>II.3</p> <p>Para poder fomentar el trabajo con fractales en la escuela, de forma tal que este contribuya a promover el proceso de argumentación, deberían poder articular, como parte de su conocimiento profesional, el conocimiento matemático sobre fractales con conocimiento didáctico sobre el diseño de tareas con tecnología digital para favorecer la argumentación. Esto les permitiría aportar algunas tareas, incentivando este tema en la escuela. (Clase 1 de DDC y clase 1 PME)</p>	<p>II3-AR A partir de las dos clases que había tenido una de DDC y otra de PME, se considera el proceso de argumentación como una serie de pasos para argumentar.</p> <hr/> <p>II3-DT Se considera el Diseño de Tareas como un medio de acercamiento a la Argumentación, puesto que se entienden las</p>

	<p>tareas como las actividades que serán propuestas a los estudiantes para promover en ellos la Argumentación.</p> <hr/> <p>II3-EGD Se reconoce la Tecnología Digital como una herramienta de apoyo para el aprendizaje o la comprensión de la Argumentación o los procesos de Argumentación.</p>
<p>II.4</p> <p>A pesar de no contar con un espacio propio para su estudio, los fractales son abordados cuando se quiere presentar algo “curioso o diferente” a los estudiantes, pero no trasciende más allá de esto. Todo lo anterior, nos cuestionó y nos llevó a reflexionar y buscar entender las consideraciones que debe tener un profesor de matemáticas para diseñar tareas en relación con la dimensión fractal. (Clase 1 de DDC y clase 1 PME)</p>	<p>II4-DT Se considera que con el saber matemático sobre Dimensión Fractal es suficiente conocimiento para que un profesor diseñe Tareas en relación con la Dimensión Fractal que promuevan la Argumentación.</p>
<p>II.5</p> <p>Nos resulta interesante preguntarnos y reflexionar sobre las palabras de nuestros colegas cuando se preguntan “¿por qué no argumentan los estudiantes?” ¿Cuándo nuestros colegas hablan de argumentación ¿a qué se refieren?, ¿qué es lo que realmente están pidiendo que digan o hagan los estudiantes? (Clase 1 de DDC y clase 1 PME)</p>	<p>II5-AR La afirmación surge de una idea compartida con Michael relacionada con cuestionar los indistintos usos de la palabra argumentar en el contexto escolar, específicamente para mí se refiere más a cómo entender los indistintos usos por parte de los estudiantes, concebía que para ellos la</p>

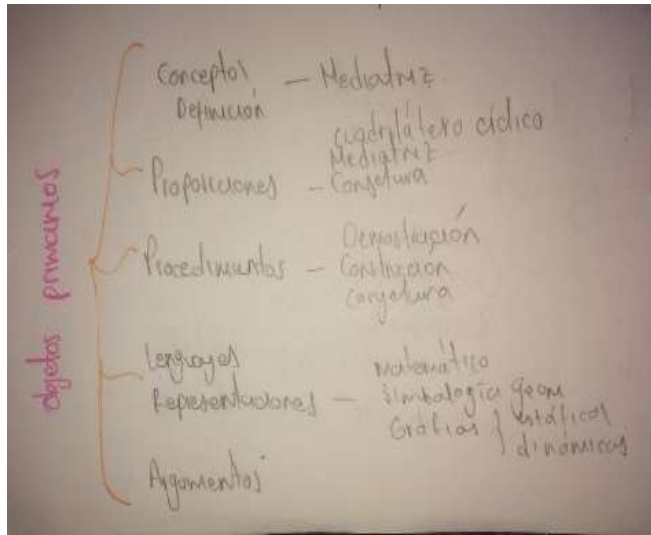
		instrucción “argumente su respuesta” se entendía como “justifique su respuesta”.
II.6	Además, un valor importante de la demostración es que fomenta el debate; por lo tanto, es una norma para comunicar resultados matemáticos, y esto a su vez, impulsa a los estudiantes a evolucionar en la producción de argumentos a partir de la comprensión que logran al involucrarse en la actividad demostrativa. Ahora bien, a pesar de las grandes bondades que hemos mencionado es importante fijar la atención en las dificultades que distintos autores han citado respecto a la enseñanza de la argumentación y la demostración, enfocadas en la labor del profesor, que, para nuestro, caso será el objeto de estudio.	II6-AR Después de la consulta bibliográfica para dar la justificación al problema planteado en la primera versión del anteproyecto por pedido de la profesora, surgen nuevas comprensiones en relación a la Argumentación, se comprende la demostración como una forma de argumentar, que la argumentación se logra al involucrarse en la actividad demostrativa y que aprender a argumentar supone las dificultades propias de aprender a demostrar. Marzo
II.7	(...) el aprendizaje de la argumentación y la demostración en educación secundaria se deben desarrollar gradualmente y debe comenzar en los primeros años escolares.	II7-AR Personalmente, a nivel escolar no se me enseñó sobre la Argumentación, tampoco a nivel universitario, lo que implica que entré a la maestría sin saber nada de argumentación.
II.8	Menciona que en los últimos años se han acrecentado las investigaciones orientadas a analizar y estudiar los procesos de argumentación y demostración en geometría; dicho interés radica, entre muchas otras razones, en la importancia y utilidad que tienen en la enseñanza.	II8-AR Se identifica y se reconoce la Argumentación como campo de investigación y no se entendía la utilidad que tenía para la enseñanza.

II.9	<p>Respecto a la importancia del diseño de tareas mediante el uso de herramientas tecnológicas Leung y Bolite-Frant (2015), hacen énfasis en que las herramientas deben considerarse más que como elementos auxiliares, pues influyen en la cognición e impactan el conocimiento matemático.</p>	<p>II9-DT Se amplían los conocimientos del profesor en cuanto al Diseño de Tareas al reconocer su importancia mediante el uso herramientas tecnológicas, entendiendo estas como elementos auxiliares de acuerdo con su impacto en los estudiantes.</p> <hr/> <p>II9-EGD Se comprenden las herramientas tecnológicas como cualquier mediador o programa que permite explorar o visualizar elementos, en este caso, matemáticos.</p>
II.10	<p>(...) por sus capacidades gráficas, los programas de geometría dinámica tienen el potencial para estimular tanto la exploración como la demostración, lo que hace más fácil proponer y probar conjeturas. Específicamente, estas conjeturas pueden surgir de la coordinación entre las propiedades que se utilizan durante la construcción y las propiedades destacadas como invariantes por el modo arrastre.</p>	<p>II10-EGD Se reconocen los Entornos de Geometría Dinámica como motivadores de la exploración y la demostración, en consecuencia, se establece un vínculo entre la Argumentación y los Entornos de Geometría Dinámica por medio del Diseño de Tareas.</p>
II.11	<p>Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, mencionan que uno de los procesos generales de la actividad matemática, que enfatiza en lo que significa ser matemáticamente competente, es “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.</p>	<p>II11 Se reconoce la Argumentación como un componente imprescindible de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.</p>

II.12	Evidenciamos el poco nexo con la argumentación tanto en lo propuesto a los estudiantes, como lo que se espera que ellos hagan, además de una débil vinculación entre los demás aspectos de interés.	III12 Se evidencia la poca relación reconocida entre la argumentación y el Diseño de Tareas para el contenido Dimensión Fractal, en particular no se comprende a profundidad qué conocimientos disciplinares, sobre argumentación, EGD y tareas deben entrar en juego. Abril
II.13	Definir el tipo de argumentación más propicio para impulsar cuando se trabaja sobre la dimensión fractal.	III13 Se reconocen los tipos de argumentación abductivo, inductivo, analógico y el deductivo. No se reconocen tipos de argumentación específica que puedan ser desarrollados en relación con el contenido Dimensión Fractal. Junio
II.14	El eje central de nuestra investigación está enfocado en el conocimiento del profesor, tanto matemático como didáctico. En relación con el conocimiento matemático, centramos la atención en lo relacionado con la teoría fractal, puntualmente, lo respectivo a la dimensión fractal. En cuanto al conocimiento didáctico nos interesan los asuntos respecto a la argumentación y al uso de herramientas tecnológicas, enfocados a la educación matemática.	(AR) Se vincula la argumentación con los asuntos didácticos, puntualmente, con el conocimiento didáctico del profesor. Es decir, se comprende que el profesor debe saber de Argumentación para poder diseñar tareas en torno a ello. III14 Se vinculan los Entornos de Geometría Dinámica con los asuntos didácticos, puntualmente, con el conocimiento didáctico

del profesor. Es decir, se comprende que el profesor debe saber de EGD para poder diseñar tareas en donde se proponga el uso de herramientas tecnológicas.

PME.1

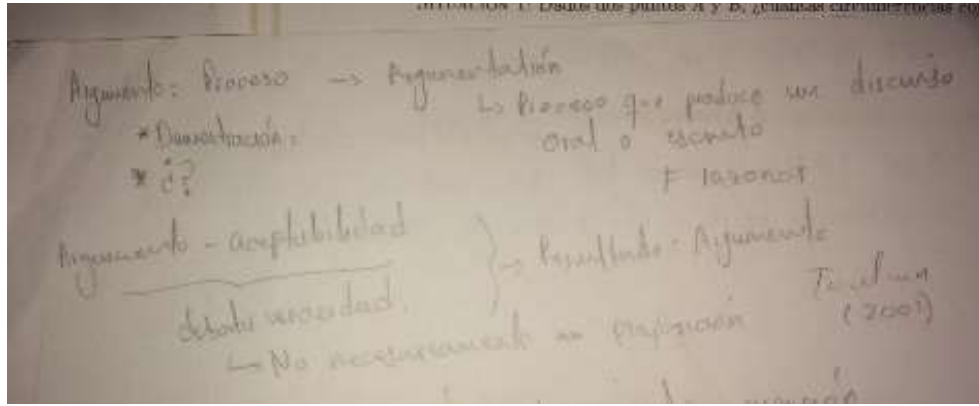


Los argumentos hacen parte de los objetos primarios.

PME1-AR Se reconoce la argumentación, o el proceso de argumentar, como un proceso de discusión en torno a un tema determinado cuyo producto es un discurso, que se desarrolla a partir de unas normas compartidas con el fin de determinar la veracidad del debate. Marzo

A partir de la introducción de la Argumentación como objeto de estudio del curso en la primera clase, se reconocen los objetos primarios del proceso de argumentación, entre ellos los argumentos.

PME.2

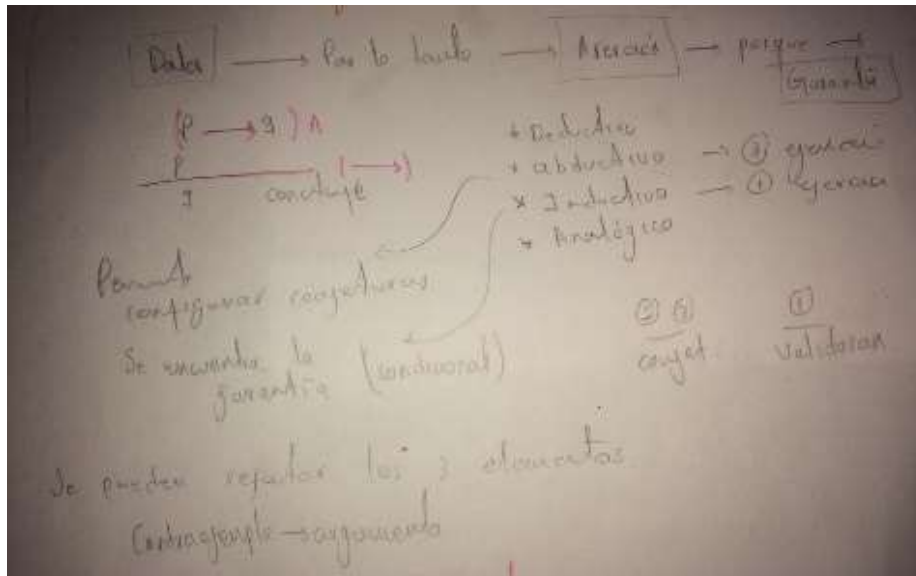


PME2-AR Se reconoce que la demostración hace parte de la Argumentación y se precisa que la demostración es útil para que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o la falsedad de una declaración.

(Clase 1 de DDC realizada dos semanas antes y versión 1 del anteproyecto de II realizada días antes)

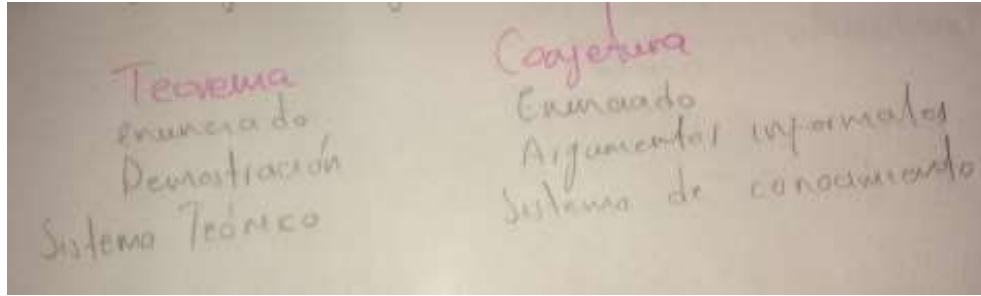
Argumentación: Proceso que produce un discurso oral o escrito.
Debatir la veracidad o aceptabilidad de un argumento.

PME.3



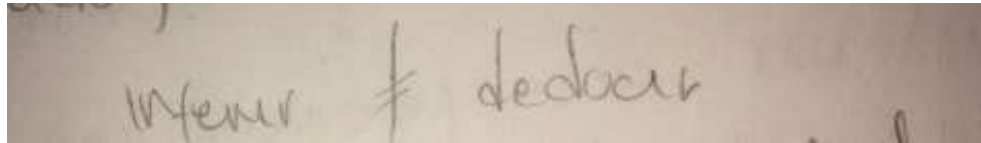
PME3-AR Se reconoce la estructura ternaria de un argumento bajo el modelo de Toulmin: aserción, garantía y datos. Así mismo, dada la relación entre la garantía, la aserción y los datos, se reconocen los tipos de argumentos: Deductivo, Abductivo, Inductivo y Analógico.

PME.4



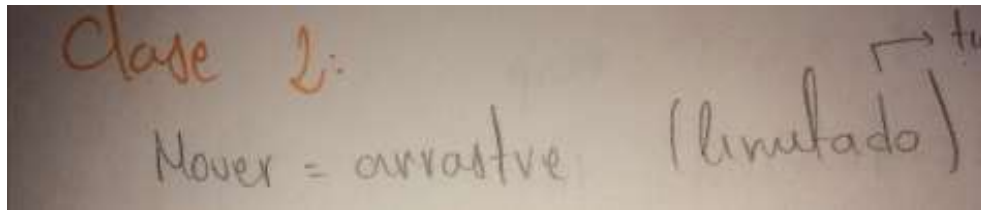
PM4-AR Se amplía el conocimiento existente de la diferencia entre Teorema y Conjetura, en relación con que la diferencia se enmarca en la demostración, entendiendo esta como una secuencia de argumentos matemáticos que hace uso de afirmaciones aceptadas por la comunidad y que emplea esquemas de razonamiento.

PME.5



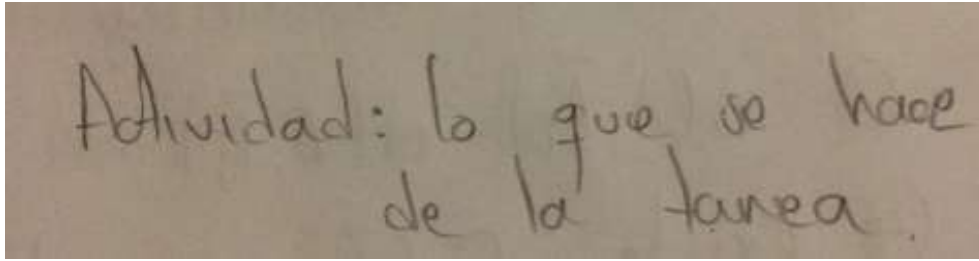
PME5 Se recibe una información que coincide con un conocimiento existente que es la diferencia entre Inferir y Deducir, entendiendo inferir como ir de lo particular a lo general y deducir como ir de lo general a lo particular.

PME.6



PME6 Se conoce que mover un punto en el espacio dentro de un Entorno de Geometría Dinámica se llama arrastre.

PME.7



Actividad: lo que se hace de la tarea.

PME7-DT Se aprende la diferencia entre Tarea y Actividad, entendiendo la Actividad como el hacer o el desarrollo de la Tarea. En consecuencia, se produce un ajuste en el conocimiento anterior, reconociendo que no era correcto el uso que se hacía de los términos actividad y actividades.

PME.8

¿Un contraejemplo puede ser entendido como la negación de un argumento o los argumentos siempre son verdades? ¿Se pueden refutar cualquiera de los tres elementos para un contra ejemplo?

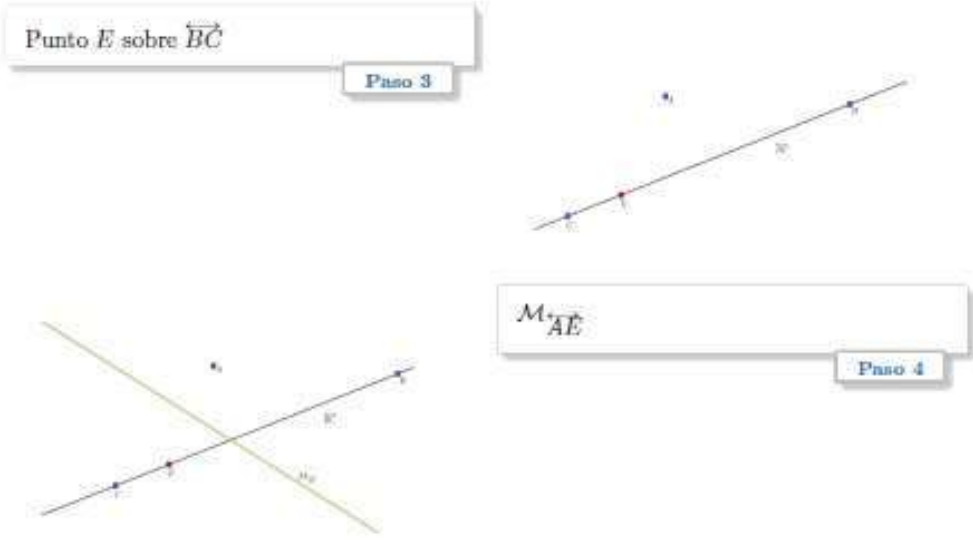
PME8-AR A partir de la reflexión respecto a la negación de argumentos, se concluye que es posible negar dados su estructura lógica y el tipo de argumento.

PME.9

Acosta: No tenía claridad sobre en la diferencia entre el Teorema y la Definición de *Mediatriz*. Además, no reconocía su importancia en relación a demostraciones o argumentos entorno a la Geometría Sintética. Por último, había perdido habilidad y reconocimiento de la demostración a partir de *Afirmación/Garantía*. (Clase 1 de DDC y Clase 1 PME)

PME9 A partir de la reflexión respecto a la poca importancia que se daba a una definición en particular en relación a algunos argumentos o demostraciones, se reconoce el aprendizaje adquirido respecto a qué es la Argumentación y la importante relación entre argumentos y demostraciones en que no se reconocía. Abril

PME.10



PME10-EGD Como preparación previa para la realización de la tarea se vio la necesidad de realizar un acercamiento formal al Entorno de Geometría Dinámica GeoGebra, estudiando cómo se lo usa y realizando las construcciones necesarias para la tarea. A partir de ello se comenzaba a comprender la importancia de los EGD en relación a la conjeturación y la prueba, reconociendo el entorno como herramienta facilitadora para la elaboración y verificación de conjeturas.

PME.11

Dada $\odot F_1, F_1R$ y los puntos $F \neq F_1$ en el interior de $\odot F_1, F_1R$. Si $T_i \in \odot F_1, F_1R$ con \mathcal{M}_{T_iF} , entonces \mathcal{M}_{T_iF} determina la elipse ε con focos F y F_1 .

[La afirmación es una conjetura que surgió como consecuencia de un argumento de tipo inductivo en la resolución de la tarea que se nos propuso, para la que debíamos indicar la exploración, conjeturación, argumentos que emergen y la demostración.]

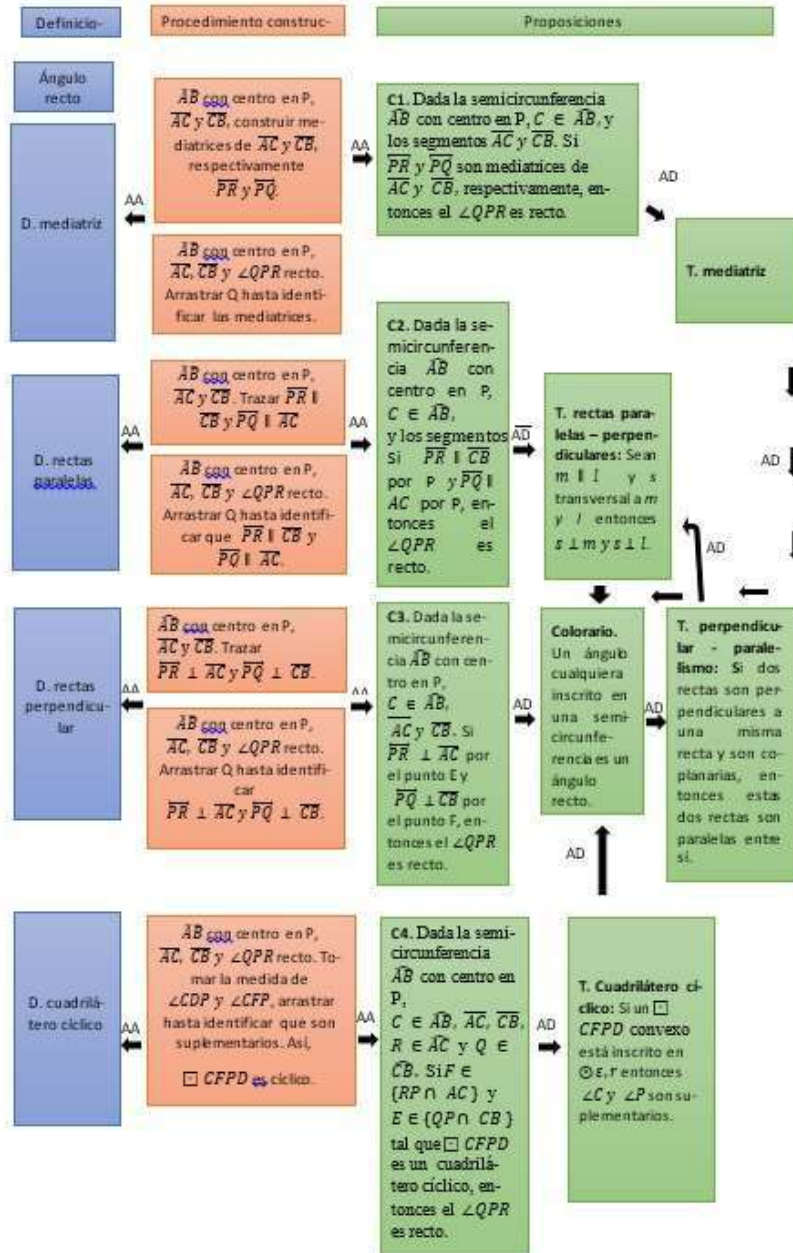
Mayo

PME11 A partir del hacer en la resolución de la tarea, se reconoce, de manera más clara, la estructura ternaria del argumento al poner en práctica el conocimiento teórico que había obtenido, me pude dar cuenta de su funcionamiento

PME11 A partir del hacer en la resolución de la tarea, se comprende cómo la conjetura puede emerger a partir de un proceso de exploración, constatando así el conocimiento

	<p>previo obtenido en clases anteriores de los seminarios PME y DDC, que no se documentó a través de alguna afirmación.</p>
<p>PME.12</p> <p><i>Dados $\odot C, r$ tal que $r = 1$, $A \in \odot C, r$ y $F \in Int\odot C, r$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{FA}} \cap \overline{CA} \neq \emptyset$.</i></p> <p>[La afirmación es la proposición dada en la tarea, En la que se nos pidió resolver una situación problema indicando la exploración, conjeturación, argumentos que emergen y la demostración de la conjetura, la cual se realizó a dos columnas.]</p>	<p>PME12-AR A partir de la realización de la demostración a dos columnas, que constituyó retomar los razonamientos necesarios para ello, se comprende la demostración a dos columnas como una forma de argumentar puesto que se evidencian los datos y las garantías de forma explícita.</p>
<p>PME.13</p> <p>La tarea se propone para estudiantes de grado noveno de una institución en la cual hay acceso a herramientas tecnológicas; además, los estudiantes conocen y utilizan el software <i>GeoGebra</i>. En relación a las normas socio-matemáticas de la clase, los estudiantes trabajan en grupos de tres personas. En la clase se proponen tareas que propenden los procesos de exploración y conjeturación, se da un espacio para socializar la producción de los estudiantes respecto a ella. Por último, se puntualizan las nociones matemáticas determinadas a desarrollar en la clase.</p>	<p>PME13-DT Se conoce la importancia de Junio elementos específicos para el Diseño de Tareas, en particular se resalta la descripción y el reconocimiento de la población, además de sus características, y de los acuerdos ya establecidos. Sin olvidar, la determinación de si se tiene acceso o no a herramientas tecnológicas.</p>

PME.14



PME14 Se constata y refuerza el conocimiento aprendido sobre la importancia de tener en cuenta los objetos primarios a partir de sus relaciones, por medio de poner en práctica lo visto en clase al hacer el ejercicio práctico porque se puso en funcionamiento ese conocimiento.

La imagen es una red conceptual que está compuesta por... relaciona los objetos primarios junto con definiciones, procesos de construcción y proposiciones. Esta red reúne todas las posibilidades y propuestas para dar solución a un Diseño de Tareas; teniendo en cuenta los elementos ya mencionados. La red está compuesta por tres columnas: Definiciones, Procedimientos de Construcción y Proposiciones. Las definiciones de la primera columna se relacionan con diferentes procesos de construcción, bajo argumentos abductivos, y estos procesos de construcción, bajo argumentos abductivos se relacionan con conjeturas determinadas como C1, C2, C3 y C4, y éstas a su vez, bajo argumentos deductivos, se relacionan con determinados teoremas o corolarios.

Los colores en la imagen, aunque coinciden con los que se usan para asociar palabras clave de las afirmaciones con los elementos Argumentación, Entornos de Geometría Dinámica y Diseño de Tareas, no tienen esa misma función, la coincidencia es casualidad.

PME.15 GeoGebra. Los procesos matemáticos que se pretenden involucrar mediante el abordaje del problema son la exploración y la conjeturación.

PME15-AR Se conoce que conjeturar y verificar hacen parte fundamental (quizás imprescindible) del proceso de argumentar.

PME15-EGD Se reconocen los Entornos de Geometría Dinámica, en particular GeoGebra, como una herramienta de

La afirmación es una meta propuesta en el diseño de una tarea, correspondiente al trabajo final.

exploración que puede ayudar a la conjeturación.

PME15-DT Se aprende a establecer metas en el diseño de tareas a partir de los objetivos propuestos para el mismo. A partir de lo aprendido me di cuenta cómo se hacía y qué elementos debía tener en cuenta para plantear una meta dentro del diseño de tareas; sabía que las metas existían dentro del diseño de tareas por los estudios previos en la licenciatura en artes, pero nunca había hecho una.

Materiales y Recursos: Se usará como material fundamental el software *GeoGebra*:

	Eficiencia				Eficacia							
	Acc	PrepP	PrepE	T	C	Afectivo						
MoR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
GeoGebra	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Agrupamiento: Trabajo de exploración y conjeturación en grupos de 3 personas.

Trabajo de socialización con todos los estudiantes.

Interacción: Con compañeros y con el profesor (estará en contacto todo el tiempo con los estudiantes).

Temporalidad: Sesión de 80 minutos

- 20 minutos: Exploración software. Respectivos acercamientos.
- 20 minutos: Discusión y conjeturación.
- 20 minutos: Exposición de conjeturas y resultados.
- 20 minutos: Conclusiones y acuerdos de conjeturas. Realimentación.

PME.16

La imagen presenta un análisis de instrucción que se había solicitado. En el cuadro se buscaba clasificar si un recurso era apto para ser usado en el desarrollo de la tarea propuesta, para ello se tenía en cuenta: acceso al recurso, preparación de profesor, preparación del estudiante, el agrupamiento, interacción y temporalidad. Se había elegido como recurso específico a GG y se revisaba si cumplía con dichos requisitos.

PME16-DT Se reconocen todos los elementos necesarios para el Diseño de Tareas. Después de recibida la revisión de la profesora del seminario DDC, además se comprende que esos elementos no sólo deben ser listados, sino que también se debe hacer su análisis respecto de la formación del profesor y el estudiante en cuanto al manejo del recurso a usar en la tarea diseñada y comprender que realmente es importante que haya una preparación del estudiante y el profesor, que hay un tiempo para determinar el uso de un material o un recurso y en general para el diseño de tareas.

DDC.1

¿Lo propuesto por usted en clase era una tarea? Contraste el diseño de la tarea realizada en clase con el documento de Gómez, Mora y Velasco (2018).

DDC1-DT Antes de responder la pregunta de Febrero la tarea extractase, se desconocían por completo los principios o elementos que

NO FUE UNA TAREA, esto debido a que lo propuesto no cumplía o no consideraba los siete elementos que conforman una tarea –digo consideraba porque fueron elementos no relevantes o de aporte significativo para la ejecución de la misma, entre ellos: 1. Materiales y Recursos: No hubo una reflexión acerca de asertividad, eficiencia y eficacia en la escogencia de dichos elementos para el desarrollo de lo propuesto, y concluimos la no asertividad del uso o el desarrollo de lo propuesto en el software GeoGebra, esto debido a que dando respuesta a los preguntas planteadas o propuestas para garantizar o determinar la eficacia y eficiencia en el uso de determinados materiales y recursos, se responde NO a las preguntas 612 y además, se concluye que el desarrollo de lo planteado con el software demanda más tiempo y no se usan, o no se espera que se usen, elementos o herramientas del material GeoGebra que aporten o contribuyan a alcanzar la meta; 2. Agrupamiento, Interacción y Temporalidad: No se consideraron algunos de estos elementos para lo propuesto y mucho menos se tuvieron expectativas o limitaciones que los consideraran; así mismo, no hacían parte de los elementos que contribuirían en el acercamiento a la meta, es decir, creíamos que los estudiantes alcanzarían la meta sin tener en cuenta la forma de trabajo y el tiempo que esto les llevaría.

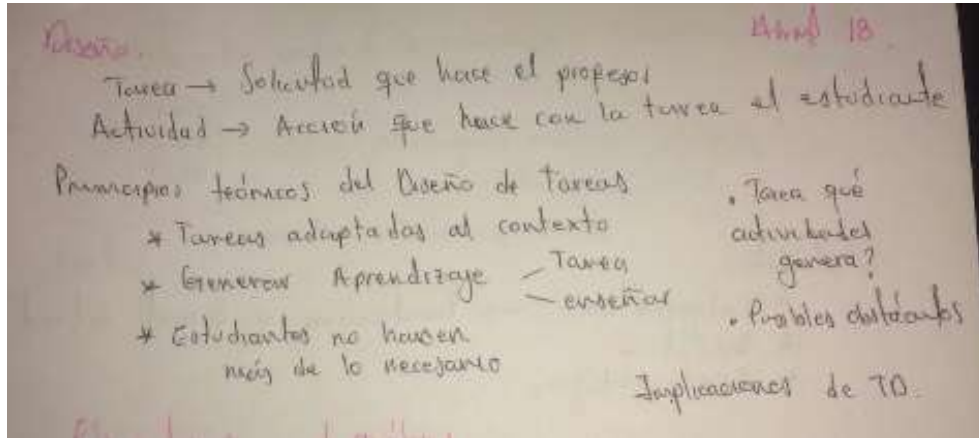
describen o definen una tarea, tampoco se reconocía el proceso de análisis para determinar si lo propuesto era o no una tarea. Luego de realizar la respectiva lectura del documento propuesto en la tarea extractase se conoce cómo se diseña una tarea y qué elementos hay que tener en cuenta para ello.

DDC.2 Las construcciones robustas y blandas, se definen, inicialmente, como las construcciones para las que el modo de arrastre conserva sus propiedades y construcciones donde la variación es parte de la propia construcción, respectivamente.

DDC2-EGD Se comprende la diferencia entre las construcciones blandas y las construcciones robustas posibles en un Entorno de Geometría Dinámica. Dicha diferencia tenía que ver con comprender las construcciones robustas como aquellas que

	<p>permiten hacer una comprobación de condiciones y las construcciones blandas como aquellas que ofrecen una transición de lo empírico a lo teórico.</p>
<p>En relación a las construcciones robustas se ahonda con ejemplos en los cuales es posible deducir que ellas contribuyen a una mejor identificación en la acción de los elementos de los teoremas resultantes, además de hacer plausible la comprensión de la invariancia de algunos elementos geométricos.</p> <p>DDC.3</p>	<p>DDC3 A partir del conocimiento aprendido sobre las características de las construcciones robustas, se conoce el proceso de exploración que permiten vislumbrar. estas dos cuestiones hicieron posible comprender el concepto de invariancia de algunos elementos geométricos.</p> <p>Surge cuestionarse en torno a cómo relacionar esa comprensión de invariancia con la Geometría Fractal.</p>
<p>En relación a las construcciones suaves o blandas se hace más hincapié en el vínculo entre las condiciones y las consecuencias de un teorema.</p> <p>DDC.4</p>	<p>DDC4-EGD Se reconocen las características en las que se hace hincapié al desarrollar construcciones blandas, y se conoce que para que se de ese tipo de construcción depende de la tarea que se proponga. No con cualquier ejercicio de exploración se lleva a cabo una construcción blanda.</p>

DDC.5



Tarea: Solicitud que hace el profesor.

Actividad: Acción que hace con la tarea el estudiante.

DDC5-DT Se comprende la diferencia entre Tarea y Actividad, desde los roles de Profesor y Estudiante. Además, se reconocen los elementos que hay que tener en cuenta para diseñar una tarea y se conoce cómo las tareas deben estar adaptadas a un contexto y generar un aprendizaje. Abril

DDC.6

Se propone, después de un Diseño de Tarea, responder la siguiente pregunta: Al momento de plantear la tarea, describa cuál era la comprensión que tenía sobre la relación entre la tarea propuesta, el proceso matemático que quería desarrollar, el objeto matemático involucrado y el recurso utilizado. ¿Cuáles de estas relaciones usted enfatizaba más que otras y por qué?

Comprendía la relación de la tarea, el proceso matemático que quería desarrollar, el objeto matemático involucrado y el recurso utilizado, como un conjunto de acciones que se complementaban así mismas, es decir, la construcción del objeto fractal por medio del software determinado y la comprensión, a partir de la visualidad y el proceso de construcción del mismo.

DDC6 Se comprende la relación entre la tarea, el proceso matemático que quería desarrollar, el objeto matemático involucrado y el recurso utilizado, como un conjunto de acciones que se complementaban a sí mismas.

Se propone, después de un Diseño de Tarea, responder la siguiente pregunta:
Habiendo pasado más de un mes, en el cual ha leído documentos acerca de diseño de tareas y ha estado involucrado en seminarios que han pretendido que usted se cuestione sobre su conocimiento profesional y su relación con su práctica docente, ¿cuáles relaciones de las explicitadas anteriormente empieza a problematizar?

DDC.7

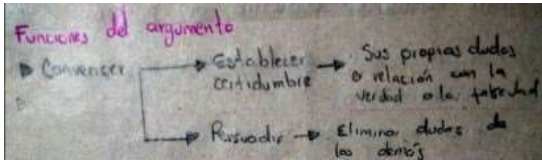
Problematizo entorno al uso de la herramienta tecnológica en relación a los directos aportes que tiene hacia el aprendizaje el objeto matemático en cuestión, pues además de ser útil para crear fractales, falta exploración y reconocimiento de la herramienta para conocer más sobre sus posibilidades y usos.

DDC7-EGD Se comprenden las herramientas tecnológicas como un aporte al aprendizaje matemático.

Anexo 4: Tabla de Insumos Michael Momento 3 y 4

Código	Texto del documento	Idea central	Mes
T2-1	“La demostración es un tipo de argumentación y el argumento tiene una estructura terciaria”	<p>PME1-AR Representaciones de un argumento. Reconocimiento de un argumento a partir del Modelo de Toulmin (aserción, garantía, datos).</p> <p>PME1-AR Entendía la demostración como una justificación o una validación teórica para una conjetura, la idea de demostración como argumento era nueva para mí.</p>	Febrero
T2-2	“Argumentar es un proceso”	<p>PME2-AR Fue una de las ideas que surgió en el desarrollo de la clase, no tenía muy claro porqué argumentar es considerado un proceso. Entendía argumentar como una justificación o una validación.</p>	
T2-3	“El modelo de Toulmin permite la comparación entre la estructura de cada argumento y la estructura del paso correspondiente dentro de una demostración.”	<p>PME3-AR Entendía que la demostración es como un gran argumento, que a su vez está formada de muchos argumentos pequeños y que el modelo me permite centrarme en los argumentos pequeños y entenderlos a partir de su estructura terciaria.</p>	

T2-4	<p>[Comparación entre las definiciones de argumento propuestas por la profesora Leonor y el profesor Oscar en sus respectivas clases] “¿Cuál es la diferencia real entre estas dos definiciones?, ¿Qué implicaciones tiene asumir una u otra? Leer más sobre argumentación.”</p>	<p>PME4 Realicé un contraste entre dos definiciones de argumento en las que no me es evidente la diferencia, que los profesores señalaron, ni las implicaciones teóricas referidas al asumir una u otra. Identifiqué falta de conocimiento teórico para entender la diferenciación.</p>
T2-5	<p>[Nos propusieron exponer el tipo de argumento que dimos cuando hicimos una construcción] “Ubicar dos puntos A y B, construir $(AB)^{\perp}$ y trazar $\mu_{(AB)^{\perp}}$, sabemos que cualquier punto en $\mu_{(AB)^{\perp}}$ equidista de A y de B, por lo tanto ubicamos C de modo que $C \in \mu_{(AB)^{\perp}}$ y trazamos $\odot C, CA$. Asumimos que son infinitos puntos cuando animamos el punto C para que se mueva por $\mu_{(AB)^{\perp}}$.”</p> <p>“Un argumento inductivo, cuando mencionamos que como sabíamos que cualquier punto de la mediatriz equidistaba de A y de B entonces ubicaríamos al punto C en la mediatriz del $(AB)^{\perp}$”</p>	<p>PME5-AR Se alude a un argumento inductivo cuando el argumento es de tipo abductivo. La socialización de la tarea por parte del profesor permitió evidenciar este error. No recuerdo qué tenía en mente respecto de qué era un argumento inductivo, la explicación del profesor tomó como ejemplo nuestra respuesta y explicó por qué no era un argumento inductivo a partir del modelo inductivo y el diagrama definición. Recuerdo que asociaba lo inductivo con la inducción en matemáticas, por la similitud en las palabras hacía esa asociación.</p>

T2-6	<p>[Misma situación que en el recuadro anterior] “Como sabíamos que el centro pertenecía a la mediatriz del $(AB)^{\perp}$ entonces animamos el punto C por la mediatriz del $(AB)^{\perp}$. Argumentos emergidos: Un argumento deductivo cuando nos basamos en el sistema axiomático para garantizar que C es cualquier punto de la mediatriz del $(AB)^{\perp}$.”</p>	<p>PME6-AR Concebía que un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático.</p>
T2-7	<p>[En la tarea nos proponen exponer asuntos sobre el conocimiento matemático del profesor que generó algún tipo de cuestionamiento] “Observé el trabajo de mis compañeros, dos comenzamos a demostrar a dos columnas y otro mediante párrafo. Ninguno de los dos aspectos es incorrecto y en esencia deberíamos aludir a los mismos elementos, pero de nuevo me hace pensar en los estilos que se manejan en cada una de las escuelas.”</p>	<p>PME7-AR Identifiqué las diferentes representaciones de un argumento visto como una demostración. No tenía claridad en qué momento se usaba una o la otra. En Geometría siempre demostré a dos columnas. {Ver T2-3, alusión a la demostración entendida como argumento}</p>
T2-8	<p>[Realizado mediante un diagrama] “Funciones del argumento: Convencer: establecer certidumbre (sus propias dudas en relación con la verdad o falsedad) y persuadir (eliminar dudas de los demás)”</p>  <p>Figura 1. Funciones de argumento</p>	<p>PME8-AR Identifiqué y caractericé dos funciones del argumento a partir del estudio de las posturas de dos de los profesores del grupo AEG. No sabía que establecer certidumbre y persuadir hacen parte de las funciones del argumento. Entendía el argumento como lo que dice uno en el momento para validar la idea que tiene en mente, bajo qué parámetro usted justifica qué va a decir. Nunca había pensado la</p>

		argumentación como foco de estudio ni el argumento como algo a caracterizar.	
T2-9	“Con lo anterior, se tiene un escenario que da pie para proponer una correspondencia entre el tipo de argumento y el tipo de problema, aunque ello no implica que un tipo de problema genere exclusivamente algún tipo de argumento”	PME9-DT Pude evidenciar cómo una tarea y la forma en que estaba formulada podía determinar el tipo de argumento. Entiendo esto como algo plausible.	Abril
T2-10	“(…) los EGD han revolucionado el enfoque para entender la compleja relación entre representaciones gráficas y conceptos en la geometría euclidiana. En particular, mejoran el razonamiento geométrico en la resolución de problemas, pues promueven la exploración visual y el descubrimiento.”	PME10-AR Me causaba problema la diferencia entre argumentación y razonamiento. No tenía claridad cuando se habla de una o de la otra. Las consideraba como sinónimos. PME10-EGD Reconocía previamente que los softwares de geometría dinámica generaron una revolución en cuanto a la forma de acercarse a la geometría, el dinamismo en las representaciones ayudaba a la exploración y conjeturación.	
T2-11	[Se alude a las características de los problemas abiertos de conjeturación] “(…) los problemas abiertos de conjeturación, cumplen dos características particulares (...). En segundo lugar, son tareas que permiten que el resolutor realice un proceso semejante al	PME11-DT No había entablado una relación entre las tareas y los problemas abiertos de conjeturación, no los veía como tareas y mucho menos entendía el alcance que podían llegar a tener.	

<p>de un investigador matemático, por lo que debe conjeturar, explicar, demostrar y comunicar los resultados.”</p>	<p>{Ver T3-1, mención respecto a lo que entendía de tarea}</p>
<p>T2-12 [Se nos propone resolver una tarea indicando la exploración, conjeturación, argumentos que emergen y la demostración. La conjetura fue: Para cada punto $A_i \in c$, obtenemos que el conjunto de $M_{(FA_i)^-}$ determinan una elipse por envolventes] “Esta conjetura surge como consecuencia de un argumento de tipo inductivo”</p>	<p>PME12-AR Asociaba el argumento inductivo con búsqueda de consecuente en la estructura terciaria. El profesor Óscar Molina valida el tipo de argumento que propusimos. Asociaba el argumento inductivo con búsqueda de consecuente en la estructura terciaria.</p>
<p>T2-13 [Se nos propone resolver una tarea indicando la exploración, conjeturación, argumentos que emergen y la demostración de la conjetura] “Proposición: Dados $\odot C, r$ tal que $r=1$, $A \in \odot C, r$ y $F \in \text{Int}\odot C, r$, entonces $M_{(FA)^-} \cap (CA)^- \neq \emptyset$.” [Realizamos la demostración mediante un párrafo].” [Realizamos la demostración mediante un párrafo]</p>	<p>PME13-AR Una vez realizada la socialización en clase entendí que hacer demostraciones por párrafo. {Revisar fila tres de los insumos PME, allí explicito lo que entendía por demostración y lo vinculo directamente con la interpretación del presente recuadro}</p>
<p>T2-14 [Nos proponen el problema "Dados los $(AB)^-$ y $(CD)^-$ congruentes, ¿existe un punto E de forma tal que $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ sean congruentes?" y nos preguntan desde nuestra perspectiva y contexto, ¿cuáles serían las propuestas de solución que formularían los estudiantes?]</p>	<p>PME14-EGD Las construcciones blandas permiten identificar relaciones de dependencia. PME14-EGD Pude establecer lo ya mencionado a partir de la lectura de Laborde</p>

<p>“Lo primero que esperamos que realicen los estudiantes es una construcción blanda, arrastrando los extremos de los segmentos AB y CD de modo que puedan determinar que si los extremos de los segmentos son colineales y determinar que si los segmentos no se intersecan no existe el punto E.”</p>	<p>(2005) previo a esto solo sabía que las construcciones blandas proporcionaban una solución particular del problema.</p>
<p>T2-15 [Sesión de trabajo del Grupo de investigación sobre argumentación al que fuimos invitados, se habla sobre los cuatro enfoques actuales para investigar sobre argumentación]</p> <p>“Lógico: Se centra en los argumentos, establece una normatividad semántica e inferencial. Producto de argumentar. Material de la inferencia.</p> <p>Dialéctico: Buena argumentación e instar a un proceder adecuado.</p> <p>Retórico: Proceso de interacción comunicativa.</p> <p>Epistémico: Argumentación como medio para adquirir conocimiento.”</p>	<p>PME15-AR No conocía los enfoques mencionados por el grupo de investigación. Mayo Me costaba trabajo identificar en qué enfoque está nuestro trabajo de grado y bajo qué parámetro lo determinamos.</p>
<p>T2-16 [Previamente mencionamos que los estudiantes del colegio donde labora uno de los profesores no están acostumbrados a tareas donde tengan que explorar y conjeturar]</p> <p>“En este punto es importante mencionar que cuando se proponen tareas que requieran exploración [en EGD] y conjeturación se da un tiempo para que los estudiantes ejerciten este tipo de procesos, luego</p>	<p>PME16-DT Sabía que para el diseño de una tarea debía considerar elementos como temporalidad, interacción, materiales y recursos, y agrupamiento, por eso las incluimos en el diseño del trabajo final. Junio Software de geometría dinámico entendido como medio</p>

se realiza una socialización general y una institucionalización de lo que se esté trabajando.”

{Ver T3-1 y T1-5, alusión a lo que entendía por tarea para evidenciar la transformación del conocimiento}

[Caracterización de la población] “En los espacios de clase se ha tratado de separar un espacio para hacer unos acercamientos al software logrando que los estudiantes conozcan algunas funciones básicas de medida y construcción. Se han hecho construcciones blandas y construcciones robustas puntualizando las características de cada tipo de construcción. Finalmente se ha trabajado el arrastre y el rastro.”

T2-17

PME17-EGD Tengo conocimiento sobre herramientas como arrastre y rastro, particularmente en GeoGebra que es el programa de geometría dinámica que trabajamos en el colegio y al que se alude en este fragmento. He tratado de llevar estos conocimientos al aula de clase.

Identificación de los tipos de construcciones mediadas por EGD. Entendía que las construcciones robustas son aquellas para las que el modo de arrastre conserva sus propiedades mientras que en las construcciones blandas son soluciones particulares del caso general.

{Ver T2-14, alusión al conocimiento sobre construcciones robustas y blandas}

T2-18

[Caracterización de la población] “En cuanto a las normas socio-matemáticas destacamos que los estudiantes trabajan en parejas o en

PME18-DT Presenté una confusión entre las normas socio-matemáticas y normas sociales

<p>grupos de tres personas dependiendo de la cantidad de equipos disponibles en la sala de informática.”</p>	<p>en la caracterización de la población, elemento a considerar en el diseño de tareas.</p>
<p>T2-19</p> <p>[Caracterización de objetos primarios para la tarea propuesta] “(...) considera seis objetos matemáticos primarios, estos son: elementos lingüísticos, situaciones/problemas, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos.”</p>	<p>PME19-DT Reconocimiento de los objetos primarios propuestos por el EOS. Aunque pude reconocerlos con claridad la descripción de cada uno de ellos a partir de la tarea planteada fue algo que me costó mucho trabajo. Fue una descripción muy limitada, creía entender el concepto de cada una, pero ya al momento de tratar de aplicarlo evidencié vacíos en mi conocimiento.</p>
<p>T2-20</p> <p>[Argumentos generados a partir de las diversas formas de hacer la construcción para la tarea propuesta] “Argumento de tipo inductivo: en correspondencia con el tipo del problema <i>búsqueda de consecuente</i>.”</p>	<p>PME20-AR Reconozco un avance en la identificación correcta del tipo de argumento y la asociación entre el argumento y el tipo de tarea propuesta.</p> <p>La forma de escribir también es diferente, ya podía caracterizar de una mejor manera el tipo de argumento que se utilizaba y porqué era ese de ese tipo.</p> <p>{Ver T2-9 y T2-12, alusión a los problemas abiertos de conjeturación y a los argumentos inductivos}</p>

T2-21	<p>[Descripción de los procesos matemáticos asociados a la resolución de la tarea. Respecto a la conjeturación se menciona] “Por medio de este proceso, los estudiantes probablemente producirán argumentos inductivos como los referenciados al querer persuadir a sus compañeros de grupo.”</p>	<p>PME21-DT Reconocimiento del tipo de argumento a partir del tipo de tarea que se propone. Recuerdo que a partir del enunciado de la tarea ya podía inferir el tipo de argumento que iban a plantear los estudiantes.</p> <p>PME21-AR Concebía persuadir como una de las características del argumento.</p>	Junio
T2-22	<p>[Determinación de programa de geometría dinámica con el que se va a trabajar para el desarrollo de la tarea]</p> <p>“GeoGebra: Puesto que es un software de geometría dinámica que permite a los estudiantes realizar arrastres y visualizar invariantes.”</p>	<p>PME22-EGD Recuerdo que asociaba los arrastres en EGD con que los estudiantes pudieran visualizar de mejor forma los invariantes de un determinado objeto geométrico.</p>	
T2-23	<p>[Mencionando las potenciales respuestas de los estudiantes]</p> <p>“Inicialmente consideramos que los estudiantes pueden hacer tres tipos de construcciones, estas son: robusta, semi-robusta y blanda (...). Teniendo en cuenta el proceso de exploración propuesto inicialmente y el tipo de tarea que presentamos consideramos que pueden surgir estas cuatro respuestas por parte de los estudiantes.”</p>	<p>PME23-EGD Podía reconocer los diferentes tipos de construcciones mediadas por los EGD.</p> <p>PME23-DT Aventurar posibles soluciones de los estudiantes a la tarea propuesta nos permitió reformular varias veces su escritura inicial y orientarla más a la consecución de su meta.</p>	

		{Ver T2-14 y T2-17, en las que se hace alusión a las construcciones robustas y blandas}
T2-24	<p>[Contraste entre posibles respuestas de los estudiantes y la red conceptual.</p> <p>“Generalmente esperamos que las construcciones de nuestros estudiantes sean robustas, olvidando por momentos las limitaciones que tienen los estudiantes con el manejo del software.”</p>	<p>PME24-DT Recuerdo que consideré las dificultades que tienen los estudiantes respecto al manejo de GeoGebra. Siempre esperaba que los estudiantes resolvieran la tarea y llegando a la generalidad, pero me olvidaba de los limitantes que pueden tener, entre ellos el uso del recurso.</p>
T3-1	<p>[¿Lo propuesto por usted en clase era una tarea? Contraste del diseño de una tarea realizada en clase con el documento de Gómez, Mora y Velasco (2018)]</p> <p>“(…) describir una tarea consiste en especificar sus elementos, es decir: requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. Teniendo lo anterior como referencia, puedo afirmar que lo propuesto durante el desarrollo de la primera sesión no está acorde con dichos requerimientos.”</p>	<p>DDC1-DT No sabía cuáles eran los elementos de una tarea y tenía que determinar si lo que había propuesto era o no una tarea.</p> <p>Después de hacer la lectura pude establecer que lo propuesto no era una tarea porque no cumplía con los elementos para serlo.</p>
T3-2	<p>[¿Lo propuesto por usted en clase era una tarea? Contraste con el documento de Gómez, Mora y Velasco (2018)] “Inicialmente, pensamos en la formulación, es decir, no trazamos unas metas particulares, ni unos requisitos, tan solo formulamos y luego</p>	<p>DDC2-DT Primero tratamos de plantear una tarea muy general, para luego tratar de adaptarla a las necesidades específicas de un</p>

<p>pensamos en el entorno “ideal” al que se pudiera adaptar la propuesta.”</p>	<p>contexto. No pensamos en lo que queríamos generar con dicha tarea.</p> <p>Como no sabía cuáles eran los elementos de una tarea tan solo traté de pensar cómo adaptaría la tarea presentada por la profesora en la primera clase a la temática específica que habíamos seleccionado.</p>
<p>T3-3</p> <p>“(…) se evidencia una mala utilización de los materiales y recursos, pues el uso de GeoGebra está limitado, esto hace que el proceso de exploración sea poco o nulo y se use el software únicamente como graficador y verificador, aspectos que los estudiantes también pueden realizar con lápiz y papel.”</p>	<p>DDC3-DT Recuerdo que durante el diseño de la tarea no pensamos de qué manera el estudiante se iba acercar a GeoGebra, por lo que asumí que el software iba a ser necesario, pero era una tarea que se podía realizar con lápiz y papel. No sabía de qué forma poder generar la necesidad del recurso a partir de la tarea que estaba proponiendo.</p> <p>DDC3-EGD Concebir el programa de geometría dinámica únicamente desde sus funciones de graficar y verificar propiedades.</p>
<p>T3-4</p> <p>“(…) considero que la propuesta promueve dos caminos de aprendizaje completos secuencialmente, pues desde la redacción no es evidente si se apunta a la determinación de las propiedades del</p>	<p>DDC4-DT Dificultades en la escritura del enunciado. La falta de precisión en el enunciado promueve caminos que no</p>

	<p>circuncentro para llegar a definirlo o a que el [Ecuación] se inscribe en la circunferencia con centro [Ecuación].”</p>	<p>necesariamente apuntan a la meta establecida.</p> <p>No sabía, ni reconocía los distintos caminos que podían surgir con la tarea que estaba diseñando. Siempre consideré únicamente una posibilidad.</p>	<p>Febrer o</p>
<p>T3-5</p>	<p>“Hace falta una lectura rigurosa para identificar con mayor facilidad las características de los tipos de argumentos. La identificación sigue mediada o se limita, por momentos, a la explicación del profesor.”</p>	<p>DDC5-AR Evidencia de un vacío en el conocimiento relacionado con los tipos de argumentos. Me costaba mucho trabajo diferenciar los tipos de argumentos, no entendía en qué debía enfocarme para poder identificarlos.</p>	
<p>T3-6</p>	<p>[Reseña Laborde (2005)] “(...) menciona cómo los dos tipos de construcciones pueden contribuir a la comprensión de una determinada propiedad geométrica, aludiendo a que las construcciones robustas permiten comprobar si siempre se cumplen las condiciones a las que se debería llegar, mientras que las construcciones blandas, aportan algunas ideas sobre las condiciones a cumplir para obtener una consecuencia general.”</p>	<p>DDC6-EGD Identifiqué las características de las construcciones robustas y de las construcciones blandas. Previo a la lectura pensaba que las construcciones robustas eran las que solucionaban todos los casos de la solución y las construcciones blandas eran las que proporcionaban una solución particular.</p>	<p>Marzo</p>
<p>T3-7</p>	<p>[Reseña Laborde (2005)] “La enseñanza, desde la forma en que algunos maestros la proponemos, se centra en la consecución de una construcción robusta que resuelva definitivamente el problema y</p>	<p>DDC7-DT Diseño de tareas enfocados en la determinación de una respuesta “acertada” y no las construcciones blandas y sus aportes en</p>	

damos poco o ningún valor construcciones blandas, siendo estas fundamentales en el proceso de exploración inicial.”

el proceso de exploración. No reconocía los aportes de las construcciones blandas, pensaba que eran como el borrador o los intentos que uno hace antes de llegar a la respuesta general.

DDC7-EGD Reconocimiento al papel de las construcciones blandas en el proceso de exploración durante la resolución de una tarea.

[Reseña Laborde (2005)] “Coincidió con el autor en que es necesario que proporcionemos espacios para la realización y el estudio de ambos tipos de construcciones, pero no solo tratando de hacerlas visibles, sino mediante el diseño de tareas que favorezcan la comprensión a partir de una construcción blanda y los argumentos que emergen de ella.”

DDC8-DT Reconozco la importancia del diseño de tareas enfocado en la exploración (puede ser a partir de construcciones blandas). Sabía la importancia de proporcionar espacios para la exploración en el aula, pero no sabía cómo generar esos espacios a partir de las tareas que yo diseñaba.

DDC8-AR Considero importante que como profesores podamos reconocer los argumentos informales que surgen en el proceso de exploración cuando se discuten las características de una construcción

T3-8

		blanda. Me enfocaba mucho en las respuestas y muy pocas veces en todo lo que deja el procedimiento.	
T3-9	“(…) nos valemos de los conocimientos que ya tenemos para el abordaje de una situación y obviamos algunos procesos, esto nos lleva a usar el software únicamente como verificador, por lo que le quitamos gran parte de su potencial.”	DDC9-EGD Concebía el software de geometría dinámica únicamente como verificador porque el resolutor tiene seguridad de las inferencias a las que llegó.	
T3-10	“Es importante identificar qué me aporta cada uno de los recursos utilizados y cómo mediante ellos adquiero una determinada información que me permite obtener nuevos procesos de solución.”	DDC10-DT Reconocimiento al aspecto mediacional en el diseño de tareas y cómo la interacción con diferentes recursos proporciona conocimientos diferentes. DDC10-DT Por recursos entendía EGD, lápiz y papel, materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc).	Marzo
T3-11	“Es necesario aprender a utilizar mejor GeoGebra, no sabemos utilizarlo y esto limita un poco el proceso de exploración.”	DDC11-DT Identificación de un vacío en el conocimiento de un programa de geometría dinámica. Las limitaciones en el proceso de exploración podrían estar relacionada con la poca experticia del resolutor con el recurso.	
T3-12	“Actividad: Lo que hace o ejecuta el estudiante, es diferente de tarea.	DDC12-DT Diferenciación de términos. Superación del uso indistinto. Sabía y podía	

	<p>Tarea: Solicitud que se le hace al estudiante para que realice una actividad.”</p> <p>reconocer cuándo se habla de una tarea y cuando de una actividad, fue algo que al inicio me costó trabajo y entendía como sinónimos.</p>
<p>T4-1</p> <p>[Retomo algunas ideas de la propuesta con la que me presenté a la MDM] inicial con la que llegué a la MD] “La idea inicial, con la que llegué a la maestría, era el diseño de tareas y recursos en GeoGebra o en programas de geometría dinámica, que permitieran mejorar la comprensión de la noción de dimensión a partir de las distintas representaciones de objetos en dimensiones diferentes.”</p>	<p>III-DT Cambié el conector usando en la propuesta con la que se presentó a la MDM, ya no escribí tareas o recursos sino tareas y recursos. No tenía clara la diferencia entre los términos que estaba utilizando.</p> <p>{Ver T1-5, alusión a qué entendía por tarea}</p>
<p>T4-2</p> <p>“En mi cabeza, al hablar de comprensión los estudiantes deben usar dicho conocimiento de manera flexible, por lo que deberán argumentar, representar, modelar, etc. a partir de las tareas o recursos que pudiera plantear.”</p>	<p>II2-AR Concebía que para lograr la comprensión de una temática en particular el estudiante debe poder argumentar cuando se le cuestione al respecto.</p> <p>Entendía el argumento como la justificación de una respuesta.</p> <p>Febrer o</p>
<p>T4-3</p> <p>[¿Cuál es mi conocimiento inicial sobre el tema del proyecto?] “A partir de la noción ya mencionada (fractal) he tratado de realizar construcciones de fractales en distintos programas de geometría dinámica como GeoGebra y Regla y Compás, explorando las distintas herramientas que brindan estos programas para la construcción de fractales.”</p>	<p>II3-EGD Acercamiento a distintos programas para de geometría dinámica para la construcción de fractales. Conocía por lo menos tres o software de geometría</p>

	dinámica: Regla y Compás, Cabri y GeoGebra.
<p>T4-4 [¿Cuál es mi conocimiento inicial sobre el tema del proyecto?] “(...) he logrado identificar los elementos para el diseño de una tarea (requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad). He logrado tener claridad en los aspectos que caracterizan los diferentes tipos de argumentos (inductivo, deductivo, abductivo y análogo) y cómo hay determinadas tareas que pueden llegar a generar un tipo particular de argumentación. Haciendo una mezcla de lo anterior es que surge el tema para el trabajo de grado, pues la idea es entender cómo el profesor integra los conocimientos ya mencionados para diseñar una tarea que promueva la argumentación en relación con la dimensión fractal por medio de herramientas tecnológicas.”</p>	<p>II4-DT Evidenció un avance en la identificación de los elementos para el diseño de tareas. Los reconocía y sabía puntualmente a qué alude cada uno de estos, pero me costaba trabajo usarlos, asumo que era un problema de poner en práctica eso que creía saber.</p> <p>II4-AR En este momento expresé que tenía claridad respecto a la caracterización de los diferentes tipos de argumentos, pero me di cuenta que no era así. Presentaba muchas confusiones cuando trabaja de identificar el tipo de argumento, pude evidenciarlo en las tareas propuestas en el seminario de PME.</p> <p>Primer acercamiento a la propuesta de TG a partir de los elementos que configuran el problema. Expresa duda en relación a cómo se van a relacionar los elementos que delimitan el problema.</p>
<p>T4-5 [¿De dónde proviene el conocimiento que tengo sobre el tema del proyecto?] “(...) en algunos cursos electivos tomados durante el</p>	<p>II5-EGD El pregrado me proporcionó conocimientos matemáticos sobre fractales y</p>

	<p>pregrado en la Universidad. El primero de ellos fue Geometría Dinámica, en este curso hacíamos uso de diferente software como Cabri, GeoGebra y Regla y compás para dar solución a los determinados problemas que se proponían. Durante este proceso hubo un módulo en el que estudiamos cómo construir fractales con el programa Regla y Compás, para ello, se estudiaron algunas formas de programación que generaban automáticamente las iteraciones.”</p>	<p>tecnológicos sobre programas informáticos para modelar fractales.</p> <p>Recordé haber estudiado cómo programar un botón en Regla y Compás para generar automáticamente las iteraciones para el trabajo con fractales. Nunca intenté hacer esto con GeoGebra que es el software que más utilizo.</p>	
T4-6	<p>[¿De dónde proviene el conocimiento que tengo sobre el tema del proyecto?] “Por último, mediante la participación y discusión en los seminarios tomados en la MDM y a partir de las lecturas propuestas he logrado entender diferentes elementos que antes desconocía. El entender qué es una tarea y bajo qué parámetros se debe construir, identificar los tipos de argumentos que esbozan los estudiantes en sus producciones.”</p>	<p>II6-DT La MDM le ha aportado elementos para caracterizar y reconocer qué es una tarea. Entendía que para identificar qué es una tarea debía verificar si esta cumple con los elementos mencionados por Gómez (2018).</p> <p>Identificación y alusión a la transición entre el estadio 0 y el 1.</p> <p>{Ver T1-3 y T3-1, alusión a lo que tendría por tarea}</p>	Febrer o
T4-7	<p>[¿Cómo se ha expresado usualmente el conocimiento que tengo sobre el tema en mi acción docente, con mis estudiantes o con mis colegas?] “Respecto al conocimiento, creo que lo he visto en el colegio donde</p>	<p>II7-EGD Expresa una necesidad alusiva a la manejo adecuado y óptimo de los EGD. Cuando hago referencia a herramientas</p>	

<p>trabajo y también me ha pasado a mí y es que no usamos adecuadamente las herramientas tecnológicas porque realmente no sabemos cómo sacarle todo el provecho y creemos manejarlas cuando les damos un uso superficial.”</p>	<p>tecnológicas puntualmente aludo a Cabri, GeoGebra y Regla y Compás.</p> <p>II7-DT Considero que no pude lograr que los estudiantes evidenciaran las necesidades de usar el software. Pienso que esto recae en las tareas que proponía, no sabía cómo diseñar tareas y tan solo modificaba cosas encontradas en internet.</p>
<p>[¿Qué consecuencias se derivan del conocimiento inicial sobre el tema del TG en mi acción docente o en el aprendizaje de mis estudiantes, que ameriten promover cambios en tal conocimiento?]</p> <p>T4-8 “El tratar de identificar los argumentos de los estudiantes al abordar estas tareas (de dimensión fractal) es todo un reto porque no sabemos qué tipos de argumentos pueden surgir.”</p>	<p>II8-AR Expresa una necesidad en cuanto a la identificación del tipo de argumentos emergen si se aborda la dimensión fractal.</p> <p>Comienzo a tratar de establecer vínculos entre los elementos que configuran el trabajo de grado. No tenía ninguna idea de cómo se vinculan, no podía diferenciar entre argumento y razonamiento.</p>
<p>T4-9 “Para poder fomentar el trabajo con fractales en la escuela, de forma tal que este contribuya a promover el proceso de argumentación, deberían poder articular, como parte de su conocimiento profesional, el conocimiento matemático sobre fractales con conocimiento didáctico sobre el diseño de tareas con tecnología digital para favorecer la argumentación. Esto les permitiría aportar algunas tareas, incentivando este tema en la escuela.”</p>	<p>Segundo acercamiento a la configuración inicial del problema.</p> <p>II9-DT Vínculo establecido entre diseño de tareas y EGD de modo que esto favorezca la argumentación. Concebía que el diseño de tareas y los EGD como medio.</p>

T4-10	<p>[Se hace alusión a que el currículo escolar no se contempla un espacio propio para el estudio de la dimensión fractal. Por esta razón, consideramos que se genera un vacío en el conocimiento (matemático o didáctico) del profesor] “Todo lo anterior, nos cuestionó y nos llevó a reflexionar y buscar entender las consideraciones que debe tener un profesor de matemáticas para diseñar tareas en relación con la dimensión fractal.”</p>	<p>III10-DT Consideración de cómo vincular la dimensión fractal y el diseño de tareas para solventar problemas asociados al conocimiento matemático-didáctico del profesor.</p> <p>No sabía cómo o bajo qué parámetros diseñar una tarea que apunte a la noción de dimensión fractal, es decir, no sé qué es lo relevante en el diseño para que logre ser efectivo, me centro en la generalización, en que determinen la dimensión y cómo hago para considerar los argumentos durante todo el proceso.</p>	Abril
T4-11	<p>“Al enfocar la atención en la argumentación, hemos observado que en las reuniones de área algunos colegas se cuestionan respecto a por qué los estudiantes no argumentan o no logran los resultados esperados en relación con los programas curriculares. De allí surge nuestro interés por los procesos de argumentación, pero enfocados en el estudio de la Teoría Fractal. ”</p>	<p>III11-AR Primer intento de vincular intereses personales con la argumentación. Vínculo forzado, desconexión entre la argumentación y la dimensión fractal. Comentario de la profesora Leonor.</p> <p>La idea que teníamos en esos momentos es que como profesores nos cuestionamos por qué los estudiantes no argumentan y relacionamos estos con la no consecución de resultados académicos. Pero me preguntaba</p>	

		<p>por el por qué los estudiantes no argumentan y yo no tenía claridad qué era la argumentación.</p>
T4-12	<p>“Nos resulta interesante preguntarnos y reflexionar sobre las palabras de nuestros colegas cuando se preguntan “¿por qué no argumentan los estudiantes?” ¿Cuándo nuestros colegas hablan de argumentación ¿a qué se refieren?, ¿qué es lo que realmente están pidiendo que digan o hagan los estudiantes?”</p>	<p>III2-AR Expresa una necesidad alusiva al uso indistinto de los términos. Puntualmente qué es lo que se pide que hagan los estudiantes cuando les pedimos argumentar.</p> <p>Sabía que mis colegas usaban indistintamente los términos porque también era algo que me pasaba a mí.</p>
T4-13	<p>“(…) el estudio que se desarrollará en el presente trabajo está enmarcado en el campo de argumentación y prueba en la línea de geometría.”</p>	<p>III3-AR Identificación del campo en que se desarrollará el trabajo. Previo al ingreso no sabía que la argumentación era un campo. Abril</p>
T4-14	<p>“Teniendo en cuenta lo que mencionamos en los párrafos anteriores, y debido a que la cantidad de trabajos que hay en relación con la formalidad matemática de la noción de dimensión fractal es mucho mayor que los diseños de tareas para el aula, decidimos aportar desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de dicha noción, en busca de promover la argumentación.”</p>	<p>III4-DT Pude reconocer una necesidad respecto al diseño de tareas y es tratar de lograr que apunté a la enseñanza y no solo al ámbito matemático. A partir de la búsqueda bibliográfica preliminar, evidenció que hay bastantes trabajos asociados con la formalidad matemática de la noción de dimensión, pero no encontramos diseños de</p>

	<p>tareas que apuntaran puntualmente a su conceptualización en el aula.</p> <p>No sabía cómo comenzar a rastrear la información que realmente me fuera útil en este sentido. Me costaba trabajo relacionar lo que leía de diseño de tarea con pensar en un posible diseño, creo que siempre recaigo en hacer modificaciones a tareas diseñadas por alguien más.</p>
<p>T4-15</p> <p>[Delimitación del problema, consultando referentes teóricos] “(...) los profesores de matemáticas y algunos investigadores reconocen como una necesidad formativa el estudio de la argumentación para de este modo aprender qué situaciones, tareas y conocimientos fomentan dicha necesidad.”</p>	<p>III5-AR Reconocimiento de una necesidad alusiva a la formación respecto de la argumentación por parte de los profesores. No entendía si esta necesidad formativa se extendía en general para todos los profesores de matemáticas, de ser así me preguntaba por qué nunca estudié nada de esto en el pregrado.</p> <p>Necesidad formativa, identificación de una problemática común entre la comunidad educativa.</p> <p>Mayo</p>
<p>T4-16</p> <p>“Además, un valor importante de la demostración es que fomenta el debate; por lo tanto, es una norma para comunicar resultados</p>	<p>III6-AR Previamente había entendido las características de la argumentación, pero</p>

matemáticos, y esto a su vez, impulsa a los estudiantes a evolucionar en la producción de argumentos a partir de la comprensión que logran al involucrarse en la actividad demostrativa. Ahora bien, a pesar de las grandes bondades que hemos mencionado es importante fijar la atención en las dificultades que distintos autores han citado respecto a la enseñanza de la argumentación y la demostración, enfocadas en la labor del profesor, que, para nuestro, caso será el objeto de estudio.”

entre esas características conocidas no estaba que era una norma para comunicar resultados matemáticos (representación del argumento como demostración).

Entiendo la demostración en un sentido amplio, es decir como un gran argumento.

Primer acercamiento a la literatura especializada en argumentación. Denota una necesidad en la identificación de las dificultades para su abordaje en el aula de clase. No tengo claro cuáles son las principales dificultades con las que me puedo encontrar cuando lleve la argumentación al aula de clase.

T4-17

“(…) los autores [Hill, Ball, y Schilling (2008)] no sólo aluden a los problemas para el abordaje de la argumentación y la demostración, sino que también concuerdan en que como profesores necesitamos alternativas a las tareas tradicionales, pues es frecuente que el profesor proponga tareas descritas en libros de texto, replique las evidenciadas en su formación inicial o las tome de otros materiales didácticos.”

III7-DT Expresa una necesidad relacionada con la falta de experticia en el diseño de tareas. Considero que era algo que me pasaba a mí, siempre adaptaba o replicaba tareas que encontraba por internet o que ya me habían aplicado a mí. Considero que lo anterior se debe a que no tenía claridad en los elementos que debía tener en cuenta para el diseño de una tarea.

T4-18	<p>“Parece importante y necesario que cuando el profesor proponga una determinada tarea a sus estudiantes, no sólo tenga el conocimiento para resolverla (conocimiento común del contenido), sino que además pueda identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en su resolución (conocimientos especializado del contenido), que le ayuden a prever posibles conflictos, elaborar ampliaciones y variaciones de las tareas, y planificar posibles institucionalizaciones de los conocimientos implicados.”</p>	<p>II18-DT Alusión al CDM en cuanto a las dimensiones didáctica y matemática propuestas en el modelo. Conocimiento del profesor para el diseño de una tarea.</p> <p>Cuando hacía adaptaciones para las tareas que proponía generalmente solo consideraba una posible solución. En dichos diseños no consideraba las tareas como problemas abiertos sino como secuencias de pasos para llegar a una determinada solución.</p>
T4-19	<p>“(…) el aprendizaje de la argumentación y la demostración en educación secundaria se debe desarrollar gradualmente y debe comenzar en los primeros años escolares.”</p>	<p>II19-AR Reconoce que la necesidad de abordar la argumentación en la educación secundaria, así este no sea el objeto central de estudio.</p> <p>Antes del ingreso a la MDM no había considerado la argumentación como foco de estudio, pero consideraba que mis estudiantes debían poder argumentar adecuadamente para evidenciar la comprensión de una temática en particular. Vinculaba la argumentación, vista como una justificación o una explicación, con la comprensión.</p>

T4-20	<p>“Mediante una búsqueda preliminar fue evidente que la cantidad de trabajos que hay en relación con la formalidad matemática de la noción de dimensión fractal es mucho mayor que los diseños de tareas para el aula. Las tareas propuestas que hemos podido encontrar para el desarrollo de la geometría fractal no vinculan, como es de nuestro interés, los tres aspectos que nos convocan: argumentación, dimensión fractal y herramientas tecnológicas.”</p>	<p>II20-DT Identifican la ausencia de tareas que vinculen los tres elementos centrales de la investigación.</p> <p>De aquí deriva la necesidad de hacer un diseño propio. Considero que he adquirido un conocimiento teórico sobre los elementos para el diseño de tareas, pero no tengo claridad cómo llevar a eso a la práctica y por lo general termino haciendo adaptaciones a tareas ya planteadas.</p>
T4-21	<p>[Justificación, ligada a aspectos investigativos] “Menciona que en los últimos años se han acrecentado las investigaciones orientadas a analizar y estudiar los procesos de argumentación y demostración en geometría; dicho interés radica, entre muchas otras razones, en la importancia y utilidad que tienen en la enseñanza.”</p>	<p>II21-AR Entendía que la utilidad de la argumentación en la enseñanza ya que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de los demás.</p>
T4-22	<p>[Justificación, ligada a aspectos investigativos] “Hanna (2000) enfatiza en que la demostración, una de las formas de argumentar, proporciona una explicación satisfactoria de por qué una conjetura es cierta.”</p>	<p>II22-AR Importancia de las representaciones de un argumento.</p>

T4-23	<p>[Justificación, ligada a aspectos investigativos]</p> <p>“(…) la demostración, entendida en un sentido amplio, tiene varias funciones importantes que incluyen: verificación, descubrimiento, explicación, comunicación, desafío intelectual y sistematización. Un valor importante de la demostración, vista como forma de argumentar, es que fomenta el debate; y esto a su vez, impulsa a los estudiantes a evolucionar en la producción de argumentos”</p>	<p>II23-AR No sabía que verificación, descubrimiento, explicación, comunicación, desafío intelectual y sistematización hacían parte de las funciones del argumento solo conocía establecer certidumbre y persuadir.</p>	<p>Mayo</p>
T4-24	<p>“Respecto a la importancia del diseño de tareas mediante el uso de herramientas tecnológicas Leung y Bolite-Frant (2015), hacen énfasis en que las herramientas deben considerarse más que como elementos auxiliares, pues influyen en la cognición e impactan el conocimiento matemático.”</p>	<p>II24-EGD Antes entendía que las tareas eran las preguntas que acompañaban al aplicativo de GeoGebra {Ver fila cinco de la propuesta de ingreso a la Maestría} Ahora entiendo los EGD como medio en el diseño de tareas. Concibo este vínculo como un gran aporte a la exploración, conjeturación y argumentación frente a determinados contenidos matemáticos.</p>	
T4-25	<p>“(…) por sus capacidades gráficas, los programas de geometría dinámica tienen el potencial para estimular tanto la exploración como la demostración, lo que hace más fácil proponer y probar conjeturas. Específicamente, estas conjeturas pueden surgir de la coordinación entre las propiedades que se utilizan durante la construcción y las propiedades destacadas como invariantes por el modo arrastre. ”</p>	<p>II25-EGD Reconocimiento de las bondades de los EGD en la resolución de problemas. Vínculo entre los EGD, diseño de tareas y la argumentación. No había podido establecer este vínculo, me costaba trabajo relacionar los tres elementos porque no tenía claridad</p>	<p>Mayo</p>

respecto a qué se refería cada uno de ellos, en sentido considero que he ampliado mi panorama conceptual.

T4-26 [Justificación, ligada a aspectos investigativos curriculares] “(...) Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, mencionan que uno de los procesos generales de la actividad matemática, que enfatiza en lo que significa ser matemáticamente competente, es “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración”.

II26-DT Consideraba que varias de las tareas que proponía para mis estudiantes estaban regidas por lo que se determina en los Estándares, no conocía la mención que se le hace a la argumentación dentro de este documento y que se relacionaba directamente con lo que se entiende por ser matemáticamente competente.

Anexo 5: Datos del Conocimiento de Hali para los Momento 2 y 4

Datos Momento 2 – Hali	
En el Momento 1, yo...	
Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	<p>PI1-EGD Sabía la importancia de un software particular como medio para el desarrollo, la comprensión y la visualización de los fractales, en una experiencia previa de trabajo en aula.</p>
	<p>PI4-EGD Reconocía la necesidad ineludible del uso de herramientas tecnológicas para la comprensión y visualización del fractal dadas su complejidad y naturaleza.</p>
	<p>PI5-EGD Consideraba que el uso de herramientas tecnológicas para la comprensión de los fractales no debía hacerse por el uso mismo, sino que requería una reflexión y discusión crítica dependiendo de los contextos</p>
	<p>PI6-EGD Hablaba de “Inmersión de las tecnologías” en relación con el hecho de considerarlas dentro del aula, y de “experiencia de temas innovadores y herramientas digitales” desde el reconocimiento de la existencia de un amplio mundo de este tipo de herramientas, pero las desconocía</p>
	<p>PI7-EGD Entendía “programa como herramienta” a los programas computacionales que ayudan a visualizar y a solucionar problemas matemáticos de forma ágil, por eso se considera una herramienta.</p>
	<p>PI8-EGD Entendía las “nuevas herramientas” como aquellas aplicaciones o softwares que van emergiendo en relación a los avances tecnológicos y las necesidades de la educación</p>
	<p>PI9-EGD Entendía las herramientas tecnológicas como una ayuda importante para dar cumplimiento a los objetivos establecidos en las propuestas de</p>

		actividades, en relación a un propósito de enseñanza y un contexto de una actividad planteada.
	PI10-EGD	Entendía las tecnologías como los objetos: celular, tablet y computador. Y se entienden las herramientas tecnológicas como los posibles programas o software instalados en los objetos mencionados, con usos y propósitos determinados.
Argumentación (AR)	PI2-AR	Consideraba los argumentos artísticos como las nociones en relación a proporcionalidad, teoría del color, teoría de creación (punto, línea y plano), técnica, entre otros. No sabía qué era argumentación
	PI4-AR	Hablaba de argumentos en relación a los conceptos puntuales que definen un fractal: Autosimilitud, Iteración y dimensión.
Diseño de Tareas (DT)	PI1-DT	Entendía los talleres en relación con las actividades propuestas a los estudiantes para el trabajo en aula.
	PI3-DT	Pensaba que los talleres se obtenían por un proceso de planeación en el que se hacía el diseño de las actividades que se propondrían a los estudiantes, se ponía a prueba y se evaluaba si funcionaba o no, para luego hacer los respectivos ajustes al diseño inicial
	PI7-DT	Entendía como “propuesta de actividad” para los estudiantes al problema determinado que se propone para desarrollar bajo condiciones dadas: trabajo individual o colaborativo y trabajo en clase o en casa

Datos Momento 4 – Hali

En el Momento 3, yo...

II1-EGD	Tenía un conocimiento previo en relación al uso de un Entorno de Geometría Dinámica y sus posibilidades en el accionar,
----------------	---

Entornos de Geometría Dinámica (EGD)		específicamente asociaba UltraFractal como un EGD, que sabía usarlo y que me permitía crear o modificar diferentes figuras geométricas, por ejemplo, tomar un fractal y hacerle modificaciones o empezar desde cero en la creación de uno.
	II2-EGD	Reconocía UltraFractal como un EGD a partir de la asociación de las palabras Geometría Dinámica con UltraFractal, dada la existencia de la Geometría Fractal y que el software permitía realizar movimientos y transformaciones de elementos geométricos.
	II3-EGD	Reconocía la Tecnología Digital como una herramienta de apoyo para el aprendizaje o la comprensión de la Argumentación o los procesos de Argumentación.
	II9-EGD	Comprendía las herramientas tecnológicas como cualquier mediador o programa que permite explorar o visualizar elementos, en este caso, matemáticos
	II10-EGD	Reconocía los Entornos de Geometría Dinámica como motivadores de la exploración y la demostración, en consecuencia, se establece un vínculo entre la Argumentación y los Entornos de Geometría Dinámica por medio del Diseño de Tareas.
	PME10-EGD	Comprendía la importancia de los EGD en relación a la conjeturación y la prueba, reconociendo el entorno como herramienta facilitadora para la elaboración y verificación de conjeturas.
	PME15-EGD	Reconocía los Entornos de Geometría Dinámica, en particular GeoGebra, como una herramienta de exploración que puede ayudar a la conjeturación

DDC2-EGD	Comprendía la diferencia entre las construcciones blandas y las construcciones robustas posibles en un Entorno de Geometría Dinámica. Dicha diferencia tenía que ver con comprender las construcciones robustas como aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las construcciones blandas como aquellas que ofrecen una transición de lo empírico a lo teórico.	
DDC4-EGD	Reconocía las características en las que se hace hincapié al desarrollar construcciones blandas, y se conoce que para que se de ese tipo de construcción depende de la tarea que se proponga. No con cualquier ejercicio de exploración se lleva a cabo una construcción blanda.	
DDC7-EGD	Se comprenden las herramientas tecnológicas como un aporte al aprendizaje matemático.	
Diseño de Tareas (DT)	II3-DT	Se considera el Diseño de Tareas como un medio de acercamiento a la Argumentación, puesto que se entienden las tareas como las actividades que serán propuestas a los estudiantes para promover en ellos la Argumentación.
	II3-DT	Se considera el Diseño de Tareas como un medio de acercamiento a la Argumentación, puesto que se entienden las tareas como las actividades que serán propuestas a los estudiantes para promover en ellos la Argumentación.
	II4-DT	Se considera que con el saber matemático sobre Dimensión Fractal es suficiente conocimiento para que un profesor diseñe Tareas en relación con la Dimensión Fractal que promuevan la Argumentación.
	II9-DT	Se amplían los conocimientos del profesor en cuanto al Diseño de Tareas al reconocer su importancia mediante el uso

herramientas tecnológicas, entendiendo estas como elementos auxiliares de acuerdo con su impacto en los estudiantes.

PME7-DT

Se aprende la diferencia entre Tarea y Actividad, entendiendo la Actividad como el hacer o el desarrollo de la Tarea. En consecuencia, se produce un ajuste en el conocimiento anterior, reconociendo que no era correcto el uso que se hacía de los términos actividad y actividades.

PME13-DT

Se conoce la importancia de elementos específicos para el Diseño de Tareas, en particular se resalta la descripción y el reconocimiento de la población, además de sus características, y de los acuerdos ya establecidos. Sin olvidar, la determinación de si se tiene acceso o no a herramientas tecnológicas.

PME15-DT

Se aprende a establecer metas en el diseño de tareas a partir de los objetivos propuestos para el mismo. A partir de lo aprendido me di cuenta cómo se hacía y qué elementos debía tener en cuenta para plantear una meta dentro del diseño de tareas; sabía que las metas existían dentro del diseño de tareas por los estudios previos en la licenciatura en artes, pero nunca había hecho una.

PME16-DT

Se reconocen todos los elementos necesarios para el Diseño de Tareas. Después de recibida la revisión de la profesora del seminario DDC, además se comprende que esos elementos no sólo deben ser listados, sino que también se debe hacer su análisis respecto de la formación del profesor y el estudiante en cuanto al manejo del recurso a usar en la tarea diseñada y comprender que realmente es importante que haya una preparación del estudiante y el profesor, que hay un tiempo para determinar el uso de un material o un recurso y en general para el diseño de tareas

DDC5-DT	Tarea: Solicitud que hace el profesor .Actividad: Acción que hace con la tarea el estudiante.
II1-AR	Se afirma un desconocimiento en relación a la Argumentación, pensaba que argumentar debe ser como la demostración o la justificación de algo, pero no sabía qué era argumentación, y se reconoce que se está aprendiendo sobre ello en el contexto de la Maestría puesto que ya había tenido la primera clase de DDC y se dio a conocer que durante el semestre se iba a trabajar en torno a la argumentación.
II2-AR	Fruto de la clase 1 de DDC, se reconoce la Argumentación como foco de estudio, que es útil para que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o la falsedad de una declaración, y se conoce que la demostración hace parte de la Argumentación. También, se comienza a reconocer la estructura ternaria de un argumento.
II5-AR	La afirmación surge de una idea compartida con Michael relacionada con cuestionar los indistintos usos de la palabra argumentar en el contexto escolar, específicamente para mí se refiere más a cómo entender los indistintos usos por parte de los estudiantes, concebía que para ellos la instrucción “argumente su respuesta” se entendía como “justifique su respuesta”.
II6-AR	Después de la consulta bibliográfica para dar la justificación al problema planteado en la primera versión del anteproyecto por pedido de la profesora, surgen nuevas comprensiones en relación a la Argumentación, se comprende la demostración como una forma de argumentar, que la argumentación se logra al involucrarse en la actividad demostrativa y que aprender a argumentar supone las dificultades propias de aprender a demostrar.

**Argumentación
(AR)**

II7-AR	Personalmente, a nivel escolar no se me enseñó sobre la Argumentación, tampoco a nivel universitario, lo que implica que entré a la maestría sin saber nada de argumentación.
II8-AR	Se identifica y se reconoce la Argumentación como campo de investigación y no se entendía la utilidad que tenía para la enseñanza.
PME1-AR	Se reconoce la argumentación, o el proceso de argumentar, como un proceso de discusión en torno a un tema determinado cuyo producto es un discurso, que se desarrolla a partir de unas normas compartidas con el fin de determinar la veracidad del debate. A partir de la introducción de la Argumentación como objeto de estudio del curso en la primera clase, se reconocen los objetos primarios del proceso de argumentación, entre ellos los argumentos.
PME2-AR	Se reconoce que la demostración hace parte de la Argumentación y se precisa que la demostración es útil para que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o la falsedad de una declaración.
PM4-AR	Se amplía el conocimiento existente de la diferencia entre Teorema y Conjetura, en relación con que la diferencia se enmarca en la demostración, entendiendo esta como una secuencia de argumentos matemáticos que hace uso de afirmaciones aceptadas por la comunidad y que emplea esquemas de razonamiento.
PME8-AR	A partir de la reflexión respecto a la negación de argumentos, se concluye que es posible negar dados su estructura lógica y el tipo de argumento.
PME12-AR	A partir de la realización de la demostración a dos columnas, que constituyó retomar los razonamientos necesarios para ello, se

comprende la demostración a dos columnas como una forma de argumentar puesto que se evidencian los datos y las garantías de forma explícita.

PME15-AR

Se conoce que conjeturar y verificar hacen parte fundamental (quizás imprescindible) del proceso de argumentar.

Anexo 6: Datos del Conocimiento de Michael para los Momento 2 y 4

Datos Momento 2 – Michael		
En el Momento 1, yo...		
Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	PI2-EGD	Concebía los programas de geometría dinámica como un medio para la realización de bocetos que son representaciones de objetos geométricos 2D y 3D.
		Consideraba que el uso de GeoGebra en las aulas de clase potencia la visualización geométrica de los estudiantes.
	PI5-EGD	Yo entendía a GeoGebra como lo que le permitía dinamizar los objetos geométricos que salían en la pantalla.
	PI9-EGD	Entendía las construcciones robustas como aquellas construcciones que resuelven un determinado problema de forma general, es decir, las que incluye todos los casos posibles.
	PI11-EGD	Sabía que GeoGebra es importante en el desarrollo de problemas en los que se tenga que hacer una exploración para conjeturar o establecer vínculos y relaciones entre determinados objetos geométricos, pues aporta a su desarrollo.
Diseño de Tareas (DT)	PI3-DT	Me refería a la tarea como aquello que permite al estudiante tener un contacto directo con los objetos geométricos.
	PI5-DT	Entendía la tarea como las preguntas que acompañaban al aplicativo en GeoGebra.
	PI6-DT	Entendía la tarea como un medio que puede aportar a la conceptualización de una noción en particular.

PI7-DT	Reconocía que previo a la aplicación de las tareas los estudiantes deben tener un contacto con el software y un manejo básico del mismo.
	Entendía tarea y actividad como sinónimos.
PI13-DT	Reconocía que cuando se diseña una tarea mediada por la tecnología, es importante que el profesor considere la forma en que el estudiante se va a acercar al medio tecnológico, es decir, cuál será el rol de dicho medio para que se cumpla el propósito de la actividad y se genere conocimiento.
PI14-DT	Reconocía que es importante identificar los aportes y las falencias que puede tener una tarea cuando está mediada por la tecnología y cómo esto impacta de forma positiva o negativa en el aprendizaje de los estudiantes.
	Reconocía que es importante plantear objetivos específicos para el diseño de una tarea.
PI15-DT	Reconocía que cuando se diseña una tarea mediada por algún medio tecnológico, es importante conocer las dificultades y necesidades de los estudiantes para que el diseño potencie el uso de la tecnología a partir de las características particulares de los estudiantes.

Datos Momento 4 – Michael

En el Momento 3, yo...

Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	DDC3-EGD	Concebía el programa de geometría dinámica únicamente desde sus funciones de graficar y verificar propiedades.
	DDC9-EGD	Concebía el software de geometría dinámica únicamente como verificador porque el resolutor tiene seguridad de las inferencias a las que llegó.

	<p>PME10-EGD Reconocía previamente que los softwares de geometría dinámica generaron una revolución en cuanto a la forma de acercarse a la geometría, el dinamismo en las representaciones ayudaba a la exploración y conjeturación.</p>
	<p>PME14-EGD Reconocía que las construcciones blandas permiten identificar relaciones de dependencia y proporcionan una solución particular del problema.</p>
	<p>PME16-EGD Reconocía el papel de las construcciones blandas en el proceso de exploración durante la resolución de una tarea.</p>
	<p>PME16-EGD Entendía el software de geometría dinámico como medio.</p>
	<p>Reconocía arrastre y rastro como herramientas de GeoGebra.</p>
	<p>PME17-EGD Entendía que las construcciones robustas son aquellas para las que el modo de arrastre conserva sus propiedades mientras que en las construcciones blandas son soluciones particulares del caso general.</p>
	<p>PME22-EGD Reconocía que asociaba los arrastres en EGD con que los estudiantes pudieran visualizar de mejor forma los invariantes de un determinado objeto geométrico.</p>
Diseño de Tareas (DT)	<p>DDC3-DT Evidenciaba la necesidad de generar una relación entre el recurso a partir de la tarea que estaba proponiendo.</p>
	<p>DDC8-DT Reconocía la importancia del diseño de tareas enfocado en la exploración (puede ser a partir de construcciones blandas).</p>
	<p>DDC10-DT Reconocía el aspecto mediacional en el diseño de tareas y cómo la interacción con diferentes recursos proporciona conocimientos diferentes.</p>

		Entendía EGD, lápiz y papel, materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc).
	DDC11- DT	Reconocía que las limitaciones en el proceso de exploración podrían estar relacionada con la poca experticia del resolutor con el recurso.
	DDC12- DT	Entendía tarea y actividad como sinónimos.
	II24- DT	Entendía que las tareas eran las preguntas que acompañaban al aplicativo de GeoGebra.
	PME9- DT	Evidenciaba cómo una tarea y la forma en que esta está formulada puede determinar el tipo de argumento, el diseño de la tarea permite hacer inferencias respecto a cómo van a argumentar los estudiantes.
	PME16- DT	Sabía que para el diseño de una tarea debía considerar elementos como temporalidad, interacción, materiales y recursos, y agrupamiento.
	PME18- DT	Reconocía las normas socio-matemáticas y las normas sociales como características en la caracterización de la población para el diseño de tarea.
	PME21- DT	Reconocía el tipo de argumento a partir del tipo de tarea que se propone.
	PME24- DT	Reconocía la importancia de considerar las dificultades que tienen los estudiantes respecto al manejo de GeoGebra.
Argumentación (AR)	DDC8- AR	Reconocía los argumentos informales como aquellos que surgen en el proceso de exploración cuando se discuten las características de una construcción blanda.

II19-AR Vinculaba la argumentación, vista como una justificación o una explicación, con la comprensión.

II21-AR Entendía que la utilidad de la argumentación en la enseñanza ya que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de los demás.

II23-AR Reconocía la verificación, descubrimiento, explicación, comunicación, desafío intelectual y sistematización como funciones del argumento.

PME1-AR Reconocía un argumento a partir del Modelo de Toulmin (aserción, garantía, datos).

Entendía la demostración como una justificación o una validación teórica para una conjetura. Reconoce la idea de demostración como argumento.

PME3-AR Entendía que la demostración como un gran argumento.

PME5-AR Reconocía que se alude a un argumento inductivo cuando el argumento es de tipo abductivo. Asocia lo inductivo con la inducción en matemáticas, por la similitud en las palabras.

PME6-AR Concebía que un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático. .

PME8-AR Entendía el argumento como lo que dice uno en el momento para validar la idea que tiene en mente, es decir, bajo qué parámetro usted justifica qué va a decir.

PME10-AR Concebía argumentación y razonamiento como sinónimos.

PME12- Asociaba el argumento inductivo con búsqueda de consecuente en la
AR estructura terciaria.

PME13- Afirmaba que un tipo de demostración es por párrafo.
AR

PME21- Concebía persuadir como una de las características del argumento.
AR

Anexo 7: Tipificación de los datos de Hali para los Momento 2 y 4 a partir de las Categorías de Caracterización del Conocimiento

Datos Momento 2 – Hali	
En el Momento 1, yo...	
Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	<p>PI1-EGD Se sabe la importancia de un software particular que permitió pues fue quién nos permitió crear (jugar) e interactuar (Negd) y fue un medio para el desarrollo, la comprensión y la visualización de los fractales (Fegd), en una experiencia previa de trabajo en aula.</p>
	<p>PI4-EGD Se reconoce la necesidad ineludible del uso de herramientas tecnológicas para la comprensión y visualización del fractal dadas su complejidad y naturaleza (Fegd).</p>
	<p>PI5-EGD Se consideraba que el uso de herramientas tecnológicas para la comprensión de los fractales no debía hacerse por el uso mismo, sino que requería una reflexión y discusión crítica dependiendo de los contextos (PDT).</p>
	<p>PI6-EGD Se habla de “Inmersión de las tecnologías” en relación con el hecho de considerarlas dentro del aula, y de “experiencia de temas innovadores (Fegd) y herramientas digitales” desde el reconocimiento de la existencia de un amplio mundo de este tipo de herramientas, pero las desconocía.</p>
	<p>PI7-EGD Se entiende “programa como herramienta” a los programas computacionales que ayudan a visualizar (Fegd) y a solucionar problemas matemáticos de forma ágil (Fegd), por eso se considera una herramienta.</p>
	<p>PI8-EGD Se entienden las “nuevas herramientas” como aquellas aplicaciones o softwares que van emergiendo en relación a los avances tecnológicos y las necesidades de la educación (Fegd).</p>

	<p>PI9-EGD</p> <p>Se entienden las herramientas tecnológicas como una ayuda importante para dar cumplimiento a los objetivos establecidos en las propuestas de actividades (Fegd), en relación a un propósito de enseñanza y un contexto de una actividad planteada.</p>
	<p>PI10-EGD</p> <p>Se entienden las tecnologías como los objetos: celular, tablet y computador. Y se entienden las herramientas tecnológicas como los posibles programas o software instalados en los objetos mencionados, con usos y propósitos determinados (Negd).</p>
<p>Argumentación (AR)</p>	<p>PI2-AR</p> <p>Se consideran los argumentos artísticos como las nociones en relación a proporcionalidad, teoría del color, teoría de creación (punto, línea y plano), técnica, entre otros (NAr). No sabía qué era argumentación.</p>
	<p>PI4-AR</p> <p>Se habla de argumentos en relación a los conceptos puntuales que definen un fractal: Autosimilitud, Iteración y dimensión (NAr).</p>
<p>Diseño de Tareas (DT)</p>	<p>PI1-DT</p> <p>Se entendían (Nt) los talleres en relación con las actividades propuestas a los estudiantes para el trabajo en aula. (Nt)</p>
	<p>PI3-DT</p> <p>Se pensaba que los talleres se obtenían por un proceso de planeación en el que se hacía el diseño de las actividades que se propondrían a los estudiantes (NT), se ponía a prueba y se evaluaba si funcionaba o no, para luego hacer los respectivos ajustes al diseño inicial (PDT)</p>
	<p>PI7-DT</p> <p>Se entiende como “propuesta de actividad” para los estudiantes al problema determinado que se propone para desarrollar bajo condiciones dadas (NT): trabajo individual o colaborativo y trabajo en clase o en casa.</p>

Datos Momento 4 – Hali

En el Momento 3, yo...

Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	II1-EGD	Tenía un conocimiento previo en relación con el uso de un Entorno de Geometría Dinámica y sus posibilidades en el accionar, específicamente asociaba UltraFractal como un EGD (Negd), que sabía usarlo y que me permitía crear o modificar diferentes figuras geométricas (Fegd), por ejemplo, tomar un fractal y hacerle modificaciones o empezar desde cero en la creación de uno.
	II2-EGD	Se reconoce UltraFractal como un EGD a partir de la asociación de las palabras Geometría Dinámica con UltraFractal, dada la existencia de la Geometría Fractal y que el software permitía realizar movimientos y transformaciones de elementos geométricos (Fegd).
	II3-EGD	Se reconoce la Tecnología Digital como una herramienta de apoyo para el aprendizaje o la comprensión de la Argumentación o los procesos de Argumentación (Fegd).
	II9-EGD	Se comprenden las herramientas tecnológicas como cualquier mediador o programa que permite explorar o visualizar elementos, en este caso, matemáticos (Negd).
	II10-EGD	Se reconocen los Entornos de Geometría Dinámica como motivadores de la exploración y la demostración, en consecuencia, se establece un vínculo entre la Argumentación y los Entornos de Geometría Dinámica por medio del Diseño de Tareas.
	PME10-EGD	(...) se comenzaba a comprender la importancia de los EGD en relación a la conjeturación y la prueba, reconociendo el entorno como herramienta facilitadora para la elaboración y verificación de conjeturas (Negd).

PME15-EGD	Se reconocen los Entornos de Geometría Dinámica, en particular GeoGebra, como una herramienta de exploración que puede ayudar a la conjeturación (Negd).
DDC2-EGD	Se comprende la diferencia entre las construcciones blandas y las construcciones robustas posibles en un Entorno de Geometría Dinámica. Dicha diferencia tenía que ver con comprender las construcciones robustas como aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las construcciones blandas como aquellas que ofrecen una transición de lo empírico a lo teórico (Fegd).
DDC4-EGD	Se reconocen las características en las que se hace hincapié al desarrollar construcciones blandas, y se conoce que para que se de ese tipo de construcción depende de la tarea que se proponga. No con cualquier ejercicio de exploración se lleva a cabo una construcción blanda. (Fegd)
DDC7-EGD	Se comprenden las herramientas tecnológicas como un aporte al aprendizaje matemático. (Negd)
Diseño de Tareas (DT)	II3-DT Se considera una reflexión en torno al Diseño de Tareas, haciendo hincapié en el hecho que, si bien no se sabe diseñar tareas en relación a las matemáticas, se tienen varias ideas en relación al punto de partida para el diseño de tareas en artes, que es sobre qué tema, por qué y para qué diseñarlas (PDT).
II3-DT	Se considera el Diseño de Tareas como un medio de acercamiento a la Argumentación (FT), puesto que se entienden las tareas como las actividades que serán propuestas a los estudiantes (NT) para promover en ellos la Argumentación.
II4-DT	Se considera que con el saber matemático sobre Dimensión Fractal es suficiente conocimiento para que un profesor diseñe Tareas en relación con la Dimensión Fractal que promuevan la Argumentación (NT).

Se amplían los conocimientos del profesor en cuanto al Diseño de Tareas al reconocer su importancia mediante el uso herramientas tecnológicas, entendiendo estas como elementos auxiliares de acuerdo con su impacto en los estudiantes. (Negd)

PME7-DT Se aprende la diferencia entre Tarea y Actividad, entendiendo la Actividad como el hacer o el desarrollo de la Tarea. (NT) En consecuencia, se produce un ajuste en el conocimiento anterior, reconociendo que no era correcto el uso que se hacía de los términos actividad y actividades.

PME13-DT Se conoce la importancia de elementos específicos para el Diseño de Tareas, en particular se resalta la descripción y el reconocimiento de la población, además de sus características, y de los acuerdos ya establecidos (PDT). Sin olvidar, la determinación de si se tiene acceso o no a herramientas tecnológicas.

PME15-DT Se aprende a establecer metas en el diseño de tareas a partir de los objetivos propuestos para el mismo (PDT). A partir de lo aprendido me di cuenta cómo se hacía y qué elementos debía tener en cuenta para plantear una meta dentro del diseño de tareas; sabía que las metas existían dentro del diseño de tareas por los estudios previos en la licenciatura en artes, pero nunca había hecho una.

PME16-DT Se reconocen todos los elementos necesarios para el Diseño de Tareas. Después de recibida la revisión de la profesora del seminario DDC, además se comprende que esos elementos no sólo deben ser listados, sino que también se debe hacer su análisis respecto de la formación del profesor y el estudiante en cuanto al manejo del recurso a usar en la tarea diseñada y comprender que realmente es importante que haya una preparación del estudiante y el profesor, que hay un tiempo para determinar el uso de un material o un recurso y en general para el diseño de tareas (PDT).

DDC5-DT	Tarea: Solicitud que hace el profesor (Nt).Actividad: Acción que hace con la tarea el estudiante (Nt)
II1-AR	Se afirma un desconocimiento en relación a la Argumentación, pensaba que argumentar debe ser como la demostración o la justificación de algo, pero no sabía qué era argumentación (NArg), y se reconoce que se está aprendiendo sobre ello en el contexto de la Maestría puesto que ya había tenido la primera clase de DDC y se dio a conocer que durante el semestre se iba a trabajar en torno a la argumentación.
II2-AR	Reconocía la Argumentación como foco de estudio, que es útil para que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o la falsedad de una declaración (FAR), y se conoce que la demostración hace parte de la Argumentación (NArg). También, se comienza a reconocer la estructura ternaria de un argumento (NAr).
Argumentación (AR)	II3-AR A partir de las dos clases que había tenido una de DDC y otra de PME, se considera el proceso de argumentación como una serie de pasos para argumentar (Nar).
II5-AR	La afirmación surge de una idea compartida con Michael relacionada con cuestionar los indistintos usos de la palabra argumentar en el contexto escolar, específicamente para mí se refiere más a cómo entender los indistintos usos por parte de los estudiantes, concebía que para ellos la instrucción “argumente su respuesta” se entendía como “justifique su respuesta” (NAr).
II6-AR	Después de la consulta bibliográfica para dar la justificación al problema planteado en la primera versión del anteproyecto por pedido de la profesora, surgen nuevas comprensiones en relación a la Argumentación, se comprende la demostración como una forma de argumentar (NAr), que la argumentación se logra al involucrarse en la actividad demostrativa y que

	aprender a argumentar supone las dificultades propias de aprender a demostrar.
II7-AR	Personalmente, a nivel escolar no se me enseñó sobre la Argumentación, tampoco a nivel universitario, lo que implica que entré a la maestría sin saber nada de argumentación (NArg).
II8-AR	Se identifica y se reconoce la Argumentación como campo de investigación y no se entendía la utilidad que tenía para la enseñanza (NArg).
PME1-AR	Se reconoce la argumentación , o el proceso de argumentar (NArg), como un proceso de discusión en torno a un tema determinado cuyo producto es un discurso, que se desarrolla a partir de unas normas compartidas con el fin de determinar la veracidad del debate (NArg). A partir de la introducción de la Argumentación como objeto de estudio del curso en la primera clase, se reconocen los objetos primarios del proceso de argumentación, entre ellos los argumentos (NAr).
PME2-AR	Se reconoce que la demostración hace parte de la Argumentación (NArg) y se precisa que la demostración es útil para que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o la falsedad de una declaración (FArg).
PM4-AR	Se reconoce la estructura ternaria de un argumento bajo el modelo de Toulmin: aserción, garantía y datos (NArg). Así mismo, dada la relación entre la garantía, la aserción y los datos, se reconocen los tipos de argumentos: Deductivo, Abductivo, Inductivo y Analógico (NAr).
PME8-AR	Se amplía el conocimiento existente de la diferencia entre Teorema y Conjetura, en relación con que la diferencia se enmarca en la demostración, entendiendo esta como una secuencia de argumentos matemáticos que hace uso de afirmaciones aceptadas por la comunidad y que emplea esquemas de razonamiento (NArg).

PME12-AR A partir de la reflexión respecto a la negación de argumentos, se concluye que es posible negar dados su estructura lógica y el tipo de argumento (NAr).

PME15-AR A partir de la realización de la demostración a dos columnas, que constituyó retomar los razonamientos necesarios para ello, se comprende la demostración a dos columnas como una forma de argumentar puesto que se evidencian los datos y las garantías de forma explícita (NAr)

Anexo 8: Tipificación de los datos de Michael para los Momento 2 y 4 a partir de las Categorías de Caracterización del Conocimiento

Datos Momento 2 – Michael		
En el Momento 1, yo...		
Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	PI2-EGD	Concebía los programas de geometría dinámica como un medio para la realización de bocetos que son representaciones de objetos geométricos 2D y 3D. [Fegd]
		Consideraba que el uso de GeoGebra en las aulas de clase potencia la visualización geométrica de los estudiantes. [Fegd]
	PI5-EGD	Yo entendía a GeoGebra como lo que le permitía dinamizar los objetos geométricos que salían en la pantalla. [Negd]
	PI9-EGD	Entendía las construcciones robustas como aquellas construcciones que resuelven un determinado problema de forma general, es decir, las que incluye todos los casos posibles. [Negd]
	PI11-EGD	Sabía que GeoGebra es importante en el desarrollo de problemas en los que se tenga que hacer una exploración para conjeturar o establecer vínculos y relaciones entre determinados objetos geométricos, pues aporta a su desarrollo. [Fegd]
Diseño de Tareas (DT)	PI3-DT	Me refería a la tarea como aquello que permite al estudiante tener un contacto directo con los objetos geométricos. [NT]
	PI5-DT	Entendía la tarea como las preguntas que acompañaban al aplicativo en GeoGebra. [NT]
	PI6-DT	Entendía la tarea como un medio que puede aportar a la conceptualización de una noción en particular. [FT].

PI7-DT	Reconocía que previo a la aplicación de las tareas los estudiantes deben tener un contacto con el software y un manejo básico del mismo. [PDT]
	Entendía tarea y actividad como sinónimos. [NT]
PI13-DT	Reconocía que cuando se diseña una tarea mediada por la tecnología, es importante que el profesor considere la forma en que el estudiante se va a acercar al medio tecnológico, es decir, cuál será el rol de dicho medio para que se cumpla el propósito de la actividad y se genere conocimiento. [PDT]
PI14-DT	Reconocía que es importante identificar los aportes y las falencias que puede tener una tarea cuando está mediada por la tecnología y cómo esto impacta de forma positiva o negativa en el aprendizaje de los estudiantes. [PDT].
	Reconocía que es importante plantear objetivos específicos para el diseño de una tarea. [PDT].
PI15-DT	Reconocía que cuando se diseña una tarea mediada por algún medio tecnológico, es importante conocer las dificultades y necesidades de los estudiantes para que el diseño potencie el uso de la tecnología a partir de las características particulares de los estudiantes. [PDT].

Datos Momento 4 – Michael

En el Momento 3, yo...

Entornos de Geometría Dinámica (EGD)	DDC3-EGD	Concebía el programa de geometría dinámica únicamente desde sus funciones de graficar y verificar propiedades. [Negd]
	DDC9-EGD	Concebía el software de geometría dinámica únicamente como verificador porque el resolutor tiene seguridad de las inferencias a las que llegó. [Negd]

		Reconocía previamente que los softwares de geometría dinámica generaron una revolución en cuanto a la forma de acercarse a la geometría, el dinamismo en las representaciones ayudaba a la exploración y conjeturación. [Fegd]
	PME10-EGD	
		Reconocía que las construcciones blandas permiten identificar relaciones de dependencia y proporcionan una solución particular del problema. [Fegd].
	PME14-EGD	
		Reconocía el papel de las construcciones blandas en el proceso de exploración durante la resolución de una tarea. [Negd]
	PME16-EGD	Entendía el software de geometría dinámico como medio. [Negd]
		Reconocía arrastre y rastro como herramientas de GeoGebra. [Negd]
	PME17-EGD	Entendía que las construcciones robustas son aquellas para las que el modo de arrastre conserva sus propiedades mientras que en las construcciones blandas son soluciones particulares del caso general. [Negd]
	PME22-EGD	Reconocía que asociaba los arrastres en EGD con que los estudiantes pudieran visualizar de mejor forma los invariantes de un determinado objeto geométrico. [Fegd]
Diseño de Tareas (DT)	DDC3-DT	Evidenciaba la necesidad de generar una relación entre el recurso a partir de la tarea que estaba proponiendo. [PDT]
	DDC8-DT	Reconocía la importancia del diseño de tareas enfocado en la exploración (puede ser a partir de construcciones blandas). [PDT]

DDC10- DT	Reconocía el aspecto mediacional en el diseño de tareas y cómo la interacción con diferentes recursos proporciona conocimientos diferentes. [PDT]
	Entendía EGD, lápiz y papel, materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc). [PDT]
DDC11- DT	Reconocía que las limitaciones en el proceso de exploración podrían estar relacionada con la poca experticia del resolutor con el recurso. [PDT]
DDC12- DT	Entendía tarea y actividad como sinónimos. [NT].
II24- DT	Entendía que las tareas eran las preguntas que acompañaban al aplicativo de GeoGebra. [NT]
PME9- DT	Evidenciaba cómo una tarea y la forma en que esta está formulada puede determinar el tipo de argumento, el diseño de la tarea permite hacer inferencias respecto a cómo van a argumentar los estudiantes. [PDT].
PME16- DT	Sabía que para el diseño de una tarea debía considerar elementos como temporalidad, interacción, materiales y recursos, y agrupamiento. [PDT].
PME18- DT	Reconocía las normas socio-matemáticas y las normas sociales como características en la caracterización de la población para el diseño de tarea. [PDT]
PME21- DT	Reconocía el tipo de argumento a partir del tipo de tarea que se propone. [PDT]
PME24- DT	Reconocía la importancia de considerar las dificultades que tienen los estudiantes respecto al manejo de GeoGebra. [PDT].

DDC8-AR	Reconocía los argumentos informales como aquellos que surgen en el proceso de exploración cuando se discuten las características de una construcción blanda. [NAr]
II19-AR	Vinculaba la argumentación, vista como una justificación o una explicación, con la comprensión. [NArg]
II21-AR	Entendía que la utilidad de la argumentación en la enseñanza ya que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de los demás. [FAr].
II23-AR	Reconocía la verificación, descubrimiento, explicación, comunicación, desafío intelectual y sistematización como funciones del argumento. [FAr]
Argumentación (AR)	Reconocía un argumento a partir del Modelo de Toulmin (aserción, garantía, datos). [NAr]
PME1-AR	Entendía la demostración como una justificación o una validación teórica para una conjetura. Reconoce la idea de demostración como argumento. [NAr]
PME3-AR	Entendía que la demostración como un gran argumento. [NAr]
PME5-AR	Reconocía que se alude a un argumento inductivo cuando el argumento es de tipo abductivo. Asocia lo inductivo con la inducción en matemáticas, por la similitud en las palabras. [NAr]
PME6-AR	Concebía que un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático. [NAr]

PME8-AR Entendía el argumento como lo que dice uno en el momento para validar la idea que tiene en mente, es decir, bajo qué parámetro usted justifica qué va a decir. [NAr].

PME10-AR Concebía argumentación y razonamiento como sinónimos. [NAr].

PME12-AR Asociaba el argumento inductivo con búsqueda de consecuente en la estructura terciaria. [NAr].

PME13-AR Afirmaba que un tipo de demostración es por párrafo. [NAr]

PME21-AR Concebía persuadir como una de las características del argumento. [NAr].

Anexo 9: Síntesis por Categorías de Caracterización del Conocimiento de Hali para el Momento 2 y 4

Se presenta la síntesis de las afirmaciones consignadas en la columna “idea central” de la tabla de insumos, es decir, la evocación o interpretación de los insumos recolectados en el Momento 1 y 3 a partir de las categorías emergentes para la caracterización del conocimiento de los Momentos mencionados.

Momento 2			
Diseño de Tareas			
Cat.	Cód.	Conocimiento evidenciado	Síntesis
NT	PI1- DT	Taller como sinónimo de tarea.	Una tarea es un taller o actividad que se propone en el aula con un propósito específico y que se desarrolla bajo determinadas condiciones que se han planeado previamente.
	PI1- DT	Taller entendido como actividades que se proponen para el trabajo en el aula.	
	PI7- DT	Actividad como sinónimo de tarea y entendida como el problema que se propone para desarrollar bajo condiciones dadas	
PDT	PI3- DT	Los talleres son producto de un proceso de planeación que se debe probar, evaluar y determinar si se debe ajustar el diseño inicial.	Se debe seguir un proceso de planeación para producir una tarea. Luego de ello, esta se debe probar para evaluarla y ajustarla.
	PI5- EGD	Evaluar los aportes reales del software para los propósitos establecidos según el contexto.	

FT	No reporta conocimiento en esta categoría.
EGD	
Negd	<p>PI1- UltraFractal 5 es un EGD y un medio que permite crear, jugar e interactuar.</p> <hr/> <p>PI10- Son programas o software con propósitos y usos determinados.</p> <hr/> <p>Dada la complejidad y la naturaleza del objeto matemático a trabajar es necesario usar EGD</p> <hr/> <p>PI4- EGD</p>
Fegd	<p>Identifica los EGD como programas o softwares con propósitos y usos determinados que son usados cuando el objeto matemático que se trabaja es complejo. Asume que un ejemplo de ello es UltraFractal 5.</p> <p>Reconoce los EGD como medio para crear, jugar e interactuar con objetos geométricos</p> <hr/> <p>PI1- Es medio para el desarrollo de la EGD comprensión y visualización.</p> <hr/> <p>PI4- Aportan a la comprensión y visualización EGD de objetos geométricos</p> <hr/> <p>PI6- El uso de EGD puede promover una EGD experiencia innovadora.</p> <hr/> <p>PI7- Ayudan a visualizar y a solucionar EGD problemas matemáticos de forma ágil</p> <hr/> <p>PI9- Aportan a la mejora y cumplimiento de los EGD objetivos en relación a los propósitos de</p>

enseñanza y el contexto en el que se desarrollan	
Argumentación	
Nar	<p>PI2-AR</p> <p>Argumento artístico, entendido a partir de la asociación de las nociones de proporcionalidad, teoría del color, técnica, etc.</p> <p>Argumento son los atributos de un objeto matemático. Por ejemplo, para los fractales los argumentos son: autosimilitud, dimensión e iteración.</p> <p>Un argumento es artístico y tiene relación con conceptos como proporcionalidad, teoría del color, técnica, etc. como la asociación de distintas nociones.</p>

Momento 4			
Diseño de Tareas			
Cat.	Cód.	Afirmación	Síntesis
	II3-DT	Tarea es la actividad que será propuestas a los estudiantes	Actividad es el desarrollo de una tarea.
NT	DDC5-DT	Diferenciación entre tarea y actividad . Entiende actividad como el hacer o el desarrollar una tarea	Tarea: Solicitud que hace el profesor. Dicha solicitud

	<p>El profesor debe saber de EGD para poder diseñar tareas en donde se proponga el uso de herramientas tecnológicas.</p>	<p>promueve la exploración y la producción de argumentos y requiere el uso de EGD para resolverla.</p>
	<p>El diseño de tareas debe estar enfocado en la exploración.</p>	<p>Actividad: Acción que hace con la tarea el estudiante.</p>
PDT	<p>Asume que un saber matemático particular es suficiente para que un profesor diseñe tareas que promuevan la argumentación.</p>	<p>Dentro de los elementos que considera son parte de la planeación de una tarea están: descripción de la población, metas, objetivos, tiempos, materiales y recursos y reconocimiento del manejo de</p>
	<p>El punto de partida del diseño debe responder: sobre qué tema, por qué y para qué diseñarlas.</p>	<p>estos.</p>
	<p>La descripción, las características y el reconocimiento de la población, además de los acuerdos ya establecidos son elementos específicos para el diseño de tareas.</p>	<p>Antes de iniciar el diseño debe escoger el tema, debe saber el por qué diseñarla y para qué la diseña.</p>
	<p>Las metas del diseño de tareas se establecen a partir de los objetivos propuestos para el mismo</p>	<p>El profesor debe tener el conocimiento del tema sobre el cual va a tratar la tarea, del recurso que va a usar y del proceso que pretende favorecer para poder diseñar una tarea.</p>
	<p>El diseño de tareas tiene unos elementos específicos que deben analizarse en términos de: la formación del profesor y el estudiante en cuanto al manejo del</p>	

	<p>recurso a usar en la tarea diseñada y comprender que realmente es importante que haya una preparación del estudiante y el profesor, que hay un tiempo para determinar el uso de un material o un recurso y en general para el diseño de tareas</p>	<p>Las metas se establecen una vez se han determinado los objetivos de la tarea.</p>
II3-DT	<p>Para diseñar tareas sobre argumentación el profesor debe saber sobre argumentación.</p>	
II4-DT	<p>Asume que un saber matemático particular es suficiente para que un profesor diseñe tareas que promuevan la argumentación.</p>	
II10-EGD	<p>El profesor debe saber de EGD para poder diseñar tareas en donde se proponga el uso de herramientas tecnológicas.</p>	
II4-DT	<p>Asume que un saber matemático particular es suficiente para que un profesor diseñe tareas que promuevan la argumentación.</p>	
II3-DT	<p>Medio para el acercamiento a la argumentación.</p>	<p>Las tareas promueven la exploración y la argumentación</p>
FT	<p>II10-EGD El diseño de tareas promueve la exploración.</p>	

EGD

III- EGD	Asocia a UltraFractal5 con un EGD ya que este permite <u>crear o modificar diferentes figuras Geométricas.</u>	
II9- EGD	Las herramientas tecnológicas están vinculadas con los EGD, que son cualquier programa que permita explorar o visualizar elementos matemáticos.	Un EGD es una herramienta tecnológica que permite crear y modificar figuras geométricas.
PME10- EGD	Se comprenden las herramientas tecnológicas como un aporte al aprendizaje matemático	Además, las considera como una herramienta de exploración que facilita la conjeturación. Un ejemplo de ello es GeoGebra.
Negd DDC2- EGD	Las construcciones robustas son aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las construcciones blandas como aquellas que ofrecen una transición de lo empírico a lo teórico.	permite realizar dos tipos de construcciones, las robustas y las blandas. Las robustas que son aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y
DDC2- EGD	En las construcciones blandas se establece una relación entre las condiciones y las consecuencias de un teorema , ya que no cualquier ejercicio de exploración se lleva a cabo una construcción blanda.	las blandas que son establece una relación entre las condiciones y las consecuencias de un teorema.
PME15- EGD	Los EGD son una herramienta de exploración que puede ayudar a la conjeturación	

	II10- EGD	Los EGD motivan la exploración y la demostración.	Aporta al aprendizaje de la argumentación, motiva la exploración ya que permite modificar, crear, mover y transformar objetos geométricos. Favorece la conjeturación y demostración. Su uso genera impacto en los estudiantes y es un apoyo para el aprendizaje de la argumentación
	PME15- EGD	GeoGebra es un EGD y se entiende como una herramienta de exploración que ayuda a la conjeturación.	
	II4-DT	Son elementos auxiliares , usados en el diseño de tareas, que tienen impacto en los estudiantes.	
Fegd	III- EGD	Permite modificar o crear diferentes figuras geométricas.	
	II2- EGD	II.a.2. Permite realizar movimientos y transformaciones a distintos objetos geométricos.	
	II3- EGD	Asocia tecnología digital a los EGD y los reconoce como apoyo para el aprendizaje o comprensión de la argumentación	
Argumentación			
NArg	III1-AR	Asume que la argumentación es la demostración o justificación de algo. La argumentación es una justificación o una explicación.	Asume que argumentar y demostrar son sinónimos de argumentación. Entiende la argumentación como una secuencia de argumentos aceptados por la comunidad.
	II2-AR	La demostración hace parte de la argumentación.	

II7-AR	La demostración es una forma de argumentar.	La argumentación es un proceso cuyo producto es un discurso o una justificación cuya finalidad es determinar la veracidad de algo particular. La conjetura y la verificación son partes fundamentales de este proceso.
II8-AR	Se reconoce la argumentación como campo de investigación .	
II8-AR	La argumentación es un componente de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas .	
PM4-AR	Reconoce los tipos de argumentación abductivo, inductivo, analógico y el deductivo.	
PME1-AR	<u>Argumentación y argumentar</u> como sinónimos. Argumentar es un proceso cuyo producto es un discurso. Se desarrolla mediante normas compartidas con el fin de determinar la veracidad del debate .	
PME8-AR	Entiende la <u>demostración</u> como una secuencia de argumentos matemáticos aceptadas por la comunidad y que emplea esquemas de razonamiento .	
PME15-AR	La demostración es una forma de argumentar ya que se evidencian de forma explícita los datos y las garantías .	

		Conjeturar y verificar son parte fundamental del proceso de argumentar	
	II3-AR	Argumentar es un proceso : entendido como una serie de pasos que se realizan para argumentar.	
NAr	II2-AR	El argumento tiene una estructura ternaria.	Asume que argumentar es un proceso que consta de una serie de pasos que se realizan para argumentar. Reconoce que el argumento hace parte de los objetos primarios del proceso de argumentación, que tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y datos) y que tiene una estructura lógica según el tipo de argumento que sea (deductivo, abductivo, inductivo y analógico).
	II1-AR	Argumento como sinónimo de justificación.	
	PME1-AR	Los argumentos hacen parte de los objetos primarios del proceso de argumentación.	
	PM4-AR	El argumento tiene una estructura ternaria bajo el modelo de Toulmin (Aserción, garantía, datos).	
		A partir de la relación entre la garantía, la aserción y los datos se reconocen los argumentos deductivo, abductivo, inductivo y analógico.	
	PME12-AR	Los argumentos pueden ser negados a partir de su estructura lógica y de su tipo	
FAr	II2-AR	La verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación y el	La función de los argumentos es que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la

	desafío intelectual son funciones del argumento.	verdad o falsedad de una declaración.
FArg PME2- AR	La argumentación es útil en la enseñanza ya que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de los demás.	Es útil para ya que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de los demás.

Anexo 10: Síntesis por Categorías de Caracterización del Conocimiento de Michael para el Momento 2 y 4

Se presenta la síntesis de las afirmaciones consignadas en la columna “idea central” de la tabla de insumos, es decir, la evocación o interpretación de los insumos recolectados en el Momento 1 y 3 a partir de las categorías emergentes para la caracterización del conocimiento de los Momentos mencionados.

Diseño de Tareas			
Cat.	Cód.	Afirmación	Síntesis
NT	DDC12- DT	Tarea y actividad como sinónimos.	Tarea y actividad son sinónimos. Además, una tarea como las preguntas que guían al uso de un recurso como GeoGebra.
	II24-DT	Las tareas son las preguntas que acompañaban al aplicativo de GeoGebra.	
PDT	PME9- DT	La forma en que una tarea está formulada puede determinar el tipo de argumento.	Para el diseño de una tarea se debe considerar elementos como: temporalidad, interacción, materiales y recursos, agrupamiento, caracterización de la población, las normas socio-matemáticas y el reconocimiento de las dificultades para el manejo de GeoGebra.
	PME16- DT	Para el diseño de tarea se deben considerar elementos como: temporalidad, interacción, materiales y recursos, y agrupamiento.	
	PME18- DT	Se entienden las normas socio-matemáticas a partir de la caracterización de la población.	

PME21- DT	Se puede deducir el tipo de argumento a partir del tipo de tarea que se propone	Hay una relación entre el tipo de tarea y el tipo de argumento que pueda surgir en la solución de dicha tarea.
PME24- DT	Es importante considerar las dificultades que tienen los estudiantes respecto al manejo de GeoGebra.	El diseño debe estar enfocado en la exploración puesto que es necesario generar una relación
DDC3- DT	Es necesario generar una relación entre el recurso y la tarea.	entre el recurso y la tarea propuesta, sin olvidar el
DDC8- DT	El diseño de tareas debe estar enfocado en la exploración.	acercamiento y el conocimiento que debe haber en el manejo del recurso. Los recursos son: EGD,
DDC10- DT	Se debe considerar el aspecto mediacional en el diseño de tareas. Los recursos son: EGD, lápiz y papel, y materiales que se puedan llevar a la clase.	lápiz y papel, y materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc).
DDC11- DT	Las limitaciones en el proceso de exploración están relacionadas con el poco conocimiento de un recurso.	
FT		
EGD		
Negd PME14- EGD	Las construcciones blandas permiten identificar relaciones de dependencia y proporcionan una solución particular del problema.	El software de geometría dinámico es una herramienta y un medio para la construcción de objetos geométricos.

	Las construcciones blandas hacen parte del proceso de exploración durante la resolución de una tarea.	Las construcciones robustas como las que al hacer el arrastre conservan las propiedades del objeto geométrico. Y las construcciones blandas a partir de identificar relaciones de dependencia y como parte del proceso de exploración en la resolución de tareas.
	PME16- Software de geometría dinámico como EGD medio.	
	PME17- Arrastre y rastro son herramientas de EGD GeoGebra	
	PME17- Las construcciones robustas son EGD aquellas para las que el modo de arrastre conserva sus propiedades.	Los arrastres en EGD con la visualización de los invariantes en un objeto geométrico.
	PME22- Los arrastres en EGD permiten EGD visualizar invariantes de un determinado objeto geométrico.	Un EGD es una herramienta que permite graficar y verificar propiedades de los objetos geométricos.
	DDC3- Los programas de geometría dinámica EGD se usan para graficar y verificar propiedades.	
Fegd	PME10- Los softwares de geometría dinámica EGD generaron una revolución por el dinamismo en las representaciones y esto ayuda a la exploración y conjeturación.	Los softwares de geometría dinámica en relación con el dinamismo en las representaciones de un objeto geométrico y la verificación de inferencias ya hechas; además, él afirma que permiten la exploración y la conjeturación.
	PME9- El software de geometría dinámica EGD sirve de verificador, pues el resolutor tiene seguridad de las inferencias a las que llegó.	

Argumentación			
NArg	PME10- AR	Argumentación y razonamiento son sinónimos.	Argumentación y razonamiento son sinónimos.
	PME19- AR	La argumentación es una justificación o una explicación.	La argumentación es la justificación de una respuesta dada a un problema o una pregunta planteada.
NAr	PME1- AR	Modelo de Toulmin: aserción, garantía, datos.	Un argumento se entiende desde la estructura terciaria del Modelo de Toulmin: aserción, garantía y datos.
	PME1- AR	Demostración como una justificación o una validación teórica para una conjetura.	Persuadir como una de las características del argumento, siendo el argumento lo que se dice para validar una idea que se tiene en mente. Además, los tipos de argumentos inductivo y deductivo; asociando el argumento inductivo con la búsqueda de consecuente en la estructura terciaria y asociándolo con la inducción matemática por la similitud en las palabras; un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático.
	PME3- AR	La demostración como un gran argumento.	
	PME5- AR	Un argumento inductivo se asocia con la inducción matemática.	
	PME6- AR	Un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático.	
	PME8- AR	Argumento es lo que dice al momento de validar una idea.	
	PME12- AR	El argumento inductivo es la búsqueda de consecuente.	
	DDC8- EGD	Los argumentos informales son aquellos que surgen en el proceso de	La demostración es una justificación o una validación teórica para una conjetura y como

	<p>exploración cuando se discuten las características de una construcción blanda.</p>	<p>un gran argumento que se puede presentar por párrafos.</p> <p>Los argumentos informales como aquellos que surgen en el proceso de exploración, en particular cuando se discuten las características entre las partes que componen una construcción blanda (figura representada).</p>
FAr II23-AR	<p>La verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación y el desafío intelectual son funciones del argumento.</p>	<p>La verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación y el desafío como funciones del argumento.</p>
FArg II21-AR	<p>La argumentación es útil en la enseñanza ya que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de los demás.</p>	<p>La utilidad de la argumentación en la enseñanza se debe a que permite que los estudiantes transmitan sus ideas, las defiendan y las contrasten con las de los demás.</p>

Anexo 11: Tipificación del Conocimiento de Hali a partir de las Categorías Emergentes de Transformación

Elm.	Cat.	Momento 2	Momento 4
	NT	Una tarea es un taller o actividad que se propone en el aula con un propósito específico y que se desarrolla bajo determinadas condiciones que se han planeado previamente.	Actividad es el desarrollo de una tarea. [NC] Tarea: [MCt] Solicitud que hace el profesor [MCa]. Dicha solicitud promueve la exploración y la producción de argumentos y requiere el uso de EGD para resolverla. [NC] Actividad: Acción que hace con la tarea el estudiante. [NC]
	DT	Se debe seguir un proceso de planeación para producir una tarea. Luego de ello, esta se debe probar para evaluarla y ajustarla. [NR]	Dentro de los elementos que considera son parte de la planeación de una tarea están: descripción de la población, metas, objetivos, tiempos, materiales y recursos y reconocimiento del manejo de estos. [MCa]
	PDT	Se debe evaluar si el uso del software aportó a al propósito de la tarea	Antes de iniciar el diseño debe escoger el tema, debe saber el por qué diseñarla y para qué la diseña. [NC] El profesor debe tener el conocimiento del tema sobre el cual va a tratar la tarea, del recurso que va a usar y del proceso que pretende favorecer para poder diseñar una tarea. [NC] Las metas se establecen una vez se han determinado los objetivos de la tarea. [NC]
	FT	No reporta conocimiento en esta categoría.	Las tareas promueven la exploración y la argumentación. [NC]

<p>EGD</p>	<p>Identifica los EGD como programas o softwares con propósitos determinados que son usados cuando el objeto matemático que se trabaja es complejo. Asume que un ejemplo de ello es UltraFractal 5.</p> <p>Reconoce los EGD como medio para crear, jugar e interactuar con objetos geométricos</p>	<p>Un EGD es una herramienta tecnológica que permite crear y modificar figuras geométricas [NM]. Además, las considera como una herramienta de exploración que facilita la conjeturación. Un ejemplo de ello es GeoGebra. [NC]</p> <p>Su uso permite realizar dos tipos de construcciones, las robustas y las blandas. Las robustas que son aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las blandas que son establece una relación entre las condiciones y las consecuencias de un teorema. [NC]</p>
<p>Fegd</p>	<p>La función de los EGD entendida como un medio que aporta a la visualización de algunas propiedades de objetos geométricos. Además, su uso promueve una experiencia innovadora en los estudiantes, aporta a la comprensión y resolución de problemas matemáticos y a cumplir los propósitos de enseñanza INR.</p>	<p>Aporta al aprendizaje de la argumentación, motiva la exploración ya que permite modificar, crear, mover y transformar objetos geométricos. Favorece la conjeturación y demostración. Su uso genera impacto en los estudiantes y es un apoyo para el aprendizaje de la argumentación. [MCa]</p>
<p>AR NArg</p>	<p>No reporta conocimiento en esta categoría.</p>	<p>Asume que argumentar y demostrar son sinónimos de argumentación. Entiende la argumentación como una secuencia de argumentos aceptados por la comunidad. [NC].</p>

		La argumentación es un proceso cuyo producto es un discurso o una justificación cuya finalidad es determinar la veracidad de algo particular. La conjetura y la verificación son partes fundamentales de este proceso. [NC]
	Argumento son los atributos de un objeto matemático. Por ejemplo, para los fractales los argumentos son: autosimilitud, dimensión e iteración.	Asume que argumentar es un proceso que consta de una serie de pasos que se realizan para argumentar. Reconoce que el argumento hace parte de los objetos primarios del proceso de argumentación, que tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y datos) y que tiene una estructura lógica según el tipo de argumento que sea (deductivo, abductivo, inductivo y analógico). [MCt]
NAr	Un argumento es artístico y tiene relación con conceptos como proporcionalidad, teoría del color, técnica, etc. como la asociación de distintas nociones.	
FAr	No reporta conocimiento en esta categoría.	La función de los argumentos es que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o falsedad de una declaración. [NC]
FArg	No reporta conocimiento en esta categoría.	Es útil para ya que permite a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de los demás. [NC]

Anexo 12: Tipificación del Conocimiento de Michael a partir de las Categorías Emergentes de Transformación

Elm.	Cat.	Momento 2	Momento 4
	NT	Tarea como sinónimo de actividad, y como aquello que permite la interacción entre el estudiante y los objetos geométricos, en particular por medio del aplicativo GeoGebra. Además, una tarea son las preguntas que suscitan al uso de un recurso como GeoGebra.	Tarea y actividad son sinónimos [NM]. Además, una tarea son las preguntas que suscitan al uso de un recurso como GeoGebra.
	DT	Para la planeación de tareas es importante plantear objetivos específicos.	Para el diseño de una tarea se debe considerar elementos como: temporalidad, interacción, materiales y recursos, agrupamiento, caracterización de la población, las normas socio-matemáticas y el reconocimiento de las dificultades para el manejo de GeoGebra. [NC]
	PDT	Si las tareas están mediadas por la tecnología, es importante un acercamiento previo al medio tecnológico y, conocer las dificultades y necesidades de los estudiantes para que el diseño potencie el uso de la tecnología.	Hay una relación entre el tipo de tarea y el tipo de argumento que pueda surgir en la solución de una tarea. [NC] El diseño debe estar enfocado en la exploración puesto que es necesario generar una relación entre el recurso y la tarea propuesta [NC], sin olvidar el acercamiento

	<p>y el conocimiento que debe haber en el manejo del recurso [MCr]. Algunos recursos son: EGD, lápiz y papel, y materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc). [NC]</p>
<p>FT</p> <p>La función de la tarea es ser un medio que permite la conceptualización de alguna noción matemática.</p>	
<p>EGD Negd</p>	<p>Las construcciones robustas son las que incluyen todas las posibilidades de la situación presentada, lo que permite resolver el problema dado.</p> <p>El software de geometría dinámico es una herramienta y un medio para la comprensión y construcción de objetos geométricos [NC]. Los EGD son una herramienta que permite graficar y verificar propiedades de los objetos geométricos [NC].</p> <p>Las construcciones robustas como las que al hacer el arrastre conservan las propiedades del objeto geométrico [MCt]. Y las construcciones blandas a partir de identificar relaciones de dependencia y como parte del proceso de exploración en la resolución de tareas [NC].</p> <p>Los arrastres en EGD con la visualización de los invariantes en un objeto geométrico [NC].</p>

<p>Los programas de geometría dinámica son un medio para la realización de representaciones de objetos geométricos 2D y 3D.</p> <p>Fegd El dinamismo del software permite analizar múltiples representaciones, establecer vínculos entre objetos geométricos y, favorece el proceso de exploración y conjeturación.</p>	<p>Los softwares de geometría dinámica están relacionados con el dinamismo en las representaciones de un objeto geométrico [MCr] y la verificación de inferencias ya hechas [MCa]; además, permiten la exploración y la conjeturación [NC].</p>
<p>NArg</p>	<p>Argumentación y razonamiento son sinónimos. [NC]</p> <p>La argumentación es la justificación de una respuesta dada a un problema o una pregunta planteada. [NC]</p>
<p>AR</p> <p>NAr</p>	<p>Un argumento posee una estructura terciaria comprendida desde el Modelo de Toulmin: aserción, garantía y datos. [NC]</p> <p>El argumento lo que se dice para validar una idea que se tiene en mente [NC]. Además, los tipos de argumentos son: inductivo y deductivo. El argumento inductivo se basa en la búsqueda de consecuente en la estructura terciaria y se asocia con la inducción matemática por la similitud en</p>

las palabras; un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático. [NC]

La demostración es una justificación o una validación teórica para una conjetura. [NC]

Los argumentos informales son aquellos que surgen en el proceso de exploración, en particular cuando se discuten las características entre las partes que componen una construcción blanda (figura representada). [NC]

FAr

La verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación y el desafío son funciones del argumento. [NC]

FArg

La utilidad de la argumentación en la enseñanza se debe a que permite que los estudiantes transmitan sus ideas, las defiendan y las contrasten con las de los demás. [NC]

Anexo 13: Datos Momento 6 - Hali

A continuación, doy cuenta de mi conocimiento actual sobre los asuntos: Diseño de Tareas, Entornos de Geometría Dinámica y Argumentación. Siendo importante recalcar que dicha escritura se da después de presentar la propuesta de ingreso a la Maestría, llevar a cabo los cursos ofertados para el énfasis del cual participé, realizado todo el proceso de construcción de datos, realizada la clasificación y categorización de los datos del conocimiento de Michael, el respectivo análisis bajo categorías determinadas y, el contraste del conocimiento de Michael entre el Momento 2 y el Momento 4.

Diseño de Tareas

Tarea es la actividad que realiza el profesor y que él propone a los estudiantes para ellos exploren, consoliden conocimientos, desarrollen ideas, hagan conjeturaciones, desarrollen habilidades para el uso de algoritmos y, afiancen la representación de situaciones en las que se crea un objeto geométrico y la comprensión de objetos geométricos involucrados en esas situaciones por medio de la interacción de recursos usuales como: regla, compás, transportador, etc., o de recursos tecnológicos como los softwares de geometría dinámica. Entendiendo interacción como la relación de trabajo entre el estudiante y el recurso. El diseño de una tarea tiene como objetivo facilitar todo lo anteriormente mencionado, además de unos objetivos específicos ligados al estudiante, al curso o al nivel de aprendizaje. El diseño de la tarea debe contemplar el tipo de argumentación y construcción que el profesor desea que el estudiante experimente.

Además, en el diseño se debe tener en cuenta, puntualmente, los siguientes elementos: interacción, normas socio-matemáticas, materiales y recursos, temporalidad, agrupamiento, caracterización de la población, y reconocimiento de dificultades que pueda presentar o que presenta el estudiante para hacer uso de un recurso o para realizar el desarrollo de la tarea. La interacción hace referencia a especificar el tipo de relación y de trabajo que se desarrollará tanto con los compañeros, como con el profesor y con los recursos. Las normas socio-matemáticas hacen referencia a los acuerdos matemáticos que se estipulan entre el profesor y los estudiantes, por ejemplo, que el número 0 hace parte, o no, del conjunto de los números naturales. Los materiales y recursos hacen referencia a la especificación del uso de herramientas tanto tecnológicas como no tecnológicas que los estudiantes deben considerar para el desarrollo de la tarea. La temporalidad hace referencia a la especulación sobre el tiempo que debe tardar el estudiante en desarrollar la tarea y/o al tiempo que él tiene para

hacer el respectivo desarrollo, es decir, el tiempo que el profesor considera que el estudiante tarda en dar solución a la tarea propuesta y el tiempo que finalmente él les da para desarrollarla. El agrupamiento tiene que ver con la especificidad de si la tarea propuesta se desarrolla de forma individual, grupal o con el apoyo del profesor. La caracterización de la población está enfocada en reconocer y determinar, específicamente, a qué población va dirigida la tarea con categorías como: edad, tipo de educación, institución, grado actual, u otra que se considere que es una característica que describe a quienes va dirigida la tarea. El reconocimiento de dificultades tiene como objetivo el crear estrategias que permitan superar las dificultades y que se pueda desarrollar la tarea sin algún impedimento.

Entornos de Geometría Dinámica

Los entornos de geometría dinámica son programas que permiten la construcción y visualización de objetos geométricos y, a partir de ello, la exploración, verificación y conjeturación de propiedades, de dicho objeto geométrico, por medio de la interacción entre el estudiante y el recurso. Al ser un recurso, permite también la comprensión y resolución de problemas propuestos para el desarrollo de la tarea, por medio de las herramientas que él ofrece, como, por ejemplo: medir ángulos, crear un punto, trazar una recta, el arrastre, entre otras. En los entornos de geometría dinámica es posible realizar dos tipos de construcciones: las robustas y las blandas. Las construcciones robustas son aquellas que al hacer uso de la herramienta arrastre se mantiene las propiedades exigidas del objeto geométrico. Las construcciones blandas son las que evidencia una sujeción entre elementos del objeto geométrico, es decir, una dependencia; por ejemplo, que, si se cambia el radio de una circunferencia, cambiará proporcionalmente e inmediatamente su área y su perímetro.

Considero que UltraFractal5 no es un EGD dado que, respecto a todas las características atribuidas a un EGD, no conozco que cumpla con la característica de permitir crear. Esto lo afirmo, reconociendo que no soy experta con el software y debido a que nunca me fue posible iniciar un fractal desde cero; es decir, siempre debía seleccionar uno base que ofrece el programa y a partir de él comenzar la exploración y conjeturación.

Argumentación / Argumento

El argumento es la afirmación que trae un respaldo teórico o empírico. Este argumento se crea a partir del conocimiento y la comprensión de axiomas, teoremas, corolarios, lemas y proposiciones, y/o a partir de evidencia obtenida de una construcción, una exploración o la visualización de un determinado objeto geométrico. Tiene como función la verificación de conjeturas a partir de unos elementos dados, unos supuestos y una conclusión.

La argumentación está ligada a responder a la pregunta: ¿por qué?, y esta se responde a partir de la unión lógica y coherente de argumentos, tanto de forma inductiva como deductiva; así, la argumentación se puede entender como una demostración. La argumentación tiene como función validar, un teorema, un corolario, un lema o una proposición, o rechazar una afirmación; y los argumentos de los que hace uso la argumentación viene de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración.

Anexo 14: Datos Momento 6 - Michael

A continuación, doy cuenta de mi conocimiento actual sobre los asuntos, diseño de tareas, EGD y argumentación una vez terminada el análisis de Hali para los Momentos 2 y 4.

Diseño de Tareas

Tarea es la solicitud que hace el profesor a los estudiantes con un propósito específico y actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante. Durante el diseño de una tarea el profesor debe considerar siete elementos que permiten describir a profundidad la tarea: requisitos (determinar el conjunto de conocimientos previos que permiten abordar la tarea) , meta (propósito de la tarea), formulación (texto en el que el profesor proporciona a los estudiantes la tarea que deben resolver), materiales y recursos (cualquier medio, tecnológico o no, que se utilice para resolver una tarea), agrupamiento (determinación de cómo realizar la tarea, individual, pareja, grupo pequeño), formas de interacción (entendidas como las distintas formas en que se relacionan y comunican los diferentes actores en el aula: profesor, estudiante, pareja, grupos de clase, etc.) y temporalidad (determinación del tiempo y los modos en los que se va a resolver la tarea, un primer momento individual, luego en grupos, etc.).

El profesor debe tener conocimiento del tema que va tratar y distintas herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan diseñar la tarea y justificar por qué ese diseño permite alcanzar las expectativas de aprendizaje trazadas y superar determinadas limitaciones. La función de la tarea es ser un medio que promueve el aprendizaje, la exploración y la conjeturación. Una vez diseñada la tarea esta se debe probar, evaluar y ajustar en caso de ser necesario.

Entornos de Geometría Dinámica

Los EGD son herramientas tecnológicas, creadas bajo los principios de la geometría euclidiana, que permiten a quien los use representar, construir, modificar y verificar propiedades geométricas. Promueven la interacción con objetos geométricos nuevos o predeterminados a partir de los comandos y características propias del entorno. Son un medio que promueve la conjeturación, visualización, aporta a la resolución de problemas abiertos y al aprendizaje de la argumentación ya que a partir su dinamismo es posible considerar diferentes casos de una determinada situación cuando se aborda una tarea, lo cual favorece la producción de argumentos de diversos tipos. Ejemplos de EGD son: GeoGebra, Cabri Geometry y, Regla y Compás.

A partir de su uso se reconocen las construcciones robustas y las construcciones blandas. Las robustas son aquellas que resuelven el problema de forma general, es decir, que, aunque se realice un arrastre de algún punto de la figura, está siempre mantiene las propiedades geométricas esperadas. Las blandas, al realizar un arrastre, no conservan las propiedades esperadas dada la forma en que se construyeron por lo que podrían resolver tan solo un caso específico del problema que se está resolviendo.

Argumentación y argumento

Argumentación es un proceso comunicativo en el que se producen argumentos a partir de un conjunto de reglas compartidas por una comunidad de aprendizaje. La argumentación permite reconocer, rastrear y validar evidencias de los razonamientos realizados durante la resolución de un determinado problema. Tiene como finalidad, persuadir, contrastar o sustentar ideas con el ánimo de convencer a un grupo de personas. La exploración, conjetura y demostración son partes fundamentales del proceso de argumentación entendiendo que a través de este se desarrollan habilidades de abstracción, análisis, síntesis, comparación, clasificación, particularización y generalización.

El argumento es el producto del proceso de argumentación, tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y dato) y se produce de forma oral o escrita. La aserción es una proposición que plantea una postura, una afirmación u opinión. El dato es la información que da fundamento a la aserción o afirmación y la garantía es el soporte de la aserción mediante uno o varios elementos de un determinado sistema teórico.

Hay diferentes tipos de argumentos estos son: inductivo, deductivo, y abductivo. La función de los argumentos es que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o falsedad de una declaración.

Anexo 15: Tipificación de los Datos del Momento 6 de Hali con las Categorías de Caracterización del Conocimiento.

Asunto	Momento 6
DT	<p>Tarea es la actividad que realiza el profesor y que él propone a los estudiantes [NT] para que ellos <u>exploren, consoliden conocimientos, desarrollen ideas, hagan conjeturas, desarrollen habilidades para el uso de algoritmos y, afiancen la representación de situaciones en las que se crea un objeto geométrico y la comprensión de objetos geométricos involucrados en esas situaciones por medio de la interacción de recursos [FT] usuales como: regla, compás, transportador, etc., o de recursos tecnológicos como los softwares de geometría dinámica. Entendiendo <u>interacción</u> [NT] como la relación de trabajo entre el estudiante y el recurso. El diseño de una tarea tiene como <u>objetivo</u> facilitar todo lo anteriormente mencionado, además de unos objetivos específicos ligados al estudiante, al curso o al nivel de aprendizaje. El diseño de la tarea debe contemplar el tipo de argumentación [FT] y construcción que el profesor desea que el estudiante experimente. [PDT]</u></p> <p>Además, en el diseño se debe tener en cuenta, puntualmente, los siguientes elementos: interacción, normas socio-matemáticas, materiales y recursos, temporalidad, agrupamiento, caracterización de la población, y reconocimiento de dificultades que pueda presentar o que presenta el estudiante para hacer uso de un recurso o para realizar el desarrollo de la tarea. La interacción hace referencia a especificar el tipo de relación y de trabajo que se desarrollará tanto con los compañeros, como con el profesor y con los recursos. Las normas socio-matemáticas hacen referencia a los acuerdos matemáticos que se estipulan entre el profesor y los estudiantes, por ejemplo, que el número 0 hace parte, o no, del conjunto de los números naturales. Los materiales y recursos hacen referencia a la especificación del uso de herramientas tanto tecnológicas como no tecnológicas que los estudiantes deben considerar para el desarrollo de la tarea. La temporalidad hace referencia a la especulación sobre el tiempo que debe tardar el estudiante en desarrollar la tarea y/o al tiempo que él tiene para hacer el respectivo desarrollo, es decir, el tiempo que el profesor considera que el estudiante tarda en dar</p>

solución a la tarea propuesta y el tiempo que finalmente él les da para desarrollarla. El agrupamiento tiene que ver con la especificidad de si la tarea propuesta se desarrolla de forma individual, grupal o con el apoyo del profesor. La caracterización de la población está enfocada en reconocer y determinar, específicamente, a qué población va dirigida la tarea con categorías como: edad, tipo de educación, institución, grado actual, u otra que se considere que es una característica que describe a quienes va dirigida la tarea. El reconocimiento de dificultades tiene como objetivo el crear estrategias que permitan superar las dificultades y que se pueda desarrollar la tarea sin algún impedimento. [PDT]

EGD

Los entornos de geometría dinámica son programas que permiten la construcción y visualización de objetos geométricos [Negd] y, a partir de ello, la exploración, verificación y conjeturación de propiedades [Negd], de dicho objeto geométrico, por medio de la interacción entre el estudiante y el recurso. Al ser un recurso, permite también la comprensión y resolución de problemas propuestos para el desarrollo de la tarea, por medio de las herramientas que él ofrece [Fegd], como, por ejemplo: medir ángulos, crear un punto, trazar una recta, el arrastre, entre otras. En los entornos de geometría dinámica es posible realizar dos tipos de construcciones: las robustas y las blandas [Negd]. Las construcciones robustas son aquellas que al hacer uso de la herramienta arrastre se mantiene las propiedades exigidas del objeto geométrico. Las construcciones blandas son las que evidencia una sujeción entre elementos del objeto geométrico, es decir, una dependencia; por ejemplo, que, si se cambia el radio de una circunferencia, cambiará proporcionalmente e inmediatamente su área y su perímetro. [Negd]

Considero que UltraFractal5 no es un EGD [Negd] dado que, respecto a todas las características atribuidas a un EGD, no conozco que cumpla con la característica de permitir crear [Negd]. Esto lo afirmo, reconociendo que no soy experta con el software y debido a que nunca me fue posible iniciar un fractal desde cero; es decir, siempre debía seleccionar uno base que ofrece el programa y a partir de él comenzar la exploración y conjeturación [Negd].

La argumentación está ligada a responder a la pregunta: ¿por qué?, y esta se responde a partir de la unión lógica y coherente de argumentos, tanto de forma inductiva como deductiva; así, la argumentación se puede entender como una demostración [NAr]. La argumentación tiene como función validar, un teorema, un corolario, un lema o una proposición, o rechazar una afirmación [FAr]; y los argumentos de los que hace uso la argumentación viene de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración [NAr].

Arg/

Ar

El argumento es la afirmación que trae un respaldo teórico o empírico. Este argumento se crea a partir del conocimiento y la comprensión de axiomas, teoremas, corolarios, lemas y proposiciones, y/o a partir de evidencia obtenida de una construcción, una exploración o la visualización de un determinado objeto geométrico [NArg].

Los argumentos de los que hace uso la argumentación vienen de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración [NArg]

Tiene como función la verificación de conjeturas a partir de unos elementos dados, unos supuestos y una conclusión [FArg].

Anexo 16: Tipificación de los Datos del Momento 6 de Michael con las Categorías de Caracterización del Conocimiento.

Asunto	Momento 6
DT	<p>Tarea es la solicitud que hace el profesor a los estudiantes con un propósito específico y actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante [NT]. Durante el diseño de una tarea el profesor debe considerar siete elementos que permiten describir a profundidad la tarea: requisitos (determinar el conjunto de conocimientos previos que permiten abordar la tarea) , meta (propósito de la tarea), formulación (texto en el que el profesor proporciona a los estudiantes la tarea que deben resolver), materiales y recursos (cualquier medio, tecnológico o no, que se utilice para resolver una tarea), agrupamiento (determinación de cómo realizar la tarea, individual, pareja, grupo pequeño), formas de interacción (entendidas como las distintas formas en que se relacionan y comunican los diferentes actores en el aula: profesor, estudiante, pareja, grupos de clase, etc.) y temporalidad (determinación del tiempo y los modos en los que se va a resolver la tarea, un primer momento individual, luego en grupos, etc.) [PDT]. El profesor debe tener conocimiento del tema que va a tratar y distintas herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan diseñar la tarea y justificar por qué ese diseño permite alcanzar las expectativas de aprendizaje trazadas y superar determinadas limitaciones [PDT]. La función de la tarea es ser un medio que promueve el aprendizaje, la exploración y la conjeturación. Una vez diseñada la tarea esta se debe probar, evaluar y ajustar en caso de ser necesario [FT].</p>
EGD	<p>Los EGD son herramientas tecnológicas, creadas bajo los principios de la geometría euclidiana, que permiten a quien los use representar, construir, modificar y verificar propiedades geométricas [Negd]. Ejemplos de EGD son: GeoGebra, Cabri Geometry y, Regla y Compás [Negd]. Promueven la interacción con objetos geométricos nuevos o predeterminados a partir de los comandos y características propias del entorno [Fegd]. Son un medio que promueve la conjeturación, visualización, aporta a la resolución de problemas abiertos y al aprendizaje de la argumentación ya que a partir su dinamismo es</p>

posible considerar diferentes casos de una determinada situación cuando se aborda una tarea, lo cual favorece la producción de argumentos de diversos tipos [Fegd].

A partir de su uso se reconocen las construcciones robustas y las construcciones blandas. Las robustas son aquellas que resuelven el problema de forma general, es decir, que, aunque se realice un arrastre de algún punto de la figura, está siempre mantiene las propiedades geométricas esperadas [Negd]. Las blandas, al realizar un arrastre, no conservan las propiedades esperadas dada la forma en que se construyeron por lo que podrían resolver tan solo un caso específico del problema que se está resolviendo [Negd].

Argumentación es un proceso comunicativo en el que se producen argumentos a partir de un conjunto de reglas compartidas por una comunidad de aprendizaje [NArg]. La argumentación permite reconocer, rastrear y validar evidencias de los razonamientos realizados durante la resolución de un determinado problema. Tiene como finalidad, persuadir, contrastar o sustentar ideas con el ánimo de convencer a un grupo de personas [FArg]. La exploración, conjetura y demostración son partes fundamentales del proceso de argumentación entendiendo [NArg] que a través de este se desarrollan n habilidades de abstracción, análisis, síntesis, comparación, clasificación, particularización y generalización [FArg].

Arg/

Ar

El argumento es el producto del proceso de argumentación, tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y dato) y se produce de forma oral o escrita [NAr]. La aserción es una proposición que plantea una postura, una afirmación u opinión. El dato es la información que da fundamento a la aserción o afirmación y la garantía es el soporte de la aserción mediante uno o varios elementos de un determinado sistema teórico [NAr].

Hay diferentes tipos de argumentos estos son: inductivo, deductivo, y abductivo [NAr].

La función de los argumentos es que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o falsedad de una declaración [FAr].

**Anexo 17: Tipificación del Conocimiento de Hali para el Momento 6 a partir de las
Categorías Emergentes de Transformación**

Asunto	Producto del análisis	Momento 6
<p>DT</p>	<p>La tarea es la solicitud que hace el profesor a los estudiantes con un propósito específico y requiere el uso de EGD para resolverla. La actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante.</p> <p>INR</p> <p>Los elementos que considera son parte de la planeación de una tarea están: descripción de la población, metas, objetivos, tiempos, materiales y recursos y, reconocimiento del manejo de estos. <u>Además, antes de iniciar el diseño el profesor debe elegir el tema de la tarea y saber por qué y para qué la diseña. También debe tener el conocimiento del tema sobre el cual va a tratar la tarea, del recurso que va a usar y del proceso que pretende favorecer. Una vez concluido el proceso de planeación de la tarea esta se debe probar para evaluarla y ajustarla en caso de ser necesario.</u></p> <p>Dentro de las funciones de la tarea están: promueve la exploración, la producción de argumentos y aporta al aprendizaje de un tema en particular.</p>	<p>Tarea es la actividad que realiza el profesor y que él propone a los estudiantes [MCt] para que ellos <u>exploren, consoliden conocimientos, desarrollen ideas, hagan conjeturas, desarrollen habilidades para el uso de algoritmos y, afiancen la representación de situaciones en las que se crea un objeto geométrico y la comprensión de objetos geométricos involucrados en esas situaciones por medio de la interacción de recursos</u> usuales como: regla, compás, transportador, etc., o de recursos tecnológicos como los softwares de geometría dinámica. Entendiendo <u>interacción</u> [NC] como la relación de trabajo entre el estudiante y el recurso. El diseño de una tarea tiene como <u>objetivo</u> facilitar todo lo anteriormente mencionado, además de unos objetivos específicos ligados al estudiante, al curso o al nivel de aprendizaje [NM]. El diseño de la tarea debe contemplar el tipo de argumentación y construcción que el profesor desea que el estudiante experimente [NC].</p> <p>Además, en el diseño se debe tener en cuenta, puntualmente, los siguientes elementos: interacción, normas socio-matemáticas, materiales y recursos, temporalidad, agrupamiento, caracterización de la población, y reconocimiento de dificultades que pueda presentar o que presenta el estudiante para hacer uso de un recurso o para realizar el desarrollo de la tarea [NC]-</p>

[MCa]. La interacción hace referencia a especificar el tipo de relación y de trabajo que se desarrollará tanto con los compañeros, como con el profesor y con los recursos. Las normas socio-matemáticas hacen referencia a los acuerdos matemáticos que se estipulan entre el profesor y los estudiantes, por ejemplo, que el número 0 hace parte, o no, del conjunto de los números naturales. Los materiales y recursos hacen referencia a la especificación del uso de herramientas tanto tecnológicas como no tecnológicas que los estudiantes deben considerar para el desarrollo de la tarea [NC]. La temporalidad hace referencia a la especulación sobre el tiempo que debe tardar el estudiante en desarrollar la tarea y/o al tiempo que él tiene para hacer el respectivo desarrollo, es decir, el tiempo que el profesor considera que el estudiante tarda en dar solución a la tarea propuesta y el tiempo que finalmente él les da para desarrollarla. El agrupamiento tiene que ver con la especificidad de si la tarea propuesta se desarrolla de forma individual, grupal o con el apoyo del profesor. La caracterización de la población está enfocada en reconocer y determinar, específicamente, a qué población va dirigida la tarea con categorías como: edad, tipo de educación, institución, grado actual, u otra que se considere que es una característica que describe a quienes va dirigida la tarea. El reconocimiento de dificultades tiene como objetivo el crear estrategias que permitan superar las dificultades y que se pueda desarrollar la tarea sin algún impedimento.

Los EGD son herramientas tecnológicas que permiten crear y modificar figuras geométricas. Además, las considera como una herramienta de exploración que facilita la conjeturación. El manejo de los EGD permite realizar dos tipos de construcciones, las robustas y las blandas. Las robustas que son aquellas que permiten hacer una comprobación de condiciones y las blandas que son establece una relación entre las condiciones y las consecuencias de un teorema. Finalmente, considera que a GeoGebra como ejemplo de EGD.

EGD

Dentro de las funciones de los EGD están: aporta al aprendizaje de la argumentación y motiva la exploración ya que permite modificar, crear, mover y transformar objetos geométricos. Son un medio que aporta a la visualización, comprensión y resolución de problemas y, favorecen la conjeturación y demostración. Además, su uso genera impacto en los estudiantes **INR**

Los entornos de geometría dinámica son programas que permiten la construcción y visualización de objetos geométricos y, a partir de ello, la exploración, verificación y conjeturación de propiedades, de dicho objeto geométrico, por medio de la interacción entre el estudiante y el recurso **[NM]**. Al ser un recurso, permite también la comprensión y resolución de problemas propuestos para el desarrollo de la tarea, por medio de las herramientas que él ofrece, como, por ejemplo: medir ángulos, crear un punto, trazar una recta, el arrastre, entre otras **[NC]**. En los entornos de geometría dinámica es posible realizar dos tipos de construcciones: las robustas y las blandas. Las construcciones robustas son aquellas que al hacer uso de la herramienta arrastre se mantiene las propiedades exigidas del objeto geométrico. Las construcciones blandas son las que evidencia una sujeción entre elementos del objeto geométrico, es decir, una dependencia; por ejemplo, que, si se cambia el radio de una circunferencia, cambiará proporcionalmente e inmediatamente su área y su perímetro **[MCa]**.

Considero que UltraFractal5 no es un EGD dado que, respecto a todas las características atribuidas a un EGD, no conozco que cumpla con la característica de permitir crear. Esto lo afirmo, reconociendo que no soy experta con el software y debido a que nunca me fue posible iniciar un fractal desde cero; es decir, siempre debía seleccionar uno base que ofrece el programa y a partir de él comenzar la exploración y conjeturación **[NC]**.

Arg

La **argumentación** es secuencia de argumentos aceptados por la comunidad. Es un proceso cuyo producto es un discurso o una justificación. Argumentación, argumentar y demostrar son considerados sinónimos. Por su parte, argumentar es un proceso que consta de una serie de pasos. La conjetura y la verificación son partes fundamentales del proceso de argumentación.

En cuanto a la función de argumento y de argumentación considera la misma para ambos términos: determinar la veracidad de algo particular y permitir a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de otros.

La argumentación está ligada a responder a la pregunta: ¿por qué?, y esta se responde a partir de la unión lógica y coherente de argumentos [NC], tanto de forma inductiva como deductiva; así, la argumentación se puede entender como una demostración. La argumentación tiene como función validar, un teorema, un colorario, un lema o una proposición, o rechazar una afirmación; y los argumentos de los que hace uso la argumentación viene de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración.

[NM]

Ar

El **argumento** hace parte de los objetos primarios del proceso de argumentación, tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y datos) y una estructura lógica según el tipo de argumento que sea (deductivo, abductivo, inductivo y analógico).

La función del argumento es determinar la veracidad de algo particular y permitir a los estudiantes transmitir sus ideas, defenderlas y contrastarlas con las de otros. INR

El argumento es la afirmación que trae un respaldo teórico o empírico. Este argumento se crea a partir del [NC] conocimiento y la comprensión de axiomas, teoremas, corolarios, lemas y proposiciones, y/o a partir de evidencia obtenida de una construcción, una exploración o la visualización de un determinado objeto geométrico. [MCt]

Los argumentos de los que hace uso la argumentación vienen de procesos de aprendizaje obtenidos teóricamente o por medio de la exploración

Tiene como función la verificación de conjeturas a partir de unos elementos dados, unos supuestos y una conclusión. [MCt]

Anexo 18: Tipificación del Conocimiento de Michael para el Momento 6 a partir de las Categorias Emergentes de Transformación

Asunto	Producto del análisis	Momento 6
<p>DT</p>	<p>La tarea es una actividad acompañada de unas preguntas que guían el uso de un recurso como GeoGebra. Hay una relación entre el tipo de tarea y el tipo de argumento que pueda surgir en la solución de una tarea. Es importante permitir el acercamiento al manejo del recurso para asegurar el conocimiento de las herramientas que éste ofrece y que son necesarias. Para el diseño de una tarea se debe considerar elementos como: temporalidad, interacción, materiales y recursos, agrupamiento, caracterización de la población, las normas socio-matemáticas y el reconocimiento de las dificultades que pueden tener los estudiantes para el manejo de GeoGebra. Las tareas que se deben presentar a los estudiantes deben estar enfocadas en la exploración, para que el uso del recurso realmente aporte a la solución de la tarea. Hay diferentes recursos como: EGD, lápiz y papel, y materiales que se puedan llevar a la clase (hojas, regla, compás, etc) INR.</p>	<p>Tarea es la solicitud que hace el profesor a los estudiantes [MCt] con un propósito específico [MCr] y actividad es el desarrollo de la tarea o la acción que hace con la tarea el estudiante. [MCt] Durante el diseño de una tarea el profesor debe considerar siete elementos que permiten describir a profundidad la tarea: requisitos (determinar el conjunto de conocimientos previos que permiten abordar la tarea) , meta (propósito de la tarea), formulación (texto en el que el profesor proporciona a los estudiantes la tarea que deben resolver), materiales y recursos (cualquier medio, tecnológico o no, que se utilice para resolver una tarea), agrupamiento (determinación de cómo realizar la tarea, individual, pareja, grupo pequeño), formas de interacción (entendidas como las distintas formas en que se relacionan y comunican los diferentes actores en el aula: profesor, estudiante, pareja, grupos de clase, etc.) y temporalidad (determinación del tiempo y los modos en los que se va a resolver la tarea, un primer momento individual, luego en grupos, etc.). [MCa]</p> <p>El profesor debe tener conocimiento del tema que va a tratar y distintas herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan diseñar la tarea y justificar por qué ese diseño permite alcanzar las</p>

<p>La función de la tarea es ser un medio que permite la conceptualización de alguna noción matemática INR.</p>	<p>expectativas de aprendizaje trazadas y superar determinadas limitaciones [NC]. La función de la tarea es ser un medio que promueve el aprendizaje, la exploración y la conjeturación [MCt]. Una vez diseñada la tarea esta se debe probar, evaluar y ajustar en caso de ser necesario. [NC]</p>
<p>EGD</p> <p>Un software de geometría dinámica es un software que dota de dinamismo a las representaciones de un objeto geométrico. Los programas de geometría dinámica son un medio para la realización de representaciones de objetos geométricos 2D y 3D. Los EGD permiten graficar, explorar, conjeturar y verificar inferencias y propiedades de los objetos geométricos, lo que favorece el proceso de exploración y conjeturación. Las construcciones robustas son aquellas para las cuales, al hacer el arrastre, se conservan las propiedades del objeto geométrico y son las que incluyen todas las posibilidades de la situación presentada, lo que permite resolver el problema dado; el arrastre en EGD posibilita visualizar los invariantes en un objeto geométrico INR. Las construcciones blandas permiten</p>	<p>Los EGD son herramientas tecnológicas, creadas bajo los principios de la geometría euclidiana, que permiten a quien los use representar, construir, modificar y verificar propiedades geométricas [MCa]. Ejemplos de EGD son: GeoGebra, Cabri Geometry y, Regla y Compás [MCa]. Promueven la interacción con objetos geométricos nuevos o predeterminados a partir de los comandos y características propias del entorno [MCa]. Son un medio que promueve la conjeturación, visualización, aporta a la resolución de problemas abiertos y al aprendizaje de la argumentación ya que a partir su dinamismo es posible considerar diferentes casos de una determinada situación cuando se aborda una tarea, lo cual favorece la producción de argumentos de diversos tipos [MCa].</p> <p>A partir de su uso se reconocen las construcciones robustas y las construcciones blandas. Las robustas son aquellas que resuelven el problema de forma general, es decir, que, aunque se realice un arrastre de algún punto de la figura, está siempre mantiene las propiedades geométricas esperadas [PC]. Las blandas, al realizar un arrastre, no conservan las</p>

<p>identificar relaciones de dependencia y son parte del proceso de exploración durante la resolución de tareas.</p>	<p>propiedades esperadas dada la forma en que se construyeron por lo que podrían resolver tan solo un caso específico del problema que se está resolviendo [MCt].</p>
<p>La argumentación es sinónimo de razonamiento. La argumentación es la justificación de una respuesta dada a un problema o a una pregunta planteada. La utilidad de la argumentación en la enseñanza se debe a que permite que los estudiantes transmitan sus ideas, las defiendan y las contrasten con las de los demás.</p> <p>El argumento tiene una estructura ternaria, como lo indica el Modelo de Toulmin, que tiene como elementos: una aserción, una garantía y unos datos. El argumento es lo que se dice para validar una idea que se tiene en mente. Hay argumentos inductivos y deductivos. El argumento inductivo está asociado con la búsqueda de consecuente en la estructura terciaria y también con la inducción matemática, por la similitud en las palabras; un argumento es deductivo si se basa en un sistema axiomático INR.</p> <p>La demostración es una justificación o una validación teórica de una conjetura</p>	<p>Argumentación es un proceso comunicativo [MCt] en el que se producen argumentos a partir de un conjunto de reglas compartidas por una comunidad de aprendizaje [NC]. La argumentación permite reconocer, rastrear y validar evidencias de los razonamientos realizados durante la resolución de un determinado problema [NC]. Tiene como finalidad, persuadir, contrastar o sustentar ideas con el ánimo de convencer a un grupo de personas.</p> <p>La exploración, conjetura y demostración son partes fundamentales del proceso de argumentación entendiendo que a través de este se desarrollan habilidades de abstracción, análisis, síntesis, comparación, clasificación, particularización y generalización [MCa].</p> <p>El argumento es el producto del proceso de argumentación [NC], tiene una estructura ternaria (aserción, garantía y dato) y se produce de forma oral o escrita [NC]. La aserción es una proposición que plantea una postura, una afirmación u opinión. El dato es la información que da fundamento a la aserción o afirmación y la garantía es el soporte de la aserción mediante uno o varios elementos de un determinado sistema teórico [MCa].</p>

Arg/
Ar

y es también como un gran argumento que se puede presentar por párrafos **INR**. Los argumentos informales son aquellos que surgen en el proceso de exploración, en particular cuando se discuten las características entre las partes que componen una construcción blanda (figura representada).

Las funciones del argumento son: la verificación, el descubrimiento, la explicación, la comunicación, persuadir y el desafío.

Hay diferentes tipos de argumentos estos son: inductivo, deductivo, y abductivo **[MCr]**. La función de los argumentos es que las personas sean capaces de eliminar sus dudas acerca de la verdad o falsedad de una declaración **[MCt]**.

**Anexo 19: Consentimiento informado para el uso del nombre de la Maestría en Docencia
de la Matemática**