MATE - MUSEO: PROPUESTA DIGITAL INTERACTIVA SOBRE LAS HEURÍSTICAS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

CONTRERAS GARCÍA BRAYAN FELIPE

GRANADOS CERINZA ASHLEY DANIELA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D. C.

2022

MATE - MUSEO: PROPUESTA DIGITAL INTERACTIVA SOBRE LAS HEURÍSTICAS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Trabajo presentado como requisito para optar por el título de Licenciados en Matemáticas

CONTRERAS GARCÍA BRAYAN FELIPE

Código 2017140021

GRANADOS CERINZA ASHLEY DANIELA

Código 2017140033

Asesor:

Mg. CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D. C.

2022

Dedico este trabajo a mis tías, Isabel García y Leydy Contreras; a mi mamá Magaly Contreras; a mi tío Alfonso Salgado; a mi abuelo Isidro Contreras; a mis primas Luisa Salgado y Mariana Salgado. A Ashley, por haber sido un pilar en mi vida desde el inicio de la carrera.

Brayan Contreras

Dedico este trabajo a mis padres, María Cerinza y Jorge Granados; a mi hermana, Brigitte González; y a mi sobrina, Sofia Garavito. A Manchas, Molly y Leona, grandes amigas mejores mascotas. A Brayan, mi pareja en más de un sentido.

Ashley Granados

Agradecimientos

Queremos agradecer a **los docentes** que alguna vez nos enseñaron, dentro o fuera de las aulas, a ser buenos profesores, buenas personas y buenos amigos. Ya sea relacionados con la Universidad Pedagógica Nacional o no, llevamos en nuestra memoria y futura labor docente todo aquello que con tanto empeño nos instruyeron.

A nuestros **amigos y familiare**s. Aquellos que no nos permitieron decaer, que se tomaron el tiempo de escucharnos aún si no nos hacíamos entender, que celebraron con júbilo nuestras victorias, que jugaban con nosotros a ser investigadores, que dieron con nosotros más pasos de los que quizá son conscientes. Damos las gracias a los silentes participantes de este proceso, a quienes nos dieron un abrazo, un aliento, una risa cuando más lo necesitábamos. Con quienes compartimos ideas, desvaríos, anécdotas, pesares y tintos.

Queremos agradecer, en especial, al **profesor César Rendon**. Un excelente docente y asesor que nos enseñó el maravilloso mundo de la Historia de las Matemáticas – en más de un espacio académico – de tal forma que terminamos en unir fuerzas para el desarrollo de un trabajo de grado. Fueron su guía, aliento y consideraciones las que no sólo permitieron dar vida a esta idea sino también la consolidación de este equipo de trabajo.

Por último, estamos en eterna deuda con aquellos sin los cuales la revisión documental y el desarrollo del Museo no sería posible, a todos los autores, traductores, copistas, escribas y, en general, a todos(as) los(as) tenaces y valientes que invirtieron tiempo y dedicación a favor del saber, de la educación, de la conservación de un longevo legado para las futuras generaciones. A esos que siguieron las reglas o las rompieron para que, hoy en día, se pueda estudiar aquello que ya fue estudiado antes.

RESUMEN

Este trabajo de grado se enfoca en las heurísticas – especialmente desde las Historia de las Matemáticas – identificándolas y catalogándolas según las etapas históricas de la humanidad, para después diseñar actividades e implementarlas en el Museo Interactivo Digital. Este documento hace las veces de sustento teórico para el Museo Interactivo Digital, un entorno tridimensional desarrollado en Unity en el que se exponen las heurísticas seleccionadas ya sea como exhibiciones estáticas o como actividades en las que el usuario puede interactuar.

Palabras clave: Heurística, Historia de las Matemáticas, Estrategia, entorno tridimensional.

ABSTRACT

This document focuses on heuristics – especially from the History of Mathematics – identifying and cataloging them according to the historical stages of humanity and then designing activities and implementing them in the Interactive Digital Museum. This document serves as theoretical support for the Digital Interactive Museum, a three-dimensional environment developed in Unity in which the selected heuristics are exposed either as static displays or as activities in which the user can interact.

Keywords: *Heuristics, History of Mathematics, Strategy, three-dimensional environment.*

Contenido

Índice de ilustraciones

1. Preliminares

1.1. Introducción

En este documento se detalla la propuesta de trabajo de grado que consiste en el diseño de un Museo Interactivo Digital (MID) sobre heurísticas de las Matemáticas, el cual se bifurca en dos ámbitos tan disyuntos como complementarios: una revisión documental sobre las heurísticas surgidas a lo largo de la Historia de las Matemáticas y el desarrollo de un entorno tridimensional interactivo en el que se exponen dichas heurísticas.

Para los propósitos de este trabajo, la Heurística se entiende como la disciplina encargada de estudiar la elaboración, funcionamiento y resultado de estrategias para la resolución de problemas. A lo largo de la historia, la humanidad se ha encontrado con más de un problema – en cualquier ámbito – cuya solución requirió de una nueva visión, de teorías experimentales o del esfuerzo mancomunado de múltiples sabios en distintos tiempos que a su manera aportaron para esta (Asimov, 1999). En especial, para las Matemáticas se tienen registros que datan de varios milenios atrás, en los que – aunque existían lagunas conceptuales o faltaba rigor matemático – se observan importantes avances en un campo más bien experimental. Por otra parte, las heurísticas se entienden como las estrategias particulares que se han diseñado para la resolución de problemas[1].

Las heurísticas identificadas después de una revisión documental a la Historia de las Matemáticas se exponen en el Museo Interactivo Digital – un entorno tridimensional desarrollado en Unity – ya sea como una actividad o como un elemento del entorno[2], el cual está pensado, principalmente, como una herramienta de apoyo docente que compila diversas estrategias para la resolución de problemas que permitan ampliar la visión del proceso de Enseñanza y Aprendizaje asociado a varios conceptos matemáticos. En ese sentido, el MID no debe entenderse como una clase o una actividad educativa por sí sola, es el docente quien debe estudiarlo y generar su propia estrategia según las necesidades educativas de sus estudiantes. El conjunto de actividades propuesto por los Maestros en Formación puede ser de ayuda para tal propósito.

---

[1] Los términos heurística y Heurística fueron objeto de análisis en una primera etapa de la elaboración de este trabajo. Una disertación más extensa del asunto se presenta en el capítulo 2.
[2] Esta clasificación se detalla en los subcapítulos 5.1 y 5.2.

En el primer capítulo del trabajo de grado se detallan la justificación y los objetivos que encaminaron el desarrollo de esta propuesta. Este trabajo se justificó esencialmente desde tres ámbitos: la Historia de las Matemáticas, desde la utilidad para la enseñanza y aprendizaje para el rol del estudiante como del docente; el apartado tecnológico en el que se explaya en la importancia de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, así como los puntos para tener en cuenta al implementarlas; y el Museo Interactivo Digital, una descripción general sobre este como recurso educativo y la pertinencia de su desarrollo. Por otro lado, los objetivos orientan este trabajo como una revisión documental de las heurísticas en la Historia de las Matemáticas para la posterior implementación de objetos concretos que permitan la recreación de estas en un entorno tridimensional.

En el segundo capítulo se caracteriza el concepto de Heurística desde la mirada de varios autores, señalando las particularidades según las investigaciones de cada uno, para finalizar en la construcción de una definición propia que respondiera apropiadamente a las necesidades del desarrollo del MID.

En el tercer capítulo se presentan los resultados de la revisión documental del concepto de Heurística en la Historia de las Matemáticas, clasificada primeramente según las etapas históricas del desarrollo humano y después según las particularidades de cada una. Para cada etapa primero se describe sucintamente el contexto histórico y luego se explaya en las heurísticas seleccionadas tanto desde la Historia como desde las Matemáticas.

En el cuarto capitulo se tratan los aspectos tanto metodológicos como tecnológicos. Primeramente, se relatan *grosso modo* los aspectos metodológicos para el desarrollo de este trabajo de grado, describiéndose etapas como la búsqueda de información en distintas fuentes, la revisión del concepto de Heurística, la selección de Heurísticas en la HM, la elaboración de actividades, el diseño y construcción del MID. A continuación, se describe el *software* empleado, así como otros programas complementarios empleados en el desarrollo del Museo. Además, se especifican los requisitos técnicos para el correcto funcionamiento del MID en un computador.

En el quinto capitulo se tiene un enfoque en los componentes del MID, inicialmente se detallan el conjunto de cinco actividades y los elementos del entorno exhibidos en el Museo. Por su parte, en las actividades el usuario debe interactuar con distintas herramientas digitales para resolver una situación empleando una heurística en particular. Por otro lado, los elementos del entorno son objetos con la función de exponer sucintamente información relacionada con el contexto histórico–matemático de las heurísticas que no fueron implementadas como actividades.

En el sexto capitulo se detallan las conclusiones surgidas tras finalizar este trabajo de grado, el nivel de alcance de los objetivos planteados, el impacto que el desarrollo de esta propuesta tuvo en los autores y las preguntas o asuntos que no pudieron tratarse y, por ende, podrían trabajarse a futuro.

Finalmente, en el séptimo y octavo capítulo se presentan respectivamente, las referencias del trabajo y los anexos de este, tales como el instructivo para la instalación del MID, así como sus planos.

1.2. Justificación

Como propuesta de trabajo de grado se planteó el diseño de un Museo Interactivo Digital con el motor de videojuegos Unity – un *software* de libre uso que permite y facilita la creación de entornos interactivos en dos o tres dimensiones (véase Ilustración 1) – en el que se exponen heurísticas surgidas en la Historia de las Matemáticas (HM) para la resolución de problemas, de tal manera que pueda ser utilizado como material didáctico y de consulta para las personas interesadas en esta área. Asimismo, el MID está acompañado de diferentes actividades dirigidas a los usuarios, las cuales pretenden dar sentido a las exposiciones del Museo a partir de la interactividad con sus componentes.

Ilustración 1. Entorno 3D creado en Unity.

A continuación, se exponen las diversas motivaciones que se tuvieron para seleccionar la HM (en especial las heurísticas) y el uso de TIC como herramienta educativa – evidenciado en el diseño del MID – así como la selección del *software* empleado, para la elaboración de la propuesta.

1.2.1. Historia de las Matemáticas

Los motivantes principales para seleccionar la HM como uno de los ejes centrales de este trabajo recaen en las diversas ventajas que trae su uso como herramienta pedagógica tanto para estudiantes como para educadores. Algunas de estas ventajas son descritas por Lupiañez (2002) respecto a los trabajos de Avital (1995) y Fauvel (1991) relacionados al uso de la HM en procesos de enseñanza y aprendizaje, tales como:

- Obtener ideas acerca de las dificultades de aprendizaje.
- La historia puede enseñarnos cómo enseñar.
- Rescatar problemas y cuestiones del pasado.
- Las matemáticas tienen un marcado carácter humano.

Particularmente – y sin dejar de lado la importancia de las otras ventajas – este trabajo se enfoca en la segunda y tercera viñeta de la lista, las cuales se comentan enseguida.

La historia puede enseñarnos cómo enseñar: la HM resulta útil para el docente ya que le posibilita identificar problemas concretos que permitieron desarrollar distintos procesos y conceptos matemáticos conocidos, a fin de incentivar en sus estudiantes la búsqueda de soluciones – o aproximaciones a estas – a situaciones problema basadas en el avance histórico de un concepto matemático, favoreciendo el desarrollo de distintos procesos matemáticos (*v. g.* resolución de problemas, generalización, pensamiento inductivo).

Rescatar problemas y cuestiones del pasado: llevar al entorno educativo problemas de alta complejidad que fueron abordados por matemáticos en distintas etapas históricas, hasta llegar a su solución – o que incluso a la fecha no cuenten con una –, puede fungir como motivante al demostrar que las matemáticas no son una construcción terminada, sino que se mantienen en continuo desarrollo del cual los estudiantes podrían hacer parte. Asimismo, permite reconocer que hacer matemáticas es un proceso de construcción social permeado por diversos contextos (*v. g.* sociales, culturales, políticos) de cada etapa histórica.

Por otro lado, Lupiáñez (2002) enlista una serie de posibles usos de la HM para los procesos de enseñanza y aprendizaje, entre estos – debido a su relación con el MID – se destacan:

- Mencionar anécdotas matemáticas del pasado.

- Fomentar la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a distintos conceptos que se aprenden en clase.
- Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado.
- Idear aproximaciones pedagógicas al concepto de acuerdo con su desarrollo histórico.

En particular, el segundo uso listado tiene un mayor tratamiento en el MID, ya que en este se exhiben algunos de los métodos propuestos para dar respuesta a distintos problemas matemáticos surgidos a través de la historia. Es evidente la importancia de la resolución de problemas para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya sea aplicando procedimientos usuales altamente extendidos o aprendiendo métodos alternativos propuestos en distintas etapas históricas.

Asimismo, entendiendo a las matemáticas como una construcción mancomunada en la que multitud de mentes de variadas nacionalidades han trabajado, es viable pensar que esta área es una buena excusa para un intercambio cultural del saber, en la que los estudiantes pueden aprender desde otras perspectivas – que a veces en el aula no están presentes – distintas formas de abordar situaciones problema, así como otros conceptos matemáticos. En un contexto más cercano, en documentos nacionales como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) se enfatiza en el proceso de la resolución de problemas, al indicar que puede emplearse como un posible eje organizador del currículo de las matemáticas escolares.

Es así como la implementación de heurísticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje se propone como una forma de motivar a los estudiantes para que ideen sus propios procedimientos y exploren nuevos caminos del conocimiento.

Profundizando más en las motivaciones para seleccionar las heurísticas y en su importancia para las matemáticas, así como en su enseñanza, resulta valioso destacar las implicaciones que la resolución de problemas trae al entorno de la Educación Matemática. Particularmente, Díaz y Díaz (2018) recopilan a través de varios autores las diversas dificultades que se presentan en los estudiantes al abordar situaciones problema:

- Dificultades en la comprensión de los problemas que no permiten una adecuada búsqueda de la vía de solución.
- Incoherencias en las respuestas a los problemas y bloqueos en el proceso de búsqueda de la vía de solución.

- Inhibición en la búsqueda de la vía de solución a ciertos problemas como resultado del efecto negativo de experiencias anteriores.
- Escasa autorregulación de los procesos mentales por los estudiantes en la resolución de problemas.

Respecto a lo anterior, se busca que propuestas como el MID mitiguen y eviten estas carencias al exponer diversas formas de resolver problemas surgidas en la HM. Sin embargo, aunque el MID fue desarrollado como un recurso didáctico, no debe dejarse de lado los aportes que trae el estudio de la HM para los docentes. Algunos de estos aportes son reconocidos y categorizados por Guacaneme (2011) de la siguiente forma:

- **Visiones de la actividad matemática:** permite entender a las matemáticas como parte de un desarrollo histórico, influenciado por motivaciones propias de cada matemático, los factores sociales y culturales de la época, los errores, argumentos, dudas, aproximaciones y controversias, entre otros aspectos que permiten humanizar la labor de estudio en esta área del saber.
- **Visiones de los objetos matemáticos:** implica entender el desarrollo y evolución de un concepto u objeto matemático, permitiendo identificar las preguntas, problemas e intentos de soluciones que fueron planteadas para alcanzar los conocimientos actuales.
- **Competencias profesionales:** hace referencia a todas las habilidades propias que desarrolla un profesor al estudiar la HM, ya que se trata de una labor extensa y exigente en el sentido de que supera el "conocimiento matemático" e implica el uso de otras habilidades profesionales y personales como son la lectura crítica, construcción de escritos, análisis general y matemático, respeto, tolerancia, entre otros.

En ese sentido, se da al MID un carácter no solo como un recurso didáctico, sino también como una herramienta que permite ampliar el panorama profesional de los docentes que decidan utilizarlo, posibilitándoles identificar las utilidades de emplear la HM en su labor como educadores. Asimismo, se recalca que dicho desarrollo personal y profesional también se dará en los Maestros en Formación Inicial (MenFI) al momento de realizar este trabajo de grado, siendo este otro de los motivantes para su realización.

1.2.2. Apartado Tecnológico

Las TIC en el aula significan una potente herramienta mediadora del aprendizaje, Escontrela (2002) citado por De León y Suárez (2008), señala que estas permiten identificar métodos educativos y al tener un propósito es fácil determinar en qué situaciones deben o no utilizarse. A la par de la clara visión instrumentalista, las TIC también fungen como medio de apoyo para generar en los estudiantes la capacidad de crear y analizar críticamente, debido a que ofrecen nuevos escenarios educativos con la posibilidad de flexibilizar tiempo, espacio y comunicación. Al respecto de lo anterior, en este trabajo, junto con el MID se presenta un conjunto de actividades pensadas para el aprendizaje de conceptos matemáticos asociados con heurísticas e Historia de las Matemáticas, de forma que el docente las pueda estudiar y modificar según las necesidades educativas que tenga.

Por otra parte, las TIC han tenido una fuerte influencia en la educación – aún más en los últimos años –, según Pérez y Telleria (2012) se ha dado en aspectos tanto positivos como negativos, por lo que su implementación debe hacerse desde una perspectiva crítica y constructiva, la responsabilidad de hacer de las TIC una verdadera herramienta para la enseñanza y el aprendizaje recae en el docente. Sumado a lo anterior, Pérez y Telleria (2012) plantean una serie de aspectos relacionados con los roles del estudiante y el docente en el proceso educativo, de los cuales se destacan:

- La necesidad de una didáctica diferente, el docente debe planificar la formación, proponiendo estrategias y actividades que guíen a los estudiantes en su proceso formativo.
- La gestión de la diversidad cultural, los estudiantes deben tener un trato amable y cuidadoso ante los conocimientos ajenos a su contexto, mostrando una actitud receptiva para aprovechar los conocimientos a la par que respetando las diferencias y características socioculturales.

Aspectos en los que el MID funciona de mediador tanto para el docente en su formación académica como para el estudiante al dinamizar ciertos conceptos. Asimismo, entendiendo a Colombia como un ambiente pluricultural en el que cada sociedad tienen sus particularidades y, por ende, pueden ofrecer una mirada distintas a los conceptos a trabajar, en el MID se exponen las miradas que diversas culturas le dieron a múltiples conceptos matemáticos.

1.2.3. Museo Interactivo Digital

Como se mencionó anteriormente, el MID es un ambiente tridimensional diseñado a través del motor de videojuegos Unity[3]. A continuación, se muestran un par de ilustraciones (Ilustración 2 e Ilustración 3) tomadas de un diseño preliminar del MID las cuales ejemplifica el aspecto visual que ofrece el *software* Unity.

Ilustración 2. Interacción en la versión de prueba del Mate-Museo.

Ilustración 3. Interacción en la versión de prueba del Mate-Museo.

Para justificar el uso de Unity en el diseño del MID, se realizó una indagación a través de internet en busca de recursos que pudieran ser similares. En ese sentido, y después de realizar una búsqueda exhaustiva a través de bases de datos y repositorios de distintas universidades – tanto del país como fuera de este – así como en la *web* en general, se determinó que, si bien se han propuesto y desarrollado materiales digitales interactivos de diversa naturaleza enfocados a múltiples áreas, en su mayoría no poseen todas las características mencionadas anteriormente para el Museo o, en su defecto, no se relacionan con la HM.

Particularmente, como fruto de esta búsqueda se destaca el proyecto "3DXM *Virtual Math Museum*"[4] pues fue la única propuesta de matemáticas que responde al nombre de museo. Sin embargo, se trata de un proyecto *web* que no está diseñado en Unity ni cumple con las características de interactividad que propone el presente trabajo.

Partiendo de lo anterior, se concluye como otro de los motivantes para la realización de este trabajo de grado el hecho de que, según lo investigado, se presume que puede llegar a ser el primer museo interactivo digital de habla hispana que aborda la Historia de las Matemáticas y en particular las heurísticas que en esta han surgido.

---

[3] El funcionamiento, herramientas y en general las características de este software se relacionan con detalle en el subcapítulo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

[4] Disponible en http://virtualmathmuseum.org/ [consultado en septiembre de 2022].

1.3. Objetivos

1.3.1. General:

- Diseñar un museo interactivo digital, a través del *software* Unity y cuyo tema central sean las heurísticas matemáticas evidenciadas en la historia, así como un conjunto de actividades relacionadas con el museo, que sirvan como material didáctico para apoyar el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

1.3.2. Específicos:

- Realizar una revisión documental sobre las diversas heurísticas que han surgido en la Historia de las Matemáticas para clasificarlas según su etapa histórica de aparición.
- Elaborar un conjunto de actividades (se estima al menos una actividad por época histórica) relacionadas con las heurísticas de las Matemáticas, y que se implementarán en el museo digital.
- Diseñar y programar un museo interactivo digital en el *software* Unity para exponer las heurísticas seleccionadas y que permita realizar las actividades planteadas.
- Redactar un documento en el que se compile el ejercicio de desarrollo e investigación realizados a lo largo de la elaboración del museo, de las actividades y de la revisión documental.

2. Marco Teórico

2.1. El Concepto de Heurística

Al realizar un estudio en profundidad sobre el desarrollo de la Historia de las Matemáticas fue posible identificar, entre otros, una muy variada gama de métodos y procedimientos empleados para la resolución de problemas tanto matemáticos como de otras ciencias o ámbitos. Empero, ante la imposibilidad de reportarlas todas en el presente escrito, se requirió de un filtro con el cual acotar los métodos buscados, razón por la cual se determinó a la Heurística como dicho filtro.

Uno de los núcleos principales de este trabajo fueron las heurísticas – entendidas inicialmente como métodos de resolución de problemas – más específicamente, las heurísticas en matemáticas. Sin embargo, debido a lo relativamente inexplorado del concepto, este no fue tratado de forma explícita en tiempos anteriores a los últimos dos siglos, por lo que se realizó un estudio en profundidad sobre el desarrollo de la Historia de las Matemáticas resaltando todo aquello que podría catalogarse como heurístico según la teoría. Sumado a lo anterior, dado que el concepto de Heurística fue pensado originalmente para el ámbito educativo, al momento de extrapolar la teoría a las Matemáticas se presentan múltiples vacíos conceptuales, que generaron dificultades en el desarrollo de la revisión documental.

Con el objetivo de establecer la definición de Heurística a emplear en este trabajo de grado, en un primer momento se optó por realizar una revisión documental general en la que se pretendía identificar el significado que se tenía de dicho concepto desde la mirada de variados autores, para lo que se indagó en teorías como las propuestas por Pólya (1964), Schoenfeld (1992), Puig (1996), Kahneman y Tversky (1971), Müller (s.f.), Arteaga y Guzmán (2005).

No obstante, los resultados de dicha búsqueda no cumplieron con el propósito de concretar una definición de Heurística adecuada para el TG, pues no sólo algunos estudios estaban fundamentados en otros sin proponer cambios significativos[5], sino que, como menciona Pólya (1964), la Heurística es una rama del saber poco delimitada y de la cual no existe suficiente claridad. Por tal motivo, tanto su definición como características varían

[5] Arteaga y Guzmán presentan los resultados de una investigación sobre las estrategias para resolver problemas en niños de quinto grado, aunque sus estudios no hablan directamente de las heurísticas se advierten planteamientos análogos a los presentados por Puig (1996). Por otro lado, Kahneman y Tversky (1971) encaminan sus trabajos hacia el ámbito de la psicología, entendiendo a la Heurística como una regla intuitiva para estimar la probabilidad de un evento al tener información sobre otro evento relacionado con el primero.

significativamente entre una u otra de las teorías consultadas, generando que en más de una ocasión fragmentos o teorías completas resultaran irrelevantes para el presente trabajo, por lo que se vio la necesidad de desarrollar una definición propia.

Consecuencia inmediata de lo anterior fue la necesidad de estudiar a profundidad los resultados de las investigaciones consultadas, a fin de detallar aspectos relevantes, parámetros o puntos para tener en cuenta al momento de establecer una definición propia de tal forma que permitiera caracterizar aquello que será considerado como Heurística durante la revisión de la HM.

A continuación, se resumirán las teorías que se consideraron más significativas – ya sean por la relevancia en la teoría o por lo innovadora de la misma – y que tuvieron influencia durante la construcción de la definición de Heurística en este trabajo:

2.1.1. Pólya

El concepto de Heurística se encuentra ampliamente ligado al trabajo de George Pólya, pues como él mismo lo menciona en su escrito "Cómo Plantear Y Resolver Problemas" (Pólya, 1964) este concepto se encuentra prácticamente olvidado y en desuso. De hecho, es en gran medida resultado de las investigaciones del autor que se le vuelve a dar relevancia, siendo que él es el fundador de lo que actualmente se conoce como "Heurística Moderna", marco en el que no sólo se encuentra su propuesta sino también las otras que serán detalladas más adelante.

La Heurística era considerada "una ciencia bastante mal definida y que se relacionaba tan pronto con la lógica, como a la filosofía o a la psicología (…) tenía por objeto de estudio las reglas y los métodos del descubrimiento y la invención" (Pólya, 1964, p. 101). Es decir, se trataba de una ciencia enfocada en descubrir la forma en que los seres humanos razonan en relación con un problema o durante el acto de inventar, a la cual no se le había dotado de la importancia que merecía debido a la ambigüedad con la cual estaba definida.

Sin embargo, los estudios del autor permitieron dotar de un nuevo significado a esta ciencia caracterizándola como la Heurística Moderna, la cual "trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso" (Pólya, 1964). En ese sentido, se estudia no sólo la forma en la que los individuos actúan durante el acto de inventar, sino que además se categorizan dichos métodos de actuación, destacando su nivel de utilidad al momento de dar solución a un problema. Asimismo, el autor menciona que el razonamiento heurístico no es definitivo ni riguroso, sino que tiene un carácter más provisorio, circunstancial y plausible cuyo objetivo es el de dar solución a un problema propuesto (Pólya, 1964).

Por último, de este autor se destaca la caracterización de un modelo que dirige la acción de un sujeto al momento de abordar e intentar solucionar un problema. Dicha teoría consta de las siguientes cuatro etapas:

1. **Comprender el problema:** implica analizar los datos, las condiciones y la incógnita a fin de determinar cuáles son los parámetros que darán por solucionado el problema y determinar si la información es suficiente y útil para la solución del problema o por el contrario redundante o contradictoria.
2. **Concebir el plan:** requiere de la búsqueda de problemas relacionados o de algún modo similares al que se pretende solucionar que ya hayan sido resueltos con anterioridad. También usa la organización de los datos, por ejemplo, cambiando la incógnita, deduciendo información extra, resolviendo el problema por partes, entre otros. Esto con el objetivo de proponer un camino claro para intentar dar solución al problema.
3. **Ejecutar el plan:** implica no sólo aplicar el plan determinado anteriormente, sino la verificación de cada paso y la verificación de que cada uno de ellos sea correcto y, a ser posible, demostrable.
4. **Visión retrospectiva:** se da al momento de examinar la solución obtenida del problema, tratando de verificar el resultado y el razonamiento empleado. Además, implica poner a prueba la solución, intentando llegar a ella por otro medio o aplicarla en otro problema.

2.1.2. Schoenfeld

Si bien Pólya dota de importancia al concepto de Heurística y renueva su relevancia en el campo de la investigación pedagógica, formalmente no realizó investigaciones con estudiantes que le permitieran verificar si sus ideas eran o no acertadas. Esta es una de las principales críticas que Shoenfeld tiene sobre el trabajo de Pólya y que, en contramedida, lo diferencia siendo no sólo un sucesor de su teoría, sino también un detractor de algunas de sus ideas (Barrantes, 2006).

Schoenfeld (1992), reporta en su libro *“Mathematical Problem Solving”* una serie de estudios realizados con docentes y estudiantes de matemáticas a los cuales proponía diversos problemas siguiendo las recomendaciones de la teoría de Pólya, de los cuales concluye que al emplear la resolución de problemas como estrategia didáctica, las heurísticas son por sí solas insuficientes, pues estas pueden llegar a fallar y se ignoran por completo otros factores que pueden impactar en el aula, como el contexto de los estudiantes o la incidencia del docente en la misma.

Aunque Schoenfeld mantiene la definición de Heurística presentada por Pólya, enfatiza la particularidad de cada problema y cómo no siempre las heurísticas generales pueden conllevar a una solución, siendo que para poder emplearlas se requiere de un vasto conocimiento de su concepto y funcionabilidad, además de requerir de una amplia habilidad para aplicarlas que no siempre se da en contextos escolares (Barrantes, 2006).

Por último, se destaca que en el texto "Aspectos de la Cognición" se caracteriza a la Heurística como "el conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos y las prácticas" (Puig, 1996, p. 38).

2.1.3. Puig

El renovado interés en el estudio de la resolución de problemas generó que muchos autores dedicados a la Pedagogía y Didáctica de las Matemáticas centraran sus esfuerzos en este proceso. Particularmente, Puig (1996) en su texto "El Modelo de las Competencias" pretende analizar en amplitud este campo desde los referentes teóricos más relevantes (como son Pólya y Schoenfeld).

En específico, Puig conceptualiza a la Heurística como

> El estudio de los modos de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolver que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución, y calificaremos, por tanto, de heurísticos a tales modos y medios. (Puig, 1996, p. 34).

De esta definición se puede identificar que Puig toma como heurístico no sólo los procesos mentales que se dan al abordar un problema como lo hace Pólya, sino también la estrategia empleada para intentar determinar su solución. Por otro lado, se destaca que la aplicación de un razonamiento heurístico a un problema no necesariamente permite obtener un resultado satisfactorio, de hecho, ni siquiera implica que dicha solución exista.

Cabe resaltar a su vez, que durante su trabajo estableciendo un modelo de competencia para la resolución de problemas, Puig determina y clasifica una serie de elementos que intervienen en dicho proceso (Puig, 1996), de entre ellos se destacan:

1) **Las herramientas heurísticas:** son las habilidades y estrategias que pretenden modificar la naturaleza del problema. Algunas de ellas son:
    - Consideración de un único caso.
    - División del problema en partes.
    - Reformular el problema.
    - Examinar las posibilidades del problema una a una.
    - Paso al contrarrecíproco.
    - El uso de figura auxiliar.
    - El uso de analogías.

    En ese sentido, el objetivo de aplicar una herramienta heurística es el de transformar un problema en otro.

2) **Las destrezas heurísticas:** son las estrategias que permiten profundizar o simplificar el abordaje de un problema sin modificarlo directamente, en verbigracia la construcción de representaciones, esquemas, tablas, organización por casos, entre otros.

    Estos cambios deben enmarcase en un ámbito netamente funcional y exploratorio, pues no se trata de cambios estéticos o de presentación, sino que son estrategias que permiten desencadenar el uso de herramientas heurísticas.

3) **Las sugerencias heurísticas:** son todas las ideas que permiten direccionar el proceso de resolución del problema sin establecer un método o procedimiento concreto a seguir. Entre ellas es posible encontrar sugerencias heurísticas como "buscar un problema relacionado" o "considerar un caso particular" las cuales no sólo orientan la labor del individuo, sino que permiten y apoyan la aplicación de procesos mentales como la búsqueda en su memoria a largo plazo.

2.1.4. Müller

Los estudios relacionados a la Heurística desde Pólya y Schoenfeld se han enmarcado en un aspecto pedagógico y principalmente asociado a la Didáctica de las Matemáticas. Sin embargo, algunos autores como Horst Müller proponen teorías más amplias en relación con la resolución de problemas y al concepto de heurístico. En ese sentido, Müller (1990) – citado por Crespo (2007) – define la Heurística como

> Una disciplina científica aplicable en todas las ciencias e incluye la elaboración de principios, estrategias, reglas y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución para problemas, es decir, para tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico. (Muller, s.f., citado por Crespo, 2007, p. 24).

De esta definición se destaca no sólo un cambio en el objeto de estudio de los procesos mentales del individuo a la elaboración de métodos que solucionen problemas, sino que también se amplía el rango de uso de la Heurística del área de las matemáticas a cualquier ciencia o ámbito en el que se deban resolver problemas.

Del mismo modo, y como reporta Crespo (2007), Müller considera a los elementos heurísticos como un concepto primario o intuitivo, por lo que no propone una definición concreta sobre ellos. A pesar de esto, si plantea la clasificación de la Tabla 1:

Tabla 1. Clasificación de elementos heurísticos.

Clasificación de elementos heurísticos según Müller			
Medios auxiliares heurísticos	**Procedimientos heurísticos**		
	Métodos asociados a la realización consiente de actividades mentales complejas y exigentes.		
	Principios heurísticos	**Reglas heurísticas**	**Estrategias heurísticas**
Son las herramientas que se emplean para favorecer el entendimiento y comprensión de un problema, así como la búsqueda de su solución.	Son las estrategias que guían en gran medida las acciones tomadas para resolver el problema. Algunos principios heurísticos son: - La analogía. - La reducción. - La inducción. - La generalización. - Movilidad. - Medir y probar. - Estudio de casos especiales y casos límites.	Su objetivo es el de impulsar la búsqueda de conocimientos o posibles soluciones a un problema. Ejemplo de ello es la reformulación de un problema, la búsqueda de conocimientos relacionados con lo dado y lo buscado en el problema, entre otros.	Son un conjunto de reglas que pretenden apoyar y optimizar el proceso de toma de decisiones. Algunas estrategias heurísticas son: - Trabajo hacia delante (método sintético). - Trabajo hacía atrás (método analítico). - Descomposición del problema en subproblemas.

A continuación, se presenta un diagrama (Ilustración 4) citado por Crespo (2007) en el que se organizan y ejemplifican los elementos heurísticos de Müller:

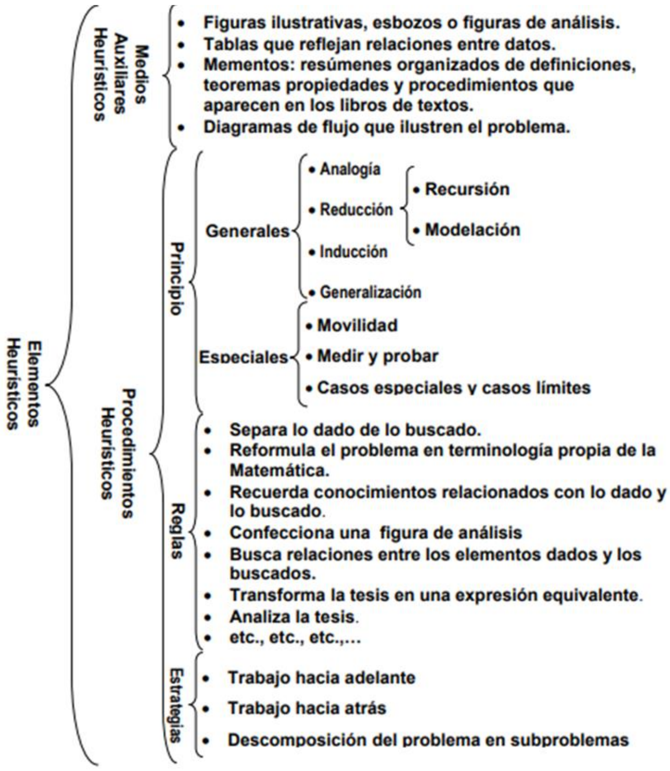


Ilustración 4. Clasificación de los elementos heurísticos tomado de Crespo (2007, p. 159).

2.1.5. Definición Propia

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de profundizar en el concepto de Heurística fue para emplearla como herramienta para clasificar diversos descubrimientos matemáticos surgidos como respuesta a problemas evidenciados durante la historia humana y en particular de las Matemáticas. Además, como también se mencionó, ninguna de las definiciones consultadas fue completamente satisfactorias para el enfoque que se pretendía en este trabajo.

En ese sentido, y tras la revisión documental presentada anteriormente, se seleccionaron algunas ideas clave de las teorías de Pólya, Schoenfeld, Puig y Müller con las cuales fue posible construir la siguiente definición de Heurística:

La ***Heurística*** *es una disciplina encargada de estudiar la elaboración, funcionamiento y resultados de estrategias*[6] *para la resolución de problemas. Tales estrategias reciben el nombre de* ***heurísticas****. Cabe resaltar que aplicar una o varias heurísticas no garantiza que el problema se resuelva o si quiera que dicha solución exista.*

---

[6] Entendiendo estrategia como "un proceso regulable, conjunto de reglas que busca una decisión óptima en cada momento" (Real Academia Española, 2022).

Además, tales estrategias deben cumplir con los siguientes aspectos:

1) Son aplicables a variados campos del saber, pero no requieren de un carácter riguroso o definitivo.
2) Presentan cierto grado de generalidad[7], esto es, la abstracción de los elementos comunes de una serie de problemas que permiten que la solución planteada sea válida para múltiples situaciones.

Por último, las heurísticas también serán catalogadas según, por lo menos, uno de los siguientes principios:

- Principios heurísticos generales:
  - **Analogía:** es un razonamiento que implica la identificación de elementos semejantes o correspondientes entre el problema que se busca resolver y uno ya resuelto, tomándolos como herramienta para hallar dicha solución.
  - **Reducción:** implica transformar el problema que se pretende resolver en otro. Para lo cual se emplean procesos como: la recursión, la modelación, la reducción a un problema ya resuelto y la modelación.
  - **Inducción:** es un método centrado en la observación y análisis de situaciones particulares que permiten identificar elementos comunes entre ellas obteniendo una generalización empírica. Asimismo, se toma por inductivo el razonamiento que implica hacer uso de saberes con un grado bajo de universalidad para obtener un juicio de mayor grado de universalidad.
- Principios heurísticos especiales:
  - **Movilidad:** es un método centrado en problemas geométricos, en el cual se dota de características "dinámicas" a un ejercicio de geometría estática. A partir de las cuales se obtienen conclusiones respecto a las relaciones y dependencias.
  - **Medir y probar o medir y comparar:** es un razonamiento similar al de la movilidad, pero aplicado a conjuntos de valores o datos, los cuales son analizados tras realizar la modificación con el objetivo de tomar decisiones que lleven a la resolución del problema.

[7] La generalización es uno de los principios heurísticos presentados por Müller. Sin embargo, debido a que aún mantiene un carácter escolar, no se le dará dicho rol en este trabajo, pues pierde el sentido al evaluar estrategias surgidas desde la HM.

- **Casos especiales y casos límites:** se refiere al análisis del comportamiento de situaciones matemáticas llevadas a casos extremos o con una complejidad particular. Verbigracia de esto son los análisis a funciones en puntos especiales o cuando la variable tiende al infinito.

Una vez establecida la definición de Heurística que, además de responder a las incógnitas planteadas en un inicio sirvió para orientar la revisión documental de la HM y para discriminar los conceptos matemáticos consignados anteriormente – suprimiendo aquellos que no respondían apropiadamente como heurística o en los que se presentaban ambigüedades –; se procede a describir la revisión documental realizada a la Historia de las Matemáticas.

3. Revisión Histórica

3.1. Contexto Histórico y Heurísticas en la Historia de las Matemáticas.

En esta sección se recopilan y describen las diversas heurísticas que fueron seleccionadas para presentarse en el MID. En particular, se destacan aquellas que por su importancia en el desarrollo de la HM y la amplitud de sus componentes visuales, gráficos o concretos favorecen su incorporación en este.

Respecto al desarrollo histórico de la humanidad Mankiewicz (2005) señala que “la historia no consiste en una trayectoria de hechos claros y ordenados” (p. 10), los registros que se tienen – especialmente en periodos antiguos – presentan generalmente saltos temporales debido a los cuales resulta imposible determinar un orden exacto para los sucesos, además de tener vacíos conceptuales sobre cómo o de qué manera se llegaron a dichas conclusiones. En ese sentido, es relevante mencionar que el estudio de las matemáticas se ve permeado por el contexto en el que surge, las creencias y los avances teóricos propios de la etapa histórica.

Atendiendo a lo anterior, se mencionarán a continuación las etapas históricas estudiadas para este trabajo, estas son:

- **Edad Antigua:** se describirán las heurísticas asociadas a las civilizaciones clásicas de Babilonia, Egipto y Grecia, debido a su amplio desarrollo (y registro existente) en matemáticas.
- **Edad Media:** teniendo en cuenta los pocos registros de avance matemático en Europa durante esta época, se describirán conceptos matemáticos trabajados en las civilizaciones de Medio y Extremo Oriente como lo son Arabia, China e India; las cuales también sólo son descritas de forma sucinta debido tanto al fuerte componente algebraico en sus matemáticas como a los fragmentados registros.
- **Edad Moderna:** en esta etapa se comenzó la separación de las Matemáticas “puras” y aplicadas, motivo por el cual los problemas que surgieron – y fueron estudiados – poseen un tinte cada vez más formal y netamente matemático. Por estas razones se abordarán las propuestas de algunos autores para problemas de variada índole, así como las interpretaciones de conceptos matemáticos con una mirada moderna.
- **Edad Contemporánea:** del mismo modo que en la Edad Moderna, los problemas que generan la creación de heurísticas en Matemáticas tienen como eje central el desarrollo de teorías formales y de un carácter bastante complejo. Empero, el auge de las nuevas

tecnologías también permitió abordar problemas ya existentes de múltiples maneras, debido a ello las heurísticas presentadas para esta época estarán centradas en cómo las Matemáticas y la Tecnología Digital buscan resolver problemas en la realidad.

En particular, se realizará una contextualización general sobre cada época o civilización, *id est*, una explicación sucinta de su desarrollo matemático y el análisis de cada heurística surgida en dicho periodo y elegida para incorporarse en el MID. Asimismo, se alude a su componente histórico, matemático, el propósito de su creación y los problemas de los cuales surge dicha heurística.

3.2. Edad Antigua (4000 a. C. – siglo V d. C.)

La Edad Antigua – también conocida como Antigüedad – fue una etapa histórica enmarcada por el surgimiento de múltiples civilizaciones humanas, destacando aquellas surgidas en los continentes de Europa y Asía, y se encuentra delimitada por el surgimiento de la escritura y la caída del Imperio Romano (ACNUR Comité Español, 2018).

Durante esta época se presentaron múltiples avances sociales y culturales entre los que se destaca la creación de un estado o gobierno que permitió organizar las acciones de grandes poblaciones, estableciendo las primeras leyes y códigos sociales ligados a los roles que se asignaban a las clases sociales presentes en cada civilización, siendo generalmente distinguidos entre: monarquía, aristocracia, eruditos, artesanos y esclavos (ACNUR Comité Español, 2018).

En esta etapa histórica se realizaron variedad de avances en el desarrollo científico en todas las ramas del saber – siempre con una mirada práctica y con el propósito de responder a las problemáticas del momento – se generaron conocimientos que ayudaron a cimentar las teorías modernas. En el presente documento, se decidió profundizar únicamente en los avances matemáticos de las civilizaciones babilónica, egipcia y griega; debido principalmente a la amplitud de registros y análisis ligados al desarrollo histórico de las matemáticas en cada una de ellas. Por otra parte, y teniendo en cuenta los pocos registros que se conservan de otras ubicaciones como Extremo Oriente o América, estas no se abordarán en este apartado.

A continuación, se profundizará en el desarrollo histórico de las civilizaciones anteriormente mencionadas, así como generalidades a nivel matemático, seguidamente se realizará un análisis de algunas heurísticas que emplearon para la resolución de problemas:

3.2.1. Babilonia

Babilonia fue una de las primeras civilizaciones de la humanidad de las cuales se tienen registros, controlaban gran parte del Medio Oriente gracias a sus amplios conocimientos en variados ámbitos, entre estos, de matemáticas. Vivían junto a cuerpos de agua, obteniendo de estos insumos básicos como alimentos y material de construcción. Solían usar la arcilla como el papel en la actualidad, escribiendo con pequeños cinceles en un material del que, si bien, apenas sólo se conservan vestigios, permitió una mejor conservación que el papiro o el bambú de otras civilizaciones (Collette, 2000), en las tablillas pueden observarse desde cálculos para el desarrollo de alguna teoría hasta material pedagógico con el que los jóvenes estudiaban o desarrollaban las tareas que les asignaban (MatemáticasTV, 2008).

Se destacaron en áreas como la agricultura y arquitectura, en las que hallaron información y problemas para su propio desarrollo científico. Asimismo, comprendían las Matemáticas desde una base concreta con una fuerte perspectiva geométrica, empleando distintas maneras para realizar variados cálculos sin símbolos ni fórmulas, ejemplo de ello es su escritura cuneiforme (Collette, 2000).

Por otra parte, tras una revisión documental, se observa que (según los registros) su desarrollo en el campo del Álgebra está limitado en comparación a las civilizaciones griegas y egipcias; comprendiendo generalmente una solución aproximada a las ecuaciones que trataban de resolver (Collette, 2002). Su desarrollo algebraico tenía un carácter retórico, *id est*, los problemas algebraicos eran enunciados, descritos y solucionados empleando lenguaje natural, sin utilizar ningún tipo de simbología como la empleada actualmente, por lo que sus procedimientos resultaban confusos y, en algunos casos, ambiguos.

Sin embargo, los babilónicos dejaron pruebas de su gran habilidad en el cálculo aritmético, llegando a crear tablillas con largos casos y ejemplos de cálculos para facilitar los mismos en variados problemas. Maza (2007) en su texto detalla algunas de las muchas tablillas con cuentas creadas con el propósito de facilitar los cálculos, operando un número cualquiera por otros distintos no necesariamente sucesivos. No obstante, algunas de estas tablillas presentan algunos errores de cálculo innatos a las habilidades del calculista.

Empleaban un sistema de numeración posicional de base 60, llamado también sexagesimal, del cual aún se conservan huellas como las medidas de tiempo y los ángulos expresados en grados, se cree que esto era debido a los divisores del número 60 y cómo estos pueden influir en ciertos cálculos aritméticos (MatemáticasTV, 2008), además, los babilónicos requerían del conteo de números grandes para realizar mediciones astronómicas como los ciclos lunares. Asimismo, no contaban con un símbolo para representar el cero ni la separación de la parte entera de la fraccionaría (Rey y Babini, 2013).

Por otra parte, debido a la importancia que los babilónicos les daban a las soluciones aritméticas de sus problemas algebraicos (Collette, 2002), es decir, de las aplicaciones prácticas que se obtenían de avanzados métodos abstractos, se generó un amplio desarrollo de su enrevesada álgebra; esta era, naturalmente por la época, deficiente en múltiples aspectos, como la notación, la falta de métodos generales y la consideración de ciertos casos. Sin embargo, no se limitaban a un conjunto particular de problemas como otras civilizaciones, sino que presentaban algunas generalizaciones que les permitían abordar una mayor cantidad de situaciones.

Para la civilización babilónica se tendrán en cuenta las siguientes heurísticas:

Relaciones paramétricas (ternas pitagóricas)

En una de las tablillas encontradas en los vestigios de la civilización babilónica, se puede observar lo que más tarde se conocerían como ternas pitagóricas, aunque parte del material se encuentra fragmentado y perdido es posible inferir a qué números hacen referencia, pues estos provenían de las siguientes relaciones (empleando notación moderna):

$$a = 2pq$$

$$b = p^2 - q^2$$

$$c = p^2 + q^2$$

Las cuales cumplen con la igualdad $(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$. Los términos p y q conocidos como “números generadores” los cuales cumplen con condiciones como que ambos son números naturales cualesquiera no simultáneamente impares y con $p\ mayor\ que\ q$ (Ortiz, 2005). Se cree que estas ternas servían de base para la construcción de tablas trigonométricas (Collette, 2002). Las ternas, como algunos de sus métodos generales, prestaban ayuda a los agrimensores, quienes debían hacer variados cálculos con las áreas de cultivo, tarea para la cual las matemáticas estaban más que preparadas.

Métodos de resolución de ecuaciones

Siendo la agricultura una de las principales actividades económicas de esta civilización era indispensable tener los conocimientos necesarios para realizar variados cálculos con las medidas en los terrenos y construcciones en los mismos (Maza, 2007). Si bien su geometría consistió más en conjuntos de reglas y algoritmos para efectuar medidas prácticas sin formalismo o demostraciones, esta respondía lo bastante bien a las problemáticas de la época (Ortiz, 2005).

Para la actividad agrícola, específicamente, se ve involucrada la ecuación de segundo grado ya que debían calcular áreas de figuras en dos dimensiones. Como se puede apreciar en la Ilustración 5, aunque no hay registro de que hayan obtenido la formula cuadrática, sí que presentaron manejo de múltiples ecuaciones y estudios de sorprendente exactitud sobre diversos polígonos regulares e irregulares, los babilónicos reducían el problema de aproximación de áreas a otros más sencillos de calcular – como cuadrados – u otros que ya conocieran. Con este método también obtuvieron algunas "fórmulas"[8] que en la actualidad se conocen como productos notables (Perero, 1994).

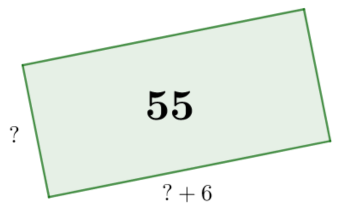


Ilustración 5. Método babilónico para el cálculo de áreas indeterminadas.

Otro de los métodos desarrollados y empleados por los babilonios para resolver ecuaciones era usando balanzas (MatemáticasTV, 2008), con las cuales podían abordar expresiones lineales con coeficientes naturales. Las utilizaban en problemas en los que, sabiendo la cantidad de elementos implicados y su peso en total, podía determinarse el peso de cada objeto individual. Así, experimentando con la balanza al poner y quitar elementos de un lado u otro, deducían los valores solicitados. Este método brindaba información de gran importancia tanto para comerciantes como para agricultores y fungía como herramienta de resolución de problemas como la repartición de herencias, aunque se conservan evidencias de los desarrollados avances matemáticos de los babilónicos no se sabe cómo o de qué manera llegaron a ciertas formulas o identidades (Collette, 2002), tales como las propiedades conmutativa y distributiva para casos como la multiplicación que fueron ampliamente usadas para la simplificación de cálculos, propiedades que más tarde fueron demostradas y generalizadas por los griegos (Ibáñez, 2019).

[8] Como se mencionó anteriormente, empleaban algebra retórica, por lo cual complicaba a los babilónicos el proceso de generalización tanto al momento de formularla como de aplicarla.

Los babilonios eran también ilustres en el proceso iterativo, empleándolo para idear un método para resolver ecuaciones de segundo grado y otro con el que aproximaban los valores de raíces cuadradas, ambos similares. El proceso puede describirse como:

> Se desea calcular algunas aproximaciones para $\sqrt{b}$, donde b es un número apropiado. Sea $x = \sqrt{b}$ la raíz buscada y sea b_1 una aproximación de esta raíz. Supongamos que a_1 es otra aproximación tal que $a_1 = \frac{b}{b_1}$. Si b_1 es demasiado pequeño, entonces a_1 es demasiado grande. Elegimos entonces la media aritmética $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Si b_2 es demasiado grande, entonces $a_2 = \frac{b}{b_2}$ será demasiado pequeño. Luego, será suficiente tomar la media aritmética $b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$, y así sucesivamente… (Ortiz, 2005, p. 14).

3.2.2. Egipto

Cerca de Babilonia, el rio Nilo – surgido de la unión entre los ríos Nilo Blanco y Nilo Azul y considerado el segundo rio más grande del mundo – fue el causante del desarrollo de una de las civilizaciones más prosperas de la antigüedad, la civilización egipcia (Rey y Babini, 2013). Este cuerpo de agua proporcionó recursos primarios como agua y peces, así como la formación de limo – un tipo de sedimento – el cual era crucial para la agricultura egipcia. Su organización social tenía fundamentos teológicos, debido a que los principales dirigentes eran el faraón – a quién se le daba un rol de divinidad – y la nobleza sacerdotal (Pero Eso Es Otra Historia, 2022). Si bien, la veneración de un faraón no era superior a la prestada por cualquier otra civilización a su dirigente principal, era tras su muerte que se consideraba fusionado con uno de sus múltiples dioses: Osiris; por lo que se les daba sepultura en estructuras funerarias conocidas como “mastabas” o, más comúnmente, pirámides.

Su desarrollo cultural y social dio lugar a su propio sistema de escritura, los jeroglíficos, representados en hojas fabricadas con la planta de papiro, esta última, aunque resulta práctica para la escritura es susceptible a daños por el paso del tiempo por lo que sólo se conservan algunos documentos (Mankiewicz, 2005). En particular, para este trabajo se mencionarán los papiros de Moscú y de Ahmes (o Rhind), dos textos en los cuales se recopilan problemas matemáticos resueltos por los antiguos egipcios. Tales papiros tienen registros asociados a conceptos como: operaciones, ecuaciones, progresiones, cálculo de volúmenes, áreas y proporciones. Cabe resaltar que estos problemas están asociados a situaciones cotidianas, pues la matemática egipcia estaba centrada en solucionar problemas de prácticas como agricultura, arquitectura, economía, entre otros (Moreno, 2012).

Así, para la civilización egipcia se tendrán en cuenta las siguientes heurísticas:

Métodos de resolución de ecuaciones

Contrario a los babilónicos, los egipcios tuvieron un mayor enfoque en las matemáticas aplicables a construcciones, agricultura, guerra u otros oficios prácticos; sin desententenderse del desarrollo teórico, aunque sin ahondar de más en este. El investigador Ortiz (2005) señala en su compilatorio "(…) si hubo álgebra en Egipto ella estaba aún en su estado inicial" (p. 39). Sin embargo, en los registros que se conservan se pueden observar pequeñas pistas del desarrollo del análisis y la variación por medio de la técnica del tanteo que posteriormente se llamaría *Regula Falsi* (Moreno, 2012).

En el tanteo comprendido por los antiguos egipcios se empleaba una variable local denominada "*aha*" (montón) usada para referirse a una cantidad desconocida. Para resolver la ecuación, a la incógnita se le asignaba un valor arbitrario y se operaba con los demás términos, al obtener el resultado (casi siempre erróneo) se ponía en relación con el verdadero según la expresión y se multiplicaba por el supuesto inicial, este último, aunque más exhaustivo, terminaba por ser una posible solución al problema (Luque, Mora y Torres, 2014).

Un ejemplo de este método se encuentra reportado por Luque, Mora y Torres (2014) en el que se resuelve la ecuación $x + \frac{x}{7} = 19$ de la siguiente manera:

Suponer un valor arbitrario para la incógnita, por ejemplo $x = 7$

$$7 + \frac{7}{7} = 8;\ \text{pero}\ 8 \neq 19$$

Posteriormente se establece la relación entre 19 y 8 como $\frac{19}{8}$

Tras lo cual se multiplica este nuevo valor por la primera aproximación, quedando así:

$$\frac{19}{8} \times 7 = \frac{133}{8}$$

Se repite el proceso con el nuevo valor, es decir, tomando $x = \frac{133}{8}$ como se muestra a continuación:

$$\frac{133}{8} + \frac{\frac{133}{8}}{7} = 19$$

obteniendo así la respuesta al problema planteado.

Luque, Mora y Torres (2014) también señalan que es probable que los egipcios emplearan este método con ecuaciones de segundo grado, sin embargo, los escasos registros que se conservan no dan prueba de ello.

Triángulo Sagrado

Como bien explica el profesor Marcus Du Sautoy en el documental Historia de las Matemáticas (2008), el Nilo era la fuente principal de recursos para los egipcios proporcionándoles alimentos y materiales de construcción, en el ámbito agrícola los terrenos eran especialmente cambiantes debido a las subidas del rio por lo que constantemente estos debían medirse para calcular los respectivos impuestos en función de la cantidad de terreno, para ello, los cobradores de impuestos – o *harpedonaptas*, como señala Mataix (1991) – poseían una sencilla herramienta como lo es una cuerda, esta, sin embargo, era la ejemplificación de un caso particular de uno de los teoremas más famosos de la antigüedad (ver Ilustración 6). Con doce nudos equidistantes la cuerda al ser puesta en una formación específica con ayuda de estacas fijadas en ciertas partes genera un triángulo rectángulo cuyos lados tienen como medida tres, cuatro y cinco, siendo el último número el correspondiente a la hipotenusa, estos números cumplen con la igualdad:

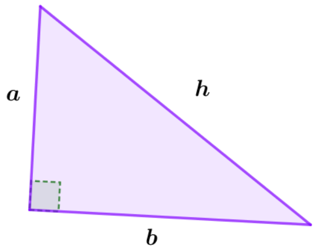


Ilustración 6. Triángulo rectángulo.

$$a^2 + b^2 = h^2$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

Esta potente herramienta era usada para generar ángulos rectos en cualquier terreno o superficie, ya que – como bien lo demostrarían los griegos unos siglos más tarde – al tener un triángulo cuya medida de sus lados cumpla con la relación matemática establecida este además es rectángulo. Los egipcios así lograron construir sus magníficas edificaciones (MatemáticasTV, 2008).

Estrategias para realizar conteos

En la cotidianidad egipcia era posible identificar múltiples situaciones y actividades matemáticas, desde largos y complejos procedimientos para determinar los impuestos a cobrar o conteos de objetos comunes, como las raciones de comida a los empleados de algún oficio. Los egipcios requirieron del conteo para diversos problemas como la organización de sus ejércitos, las temporadas de inundaciones y cosecha, repartición de bienes, construcción de pirámides u otras edificaciones.

En algunos de los papiros egipcios se puede identificar el manejo de progresiones aritméticas y geométricas. Particularmente, se observan problemas relacionados al conteo de soldados, ciclos del rio, repartición de pagas y raciones, entre otros (Collette, 2000).

Como se mencionó anteriormente, su desarrollo en el campo algebraico permitió a los sabios egipcios obtener resultados para estos conteos que requerían del manejo de fracciones, razones o tableas con resultados numéricos. Sin embargo, no hay registro de fórmulas o métodos generales, así como estudio de propiedades (Ortiz, 2005).

Uno de sus notables progresos matemáticos fue en el campo de las fracciones, para las cuales tenían algoritmos e inclusive tablas con ciertos resultados para facilitar su cálculo en variados ámbitos. Según los registros, y quizás debido a su continua presencia en la vida diaria (Collette, 2002), las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\ y\ \frac{1}{4}$ eran especialmente apreciadas, por lo que se buscaba descomponer cualquier otra fracción en estos términos mucho más sencillos de trabajar para ellos.

Las matemáticas en las antiguas civilizaciones fueron íntimamente ligadas con los mitos y las creencias, por lo que, generalmente estas eran exclusivas de aquellos que dentro de las sociedades se encargaban de fungir roles en este ámbito (D'Amore, 2008), los egipcios no fueron ajenos a ello, uno de los muchos ejemplos citables con miradas matemáticas es el mito del Ojo de Horus; en una de las muchas versiones del relato (MatemáticasTV, 2008) se explica que el dios Horus en medio de una cruenta batalla contra otra deidad le fue arrancado uno de sus ojos, el cual después fue fragmentado y las piezas dispersadas por todo Egipto. Esta historia, además de interesante, encierra un importante objeto matemático, pues a cada pieza se le asociaba con una fracción unitaria[9] que seguía una progresión, y estas al sumarse se aproximan a la unidad, con lo que queda implícita la idea de una serie.

D'Amore (2008) en su texto "Matemática en Todo" detalla otra versión del mito, en el que Horus tomaría el papel de un pastor, que se encontraba comprometido con otra pastora y cada uno por su lado velaba por su propio rebaño, tal era la belleza de la mujer que un dios egipcio terminó por encapricharse con ella, un día se presentó ante la fémina y le propuso pasar la noche juntos, ante su inesperada negativa decide castigar a Horus arrancándole su ojo y esparciendo por el desierto la mitad, después la mitad de la mitad, luego la mitad de la mitad de la mitad y así seis veces. La muchacha corrió por las arenas buscando salvar a su amado de

[9] Fracción unitaria se comprende como aquella cuyo numerador es la unidad.

tan cruento castigo, cuando finalmente los alcanza aceptó las peticiones, a la mañana siguiente regresó con el joven pastor y con cariño recompuso su fragmentado ojo. Cabe destacar que la progresión $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ da como resultado $\frac{63}{64}$ y no la unidad (1), como señala el mito (véase Ilustración 7).

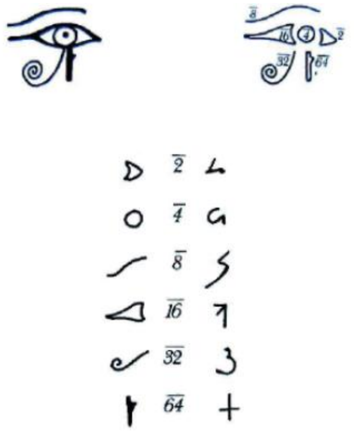


Ilustración 7. Fracciones unitarias con el Ojo de Horus tomada de D'Amore (2008, p. 63)

3.2.3. Grecia

Para finalizar, la última civilización de esta etapa histórica que se tendrá en cuenta durante este trabajo es la griega, en particular centrando los estudios en el período de 2700 a. C. al 30 a. C. época llamada Antigua Grecia.

Cabe resaltar, el amplio desarrollo matemático que tuvo esta civilización, pues repercute hasta el día de hoy con la preservación de teorías y desarrollo matemático clásico (*v. g.* Teorema de Pitágoras, Hexágono de *Pappus*), la Geometría Euclidiana, entre otros. Además de los diversos reconocimientos a nivel histórico como el de Tales de Mileto (624 a. C. – 546 a. C.) como el primer matemático de la historia, debido a que fue el primero en realizar una demostración de sus afirmaciones e hipótesis (Asimov, 1999).

Es relevante reconocer la conquista que tuvo Roma sobre Grecia y cómo esto les afectó culturalmente (Pero Eso Es Otra Historia, 2016). Pues, si bien los romanos se hicieron con el dominio del territorio griego tras las guerras médicas, la cultura griega no sólo fue adoptada, sino que tomó un rol predominante en la romana. Un ejemplo de ello puede evidenciarse al analizar sus mitologías en paralelo pues la estructura e historias se mantienen casi intactas modificando principalmente nombres como: Júpiter (Zeus), Juno (Hera), Neptuno (Poseidón), Minerva (Atenea), entre muchos otros. En ese sentido, debido a la amplia relación entre ambas culturas – destacando que la civilización romana no cuenta con avances matemáticos tan significativos como la griega (Mataix, 1986) – durante el desarrollo de este trabajo se reconocerán las heurísticas de ambas civilizaciones como resultados de Grecia.

Para la civilización griega se considerarán las siguientes heurísticas:

Método de Agotamiento

Uno de los problemas asociados a las matemáticas desde sus inicios es el cálculo de áreas y volúmenes de variadas figuras y cuerpos curvos; en Grecia específicamente, se vivió un momento de gran relevancia, pues surgió la crisis de los inconmensurables[10] de mano de la Escuela Pitagórica (Canizales y Erazo, 2013).

Como propuesta para realizar el cálculo de áreas y volúmenes en superficies y cuerpos geométricos no rectilíneos, Eudoxo (390 a. C. – 337 a. C.) desarrolló el Método Exhaustivo – también llamado método de *exhaucion* o de agotamiento – el cual se cimenta sobre las bases de otro de sus estudios, la teoría de las proporciones, en el que se permite estudiar la razón entre dos cantidades inconmensurables ya que al definir no la razón entre las magnitudes sino la igualdad de las razones se logra eliminar la dificultad (Canizales y Erazo, 2013).

En ese sentido, el método de agotamiento consiste en inscribir figuras en los cuerpos geométricos de los que se desconocían dichas magnitudes, realizando un proceso similar para el caso de los volúmenes. Como puede observarse en la Ilustración 8, este método puede extenderse indefinidamente con polígonos cada vez más cercanos a la circunferencia – idea que sería utilizada siglos más tarde con la integral –, sin embargo, los griegos no estaban interesados en llevar este método al infinito, conformándose con figuras de relativamente gran cantidad de aristas.

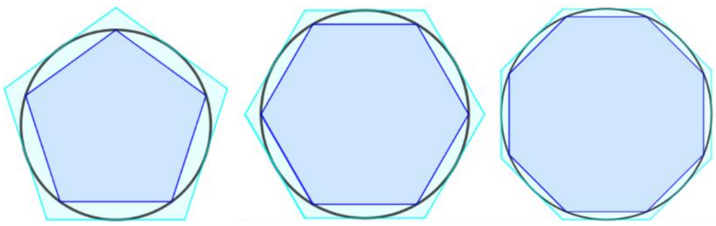


Ilustración 8. Método de Agotamiento.

Este método permitió además de determinar área y volúmenes dar con una de las primeras aproximaciones de la constante π, Arquímedes (287 a. C – 212 a. C), a quien se atribuye el uso de este método para calcular el área de una circunferencia usando polígonos regulares inscritos y circunscritos con mayor número de aristas en cada iteración con los cuales

[10] Entiéndase como magnitudes inconmensurables a aquellas que no tienen un factor común de medida.

fue capaz de medir su perímetro y obtener una aproximación matemática rigurosa para π, afirmando que dicho valor está comprendido entre $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$ (Pickover, 2009).

Método de resolución de ecuaciones geométrico

Los antiguos griegos no fueron ajenos a expresiones algebraicas con coeficientes indeterminados[11], por lo que realizaron largos estudios – principalmente geométricos – sobre sus soluciones en variados casos empleando herramientas de la época como la regla y compás ideales[12]. Similar a los babilónicos, aunque con argumentos más sofisticados, los pensadores de la Antigua Grecia hicieron uso del método de aplicación de áreas, para este método, en esencia, a un segmento de longitud b se trazan segmentos perpendiculares – con una longitud dada – para completar un rectángulo; Luque, Mora y Torres (2014) además detallan que "si bien los griegos no utilizaron la aplicación de áreas con la intención de resolver alguna ecuación de segundo grado, la interpretación algebraica que está implícita en el método permite utilizarlo con este propósito" (p. 159).

Para la construcción se puede seguir la siguiente serie de pasos[13] (ver Ilustración 9):

- Construir el $\overline{AB}$ con $AB = b$
- Sea $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ con $CB = \sqrt{c}$
- Sea M punto medio de $\overline{AB}$
- Sea $\odot M_{MC}$
- El D la intersección del círculo con la extensión de $\overline{AB}$ a través de B, luego $x = AD$

[11] Los griegos nombraban como "coeficientes indeterminados" a lo que actualmente se conoce como incógnita, en lugar de variable como cabría esperar.
[12] Se trabajaba con una regla sin graduación que se suponía infinita, mientras que el compás era de tal forma que al separarse del papel se cerrara, sin posibilidad de conservar ninguna graduación.
[13] El procedimiento completo, así como la justificación, se encuentran en Luque, Mora y Torres (Actividades Matemáticas Para el Desarrollo de Procesos Lógicos. Clasificar, Medir e Invertir, 2014).

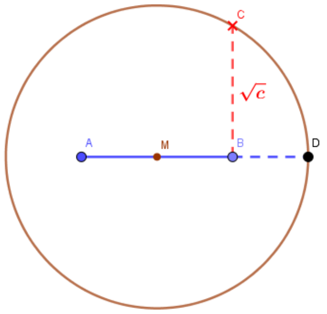


Ilustración 9. Método griego de resolución de ecuaciones.

3.3. Edad Media (siglo V – siglo XV)

La Edad Media fue una época de transición entre la Antigüedad Clásica y la Era Moderna, tiene su inicio aproximado en el año 476 d. C. tras la caída del Imperio Romano. Existe una numerosa cantidad de afirmaciones y acepciones asociadas a esta época – principalmente refiriéndose a Europa – entre estas se comprende a la Edad Media como La Noche Estrellada De La Humanidad ya que tras las constantes guerras la mayor parte de la población era analfabeta, pues el conocimiento estuvo relegado a sólo una acotada parte de la población (principalmente el clero y dirigentes) sumado al temor supersticioso generalizado hacia magos, brujas, demonios, espíritus malvados, entre otros seres que dieron lugar a un periodo de torturas, conquistas y saqueos en nombre de Dios (Gombrich, 1936).

A pesar de ello, no todo es oscuridad (de allí las estrellas) pues se observaron cambios positivos en las actitudes de la humanidad – al menos al compararse con épocas anteriores – siendo que muchas personas deseaban vivir según la voluntad divina, convirtiéndose en monjes que centraban su vida en idolatrar a Dios. En contraposición a las anteriores aseveraciones es importante resaltar la falta de desarrollo (en casi cualquier ámbito) por parte de mujeres, esto respondiendo a unos arraigados cánones supersticiosos que conllevaron a una muy extensa serie de injusticias, privaciones y crímenes contra aquellas que desafiaban las normativas tanto como les era posible (Lechad, 2018).

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible identificar una gran dificultad al realizar la búsqueda de desarrollo matemático y en especial de heurísticas en Europa. Por tal motivo, se dirigió la investigación al Extremo y Medio Oriente, estudiando los avances matemáticos de las civilizaciones china, hindú y árabe.

3.3.1. China

En Oriente Extremo, el panorama era bastante similar a Europa debido a los no pocos conflictos entre las poblaciones chinas, turcas y mongolas por territorios y poder político, a la par que el budismo se convertía en la principal religión de la zona se presentaron continuos conflictos políticos (Gombrich, 1936); todo lo anterior generó una considerable pérdida de los registros escritos que se tenían a nivel general, en especial, aquellos con contenido matemático anteriores al siglo III a. C. (Rey y Babini, 2013). No fue hasta aproximadamente el siglo VI d. C. que China tuvo un periodo de relativa paz con la llegada de la dinastía Sui, donde el emperador reformó la administración de la capital y estableció exámenes oficiales cuyo premio era formar parte de la rama administrativa de la ciudad, en lugar de relegar estas plazas a los aristócratas como era tradicional (Gombrich, 1936).

China mantuvo relaciones comerciales con países occidentales como India y – más adelante – Arabia, lo que promovió intercambios culturales y académicos de variada índole (Babini, 1952). Los chinos contaban con dos sistemas de notación numérico, uno del tipo multiplicativo por grupos de base diez para el cual Collette (2000) detalla que "se utilizaban símbolos distintivos para las potencias de diez, y en su forma escrita, los símbolos numéricos en posiciones impares (de izquierda a derecha o de abajo arriba) se multiplicaban por el siguiente" (p. 173); el otro en cambio era posicional decimal – muy parecido al empleado actualmente – en el que se empleaban varillas de bambú que se debían acomodar en columnas según fuese la operación por realizarse, según algunas teorías (MatemáticasTV, 2008) se debía principalmente al apoyo visual que ofrecía sobre todo para realizar cálculos, asimismo, este sistema pudo transmitirse a los hindúes, quienes le darían sus propias adecuaciones según sus desarrollos matemáticos, lo cual se tratará con mayor detalle en el próximo inciso.

Los chinos, como otras civilizaciones de la época, mostraron cierta fascinación mística por los números ya sea por las combinaciones que estos permiten, los resultados de determinados cálculos o las relaciones que podían establecer con las cifras y su cosmovisión (Mataix, 1986). Por la cual, sus estudios se vieron permeados por tales consideraciones, ligando ciertas configuraciones numéricas a alguna aserción, verbigracia los números impares se consideraban masculinos mientras que los pares femeninos, el cuatro era considerado de mala suerte, entre otros (MatemáticasTV, 2008); los cuadrados mágicos[14] recibieron un tratamiento

[14] Un cuadrado mágico es una cuadrícula cuadrada en cada una de cuyas celdas se escriben números enteros distintos de forma que cada fila horizontal y cada columna vertical, y cada diagonal, suma el mismo número (Crilly, 2009).

similar pues fueron relacionado con la adivinación (Mankiewicz, 2005). Según Crilly (2009) "los cuadrados mágicos tienen patrones muy curiosos, incluso juzgándolos según criterios matemáticos. Se hallan en la frontera entre las matemáticas que usan una profusión de símbolos y los fascinantes patrones que adoran los creadores de puzles" (p. 304), aunque los chinos los empleaban como rompecabezas místicos no dejan de ser un concepto interesante al que otros pensadores unos siglos más tarde dedicarían horas de estudio buscando patrones cada vez más complejos en cuadrados de mayores dimensiones.

Por otra parte, Mankiewicz (2005) señala dos textos matemáticos que lograron sobrevivir a las guerras y las quemas de libros (pero no a las reediciones de cada copista) los cuales fueron Los Diez Cánones del Cómputo y, unos siglos más tarde, El Libro de los Nueve Problemas; ambos documentos fungían como un compendio de variados problemas con, por ejemplo, análisis indeterminado y ecuaciones algebraicas de grado superior que eran empleados para enseñar en las escuelas o para estudiar matemáticas (Rey y Babini, 2013). Babini (1952) señala además que en estos documentos emplearon colores rojo y negro para distinguir los coeficientes positivos y negativos de las ecuaciones respectivamente.

Otro campo estudiado por los chinos fue la Economía (MatemáticasTV, 2008), infiriendo reglas y un método para el cálculo de impuestos para los funcionarios mientras que los precios de los mercados para los comerciantes. En el país se contaba con un sistema de impuestos y moneda generalizados, por lo que – similar a Babilonia Antigua – se crearon métodos de resolución de ecuaciones con el uso de balanzas. El método se basaba en tener varias configuraciones de la cantidad de objetos pesados y el peso total de los mismos, con estas se generaba un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes naturales al que después de aplicar variados movimientos algebraicos se podía obtener los valores para cada objeto implicado. Por ejemplo, empleando términos actuales para determinar el peso de un melocotón y una ciruela:

$$x := \ peso\, melocotón \qquad\qquad y := \ peso\ ciruela$$

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Duplicando la primera ecuación queda:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 30 \\ \ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera:

$$5x = 20$$

Por lo que se concluye que:

$$x = 4 \quad ; \quad y = 3$$

Con sistemas cada vez más complejos y números más grandes los chinos desarrollaron un método que en occidente no se conocería hasta el siglo XX (MatemáticasTV, 2008).

La información que se tiene actualmente sobre los desarrollos científicos de China Antigua es difusa y de dudosa veracidad histórica, sin embargo, se siguen descubriendo más datos al respecto cada cierto tiempo, por lo que aún es posible encontrar alguna otra maravilla enterrada por el tiempo (Rey y Babini, 2013).

3.3.2. India

Contemporánea a China fue India, civilización con una antigua tradición oral que dificultó la documentación de sus saberes y la falta de una cronología precisa (Rey y Babini, 2013), Mankiewicz (2005) añade que "(…) si se puede decir que la matemática griega nació de la filosofía, la matemática hindú tiene sus raíces en la lingüística" (p. 40), de allí que sus contribuciones matemáticas se presentaran como versos con fuertes vínculos religiosos. A pesar de lo anteriormente mencionado fue gracias a la civilización hindú que se obtuvo la primera pincelada a un lenguaje universal (MatemáticasTV, 2008) con la creación del sistema numérico posicional, sin embargo, este sufrió algunas modificaciones en cuanto a su escritura hasta evocar al que se emplea actualmente (Ibáñez, 2019).

Los hindúes, más específicamente Brahmagupta (598 – 670), también estudiaron conceptos matemáticos como el cero – comúnmente ignorado por otras culturas debido a su naturaleza abstracta – y los números negativos – nombrados fortuna y deuda para las variables positiva y negativa respectivamente –; detallando algunas de sus propiedades y las operaciones aritméticas básicas, ejemplo de ello fue una sucinta pincelada a algunos de los casos de la actualmente conocida ley de los signos (Moreno, 2018). No obstante, Brahmagupta encontró dificultades al intentar determinar la división por cero, a las cuales Bhaskara II (1114 – 1185) respondería a mediados del siglo XII introduciendo el concepto de infinito (MatemáticasTV, 2008).

En cuanto al álgebra, los hindúes lograron desligar los números de una base sensible, entendiéndolos como entes abstractos en los que no se aplicaban las mismas normas que la realidad, de allí que pudiesen trabajar con el cero o los negativos sin mayores reticencias, pensamiento que también se vio reflejado al momento de resolver ecuaciones de segundo grado o de grado superior, contemplando además las posibles soluciones negativas (MatemáticasTV, 2008).

De la misma manera, los hindúes perfeccionaron los conocimientos legados por los griegos en cuanto a la Geometría, pero esta vez conduciendo sus estudios hacia el mundo de los números, dando lugar a la rama de la Trigonometría. Sus hallazgos les permitieron edificar sus complejas construcciones, así como explorar los cuerpos de agua próximos, ya que con esta potente herramienta en sus hábiles manos lograban determinar distancias cuando había alguna dificultad para tomar medidas precisas (MatemáticasTV, 2008). Asimismo, según Mankiewicz (2005), Aryabhata (476 – 550) aplicó sus saberes a la astronomía, creando una larga – y con sorprendente exactitud[15] – tabla con los resultados del seno para cualquier ángulo que empleaban para la predicción de eventos estelares como eclipses, así como un exhaustivo cálculo para determinar el valor de π; unos siglos más tarde Madhava (1340 – 1425) refinaría los descubrimientos de Aryabhata empleando series infinitas para establecer expansiones polinómicas infinitas para el seno y coseno, así como expresar el valor de π.

Para finalizar, los hindúes exploraron los campos de la probabilidad (Moreno, 2018) determinando permutaciones y combinatorias en variados contextos con fórmulas – iguales a las utilizadas actualmente – inferidas por sí mismos. Emplearon sus saberes en problemas prácticos como por ejemplo para determinar las combinaciones posibles de elementos de un conjunto de gustos (sabores).

El enfoque abstracto que los hindúes le dieron a las matemáticas sería adoptado después por los árabes, extendiendo sus estudios especialmente a campos como el Álgebra.

3.3.3. Arabia

En Arabia si bien se presentaron guerras territoriales y religiosas – principalmente entre el islam y el cristianismo – también hubo desarrollo tanto científico como tecnológico, así se llegó a la creación de La Casa de la Sabiduría (Mankiewicz, 2005), una biblioteca fundada por el Califa[16] Harún Al-Rashid (763 – 809) con un propósito similar a la destruida en Alejandría, en este centro del saber se estudiaron, recuperaron y tradujeron diversos textos de grandes pensadores antiguos entre los que se encuentran manuscritos de Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.), Platón (427 a. C. – 347 a. C.), Galeno (129 – 216), Euclides (325 a. C. – 265 a. C.), Arquímedes, entre otros.

[15] De hasta ocho lugares decimales (Mankiewicz, 2005).
[16] Equivalente a un emperador.

De la misma manera, se presentaron avances matemáticos importantes, los árabes continuaron con los trabajos de los antiguos pensadores griegos y de los hindúes esta vez con miradas hacia campos que no habían sido estudiados a profundidad como el Álgebra. Mankiewisz (2005) señala que una de las primeras contribuciones árabes fueron los intentos por liberar el Álgebra de la Geometría, traduciendo problemas geométricos a algoritmos algebraicos y la ampliación de los procedimientos algebraicos más allá de las raíces geométricas.

El pensamiento algebraico empleado posteriormente en Europa nació de la mano de personajes como Al-Khwarizmi (780 – 850) matemático, astrónomo y geógrafo autor de la primera obra sobre la solución sistemática de ecuaciones lineales y cuadráticas, el Compendio Sobre el Cálculo por Medio de Transposición y Reducción fue escrito con el propósito de ser una ayuda práctica para las personas con problemas de cálculo (Pickover, 2009). Respecto a ese texto Rey y Babini (2013) reportan que “contribuyó a la difusión en el mundo árabe de las cifras hindúes y del uso del cero; como en textos posteriores, contiene las reglas de las cuatro operaciones con enteros y fracciones”; Pickover (2009) añade “su libro contenía además diversos problemas (con sus soluciones) a modo de ejemplo”. Mankiewisz (2005) detalla que, aunque la motivación de Al-Khwarizmi fue la resolución de problemas prácticos, sus estudios algebraicos se centraron en ecuaciones lineales y cuadráticas con manipulaciones algebraicas[17] similares a las actuales, manipulaciones que “no son más que la solución de la ecuación lineal por el método de interpolación lineal, exacto en este caso” (Rey y Babini, 2013).

Por último, otra de las contribuciones árabes a las matemáticas fueron sus productivos estudios astronómicos y su desarrollo en el área de la Trigonometría, Rey y Babini (2013) avalan a variados pensadores de la época el estudio de las seis funciones circulares – trabajadas por civilizaciones anteriores –, así como estudios que permitieron comprenderlas como relaciones entre valores específicos. Dichos conocimientos fueron capaces de generar tablas astronómicas con una precisión cada vez mayor que a su vez se emplearon en sus rituales religiosos con diversos fines (Mankiewicz, 2005).

Terminada la revisión histórico-matemática de las tres civilizaciones se concluye que, aunque hubo un significativo desarrollo científico (pobremente reconocido) sin el cual el

[17] Entendidas también como reglas.

mundo actual no sería el mismo, para el propósito de este trabajo de grado se contemplan múltiples inconvenientes:

- Se presentan bastos saltos temporales de la documentación respecto a China, lo que complejiza investigar a detalle sus desarrollos matemáticos.
- Los amplios estudios de los hindúes fueron principalmente aritméticos, con largos y exhaustivos cálculos, difíciles de implementar en alguna actividad para el Museo Interactivo Digital.
- Los árabes realizaron extensas investigaciones con un fuerte carácter algebraico, por lo que se tiene un inconveniente similar al anterior.

Por lo cual, no fue posible identificar adecuadamente en el desarrollo matemático de cada civilización acciones que encajen con la definición de Heurística planteada anteriormente. Sin embargo, los demás avances matemáticos explayados anteriormente se incluirán como otras exhibiciones en el MID[18].

3.4. Edad Moderna (siglo XV – siglo XVIII)

La Edad Moderna es un periodo histórico comprendido entre los años 1500 y 1800 aproximadamente (Gloël, 2016). Para el cual se acreditan diversos eventos históricos como los causantes de su origen y finalización de la Edad Media, entre los que se destaca:

- El descubrimiento, y posterior conquista, del continente americano por parte de los europeos en el año 1492.
- La conquista de Constantinopla por parte de los turcos en el año 1453[19], mismo año en el que se finaliza el conflicto entre Francia e Inglaterra denominado la Guerra de los Cien Años.

Siendo estos los eventos que, en consecuencia, generaron un conjunto de cambios culturales, sociales y políticos que dieron paso a movimientos culturales como el Humanismo y el Renacimiento (Gloël, 2016).

Si bien, los renacentistas tenían como base principal de sus conocimientos los estudios realizados por los filósofos griegos, también se aventuraban a realizar trabajos que permitieran

[18] Se plantearon diversos tipos de los objetos concretos en el MID, las características de cada uno de ellos se explican en el subcapítulo 5.2.
[19] Siendo esta la fecha más temprana que se emplea para delimitar el inicio de la Edad Moderna.

expandir estos saberes y dar respuesta a sus propias preguntas. Entre ellos, se destaca el trabajo de Leonardo Da Vinci, quien miró con nuevos ojos a las plantas y animales, reflexionando sobre cómo lograban las aves levantar el vuelo siendo el primero en esta época en plantear la posibilidad de construir una máquina voladora que permitiera al humano surcar los cielos (Gombrich, 1936).

Así mismo, otro de los factores que dio paso a la amplitud de los avances científicos de la época se debe a la invención de la imprenta en 1453 (Gloël, 2016), ya que permitió ampliar en gran medida la distribución y adquisición del conocimiento por parte de la población, que, de la mano con los estudios renacentistas, fue clave para ampliar en gran medida el desarrollo científico de la época.

Este desarrollo científico se dio en todas las áreas del saber, al punto de que la ciencia europea en dos siglos consiguió una producción mayor a la hecha por los griegos durante un milenio (Collette, 2000). En particular, al estudiar la rama de las Matemáticas, resulta relevante destacar el papel de matemáticos como Nicolas de Cusa (1401 – 1464), John Napier (1550 – 1617), Tartaglia (1499 – 1557), Piero della Francesca (1415 – 1492), Campano (1429 – 1477), entre muchos otros.

Una destacable característica de esta nueva forma de entender a las ciencias fue la desarticulación del pensamiento griego antiguo al respecto de ciertas ideas, si bien al desarrollo científico de pensadores clásicos se les dio la importancia que aún hoy en día merecen, este no es ajeno a errores y lagunas propias de la época. Ejemplo de lo anterior fue la inclusión de un concepto matemático tan abstracto como importante: el infinito en acto. Respecto esto último Bejarano y Páez (2022) detallan en su texto que el infinito fue uno de los conceptos más polémicos y con mayor resistencia en las matemáticas, pues debido a su carácter abstracto y poco intuitivo gran cantidad de pensadores se mostraron reacios a siquiera considerar su existencia, el infinito en acto entendido como un tipo de infinito acabado o como una totalidad completa que existe en cierto instante requirió de una larga travesía en distintas teorías para que finalmente se incluyera en las ciencias exactas.

Debido al amplio desarrollo científico de la etapa histórica para este documento se decidió trabajar algunos de los muchos problemas tratados en la época, explayando en variadas miradas según los criterios expuestos al inicio del capítulo.

3.4.1. Curvas Mecánicas

Las curvas mecánicas[20] son curvas generadas por el movimiento de un punto cuyas coordenadas están determinadas por una variable conocida como parámetro, siendo este definido en un intervalo de números reales según ciertas condiciones de la construcción. Debido al aspecto dinámico estas construcciones no fueron tenidas en cuenta por muchos matemáticos – *v. g.* los antiguos griegos –, ya que el movimiento no era considerado en el formalismo matemático de la época. Empero aún en tiempos antiguos hubo pensadores que estudiaron este concepto con diversos fines, entre estos, darles respuesta a los problemas clásicos de la Geometría.

La Antigua Grecia no fue ajena al fuerte tinte religioso de las épocas, por lo que sus investigaciones estaban fuertemente influenciadas por sus creencias y mitos (Asimov, 1999), muestra de ello fueron los problemas clásicos de la Geometría, tres problemas en los que para la respuesta se debía utilizar únicamente la regla y compás ideales. Durante décadas pensadores propusieron variadas posibles respuestas empleando herramientas y nuevas teorías que, si bien no fueron bien recibidos en la época, en la actualidad permiten un campo de estudio de gran riqueza, verbigracia de esto es la Espiral de Arquímedes con la cual es posible estudiar propiedades del número π; sin embargo, gracias al desarrollo teórico en los últimos siglos se sabe que no es posible dar una solución con tales condiciones iniciales.

En este apartado se tratarán algunas de las soluciones a los problemas clásicos de la Geometría propuestas por algunos de los antiguos pensadores griegos, teniendo en cuenta ciertas precisiones como que sus estrategias se basaban en el estudio de casos concretos, no se tenía en cuenta el dinamismo para la Geometría, se presentaban vacíos conceptuales como la falta de continuidad de los números reales, no se tenía conceptos matemáticos como la notación, el plano cartesiano o las reglas algebraicas (Rey y Babini, 2013). Todos estos problemas fueron lentamente resueltos tanto por el cambio de pensamiento que data de la Edad Moderna como por los aportes de diversos autores – *i. e.* la actualización de la notación algebraica por parte, entre otras, de François Viète, el desarrollo de la Geometría Analítica de la mano de René Descartes y los estudios de Pierre de Fermat –, los cuales ayudaron a renovar y ampliar los trabajos de anteriores pensadores.

[20] También conocidas como curvas cinemáticas.

Entendiendo las precisiones de la época, a continuación, se explican someramente los problemas a la par que dos soluciones para cada uno, se emplean la notación y tecnologías actuales, así como el análisis y las teorías que datan de la Edad Moderna.

- **Duplicación del cubo:** encontrar el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado. Este problema también se conoce como el Problema de Delos, ya que, según la leyenda, para evitar la propagación de una epidemia se consultó al oráculo de Apolo en Delfos, quien les informó que debían construir un altar de forma cúbica de tal forma que tuviese el doble de volumen del que tenían en su ciudad (Mataix, 1986). El final de la historia es trágico, pues, como se mencionó anteriormente, resulta imposible dar una respuesta empleando únicamente regla y compás.

    - **Ilustración 10**: Arquitas de Tarento fue uno de los primeros en dar respuesta al problema creando la curva que lleva su nombre (Curva de Arquitas), en dicha construcción se emplean un cilindro, un toro de revolución y un cono; creados de tal forma que al intersecarse se obtienen dos medias proporcionales con las cuales dar una respuesta teórica (Morales, 2010).
    Para construir la curva se puede seguir la siguiente secuencia de pasos[21]:

        - Sea la circunferencia OBA de diámetro $OA = a$, además de una cuerda $OB = b$
        - Sobre la circunferencia se construye un cilindro.
        - Sea el toro de revolución con radio interior nulo y radio del círculo generador igual a OA
        - Se determina la intersección entre el cilindro y el toro (d).
        - Se hace girar la $\overrightarrow{OB}$ alrededor de la $\overleftrightarrow{OA}$, generando un cono que interseca tanto al cilindro en una curva (e) como a la curva d en P.
        - La proyección de P sobre la circunferencia OBA será T.
        - Se cumple que $\frac{OB}{OT} = \frac{OT}{OP} = \frac{OP}{OA'}$
        - OT y OP son medias proporcionales entre a y b, además si $a = 2$ y $b = 1$ entonces $OT = \sqrt[3]{2}$

[21] El procedimiento completo se encuentra en Morales (2010).

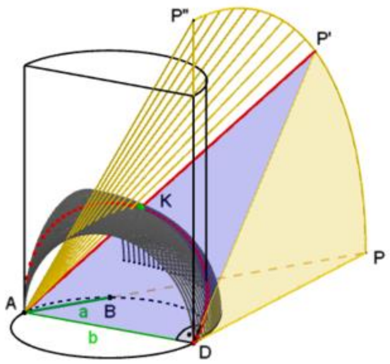


Ilustración 10. Curva de Arquitas.

- **Ilustración 11**: Diocles empleó la cisoide (Mataix, 1986), curva que puede usarse para construir dos medias proporcionales según una razón dada. La Cisoide de Diocles es la primera de una familia de curvas con una serie de propiedades que, aunque no fueron exploradas en la Edad Antigua, permitieron amplios debates en la Modernidad respecto a la forma de trazar tangentes a esta.

  Para construir la curva se puede seguir la siguiente secuencia de pasos[22]:
  - Sea una recta $\mathcal{L}$ paralela al $Eje\ Y$ a una distancia $2a$ y un $R \in \mathcal{L}$
  - Sea un radio vector $\overline{OR}$ que corta al círculo en P
  - Sea un $M \in \overline{OR}$ tal que $OM = PR$
  - La cisoide es el lugar geométrico de todos los M cuando R recorre $\mathcal{L}$

  Con algunos despejes y movimientos algebraicos se puede inferir que:

  - $OR = \frac{2a}{\cos\vartheta}$ y $OP = 2a\cos\vartheta$, por lo que la ecuación de la cisoide en coordenadas polares es $r = \frac{2a}{\cos\vartheta} - 2a\cos\vartheta$
  - Al transformar la expresión a coordenadas cartesianas queda $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2a\sqrt{x^2+y^2}}{x} - \frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$
  - Simplificando la expresión y haciendo ciertos movimientos algebraicos queda $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y}{2a-x}$
  - Al considerar la recta $\frac{y}{x} = \lambda$, que corta a $\mathcal{L}$ en $(2a, 2a\lambda)$
  - Cuando se reemplaza en la expresión anterior queda $(\lambda)^3 = \frac{y}{2a-x}$

[22] El procedimiento completo se encuentra en Mataix (1986).

- Expresión que corresponde a una recta entre los puntos $\begin{matrix} x = 0, & y = 2a\lambda^3 \\ x = 2a, & y = 0 \end{matrix}$ y corta al $Eje\ Y$ en un punto cuya ordenada es $2a\lambda^3$.
- Haciendo $2a = l$ y $\lambda^3 = 2$
- El segmento cuyos extremos son $(0, 2l)$ y $(l, 0)$
- Por el punto de intersección de la cisoide se traza la recta que pasa con el origen, su intersección con $\mathcal{L}$ dará el valor $l\sqrt[3]{2}$

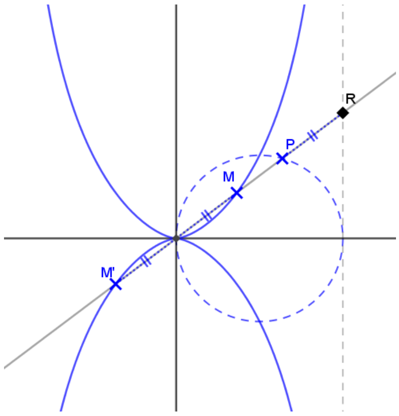


Ilustración 11. Cisoide de Diocles.

- **Trisección del ángulo:** determinar un ángulo cuya medida sea un tercio de un ángulo arbitrario dado. Este problema se puede resolver empleando únicamente regla y compás ideales en ciertos casos específicos, debido a la imposibilidad de dar respuesta en casos generales múltiples pensadores idearon variadas técnicas a lo largo de los años, desde la antigüedad hasta épocas modernas.

  - **Ilustración 12**: Nicomedes, contemporáneo a Diocles y Arquímedes, ideó la concoide (Mataix, 1986) curva con la propiedad de trisecar ángulos arbitrarios, sin embargo, para cada ángulo se debe trazar una curva distinta. Asimismo, la concoide se puede generalizar para trazarse tanto a rectas como a otras curvas como la elipse. Para construir la curva se puede seguir la siguiente secuencia de pasos[23]:
    - Sea una recta $\mathcal{L}$ paralela al $Eje\ Y$ a una distancia a y un $R \in \mathcal{L}$
    - Sea $\overrightarrow{OR}$ y un $S \in \overrightarrow{OR}$ tal que $O - R - S$ y $RS = d$, con d una distancia fija
    - La concoide es el lugar geométrico de todos los S cuando R recorre $\mathcal{L}$

[23] El procedimiento completo se encuentra en Mataix (1986).

En la **Ilustración 13** se puede observar cómo con algunos despejes y movimientos algebraicos:

- $BA = AR = d$ por la definición de la concoide
- ΔRAB es isósceles con $\overline{RA} \cong \overline{AB}$, por lo que $\measuredangle ARB \cong \measuredangle ABR$
- ΔARO es isósceles con $\overline{AR} \cong \overline{RO}$, por lo que $\measuredangle OAR \cong \measuredangle AOR$
- Además $m\measuredangle OAR = m\measuredangle AOR = 2m\measuredangle ABR$ ya que para ΔRAB el $\measuredangle OAR$ es un ángulo externo
- $\measuredangle ABR \cong \measuredangle YOA$ por propiedades de las rectas paralelas
- Finalmente $m\measuredangle YOA = \frac{1}{3} m\measuredangle ROA$

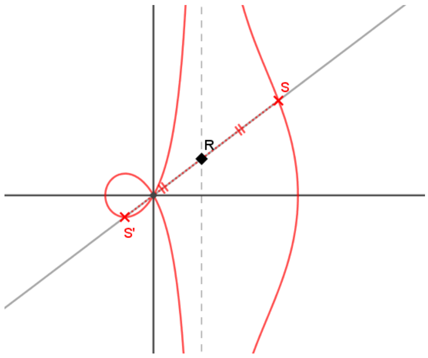


Ilustración 12. Concoide de Nicomedes.

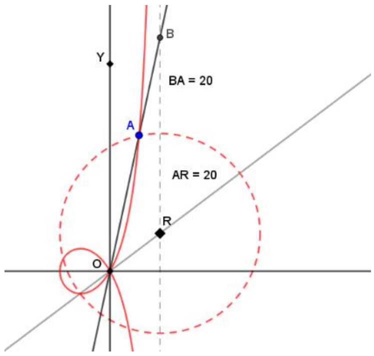


Ilustración 13. Demostración de la solución de Nicomedes.

- **Ilustración 14**: Hipias de Élide fue un griego que para dar respuesta al problema de la trisección del ángulo idea una de las primeras curvas cinemáticas de las que se tiene registro: la *trisectriz* de Hipias (Mataix, 1986), no obstante, casi un siglo después esta curva fue utilizada por Dinóstrato para su resolución del problema de la cuadratura del círculo por lo que a esta construcción también se le conoce con el nombre de Cuadratriz de Dinóstrato (Rey y Babini, 2013). Es importante añadir que la curva no es construible con regla y compás, pero muchos de sus puntos sí lo son (Bombal, 2012).

  Para construir la curva se puede seguir la siguiente secuencia de pasos[24]:

  - Sea $\overline{OE}$ radio vector que se desplaza de la posición $\overline{OA}$ a $\overline{OB}$ girando con una velocidad uniforme

[24] El procedimiento completo se encuentra en Bombal (La Cuadratura del Círculo: Historia de una Obsesión, 2012).

- Sea $\overleftrightarrow{FP} \parallel \overleftrightarrow{OA}$ que se desplaza de la posición $\overline{OA}$ a $\overline{BC}$ en el mismo tiempo y velocidad uniforme
- La cuadratriz es el lugar geométrico de todos los puntos de intersección (M) entre $\overline{OE}$ y $\overline{FP}$

Con algunos despejes y movimientos algebraicos se puede inferir que:

- Como $\measuredangle BOE \propto \overline{OF}$ para dividir el ángulo basta con dividir el segmento proporcional en cualquier número de partes, para este caso tres partes.

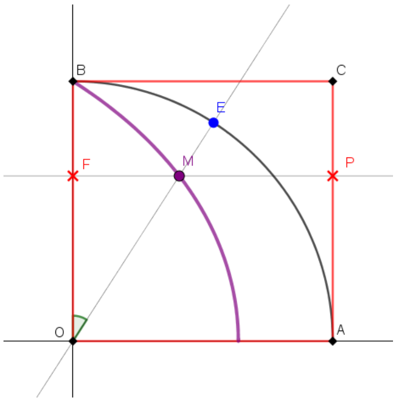


Ilustración 14. Cuadratriz de Hipias.

- **Cuadratura del círculo:** construir un cuadrado de igual área a la de un círculo dado. Este problema también puede entenderse geométricamente como: dado un segmento como radio de un círculo determinar otro segmento como lado del cuadrado equivalente (Rey y Babini, 2013). Los antiguos egipcios trabajaron en su propia versión del problema, sin dar muestras de una demostración o generalización se limitaron a presentar el único caso en el que una circunferencia con diámetro de nueve unidades encierra la misma área que un cuadrado de ocho unidades de lado (Mankiewicz, 2005).

  - **Ilustración 15**: Hipócrates de Quíos fue un matemático que logró resolver el problema de la cuadratura empleando regla y compás – para unos casos específicos – con la creación de la lúnula, figura plana limitada por dos arcos de circunferencias (Bombal, 2012).

    Para construir la curva se puede seguir la siguiente secuencia de pasos[25]:

    - Sea ΔACB isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ y $\measuredangle ACB$ recto
    - Sea la lúnula comprendida entre los arcos $\widehat{AFD}$ y $\widehat{AED}$
    - $Área\ lúnula\ AECF = Área\ \Delta AOC$

[25] El procedimiento completo se encuentra en Bombal (2012).

Con algunos despejes y movimientos algebraicos se puede inferir que:

- Por el Teorema de Pitágoras $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2AC^2$
- $\frac{Área(semicírculo\ AEC)}{Área(semicírculo\ ACB)} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{2AC^2} = \frac{1}{2}$
- $Área\ lúnula\ AECF = \frac{1}{2}Área\ semicírculo\ ABC =$ $Área\ cuadrante\ AFCO$
- Sustrayendo el área de la región común $AFCD$ se obtiene
- $Área\ lúnula\ AECF = Área\ \Delta AOC$

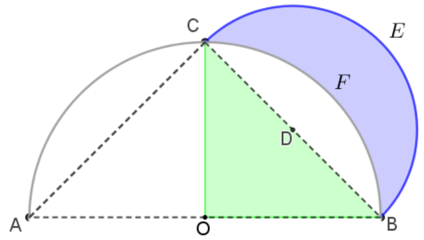


Ilustración 15. Lúnula de Hipócrates.

- **Ilustración 16**: Arquímedes, considerado uno de los mayores científicos de sus tiempos (Stewart, 2018), fue pionero en variados campos como las matemáticas, física y astronomía; innovó con sus construcciones mecánicas y desligándose de los rigurosos criterios de la época (*v. g.* prioridad a las demostraciones por sobre la utilidad de los conceptos). Con sus amplios estudios sobre la cuadratura del círculo ideó la Espiral de Arquímedes con la cual, entre otras propiedades, es posible construir un segmento con magnitud π (Contreras y Del Pino, 2002).

  Para construir la curva se puede seguir la siguiente secuencia de pasos[26]:

  - Sea $\mathcal{L}$ una recta en el plano que gira en torno al origen (O) hasta volver a su posición inicial.
  - Sea $M \in \mathcal{L}$, M es un punto móvil que se desplaza uniformemente a lo largo de la recta comenzando en O.
  - El movimiento de M describe la Espiral de Arquímedes.

Con algunos despejes y movimientos algebraicos se puede inferir que:

- Sea P el punto de la espiral cuando $\mathcal{L}$ completa la primera vuelta.

[26] El procedimiento completo se encuentra en Contreras y Del Pino (2002).

- Sea T el punto de intersección entre la recta tangente a la espiral en P y el $Eje\ Y$
- El $\overline{OT}$ corresponde al perímetro de $\odot\ O_{OP}$
- El $Área \odot O_{OP} = Área\Delta OPT$

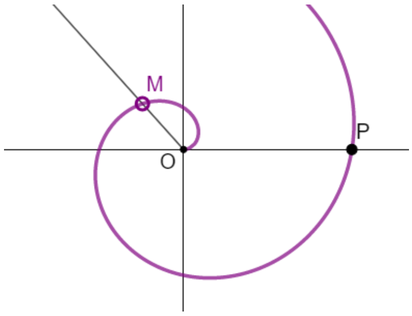


Ilustración 16. Espiral de Arquímedes.

3.4.2. Método de Indivisibles

Resulta relevante tratar con mayor detalle el problema de las cuadraturas para el que, además de variadas curvas mecánicas, se generaron trabajos de gran valía para las matemáticas, pues fue su estudio el que generó una ruptura conceptual y metodológica en contraposición de teorías anteriores sobre el análisis infinitesimal, además, en la época se observa un uso implícito de límite, aproximando con integraciones aritméticas lo que más adelante se conocería como integral definida (Gonzalez, 1995).

Uno de los primeros en este recorrido fue Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), un italiano que dedicó su vida tanto a la iglesia como a la matemática. Trabajó en conceptos matemáticos como los logaritmos y la geometría, fue educado por un discípulo de Galileo Galilei con quien, tiempo más tarde, se carteó constantemente discutiendo diversos temas científicos (Durán y Guerrero, 2014). Cavalieri desarrolló teorema que lleva su nombre (Principio de Cavalieri) en el cual se afirma que

> Si dos figuras planas (o sólidas) tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una misma razón, entonces las figuras planas (o solidas) están también en esa misma razón. (Canizales y Erazo, 2013, p. 66).

Posteriormente empleó el Principio con la teoría de los indivisibles en la que también fue un pionero, para Cavalieri "un indivisible de una región plana es un segmento de recta que se obtiene al cortar la región con una recta paralela a una dada inicialmente" (Canizales y Erazo, 2013,, para el caso de la Geometría espacial se tiene un caso similar empleando regiones planas resultado de cortar el sólido estudiado con un plano paralelo a uno dado (ver Ilustración 17). Por lo que para determinar el área – o el volumen – de una figura basta con comparar los indivisibles correspondientes con otra cuya magnitud sea conocida. Debido a que en la época aún se tenía cierta reticencia hacia el concepto del infinito, sus ideas fueron rechazadas.

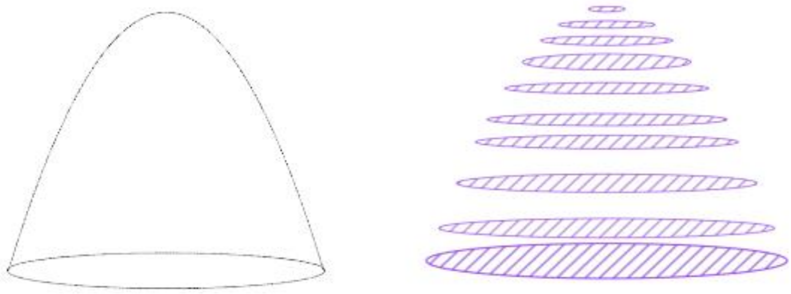


Ilustración 17. Indivisibles de un sólido tomada de Canizales y Erazo (2013, p. 80).

Por su parte, John Wallis (1616 – 1703), quien también dedicó su vida al clero y los números, retomó el trabajo de Cavalieri con los indivisibles, con lo que generó un avance de la Geometría Analítica al asociarla con el Análisis Infinitesimal (Collette, 2002). Wallis se apoyó en el desarrollo geométrico de Descartes (1596 – 1650) y Fermat (1601 – 1665) para expresar la Geometría en términos aritméticos, al respecto Collette (2002) afirma que "se dice a veces que Descartes «aritmetizó» la Geometría; sería probablemente más correcto decir que hizo posible esta «aritmetización», pero que fue de hecho Wallis, quien la efectuó" (p. 83), los trabajos de Wallis fueron ampliamente aritméticos, desligando los elementos geométricos sobre todo prescindiendo del álgebra geométrica de los griegos (Durán y Guerrero, 2014). Wallis afirmó que las demostraciones algebraicas eran tan válidas como las deducciones mediante líneas geométricas (Collette, 2002). En sus estudios advirtió que:

> las sumas necesarias para el cálculo de cuadraturas pueden realizarse aritméticamente mejor que en términos de razones geométricas. Las *Omnes lineae* de Cavalieri, a partir de cero, son tratadas por Wallis como series aritméticas; como sumas de sucesiones que tienden a un límite (Bobadilla, 2012, p. 45).

Buscando la suma de las series de potencias Wallis estableció para el caso del triángulo con altura y base A y B, respectivamente, que al inscribir sucesivamente paralelogramos "cada uno de los cuales tiene altura $\frac{1}{\infty}A$, y el aumento de anchura es $\frac{1}{\infty}B$, la altura inscrita será $\infty \times \frac{1}{\infty}A$, y la base no será B, pero si $B - \frac{1}{\infty}B$" (Bobadilla, 2012). Establecido esto Wallis dedujo lo que corresponde a la fórmula del área del triángulo, si a sus análisis se les realiza una interpretación geométrica se obtiene una idea prematura de las ideas de Riemann para la integral (ver Ilustración 18).

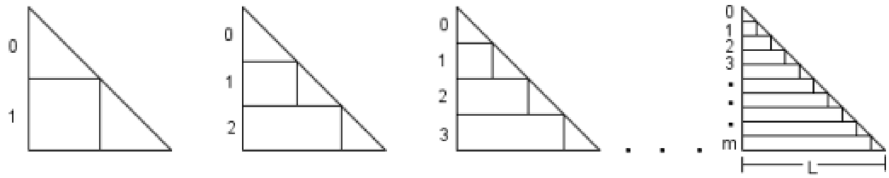


Ilustración 18. Área del triángulo tomada de Bobadilla (2012, p. 47).

3.4.3. Tangentes a una curva

Uno de los conceptos matemáticos al que múltiples pensadores de la época enfocaron sus estudios fue a la determinación de la recta tangente a una curva por un punto dado, problema que cada erudito resolvió según sus consideraciones. Los investigadores Fernández, Molina y Planas (2015) detallan en su reporte cómo Roberval (1602 – 1675), Torricelli (1608 – 1647) y Newton (1642 – 1727) trabajaron la tangencia empleando la dirección instantánea del movimiento; Descartes, por su lado, redujo el problema de la tangente de una curva a la tangente de una circunferencia cuyas coordenadas pueden inferirse mediante el método analítico; Fermat presentó una de las primeras pinceladas formales al Cálculo Diferencial por medio de los máximos y mínimos; Leibniz (1646 – 1716), con su peculiar entendimiento de la curva como conjunto de infinitos segmentos, le bastó con extender aquel que era el punto de tangencia. A continuación, se detallan algunos de los no pocos tratamientos que recibió tal enigma.

Gilles de Roberval fue un matemático francés que caracterizó a la tangente como "(...) la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe" (Collette, 2002, pág. 40). A continuación, junto con la Ilustración 19 se presenta un resumen[27] del método para el caso de la parábola:

[27] En Collette (Historia de las Matemáticas II, 2002, p. 40) se puede encontrar descrito el método completo.

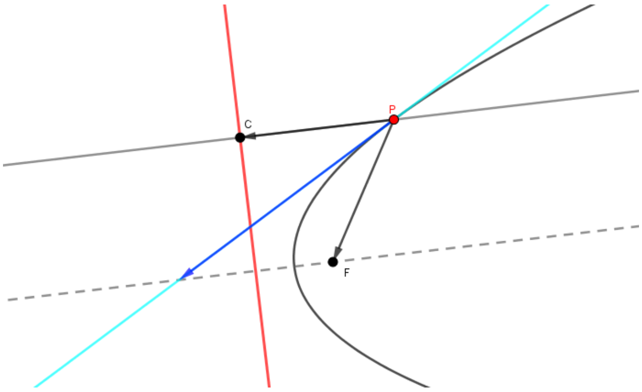


Ilustración 19. Método de Roberval

Siendo una parábola $\wp$ y P el punto de tangencia solicitado se comienza por determinar elementos como el foco (F), la directriz (d) y el eje focal (l), se trazan la recta paralela al eje focal que pase por el punto P y el segmento que une al foco y al punto de tangencia. El vector resultante de la suma de los vectores $\overrightarrow{PF}$ y $\overrightarrow{PC}$ coincidirá con la recta tangente solicitada.

Este método también podía aplicarse a otras cónicas y algunas curvas mecánicas como la cisoide y la cicloide, curvas a las que Roberval también dedicó sus estudios. Sin embargo, para esos casos el procedimiento y cálculos se vuelven exhaustivos.

Rene Descartes fue un filósofo y matemático con un amplio trabajo en ambos campos, logrando crear una nueva forma de razonar para las matemáticas, así como una postura filosófica (Stewart, 2018), de este pensador se conserva gran cantidad de trabajos, propuestas y hasta curvas que llevan su nombre (La Hoja de Descartes), sin embargo, para este trabajo se tiene en cuenta su propuesta sobre la determinación de rectas tangentes. Descartes planteó una solución en su libro «*la Géométrie*» la cual consiste en – empleando el método analítico – determinar una circunferencia de modo que la tangente de dicha figura sea equivalente a la de la curva original (Cortés y Sanjuán, 2004).

Para ello, se establece un segundo punto (variable) sobre la curva y se analiza la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje de las abscisas a la par que contiene a ambos puntos de la curva, esto con el objetivo de identificar las coordenadas del centro de la circunferencia a la cual, para la época, ya se sabía calcular su tangente en cualquier punto dado. Por lo que finalmente el problema se modificaba a determinar la ecuación de la recta tangente en un punto que coincidía además con la curva original (véase Ilustración 20).

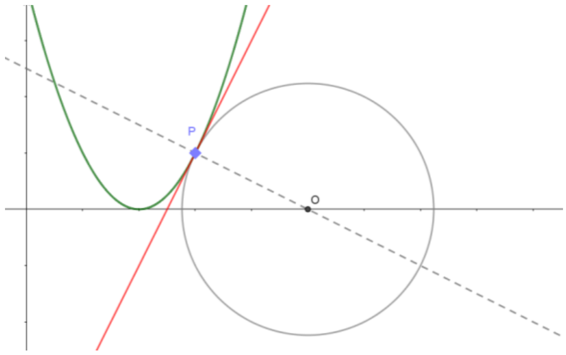


Ilustración 20. Método de Descartes.

Si bien este método a simple vista reduce el cálculo de la normal a una curva a el cálculo de la tangente a una circunferencia también puede ser empleado para calcular las derivadas de funciones de grado menor, así como algunas reglas de derivación y la distancia de un punto a un plano. No obstante, es importante destacar que algunos cálculos terminan por ser exhaustivos, además que algunas de las ecuaciones resultantes son demasiado complejas incluso para nuestras épocas, por lo que su uso no siempre era una buena opción (Cortés y Sanjuán, 2004).

3.5. Edad Contemporánea (siglo XVIII - actualidad)

La Edad Contemporánea se caracteriza por los múltiples cambios y avances en aspectos sociales, culturales, económicos y políticos a nivel mundial. Esta etapa inició con la Revolución Francesa en la cual se propuso un sistema político liberal, arrebatándole el poder a la monarquía para entregarlo a la burguesía (Pipkin, 2015). Este hecho histórico tuvo secuelas en múltiples países, dando lugar no sólo a procesos de revolución, sino también a múltiples guerras civiles e independencias.

De la misma manera, otras guerras posteriores de incluso mayor impacto como la Primera y Segunda Guerra Mundial, generaron cambios políticos que afectaron las dinámicas globales. Lo anterior incidió en una evolución tecnológica sin precedentes, en la cual la "contemplación matemática de la naturaleza permitió entender no sólo cómo sucedían las cosas sino, también, cómo sacar partido a las fuerzas naturales descubiertas, fuerzas que fueron sometidas a control y que hubieron de actuar para los seres humanos" (Gombrich, 1936), dando lugar a la creación y aprovechamiento de máquinas de vapor, herramientas que amplificaron la producción humana y dieron lugar a la Revolución Industrial. Posteriormente, combustibles como la gasolina y la electricidad dieron lugar a globalización y digitalización de la información.

En particular, durante la Segunda Guerra Mundial se destaca el caso particular de la Maquina *Enigma*, una herramienta de codificación empleada por los alemanes, con una complejidad tal que no era posible interceptar y decodificar los mensajes en el tiempo requerido a través de ningún método o herramienta conocida. Debido a ello, Alan Turing (1912 – 1954) junto a su equipo consiguieron establecer un algoritmo probabilístico el cual fue aplicado a través de máquinas conocidas como Bombe con las cuales se descifró a *Enigma* con éxito, lo cual – se estima – disminuyó la duración de la Guerra en algunos años (Población, 2012). Cabe resaltar que el éxito de Turing, junto a su trabajo previo *"On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem"* son algunos de los principales causantes de la evolución de la teoría de la computabilidad la cual da origen al amplio desarrollo digital en el cual nos encontramos actualmente (Vargas, 2013).

Durante esta etapa histórica se observó un amplio desarrollo tanto científico como tecnológico que modificó la manera de entender y resolver los problemas, al aprovechar las bondades que las computadoras ofrecen – tales como la agilidad y precisión en el cálculo numérico –, lo que llevó a generar soluciones a problemas que en otros momentos de la historia no tendrían respuesta o, en el mejor de los casos, habrían sido exhaustivos. Por tal motivo, se optó por detallar heurísticas asociadas a este ámbito, de las cuales se seleccionaron las redes neuronales, el Método Montecarlo y el desarrollo computacional.

3.5.1. *Machine Learning* – Redes neuronales

De la mano del avance tecnológico moderno, se han presentado múltiples propuestas que buscan emplear los sistemas digitales como herramienta para la solución de problemas, entre ellas se destacan las diversas ramas del *Machine Learning*, métodos de programación que pretenden diseñar y entrenar inteligencias artificiales a fin de que realicen una tarea de forma óptima. De estos algoritmos, uno de los más destacados son las redes neuronales debido a que su funcionamiento simula un cerebro real, aprendiendo desde la experiencia, generalizando, abstrayendo información, entre otras múltiples funciones (Matich, 2001).

Si bien, los primeros estudios relacionados a redes neuronales se remontan hasta 1936 de la mano de Alan Turing, uno de los mayores pasos históricos se dio en 1957 cuando Frank Rosenblatt (1928 – 1971) inicia el desarrollo del "Perceptron", la primera red neuronal funcional la cual tenía la capacidad de "aprender" una serie de patrones y posteriormente identificar otros similares (Matich, 2001). Sin embargo, poseía problemas para abarcar situaciones complejas. Tanto así que, en 1969 Minsky y Papert presentaron en su libro Perceptrons la incapacidad de este modelo para resolver cualquier problema no lineal, por más sencillo que este fuera, tildándolo de débil y generando un cese en su estudio de forma casi total. No fue hasta el año 1986 que Rumelhart (1942 – 2011) y Hinton (1947) que, basándose en los pocos estudios que se dieron en relación con el tema realizados durante esos años, plantearon un algoritmo de aprendizaje de propagación hacía atrás (*backpropagation*) que solucionaba las limitaciones del Perceptron y dio comienzo a las redes neuronales modernas.

Para comprender el funcionamiento básico de una red neuronal, primero resulta relevante comprender qué es y cómo funciona una neurona artificial, las cuales simulan las labores de su contraparte biológica. Es decir, obtienen información a través de las dendritas, las cuales desencadenan procesos de sinapsis internos y general una señal de salida a través de sus axones (Matich, 2001).

En el caso de las neuronas artificiales, se obtienen parámetros o datos iniciales a partir de la información dada por el usuario o la interacción con otras neuronas, las cuales son interpretadas por una función de entrada similar a una regresión lineal, la cual posteriormente les clasifica según la función de activación seleccionada (acción equivalente a excitar una neurona biológica), que posteriormente es expulsada a través de una función de salida (Matich, 2001).

El funcionamiento de una única neurona o la concatenación lineal de ellas es equivalente al funcionamiento del Perceptrón. Sin embargo, al igual que en la biología "mientras una neurona es muy pequeña en sí misma, cuando se combinan cientos, miles o millones de ellas pueden resolver problemas muy complejos" (Matich, 2001). Es a partir de la ampliación y conexión de capas, (una capa es un conjunto de neuronas que reciben un impulso y proporcionan resultados de forma simultánea), que se genera una red neuronal (ver Ilustración 21).

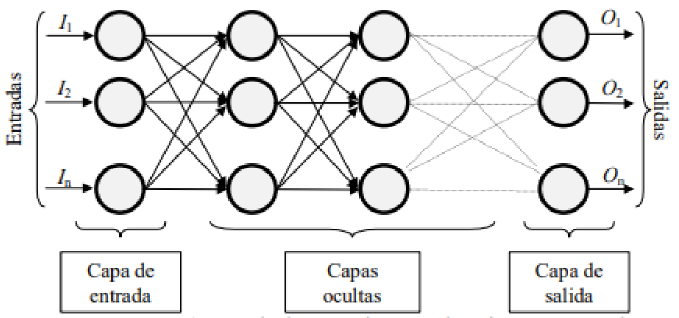


Ilustración 21. Red neuronal - tomado de Matich (2001, p. 12).

Es en este punto en el que el algoritmo de *backpropagation* cobra sentido, pues al determinar un valor de salida que no cumpla con los parámetros establecidos se realiza un proceso de búsqueda desde dicho valor hacía atrás, revisando cada capa e identificando la responsabilidad de cada neurona en este proceso, a fin de modificar los valores de la función de entrada que haya tenido una mayor incidencia en dicho resultado (Matich, 2001). Es a través de este proceso que redes neuronales no lineales son capaces de "entrenarse" para resolver problemas de múltiples indoles. Cabe resaltar el amplio carácter matemático asociado al *backpropagation*, pues es el fruto de la modelación de los resultados obtenidos por las neuronas a una superficie la cual se optimiza haciendo uso del vector gradiente en cada punto de ella.

3.5.2. Método Montecarlo

La edad contemporánea se encuentra ligada al amplio y rápido avance de las diversas teorías asociadas a todas las ciencias y áreas del saber. Empero, en muchas de ellas han surgido problemas de una amplia complejidad, de los cuales bastantes aún no poseen una respuesta exacta y contundente. Por tal motivo, fue necesaria la invención de métodos de aproximación que permitieran generar soluciones de forma mucho más sencilla, aunque estas cuenten con posibilidad de error, entre los que se destaca el Método Montecarlo debido a su amplitud de aplicaciones en distintos contextos.

El Método Montecarlo tiene sus orígenes en las investigaciones de John Neumann (1903 – 1957) y Estanislao Ulam (1909 – 1984) durante su trabajo para el desarrollo de la bomba atómica en la Segunda Guerra Mundial. Sin embargo, los avances principales de esta teoría fueron realizados por Harris y Herman Kahn en 1948. Sin embargo, debido al carácter reiterativo de su aplicación, no fue hasta la década de los 70's que, de la mano con el desarrollo computacional, se empezó a emplear este método como una herramienta útil y óptima para aproximar la resolución de problemas (Grijalva, 2009).

Este método de resolución de problemas implica la "invención de juegos de azar cuyo comportamiento simula algún fenómeno gobernado por una distribución de probabilidad" (Illana, 2013). Esto, fundamentado en la Ley Débil De Los Grandes Números (Innovación Aprendizaje, 2016) la cual indica:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1$$

La cual puede interpretarse como: el promedio muestral se aproxima al valor esperado de la variable X cuando la cantidad de muestras tomadas tiende a infinito. En ese sentido, la resolución de problemas a partir del Método Montecarlo se basa en simular la situación una cantidad sustancial de veces a fin de obtener una buena aproximación de lo que ocurrirá en ella al realizarla. Para ello, primero se modela la situación, luego se organizan los casos posibles en intervalos según su probabilidad de ocurrencia, para posteriormente emplear un generador de números pseudoaleatorios que permita elegir uno de dichos casos; este proceso se reitera tantas veces como el usuario lo desee a fin de obtener una distribución que se asemeje lo máximo posible a la realidad.

Como se mencionó anteriormente, el Método Montecarlo puede aplicarse a la resolución de problemas en múltiples contextos, verbigracia:

- **Física:** reportado por Illana (2013), el método puede emplearse como herramienta para la exploración y generación de sucesos en física de partículas, así como para contrastar diversas hipótesis en un experimento.
- **Matemáticas:** si bien en esta área el Método cuenta con innumerables aplicaciones Illana (2013) destaca su carácter reiterativo como herramienta para la aproximación de valores irracionales como π, para el cual presenta dos procesos, el primero muestra el proceso partiendo de un cuadrado y un círculo inscrito; mientras que el segunda emplea el experimento de las Agujas de Buffon.
  Por otro lado, Innovación aprendizaje (2016) muestra la relación entre una integral definida y el valor esperado de una función, lo que permite emplear el Método Montecarlo para aproximar su valor.
- **Economía e ingeniería industrial:** a partir de la toma de una muestra, es posible identificar la forma óptima en la que se deben realizar cambios en un proceso industrial. En los escritos de Grijalva (2009) o Salazar y Alzate (2018) se reportan ejemplos en los que se emplea el Método para simular acciones como la modificación de una línea de producción, adaptaciones de un sitio *web* según la cantidad de usuarios que lo visitan, estimación de unidades vendidas por una empresa o la identificación de las variables que tienen mayor impacto en la venta de un producto.

3.5.3. Desarrollo computacional

Durante el siglo XIX y la primera parte del siglo XX matemáticos como Frege (1848 – 1925), Russell (1872 – 1970), Whitehead (1861 – 1947) o Hilbert (1862 – 1943) dedicaron parte de sus estudios a la estructuración y formalización de las matemáticas dotando a la lógica como una de las principales herramientas asociadas a esta actividad. Esta fundamentación dio lugar al planteamiento de preguntas y problemas asociados a las capacidades de esta metodología para abarcar la totalidad de las matemáticas, ejemplo de ello son los tres problemas de Hilbert reportados por Vargas (2013) los cuales son:

1. ¿Son las matemáticas completas, en el sentido de que cualquier postulado pueda ser probado o rechazado?
2. ¿Son las matemáticas consistentes, en el sentido de que nunca se pueda demostrar algo que sea manifiestamente falso?
3. ¿Son las matemáticas decidibles, en el sentido de que se puede crear un sistema de deducción paso a paso que aplicado a cualquier postulado permita determinar si es cierto o falso?

De los cuales se destaca el tercero, conocido también como "*Entscheidungsproblem*" o problema de la decisión, el cual fue abordado de múltiples maneras. Particularmente, Turing en su estudio de los números computables determina una respuesta negativa a través de la creación de las máquinas de Turing. La Máquina de Turing es un modelo de herramienta capaz de computar o resolver un problema, la cual consta de una cinta infinita dividida en casillas, un cabezal que pueda moverse por la cinta con la capacidad de leer y escribir en las casillas y una serie de parámetros u ordenes que indiquen al cabezal la acción que debe realizar en cada momento (Javier García, 2016). La cual se define formalmente como:

$$\text{Máquina de Turing} = \{\Sigma, \Gamma, Q, \sigma\}$$

Siendo:

Σ: input o valores de entrada.
Γ: alfabeto.
Q: el conjunto de estados.
σ: función de transición.

con:

$$\sigma: Q \times \Gamma \rightarrow \Gamma \times \{L, R\} \times$$

La creación teórica de este tipo de mecanismos y en particular los estudios realizados por Turing en relación con las Máquinas Universales de Turing – capaces de emular el funcionamiento de cualquier otra máquina de Turing – fungen como el origen de la teoría computacional, pues en ellas es posible programar el comportamiento de cualquier *software* existente (Juárez y Manzano, 2017).

Si bien, es posible modelar cualquier problema para que sea resuelto por medio de una Maquina de Turing, cabe resaltar que estos procesos pueden volverse extensos y poco prácticos. Debido a ello, se ampliaron los estudios relacionados a la computación a través de múltiples vías como los autómatas de estado finito propuestos por McCulloch y Pitts, los autómatas descendientes o de pilas también conceptualizados por Turing, entre otros. Siendo así que en 1963 Chomsky planteó la posibilidad de organizar las diversas gramáticas empleadas por estos mecanismos de forma jerárquica, la jerarquía de Chomsky está compuesta de cuatro tipos de lenguaje, reportados por Vargas (2013) como: lenguajes regulares, lenguajes libres de contexto, lenguajes dependientes de contexto y lenguajes irrestrictos; siendo cada uno contenido por el siguiente. Cabe resaltar, además, que los principales modelos computacionales pueden ser tomados como representantes de cada gramática de la siguiente forma:

- Los autómatas finitos únicamente aceptan lenguajes regulares.
- Los autómatas de pila aceptan lenguajes libres de contexto.
- Los autómatas linealmente acotados aceptan lenguajes dependientes del contexto.
- Las máquinas de Turing aceptan lenguajes irrestrictos.

4. Aspectos metodológicos

Este capítulo tiene la función de consignar las diversas consideraciones metodológicas que fueron asumidas para realizar el TG. Estas son: las etapas en las que se dividió el desarrollo tanto de la monografía como del MID, el *software* empleado para la construcción del Museo y los requisitos que debe cumplir el ordenador donde se desee ejecutar.

4.1. Etapas del trabajo

En este subcapítulo se describirán las cinco principales etapas metodológicas que se consideraron para la realización del trabajo de grado. En esencia, estas consistieron en una revisión documental sobre la HM, luego una caracterización y definición del concepto de Heurística, a continuación, una selección de las heurísticas provenientes de la Historia que serían parte del MID y, finalmente, el diseño de las actividades, así como de objetos del entorno que se incluyeron en el Museo.

Al respecto, se reconoce que la metodología para el desarrollo del trabajo aludió esencialmente a la de una revisión documental, en el sentido que fue la consulta, sistematización y resumen de muy diversa cantidad de fuentes, la que permitió la organización de las heurísticas encontradas a lo largo de la historia.

1. **Búsqueda de información en distintas fuentes**

Primeramente, se realizó una revisión documental de métodos de resolución de problemas, escudriñando en la HM desde variadas fuentes como libros, artículos, documentales, tesis, revistas, entre otros; ya que la HM se remonta a varios milenios atrás, cada hallazgo se catalogó según las etapas históricas de la humanidad, priorizando aquellos que respondían como un método de resolución de problemas con algún componente principalmente matemático. Asimismo, para cada hallazgo se redactó un resumen, detallando variados aspectos (*v. g.* historia, antecedentes, impacto en la etapa histórica). Sin embargo, ante la muy variada y amplia información encontrada, se decidió limitar la búsqueda solo a los temas que respondían primordialmente como Heurística, concepto que requirió de su propia revisión documental.

2. **Revisión del concepto de Heurística**

Debido a las múltiples dificultades para entender el concepto de Heurística y determinar un método como heurístico o no, se llevó a cabo una revisión documental del término desde variadas fuentes, resaltando los aspectos a considerar para el diseño del MID, concluyendo en la elaboración de una definición propia, la cual quedó establecida en el capítulo 2.

3. Selección de Heurísticas en la HM

Con una definición clara sobre el concepto de Heurística, se retomó la búsqueda realizada en la HM con el fin de acotar y seleccionar aquellos momentos, fenómenos o conceptos que cumplen con los criterios establecidos en la definición de Heurística y que posteriormente serían implementados en el MID. Una vez decantadas las heurísticas seleccionadas, se llevó a cabo una nueva búsqueda documental para profundizar en ellas, así como para buscar otros métodos heurísticos de resolución de problemas según la definición elaborada. A continuación, se listan las heurísticas seleccionadas según la edad a la cual corresponden:

- Edad Antigua: Método de conteo y Método del Agotamiento.
- Edad Media: Método de las balanzas para la resolución de ecuaciones.
- Edad Moderna: Método de Indivisibles.
- Edad Contemporánea: Método Montecarlo.

4. Elaboración de actividades

A la par que se redactaba la fundamentación teórica, se trabajaba en los códigos de programación que serían incluidos en el MID, determinando ideas factibles de implementación o descartando aquellas que representaban mayores problemas en términos computacionales.

En ese sentido, después de la revisión documental solo algunas de las heurísticas fueron implementadas como actividades interactivas en el MID. Las actividades están caracterizadas por requerir de la interacción y el conocimiento del usuario para alcanzar una meta o fin particular. El criterio para determinar si tales heurísticas se implementaban como actividades o no, fue en relación con sus características visuales, gráficas o concretas, en cuanto a que pudieran ser llamativas para el usuario. Ejemplos de estas actividades son: resolución de ecuaciones utilizando una balanza, aproximación de la constante π por el Método de Montecarlo, entre otras.

En el caso de las heurísticas que no fueron implementadas como actividades, se acoplaron como elementos del entorno del MID (*i. e.* cuadros, exhibiciones). Estos elementos tienen como principal función exponer sucintamente información relacionada con la Heurística correspondiente (*v. g.* definición, propósito, funcionamiento). Algunos ejemplos de estos elementos son:

- Modelos 3D acompañados con audios para exponer algunas generalidades y trabajos matemáticos de la civilización China.
- Exposiciones de las curvas mecánicas ideades para resolver los problemas clásicos de la Geometría.

En resumen, el MID cuenta con dos tipos de componentes, las actividades y los elementos del entorno. Las primeras se diferencian por ser más amplias, por precisar de una interacción con el usuario y por tener una meta (en el sentido de proponerle un reto al usuario). Mientras que los segundos son objetos que decoran el museo proporcionando información relevante a través de imágenes y audios.

Teniendo en cuenta lo anterior, se optó en un primer momento por realizar el proceso de programación asociada a las diversas actividades planeadas. Esta decisión se justifica debido a la incertidumbre que se tenía en relación con la cantidad de tiempo que implicaba su elaboración pues, si bien, era posible realizar un estimado básico del tiempo que se necesitaba, podían surgir múltiples errores o falencias que implicaran la búsqueda de información para resolver el inconveniente o, de ser el caso, realizar modificaciones a las actividades planteadas originalmente.

5. Diseño y construcción del MID

Una vez completada la programación asociada a las actividades y a los elementos del entorno que se desarrollaron en el MID, se decidió empezar a diseñar y llevar al software las ideas sobre la propia infraestructura del Museo, es decir, las salas que lo componen y la distribución de los diversos objetos que se encuentran allí presentes (ver Ilustración 22, Ilustración 23, Ilustración 24 e Ilustración 25).

Ilustración 22. MID en Unity.

Ilustración 23. Entrada del MID.

Ilustración 24. Sala del MID.

Ilustración 25. Sala del MID.

4.2. *Software* empleado

Durante el desarrollo del presente trabajo de grado – y como consecuencia de su propia naturaleza – fue necesario emplear múltiples programas y herramientas digitales asociadas a la programación, el diseño y la modelación de ambientes tridimensionales digitales que permitieran cubrir las diversas necesidades asociadas no sólo a la construcción del MID, sino también a la creación de las actividades interactivas que se presentarían en este. En particular, se destaca el uso de Unity como el *software* principal asociado a este proceso.

Unity es un motor de videojuegos[28] de libre distribución, es decir, un conjunto de herramientas digitales asociadas a la integración de cálculos y utilidades visuales en dos y tres dimensiones, sonoras, físicas – simulando elementos como la gravedad – y de gestión de red. Fue publicado oficialmente en el 2005, destaca por su amplia accesibilidad y por la facilidad de uso que posee por encima de otros motores similares haciéndolo uno de los softwares más empleados para el desarrollo de videojuegos y otros contenidos interactivos como diseños arquitectónicos y animaciones (Ouazzani, 2012).

Cabe resaltar que Unity no es un *software* pensado para la creación de los diversos elementos que componen un videojuego (modelos tridimensionales, imágenes, sonidos, entre

[28] En este documento se hace referencia al término “videojuego” debido a que Unity es empleado principalmente para su desarrollo. Sin embargo, puede dársele otros usos como experiencias interactivas, creación de herramientas digitales, ambientes de aprendizaje, entre otros.

otros) sino que se centra en su integración al permitir la importación de la mayoría de los formatos asociados a cada tipo de archivo multimedia.

Partiendo de la documentación oficial de Unity es posible sintetizar su funcionamiento general a partir de la interacción de tres tipos de elementos que componen cada videojuego, estos son (Unity Technologies, 2016):

- **Escenas:** son los espacios donde se desarrollan los eventos del videojuego, si bien estos entornos son tridimensionales, es posible limitarlos a dos dimensiones fácilmente. Su función es contener a los diversos GameObjects del escenario o nivel.
- **GameObjects*:*** son todos los objetos que componen el videojuego, es decir, los personajes, los elementos del escenario, las luces, cámaras, sistemas de partículas, entre otros. Cabe resaltar que los GameObject*s*, por sí mismos, son elementos vacíos, pues requieren de una serie de componentes para cumplir la función que el usuario le asigne, asimismo, un GameObject puede componerse de otros según sea el caso.
- **Componentes:** son todas las propiedades que permiten individualizar y caracterizar cada GameObject, *id est*, su posición, rotación, tamaño, forma, colisiones, simulador de físicas, sonidos, entre otros.

La interfaz de usuario en Unity puede personalizarse según las necesidades particulares de cada proyecto, agregando o suprimiendo las herramientas que se muestran en esta, así como la ubicación de estas. A continuación, se detallarán los elementos básicos que componen la interfaz antes de realizar dicha personalización (ver Ilustración 26):

1. **Barra de herramientas:** contiene pestañas asociadas al funcionamiento general del *software*, permitiendo modificar las otras partes de la interfaz, guardar el proyecto, exportarlo, entre otras opciones. Además, cuenta con opciones particulares asociadas a la ejecución del videojuego dentro del *software* a modo de prueba.
2. **Jerarquía:** enlista los diversos *GameObject* presentes en la escena. El orden de dicha lista es totalmente personalizable por el usuario favoreciendo la organización además de ser útil en casos particulares como el orden de los elementos en la interfaz del videojuego.
3. **Escena:** es la representación de la escena activa, en ella es posible ubicar los distintos *GameObject* que la componen y modificarlos.

4. **Juego:** se activa al presionar el botón *play* en la barra de herramientas. Activa a modo de prueba la escena tal cual la verá el usuario final.
5. **Inspector:** tras seleccionar un *GameObject* ya sea en el apartado de Escena o Jerarquía, se muestran los Componentes de este, siendo totalmente modificables por el usuario.
6. **Proyecto:** es un acceso directo a la carpeta en la que se ubican los diversos archivos que componen al videojuego, es decir los elementos importados (imágenes, modelos, entre otros) o los generados por el propio *software* (escenas, *GameObjects* personalizados, materiales, *script*, entre otros).

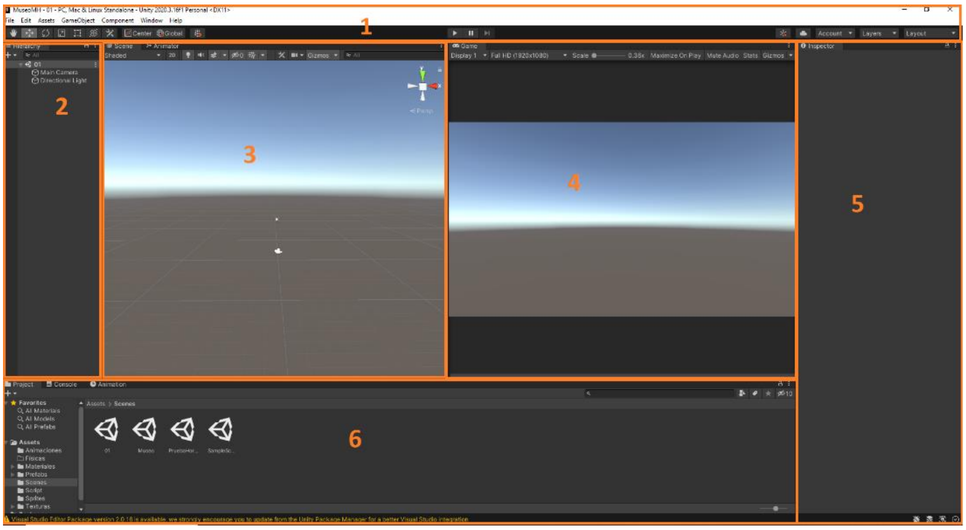
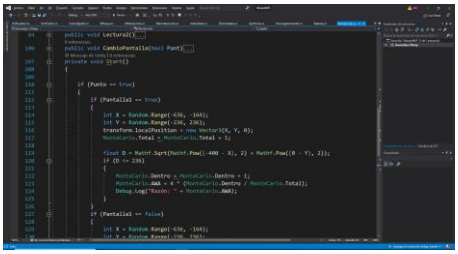
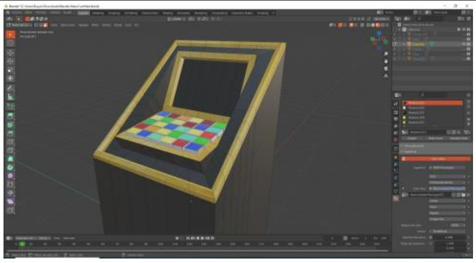


Ilustración 26. Interfaz de Unity.

Para finalizar, resulta relevante realizar una breve mención a otros programas que cumplieron un rol relevante durante el desarrollo del MID. Estos son:

Microsoft Visual Studio	***Blender***
Es una herramienta de programación que permite "editar, depurar, probar, controlar versiones e implementar en la nube" (Ouazzani, 2012) contenido en múltiples lenguajes de programación como son: JavaScript, Python, HTML, CSS, PHP, C#, entre otros. Además, cuenta con la capacidad de vincularse a Unity para facilitar la creación de *Scripts* (bloques de código) escritos en lenguaje C#, los cuales permiten modificar	Es un *software* especializado en el diseño de modelos y animaciones 3D, si bien no puede vincularse directamente a Unity, si permite exportar los modelos en formatos compatibles como FBX. Si bien, la mayoría de los modelos fueron diseñados directamente en Unity o descargados de páginas web[29] dedicadas a la distribución de este tipo de archivos, en más de una ocasión fue necesario realizar modificaciones de formato o textura, así

[29] Estas páginas web son espacios en los que diseñadores 3D comparten sus creaciones ya sea de forma gratuita y de libre uso o por medio de licencias pagas. Algunos ejemplos de ellas son: www.free3d.com, www.cgtrader.com, www.sketchfab.com, www.turbosquid.com, entre otras.

Componentes en los *GameObjects* durante la ejecución del videojuego.	como la creación de modelos particulares según las necesidades del MID.
 *Ilustración 27. Interfaz de Microsoft Visual Studio.*	 *Ilustración 28. Interfaz de Blender.*

4.3. Requisitos técnicos del MID

Tras finalizar el desarrollo del MID, y destacando que se trata de un *software* que cumple con las características de un videojuego, este no necesariamente puede ser ejecutado por cualquier computador. Por tal motivo, plantean los requisitos a nivel de *hardware* que se deben tener para un funcionamiento adecuado:

- Requisitos mínimos del equipo que ejecutará el MID:
    - Sistema Operativo: Windows 7 de 32 bits.
    - Memoria RAM: 4 Gb.
    - Almacenamiento: 1 Gb.
- Requisitos recomendados del equipo que ejecutará el MID:
    - Sistema Operativo: Windows 10 de 64 bits.
    - Memoria RAM: 4 Gb.
    - Almacenamiento: 1 Gb.

Una vez detallado el procedimiento de desarrollo del TG, el *software* empleado y las particularidades que posee el MID en relación con sus requerimientos, se empleó la información obtenida de la revisión documental como sustento de las diversas exhibiciones que componen el Museo y que se detallan en el siguiente capítulo.

5. Elaboración de actividades

En este capítulo se describe de forma sucinta el proceso de diseño de las actividades implementadas en el MID y los elementos del entorno.

Para las actividades se describe su objetivo, el resumen de la heurística asociada, la descripción de la actividad tal cual se encuentra en el Museo y algunas imágenes. Por otra parte, los elementos del entorno se encuentran clasificados según la etapa histórica a la cual pertenecen (organización que se mantiene en las salas del MID, ver Anexo 2Anexo 2) iniciando con un breve contexto histórico y matemático para posteriormente realizar un resumen de cada heurística que no fue implementada como actividad. Adicionalmente, para la Edad Antigua, Moderna y Contemporánea se contemplaron breves biografías a cuatro autores pertenecientes a cada época cuyo trabajo matemático fue relevante.

El MID está dividido en salas según cada una de las cuatro etapas históricas seleccionadas (ver Anexo 2), en cada una de estas junto a las actividades se presentan los elementos del entorno. Los elementos del entorno tienen la función de brindar información relacionada con el contexto histórico–matemático ya sea de la etapa histórica o de las heurísticas que no fueron implementadas como actividad. Se realizó la siguiente clasificación para caracterizar cada uno de estos componentes (ver Ilustración 29):

- **Actividades:** se diseñó al menos una actividad para cada etapa histórica. En el MID pueden encontrarse como objetos particulares (*v. g.* una balanza o piezas del Ojo de Horus) o en mubles de color negro con un panel de botones y marco dorado en el que se representa la interfaz que corresponde a la actividad.
- **Elementos del entorno:** son los objetos que complementan la información del MID representando a las heurísticas, el contexto histórico y autores de la época. A continuación, se detalla cada uno:
    - Exposición de heurísticas: son muebles negros con marco blanco o azul (cuando se relacionan a una actividad) que poseen una imagen y descripción en audio, relacionada a las heurísticas seleccionadas en la revisión documental.
    - Contexto histórico: son elementos representativos de la etapa histórica o civilización, los cuales generalmente se encuentran en exhibidores de cristal. Al interactuar con estos se reproduce un audio con una breve contextualización histórica o matemática de la época.

- Autores de la época: son cuadros que se ubican en algunas salas del MID, al interactuar con estos se reproduce un audio en el que se exponen brevemente la biografía y algunos de los aportes a las ciencias de un autor relevante de la respectiva etapa histórica.

Ilustración 29. Tipos de exhibiciones en el MID.

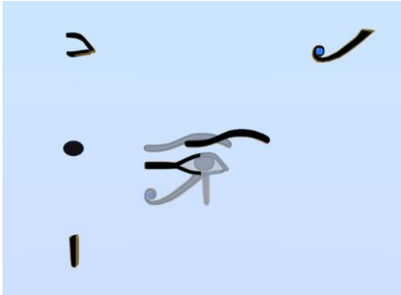
5.1. Descripción de las actividades

En el MID se presentan cinco actividades, una por cada etapa histórica. Cada actividad tiene como objetivo resolver una situación empleando una heurística en particular. La información presentada en el "Resumen de la heurística" fue a su vez empleada como guion para el elemento del entorno con el cual está relacionado (Exposición de heurística).

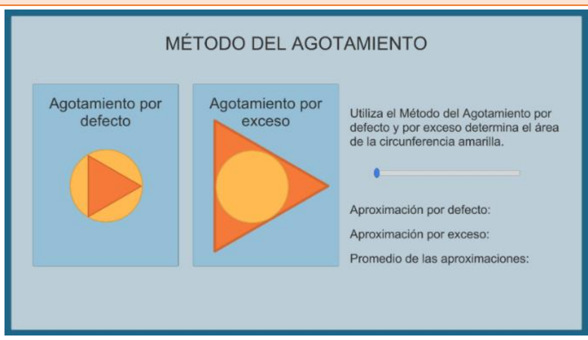
Las actividades se detallan a continuación:

5.1.1. Actividad 1

Ojo de Horus	
Objetivo	Recolectar las piezas del Ojo de Horus que se encuentran esparcidas por la zona del MID dedicada a la Edad Antigua.
Resumen de la heurística	Los antiguos egipcios idearon variados métodos de conteo según su sistema numérico, uso en diversos contextos y desarrollo matemático, ejemplo de esto fue el Ojo de Horus. Un mito del antiguo Egipto relacionado con una progresión matemática, en el que la unidad (1) era partida en una potencia de dos de forma sucesiva hasta llegar al 64. Con esto se realizaban variedad de conteos en diversos contextos de repartición (ver página 343434)3434.
Descripción de la actividad	Se debe explorar la sala de la Edad Antigua en busca de los seis fragmentos del Ojo de Horus que pueden encontrarse en doce posibles

	ubicaciones. Posteriormente, se deben organizar las piezas a fin de reconstruir el Ojo a modo de rompecabezas. Una vez culminada la actividad de forma satisfactoria, se recompensará al usuario dándole acceso a una sala secreta en la cual se pueden observar dos versiones del mito asociado a esta heurística.	
Imágenes en el MID		

5.1.2. Actividad 2

Método de Agotamiento	
Objetivo	Emplear el Método de Agotamiento para aproximar, tanto por defecto como por exceso, el área de un círculo.
Resumen de la heurística	Los antiguos griegos desarrollaron un algoritmo reiterativo con el cual podían aproximar diversas magnitudes según fuese el caso, este se llamó el Método de Agotamiento y se centra en la aproximación de áreas encerradas por curvas con la inscripción sucesiva de polígonos con mayor cantidad de lados cuya magnitud sea más sencilla de calcular. Se puede realizar por defecto o por exceso y con la cantidad de pasos que se deseen, el valor obtenido se aproximará al valor real (ver página 37).
Descripción de la actividad	Al usuario se le muestra en pantalla un circunferencia y botones para que aparezcan dos polígonos, uno inscrito y otro circunscrito, a los cuales se les pueden modificar la cantidad de lados; además, se le muestra el valor del área de los polígonos en cada caso, junto a su promedio aritmético, así como la del círculo, con el fin de que el usuario compare las tres magnitudes y detalle tanto la mejora de la aproximación al aumentar el número de lados como la diferencia entre emplear el método por defecto y exceso.
Imágenes en el MID	

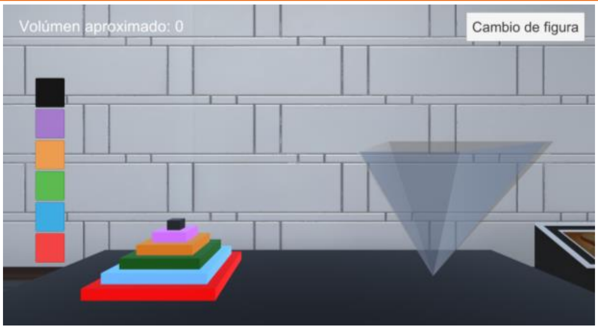
5.1.3. Actividad 3

<table>
<tr><th colspan="3">Método de Balanzas</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td colspan="2">Resolver sistemas lineales 2×2 empleando el Método de Balanzas Chino.</td></tr>
<tr><td>Descripción de la heurística</td><td colspan="2">En China antigua se creó el Método de Balanzas para resolver sistemas de ecuaciones lineales[30]. Después de escribir las ecuaciones despejadas en su mínima expresión se amplifican o reducen según sea necesario, tratando de mantenerse en el conjunto de los números naturales de tal forma que en algún punto puedan simplificarse incógnitas al operar las ecuaciones entre sí. La balanza permite tanto visualizar los movimientos algebraicos realizados a las ecuaciones como dar respuesta al sistema lineal (ver página 4141)41.</td></tr>
<tr><td>Descripción de la actividad</td><td colspan="2">Se dan piezas de distintos tamaños y pesos, así como una balanza al jugador, con estos debe especificar el valor de las incógnitas implicadas que dan respuesta al sistema lineal en la pantalla respectiva. El MID le informará si es correcto o no.</td></tr>
<tr><td>Imágenes en el MID</td><td></td><td></td></tr>
</table>

5.1.4. Actividad 4

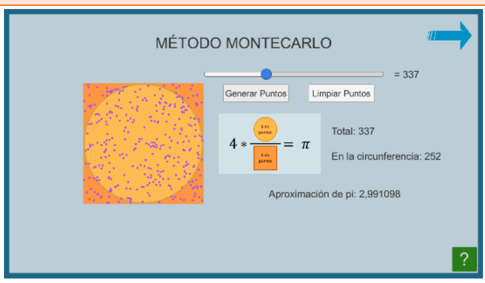
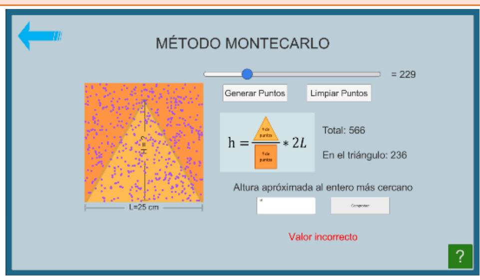
Método de los Indivisibles	
Objetivo	Determinar el valor del volumen de dos sólidos empleando el método de los indivisibles
Descripción de la heurística	Un problema recurrente en la Modernidad fue el estudio del infinito y las cantidades infinitesimales, algunos autores emplearon estas ideas abstractas para aproximar áreas de figuras cualquiera ubicando segmentos en su interior cuya longitud es, en esencia, más sencilla de calcular, seguidamente se sumaban estas longitudes con lo cual se aproxima al valor del área original buscada. Este método también puede aplicarse al 3D, con sólidos y planos en vez de figuras y segmentos respectivamente (ver página 54)54.

[30] Los coeficientes y las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales implementados en el MID son números naturales.

<table>
<tr><td>Descripción de la actividad</td><td>Empleando fichas de un tamaño y forma definidos, el usuario deberá realizar una aproximación del volumen de un sólido dado, ubicando las piezas en el interior de las figuras, a la par que se muestra en pantalla la suma de los volúmenes presentes internos de la figura.</td></tr>
<tr><td>Imágenes en el MID</td><td>
</td></tr>
</table>

5.1.5. Actividad 5

<table>
<tr><th colspan="3">Método Montecarlo</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td colspan="2">Realizar la aproximación de dos valores empleando el Método Montecarlo en figuras con un área común.</td></tr>
<tr><td>Descripción de la heurística</td><td colspan="2">El método Montecarlo es un método estadístico numérico que permite aproximar expresiones matemáticas complejas (o difíciles de evaluar) con cierto valor de exactitud a través de una simulación aleatoria con el uso de una gran cantidad de información. Este método puede emplearse tanto en problemas matemáticos como en otras ciencias exactas, evaluando puntos en un espacio de varias dimensiones (ver página 61)61.</td></tr>
<tr><td>Descripción de la actividad</td><td colspan="2">Al usuario se le presenta en pantalla una interfaz con un cuadrado y un círculo inscrito, con un deslizador y un botón se pueden modificar la cantidad de puntos “arrojados” al cuadrilátero, los puntos pueden caer dentro o fuera del círculo y, por medio de la iteración, puede aproximar el valor de π.

Posteriormente, se presenta una variación de dicho ejercicio en el cual se pregunta por la altura de un triángulo que se encuentra en el interior de un cuadrado con el cual comparte un lado. En este caso, se pide al usuario realizar los cálculos (proporcionando la fórmula) para obtener dicha aproximación.</td></tr>
<tr><td>Imágenes en el MID</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

5.2. Descripción de los elementos del entorno

A continuación, se presentan los elementos del entorno que componen el MID (ver Ilustración 29). Para ello, se realiza un breve resumen del contexto histórico y las diversas heurísticas que fueron reportadas en el capítulo 3 así como una biografía sucinta de algunos autores relevantes según su etapa histórica reportados en Asimov (1999), Collette (2002), Mankiewicz (2005), Rey y Babini (2013) y Stewart (2018). Estos son, a su vez, el guion de los audios que se reproducen al interactuar con cada elemento del entorno – a excepción de las heurísticas relacionadas a actividades, como se mencionó en el subcapítulo anterior –.

A continuación, se organizan según cada etapa histórica el contexto general de la época, la información de las heurísticas y las biografías que se implementaron en el MID:

EDAD ANTIGUA

Babilonia fue una de las primeras civilizaciones de la humanidad de la que se tiene registro, controlaban gran parte de medio oriente donde se desarrollaron entre cuerpos de agua.
Los antiguos babilónicos mantuvieron constantes intercambios culturales con otras civilizaciones como la griega y egipcia, de los cuales se generaron importantes desarrollos para las ciencias y las matemáticas.
Los registros muestran un versado manejo de las matemáticas aplicadas en la agricultura y arquitectura, generaron avances tanto en el campo de Aritmética como de la Geometría. Sin embargo, actividades relacionadas con el Álgebra o la demostración no tuvieron mayor relevancia en las matemáticas babilónicas (ver subcapítulo 3.2).

Relaciones paramétricas

Los babilónicos desarrollaron un complejo sistema de ecuaciones (también conocidos como relaciones paramétricas) con las que podían determinar ternas pitagóricas, así:

$$a = 2pq$$
$$b = p^2 - q^2$$
$$c = p^2 + q^2$$

Con p y q números naturales cualesquiera no simultáneamente impares y $p > q$. Las relaciones cumplen con $(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$, por lo que a y b catetos y c la hipotenusa del triángulo rectángulo generado (ver página 3030).

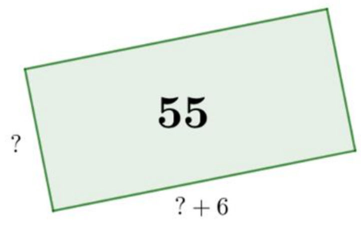
$$a = 2pq$$
$$b = p^2 - q^2$$
$$c = p^2 + q^2$$

$$p, q \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; p > q$$

$$(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$$

Álgebra geométrica

Los antiguos babilónicos para sus estudios geométricos le dieron tintes algebraicos, principalmente para áreas como la agricultura en la que el terreno a calcular podía verse como una combinación de incógnitas que generaban una ecuación cuadrática. Asimismo, en los registros matemáticos babilónicos se encontraron apuntes relacionados con el estudio del área de cuadriláteros, lo que más adelante se conocería como productos notables (ver página 3131).



Método de Balanzas

Las balanzas pueden emplearse para analizar (y resolver) algunos problemas de repartición en los que se deben tener datos como la cantidad de elementos implicados y su peso total para determinar el peso de cada objeto individual, al modificarse la cantidad de elementos de un lugar a otro en la balanza se logra deducir los valores solicitados. Este método también puede emplearse para analizar expresiones lineales con coeficientes naturales. Se puede considerar este método como el antecesor al Método de Balanzas Chino (ver página 31)31.

Sea $x + \frac{x}{7} = 19$

$x_1 = 7 \quad \Rightarrow \quad 7 + \frac{7}{7} = 8$

Como $8 \neq 19$ *entonces se relaciona:* $\frac{19}{8} * 7 = \frac{133}{8}$

$x_2 = \frac{133}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{133}{8} + \frac{\frac{133}{8}}{7} = 19$

Método de Iteración

Las medias aritméticas pueden emplearse en diversas ramas de las matemáticas con variados propósitos. Los babilónicos por su parte idearon un algoritmo en el que con medias iteradas lograron aproximar valores para raíces cuadradas y soluciones positivas para ecuaciones de segundo grado (ver página 32)32.

$x = \sqrt{b}$; b_1 *aproximación de la raíz*

a_1 *otra aproximación de la raíz tal que* $a_1 = \frac{b}{b_1}$

si b_1 *es demasiado pequeño*
entonces a_1 *es demasiado grande*

$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

si b_2 *es demasiado pequeño*
entonces a_2 *es demasiado grande*

$\vdots$

Junto al segundo río más grande del mundo creció una de las civilizaciones más prosperas de la antigüedad, distinguida por sus imponentes construcciones, así como gran cultura: la civilización egipcia.

La civilización egipcia fue una de las más prosperas de la antigüedad, lo que generó que se desenvolvieran en una relativa paz en la que actividades como la ciencia y la arquitectura se vieron privilegiadas.

Los registros matemáticos egipcios escasean a comparación de otras civilizaciones, por lo que es difícil seguir la pista de sus avances o determinar qué sucedió en qué orden o de qué manera se llegó a ello.

Los desarrollos matemáticos egipcios tienen un fuerte tinte práctico, en áreas como agricultura, arquitectura y guerra, en las cuales requirieron de complejos cálculos y análisis para diversos propósitos (ver página 32)

Método de Regula Falsi

Si bien el fuerte de los egipcios no fue el Álgebra, idearon un método con el que determinaban la solución de ecuaciones: llamando a una incógnita local "*aha*" a la cual asignaban un valor arbitrario para después comprobarlo en la expresión original, una vez obtenido el – seguramente erróneo – resultado, se asignaba como denominador en una fracción en la que el valor independiente de la expresión original hace las veces de numerador multiplicado por el valor arbitrario inicial. Este procedimiento se repetía hasta obtener la respuesta correcta del problema planteado (ver página 333333).

$$Sea \quad x+\frac{x}{7}=19$$

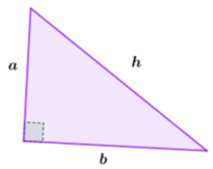
$$x_1=7 \quad \Rightarrow \quad 7+\frac{7}{7}=8$$

$$Como\ 8\neq 19\ entonces\ se\ relaciona:\ \frac{19}{8}*7=\frac{133}{8}$$

$$x_2=\frac{133}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{133}{8}+\frac{\frac{133}{8}}{7}=19$$

Triángulo Sagrado

Un caso específico de una terna pitagórica se puede obtener con el Triángulo Sagrado, el cual consiste en una cuerda con doce nudos equidistantes entre sí, que al distribuirse en una posición específica determinan un triángulo rectángulo con medidas tres, cuatro y cinco, para sus catetos e hipotenusa, respectivamente. Los egipcios lo empleaban en ámbitos más aplicativos que matemáticos (ver página 3434).



$$a^2+b^2=h^2$$

$$3^2+4^2=5^2$$
$$9+16=25$$

Por otra parte, al sur de Europa se asentó y creció una de las poblaciones con mayor impacto en las ciencias hasta la actualidad: la antigua civilización griega.

Fue gracias a variados aspectos como la ubicación en puntos estratégicos, la comunicación con otras civilizaciones, los dirigentes y diversas alianzas que la antigua Grecia fue una de las mayores potencias en todos los aspectos de la época.

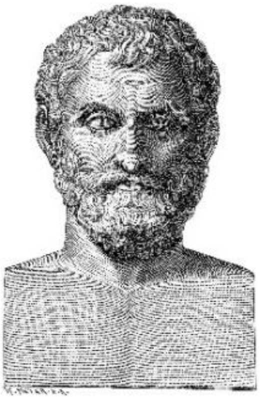
En la antigua Grecia se generaron profundos estudios enfocados en la Filosofía y las ciencias, priorizando el conocimiento por sobre la aplicabilidad en el mundo real, lo que generó una ruptura poco usual de sus avances matemáticos con el mundo sensible.

Los trabajos de los antiguos griegos tuvieron tal impacto en los siglos posteriores que aún en diversos centros del saber se estudian los registros de sus diversas obras, sin embargo, muchos de estos están fragmentados o perdidos (ver página 36).

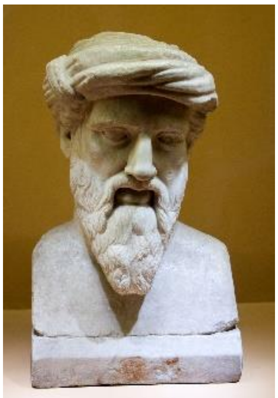
Biografías

A continuación, se mencionan brevemente cuatro de los muchos eruditos cuyo legado impactó en gran medida al desarrollo de la humanidad y las ciencias.

Tales de Mileto (624 a. C. – 546 a. C.) fue un matemático y legislador griego reconocido por ser el primero en hacer actividad demostrativa en el campo de la Geometría, legando esta costumbre a sus homólogos.



Pitágoras (569 a. C. – 475 a. C.) fue un filósofo y matemático que estudió con recelo las ciencias, llegando a crear una secta en la que los números se veían inmersos en todo aspecto de la vida. Tal entendimiento conllevó a un estudio generalizado de todos los fenómenos observables desde las matemáticas y las relaciones numéricas.



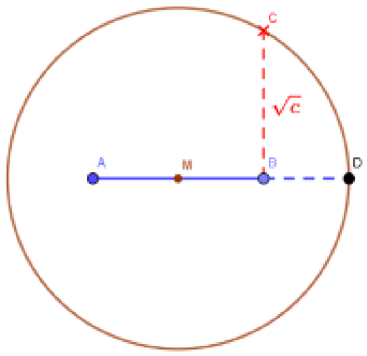
Euclides (323 a. C. – 285 a. C.) fue un matemático y geómetra griego cuyo trabajo más conocido fue el compilado Elementos, en el que recopiló, estructuró y demostró gran parte de la obra geométrica griega hasta el momento, lo que *a posteriori* sentó un fuerte precedente al desarrollo científico.

Arquímedes (287 a. C. – 212 a. C.) fue un estudioso científico ilustre en áreas como Matemáticas, Física y Astronomía. Fue un revolucionario del pensamiento de la época al considerar la aplicabilidad antes que la rigurosidad de los conceptos estudiados, por lo que sus trabajos estaban mayoritariamente orientados en la utilidad de los saberes obtenidos.

Método de resolución de ecuaciones geométrico

Los griegos, eruditos en el uso de la regla y compás, determinaron soluciones teóricas para ecuaciones de segundo grado con un algoritmo de construcción geométrico y valiéndose de algunas propiedades. Si bien el propósito de los griegos con esta construcción no era el de determinar la solución de una ecuación, esta puede inferirse sin mayores problemas.

Se entiende como soluciones teóricas a un problema a aquellas que en la teoría son acertadas, pero no tienen aplicabilidad o sentido aparente en el mundo real (ver página 3838).



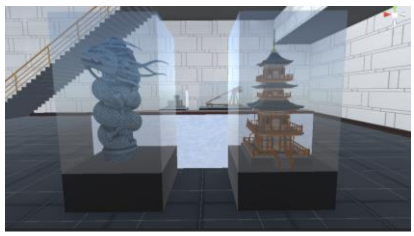
EDAD MEDIA

En Europa medieval hubo un temor supersticioso generalizado hacia fenómenos y personas que, debido al desconocimiento general, eran catalogados como magos, brujas, demonios, espíritus malvados o entes, por lo que se vivió un largo periodo de torturas, conquistas y saqueos.
La Edad Media fue una etapa que algunos autores caracterizan como La Noche Estrellada De La Humanidad debido a que tras constantes guerras gran parte de la población era analfabeta, pues el conocimiento estuvo relegado principalmente al clero y los dirigentes, lo que impidió que se realizaran avances matemáticos significativos en Europa.
Como se comentó en el capítulo 3.3 la revisión documental asociada a esta etapa histórica se enfocó en las civilizaciones de extremo y medio oriente, las cuales, si bien no fueron ajenas al contexto bélico, se conservan registros de los avances matemáticos de China, India y Arabia (ver subcapítulo 3.3).

China

China Antigua fue una civilización caracterizada por los grandes lapsos entre los registros de su desarrollo matemático – debido a diversos factores –, por lo que la información que se tiene actualmente está incompleta o desconectada entre sí.

Los avances matemáticos chinos cuentan con una fascinación mística hacia los números y ciertas configuraciones numéricas, lo que conllevó a estudios numerológicos con aserciones como, por ejemplo, los números pares se les relacionaba con lo femenino mientras que los impares con lo masculino, el cuatro era a la mala suerte como el nueve a la fuerza.



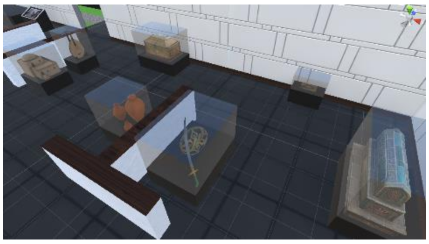
Los antiguos chinos también estudiaron los cuadrados mágicos – cuadricula cuadrada en la que en cada espacio se ubica un número natural –, los cuales son tanto curiosidades numéricas como posibilidades de estudio de patrones y cálculo aritmético.

En China se emplearon los textos “Los Diez Cánones del Cómputo” y “El Libro de los Nueve Problemas” por varias décadas como principales textos de referencia educativos, en estos se presentan problemas (y soluciones) a cuestiones de variada índole como economía, agricultura y medicina.

(Ver página 4040).

India

La antigua civilización india no fue ajena al desarrollo matemático, siendo sus profundas raíces religiosas factores de gran importancia para el mismo. Los hindúes comenzaron con el estudio del sistema numérico posicional el cual, si bien más tarde sufriría múltiples modificaciones, llegaría a emplearse a nivel mundial.



Los comerciantes hindúes crearon una serie de cubos con tamaños y materiales distintos tal que al pesarlos su magnitud resultaba diez veces mayor al anterior.

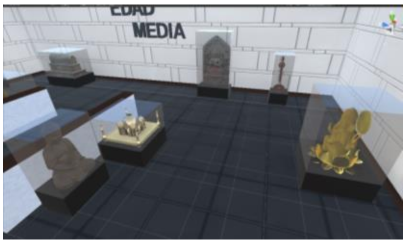
Al ser las matemáticas una manera de entender sus creencias religiosas, estas no tenían relación estricta con el mundo sensible o con las posibles aplicaciones a problemas reales, por lo que fueron posibles estudios a cantidades negativas o nulas, como sus operaciones, relaciones con otras cantidades y algunas propiedades.

Los hindúes también ampliaron los estudios geométricos de los griegos, creando lo que más tarde se conocería como Trigonometría. Rama de las matemáticas que emplearon para determinar – con gran exactitud – distancias cuando había dificultades para tomar medidas precisas, por ejemplo, al medir cuerpos de agua o realizar cálculos astronómicos.

Los hindúes estudiaron el campo de la probabilidad, realizando exhaustivos cálculos con los que infirieron las fórmulas empleadas actualmente para permutaciones y combinatorias. Estos resultados eran usados principalmente en campos aplicativos.

(Ver página 4242).

Arabia



En Arabia, a la par que se presentaron múltiples enfrentamientos de variada índole también hubo amplios estudios en ciencias y la aplicabilidad de estas.

Los antiguos árabes tuvieron cierto respeto por el desarrollo científico generado por otras culturas, creando un espacio en donde el saber primaba sin importar la nacionalidad o el origen de los estudiosos.

Uno de los legados que los antiguos árabes dejaron para la humanidad fue la transcripción – por ende, la conservación – de textos de antiguos pensadores, principalmente griegos.

Los antiguos árabes ampliaron los trabajos de los griegos y los hindúes a las ramas del Álgebra y la Aritmética, campos en los que demostraron gran habilidad al intentar separar el álgebra de la geometría.

Al-Khwarizmi fue el autor del Compendio Sobre el Cálculo por Medio de Transposición y Reducción, texto en el que se trataba la solución sistemática de ecuaciones lineales y cuadráticas con movimientos algebraicos similares a los actuales.

Los árabes ayudaron a la difusión del uso de las cifras hindúes y el cero. También estudiaron las reglas de las cuatro operaciones aritméticas con números enteros y fraccionarios.

La ampliación de las funciones circulares a las seis empleadas actualmente fue obra de variados pensadores árabes, quienes además generaron estudios que permitieron entenderlas como relaciones entre valores específicos de los triángulos.

(Ver página 4343).

EDAD MODERNA

La Edad Moderna fue una etapa histórica comprendida – aproximadamente – entre los años 1500 y 1800, cuyo inicio se acredita a diversos eventos como el descubrimiento y posterior conquista del continente americano, la conquista de Constantinopla por parte de los turcos, la finalización de la Guerra de los Cien Años entre Francia e Inglaterra.

La invención de la imprenta en la Edad Moderna permitió una significativa ampliación de la distribución y adquisición del conocimiento, que junto con los estudios renacentistas fueron clave para ampliar en gran medida el desarrollo científico de la época.

En la Edad Moderna se presentó una forma de entender las ciencias, comenzando a desarticularlas del pensamiento griego, por ejemplo, en los estudios matemáticos de esta etapa histórica se consideraron conceptos como el infinito y los números irracionales. Asimismo, se brindó mayor importancia a otras ramas de las Matemáticas aparte de la Geometría (ver subcapítulo 3.4).

Biografías

A continuación, se mencionan brevemente cuatro de los muchos eruditos de le Edad Moderna cuyos aportes a las ciencias fueron de gran valía.

François Viète (1540 – 1603) fue un abogado y matemático precursor en la escritura algebraica simbólica, empleando letras para las incógnitas en las ecuaciones. Utilizó tales conocimientos en el ámbito de la Criptografía descodificando los mensajes cifrados de la Corona Española a favor de la Corona Francesa.

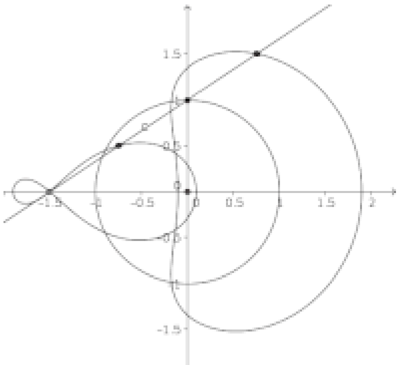
René Descartes (1596 – 1650) fue un filósofo, matemático y científico cuyas obras dieron una nueva mirada tanto a la Filosofía como a las Matemáticas en general. Ideó la Geometría Analítica y el plano cartesiano, con los que propulsó nuevas ramas de estudio para la época.

Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) fue un matemático y físico inventor de herramientas y teorías aplicables a variadas ciencias, ejemplo de esto fueron la balanza de dos astiles o el estudio de cuadraturas que resultó en un método similar al de Torricelli.

Isaac Newton (1643 – 1727) fue un erudito en variadas ciencias y pseudociencias, en el caso de las Matemáticas fue uno de los fundadores del Cálculo Infinitesimal – título que comparte con Leibniz – mientras que para la Física desarrolló la Mecánica Newtoniana.

Curvas Mecánicas

En la Edad Antigua surgieron tres problemas que, debido a su dificultad y características pasaron a la historia como los Problemas Clásicos de la Geometría. Para estos se debían utilizar únicamente los postulados de la geometría euclidiana, condiciones con las que estos se vuelven irresolubles. Sin embargo, empleando herramientas matemáticas que datan de la Edad Moderna, estos problemas clásicos resultaron un fructífero campo de estudio (ver página 47).

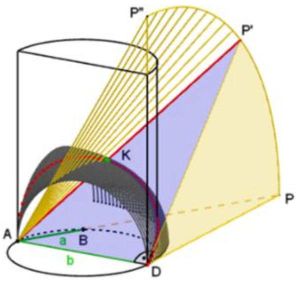


Duplicación del Cubo

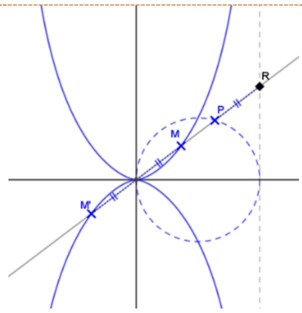
Encontrar el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado.

Este problema también se conoce como el Problema de Delfos, debido a una leyenda en la que, para evitar la propagación de una epidemia, un oráculo de Apolo ordenó la construcción de un altar cúbico de tal forma que tuviese el doble de volumen del altar que tenían en su ciudad.

Solución de Arquitas: Arquitas de Tarento ideó una curva en la que se emplean un cilindro, un toro de revolución y un cono; creados de tal forma que al intersecarse se obtienen dos medias proporcionales con las cuales se obtiene una respuesta teórica (ver página 4848).



Cisoide de Diocles: Diocles ideó una curva mecánica en la que, con ciertas condiciones, al dar movimiento a un punto se genera un conjunto de puntos con los que se obtiene la primera de la familia de curvas conocidas como Cisoides (ver página 4949).

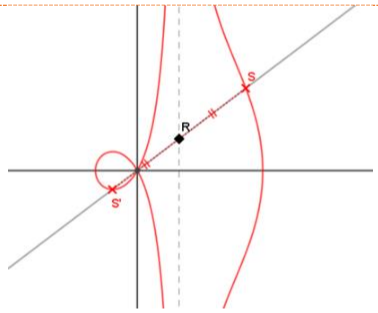


Trisección del Ángulo

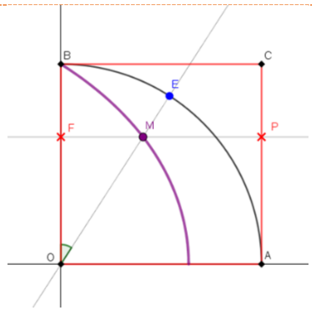
Determinar un ángulo cuya medida sea un tercio de un ángulo arbitrario dado.

Este problema se puede resolver empleando únicamente regla y compás ideales en ciertos casos específicos, además, múltiples pensadores clásicos idearon nuevas herramientas para intentar darle solución. Sin embargo, con las condiciones iniciales no se puede dar respuesta para el caso general.

Concoide de Nicomedes: la curva ideada por Nicomedes si bien permite trisecar ángulos arbitrarios se debe trazar una nueva curva para cada ángulo. De la misma manera, la concoide se puede generalizar para trazarse tanto a rectas como a otras curvas como la elipse (ver página 5050).



Trisectriz de Hipias: Hipias ideó una de las primeras curvas cinemáticas de las que se tiene registro, curva que un siglo más tarde también sería empleada por Dinóstrato para la resolución de otro de los problemas clásicos. Aún con tales bondades empleando regla y compás ideales sólo se pueden construir puntos de la curva (ver página 5151).

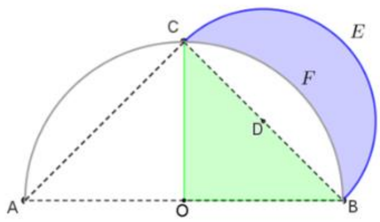


Cuadratura del Círculo

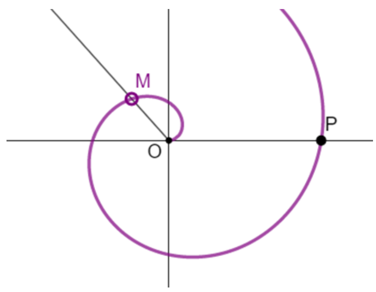
Construir un cuadrado de igual área a la de un círculo dado.

Este problema también puede entenderse geométricamente como: dado un segmento como radio de un círculo determinar otro segmento como lado del cuadrado equivalente. Múltiples pensadores de distintas civilizaciones y épocas trataron por sus propios caminos de aproximar el área de figuras curvilíneas con polígonos, los antiguos griegos no fueron ajenos a ello.

Lúnula de Hipócrates: Hipócrates logró resolver el problema de la cuadratura ideando un algoritmo de construcción para unos casos específicos de la lúnula con las condiciones iniciales. La lúnula puede entenderse como la figura plana limitada por dos arcos de circunferencias (ver página 5252).



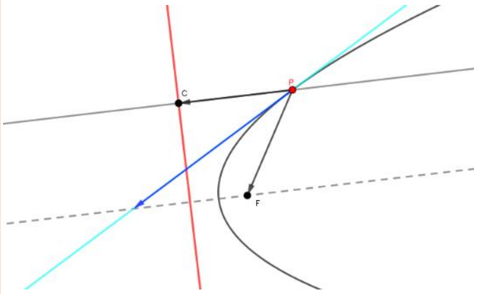
Espiral de Arquímedes: Arquímedes por su parte ideó una curva cinemática con variedad de propiedades, entre estas construir un segmento con magnitud π, número irracional intencionalmente censurado por los antiguos griegos. La curva considera el movimiento de una semirrecta rotando alrededor del origen a la par del avance de punto perteneciente a esta (ver página 5353).



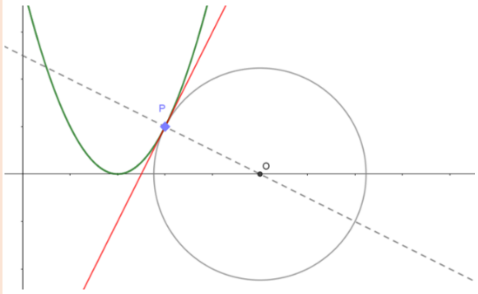
Tangentes a una curva

Determinar la recta tangente a una curva por un punto dado fue un tema común de la época, llegando a considerarse una amplia gama de curvas. Múltiples pensadores de diversas disciplinas idearon sus métodos según sus propias consideraciones, de estos trabajos se obtuvieron interesantes desarrollos y apuntes a las matemáticas de la época, inclusive hubo el nacimiento de nuevas ramas de estudio.

Método de Roberval: Roberval caracterizó a la tangente como la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe. Se deben establecer elementos de la parábola como el foco, la directriz y el eje focal; con estos – y el punto de tangencia – se determinan dos vectores, al sumarlos se obtiene un vector contenido en la recta tangente buscada. Este proceso también puede aplicarse a otras cónicas y curvas mecánicas, sin embargo, tanto el procedimiento como los cálculos resultan exhaustivos (ver página 5656).



Método de Descartes: el Método Analítico fue una de las obras originales de Descartes, esta nueva forma de razonar permitió un avance teórico significativo para las matemáticas, con este ideó su propuesta para la solución del problema, la cual consistió en determinar una circunferencia de modo que su tangente en el punto solicitado sea equivalente a la de la curva inicial. Este método también puede emplearse para calcular las derivadas de funciones de grado menor a dos, así como algunas reglas de derivación y la distancia de un punto a un plano; sin embargo, los cálculos terminan por ser exhaustivos a la par que algunas ecuaciones resultantes demasiado complejas (ver página 5757).



EDAD CONTEMPORÁNEA

La Edad Contemporánea se caracteriza por los múltiples cambios y avances a nivel mundial consecuencia de los diversos enfrentamientos a nivel mundial, como lo fueron la Revolución Francesa, la Primera y Segunda Gran Guerra. Dichos conflictos generaron cambios políticos que afectaron las dinámicas globales en aspectos sociales, culturales, económicos; asimismo impactaron al pensamiento de la población en general.

Debido a los conflictos que se presentaron en la Edad Contemporánea se vivió una evolución tecnológica sin precedentes. En particular, a las Matemáticas además de la utilidad bélica se las empleó como una forma de someter las fuerzas naturales a favor de los seres humanos.

En la Edad Contemporánea hubo un crecimiento desmesurado de la industria y el comercio, lo cual, aunque generó que las poblaciones en general accedieran a nuevos bienes y servicios también significó un consumo excesivo de recursos naturales que a su vez conllevaron a consecuencias medio ambientales que repercuten en la actualidad (ver subcapítulo 3.5).

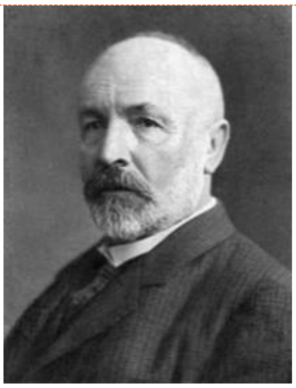
Biografías

A continuación, se mencionan brevemente cuatro de los muchos eruditos de le Edad Contemporánea cuyos aportes a las ciencias fueron de gran valía.

Jean Baptiste Fourier (1768 – 1830) fue un matemático y físico cuyos estudios estuvieron dedicados a la propagación del calor en cuerpos sólidos, con lo cual desarrolló la Serie de Fourier y más adelante el Análisis de Fourier con el cual la Física progresó en áreas como la Telecomunicación y la Electrotecnia.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) fue un matemático, astrónomo, geodésico y físico alemán, con amplios estudios en múltiples ramas de las ciencias exactas y aplicadas. Respecto al Álgebra realizó demostraciones para la Teoría de Números y varias pruebas para el Teorema Fundamental del Álgebra que, aunque no eran estrictamente rigurosas permitieron esclarecer el concepto de números complejos para otros matemáticos. También fue pionero en las geometrías no euclidianas, aunque no publicó sus estudios.

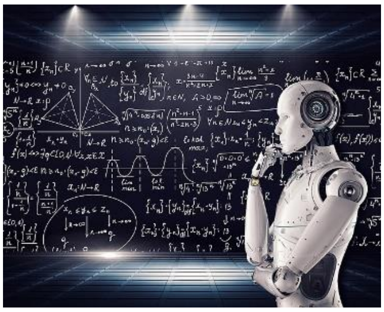
Georg Cantor (1845 – 1918) fue un matemático alemán cofundador de la Teoría de Conjuntos. Fueron sus valiosas investigaciones las que permitieron formalizar la noción de infinito bajo la forma de números *transfinitos*. Sin embargo, recibió fuertes críticas por su trabajo y por sus intentos fallidos en la demostración del Hipótesis del Continuo que terminaron con su defunción.



Emmy Noether (1882 – 1935) fue una matemática y física alemana con importantes trabajos en ambos campos. En Matemáticas fue una de las fundadoras del Álgebra Moderna, revolucionó la teoría de anillos y de cuerpos; por otro lado, en Física desarrolló el Teorema de Noether, con el que determinó la conexión fundamental entre la simetría en física y las leyes de la conservación.

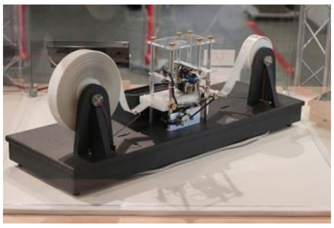
Redes neuronales

Las redes neuronales son un tipo de algoritmo de *Machine Learning*, un método de programación que busca diseñar y entrenar inteligencias artificiales con el propósito de realizar una tarea de forma óptima. Su funcionamiento simula a un cerebro real, aprendiendo desde la experiencia, generalizando y abstrayendo información al realizar un proceso de simulación reiterada en el que cada neurona artificial se especializa en una tarea específica que permite solucionar el problema planteado (ver página 5959).



Desarrollo computacional

Como apoyo para la resolución de la pregunta: ¿son las matemáticas decidibles, en el sentido de que se puede crear un sistema de deducción paso a paso, que aplicado a cualquier postulado pueda determinar si este es verdadero o falso? Alan Turing diseñó la máquina de Turing, una herramienta capaz de computar o resolver un problema a través de una serie de valores de entrada, un conjunto de símbolos y un conjunto de estados. Si bien, las máquinas de Turing son capaces de resolver



cualquier problema computable, su generalidad hace que su uso sea poco óptimo. Por tanto, fue necesaria la creación de modelos restringidos como los autómatas linealmente acotados, autómatas de pila y autómatas infinitos (ver página 6262).

6. Conclusiones

Se presentan a continuación, las conclusiones obtenidas al finalizar el desarrollo del MID. Las conclusiones se detallan en tres apartados: según el cumplimiento de los objetivos propuestos; según el impacto que tuvo en los conocimientos y habilidades investigativas de los autores; y según las dificultades presentadas durante el desarrollo del trabajo de grado, así como los asuntos que no se lograron trabajar o las preguntas que quedaron por responder.

En relación con el cumplimiento de objetivos, se considera que estos fueron alcanzados durante el desarrollo del trabajo de grado. Particularmente, el objetivo principal el cual correspondía a diseñar un Museo Interactivo Digital en Unity en el cual se expusieran diversas heurísticas surgidas en la HM, así como una serie de actividades que ilustran el funcionamiento de algunas de estas.

Partiendo de lo anterior, se considera también que los objetivos específicos fueron cumplidos en su totalidad, pues se realizaron las diversas actividades asociadas a cada uno de ellos como se muestra a continuación:

- Se realizó una revisión documental sobre las heurísticas evidenciadas en la HM, que, si bien fue interrumpida por la necesidad de establecer un concepto de Heurística que permitiera discriminar los hechos, eventos y métodos iban a ser implementados en el MID, se completó satisfactoriamente.
- Se seleccionaron algunas de las heurísticas encontradas en la HM, identificando las que poseían una mayor potencialidad para ser implementadas como actividades en el MID por criterios como sus componentes visuales.
- Se desarrolló un entorno tridimensional a modo de museo en el cual se exhiben las diversas heurísticas de la HM seleccionadas, en este es posible realizar las diversas actividades planeadas por los autores.
- Se escribió un documento, a modo de monografía, en el cual se compiló toda la información relacionada a los objetivos específicos anteriores, es decir: la revisión documental, el diseño de las actividades y los diversos elementos (*v. g.* audios e imágenes) que componen el MID.

Por otra parte, respecto al progreso de los conocimientos y las habilidades en los autores, se identifican los relacionados con competencias básicas de investigación, como son la capacidad para realizar una revisión documental sobre un tema o concepto particular, discriminando de toda la información aquella que no cumple con unos parámetros establecidos e identificando y profundizando en aquella que sí, para posteriormente construir una serie de resúmenes en los que se condense cada uno de los elementos investigados, para este caso, las heurísticas. Asimismo, el desarrollo del TG conllevo a una inherente mejora en aspectos académicos de los autores como la lectura analítica de textos, al momento de indagar en diversas fuentes y socavar información relevante para la revisión documental; y la redacción académica, al momento de condesar la información suficiente y necesaria tanto de la revisión documental como del proceso de elaboración del MID en un único documento.

Debido, el criterio principal que fue utilizado durante la revisión documental fue la definición de Heurística planteada por los autores, la cual da cuenta y razón del desarrollo de la habilidad para la creación de definiciones fundamentadas en investigaciones realizadas por diversos autores y que además responda apropiadamente a las particularidades de la situación. Continuando con la capacidad para filtrar información de diversa índole, se observa un segundo momento en el cual se seleccionaron las heurísticas que iban a ser incluidas en el MID ya sea como actividades o como elementos del entorno – diferenciación que también permite entrever dicha capacidad – por medio de criterios como el cumplimiento de la definición o según sus aspectos visuales.

Explayando en la discriminación entre actividades y elementos del entorno, se evaluó cada heurística partiendo primero de sus aspectos visuales y posteriormente según su grado de interactividad. Para ello se plantearon múltiples propuestas que luego atravesaron una discusión sobre la viabilidad para ser implementadas como actividades en el MID, concluyendo en las cinco detallades en el subcapítulo 5.1, por lo que se puede entrever la capacidad de los autores para plantear tareas relacionadas con una teoría a la par que tiene en cuenta el medio en que se van a presentar.

Así mismo, se recalca que, aunque existían conocimientos relacionados con la programación en Unity estos también se vieron fortalecidos por parte de los autores. En particular se destaca la capacidad para diseñar, organizar y optimizar algoritmos que se relacionan entre sí; la profundización en la forma en la que interactúan los elementos fundamentales del *software* (Escenas, GameObjects y Componentes) y el uso de herramientas propias del motor de videojuegos como sistema de físicas y la interfaz de usuario que, si bien, habían sido usadas anteriormente no se les había empleado con tanto detalle como el requerido por el MID. Cabe resaltar que, si bien este tipo de conocimientos no son protagónicos en el proceso de formación docente en el área de Matemáticas, fueron adquiridos durante la carrera y permiten ampliar la gama de herramientas disponibles al momento de intervenir en un proceso educativo, pues dan la posibilidad de asumir estrategias distintas a las convencionales a las convencionales o desarrollar material particular relacionado a un concepto matemático específico.

Continuando con el desarrollo de esta propuesta, se observó el surgimiento de dificultades de variada índole que, aunque de una manera u otra se lograron resolver, se destacan a continuación:

- Al momento de llevar a cabo la revisión documental se encontraron problemas debido a la ambigua definición de Heurística, un concepto tratado por diversos autores desde múltiples puntos de vista, así como con diferentes finalidades. Finiquitar este problema requirió de un estudio del concepto que da cabida a otros análisis ya sea de las teorías o de otras revisiones documentales según otras definiciones.
- La relativamente poca información sobre desarrollo matemático en ubicaciones como Oceanía, América, África (en comparación con los registros que hay sobre, por ejemplo, las civilizaciones clásicas de Europa); ya sea por la falta de registro de las sociedades que allí se asentaron o por la destrucción de estos por diversos motivos, razón por la cual no se incluyeron en la revisión bibliográfica.
- Similar a la anterior viñeta, al buscar información sobre Matemáticas e HM en las civilizaciones la hindú, árabe y china se presentaron problemas para dilucidar estrategias que puedan ser clasificadas como heurísticas, ya que, aunque se tienen mayores registros al compararlas con otras civilizaciones, estos flaquean en profundidad o en difusión.
- Variadas heurísticas se pensaron para implementarse como actividades, llegando inclusive a avanzar con la creación de los códigos de programación y los resúmenes para la monografía, empero, por diversos factores – *v. g.* nueva definición de Heurística, falta de aspectos visuales o dificultades para implementarlas en el MID – fueron modificadas para ser elementos del entorno o, en el peor de los casos, descartadas de esta propuesta.

Por otra parte, algunos de los temas que no se lograron tratar en este TG y permiten generar nuevos estudios a futuro son:

- Debido a que varias de las actividades que se plantearon inicialmente fueron omitidas de este TG dado que no fue posible programarlas en el MID o no cumplían con la definición de Heurística, se deja abierta la posibilidad de diseñar o programar otras actividades basadas en otras estrategias de resolución de problemas surgidas en la HM, ya sea como continuación del MID o como otra investigación.
- Se puede pensar en un estudio sobre las nociones y aserciones que el profesorado en general tiene al respecto de las heurísticas y su incidencia en el aula, si esta concuerda con alguna de las teorías estudiadas en el capítulo 2 , si se entiende como la definición formulada por los autores o si se tiene otra percepción.
- Durante el proceso de elaboración de este TG hubo una revisión documental somera para campos como la Criptografía, las Geometrías no Euclidianas, la Teoría de Números, la matemática con aplicaciones a la Física o a la Biología, entre otras; sin embargo, no fueron incluidas en la versión final del MID debido a que no calificaban como heurística según la definición establecida. Existe la posibilidad de continuar con pesquisas relacionadas a estos ámbitos en trabajos investigativos similares.
- En su idea primitiva, el MID fue pensado para tratar exclusivamente la HM, visión que se modificó como bien muestra este escrito. Realizar un entorno tridimensional enfocado en la HM, en las Matemáticas o en otro tema puede ser una propuesta interesante como continuidad del trabajo de los autores o somo un estudio independiente.
- Para este TG la definición particular formulada por los autores de Heurística fungió como filtro para determinar los conceptos matemáticos a implementar en el MID, sin embargo, se podría emplear otra definición de otros autores del capítulo 2. Asimismo, el MID se organizó según las etapas históricas documentadas en el subcapítulo 3.1. Por lo tanto, se propone como una posible continuación a este TG plantear otro tipo de clasificación (*v. g.* distintos tratamientos a un mismo concepto matemático, matemáticas aplicadas a alguna ciencia, paradojas surgidas en la HM) para el diseño de un entorno tridimensional.
- Aun cuando el MID fue pensado como un material de apoyo docente, es decir, relacionado directamente con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, este no fue implementado en tales contextos. La implementación y análisis de resultados queda como un tema pendiente para tratar a futuro.

Para finalizar, queda abierta la invitación para seguir con el trabajo de los autores, ya sea desde la revisión documental o desde la creación de material interactivo digital; observando las falencias y los aciertos que se presentaron durante este trabajo de grado, reflexionando respecto a ello y mejorando con miras a aportar a la labor docente.

7. Referencias

ACNUR Comité Español. (Junio de 2018). *La Edad Antigua: breve resumen.* Obtenido de https://eacnur.org/blog/edad-antigua-breve-resumen-tc_alt45664n_o_pstn_o_pst/

Asimov, I. (1999). *Grandes Ideas De La Ciencia.* Madrid: Alianza.

Babini, J. (1952). *Historia Sucinta de la Matemática* (Tercera ed.). España: Espasa Calpe.

Barrantes, H. (2006). Resolución de Problemas: El Trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*(196). Obtenido de https://hdl.handle.net/10669/18799

Bejarano, K., y Páez, E. (2022). Una Revisión a los Distintos Usos del Concepto de Infinito a Través de la Historia. *[Trabajo de grado].* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Bobadilla, M. (2012). Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. *[Trabajo de doctorado].* Universidad del Valle, Santiago de Cali. Obtenido de http://hdl.handle.net/10893/4728

Bombal, F. (2012). La Cuadratura del Círculo: Historia de una Obsesión. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 105*(2), 241-258. Obtenido de http://www.rac.es/ficheros/doc/01019.pdf

Canizales, G., y Erazo, J. (2013). Métodos Heurísticos para el Cálculo de Volúmenes en el Siglo XVII Bajo la Idea Naciente de Integral Definida: Una Aproximación Desde Arquímedes, Cavalieri y Torricelli. *[Trabajo de grado].* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12209/2195

Collette, J-P. (2000). *Historia de las Matemáticas I* (Cuarta ed., Vol. I). (C. P. Alfonso, Trad.) México: Siglo XXI Editores.

Collette, J-P. (2002). *Historia de las Matemáticas II* (Quinta ed., Vol. II). México: Siglo XXI Editores.

Contreras, J., y Del Pino, C. (Noviembre de 2002). Sobre el Problema de la Cuadratura del Círculo. *Revista del Instituto de Matemática y Física*(9), 42-49.

Cordua, C. (2013). El Humanismo. *Revista Chilena de Literatura*, 9-17.

Cortés, J., y Sanjuán, G. (Noviembre de 2004). El método de Descartes para trazar normales. *SUMA*(47), 41-46. Obtenido de https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/47/041-046.pdf

Crespo, E. (2007). Modelo Didáctico Sustentado en la Heurística Para el Proceso de Enseñanza - Aprendizaje de la Matemática Asistida por Computadora. *[Trabajo de doctorado]*. Universidad de Ciencias Pedagógicas "Felix Varela", Villa Clara.

Crilly, T. (2009). *50 Cosas Que Hay Que Saber Sobre Matemáticas.* España: Ariel. Obtenido de http://www.librosmaravillosos.com/50cosas_que_hay_que_saber_sobre_matematica/index.html

D'Amore, B. (2008). *Matemática en Todo: Recorridos Matemáticos Inusuales y Curiosos.* Bogotá: Magisterio.

De León, I., y Suárez, J. (2008). El Diseño Instruccional y Tecnologías de la Información y la Comunicación. Posibilidades y Limitaciones. *Revista de investigación*(65), 57-81. Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/3761/376140380003.pdf

Díaz, R., y Díaz, J. (Abril de 2018). Los Métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático. *Bolema*, 57 - 74. doi:https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a03

Durán, J., y Guerrero, N. (2014). Camino a la integral moderna (Teoría de la medida e integral de Lebesgue). *[Trabajo de grado]*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12209/2178

Fernández, C., Molina, M., y Planas, N. (Septiembre de 2015). *Investigación en Educación Matemática XIX.* Alicante: SEIEM. Recuperado el Junio de 2022, de Universidad de Alicante: http://hdl.handle.net/10045/51552

Gloël, M. (2016). La Edad Moderna: El Término y su presencia en las historiografías occidentales. *Revista de Historia Social*, 11-32.

Gombrich, E. (1936). *Breve Historia del Mundo.* (J. Gil, Trad.) España: Booket.

Gonzalez, P. (Abril de 1995). *De Arquímedes a Leibniz. Tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico.* Obtenido de Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia: https://fundacionorotava.org/media/web/publication_files/publication23__a2_c016w.pdf

Grijalva, Y. (2009). *Métodos Cuantitativos Para Los Negocios.* Obtenido de https://uplamcdn.files.wordpress.com/2009/04/libro-cap-08.pdf

Guacaneme, E. (26 - 30 de Junio de 2011). XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. *La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones.* [Sesión de conferencia]. Recife.

Ibáñez, R. (2019). *Los Secretos de la Multiplicación: de los Babilonios a los Ordenadores.* Madrid, España: Catarata.

Illana, J. (2013). *Métodos Monte Carlo.* Granada, España.

Innovación Aprendizaje. (2016). Método de Montecarlo. Obtenido de https://youtu.be/YYIE5VCT4d8

Javier García. (02 de Diciembre de 2016). La Máquina de Turing (explicada). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=NS-NQ5mCSs8&t=1837s

Juárez, S., y Manzano, C. (2017). *Máquinas de Turing y el problema de la universalidad como sistema dinámicos.* Obtenido de http://www.comunidad.escom.ipn.mx/genaro/Papers/Thesis_files/CAasTM.pdf

Lechad, J. (2018). *Científicas: Una Historia, Muchas Injusticias.* Madrid: Silex.

Lupiañez, J. (2002). Reflexiones Didácticas sobre la Historia de las Matemáticas. *SUMA*(40), 59-63.

Luque, C., Mora, L., y Torres, J. (2014). *Actividades Matemáticas Para el Desarrollo de Procesos Lógicos. Clasificar, Medir e Invertir* (Segunda ed.). Bogotá: Universidad Pedágogica Nacional.

Mankiewicz, R. (2005). *Historia de las Matemáticas: Del Cálculo al Caos* (Segunda ed.). Barcelona: Paidós.

Mataix, M. (1986). *Historias de Matemáticos y Algunos Problemas.* Barcelona, España: Marcombo.

Mataix, M. (1991). *Ludopatía Matemática.* Madrid: Alianza.

MatemáticasTV. (2008). La Historia de las Matemáticas - Capítulo 1: El Lenguaje del Universo [video]. YouTube. Obtenido de https://youtu.be/XOAA0fnq-hI

MatemáticasTV. (2008). La Historia de las Matemáticas - Capítulo 2: El genio de Oriente [video]. YouTube. Obtenido de https://youtu.be/ki02zBh4ZMc

Matich, D. (Marzo de 2001). *Redes Neuronales: Conceptos Básicos y Aplicaciones.* Obtenido de Repositorio institucional UTN: https://www.frro.utn.edu.ar/repositorio/catedras/quimica/5_anio/orientadora1/monograias/matich-redesneuronales.pdf

Maza, C. (2007). *Matemáticas en Mesopotamia.* España: Carlos Maza Gómez.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (Segunda ed.). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Morales, M. (10 de Mayo de 2010). *La solución de Arquitas al problema délico*. Obtenido de Gaussianos: https://www.gaussianos.com/la-solucion-de-arquitas-al-problema-delico/

Moreno, R. (18 de mayo de 2018). Matemáticas en la Antigua India [video]. CanalUNED. Obtenido de https://canal.uned.es/video/5b028adbb1111f6d218b4567

Moreno, R. (2012). *Las Matemáticas de los Faraones.* España: Nivola Libros y Ediciones.

Ortiz, A. (Junio de 2005). *Historia de la Matemática* (Primera ed., Vol. I). Lima, Perú: U. S. B. N.

Ouazzani, I. (2012). *Manual de Creación de Videojuego con Unity 3D.* Obtenido de Manual de Creación de Videojuego con Unity 3D: https://www.academia.edu/5171832/MANUAL_DE_CREACIÓN_D_VIDEOJUEGO_CON_UNITY_MANUAL_DE_CREACIÓN_DE_VIDEOJUEGO_CON_UNITY_3D

Perero, M. (1994). *Historia e Historias de Matemáticas.* México: Iberoamérica.

Pérez, M., y Telleria, M. (2012). Las TIC en la educación: nuevos ambientes de aprendizaje para la interacción educativa. *Revista de Teoria y Didáctica de las Ciencias Sociales*(18), 83-112. Obtenido de http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/37128

Pero Eso Es Otra Historia. (2016). ANTIGUA GRECIA 2: La Época Arcaica - Polis Griegas y la Amenaza Persa (Documental Historia Resumen). España. Obtenido de https://youtu.be/IaV4rNo_OS8?list=PLLueKhGe-1XBtVTIQJReDwEHGxEY1Qkm5

Pero Eso Es Otra Historia. (Abril de 2022). ANTIGUO EGIPTO - Toda la Historia del Antiguo Egipto y mitología egipcia - (Documental Historia). España. Obtenido de https://youtu.be/qcG-nZaud1g

Pickover, C. (2009). *El Libro de las Matemáticas: de Pitágoras a la 57° dimensión, 250 hitos de la historia de las matemáticas.* Kerkdriel, Holanda: Librero.

Pipkin, D. (2015). *Historia Mundial Contemporánea.* Buenos Aires, Argentina.

Población, A. (2012). *Alan Turing un genio incomprendido.* Obtenido de https://www.inf.uva.es/wp-content/uploads/2012/11/ArticuloTuring_AlfonsoPoblacion.pdf

Pólya, G. (1964). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* (J. Zugazagoitia, Trad.) México: Trillas.

Puig, L. (1996). El Modelo de Competencias. En *Elementos de Resolución de Problemas* (p. 33-49). Granada: Comares. Obtenido de https://www.uv.es/puigl/lerp3.pdf

Real Academia Española. (2022). *Estrategia.* En Diccionario de la Lengua Española [edición de tricentenario]. Obtenido de https://dle.rae.es

Rey, J., y Babini, J. (2013). *Historia de la Matemática* (Tercera ed., Vol. I). Barcelona: Gedisa.

Rodríguez, A., y Sandoval, C. (2016). La Historia Como Una Herramienta Didáctica Para La Enseñanza Del Concepto De Integral. *[Trabajo de grado].* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12209/2251

Salazar, E., y Alzate, W. (2018). Aplicación de la Simulación Monte Carlo en la Proyección del Estado de Resultados. Un Estudio del Caso. *Revista Espacios*.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *D. Grouws*, 334-370. Obtenido de http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/Schoenfeld_MathThinking.pdf

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los Úlimos 10.000 Años.* España: Crítica.

Stewart, I. (2018). *Mentes Maravillosas. Los Matemáticos Que Cambiaron el Mundo.* (J. Riera, Trad.) Bogotá: Planeta.

Unity Technologies. (2016). *Manual de Unity*. Obtenido de https://docs.unity3d.com/es/530/Manual/UnityManual.html

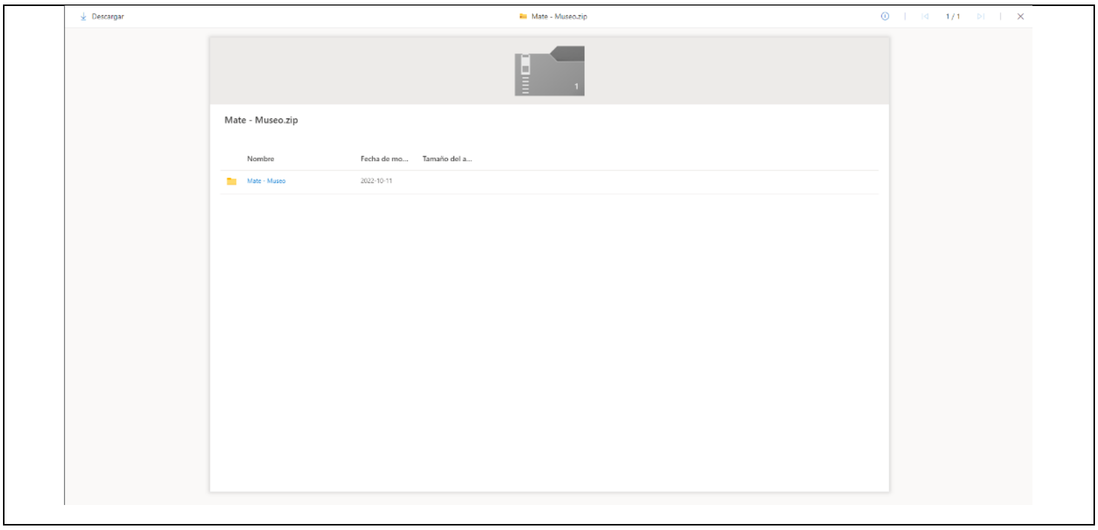
Vargas, C. (2013). La Jerarquía de Chomsky: Una Evolución Esperable en Teoría de la Computabilidad. *Revista Internacional de Investigaciones Filosóficas*(5), 63-80. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/344942000_LA_JERARQUIA_DE_CHOMSKY_UNA_EVOLUCION_ESPERABLE_EN_TEORIA_DE_LA_COMPUTABILIDAD

8. Anexos

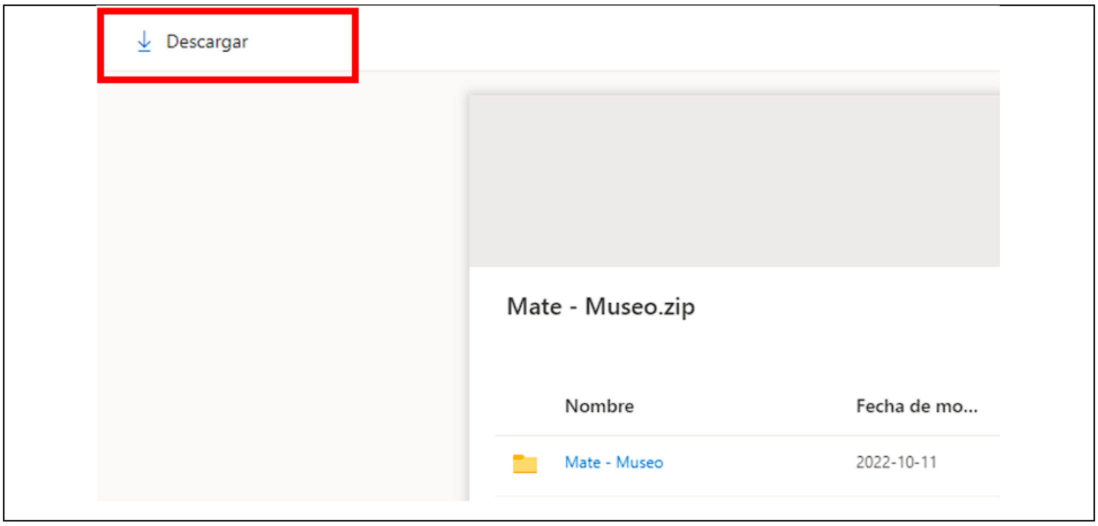
Anexo 1

Instructivo para el acceso al MID: se deben seguir los siguientes pasos para descargar y acceder al MID:

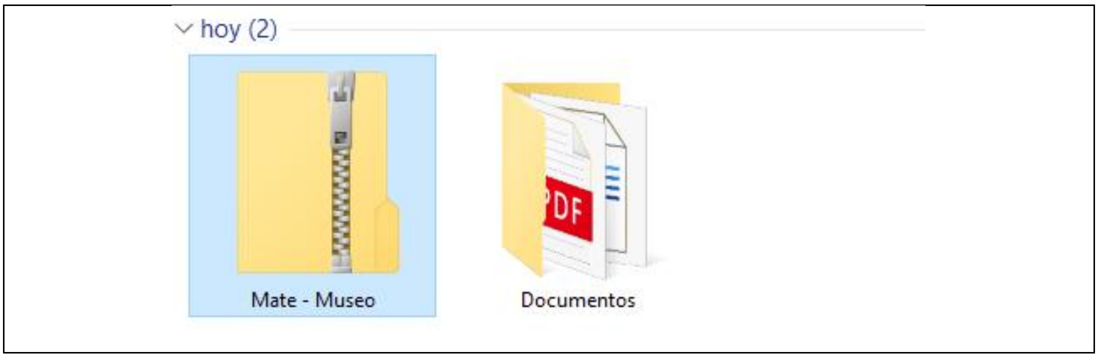
1. Acceder al siguiente enlace para descargar el MID: Mate - Museo.zip. El cual mostrará una pantalla similar a esta:



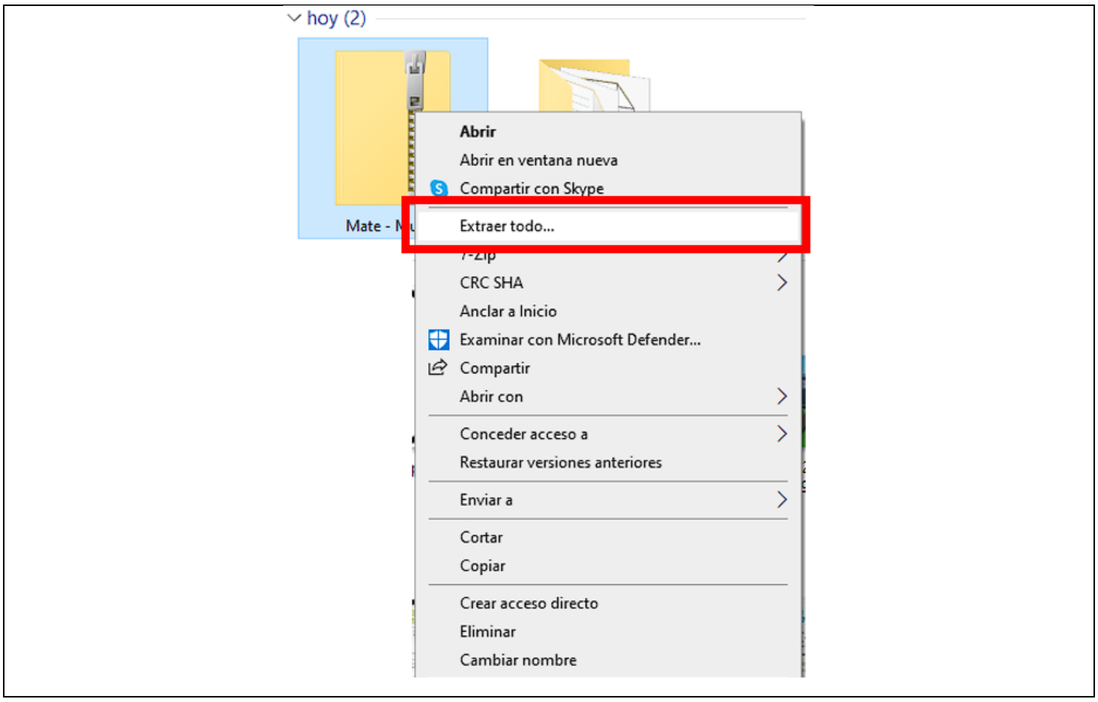
2. Dar clic en el botón "Descargar" que se encuentra en la esquina superior izquierda:



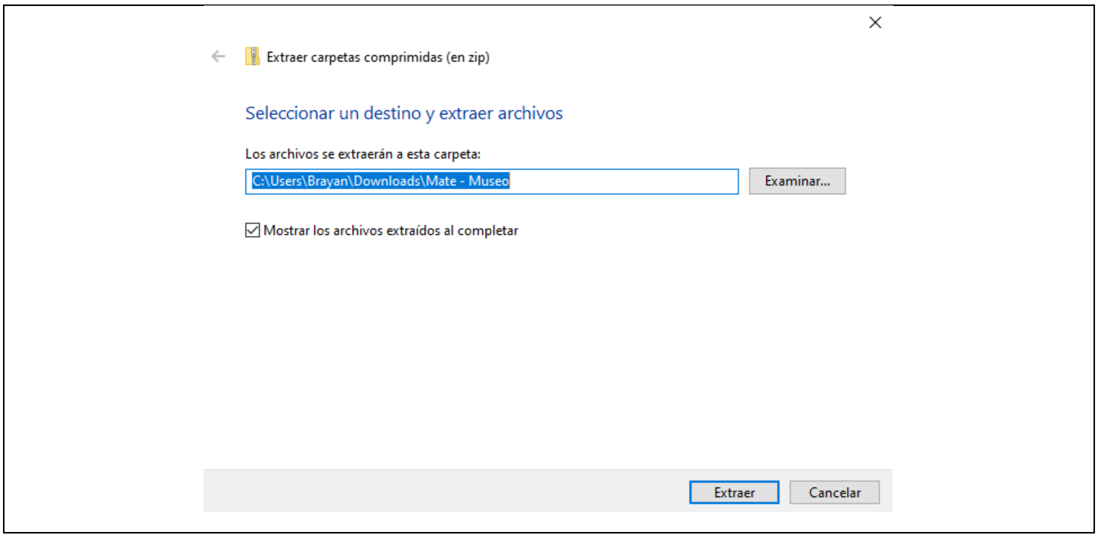
3. Esperar a que se complete la descarga y posteriormente abrir la carpeta en la que se guardó el archivo descargado.



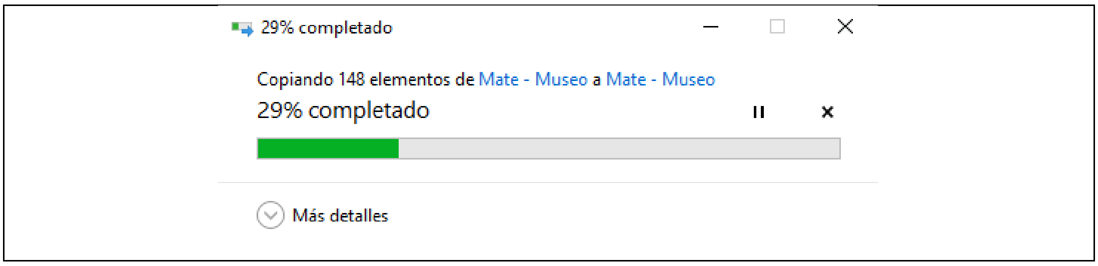
4. Dar clic derecho al archivo del Mate – Museo, buscar la opción de "extraer aquí":



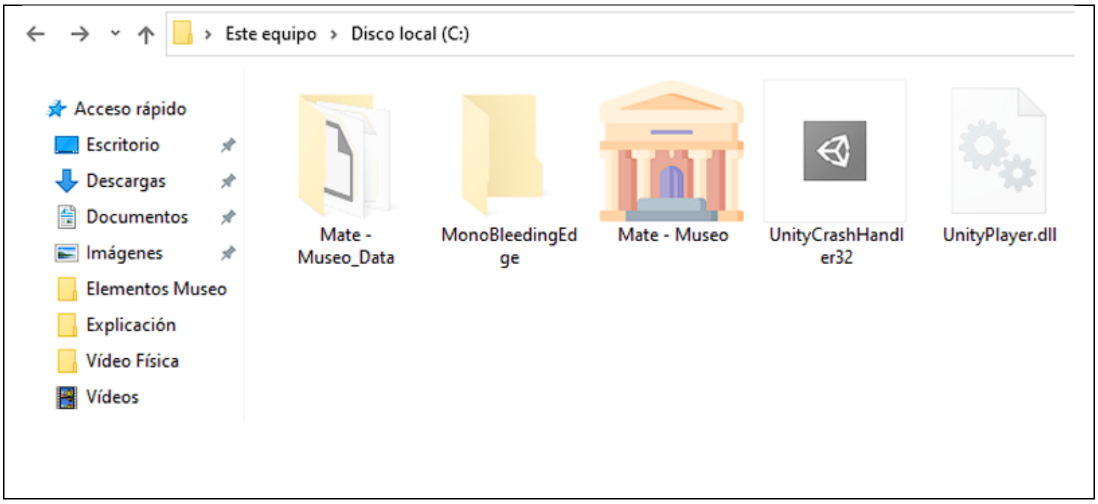
5. Se abrirá una ventana en la que se solicita elegir la carpeta en la que se desea guardar el Mate – Museo una vez extraído. Tras ello, pulsar el botón "extraer" que se encuentra en la zona inferior de la ventana.

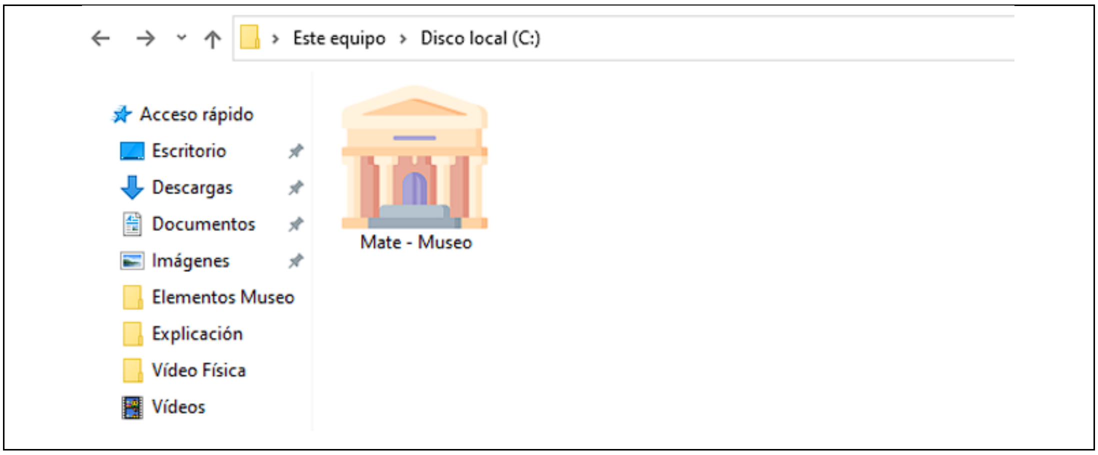


6. Esperar a que la carpeta se descomprima en su totalidad para posteriormente abrirla en la ubicación que se seleccionó:

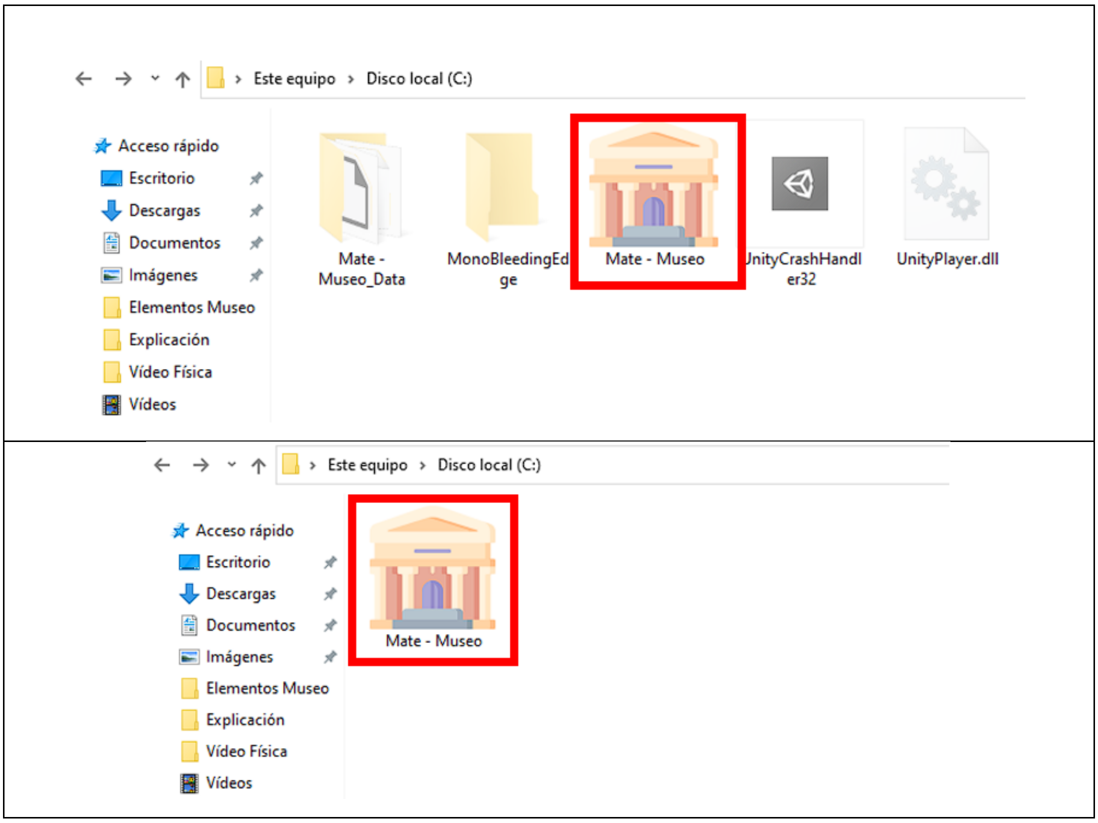


7. Al acceder a la carpeta del Mate – Museo se puede observar cualquiera de las siguientes dos pantallas:



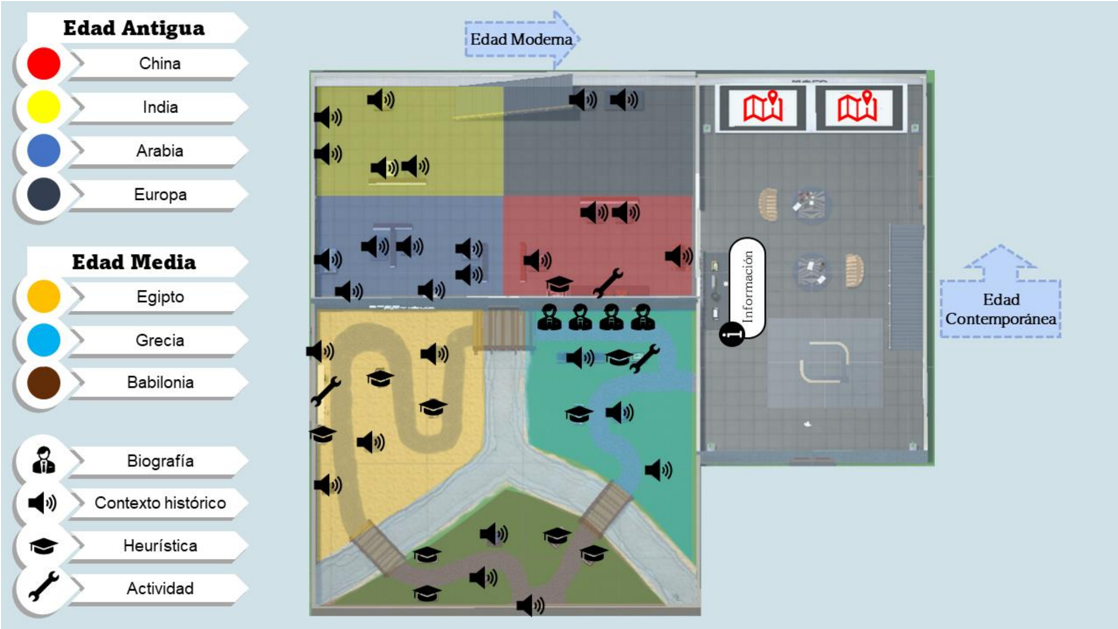


8. Abrir el archivo titulado “Mate - Museo”



Anexo 2

Plano del primer piso del MID



Plano del segundo piso del MID