Tareas de geometría para maestros de la Educación Básica: un apoyo a la enseñanza por procesos

Adriana Sofia Ivana González Vargas
Heyber Alejandro Pérez Ramírez

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional

Trabajo de grado

Directora. Leonor Camargo Uribe

07 de junio de 2022

Agradecimientos

A Dios

Por darnos la oportunidad de crecer durante este proceso, por permitirnos llegar a este punto, resultado de nuestra dedicación, esfuerzo y formación como futuros licenciados en matemáticas.

A la Universidad Pedagógica Nacional

Por abrirnos sus puertas, por ser la excelentísima educadora de educadores, por darnos la oportunidad de vivir experiencias maravillosas que nos permitieron crecer personal y profesionalmente. A los profesores de la licenciatura que aportaron desde sus experiencias y conocimientos a nuestra formación.

A la profesora Leonor Camargo Uribe

Por habernos dado la oportunidad de trabajar junto a ella, mostrarnos su constante apoyo, dedicación incondicional y motivación a realizar y culminar este trabajo de grado. Es una de nuestras inspiraciones de docente que queremos llegar a ser.

Dedicatoria

A Dios por darme la vida y permitir que cumpliera mis propósitos y sueños día a día.

A mis padres por ser mi motivación, por brindarme su amor incondicionalmente, por apoyarme en cada cosa que emprendo, por siempre estar cuando los necesito, por crear en mí una mujer de sueños, aspiraciones y anhelos y por ese gran amor que diariamente me hacen sentir, por ellos losoy todo.

A mis hermanas y hermanos, por su amor infinito, por ser una inspiración y espero poder tambiénser un motivo de inspiración y luz en sus vidas.

A cada uno de mis compañeros por brindarme su colaboración, ánimo y compañía en el desarrollode esta etapa en mi vida.

Por último y no menos importante, a mi compañero Heyber Pérez por su sabiduría y apoyo.

Adriana Sofia Ivana González Vargas

A Dios por darme la vida y darme la oportunidad de poder vivir esta experiencia.

A mis padres porque ellos siempre estuvieron ahí bridándome su apoyo, consejos y amor parahacer de mí el hombre que soy hoy en día.

A mis hermanas y hermanos, por su apoyo incondicional en todo lo que me propongo.

Espero queeste triunfo sea el primero de muchos en la familia.

A cada uno de mis compañeros por brindarme su colaboración, ánimo y compañía en el desarrollode esta etapa en mi vida.

Por último, agradezco a mi compañera Sofia Gonzalez por su conocimiento, sus palabras, susabiduría y su apoyo los cuales permitieron la finalización de este trabajo.

Heyber Alejandro Pérez Ramírez

Resumen

Este trabajo de grado es fruto del interés adquirido durante el curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y es compartido por el Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría del Departamento de Matemáticas [DMA] de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN].

En este, se atienden dos problemáticas: la primera, está ligada a la enseñanza de la geometría, la cual se lleva a cabo generalmente de manera memorística. La segunda tiene que ver con el desaprovechamiento de las tareas propuestas por Futuros Educadores Matemáticos [FEM] del curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría cohortes 2019-2 a 2020-2 las cuales tienen como propósito movilizar los procesos propios de la geometría y además cuentan con un avance en su planeación e implementación. Es por ello por lo que, en este en este documento, dirigido a docentes, retomamos algunas tareas propuestas por los FEM, cuyo objetivo es que los estudiantes desarrollen procesos de pensamiento implícitos en la construcción de conocimiento geométrico. Para perfeccionar estas tareas, llevamos a cabo un proceso en el que comenzamos seleccionándolas, luego construimos un marco de referencia y después hicimos un análisis didáctico y de esta manera realizamos los cambios que consideramos necesarios para optimizarlas. Con estas modificaciones creamos el compendio que es el producto de este trabajo de grado. De esta manera intentamos promover un cambio de la enseñanza memorística a la enseñanza por procesos.

Palabras clave: tarea de geometría, Futuro Educador Matemático (FEM), Enseñanza y Aprendizaje

1. Tabla de contenido

TABLA DE FIGURAS

TABLA DE TABLAS

Introducción

Puedes enseñar una lección un día, pero si puedes enseñar creando curiosidad, el aprendizaje será un proceso para toda la vida

(Clay P. Bedford)

A lo largo de los años, la educación geométrica se ha planteado retos dirigidos a atraer el interés de los estudiantes y promover su conocimiento (Farias y Pérez, 2010). Es por ello por lo que es necesario el desarrollo de nuevos métodos de enseñanza que provoquen un impacto en el aprendizaje de los estudiantes. Estos métodos deberían proporcionar un cambio en la enseñanza tradicional memorística y llevar a que los estudiantes desarrollen procesos tales como: visualizar, representar, conceptualizar, conjeturar y argumentar. De esta manera los estudiantes podrán aplicar sus conocimientos geométricos en su vida diaria, en la academia o en su profesión futura (MEN, 1998).

Teniendo en cuenta lo anterior, reunimos, analizamos y modificamos 16 tareas de geometría (dirigidas a la educación básica) realizadas por los Futuros Educadores Matemáticos (FEM) en los cursos de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría cohortes 2019-2 a 2020-2, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Estas tareas buscan fortalecer los procesos cognitivos que en ellas se trabajan. Esperamos que estas tareas sean aplicadas ya sea por docentes en ejercicio o por maestros en formación.

La finalidad de este documento es presentar el proceso que seguimos para hacer las modificaciones. Para ello, dividimos el documento en cinco capítulos los cuales, a medida de su lectura, proporcionan al lector fundamentos para el análisis de las tareas e información sobre las modificaciones que realizamos de cada una de ellas.

En el **Capítulo 1**, presentamos la justificación. En esta, describimos las dos problemáticas que intentamos atender, los motivos que nos llevaron a realizar este trabajo de grado, el objetivo general y seis objetivos específicos.

En el **Capítulo 2,** damos a conocer los elementos teóricos que dan sustento al trabajo. Este consta de dos partes: lo referente al concepto de tarea matemática escolar y elementos para el diseño de una tarea; y lo concerniente a los procesos cognitivos propios del trabajo en geometría. En la primera parte, proporcionamos la definición de tarea, tarea matemática y tarea matemática escolar. También, definimos y describimos 8 elementos que consideramos importantes en la construcción de una tarea matemática escolar. En la segunda, definimos y caracterizamos los cinco procesos cognitivos que consideramos en nuestro trabajo de grado.

En el **Capítulo 3,** presentamos la metodología llevada a cabo para el desarrollo de este trabajo. Damos un informe sobre el material documental primario, donde se puede encontrar cómo obtuvimos el material, su organización y caracterización y el procedimiento para seleccionar el material documental con que el que trabajamos (las 16 tareas seleccionadas).

En el **Capítulo 4,** presentamos el análisis didáctico de las 16 tareas que seleccionamos, considerando 6 elementos del análisis de una tarea realizada por los autores (FEM) y nuestras apreciaciones y modificaciones (de ser necesario), teniendo en cuenta el marco de referencia.

En el **Capítulo 5**, damos a conocer las conclusiones a las que hemos llegado después de haber realizado este ejercicio académico. Hacemos referencia al cumplimiento de los objetivos propuestos y al impacto que tuvo el presente trabajo en nuestra formación, como docentes y en nuestras vidas.

1. Capítulo 1. Presentación del estudio

En este capítulo damos a conocer las problemáticas que buscamos atender en nuestro trabajo de grado y las razones que nos motivaron a realizarlo, señalando como surgió el interés de crear esta propuesta. A partir de esto, formulamos nuestro objetivo general y los objetivos específicos.

1.1. Justificación

En nuestro trabajo de grado atendemos dos problemáticas estrechamente relacionadas. A continuación, nos referimos a cada una de ellas.

Una, como lo señalan Ballestero y Gamboa (2009), la enseñanza de la geometría generalmente se hace de manera memorística descuidando los procesos de pensamiento. Se presentan a los estudiantes los contenidos matemáticos como productos acabados de la actividad matemática y se enfatiza en el aprendizaje rutinario de: áreas, volúmenes, definiciones geométricas y teoremas. Esto se hace, algunas veces, con el apoyo de procedimientos descontextualizados. Lo anterior limita que los estudiantes desarrollen los procesos de pensamiento implícitos en la construcción de conocimiento geométrico, propuestos en los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998). Una de las causas de esta situación, según Aray, Párraga y Chun (2019), es que los recursos bibliográficos sobre la enseñanza de la geometría son poco conocidos y en la mayoría de los casos el proceso de enseñanza está condicionado por libros de texto que comunican el saber de forma tradicional, impactando en el qué y en el cómo enseñar.

Dos, en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, los estudiantes proponemos tareas para el aula, que implementamos en la práctica inicial de esa materia. A partir de este ejercicio académico, elaboramos informes en los cuales evaluamos su ejecución, en función de los procesos que logramos fortalecer en los estudiantes. Ahora bien, estas tareas no son revisadas y mejoradas posteriormente, haciendo un análisis cuidadoso de las mismas, ya que los tiempos de la práctica no lo permiten. En consecuencia, se está desaprovechando este material que ya tiene avances y sirve como un punto de partida para la formulación de tareas.

De las dos problemáticas antes mencionadas surgió nuestro interés por retomar algunas tareas que los FEM (incluidos nosotros) propusieron en la práctica inicial del curso Enseñanza y

Aprendizaje de la Geometría, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cohortes 2019-2 a 2020-2. Por tal razón, hicimos un análisis didáctico de las mismas, las perfeccionamos y agrupamos en un material dirigido a maestros. Este interés es compartido por los miembros del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, del Departamento de Matemáticas, quienes nos apoyaron en el desarrollo del trabajo, aportando fundamentos para el análisis didáctico.

1.2. Motivaciones

Nos parece importante proponer material para maestros, optimizando los trabajos que hicimos los estudiantes en la práctica inicial del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, cohortes 2019-2 a 2020-2. Para apoyar esta idea consideramos los dos siguientes aspectos:

En primer lugar, como lo plantean Ballesteros y Gamboa (2009; citando a Almeida, 2002), con mejores experiencias escolares fruto de tareas que sean un desafío intelectual, los estudiantes podrán tener un mejor aprendizaje de la geometría. Lo anterior les permitiría aplicar conocimientos geométricos en su vida diaria, su actividad académica o en su oficio o profesión futuros, para modelar, crear o resolver problemas, usando los diferentes lenguajes y representaciones que brinda la geometría.

En segundo lugar, con este trabajo estamos apoyando a los docentes en una responsabilidad que es dispendiosa y para la que, en muchas ocasiones, no tienen suficiente tiempo, por los reducidos momentos de preparación de clase en las instituciones escolares. Nos referimos al trabajo cuidadoso de diseño de tareas, de tal manera que se puedan hacer previsiones sobre la gestión en el aula, los recursos que se tienen que preparar y usar y cómo se va a evaluar. Con el material, producto de este trabajo, los maestros dispondrán de propuestas alternativas para la enseñanza de algunos temas seleccionados. No pretendemos que las tareas se constituyan en la respuesta única a los problemas mencionados en la sección anterior de este capítulo. Pero sí que sirvan como insumo para que los docentes amplíen su conocimiento, conozcan otras opciones y, lo más importante, desarrollen su creatividad para favorecer los procesos de pensamiento de sus alumnos.

El material que produjimos no deber verse como un manual que pretenda que los maestros lo sigan sin hacer sus propios aportes. Por el contrario, debe verse como un conjunto de sugerencias que pueden aportar a que los maestros generen, por sí mismos y a través de la socialización con sus pares, nuevas estrategias didácticas en las que examinen las condiciones particulares del contexto en que trabajan, tengan en cuenta los saberes previos de sus alumnos y los acompañen en la generación de sus propios procesos de pensamiento.

1.3. Objetivos

General

Hacer un análisis didáctico a 16 tareas propuestas en la práctica inicial del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, cohortes 2019-2 a 2020-2, con el fin de proponer versiones mejoradas de estas, que se dirijan a la enseñanza por procesos.

Específicos

- Acopiar un conjunto de tareas desarrolladas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, cohortes 2019-2 a2020-2, cuyas versiones iniciales serán analizadas para obtener propuestas mejoradas, fruto del análisis didáctico de las mismas.
- Construir un fundamento teórico, a partir de la revisión de la literatura de didáctica de la geometría, para hacer el análisis didáctico de las tareas mencionadas en el primer objetivo específico.
- Usar el fundamento teórico en el diseño de las propuestas de tareas desarrolladas por los estudiantes, mencionadas en el primer objetivo específico, con el propósito de obtener versiones mejoradas de estas.
- Producir las nuevas versiones de las tareas, fruto del ejercicio de análisis didáctico de las mismas, con el fin de mejorarlas.
- Agrupar las tareas, fruto del ejercicio de análisis didáctico, por nivel escolar (educaciónbásica) y constituir un material dirigido a los maestros.

2. Capítulo 2. Marco de referencia

En este capítulo damos a conocer los elementos teóricos que dan sustento al presente documento. Primero, realizamos una conceptualización acerca de lo que es: tarea, tarea matemática y tarea matemática escolar. Damos las definiciones y características de los elementos para diseñar una tarea matemática escolar, basándonos en lo expuesto por Gómez, Mora y Velasco, (2016) y en algunos aprendizajes logrados en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, orientado por la docente Leonor Camargo. Segundo, establecemos, definimos y caracterizamos cinco procesos a desarrollar o fortalecer en cada tarea; estos son: visualizar, representar, conceptualizar, conjeturar y argumentar.

2.1. Concepto de tarea matemática escolar y elementos que intervienen en su diseño

En este apartado realizamos una conceptualización de lo que es: tarea, tarea matemática y tarea matemática escolar. Además, listamos los elementos que debe contener el diseño de una tarea matemática escolar y qué se entiende por cada uno de ellos.

Tarea matemática escolar acercamiento teórico

Para producir nuestra definición de tarea, tenemos en cuenta las siguientes definiciones que encontramos al realizar una revisión de la literatura. Basterra, (s.f) menciona que una tarea es un "conjunto de acciones integradas para solucionar o enfrentarse a una situación compleja y única, en un contexto determinado". Esta se relaciona con lo que expone Christiansen y Walker (1986) quienes expresan que una tarea es "aquello que se les pide a los alumnos que hagan". En ambas definiciones observamos que los aprendices deben realizar acciones o actividades referentes a una demanda que se les propone. Podemos suponer que la tarea que se le presenta a los estudiantes la propone el docente. Por su parte, Margolinas (2013) propone que una tarea es una situación, que es planeada por el profesor y está demarcada por ciertos límites y condiciones.

Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo consideraremos como tarea un conjunto de demandas que una persona hace a otra para solucionar preguntas o situaciones-problemas en un contexto. Estas demandas hacen que las personas realicen actividades o acciones para resolverla. Después de la aclaración anterior, buscamos definiciones de tarea matemática.

Encontramos las siguientes definiciones: Aguayo, Flores y Moreno (2018) mencionan que una tarea matemática se designa como "acciones instructivas estructuradas, referidas a un contenido matemático, que establecen las demandas matemáticas, y la gestión e interacción prevista" (p. 993). Herbst (2012) aclara que una tarea matemática "representa el quehacer matemático, además de hacer uso de objetos y procedimientos" (p. 3). Y Watson et al. (2013) consideran que "la tarea genera actividad con la que aflora la oportunidad para encontrar conceptos matemáticos,ideas, estrategias y para usar y desarrollar pensamiento matemático y formas de interrogarse" (p. 12). Estas tres definiciones mencionan la importancia de movilizar conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas. Además, se promueven acciones instructivas para solucionar las tareas de este tipo.

Para obtener nuestra definición de tarea matemática tenemos en cuenta las apreciaciones realizadas por los autores antes citados. Por ello, nuestra definición de tarea matemática es la siguiente: una tarea matemática es una demanda que una persona da a otra para solucionar preguntas, problemas o situaciones matemáticas. Estas demandas hacen que las personas usen conceptos, realicen procedimientos y desarrollen procesos matemáticos para solucionar la tarea.

Para precisar, en nuestro trabajo, lo que es una tarea matemática escolar, retomamos la caracterización que hace Gómez (2019) quien menciona que una tarea matemática escolar

Es una demanda estructurada que se le hace a los estudiantes, con un contenido matemático y con el propósito de promover su aprendizaje. Una tarea busca desarrollar nuevos conocimientos que contribuyan al objetivo de aprendizaje. Para ello, la tarea debe poner en juego, conocimientos previos y contribuir a que los estudiantes puedan superar sus errores y dificultades.

Elementos para el diseño de una tarea matemática escolar

En este apartado consideramos ocho elementos para el diseño una tarea matemática escolar. Para la conceptualización y caracterización de estos nos basamos en las propuestas de Gómez, Mora y Velasco, (2016), Cañadas, Gómez y Pinzón, (2018) y algunos aprendizajes logrados en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, orientado por la docente Leonor Camargo.

Aprendizajes esperados. Los aprendizajes esperados son oraciones breves, iniciadas por un verbo, donde se especifican: los objetos o procesos matemáticos, los propósitos expresados en función delo que se espera que los estudiantes logren hacer o interpretar, y cómo se espera que lo logren al realizar la tarea. Estos permiten demarcar el objetivo de la tarea desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes (Gómez, Mora y Velasco, 2016).

Enunciado. El enunciado es una formulación o instrucción concisa que va dirigida a los estudiantes. Esta debe estimular a pensar, hacer o decir algo por su cuenta. Debe incluir: un título sugestivo; la descripción de una situación problemática, la cual, si se presenta en un contexto, debe ser cercano a los estudiantes; y una o más preguntas que se constituyan en el reto para ellos (Camargo, comunicación personal).

Descripción de la tarea. La descripción de una tarea es una breve explicación dirigida al maestro, en donde se indica lo que se espera que los estudiantes realicen, de acuerdo con el enunciado de la tarea. Esta debe contener de manera global cómo se espera que los estudiantes lleven a cabo la tarea y los aprendizajes que se espera que obtengan los estudiantes (Camargo, comunicación personal).

Requisitos. Los requisitos se refieren al lenguaje matemático, las destrezas y los conocimientos previos, que se vinculan directamente con los aprendizajes esperados de una tarea, de acuerdo con el grado al que va dirigida (Gómez, Mora y Velasco, 2016).

Materiales y recursos. Los materiales son medios diseñados con fines didácticos y los recursos son medios que se emplean para el aprendizaje de un concepto o procedimiento geométrico, aunque no hayan sido diseñados con este fin. Su función es contribuir al logro de las metas que se tienen de la tarea, ser un intermediario entre el conocimiento matemático y el de los estudiantes y servir de modelo de las ideas matemáticas al proporcionar un paso de lo concreto a lo abstracto (Gómez, Mora y Velasco, 2016). La tarea debe incluir el nombre del material o recurso y una breve descripción del uso que se le dará.

Interacción y comunicación en clase, agrupamiento y temporalidad. En cuando a la interacción y comunicación se prevé la actuación del maestro y la de los estudiantes, dado que estas influyen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. El agrupamiento es un tipo de reunión entre el grupo de clase para desarrollar la tarea propuesta por el docente; este genera una interacción entre estudiante-estudiante y docente-estudiante. Este agrupamiento lo decide el profesor, dependiendo las metas que desea lograr; en una misma tarea matemática pueden generarse distintos tipos de agrupamiento a lo largo de la clase. La temporalidad se refiere a los tiempos que se utilizarán en cada uno de los momentos o etapas de la clase propuesta por el profesor. El objetivo es organizar el tiempo y así lograr la meta que se tiene planteada en la tarea (Gómez, Mora y Velasco, 2016).

Estructura conceptual. La estructura conceptual es la presentación de conceptos y sistemas de representaciones (por medio de un mapa conceptual), que están inmersos en la tarea y están ligados al tema de estudio. Consideramos que este debe incluir los conceptos que son necesarios para abordar el tema y el sistema de representación que se va a utilizar en la tarea (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018).

Fenomenología. La fenomenología se refiere a los eventos, hechos, situaciones que dan sentido al tema matemático de la tarea y las características que comparten los fenómenos que dan sentido al tema (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018).

2.2. Procesos cognitivos propios del trabajo en geometría

En este apartado damos a conocer lo que entendemos como proceso de: visualización, representación, conceptualización, conjeturación y argumentación. Además, proponemos algunas clasificaciones.

Proceso de visualización

Sobre el proceso de visualización, tomamos en cuenta la definición que formulan Hershkowitz, BenHaim, Holes, Lappan, Mitchelmore, y Vinner (1990). La visualización es la "habilidad de construir, transformar, generalizar, comunicar y representar mentalmente imágenes que están inmersas en las matemáticas" (p.75).

Para establecer cómo una tarea apoya la visualización nos basamos en los siguientes niveles propuestos por Acosta, Camargo, Castiblanco y Urquina (2004).

- *Percepción visual global:* es en el que las formas o figuras se perciben como un todo y eventualmente se asocian a objetos físicos.
- *Percepción e interpretación de elementos constitutivos y propiedades de estos:* aquí no solamente se percibe la forma global, sino que se percibe la forma o la figura construida por elementos de una misma dimensión o de dimensiones inferiores.
- *Visual operativa:* ya no se trata únicamente de percibir elementos constitutivos de una configuración, sino de hacer una manipulación mental de las subconfiguraciones, para obtener otra disposición significativa y útil.

Por otra parte, Del Grande (1990; citado por Gutiérrez, 1992) determina ciertas habilidades que intervienen en el proceso de visualización. Estas son:

- *Coordinación motriz de los ojos:* es la destreza para seguir con los ojos el movimiento delos objetos de forma rápida y eficaz.

- *Identificación visual*: es la pericia para reconocer una figura aislándola de su contexto.
- *Conservación de la percepción:* es la habilidad para identificar que un objeto mantiene su forma, aunque deje de verse total o parcialmente.
- *Reconocimiento de posiciones en el espacio:* es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo o con otro objeto que actúa como punto de referencia.
- *Reconocimiento de las relaciones espaciales:* es la destreza que permite determinar correctamente las características de las relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
- *Discriminación visual:* es la pericia para contrastar varios objetos determinando sus semejanzas y diferencias visuales.
- *Memoria visual:* es la habilidad que permite tener presente las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que están a la vista, pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Además, tuvimos en cuenta dos principios fundamentales para trabajar con geometría dinámica, propuestos por Acosta, Camargo, Castiblanco y Urquina (MEN, 2004), los cuales describimos a continuación:

- *Dudar de lo que se ve:* es no dar como verdadero lo que se percibe en una imagen estática, mediante exploración hay que confirmar su invariabilidad.
- *Ver más de lo que se ve:* es estudiar una figura e intentar revelar las relaciones que no se ven a simple vista.

Por último, consideramos las aprehensiones visuales propuestas por Duval (1998; citado por Prior y Torregrosa, 2013):

- *La aprehensión perceptiva:* se caracteriza por la identificación simple de una configuración, es decir, que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar.
- *La aprehensión discursiva*: es donde se asocia la configuración identificada con definiciones, teoremas, axiomas matemáticos conocidos. Ésta se realiza a partir de dos cambios de anclaje posibles:
    - *Del anclaje visual al discursivo:* a una representación se le puede asociar distintas afirmaciones matemáticas.
    - *Del anclaje discursivo al visual:* ante una afirmación acerca de un objeto matemático, el observador es capaz de realizar una configuración que refleja alguna de las características de este.

- La aprehensión operativa: se produce cuando, para resolver un problema geométrico, el resolutor realiza alguna modificación física o mental de la configuración inicial. Dependiendo de la modificación producida, podemos distinguir dos tipos:
  - ➢ Aprehensión operativa de cambio figural: cuando a la configuración inicial se le añaden (o quitan) elementos geométricos (subconfiguraciones).
  - ➢ Aprehensión operativa de reconfiguración: cuando las subconfiguraciones iniciales se mueven como si fueran piezas de un rompecabezas.

Proceso de representación

El proceso de representación consiste en la elaboración y uso de imágenes bi y tridimensionales externas, las cuales, a medida de su creación van reflejando propiedades, elementos y/o relaciones geométricas que las representan. Ninguna representación captura y expone de manera transparente al objeto a representar, pues, aunque este proceso ayuda a la percepción de elementos y propiedades, es inevitable la pérdida de información (Camargo, comunicación personal).

Para examinar cómo una tarea favorece la representación plana nos vamos a basar en los siguientes tipos de representación:

- *Mano alzada:* en este tipo de representación los estudiantes hacen uso únicamente de lápiz y papel. Gutiérrez (1998) sugiere distintas etapas, las cuales son: Esquemática plana (dibujos bidimensionales), Esquemática espacial (dibujos tridimensionales sin tener en cuenta varias nociones geométricas), Pre-realista (contempla algunas nociones geométricas) y Realista (representación que tiene encuenta elementos y propiedades geométricas).
- *Instrumentos de medición:* en este tipo se emplea regla graduada, escuadra y transportador. Los estudiantes atienden a subconfiguraciones con medidas específicas y además se empiezan a cuestionar sobre la existencia o no de una o varias representaciones que contengan una lista de atributos (Camargo, Perry y Samper, 2017).
- *Instrumentos de trazo:* en este tipo los estudiantes realizan representaciones con instrumentos de trazo: regla no graduada y compás. En tales representaciones, los atributos geométricos han sido obtenidos como consecuencia del uso de los instrumentos. Acercan y ubican al estudiante más en el terreno de las propiedades geométricas que en el de la percepción visual.
- *Programas de geometría dinámica:* permiten construir varias representaciones donde los estudiantes pueden arrastrar ciertos elementos independientes de la construcción y apreciar

modificaciones en la configuración, sin afectar las propiedades esenciales de esta, teniendo así a su disponibilidad gran cantidad de representación o ejemplos del objeto (Camargo, Perry y Samper, 2017).

Para el caso de los tipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, identificamos, como lo sugiere Gutiérrez (1998), las siguientes:

- *Módulos multicubo*: está representación se realiza con varios cubos iguales, pegados de manera que sus caras se superponen. Estos permiten trabajar diversidad de problemas de construcción a partir de figuras planas.
- *Representación tridimensional*: es una representación próxima a los sólidos, como los modelos de madera, papel o varillas.
- *Representación plana*: es una representación 2D de cuerpos espaciales. Dado que ninguna representación plana de cuerpos sólidos es perfecta, existen varios niveles de cercanía con el objeto 3D. Algunas de estas representaciones guardan información del aspecto visual, pero pierden la correspondiente a la parte oculta de los sólidos. Un ejemplo es la representación en perspectiva.

Proceso de conceptualización

Según Camargo, Leguizamón y Samper (2002), conceptualizar es construir el significado de un objeto, propiedad o relación geométrica que interviene en una tarea. Esta construcción se basa en la edificación mental de interpretaciones personales de una noción a través del cual se va construyendo la idea de esta. La interpretación se lleva a cabo a través de representaciones, visualización, impresiones o experiencias y del conjunto de propiedades que se van reconociendo del objeto. También se fundamenta en la elaboración de una definición del concepto, la cual es presentada por medio de un enunciado que fija con exactitud y precisión el significado o la naturaleza de un objeto geométrico.

El reto del proceso de conceptualización es favorecer la articulación entre la definición del concepto y la imagen del concepto, para avanzar en la conceptualización geométrica. Esto se logra de cuatro maneras: la primera es el establecimiento de propiedades relevantes e irrelevantes que tienen los objetos. La segunda en la construcción de figuras representativas con diferentes instrumentos. La tercera en la construcción de un espacio de ejemplos y la última en el análisis de definiciones (Camargo, Leguizamón y Samper, 2002).

Por lo anterior, para observar de qué manera una tarea ayuda al desarrollo de la conceptualización miramos si la tarea busca:

- Ampliar la identificación de componentes (configuraciones 3D, 2D, 1D, 0D), relaciones entre componentes (paralelismo, perpendicularidad, congruencia, equidistancia, colinealidad) y propiedades entre elementos constitutivos que se conocen.
- Establecer semejanzas y diferencias entre objetos geométricos.
- Clasificar los objetos en familias.
- Identificar atributos en ejemplos y el reconocimiento de la falta de atributos en no ejemplos.
- Elaborar un conjunto de propiedades necesarias y suficientes que determinan el objeto o la relación; esto en función de producir o analizar una definición (Vinner y Hershkowitz,1983).

Proceso de conjeturación

Conjeturar es formular enunciados de carácter general, que están basados en la visualización o en la exploración que realice el estudiante (Camargo, comunicación personal).

Para abordar la conjeturación en una tarea, los estudiantes pueden explorar y descubrir propiedades de diferentes maneras. Según Marrades y Gutiérrez (2000) hay estas:

- *Empirismo ingenuo:* los estudiantes formulan la conjetura a partir de percibir o exploran un número pequeño de representaciones y descubren la propiedad que cumplen todas estas.
- *Experimento crucial:* los estudiantes examinan un caso extremo, con alguna característica que no es común, además exploran un pequeño número de representaciones.
- *Ejemplo genérico:* los estudiantes enuncian la conjetura a partir de la exploración de una representación particular, la cual representa una clase de objetos.
- *Experimento mental:* los estudiantes formulan la conjetura con ayuda de la exploración teórica de relaciones entre propiedades geométricas.

Proceso de argumentación

Argumentar es producir razones a través de enunciados que sustentan afirmaciones que requieren ser justificadas con las reglas asumidas por la comunidad de la clase. Según el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (comunicación personal), para establecer cómo una tarea apoya la argumentación se debe identificar si la tarea pide sustentar una afirmación. Si es así, se debe ver si la tarea promueve la explicitación de la aserción y de datos y garantías que la sustentan. Dichas garantías pueden ser:

- Informales: producto de una convicción personal, de una autoridad, de fuentes no institucionalizadas.

- Matemáticos: provenientes de hechos geométricos o definiciones del sistema de conocimientos del que se dispone.

El grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría también tiene en cuenta si la tarea se enfoca en que el estudiante exprese un argumento deductivo o inductivo. A continuación, presentamos la definición de cada uno de estos tipos de argumento.

- Argumento deductivo: la aserción es el elemento inferido (durante la argumentación) necesariamente a partir de un dato y una garantía. Es decir, la aserción es consecuencia necesaria del dato con el que cuenta quien argumenta; el rasgo característico de "consecuencia necesaria" proviene de la garantía escogida y del uso de un esquema de razonamiento válido en la lógica bivalente.
- Argumento inductivo: la aserción y la garantía (patrón de generalización) son los elementos inferidos (durante la argumentación) a partir de un dato, y ambos son de naturaleza probable. Un argumento inductivo puede ir de lo particular a lo general [P-G],de lo particular a lo particular [P-P], de lo general a lo particular [G-P] y de lo general a lo general [G-G].

3. Capítulo 3. Metodología del trabajo

Este capítulo está dividido en tres partes. En la primera, damos a conocer el proceso para la recolección, organización y caracterización de material primario. Segundo, mostramos el procedimiento que realizamos para seleccionar 16 tareas a analizar. Tercero construimos una rejilla donde aparecen los aspectos que consideramos relevantes en cuanto a los elementos y procesos geométricos a analizar, en concordancia con nuestro marco de referencia.

3.1. Informe sobre el material documental primario

Este apartado se divide en dos partes. En la primera, se encuentra una explicación de cómo obtuvimos los documentos realizados por los FEM (que nos sirvieron de material primario). En la segunda, realizamos una organización de dichas tareas, por tipo de material, temas matemáticos y grado al que va dirigido.

Obtención del material documental

El material primario de nuestro trabajo de grado son 103 documentos, que corresponden a propuestas de tareas, planeaciones de clase e informes de gestión de la clase, elaborados en los semestres 2019-2 a 2020-2 en el curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. Para su recolección consideramos dos fuentes: la primera, es la información que nos suministró la docente Leonor Camargo Uribe en una carpeta de Dropbox. En ella se encuentra la información separada por carpetas, de acuerdo con el semestre correspondiente. La segunda fuente son los documentos que nos suministró el docente Carlos Roberto Pérez Medina en una carpeta de OneDrive llamada EAG 2020 Productos Práctica. En ella se encuentra dos carpetas separadas de acuerdo con el semestre correspondiente (2020-1 y 2020-2).

Organización del material documental

Para organizar la información proporcionada por los docentes, elaboramos una base de datos en un archivo de Excel. Cada fila corresponde a uno de los documentos suministrados por los docentes y las columnas corresponden a los siguientes aspectos: tipo de documento: (propuesta de tarea, planeación de clase e informe de gestión de la clase); autor(es); título del documento; tema matemático; grado escolar al que va dirigido; semestre en que se desarrolló el documento; tipo de material usado en el diseño; y profesor(a) a cargo del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En la Figura 1, damos a conocer un fragmento de la base de datos. La base completa está en el Anexo 1

Figura 3.1

Base de Datos

Tipo de trabajo	Autor(es)	Titulo	Tema matemático	Grado escolar al que va dirigido	Semestre en que se desarrolló el documento	Tipo de material usado en el diseño (concreto o software)	Profesor(a) a cargo del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría (Camargo o Pérez)
Propuesta de tarea	Barragán.M y Barrera.J	Aprendiendo qué es un prisma, una pirámide y un cilindro con plastilina, palillos y moldes	Sólidos (prisma, pirámide y cilindro)	5°	2019-2	Concreto	Camargo
Propuesta de tarea	Barreto.J	Desarrollo de habilidades de visualización espacial con rompecabezas en 3d	Sólidos (cubo)	10° y 11°	2019-2	Concreto	Camargo
Planeación de clase	Barreto.J	Desarrollo de habilidades de visualización espacial con rompecabezas en 3d	Sólidos (cubo)	10° y 11°	2019-2	Concreto	Camargo
Informe de getión de la clase	Barreto.J	Desarrollo de habilidades de visualización espacial con rompecabezas en 3d	Sólidos (cubo)	10° y 11°	2019-2	Concreto	Camargo

Caracterización del material documental

En esta sección describimos cómo realizamos la organización de los documentos: Planeación de clase, Propuesta de tarea e Informe de gestión de la clase. Primero, los clasificamos según el tipo de documento. Segundo, los agrupamos según el tema matemático que se aborda en la tarea. Tercero, los catalogamos según el grado al que va dirigida la tarea. Cuarto, agrupamos el material según si teníamos los tres tipos de documentos o no. A continuación, presentamos el respectivo informe.

Agrupación del material documental. Hicimos una clasificación de los documentos que tenemos de los 43 autores. La cantidad de documentos agrupados por autor(es), se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1

Tipo de documentos por autor (es)

Tipo de documentos	Grupo de autor(es)
Solo la propuesta de tarea	2
Solo la planeación de clase	1
Solo el informe de gestión de la clase	1
Propuesta de tarea e informe de gestión de la clase	10
Planeación de clase e informe de gestión de la clase	8
Propuesta de tarea, planeación de clase e informe de gestión de la clase	21
Total	43

Como se puede observar, solo de 21 autores contamos con la propuesta de tarea, la planeación de clase y el informe de gestión de la clase. Sin embargo, disponemos de información suficiente para nuestro análisis con la propuesta de tarea, la planeación de clase o ambas. En un caso, solo tenemos el informe de gestión de la clase el cual no nos brinda suficiente información.

Temas matemáticos. En la Tabla 3.2, presentamos los temas matemáticos que encontramos en los documentos y contamos los autores que trabajaron el mismo contenido matemático.

Tabla 3.2
Temas matemáticos trabajados

	Tema matemático	**Grupo de autores**
1	Teorema de Pitágoras	3
2	Desigualdad triangular	1
3	Sólidos regulares e irregulares	3
4	Polígonos regulares e irregulares	1
5	Ángulos opuestos en paralelogramo	3
6	Teorema del seno	2
7	Criterios de congruencia de triángulos	5
8	Translaciones en el plano	4
9	Relación de formas 2D y 3D	4
10	Modelación, representación y visualización de formas 3D	1
11	Triángulo isósceles	2
12	Simetría axial	1
13	Medición de ángulos	1
14	Semejanza de triángulos	2
15	Teorema segmentos-puntos medios	1
16	Relación entre el lado mayor y el ángulo opuesto a este, en un triángulo.	1
17	Perímetro y área de figuras	3
18	Suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo	1
19	Cuadriláteros	1
20	Líneas y puntos notables de un triángulo	1
21	Circunferencia	1
22	Coordenadas polares	1
	Total	43

Se puede observar que, de los 22 temas abordados, tres fueron mayormente trabajados: criterios de congruencia de triángulos, formas 2D y 3D y transformaciones en el plano. En nuestro estudio, previmos que algunas de las tareas que seleccionaríamos serían de estos temas. Aclaramos que algunos de los temas trabajados por más de un grupo de autores fueron desarrollados de distintas maneras, lo cual se puede observar en las propuestas de cada documento.

Grado escolar al que va dirigida la tarea. En la Tabla 3.3, presentamos los grados estudiantes y la cantidad de autores que trabajaron en las propuestas de tarea.

Tabla 3.3

Grupo de grado con el que se trabajó

Grupo de grado	Grupo de autores
1° a 3°	3
4° a 5°	6
6° a 7°	13
8° a 9°	15
10° - 11°	6
Total	43

De acuerdo con la Tabla 3.3, se puede observar que los grados en donde principalmente los autores realizan sus planeaciones y clases fueron de 6° a 9°. Esto nos llevó a decidir que nuestro estudio se enfocaría más documentos de estos grados.

3.2. Procedimiento para seleccionar el materialdocumental con el que trabajamos

De acuerdo con el informe del material primario que presentamos anteriormente, desarrollamos el siguiente procedimiento para seleccionar los autores, cuyas propuestas analizaríamos.

Paso 1

Usamos los siguientes criterios para seleccionar con cuáles autores trabajar:

1. Que el grado al que va dirigida la propuesta se encuentre en la educación básica.
2. Que se disponga de la descripción de la propuesta de tarea o de la planeaciónde clase (o de ambos documentos).

Estos dos criterios nos llevaron a descartar 7 autor(es). Uno de ellos se descartó ya que solo contábamos con el informe de gestión de la clase, y este no nos brinda información sobre la propuesta de tarea realizada. Los otros 6 autor(es) se descartaron debido a que el grado al que van dirigidas sus propuestas no se encuentra en la educación básica. En total, nos quedamos con 36 propuestas.

Paso 2

Revisamos el contenido del material para ver si tenían descripciones de los elementos de una tarea, descritos por Gómez, Mora y Velasco (2016) y de los procesos cognitivos descritos en el marco de referencia.

Para identificar los tipos de documentos por autor (es) que cumplían con estos elementos, realizamos una base de datos en Excel. En la Figura 3.2 mostramos una fracción de esta. La tabla completa se encuentra en el Anexo 2. Las columnas corresponden a los siguientes elementos: autor (es) (las celdas que están del mismo color corresponden a propuestas del mismo tema matemático); requisitos; metas o aprendizajes esperados; enunciado de la tarea; descripción de la tarea; procesos cognitivos; materiales y recursos; interacción y comunicación en clase, agrupamiento y temporalidad estructura conceptual y fenomenología.

Figura 3.2

Fragmento Base de Datos de los Elementos

Autor (es)	Requisitos	Metas o aprendizajes esperados	Enunciado de la tarea	Descripción de la tarea	Procesos cognitivos	Materiales y recursos	Interacción y comunicación en clase, agrupamiento y temporalidad	Estructura conceptual	Fenomenología
Alarcón.D y Sánchez.T	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
García.D	✓	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Vargas.S	✓	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Alonso.D y Devia.J	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Barragán.M y Barrera.J	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x
Bejarano.A y Sánchez.R	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Bejarano.S y Benavides.S	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Carvajal.D y Moreno.L	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	x
Marín.J y Ortega.L	x	x	✓	R	✓	✓	✓	✓	x
Cortes.W y Guzmán.C	x	✓	✓	✓	x	✓	✓	x	x
Fernández.K y Vallejo.M	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Duran.A y Rodríguez.B	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Muñoz.O y Silva.J	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x

Nota*:*
✓ : hace referencia a que el conjunto cumple con el elemento.
X: se refiere a que el conjunto no cumple con el elemento.
R: se refiere a que el conjunto cumple con el elemento, pero de forma muy vaga.

A continuación, realizamos un conteo de los elementos que encontramos en los documentos de cada autor(es). Elaboramos una tabla en la que sintetizamos la información. Un fragmento de esta está en la Figura 3.3.

Figura 3.3

Conteo de los Elementos

	Alarcón.D y Sánchez.T	García.D	Vargas.S	Alonso.D y Devia.J	Barragán.M y Barrera.J	Bejarano.A y Sánchez.R
✓	5	5	5	7	6	5
x	4	2	2	2	3	4
R	0	2	2	0	0	0

Luego de este conteo seleccionamos los documentos de los autores que cumplían con el mayor número de elementos descritos. En la Tabla 3.4, exponemos los documentos que analizamos:

Tabla 3.4

Base de datos de los conjuntos de documentos seleccionados

Autor (es)	Requisitos	Metas o aprendizajes esperados	Enunciado de la tarea	Descripción de la tarea	Procesos cognitivos	Materiales y recursos	Interacción y comunicación en clase, agrupamiento y temporalidad	Estructura conceptual	Fenomenología
Alonso.D y Devia.J	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Marín.J y Ortega.L	x	x	✓	R	✓	✓	✓	✓	x
Duran.A y Rodríguez.B	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Muñoz.O y Silva.J	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Hernández.A	x	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	x
Gonzalez.A	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x
Montañez.K y Muñoz.E	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x
Castañeda.V y Ortega.J	x	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	x
Cruz.J	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x
Forero.J y Villarraga.V	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x
Pérez.H	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x
Rojas.L y Zamudio.G	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Niño.D y Romero.L	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Olarte.A y Rodríguez.H	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Cuartas.W y Tavera.L	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Torres.R	✓	✓	✓	x	R	✓	✓	✓	x

De los 36 autores con los que contábamos antes de realizar este paso, solo quedaron 16. De los 22 temas matemáticos trabajados por los FEM, trabajamos con 14. Nos parece importante aclarar que por cada grado hay por lo menos 2 autores seleccionados.

Síntesis

En virtud de lo expuesto, decidimos trabajar con 15 autores, cuyas tareas fueron orientados por la docente Leonor Camargo Uribe y 1 tarea, cuyo autor fue orientado por el docente Carlos Roberto Pérez Medina. En total disponemos de 47 documentos. En la Tabla 3.5 mostramos los tipos de documentos de los autores seleccionados. En la mayoría de los casos contamos con los tres tipos de documentos (propuesta de tarea, planeación de clase e informe de gestión de la clase).

Tabla 3.5

Tipos de documentos por autor seleccionados

Tipo de documento	Grupo de autores
Propuesta de tarea e informe de gestión de la clase	1
Planeación de clase e informe de gestión de la clase	6
Propuesta de tarea, planeación de clase e informe de gestión de la clase	9
Total	16

En la Tabla 3.6, mostramos los temas matemáticos que abordamos y la cantidad de grupos de autores que abordaron estos temas.

Tabla 3.6

Temas matemáticos abordar

	Tema matemático	Grupo de autores
1	Desigualdad triangular	1
2	Paralelogramo	1
3	Criterios de congruencia de triángulos	2
4	Movimiento y transformaciones en el plano	1
5	Formas 2D y 3D	2
6	Vistas de formas 3D	1
7	Triángulo isósceles	1
8	Simetría axial	1
9	Medición de ángulos	1
10	Semejanza de triángulos	1
11	Teorema segmentos-puntos medios	1
12	Teorema lados desiguales-ángulos desiguales y Teorema ángulos desiguales-lados desiguales	1
13	Cuadriláteros	1
14	Circunferencia	1
	Total	16

Se puede observar que, de los 14 temas seleccionados, dos fueron mayormente trabajados por los autores. Estos fueron: criterios de congruencia de triángulos y formas 2D y 3D. En la Tabla 3.7, mostramos la cantidad de grupos de autores que trabajaron en cada grupo de grados.

Tabla 3.7

Grupo de Grado con el que se Trabajo

Grupo de grado	Cantidad
1° a 3°	2
4° a 5°	4
6° a 7°	5
8° a 9°	5

Total	16

Se puede evidenciar que la mayoría de los autores trabajaron en los grados de 6° a 9°. Esto apoya nuestra decisión adoptada después de presentar la Tabla 3.3.

Análisis didáctico de las tareas. En concordancia con nuestro marco de referencia, en la Tabla 3.8 sintetizamos los asuntos que analizamos y reformulamos, si es necesario, en cada una de las tareas. Cabe resaltar que por dificultades de tiempo y espacio solo abordamos 9 elementos de los 11 expuestos en nuestro marco de referencia. Sobre los procesos cognitivos, aunque encontramos la mención a todos ellos en algunas tareas, solo aludimos a aquellos que se buscan fortalecer mayormente en cada tarea.

Tabla 3.8

Síntesis de los Elementos Analizar

	Asunto	Aspectos analizar
1	Aprendizajes esperados	Las oraciones donde se especifican los objetos matemáticos, los propósitos de la tarea y cómo se espera que se logre.
2	Enunciado	El título, la descripción de una situación y las preguntas que se constituyen en el reto para los estudiantes.
3	Descripción de la tarea	La descripción global de la tarea y si ella indica qué se va a desarrollar, con qué se va a desarrollar, cómo se adelantará y que se espera que obtengan los estudiantes.
4	Requisitos	El lenguaje matemático que se usa, las destrezas y los conocimientos que se vinculan directamente con los aprendizajes esperados.
5	Proceso de visualización	El nivel o niveles que se quieren desarrollar o fortalecer. Los tipos de imágenes mentales, habilidades, principios y aprehensiones que se están trabajando.
6	Proceso de representación	El tipo o los tipos de representación que se favorecen.
7	Proceso de conceptualización	El aporte de la tarea al enriquecimiento de imágenes conceptuales, a la construcción de una definición del objeto o la relación y/o a la formulación de una propiedad.
8	Proceso de conjeturación	El tipo o los tipos de conjeturación que se promueven.
9	Procesos de argumentación	El tipo o los tipos de argumentos que se promueven.

4. Capítulo 4. Análisis de las tareas

En este capítulo realizamos el análisis didáctico de las tareas escogidas. Para ello, empezamos por las tareas correspondientes a los grados 1° a 3° y finalizamos con las tareas dirigidas a los grados 8° y 9°. En cada análisis se encuentran los siguientes apartados:

- Identificación de la tarea: en una tabla se encuentra el tema trabajado, autor(es), profesor orientador y semestre en el que se realizó la propuesta de tarea.
- Análisis de la información según los aspectos considerados: realizamos este análisis tomando la información existente, revisándola con respecto a la fundamentación teórica y proponiendo sugerencias de cambio, con su debida justificación.

4.1. Análisis didáctico de las tareas para el Grupo 1° - 3°

El Grupo 1 tiene dos propuestas de tarea para el mismo tema matemático. Acontinuación, realizamos el respectivo análisis.

Identificación de la Tarea 1

Tabla 4.1

Identificación de la Tarea 1

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Relación de formas 2Dy 3D	Castañeda. V, y Ortega. J.	Leonor Camargo	2020-1
	González. A		

Análisis de la Tarea 1

Aprendizajes esperados. En columna izquierda de la Tabla 4.2 presentamos la información que encontramos en los documentos de los autores sobre los aprendizajes esperados. En la columna derecha, incluimos nuestra propuesta al respecto.

Tabla 4.2

Tarea 1 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

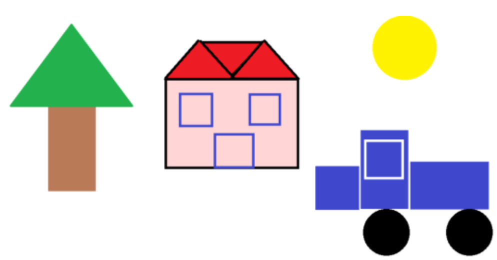
Información sobre aprendizajes esperados	Propuesta de aprendizajes esperados
“Reconocer las relaciones y las diferencias entre formas 2D y 3D”. (Castañeda-Ortega)“Reconocer qué formas planas son partes constitutivas de las formas 3D”. (González)	Reconocer qué formas planas (cuadrado, círculo, rectángulo y triángulo) son partes constitutivas de formas 3D (cono, cilindro, prisma rectangular, prisma triangular, pirámide y cubo), a partir del sellado de las caras de los sólidos.

Vemos que las propuestas de aprendizajes esperados cumplen con el hecho de iniciar la oración con un verbo. Además, cumplen con ser una oración corta que menciona lo que se espera que los estudiantes logren. Sin embargo, no se menciona cómo se espera que lo consigan ni tampoco con qué objetos geométricos se va a trabajar. En nuestra propuesta incluimos tal información, con la intención de que el aprendizaje quede más claro para el docente que implementará esta tarea.

Enunciado. En los documentos que tenemos de Castañeda-Ortega no hallamos un enunciado. Por ende, en la Tabla 4.3, parte superior, presentamos la información sobre el enunciado encontrado en la planeación de clase de González. En la parte inferior, damos a conocer nuestra propuesta de cambio.

Tabla 4.3

Tarea 1 – Enunciado planteado por González y nuestra propuesta

Enunciado presentado por González
¿Qué cuerpo dejó esta huella? 
Nuestra propuesta
¡Ayúdame a reconstruir la obra de arte! Evelin fue con sus padres a visitar el museo de arte. Se encontró con la siguiente obra que le gustó mucho.  Ella quiere reconstruir esa pintura en una pared de su cuarto, para ello cuenta con las siguientes formas 3D.

¿Pueden ayudarla a encontrar las formas que dejaron las huellas en la obra de arte?

El enunciado de la tarea propuesta por González cumple con tener un título sugestivo y la descripción de una situación, la cual consideramos interesante ya que presenta un ambiente cercano a los estudiantes. Además, tiene una pregunta que se constituye en un reto para ellos. Provoca que piensen, hagan y digan algo por su cuenta. Por lo anterior, consideramos pertinente mantener la idea principal de González. Sin embargo, modificamos para quién va dirigida la tarea (pues la propuesta de la autora solo va dirigida a una estudiante) y agregamos las formas 3D con las que se puede desarrollar la tarea.

Descripción de la tarea. Al revisar los documentos de planeación de clase e informe de gestión de la clase presentados por Castañeda-Ortega y González, no encontramos la descripción de las tareas. Por esto no podemos realizar un análisis didáctico de este aspecto. En la Tabla 4.4 presentamos nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.4

Tarea 1 – Nuestra propuesta de descripción de la tarea

Nuestra propuesta
Los estudiantes visualizan el diseño que quiere reconstruir Evelin. Luego relacionan qué caras de las formas 3D dejan las huellas de las figuras que se usan en la obra de arte. Ya sea tomando la forma y observando si sirve o no, mediante “ensayo y error”, o haciendo un ejercicio netamente de visualización “a ojo”. Por último, se realiza una socialización donde ellos explican qué formas planas son partes constitutivas de las formas 3D.

Requisitos. Revisando la documentación que tenemos de Castañeda-Ortega y González no encontramos los requisitos que necesitan los estudiantes para afrontar la tarea. Por esto no podemos realizar un análisis didáctico de este aspecto. Teniendo en cuenta la fundamentación propuesta por nosotros para este aspecto, sugerimos los requisitos que se muestran en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5

Tarea 1 – Nuestra propuesta de requisitos

Nuestra propuesta
Lenguaje matemático: denominación de: cuadrado, triángulo, rectángulo y círculo.

Destrezas: habilidad para usar pintura y pinceles. **Conocimientos previos:** reconocimiento perceptual – global de las formas planas que se van a usar.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En los documentos entregados por Castañeda-Ortega y González encontramos información sobre los procesos cognitivos geométricos que se favorecen. Estos los presentamos en la columna izquierda de la Tabla 4.6. En la columna derecha, realizamos el análisis de cada proceso y en la parte inferior damos a conocer nuestra propuesta.

Tabla 4.6

Tarea 1 – Procesos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización "Se trabaja la percepción visual haciendo uso de representaciones externas, permitiendo el acceso mental a los objetos físicos" (Castañeda-Ortega). "Se desarrolla a partir de la percepción visual. Esto mediante el sellado de formas 3D de objetos de su entorno" (González).	Los autores dicen de qué manera desean favorecer la visualización, pero no mencionan el nivel en el que se trabaja este proceso y cómo van a promover el paso de un nivel al siguiente. Tampoco mencionan la habilidad, el principio o la aprehensión.
Representación Castañeda-Ortega y González consideran que el proceso de representación se favorece "al realizar la huella de la cara la estudiante reproduce una imagen bidimensional".	Observamos que el tipo de representación mencionado no está contemplado en la tipología formulada por nosotros, dado que es previo al proceso de hacer el dibujo a mano alzada. Esto nos lleva a pensar que este tipo de representación se podría incluir en la clasificación de representaciones.
Conceptualización Se fortalece "al realizar la escritura del nombre del cuerpo tridimensional y esto contribuye a un acercamiento a la definición del concepto" (Castañeda-Ortega). Se da "cuando la estudiante encuentre características de las formas 3D a través de sus caras" (González).	En cuanto a lo que proponen Castañeda-Ortega, consideramos que es una concepción errónea, dado que asociar un nombre con una representación no contribuye al proceso de conceptualización. En cambio, González sí menciona que la conceptualización se promueve a través del enriquecimiento de imágenes conceptuales, mediante la identificación de características de la forma.
Conjeturación Castañeda-Ortega y González consideran que el proceso de conjuración se da cuando "el estudiante a través de la exploración	Vemos que tanto Castañeda-Ortega como González hablan de la anticipación que es una manera inicial de explorar, pero es un poco pretencioso proponer que los estudiantes realicen

logra anticipar cuáles formas 3D son necesarias para realizar la huella".	una conjetura ya que a esta edad no tienen un pensamiento hipotético deductivo (Tarky, 1979).
Argumentación Castañeda-Ortega y González mencionan que el proceso de argumentación se favorece al "hacer la justificación del por qué el estudiante eligió un sólido para hacer la respectiva huella".	Estamos de acuerdo con lo que plantean los tres autores pues el proceso de argumentación se da cuando el estudiante justifica el por qué elije cierta forma y este argumento es producto de la convicción personal.
Nuestra propuesta	
De acuerdo con la tarea y el análisis realizado consideramos los siguientes cambios en la formulación de los procesos cognitivos geométricos: ***Visualización:*** la tarea contribuye al desarrollo de este proceso, tanto en el Nivel 1 de percepción global de las formas 2D y 3D con las que se va a trabajar, como en el Nivel 2 en la identificación de partes constitutivas. Lo anterior, porque los estudiantes pueden reconocer que el sólido está constituido de caras y que estas tienen cierta forma conocida. Además, se propicia la aprehensión discursiva del anclaje visual al discursivo ya que los estudiantes asocian a cada una de las formas 3D una afirmación matemática respecto a sus caras. ***Conceptualización:*** la tarea favorece este proceso cuando los estudiantes identifican semejanzas y diferencias entre las formas bidimensionales y las caras de los cuerpos tridimensionales. ***Argumentación:*** la tarea desarrolla este proceso al momento en que los estudiantes argumentan, desde su convicción personal, por qué eligen cierta forma 3D para dejar una huella de una forma 2D.	

Materiales y recursos. En la columna izquierda de la Tabla 4.7 damos a conocer los materiales y recursos que proponen los autores. En la columna derecha se encuentra nuestra propuesta.

Tabla 4.7

Tarea 1 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
"Cuerpos geométricos en fomi con los que se realizan las huellas y fichas" (Castañeda-Ortega). "Hoja blanca donde se realiza el sellado de las formas 3D, formas 3D para realizar el sellado, formas 2D para observar si se reconocen sus nombres, pintura para aplicar a las caras de las formas 3D y la guía en la cual se desarrollaría la tarea" (González).	***Materiales:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. - Formas sólidas: Se sugiere que el material con el que estén hechas las formas sea el icopor.  ***Recursos:*** - Pintura: Para poder realizar el sellado de las caras.

	- Pliegos de papel periódico: Para que los estudiantes realicen su diseño. - Pincel o plato plano desechable: Para poder pintar la cara de la forma a usar.

Castañeda-Ortega realizan una descripción del uso que le darán a los cuerpos geométricos hechos en foami. Pero no mencionan qué información se encuentra en las fichas y el uso que les dará a estas. Por otro lado, González da la descripción de cada uno de los medios que se utilizarán en la clase. Sin embargo, ninguno de los autores diferencia entre materiales y recursos. Observamos que los materiales con los que se propone construir las formas 3D no son los adecuados para esta tarea, pues cuando revisamos los informes de gestión de la clase, los autores mencionaron que las formas construidas con foami absorbían rápidamente la pintura y no permitían dejar la huella de manera correcta. Por ello, en nuestra propuesta decidimos optar por el icopor, ya que es un material que no absorbe rápidamente la pintura.

4.2. Análisis didáctico de las tareas para el Grupo 4°-5°

Para el Grupo 2 tenemos 4 tareas, cada una con un diferente tema matemático. A continuación, analizamos las tareas. Con base en este análisis, realizamos los cambios que consideramos necesarios.

Identificación de la Tarea 2

Tabla 4.8

Identificación de la Tarea 2

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Modelación, Representación y Visualización de formas 3D	Montañez K. y Muñoz E	Leonor Camargo	2020-1

Análisis de la Tarea 2

Aprendizajes esperados. En la Tabla 4.9, columna izquierda, mostramos la información que encontramos sobre los aprendizajes esperados. En la columna derecha, presentamos nuestra propuesta.

Tabla 4.9

Tarea 2 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Modelar, representar e identificar formas geométricas planas que pueden	- Identificar y relacionar las formas planas que se pueden encontrar en las caras de objetos sólidos

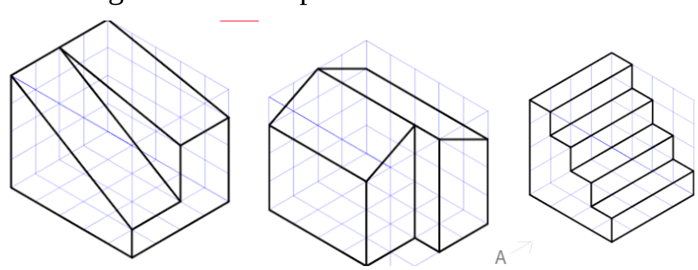
encontrarse luego de visualizar una forma geométrica sólida desde diferentes puntos de vista” (Montañez y Muñoz).	(que tienen sus caras paralelas y perpendiculares). - Modelar un objeto sólido dadas las caras de este, a partir del uso multicubos.

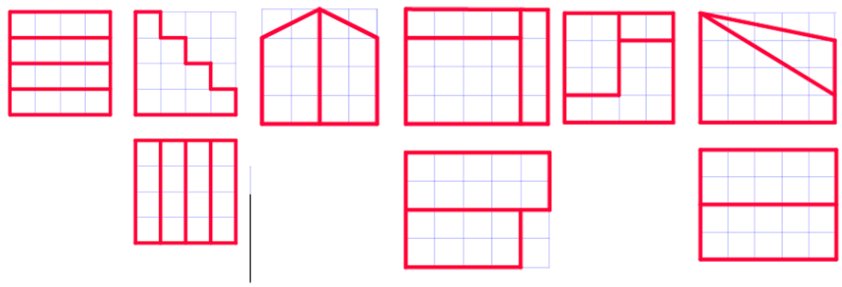
Identificamos que la formulación de los aprendizajes cumple con mencionar lo que se espera que logren hacer e interpretar los estudiantes. Sin embargo, cuando observamos la propuesta de tarea, evidenciamos que la modelación y la representación que se propone es de una forma 3D, mientras que la identificación sí es de forma 2D, que son las caras del sólido. Por otra parte, aunque los autores nombran que se trabaja con formas 3D, no es claro con qué tipo de formas. Por último, en cuanto al cómo proceder, se dice que los estudiantes identifican formas bidimensionales, mediante la visualización de formas geométricas sólidas, pero no es claro cómo harán la modelación y la representación. Por lo anterior, planteamos dos aprendizajes que separan la identificación de formas 2D, de la modelación de una forma 3D. Además, damos las características de las caras de las formas con las que se trabaja y como se construirán los sólidos.

Enunciado. En la parte superior de la Tabla 4.10 damos a conocer el enunciado presentado por Montañez y Muñoz. En la parte inferior presentamos nuestra propuesta.

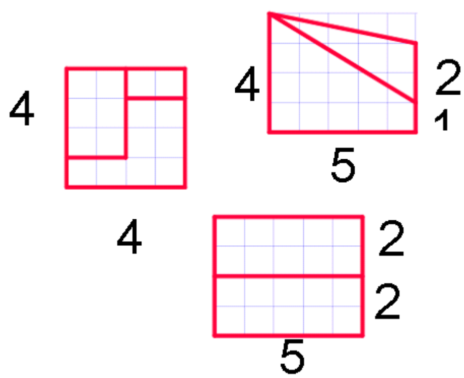
Tabla 4.10

Tarea 2 – Enunciado planteado por Montañez y Muñoz y nuestra propuesta

Enunciado presentado por Montañez y Muñoz
Un carpintero trabaja con cubos de madera para hacer artesanías que le encargan sus clientes. Algunas de las siguientes son representaciones de esas artesanías:  Un día el carpintero dejó una de esas artesanías encima de una mesa y mientras caminaba notó que dependiendo del lugar de donde estaba, él veía la artesanía de una forma diferente, y con un lápiz y un papel dibujo las siguientes representaciones de cómo se veía la artesanía desde arriba, desde el frente y desde un lado.



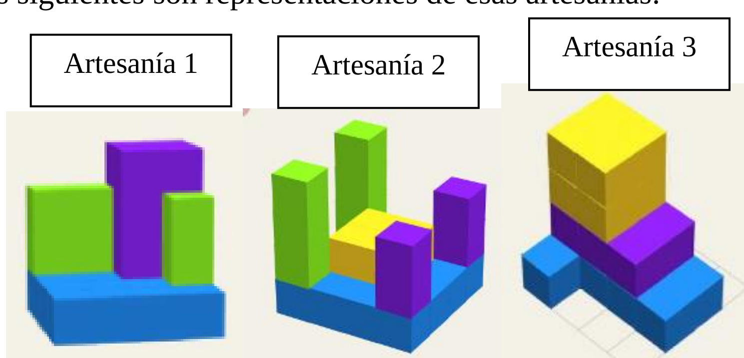
1. Pinta del mismo color la imagen de las caras (vistas desde diferentes puntos) que corresponden a alguna de las artesanías.
2. Luego, modela una tercera artesanía y ~~lo~~ hazlo teniendo en cuenta la representación de las caras en el papel, estas representaciones tendrán unas medidas. Debes tener en cuenta esas medidas para modelar correctamente en plastilina (utilizando tus manos u otros objetos) la artesanía. Por último, coloca la forma que hiciste en una mesa y camina alrededor, como lo hizo el artesano. Compara tu artesanía con las imágenes de las caras y comprueba si está bien hecha:



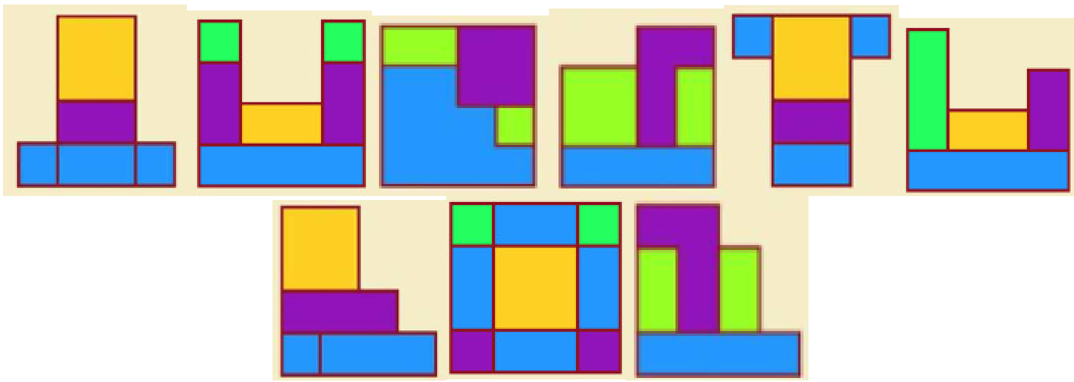
Nuestra propuesta

Identifica las caras de las artesanías

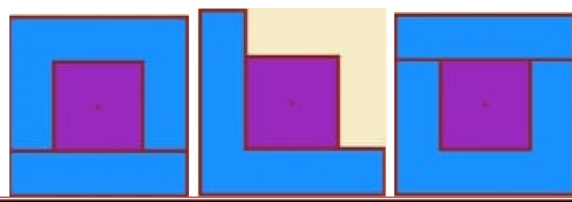
Un carpintero trabaja con madera para hacer artesanías que le encargan sus clientes. Algunas de las siguientes son representaciones de esas artesanías:



Un día el carpintero dejó una de esas artesanías encima de una mesa. Su hijo, mientras caminaba, notó que dependiendo del lugar de donde estaba él veía las artesanías de una forma diferente. Con un lápiz y un papel dibujó las siguientes representaciones de cómo se veían las artesanías desde arriba, desde el frente y desde un lado. Averigua cuáles son las caras de cada artesanía y en cada caso responde: ¿A qué artesanía pertenece la cara? y ¿Qué vista es frente, superior o lateral?



Después hacer la identificación, modela una tercera artesanía y hazlo teniendo en cuenta la representación de las caras en el papel; para la construcción, utiliza los multicubos. Por último, coloca la forma que hiciste en una mesa y camina alrededor, como lo hizo el artesano. Compara tu artesanía con las imágenes de las caras y comprueba si está bien hecha.



El enunciado que proponen Montañez y Muñoz presenta una situación interesante para abordar el tema. Incentiva a que los estudiantes piensen, hagan y digan algo por su cuenta sobre las caras planas de los sólidos. Los estudiantes pueden manipular y representar objetos sólidos, mediante el uso de un contexto de aplicación cercano. Nos parece importante el paso que hay del sólido a las caras y de las caras al sólido. Sin embargo, consideramos que los objetos sólidos sugeridos tienen una complejidad alta para el grado en el que se está trabajando. Esta afirmación la hacemos con base en la página web "Educación plástica y visual" donde se dice que en este grado los sólidos deben ser más sencillos y se debe aprovechar el color para apoyar el trabajo.

Además, consideramos que es muy complejo que los estudiantes de estos grados trabajen con sólidos que tengan caras no perpendiculares o paralelas. Es por ello por lo que nos parece apropiado trabajar con caras que guarden esta relación. Adicionalmente, el enunciado no incluye un título sugestivo y tampoco se realiza ninguna pregunta que constituya un desafío para los escolares. En razón al análisis, decidimos mantener la situación propuesta por los autores, pero agregamos un título y unas preguntas. Además, cambiamos los sólidos y la manera de representarlos.

Descripción de la tarea. En los documentos que tenemos de Montañez y Muñoz, no encontramos la descripción de la tarea pese a que esta se exige en la planeación. Es por ello por lo que no realizamos un análisis didáctico de este aspecto. Sugerimos una descripción que se muestra en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11

Tarea 2 – Nuestra propuesta de descripción de la tarea

Nuestra propuesta
En un primer momento los estudiantes visualizan unos objetos sólidos conformados por multicubos (llamadas artesanías 1, 2 y 3). Seguido a ello, identifican cuáles de las caras, que se dan en el enunciado, pertenecen a cada artesanía. Luego las clasifican escribiendo si estas corresponden a la vista superior, frontal o lateral. Por último, se propone a los estudiantes modelar una artesanía con ayuda de las caras que se le presentan y los multicubos que les proporcionará el docente.

Requisitos. Al revisar la información de la planeación de clase de Montañez y Muñoz, no encontramos información sobre los requisitos. Por ende y teniendo en cuenta la fundamentación sugerimos los requisitos que proponemos en la Tabla 4.12.

Tabla 4.12

Tarea 2 – Nuestra propuesta de requisitos

Nuestra propuesta
Lenguaje matemático: caras del sólido, arriba, frente y lado, vistas: superior, lateral y frontal. **Destrezas:** habilidad en el uso de multicubos para armar objetos estáticos. **Conocimientos previos:** reconocimiento de algunos atributos de una forma sólida, tales como: caras y elementos constituyentes. Identificación de figuras planas como el cuadrado y el rectángulo.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En los documentos entregados por Montañez y Muñoz se encuentra información sobre los procesos cognitivos geométricos que se favorecen. Estos los presentamos en la columna izquierda de la Tabla 4.13. En la columna derecha realizamos el análisis de lo hallado y en la parte inferior damos a conocer nuestra propuesta.

Tabla 4.13

Tarea 2 – Procesos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización "Se impulsa mediante la identificación visual de las formas geométricas 2D y 3D. Además, las habilidades que se espera que los estudiantes utilicen son: coordinación motriz de los ojos, identificación visual, reconocimiento de posiciones en el espacio y discriminación visual" (Montañez y Muñoz).	Estamos de acuerdo que las habilidades señaladas se ponen en práctica en la tarea. Agregamos otra habilidad que es la conservación de la percepción, dado que los estudiantes ven que el objeto, aunque se vea de manera parcial, mantiene su forma. Por otra parte, los autores no mencionan en qué nivel esperan encontrar a los estudiantes, cómo esperan que avancen de un nivel a otro y los principios y aprehensiones con los que trabajan.
Representación "Se impulsa cuando los estudiantes modelan la forma geométrica con sus propias manos y luego representan en el papel las diferentes formas que se visualizan desde diferentes perspectivas" (Montañez y Muñoz).	Montañez y Muñoz no dicen explícitamente qué tipos de representaciones se usan. Aluden a representaciones a mano alzada cuando plantean que los niños con sus propias manos construyan el objeto 3D. También indican que se hace el uso de instrumentos de medición, cuando proponen que se haga uso de la regla. Sin embargo, el uso de esta herramienta no es adecuada para la construcción de las formas 3D que ellos presentan.
Conceptualización "Se impulsa en el momento en que el estudiante comience a abstraer los diferentes cambios que puede adoptar la forma con respecto a la perspectiva desde donde se visualice y los procesos para encontrarlo" (Montañez y Muñoz).	No encontramos que la tarea busque construir el significado de un objeto, propiedad o relación geométrica. Por ello consideramos que este proceso no se fortalece con esta tarea.
Conjeturación "Se impulsa cuando los estudiantes descubran variaciones en las formas, generando afirmaciones, dependiendo de la situación de desplazamiento" (Montañez y Muñoz).	Consideramos que esta tarea no genera la formulación de ningún tipo de enunciado de carácter general, por lo que no se moviliza este proceso. Sin embargo, sí se promueve la exploración y el descubrimiento, que tienen nexos con la conjeturación.
Argumentación "Se impulsa cuando los estudiantes justifiquen de manera verbal o escrita, si la representación modelada por ellos es correcta y que formas se obtienen al observarla" (Montañez y Muñoz).	Observamos que la tarea no promueve la movilización de este proceso, ya que a los estudiantes no se les pide argumentar o sustentar alguna afirmación que se haga.

Nuestra propuesta
Aun cuando los autores proponen que con la tarea se pueden movilizar los cinco procesos, desde nuestro punto de vista solo se promueven de forma explícita dos. De acuerdo con el enunciado que proponemos sugerimos los siguientes: ***Visualización:*** la tarea contribuye al desarrollo de este proceso en el Nivel 2 de identificación de partes constitutivas, porque los estudiantes deben reconocer que el sólido está constituido de caras y que estas tienen una forma. También en el Nivel 1 visual operativo, ya que deben hacer una manipulación mental para llegar a identificar qué caras y qué vistas corresponden al sólido que se les muestra. Además, a la habilidad de identificación visual, al momento en que los estudiantes se centran en una cara o vista. Fortalece el principio "dudar de lo que se ve", pues los estudiantes tienen que clasificar las caras entre vistas superiores, laterales y frontales. ***Representación:*** la tarea fortalece este proceso, ya que los estudiantes hacen uso de multicubos, los cuales permiten construir representaciones tridimensionales a partir de las formas 2D.

Materiales y recursos. En la planeación de clase realizada por Montañez y Muñoz encontramos la descripción de los recursos que se utilizan para el desarrollo de la tarea. Estos los presentamos en la Tabla 4.14 junto a nuestra propuesta de reformulación.

Tabla 4.14

Tarea 2 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
Fotocopia con ilustraciones de formas en 3D, colores, plastilina, tijeras y regla y formas geométricas sólidas.	***Materiales:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. - Formas sólidas: tres figuras 3D construidas con multicubos (llamadas artesanías 1, 2 y 3). ***Recursos:*** - Multicubos: son figuras sólidas en forma de cubo acoplables que se utilizan para que los estudiantes construyan los sólidos.

Los autores de la tarea no hacen una diferencia entre material y recurso. Además, observamos en el informe de gestión que presentaron los autores, que el uso de plastilina para modelar el sólido no fue adecuado ya que se perdió mucha información sobre las caras que se le presentan a los estudiantes. Por lo anterior, cambiamos la forma de representar los sólidos, de tal manera que no se pierda la información. Esto se logra con el uso de multicubos, tal como lo propone Gutiérrez (1998).

Identificación de la Tarea 3

Tabla 4.15

Identificación de la Tarea 3

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Simetría Axial	Forero. J y Villarraga. V	Leonor Camargo	2020-1

Análisis de la Tarea 3

Aprendizajes esperados. En la columna 1 de la Tabla 4.16 presentamos el aprendizaje esperado propuesto por Forero y Villarraga. Además, en la segunda columna mostramos nuestra propuesta de ajuste.

Tabla 4.16

Tarea 3 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Identificar y caracterizar algunas propiedades de objetos en relación simétrica, a través de procesos de exploración guiados y el uso de papel pergamino, para potenciar procesos cognitivos en matemáticas" (Forero y Villarraga).	Identificar y caracterizar la relación simétrica de parejas de formas planas, a través del proceso de copiado y de representaciones que se reflejan según el efecto espejo.

Con base en lo que nosotros consideramos como aprendizajes esperados, vemos que la propuesta desarrollada por Forero y Villarraga cumple con el hecho de que es una oración corta, que inicia con un verbo, que menciona lo que se espera que los estudiantes logren y cómo se espera que lo consigan. Sin embargo, consideramos que para que el aprendizaje esperado sea más claro se debe hacer alusión específica a cuáles son los objetos geométricos con los que se trabaja. Aclaramos que cambiamos la propuesta de aprendizajes esperados de acuerdo con el cambio que hicimos al enunciado de la tarea (ver Tabla 4.17).

Enunciado. Al revisar la información que tenemos, en la planeación de clase presentada por Forero y Villarraga encontramos el enunciado de la tarea. Este lo presentamos en la Tabla 4.17 junto con nuestra propuesta alternativa.

Tabla 4.17

Tarea 3 – Enunciado planteado por Forero y Villarraga y nuestra propuesta

Enunciado presentado por Forero y Villarraga
1. Con una hoja pergamino, realiza las siguientes indicaciones: ➢ Dibuja una recta y un triángulo cualquiera. A la recta la vamos a llamar eje. ➢ Dobla la hoja por el eje de tal modo que se vea la forma que construiste.

- Calca la forma geométrica al otro lado de la hoja pergamino.
- Desdobla la hoja.
- ¿Qué observas sobre la forma obtenida con relación al triángulo? Reporta en tu cuaderno lo que observas al realizar las indicaciones anteriores.

2. Con otra hoja pergamino, vas a realizar las siguientes indicaciones:
   - Dibuja un eje (recta) y un punto que no pertenezca a la recta. Llámalo A.
   - Dobla la hoja por el eje.
   - Calca el punto al otro lado de la hoja. Llámalo B.
   - Desdobla la hoja.
   - Mide la distancia entre los dos puntos A y B. Anótala en tu cuaderno.
   - Mide la distancia entre el eje y uno de los puntos. Y, anótala en tu cuaderno.
   - Dibuja el segmento que une los dos puntos y mídelo.
   - Dibuja un punto en el eje. Llámalo C.
   - Determina el punto de intersección entre el segmento y el eje. Llámalo D.
   - Mide el ángulo ADC y el ángulo BDC.
   - Contesta en tu cuaderno. ¿Qué relación hay entre las dos medidas? ¿Cómo son los ángulos que forman el eje y el segmento? ¿cómo son las rectas entre sí?
   - Dibuja otro punto y repite el mismo proceso. Comprueba si el resultado es el mismo que habías escrito.
   - ¿Cómo son las rectas que unen dos puntos?
3. Ahora con una hoja cuadriculada dibuja un eje (no vertical) y una forma geométrica cualquiera. Con todos los atributos geométricos que descubriste, realiza la simetría axial sin doblar la hoja y ni calcar.

Nuestra propuesta

Decoradores de fiestas por un día

Daniela es una organizadora de fiestas. A ella le encanta ayudar en el proceso de decoración del lugar donde se desarrollan las festividades. Para el mes de amor y amistad Daniela es contratada por una empresa para realizar un evento con el fin de celebrar esta gran fecha. Para ella es muy importante dar a conocer su trabajo y siempre coloca el logo de su empresa en alguna parte de la decoración.

Logo de la empresa

Para esta ocasión Daniela quiere que todas las servilletas tengan su logo. Ella quiere que el logo quede copiado en las dos mitades de la servilleta, de tal forma que quede idéntico y que sea la imagen en espejo. ¿Puedes ayudar a Daniela a descubrir el procedimiento que tendría que hacer para esto?

Desde nuestro punto de vista, lo que los autores proponen no corresponde a un enunciado de una situación que ofrezca un contexto y que rete a los estudiantes a pensar, decir y hacer algo por su cuenta. Es una tarea en donde se pide realizar un procedimiento, paso a paso, que lleva de la mano a los estudiantes a realizar una serie de acciones y dar los resultados. Pero hace falta un reto o desafío intelectual para los estudiantes. Además, encontramos errores de precisión matemática. Por ejemplo, el decir “¿Cómo son las rectas que unen dos puntos?”. Nuestra propuesta intenta solventar los errores por lo que proponemos una situación problema en un contexto, donde se reta a los estudiantes a pensar, decir y hacer algo ellos mismos.

Descripción de la tarea. En la documentación que tenemos de Forero y Villarraga, no encontramos la descripción de la tarea, aunque esta se exige en la planeación. Es por ello por lo que no se puede realizar un análisis didáctico de este aspecto. Por lo anterior y teniendo en cuenta lo que consideramos como descripción de una tarea y nuestra propuesta de enunciado, hacemos la descripción que se encuentra en la Tabla 4.18.

Tabla 4.18

Tarea 3- Nuestra propuesta de descripción de la tarea

Nuestra propuesta
Los estudiantes visualizan el logo que quiere copiar Daniela. Tienen el reto de proponer un procedimiento para poder copiar la figura de modo que su resultado quede idéntico y se encuentre localizado en modo espejo. Para ello esperamos que usen calcado o que exploren y analicen cómo realizar un copiado sin doblar el papel. Esto lo pueden realizar ya sea construyendo un eje de simetría y segmentos perpendiculares al eje que les ayuden a identificar la ubicación. Lo anterior se hace para descubrir las propiedades de la simetría axial.

Requisitos. Cuando leímos la planeación de clase de los autores, encontramos los requisitos que plantean para abordar la tarea. Por tal razón, en la Tabla 4.19 columna izquierda, presentamos lo hallado y en la columna derecha nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.19

Tarea 3 – Requisitos planteados por los autores y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Propuesta de requisitos
Usar adecuadamente los instrumentos de medición (regla y transportador), tener conceptualizado objetos geométricos como: punto, vértice, segmento y ángulo, tener conceptualizado o conocer atributos de los objetos geométricos como: segmentos congruentes, ángulos congruentes y congruencia de formas congruentes, tener habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el plano y reconozcan conceptos de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad (Forero y Villarraga).	**Lenguaje matemático:** términos como punto, vértice, segmento, ángulo, equidistancia, congruencia y eje. **Destrezas:** habilidades en el uso de la regla, la escuadra y el transportador. **Conocimientos previos:** tener una noción de horizontal, vertical, paralelismo y perpendicularidad.

En lo planteado por los autores, vemos que se cumple con lo que hemos contempladopara los requisitos. Es por ello por lo que, en nuestra propuesta, realizamos una organizaciónpara que sea claro cuál es el lenguaje matemático, cuáles son las destrezas y cuáles son los conocimientos previos que requieren los estudiantes para abordar la tarea.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En los documentos que tenemos de Forero y Villarraga encontramos información sobre los procesos cognitivos geométricos que se favorecen. Estos los presentamos en la columna izquierda de la Tabla 4.20. También, en la columna derecha damos a conocer el análisis que realizamos de cada proceso y en la parte inferior mostramos nuestra propuesta.

Tabla 4.20

Tarea 3 – Procesos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización "El profesor incentiva la aplicación del principio "Dudar de lo que se ve" a partir de preguntas como: ¿Es necesario tener un eje? ¿Será totalmente cierto que las dos formas son iguales?" (Forero y Villarraga).	Los autores aluden a uno de los principios del proceso de visualización. Sin embargo, consideramos que con las preguntas consideradas no se trabaja claramente este principio, pues estas no aluden a analizar visualmente una imagen. Además, no encontramos alguna referencia al nivel o niveles de este proceso cognitivo que se están desarrollando al realizar la tarea, las habilidades o a las aprehensiones.
Representación "Los estudiantes realizan representaciones utilizando instrumentos de medida, estableciendo relaciones entre los atributos de simetría axial" (Forero y Villarraga).	Estamos de acuerdo en que este proceso se favorece al realizar representaciones, haciendo uso de instrumentos de medida. Sin embargo, hace falta aludir a dichas representaciones y qué es lo que se mide. Por otro lado, y teniendo en cuenta nuestro marco de referencia, el establecimiento de relaciones entre los atributos es propio del proceso de conceptualización y no de representación.
Conceptualización "Se favorece cuando los estudiantes construyen nociones de simetría a través de imágenes visuales" (Forero y Villarraga).	Como dicen los autores, esta tarea sí favorece el proceso de conceptualización. Sin embargo, no se mencionan las nociones que se están construyendo, a través de qué imágenes se hace dicha construcción y cómo se lleva a cabo esta construcción.
Conjeturación "Este proceso se fortalece cuando los estudiantes realizan una exploración de las formas construidas a través de la indagación sobre: Qué relación hay entre las dos medidas, Cómo son los ángulos que forman el eje y el segmento y Cómo son las rectas entre sí" (Forero y Villarraga).	Creemos que las preguntas que contiene la tarea generan respuestas directas que apoyan este proceso de manera muy parcial. Además, consideramos que la tarea no está dirigida principalmente a favorecer este proceso.
Argumentación "Se logra cuando los estudiantes justifican las relaciones entre las formas a través de las mediciones" (Forero y Villarraga).	Observamos que en la tarea no sé evidencia la movilización de este proceso, ya que no se busca que los estudiantes argumenten o sustenten alguna afirmación que hagan.

Nuestra propuesta
Desde nuestro punto de vista observamos que esta tarea favorece principalmente el proceso de conceptualización, apoyado de los procesos de visualización y representación. En vista de esto y de acuerdo con la tarea a desarrollar, consideramos los siguientes procesos cognitivos: ***Visualización:*** los estudiantes deben observar la figura para poder realizar un copiado y, a medida que lo realizan, van encontrando propiedades de la simetría axial. Se desarrolla el Nivel 2 de visualización; es decir, la percepción e interpretación de elementos constitutivos y propiedades de estos. También se trabaja el principio "ver más allá de lo que se ve", pues los estudiantes tienen que enriquecer la representación buscando de qué manera caracterizar geométricamente la configuración de la pareja de figuras simétricas o que están en relación de simetría. ***Representación:*** este proceso se trabaja al desarrollar la tarea, pues los estudiantes representan el simétrico del logo de la empresa de Daniela en una hoja blanca y después realizan un dibujo que represente su propia empresa de organización de eventos. Todo esto se hace con ayuda de instrumentos de medición como regla y transportador. ***Conceptualización:*** la tarea está centrada en este proceso, pues el objetivo general es que los estudiantes descubran que las propiedades de la simetría axial son: la isometría (pues se conservan las distancias entre pares de puntos de una figura geométrica y sus correspondientes por simetría), la medida de un ángulo y la de su simétrico son iguales, la recta simétrica de una paralela al eje de simetría también es paralela a dicho eje.

Materiales y recursos. En la Tabla 4.21 presentamos los recursos que Forero y Villarraga sugieren. Además, damos a conocer nuestra propuesta teniendo en cuenta el nuevo enunciado y nuestro fundamento teórico.

Tabla 4.21

Tarea 3 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
Hojas pergamino, regla métrica, transportador y una hoja cuadrada.	***Materiales:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. - Hoja blanca con el logo de la empresa de Daniela: Para que los estudiantes realicen la representación. ***Recursos:*** - Transportador y regla graduada: Para que los estudiantes realicen el copiado y su representación. *Nota:* No se recomienda el uso del papel pergamino para la realización de esta tarea, pues este no permite llevar a los niños a pensar en el procedimiento de simetría, sino que más bien lleva a trabajar el proceso de calcado, el cual no va ligado al aprendizaje esperado.

Al revisar la información existente con respecto a lo que nosotros consideramos como materiales y recursos, vemos que los autores mencionan los materiales y recursos, sin diferenciarlos. Además, no realizan una descripción del uso que se les da en la tarea. Por ende,en nuestra propuesta realizamos la clasificación entre material y recurso, damos la explicacióndel uso que se le da a cada elemento y agregamos una sugerencia respecto al recurso que no consideramos pertinente usar para el desarrollo de la tarea.

Identificación de la Tarea 4

Tabla 4.22

Identificación de la Tarea 4

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Medición de ángulos.	Pérez H.	Leonor Camargo	2019-2

Análisis de la Tarea 4.

Aprendizajes esperados. En la Tabla 4.23, columna izquierda, se encuentra la información, de los aprendizajes esperados, que encontramos en los documentos que tenemos de Pérez. En la columna derecha esta la propuesta que realizamos.

Tabla 4.23

Tarea 4 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
“Apoyar el desarrollo de destrezas para manipular el transportador y reconocer ángulos, esto por medio de una actividad que involucra los procesos de medir, visualizar e identificar ángulos en un plano” (Pérez).	Medir la abertura de algunos ángulos con ayuda del transportador y asociar la medida de la abertura de un ángulo con la unidad de medida “grados”.

Vemos que Pérez menciona lo que espera que los estudiantes logren hacer o interpretar, y cómo se espera que lo logren al realizar la tarea. Sin embargo, cuando analizamos la información, observamos que no se busca que los estudiantes reconozcan ángulos, sino que identifiquen el atributo medible de los ángulos (la abertura). Por otra parte, en cuanto a la palabra “proceso” que utiliza el autor, consideramos que es mejor cambiarla, dado que se puede generar confusión cuando hablamos de los procesos propios de la geometría. En consecuencia, nuestra propuesta de aprendizajes esperados se centra en la medición de la abertura de los ángulos y en la asociación que tiene esa medida respecto a una unidad de medida.

Enunciado. En la Tabla 4.24 mostramos el enunciado que encontramos en la propuestade tarea y en la planeación de clase de Pérez. Luego damos a conocer nuestra propuesta de enunciado.

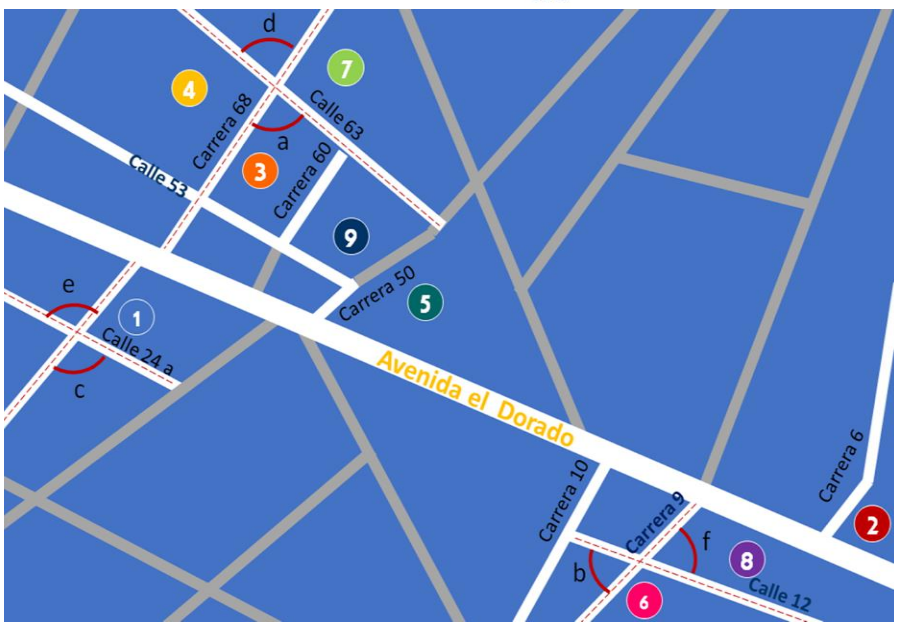
Tabla 4.24

Tara 4 – Enunciado presentado por Pérez y nuestra propuesta

Enunciado presentado por Pérez

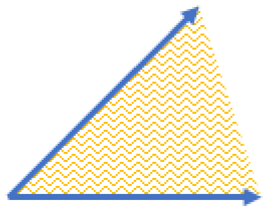
Midamos ángulos en nuestra ciudad

Adalia Schell es una ingeniera alemana que está diseñando un nuevo sistema de alcantarillado para los sitios más famosos de Bogotá. Ella necesita saber la medida de los ángulos indicados con rojo en el mapa. Demuestra que sabes medir ángulos y ayuda a construir tu ciudad. Podrías decirnos, ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle C$?



Para ello el Ministerio le ha dado la siguiente información

El interior de un ángulo es la porción mas pequeña del plano determinada por los lados de ese ángulo.



¡Ayuda a Adalia! Con cada uno de los ángulos señalados con **rojo** en el mapa

1. Determina su medida usando el transportador.
2. Escribe qué carrera, avenida y/o calle lo determinan.
3. Si hay algún lugar turístico de Bogotá en el interior del ángulo escribe su nombre.

Recuerda utilizar la información ofrecida por el Ministerio

Nuestra propuesta

Midamos ángulos en nuestra ciudad

Adalia Schell es una ingeniera alemana que está diseñando un nuevo sistema de alcantarillado para los sitios más famosos de Bogotá. Ella necesita saber la medida de los ángulos indicados con rojo en el mapa. Demuestra que sabes medir ángulos y ayuda a construir tu ciudad. Podrías decirnos, ¿Cuál es la medida del $\measuredangle C$?

El enunciado propuesto por Pérez presenta una situación interesante para trabajar el tema. Incentiva a los estudiantes a pensar, hacer y decir algo por su cuenta. Nos parece significativo que el autor proponga el enunciado en un contexto. Como señala Gonzalvez (2016), son importantes los contextos en la enseñanza porque tienen una relevancia en el aprendizaje. No obstante, no es claro para qué se da la información del interior del ángulo, dado que lo que se busca es que los estudiantes midan la abertura de algunos ángulos. Además, nos parece que no se debería decir, en la indicación 1, con qué deben medir el ángulo puesto que los estudiantes verán la necesidad de usar un instrumento de medición. De acuerdo con lo anterior, en la propuesta que realizamos decidimos dejar la primera parte del enunciado y eliminar la información dada por el Ministerio. Creemos que, al dar esa información, los estudiantes pueden creer que el interior del ángulo es medible, lo que no es verdad. Proponemos a la persona interesada en implementar la tarea, modificar el mapa de acuerdo con el contexto de los estudiantes; por ejemplo, utilizar las calles cercanas al colegio o a un parque de diversiones conocido.

Descripción de la tarea. En la propuesta de tarea de Pérez, encontramos la descripción de la tarea. En la Tabla 4.25, columna izquierda, mostramos la información hallada. En la columna derecha presentamos nuestra propuesta.

Tabla 4.25

Tarea 4 – Descripción planteada por el autor y nuestra propuesta

Descripción planteada	Nuestra propuesta
"En primer lugar, los estudiantes medirán y visualizarán los ángulos denotados en color rojo en el mapa. Esto lo harán con ayuda del transportador (los cuales serán facilitados por los maestros en formación). Después se tendrá un espacio para socializar cada ítem establecido en la guía. En segundo lugar, el maestro en formación indagará a los estudiantes acerca de características o propiedades encontradas y/o visualizadas por los mismos durante el proceso de medición de ángulos, esto con el fin de construir las nociones mencionadas en los logros de aprendizaje. En este momento se dará un debate, pues al tomar cada intervención de los estudiantes se pedirá a los demás confirmar la validez de dicho argumento" (Pérez).	En la tarea se pretende que los estudiantes midan la abertura de los ángulos denotados en color rojo en el mapa. Esto lo harán con ayuda del transportador. En caso de que no lo sepan usar, el docente puede plantear algunas estrategias. Aquí mencionamos dos de ellas. La primera, consta de utilizar dos palitos, uno fijo en el centro del transportador y otro no fijo. El palito fijo debe ir sobre uno de los rayos del ángulo a medir. El palito móvil se debe sobreponer sobre el otro rayo del ángulo a medir. De esta manera se podrá encontrar la medida del ángulo. La segunda estrategia puede usarse previo a la manipulación del transportador. Esta consiste en el uso de cuñas que representan ángulos de determinada medida. Para más información sobre el uso de las cuñas sugerimos dirigirse a documento de Jiménez y Salazar (2016). Después de medir se compararán las medidas de los ángulos que encontraron y se analizará si las medidas encontradas son consistentes con la abertura.

Consideramos que la explicación incluida en la primera parte de la descripción es acorde con lo que proponemos en nuestro marco de referencia. Explica, de manera breve, lo que se espera que los estudiantes realicen con la tarea. La segunda parte es un complemento de la tarea que propone el autor. En nuestra propuesta tuvimos en cuenta la primera parte de la descripción de Pérez. Sin embargo, no la dejamos de la misma manera porque deseamos ser más claros sobre lo que los estudiantes medirán y las estrategias que se pueden utilizar si los estudiantes no saben cómo hacer uso del transportador.

Requisitos. Cuando revisamos la información de la planeación de clase y la propuesta de tarea de Pérez, no encontramos alguna mención de los requisitos para abordar la tarea. Así pues, y teniendo en cuenta nuestro marco de referencia, en la Tabla 4.26 sugerimos los requisitos, que consideramos necesarios para abordar la tarea.

Tabla 4.26

Tarea 4 – Nuestra propuesta de requisitos

Nuestra propuesta
Lenguaje matemático: ángulo, vértice, rayo y grado. ***Destrezas:*** saber usar el transportador o las cuñas. ***Conocimientos previos:*** Distinguir las partes constitutivas del ángulo e identificar ángulos en configuraciones complejas. Identificar cuando un ángulo es de 90° y cuando es mayor o menor a esta medida.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En la planeación de clase de Pérez encontramos el proceso que la tarea quiere fortalecer. En la columna izquierda de la Tabla 4.27 mostramos lo hallado y en la columna derecha presentamos el análisis que realizamos respecto a la propuesta del autor. En la parte inferior se encuentra nuestra propuesta.

Tabla 4.27

Tarea 4 – Proceso planteado por el autor, análisis y nuestra propuesta

Proceso planteado	Análisis
Visualización "Consiste en la creación de representaciones visuales con la finalidad de comprender las relaciones que se dan en un contexto particular, puesto que a partir del pensamiento y el razonamiento se comprende mejor el mundo externo" (Pérez).	No es claro cómo se fortalece este proceso en la tarea puesto que Pérez da una explicación de lo que entiende por este proceso y dice cuál es su importancia, pero no menciona cómo se ve involucrado en la tarea.
Nuestra propuesta	
Estamos de acuerdo con que el proceso que se moviliza es el de visualización. Realizamos la siguiente propuesta con el objetivo de que se entienda cómo se desarrolla este proceso. ***Visualización***: La tarea fortalece la habilidad de identificación visual, puesto que el estudiante debe reconocer los ángulos aislándolos del contexto donde se encuentran. Además, contribuye al desarrollo del Nivel 2 de visualización porque los estudiantes visualizan la abertura y la asocian con un número reconociendo el elemento medible del ángulo. También está presente el principio "dudar de lo que se ve", pues los estudiantes, al visualizar un ángulo y ver que puede tener la misma abertura del otro, se dan cuenta que este tiene la misma medida a lo cual, al medir se dan cuenta que su idea es correcta o no.	

Materiales y recursos. En la documentación encontramos los recursos que considera Pérez. En la Tabla 4.28, columna izquierda, mostramos lo hallado en los documentos. En la columna derecha damos a conocer nuestra propuesta.

Tabla 4.28

Tarea 4 – Materiales y recursos planteados y nuestra propuesta

Materiales y recursos utilizados	Nuestra propuesta
"Es necesario disponer de ciertos recursos para resolver la actividad, los cuales son una guía, transportador, lápiz y borrador por cada pareja de estudiantes" (Pérez). 	***Material:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. - Hoja con el mapa de la ciudad, en la cual medirán los ángulos. ***Recurso:*** - Transportador: el cual se utilizará para medir los ángulos del plano o cuñas. - Cuñas: (si es el caso) se utilizará la para dar una primera entrada a la medición de ángulos.

El autor no hace una diferencia de material y recurso. Sin embargo, nos parece acertada la propuesta de usar el transportador con los palitos ubicados como se sugirió, pues es la herramienta para la medición de la abertura de los ángulos. También nos parece apropiado el uso de cuñas para dar una primera entrada a la medición de ángulos. Estas cuñas ayudarán a que los estudiantes estimen las verdaderas amplitudes de cada ángulo. Por ende, sugerimos que se construyan las cuñas con medidas angulares como: 30°, 45°, 60° y 90°.

Identificación de la Tarea 5

Tabla 4.29

Identificación de la Tarea 5

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Circunferencia	Torres R.	Carlos Pérez	2020-2

Análisis de la Tarea 5

Aprendizajes esperados. En la Tabla 4.30 damos a conocer la propuesta que realiza Torres para los aprendizajes esperados. Además, presentamos nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.30

Tarea 5 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Construye, identifica, conjetura y verifica propiedades de la circunferencia, tales como equidistancia y congruencia entre los radios" (Torres).	Identificar y caracterizar la circunferencia como: el conjunto de puntos coplanares que equidistan de un punto, haciendo uso del software GeoGebra.

Identificamos que el autor propone una oración corta donde hace alusión al objeto geométrico qué se va a trabajar. Sin embargo, la oración contiene varios verbos que aluden a varios procesos y que no permiten diferenciar qué aprendizaje se busca. También, no es claro cuál es la definición de circunferencia que tiene en cuenta Torres pues, para nosotros~~.~~, la equidistancia de los puntos al centro de la circunferencia hace parte de la definición de esta forma geométrica. Además, el autor menciona la equidistancia, pero no menciona esta con respecto a qué. Teniendo en cuenta nuestro análisis, propusimos un aprendizaje esperado donde se puede evidenciar lo que se quiere lograr, cómo se quiere lograr y el objeto geométrico a tratar. Consideramos trabajar solo con la equidistancia la cual sirve para definir la circunferencia. No tenemos en cuenta la propiedad de congruencia entre radios ya que nos parece importante centrarnos en la conceptualización del objeto.

Enunciado. En la parte superior de la Tabla 4.31 mostramos la información que encontramos sobre este aspecto en los documentos de Torres. En la parte inferior presentamos nuestra propuesta.

Tabla 4.31

Tarea 5 – Enunciado planteado por Torres y nuestra propuesta

Enunciado planteado por Torres
1. Usando la herramienta segmento, crea un segmento. 2. Al punto *A* extremo del segmento, actívale la opción “rastro” 3. Arrastra el punto *A* (con la opción rastro activado), intentando mantener la longitud del segmento. Seguido de esto, el estudiante dará su punto de vista acerca de lo construido en la pantalla, lo esperado es que reconozca que la forma es una circunferencia, pero no de forma definida, al menos en aspectos topológicos como la cerradura. 4. ¿Qué figura puedes observar luego de realizar una vuelta completa arrastrando al punto *A*? 5. ¿Qué se debe tener en cuenta para que el dibujo quede bien hecho? Para el segundo punto de esta actividad deberá hacer algo análogo, pero con el archivo GeoGebra 1.1, a continuación, podemos observar los pasos a seguir: 1. Usando la herramienta segmento, crea un segmento. 2. Mide la longitud del segmento. 3. Al punto *B* extremo del segmento, actívale la opción “rastro” 4. Arrastra el punto *B* (con la opción rastro activado), intentando mantener la longitud del segmento. 5. ¿Qué cambio notaste en la medida del segmento? 6. ¿Qué se necesita para que la circunferencia quede bien dibujada? 7. ¿La medida del segmento tiene alguna relación con la forma que se ve en la pantalla?

Nuestra propuesta
Descubriendo un lugar geométrico Sara está realizando una representación en GeoGebra que consiste en partir de dos puntos A y B. Luego quiere construir otros puntos de tal manera que la distancia de estos al punto A sea la misma que la distancia del punto A al punto B. Replica en GeoGebra la representación que quiere hacer Sara e identifica el lugar geométrico que se forma.

Consideramos que la propuesta que realiza Torres no es un enunciado sino una guía donde se da un procedimiento paso a paso, de lo que deben hacer los estudiantes. Esto no permite que ellos piensen, hagan y digan algo por su cuenta. Es por ello por lo que en nuestra propuesta tomamos en cuenta el uso del software para la tarea, pero planteamos una situación problema que les permite indagar y decir algo respecto al problema que se les da.

Descripción de la tarea. En los documentos de Torres, no encontramos la descripción de la tarea. Por ende, no se pudimos realizar un análisis de este aspecto. Por lo tanto, en la Tabla 4.32, presentamos nuestra propuesta de descripción, con la intención de que el docente que desee aplicar la tarea logre entender qué se quiere lograr con esta.

Tabla 4.32

Tarea 5 – Nuestra propuesta de descripción de la tarea

Nuestra propuesta
A través de la exploración en GeoGebra se espera que los estudiantes construyan puntos que equidisten a otro punto llamado centro de la circunferencia. Cabe aclarar que este proceso se puede llevar de dos maneras. El primero es realizándolo a “ojo”, es decir, sin usar ninguna herramienta de medida. El segundo es haciendo uso de la herramienta “distancia o longitud”. En cualquiera de los dos casos, el lugar geométrico que se logra entrever es la circunferencia. Después se les puede indicar a los estudiantes cómo construir la circunferencia dados los dos puntos. Con esto se puede verificar que el lugar geométrico que se forma es la circunferencia. Por último, construirán una definición del objeto geométrico.

Requisitos. Cuando revisamos la información de la planeación de clase de Torres, encontramos los requisitos que el autor considera necesarios para abordar la tarea. En la Tabla 4.33, columna izquierda, mostramos la información que hallamos. En la columna derecha damos a conocer nuestra propuesta.

Tabla 4.33

Tarea 5 – Requisitos planteados por el autor y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Nuestra propuesta
"Manejo básico de la interfaz de GeoGebra: Aquí se debe tener en cuenta el manejo de herramientas como segmento, punto, medidas, manipulación de puntos y segmentos, y herramienta rastro. Noción de segmento, punto y congruencia entre segmentos. Noción de circunferencia: identifica la circunferencia como una figura geométrica conocida. Partes de la circunferencia: Identifica las partes que la componen como: punto sobre la circunferencia, centro, radio, diámetro." (Torres).	**Lenguaje matemático:** punto y equidistancia. **Destrezas:** manejo de la opción "punto" de GeoGebra y de las herramientas de "arrastre" y "distancia y longitud". **Conocimientos previos:** distancia entre dos puntos y equidistancia entre pares de puntos.

Creemos que las herramientas y algunos los conceptos que propone Torres para abordar la tarea que él plantea, sí son necesarios. Sin embargo, consideramos que los estudiantes no requieren saber la noción de circunferencia, pues esto es lo que se quiere identificar. En consecuencia, en nuestra propuesta plantemos el lenguaje, las destrezas y los conocimientos que los estudiantes necesitan para llevar a cabo la tarea que proponemos.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En la planeación de la clase de Torres no se encuentra un apartado específico para este aspecto. Sin embargo, en la planeación de clase el autor menciona el proceso de conjeturación varias veces. En la Tabla 4.34 presentamos lo que el autor dice sobre este proceso, su respectivo análisis y nuestra propuesta.

Tabla 4.34

Tarea 5 – Proceso planteado por el autor, análisis y nuestra propuesta

Proceso planteado	Análisis
Conjeturación "Este proceso se trabaja cuando los estudiantes responden las siguientes preguntas: Qué cambio notaste en la medidadel segmento, Qué se necesita para que la circunferencia quede bien dibujada, La medida del segmento tiene algunarelación con la forma que se ve en la pantalla, Arrastra cualquiera de los tres puntos, Qué cambios notas en las medidas de los radios cuando mueves el punto B, Qué cambios notas en las medidas cuando mueves los puntos C y D y Qué se mantiene igual" (Torres).	No es claro cómo se fortalece este proceso en la tarea. Si bien proponen preguntas que tienen el objetivo de inducir el descubrimiento de propiedades no se solicita a los estudiantes formular un enunciado para las propiedades descubiertas.

Nuestra propuesta
Teniendo en cuenta nuestra propuesta de enunciado. Realizamos la siguiente propuesta con el objetivo de que se entienda cómo se desarrolla este proceso. ***Visualización:*** este proceso se favorece mediante la aprehensión discursiva de anclaje visual al discursivo, pues los estudiantes, a partir de la representación de la circunferencia, proponen como enunciado que la circunferencia es un lugar geométrico formado por puntos coplanares que equidistan de su centro. Además, se trabaja la aprehensión operativa de cambio figural, pues los estudiantes tienen que añadir elementos geométricos (puntos) a la configuración, para poder hallar el lugar geométrico. ***Conceptualización:*** este proceso se desarrolla cuando los estudiantes construyen el significado de circunferencia. Esto lo hacen a partir de la identificación de las características necesarias y suficientes que hay que incluir en la enunciación.

Materiales y recursos. En la planeación de Torres se encuentra la descripción del material que él considera para su propuesta de tarea. En la columna izquierda de la Tabla 4.35 damos a conocer lo hallado. Por otra parte, en la columna de la derecha, se encuentra nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.35

Tarea 5 – Materiales y recursos planteados por el autor y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
"Guías: A través de GeoGebra se desarrollarán los momentos dos y tres, estas guías están realizadas en un archivo GeoGebra en el cual llevará consignadas las instrucciones de cada una. Taller: El taller fue realizado en un documento Word, este material se desarrollará en el cuarto momento y será diligenciado por el estudiante en el mismo documento" (Torres).	***Material:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. ***Recurso:*** - GeoGebra: los estudiantes replicarán la representación realizada por Sara. Esto lo harán por medio de las herramientas que nombramos en la Tabla 4.33 en nuestra propuesta.

Podemos decir que el autor no realiza una diferenciación entre material y recurso. Aunque sí realiza una explicación de cómo y en qué momento va a hacer uso de estos materiales yrecursos. En consecuencia, nuestra propuesta toma en cuenta y describe el uso que se les da a losmateriales y recursos necesarios para abordar nuestra tarea.

4.3. Análisis didáctico de las tareas para el Grupo 6°-7°

El Grupo 3 cuenta con cinco grupos de tareas. Dos de ellas tienen el mismo tema por lo que hacemos el análisis paralelamente. Las tres tareas restantes tienen temas distintos. A continuación, presentamos el estudio de las tareas y las nuevas propuestas que formulamos.

Identificación de la Tarea 6

Tabla 4.36

Identificación de la Tarea 6

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Triangulo isósceles	Cruz J	Leonor Camargo	2020-1

Análisis de la Tarea 6

Aprendizajes esperados. En la Tabla 4.37 presentamos la información que encontramos en los documentos que tenemos de Cruz. Además, presentamos nuestra propuesta de aprendizajes esperados para esta tarea.

Tabla 4.37

Tarea 6 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Los estudiantes construyen el concepto de triángulo isósceles mediante una construcción en GeoGebra, a partir de las propiedades del objeto. Mediante la construcción del objeto y la conversación con el maestro, los estudiantes especializan el lenguaje geométrico que han trabajado en cursos anteriores con el fin de dar paso a un pensamiento pre-formal." (Cruz).	Definir triángulo isósceles como aquel con solo dos lados congruentes y descubrir que los ángulos internos opuestos a los lados congruentes son congruentes a través de la medición de lados y ángulos.

Cuando analizamos lo planteado por Cruz, identificamos el objeto matemático involucrado en la tarea. Sin embargo, no se enuncia el aprendizaje esperado con la tarea, sino lo que los estudiantes realizarán al ir desarrollando la tarea. Además, en cuanto a la estructura, vemos que no es una oración breve que inicia con un verbo. Es por ello, por lo que en nuestra propuesta presentamos un aprendizaje acorde a lo que queremos que los estudiantes logren aprender al llevar a cabo la tarea.

Enunciado. Al revisar los documentos que tenemos de Cruz, encontramos el enunciado que presentamos en la Tabla 4.38. En la parte inferior, mostramos nuestra propuesta alternativa que construimos después de hacer el análisis.

Tabla 4.38

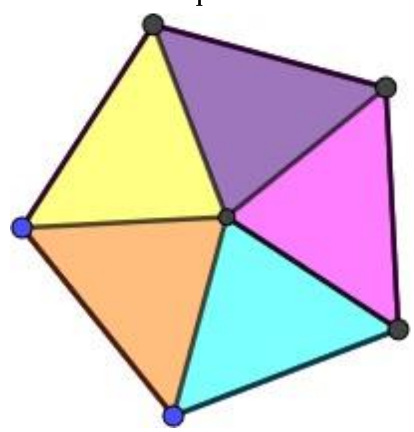
Tarea 6 – Enunciado planteado por Cruz y nuestra propuesta

Enunciado planteado por Cruz

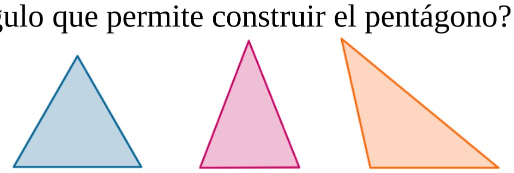
Nuestra propuesta

Encontremos la baldosa apropiada

Zelenne quiere remodelar el piso de su apartamento y ha pensado en crear pentágonos regulares con baldosas triangulares de manera que los 5 lados midan lo mismo.



Ella tiene tres opciones de baldosas triangulares, pero no sabe cuál le sirve para crear la figura que quiere. ¿Cuál opción le sirve a Zelenne para crear el pentágono que desea para su piso? ¿Por qué con los otros triángulos no se puede crear el pentágono? ¿Qué características tiene el triángulo que permite construir el pentágono?



Opción 1 – Opción 2 – Opción 3

Observamos que el enunciado propuesto por Cruz cumple con tener un título sugestivo y tiene preguntas que llevan a los estudiantes a decir y hacer algo. Sin embargo, en la situación planteada pueden considerarse diferentes objetos geométricos tales como la cometa si usan más de tres puntos de referencia o un triángulo no isósceles. Por lo tanto, la tarea no se centraría en el triángulo isósceles. Es por ello por lo que planteamos una nueva situación, la cual se asocia a los aprendizajes esperados con la tarea. En ella buscamos que se llegue a la conceptualización del triángulo isósceles a través de la identificación de propiedades de este y la diferenciación con otros tipos de triángulos.

Descripción de la tarea. En la información que tenemos de Cruz no encontramos información respecto a la descripción. Por ello no podemos realizar un análisis didáctico de este aspecto. En la Tabla 4.39 realizamos una propuesta de descripción para la Tarea 6.

Tabla 4.39

Tarea 6 – Nuestra propuesta de descripción de la tarea

Nuestra propuesta
Se les entrega a los estudiantes 15 triángulos (5 equiláteros, 5 escalenos y 5 isósceles) con los cuales deben intentar construir un pentágono regular. Cuando los estudiantes identifiquen que el pentágono regular solo se puede construir con triángulos isósceles deberán, a través de la medición, identificar las características que tiene el triángulo. Al medir pueden encontrar dos propiedades. La primera es que dos lados del triángulo deben ser congruentes. La segunda, es que los ángulos opuestos a los lados congruentes sean congruentes. La primera propiedad será usada para definir el objeto geométrico y la segunda quedará como propiedad de este.

Requisitos. En los documentos que tenemos de Cruz, no encontramos los requisitos que se necesitan para abordar la tarea. Por esto no podemos realizar un análisis didáctico de este aspecto. En la Tabla 4.40 damos a conocer nuestra propuesta de requisitos.

Tabla 4.40

Tarea 6 – Nuestra propuesta de requisitos

Nuestra propuesta
Lenguaje matemático: vértice, segmento o lado, ángulo, medida igual, segmentos congruentes, triángulo, pentágono y polígono regular. **Destrezas:** saber usar la regla y el transportador. **Conocimientos previos:** tener una imagen de los objetos matemáticos a tratar (triángulo y pentágono regular), tener una noción de yuxtaponer y solapar.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En los documentos entregados por Cruz encontramos información sobre los procesos cognitivos geométricos que se favorecen. Lo presentado por el autor está en la columna izquierda de la Tabla 4.41. En la columna derecha se encuentra el análisis que hacemos de cada proceso presentado por Cruz. En la parte inferior de la tabla damos a conocer nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.41

Tarea 6 – Procesos planteados por el autor, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización “Se apoya en el principio de ver más allá de lo que se ve, pues se da cuando los estudiantes logran identificar que la forma de la nariz es un triángulo isósceles” (Cruz).	Consideramos que el principio que el autor menciona no tiene relevancia en la tarea. Este es usado principalmente cuando se quieren encontrar propiedades de una figura que no se ven a simple vista.
Representación “Se desarrolla cuando los estudiantes modelan la nariz mediante una figura geométrica con ayuda de instrumentos de medida. Además, al realizar la construcción en GeoGebra los estudiantes pueden ver con facilidad la equidistancia del vértice que comparten los segmentos congruentes” (Cruz).	Observamos que sí se lleva a cabo el proceso de representación dado que los estudiantes intentan construir el triángulo isósceles con ayuda de instrumentos de medida. Sin embargo, al referirse a la equidistancia, el autor no es claro en los puntos que equidistan.
Conceptualización “Se lleva a cabo al establecer semejanzas y diferencias entre representaciones y elaborar un conjunto de propiedades necesarias y suficientes para determinar el objeto” (Cruz).	Sobre el establecimiento de semejanzas y diferencias, la tarea no incluye el uso de otros tipos de triángulos y por ende no se puede promover esta comparación. En cuanto a la identificación de propiedades necesarias y suficientes creemos que esta sí es la actividad matemática central de la tarea que propone el autor. Es necesaria para llegar a definir el objeto geométrico.
Argumentación “Se da por medio de indagaciones hacia el que hacer de los estudiantes en cuanto al uso de las herramientas del software” (Cruz).	No estamos de acuerdo con lo que propone Cruz para este proceso, pues él se refiere a justificar el por qué el uso de GeoGebra más no a argumentar las propiedades que se descubren.
Nuestra propuesta	
Para nuestra propuesta de tarea, consideramos que esta apoya el desarrollo de los siguientes procesos: ***Visualización:*** este proceso se favorece en el Nivel 2 ya que los estudiantes identifican las propiedades de los lados y ángulos de cada triángulo; es decir, observan si son congruentes o no. Además, evidencian que con el triángulo isósceles es con el único con el que se puede construir el pentágono regular, porque los ángulos que forman los lados del pentágono deben ser congruentes y la suma de las medidas de los ángulos con vértice en el centro del pentágono debe ser 360 grados. También se trabaja el principio “dudar de lo que se ve”, ya que los estudiantes pueden afirmar que con todos los triángulos se puede construir el polígono regular, pero al explorar con el material se dan cuenta de que esto no es correcto.	

Conceptualización: este proceso se desarrolla cuando los estudiantes elaboran el listado de propiedades del triángulo isósceles. Se aporta a la construcción de la definición del concepto del triángulo isósceles y la formulación de la propiedad de la congruencia de dos ángulos. ***Conjeturación:*** este proceso se desarrolla cuando los estudiantes realizan la exploración con los tres tipos de triángulos. Ellos descubren que solo uno de ellos funciona para crear el pentágono regular y que este triángulo cumple con ciertas propiedades las cuales también se les pide descubrir. De aquí surge una conjetura basada en empirismo ingenuo, dado que solo se les está presentando una representación particular de este tipo de triángulo.

Materiales y recursos. En los documentos que tenemos de Cruz encontramos los recursos propuestos para la tarea. Estos, junto con nuestra propuesta alternativa, se encuentran en la Tabla 4.42.

Tabla 4.42

Tarea 6 – Materiales y recursos planteados por el autor y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
"Hoja de trabajo impresa, lápiz y borrador, dos archivos de GeoGebra en los cuales los estudiantes podrán realizar construcciones sobre algunas imágenes que se encuentran allí y un archivo de video, previamente descargado de la plataforma YouTube" (Cruz).	***Materiales:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. - Triángulos (5 equiláteros, 5 escalenos y 5 isósceles):se sugiere que estén hechos en un material resistente (por ejemplo, cartón paja) ya que serán manipulados por los estudiantes cuando intenten dar respuesta al interrogante presentado en el enunciado. Los triángulos isósceles deben tener la medida de los ángulos de la siguiente manera 72°,54° y 54°. ***Recursos:*** - Transportador y regla graduada: Para que los estudiantes midan los segmentos y ángulos.

Respecto a lo que el autor propone, no evidenciamos una diferencia entre material y recurso. Tampoco observamos una explicación del uso de algunos recursos en la tarea. Por ende, en nuestra propuesta, consideramos y describimos los materiales y recursos necesarios para poder abordar la tarea. Además, damos una recomendación respecto al material con el cual se deben construir los triángulos y las medidas de los ángulos que debe tener el triángulo isósceles, pues si las medidas son diferentes no se podrá construir el pentágono.

Identificación de la Tarea 7.

Tabla 4.43

Identificación de la Tarea 7

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Traslación en el plano	Hernández A	Leonor Camargo	2020-1

Análisis de la Tarea 7.

Aprendizajes esperados. En la planeación de clase de Hernández hallamos cuatro enunciados. Cada uno de estos tienen un aprendizaje esperado diferente. Decidimos analizar el aprendizaje esperado que se encuentra en la columna izquierda de la Tabla 4.44, dado que este es en el que la autora hace más énfasis y es en el que aparecen los conceptos que quiere que los estudiantes logren comprender. Por otro lado, en la columna derecha, damos a conocer nuestra propuesta alternativa.

Tabla 4.44

Tarea 7 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	**Nuestra propuesta**
"Lograr que el estudiante explore y comprenda el significado al concepto de traslación de una figura" (Hernández).	Sugerir una definición para el movimiento de traslación en el plano teniendo en cuenta la forma, el tamaño y la posición relativa de un personaje del juego Pacman en las posición inicial y final.

Podemos observar que el aprendizaje sugerido por la autora incluye el objeto matemático a trabajar y también es claro qué se espera que los estudiantes logren comprender. Sin embargo, no se puede identificar cómo se espera que los estudiantes logren hacerlo, ya que solo se menciona que se realiza una exploración, pero no se especifica de qué. Nuestra propuesta está encaminada a que los estudiantes construyan un significado de la traslación en el plano.

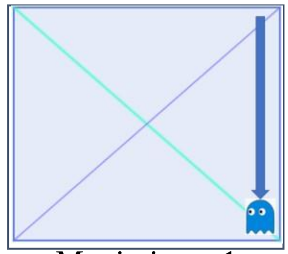
Enunciado. La autora presenta enunciados de varias tareas. Decidimos tomar el que se presenta en la parte superior de la Tabla 4.45, porque en este se incluye la definición de traslación de una figura, siendo este el tema central de la tarea. En la parte inferior de la tabla aparece nuestra propuesta.

Tabla 4.45

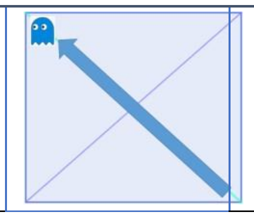
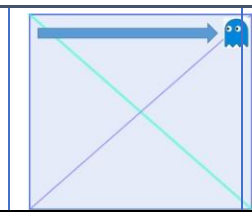
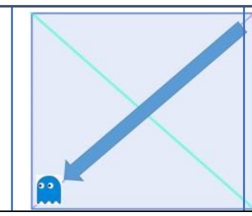
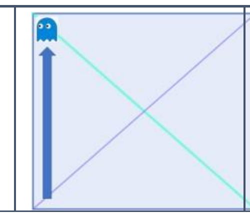
Tarea 7 – Enunciado planteado por Hernández y nuestra propuesta

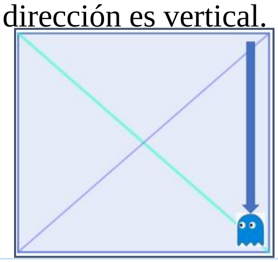
Enunciado planteado por Hernández

La traslación es un movimiento de deslizamiento que está definido por un vector directriz y este indica el sentido, la dirección y la magnitud.

El sentido	Indica hacia qué lado de la recta que determina la dirección del vector directriz se tiene que mover la figura tomando un punto de referencia.
Ejemplo, movimiento uno.	El sentido del movimiento uno es hacia abajo y se indica con la punta de una flecha, como se muestra en la siguiente imagen:  Movimiento 1

Indica los sentidos para los siguientes movimientos

Movimientos			
			
Movimiento 2	Movimiento 3	Movimiento 4	Movimiento 5

Dirección	Indica cuál es la inclinación del vector con respecto a una línea (recta) horizontal.
Ejemplo movimiento uno	El movimiento uno la dirección es vertical. 
Movimiento dos	El movimiento dos, la dirección (inclinación) es oblicua con 45° dado que la figura de la hoja corresponde a un cuadrado y una de las propiedades de los cuadrados es que sus ángulos son rectos. Es decir, la medida de un ángulo recto es de y al hacer el doblez en la hoja se obtuvieron dos ángulos y sus medidas es de .

¿Cuáles son direcciones para los otros movimientos?

Magnitud	Indica la distancia que tiene que trasladarse una figura.

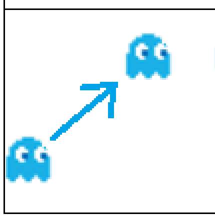
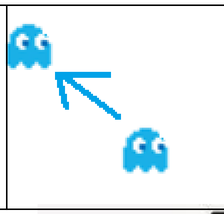
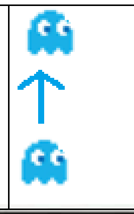
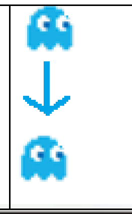
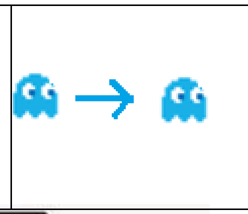
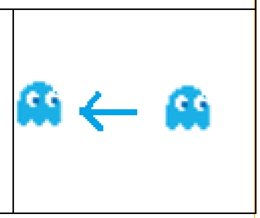
Mide la distancia de cada movimiento realizado e indícalo en la siguiente tabla.
Nota: La distancia de cada movimiento indica la magnitud del vector directriz**.**

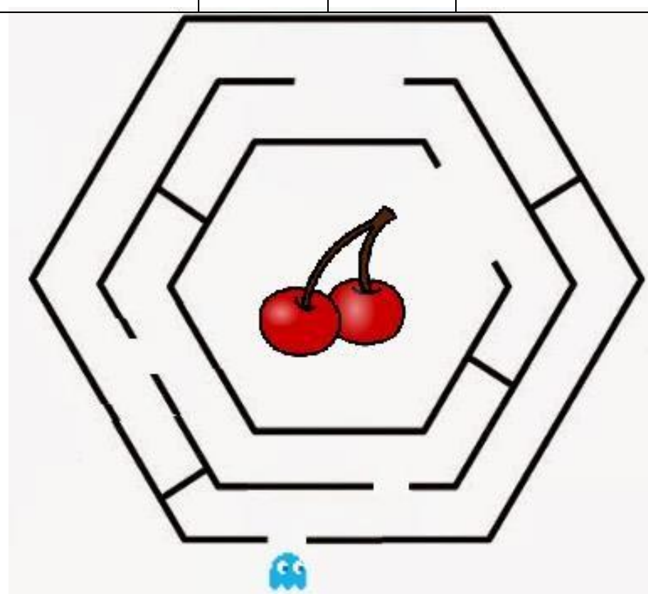
No. Movimiento	Distancia
1	
2	
3	
4	
5	

Nuestra propuesta

Trasladando a Inky

Inky se encuentra entrenando para mejorar su velocidad y con esto lograr atrapar a Pacman. En su entrenamiento para ser más veloz, encontró el laberinto donde se encuentra una fruta. Ayuda a Inky a llegar a la fruta y describe los movimientos que realizaste. Además, contesta las siguientes preguntas: Al realizar los movimientos ¿Inky cambia de tamaño? ¿Inky realiza alguna rotación?
Ten en cuenta que Inky puede realizar los siguientes movimientos:

Movimientos					
					



El enunciado propuesto por la autora nos parece llamativo, pues está dentro de un contexto de video juego que los estudiantes pueden conocer. Sin embargo, creemos que dar la definición del objeto matemático y sus características no es adecuado, pues se les está presentando a los estudiantes el contenido matemático como producto acabado, limitando el fortalecimiento de los procesos propios de la actividad geométrica (Ballesteros y Gamboa, 2009).

Además, nos parece que la estructura del enunciado que propone Hernández es más de una guía que de un problema. Por ende, proponemos una situación problema ligada al juego y planteamosalgunas preguntas que les ayudarán a los estudiantes en la construcción de la definición de traslación.

Descripción de la tarea. Al revisar la propuesta de tarea no encontramos la descripción. Por eso no pudimos realizar un análisis de este aspecto. Teniendo esto en cuenta y nuestrapropuesta de enunciado, presentamos la descripción que se muestra en la Tabla 4.46.

Tabla 4.46

Tarea 7 – Nuestra propuesta de descripción de la tarea

Nuestra propuesta
Se presenta un personaje del juego de Pacman llamado Inky, el cual realiza algunos movimientos dentro de un laberinto, como se muestra en el enunciado. Se busca que los estudiantes describan los movimientos teniendo en cuenta el sentido, la dirección y la magnitud de cada uno de ellos. Si los estudiantes no tienen el lenguaje para describir el movimiento que realiza Inky, el docente introducirá los términos dirección, sentido y magnitud. Al realizar las descripciones podrán observar que el personaje no cambia de tamaño, forma y posición relativa. Con ello podrán generar una definición de traslación en el plano.

Requisitos. Este aspecto lo localizamos dentro de la planeación de clase de Hernández. La información encontrada y nuestra propuesta se muestran en la Tabla 4.47.

Tabla 4.47

Tarea 7 – Requisitos planteados por la autora y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Nuestra propuesta
“El cuadrado y sus propiedades” (Hernández).	**Lenguaje matemático:** orientación espacial: arriba, abajo, derecha, izquierda, diagonal abajo izquierda, diagonal arriba izquierda, diagonal abajo derecha, diagonal arriba derecha, deslizarse y girar. **Conocimientos previos:** interpretar qué es la posición relativa de una figura.

Consideramos que para la tarea que propone Hernández, no se requiere que los estudiantes conozcan qué es un cuadrado. Nosotros consideramos requisitos que tienen que ver con el movimiento. No con el marco en donde se mueve Inky.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En los documentos que tenemos de Hernández encontramos información sobre tres procesos cognitivos. En la Tabla 4.48 damos a conocer la propuesta de la autora, nuestro análisis y nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.48

Tarea 7 – Procesos planteados por la autora, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización "una de las habilidades que se busca desarrollar en el estudiante, en cuanto a la visualización, es la conservación de la percepción, debido que el estudiante debe reconocer que una figura al trasladarse mantiene su forma, tamaño y/o características." Además, "el estudiante está en la capacidad de tener memoria visual al recordar las características de la figura presentada en el punto inicial y en punto final de la traslación" (Hernández).	Coincidimos que esta habilidad se trabaja en la tarea. Aunque los estudiantes no dejan de ver la imagen, sí pueden identificar que esta no cambia de tamaño, forma y posición relativa sino solo cambia su lugar en el plano, mediante deslizamientos en línea recta.
Representación "El proceso de representación resulta ser evidente cuando el estudiante indica de qué manera hace el movimiento en la traslación" (Hernández).	La autora tiene una concepción errónea de lo que es el proceso de representar. El solo indicar un movimiento no es evidencia del desarrollo de la representación.
Argumentación "La argumentación se verá impulsada cuando el estudiante explique y describa el movimiento de una figura mediante las características del vector directriz" (Hernández).	Consideramos que no se moviliza este proceso dentro de la tarea, pues los estudiantes no deben sustentar una afirmación.
Nuestra propuesta	
Teniendo en cuenta lo anterior y nuestra propuesta de enunciado y de aprendizaje esperado, consideramos que en esta tarea se fortalecerán los siguientes procesos cognitivos. ***Visualización:*** la tarea contribuye a este proceso al trabajar con imágenes dinámicas. Los estudiantes construyen una imagen mental del desplazamiento que hace el fantasma dentro del laberinto. Se trabaja la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio ya que los estudiantes, al momento de realizar cada movimiento, deben enlazar la posición del fantasma con un punto referencia el cual está determinado por el lugar al cual se quiere dirigir. ***Conjeturación:*** la tarea impulsa este proceso al momento en que los estudiantes construyen un enunciado de carácter general sobre la definición de traslación, de acuerdo con la exploración realizada con el fantasma. ***Conceptualización:*** la tarea moviliza este proceso cuando los estudiantes elaboran el significado de translación. Esto teniendo en cuenta las propiedades necesarias y suficientes para definir el movimiento en el plano.	

Materiales y recursos. En la planeación de clase de Hernández encontramos los recursosque se proponen para el desarrollo de la tarea. Estos se encuentran en la Tabla 4.49, junto a nuestra propuesta.

Tabla 4.49

Tarea 7 – Materiales y recursos planteados por la autora y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
"Figuras en foami de los fantasmas, estos serán movidos por el estudiante para realizar la traslación de este personaje. La regla para que el estudiante mida la distancia de las posiciones en donde se traslade la figura. La guía de trabajo, la cual tiene explicita la tarea planteada" (Hernández).	**Material:** - Hoja con el enunciado de la tarea. - Representaciones en foami del fantasma para que los estudiantes reproduzcan el movimiento, antes de dibujar el recorrido. **Recursos:** - Lápiz: para dibujar el recorrido que el fantasma hace en el laberinto.

De lo anterior podemos decir que la autora no hace una diferencia entre material y recurso. Además, no hace mención del cuadrado que usa en la tarea y que es esencial para el desarrollo de esta. Dado que nuestra propuesta es distinta, presentamos los materiales y recursos que se deben tener a la hora de aplicar la tarea.

Identificación de la Tarea 8.

Tabla 4.50

Identificación de la Tarea 8

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Desigualdad triangular	Alonso. D, y Devia. J.	Leonor Camargo	2020-2

Análisis de la Tarea 8.

Aprendizajes esperados. Alonso y Devia en la propuesta de tarea y la planeación de clase proponen un aprendizaje esperado. Lo mostramos en la Tabla 4.51, junto a nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.51

Tarea 8 – Aprendizajes esperados: Información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Explorar en un archivo de GeoGebra las relaciones de orden entre las longitudes de segmentos para conformar un triángulo y así descubrir la desigualdad triangular" (Alonso y Devia).	Descubrir y conjeturar la desigualdad triangular, mediante la exploración en GeoGebra de las relaciones entre las medidas de los lados de triángulos, consignadas en una tabla.

Encontramos que el aprendizaje esperado cuenta con el objeto matemático que se quiere trabajar en la clase. Además, podemos identificar qué es lo que se espera que los estudiantes realicen y cómo se espera que lo logren. En nuestra propuesta tomamos la idea de los autores, pero hicimos un cambio en su estructura. Esto debido a que deseamos que sea entendible, para el lector, qué es lo que se quiere lograr con esta tarea y qué papel juegan la representación geométrica de un triángulo cuyos lados se pueden modificar para que sus longitudes varíen y la tabla asociada. Además, consideramos relevante que los estudiantes construyan un enunciado donde expresen lo encontrado en la exploración.

Enunciado. Al analizar los documentos de Alonso y Devia, hallamos el enunciado de la propuesta de tarea. Este lo presentamos en la Tabla 4.52 junto con nuestra propuesta.

Tabla 4.52

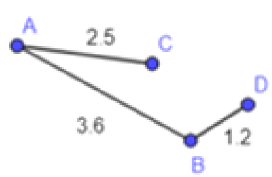
Tarea 8 – Enunciado planteado por Alonso y Devia y nuestra propuesta

Enunciado planteado por Alonzo y Devia

¿Será posible construir un triángulo con cualquier trio de segmentos?

En la pantalla de GeoGebra observas tres segmentos: $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Sus longitudes varían. Se quiere conformar un triángulo con estos tres segmentos.

1. Mediante el arrastre de los puntos busca una relación que deben cumplir las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ para que sea posible construir un triángulo.
2. Ten en cuenta la tabla que aparece al lado derecho de la pantalla, pues será útil para observar la medida de las longitudes de los segmentos a medida que vas arrastrando.
3. Observando la tabla, ¿Qué relación deben tener las longitudes de los segmentos para que se forme un triángulo?



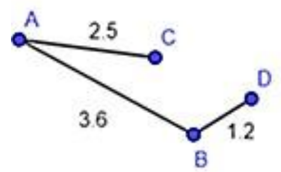
	A	B	C	D
1	AB	AC	BD	AC + BD
2	3.6	2.5	1.4	3.9
3	3.6	2.5	1.4	3.9
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

4. Cuando logres conformar el triángulo, ¿Ves una relación de orden específica con respecto a la relación de las longitudes de los segmentos? ¿Por qué crees que pasa eso?

Nuestra propuesta

¿Será posible construir un triángulo con cualquier trío de segmentos?

En la pantalla de GeoGebra observas tres segmentos: AB, AC y BD, sus longitudes varían. Queremos construir un ΔABC con estos tres segmentos, haciendo coincidir los puntos C y D.



	A	B	C	D
1	AB	AC	BD	AC + BD
2	3.6	2.5	1.4	3.9
3	3.6	2.5	1.4	3.9
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Busca una relación que deben cumplir las longitudes de los segmentos para que sea posible construir un triángulo. La tabla que aparece al lado derecho de la pantalla se genera automáticamente con las longitudes de los segmentos.
Cuando logres conformar el triángulo, ¿Ves una relación entre las longitudes de los segmentos?

El enunciado propuesto por Alonso y Devia tiene un título sugestivo. También, consideramos interesante la situación problema planteada, pues presenta un reto para los estudiantes. Sin embargo, los autores no aclaran la relación que hay entre la tabla y las longitudes de los segmentos. Tampoco mencionan que los puntos ~~y~~ deben coincidir para poder construir el triángulo. Además, no dicen cuál es el triángulo que se debe construir. Por lo anterior, en nuestra propuesta consideramos modificar la redacción del enunciado y agregar información para que los estudiantes interpreten mejor la situación.

Descripción de la tarea. La propuesta de tarea de Alonso y Devia cuenta con la descripción. En la Tabla 4.53 damos a conocer lo que plantean los autores y nuestra propuesta.

Tabla 4.53

Tarea 8 – Descripción planteada por los autores y nuestra propuesta

Descripción planteada	Nuestra propuesta
La tarea consiste en la presentación de un archivo GeoGebra a los estudiantes, en el cual uno de los segmentos ($\overline{AB}$) es un lado de un triángulo. De esta manera, deberán arrastrar los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ para que sea posible construir un triángulo. Se espera que descubran la relación que existe entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ para determinar el triángulo y con ello, percatarse de la propiedad de la desigualdad triangular. Dicho esto, se espera con la tarea que se den procesos como la visualización, representación y conceptualización a través del arrastre de los puntos, pues esto les permitirá encontrar la relación necesaria que se está planteando descubrir en la tarea y así	Se presenta a los estudiantes un archivo de GeoGebra en donde aparecen tres segmentos AB, AC y BD. Estos soncon los que se desea construir el triángulo. Para construirlo, deben arrastrar los puntos C y D, de tal manera que uno quede sobrepuesto al otro. Adicionalmente, en el archivo se presenta una tabla en donde aparece automáticamente la longitud de los segmentos y la suma de la medida de dos de ellos. Con ayuda de este archivo

desarrollen un argumento con la ayuda de lo que se está consignando en la tabla.	podrán formular la conjeturaacerca de la desigualdad triangular.

Observamos que los autores incluyen en la descripción los procesos geométricos que esperan fortalecer en clase, lo cual no hace parte de este aspecto. Además, consideramos que se comete un error al decir que lo que se arrastra son los segmentos y no los puntos. En consecuencia, nuestra propuesta corrige los errores antes mencionados. También, da una breve explicación de cómo se espera que los estudiantes puedan llegar a la conjetura haciendo uso de las herramientas del archivo.

Requisitos. En la propuesta de tarea y en la planeación de clase de Alonso y Devia hallamos los requisitos. En la Tabla 4.54 presentamos lo encontrado y nuestra propuesta.

Tabla 4.54

Tarea 8 – Requisitos planteados por los autores y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Nuestra propuesta
"Los estudiantes deben saber: ¿Qué es triángulo? ¿Cuáles son los tipos de triángulos? ¿Qué es segmento? ¿Qué es son las relaciones de orden?" (Alonso y Devia).	**Lenguaje matemático:** triángulo, segmentos, vértice, punto, longitud y relación de orden. **Destrezas:** habilidad para el arrastre de puntos en GeoGebra. **Conocimientos previos:** elementos constitutivos del triángulo y orden de los números naturales.

Sobre los requisitos propuestos por Alonso y Devia, creemos que no es necesario que los estudiantes deban explicar qué es una relación de orden. Con el conocimiento que tienen acerca del orden de los números racionales pueden llevar a cabo la tarea. Tampoco consideramos que el conocer sobre los tipos de triángulo y sobre segmento no son relevantes para el desarrollo de la tarea, pues la tarea no requiere usar estos conceptos. Por lo anterior, en nuestra propuesta sugerimos que los estudiantes conozcan el lenguaje matemático para referirse a los objetos matemáticos que visualizan y habilidades motrices al usar el arrastre GeoGebra.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. Alonso y Devia, en su planeación de clase, consideran los cinco procesos cognitivos geométricos que incluimos en la columna izquierda de la Tabla 4.55. En la columna derecha, se encuentra el análisis que hacemos de cada uno de ellos. En la parte inferior damos a conocer nuestra propuesta.

Tabla 4.55

Tarea 8 – Procesos plateados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	**Análisis**
Visualización "Los estudiantes mediante la percepción visual deberán percatarse de que no se puede construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera. Además, mediante la visualización podrán comprobar las condiciones necesarias para construir un triángulo de acuerdo con la representación que ellos conocen" (Alonso y Devia).	Consideramos que los autores se refieren a la percepción visual global. Sin embargo, la propuesta de conceptualización de este nivel es errada puesto que en este se ven las figuras como un todo y algunas veces se asocian a objetos físicos. Esto no se presenta en esta tarea. Asimismo, los autores consideran que la visualización es una manera de comprobar que se cumple la propiedad de desigualdad triangular. Pensamos que no es lo que se hace en esta tarea, pues lo que hacen realmente los estudiantes es intentar revelar las relaciones numéricas que no son evidentes a simple vista.
Representación "Es un proceso que se puede dar o no respecto a la desigualdad triangular, es decir, que los estudiantes puedan desarrollar un significado propio sobre lo que representan" (Alonso y Devia).	Consideramos que lo propuesto por Alonso y Devia no es correcto, pues dan una explicación diciendo que se promueve un significado lo que no corresponde a este proceso. Generar un significado va ligado al proceso de conceptualización.
Conceptualización "Se debe tener en cuenta que los procesos de visualización, representación y conjeturación refuerzan los conceptos de desigualdad relacionados con objetos geométricos y la relación entre longitudes de los segmentos" (Alonso y Devia).	Aunque los procesos nombrados sean importantes, no es claro cómo se logrará fortalecer el proceso de conceptualización. Los autores no nombran un mecanismo de construcción de algún concepto.
Conjeturación "Se desarrolla cuando los estudiantes realizan la exploración en GeoGebra y hacen uso de los datos de la tabla para establecer la desigualdad triangular" (Alonso y Devia).	No se nombra ninguna estrategia de las que hacemos mención en el marco de referencia. Sin embargo, estamos de acuerdo en que, con la exploración y con el uso de los datos de la tabla, se puede llegar a formular la conjetura correspondiente a la desigualdad triangular.
Argumentación "Se desarrolla cuando de manera inductiva, identifican los elementos que componen el argumento: los datos, la aserción y la garantía" (Alonso y Devia).	Consideramos que los autores se refieren a un argumento simple. Sin embargo, no es claro a qué argumento específico se refieren.
Nuestra propuesta	
Aunque los autores de la tarea proponen que se pueden movilizar los cinco procesos, según nuestro análisis consideramos que se desarrollan principalmente tres de ellos.	

Visualización: la tarea contribuye al fortalecimiento de la aprehensión discursiva, pues se hace un nexo entre una relación simbólica numérica con una representación gráfica. A diferencia de lo que propone Duval (1998) la representación no está acompañada de un enunciado, sino de una tabla. Además, se trabaja el principio “ver más allá de lo que se ve”, ya que los estudiantes estudian el triángulo que forman e intentan revelar la desigualdad triangular, la cual no se ve a simple vista.
Conjeturación: la tarea fortalece este proceso, pues se busca que los estudiantes realicen una conjetura a partir de la exploración que realizan de diversas representaciones.
Argumentación: la tarea impulsa este proceso cuando los estudiantes realizan las justificaciones de la veracidad de su conjetura sobre la desigualdad triangular y proponen un argumento.

Materiales y recursos. En la planeación de clase pudimos encontrar que Alonso y Devia proponen los materiales y recursos que se muestran en la columna izquierda de la Tabla 4.56. En la columna derecha, presentamos nuestra propuesta alternativa.

Tabla 4.56

Tarea 8 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
“GeoGebra: usando este software, se pretende que los estudiantes descubran la propiedad propuesta mediante la tarea principal” (Alonso y Devia).	***Materiales:*** - Hoja donde se encuentra el enunciado de la tarea. - Archivo de GeoGebra en el cual aparece la construcción y la tabla donde los estudiantes realizan la exploración.

Consideramos que lo propuesto por los autores no está completo, pues no se hace la diferencia entre material y recurso. Por consiguiente, en nuestra propuesta mostramos que el enunciado y el archivo de GeoGebra son materiales.

Identificación de la Tarea 9

Tabla 4.57

Identificación de la Tarea 9

<table>
<tr><th>Tema</th><th>Autores</th><th>Profesor orientador</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (LAL)</td><td>Durán. A y Rodríguez. B</td><td rowspan="2">Leonor Camargo</td><td rowspan="2">2020-2</td></tr>
<tr><td>Muños. O y Silva. J</td></tr>
</table>

Análisis de la Tarea 9.

Aprendizajes esperados. En las planeaciones de clase de las dos parejas de autores, que tenemos en los archivos, encontramos información sobre este aspecto. Lo hallado lo presentamosen la Tabla 4.58 junto con nuestra propuesta.

Tabla 4.58

Tarea 9 – Aprendizajes esperados: Información encontrada y nuestra propuesta

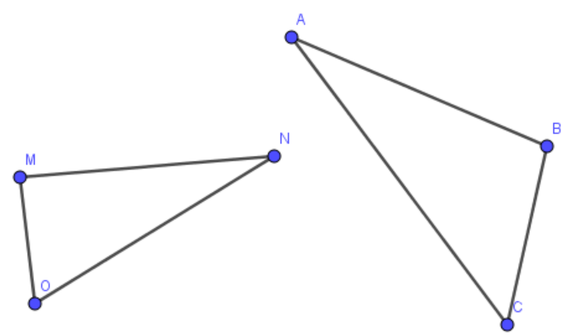
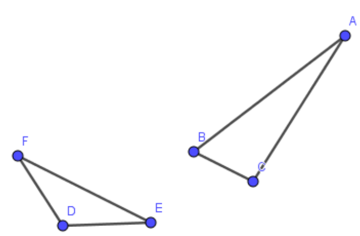
Información encontrada	Nuestra propuesta
"Mediante el uso de GeoGebra, se pretende que los estudiantes realicen una exploración con el fin de descubrir el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado. Además, los estudiantes deben crear un argumento inductivo para justificar la propiedad encontrada" (Durán y Rodríguez). "Mediante el uso de un software de geometría dinámica, GeoGebra, se propone que los estudiantes, a través de una exploración guiada, desarrollen un razonamiento inductivo, que les permita caracterizar el criterio de congruencia L.A.L para cualquier par de triángulos" (Muños y Silva).	Descubrir y conjeturar el criterio de congruencia LAL al realizar la construcción en papel, con regla graduada y transportador, de un triángulo congruente a otro, a partir del análisis de casos.

Podemos evidenciar que ambas parejas de autores proponen hacer uso de GeoGebra para llevar a cabo una exploración, de tal manera que los estudiantes consigan desarrollar un argumento inductivo. Creemos que el aprendizaje que cada pareja formula cuenta con la mayoría de los elementos que consideramos para este aspecto. Sin embargo, no inician con un verbo y no mencionan de qué representación se parte, es decir, qué condiciones dadas se tienen para hacer la construcción de un triángulo. Además, las parejas de autores mencionan que los estudiantes deben realizar un argumento. Pero no es claro qué es lo que deben justificar, pues no piden proponer un enunciado o conjetura para que este proceso se lleve a cabo. Por ello, en nuestra propuesta decidimos formular un aprendizaje esperado donde hacemos énfasis en el descubrimiento e interpretación del criterio LAL. Además, hacemos un cambio en el recurso a usar para solucionar la tarea. Creemos que es problemático usar GeoGebra porque cuando se construye el ángulo en este programa automáticamente se genera un punto, y este puede ser tomado por los estudiantes como el punto que necesitan para construir el triángulo congruente. Esto puede ocasionar que los estudiantes tengan dificultad en encontrar el punto que verdaderamente necesitan para obtener el triángulo congruente. Por eso proponemos el uso de instrumentos de trazo.

Enunciado. En la documentación que recolectamos de ambas parejas de autores, encontramos los enunciados, que presentamos en la Tabla 4.59. En la parte inferior de esta mostramos nuestra propuesta.

Tabla 4.59

Tarea 9 – Enunciados planteados por los autores y nuestra propuesta

Enunciado planteado por Durán y Rodríguez
Explora y descubre un criterio de congruencia **Definición:** Un criterio congruencia de triángulos es un conjunto de condiciones mínimas necesarias para garantizar que dos triángulos son congruentes. Mediante el arrastre de los vértices del triángulo, explora si: 1) ¿Es suficiente que un lado del triángulo ABC sea congruente a un lado del triángulo MNO para que los triángulos sean congruentes? Justifica. 2) Para que los triángulos sean congruentes, ¿es suficiente que tengan un lado y un ángulo congruentes?, ¿Por qué? 3) Para que los triángulos sean congruentes, ¿es suficiente que tengan dos lados y un ángulo congruentes?, ¿Por qué? 
Enunciado planteado por Muños y Silva
Pasito a pasito, suave suavecito A partir de la definición de triángulos congruentes vamos a realizar la siguiente exploración Dados los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta EFG$  1- ¿Los dos triángulos te parecen congruentes? ¿Por qué? 2- Con la herramienta distancia o longitud del software, mide un segmento de los tres que determinan cada uno de los triángulos, el que desees. A este cámbiale el color (por azul o cualquiera que desees) y mueve los vértices del triángulo, que se encuentra al lado izquierdo de la pantalla hasta que tenga la misma medida del otro segmento. ¿Los triángulos ya son congruentes? 3- Parece que no, ¿verdad? Pues bien, ahora midamos uno de los ángulos del triángulo, teniendo en cuenta que el lado del triángulo al que le cambiaste el color, debe ser lado del ángulo que elijas. Como se observa los ángulos que has determinado no tienen la misma medida. Arrastra los puntos y trata de que esta medida sea lo más parecida posible. ¿Te parece que ya los triángulos son iguales? 4- Aun no lo logramos ¿verdad? Pero creo que ya estamos bastante cerca, ¿y si medimos el otro segmento que determina el ángulo que ya mediste? Cambiemos el color de estos, por naranja ¿Los triángulos son iguales? Ahora que ya llegamos hasta acá no nos rindamos. Hagamos que los dos segmentos de color naranja tengan la misma medida. Ten

cuidado con las otras medidas que ya tomaste, no debes perder su igualdad.

5- Y ahora qué dices ¿los triángulos son congruentes o no?

6- Comprobemos lo descubierto: muy fácilmente sin dañar nuestro ejercicio. Tomemos una hoja de papel mantequilla y ponla encima de la pantalla del computador para calcar uno de los triángulos, después pon este que tienes en la hoja encima del que no calcaste en la pantalla y dime ¿los triángulos son congruentes?

7- Acabas de trabajar de una manera muy similar a como lo hizo el gran geómetra Euclides, en el año 300 a. C, (Bell, 1985) y descubriste el principal criterio de congruencia para cualquier par de triángulos, pero nos falta algo, ¡ya se, un nombre! ¿Cómo crees que podríamos nómbralo?

8- Si tenemos dos triángulos cualesquiera, y queremos determinar si estos son congruentes ¿Qué puedes afirmar en base al trabajo que has realizado?, siempre que se tengan dos triángulos basta con que dos lados y el ángulo que estos lados determinan sean congruentes entre sí, para afirmar que dichos triángulos son congruentes.

9- Escribe una frase que te permita resumir el criterio y que se pueda cumplir para cualquier par de triángulos.

Nuestra propuesta

Explora y descubre un criterio de congruencia

Teniendo en cuenta la información que se te presenta en la Figura 1, construye en una hoja un triángulo EFG congruente al triángulo ABC, a partir de un segmento EF cuya medida sea igual a la longitud del $\overline{AB}$ y el $\measuredangle E$ mida igual al $\measuredangle A$

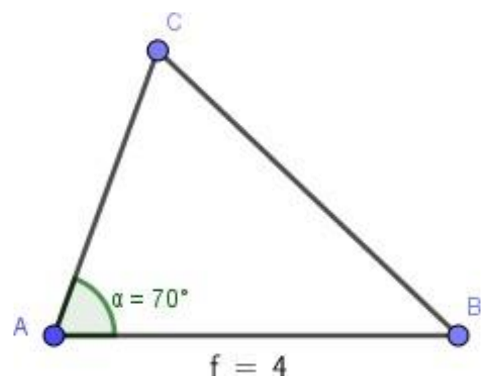


Figura 1

- Describe el procedimiento que realizaste para poder construir el triángulo EFG congruente al triángulo ABC.
- Formula una conjetura relacionada con la información que se necesita para construir un triángulo congruente a otro dado.

- Investiga si dos triángulos que tengan dos lados respectivamente correspondientes congruentes y un ángulo opuesto a uno de estos lados también congruente al correspondiente son congruentes.

Refiriéndonos al enunciado de Durán y Rodríguez, creemos que cuenta con un título llamativo para los estudiantes. También, el hacer uso de la enunciación del criterio de congruencia es un apoyo y un "abrebocas" de lo que los estudiantes deben realizar. Sin embargo, creemos que las preguntas que sugieren los autores no están en concordancia con la imagen que muestran, pues nunca la mencionan y pareciera que esta no tuviera que ver con lo que se interroga. Además, evidenciamos que los autores no controlan que el ángulo, que debe ser congruente, este comprendido entre los lados congruentes, Por otro lado, el enunciado propuesto por Muños y Silva cuenta con una serie de instrucciones que llevan al estudiante a explorar y argumentar inductivamente las características necesarias para el criterio que se está generando. Pero al ser tan dirigido el proceso creemos que esto no permite que los estudiantes descubran por sí mismos el hecho geométrico. También, consideramos que el título no es acorde, pues no indica qué se espera que los estudiantes realicen. En consecuencia, decidimos formular un nuevo enunciado intentando, con este, que los estudiantes puedan descubrir por su cuenta el criterio de congruencia LAL y se den cuenta que LLA no lo es.

Descripción de la tarea. En la propuesta de tarea de Durán- Rodríguez y Muños-Silva encontramos las descripciones. En la Tabla 4.60 presentamos lo encontrado, junto a nuestra propuesta.

Tabla 4.60

Tarea 9 – Descripciones planteadas por los autores y nuestra propuesta

Descripciones planteadas	Nuestra propuesta
"A partir del trabajo con geometría dinámica, los estudiantes deben descubrir el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado. Para ello se propone una construcción con dos triángulos, un triángulo A con todas sus medidas fijas y un triángulo B cuyas medidas se pueden modificar. El objetivo es que los estudiantes arrastren los vértices del triángulo B e identifiquen una a una las condiciones necesarias para que este sea congruente al triángulo A. Además, con preguntas orientadoras se pretende que los estudiantes argumenten porque se cumple esto" (Durán y Rodríguez).	Se desea que los estudiantes descubran e interpreten el criterio de congruencia LAL. Para esto, construyen un ΔEFG congruente al ΔABC a partir de dos medidas, una de longitud igual a la del $\overline{AB}$ y la otra de amplitud igual a la del $\measuredangle CAB$. Se espera que ellos midan el lado AC y la usen para construir el triángulo congruente. Sin embargo, se puede dar el caso en el que midan el $\overline{BC}$ y lo usen para obtener el triángulo congruente. El docente puede problematizar este procedimiento

"Por medio de esta tarea se pretende que el estudiante observe, analice y descubra a partir de dos triángulos que no son congruentes, el criterio de congruencia L.A.L para cualquier triangulo, el estudiante explorará por medio del arrastre guiado de las figuras dadas en el software hasta llegar a la congruencia de los triángulos sin necesidad de medir todos los lados y ángulos de los triángulos dados, siendo el docente una guía para que el niño construya el conocimiento" (Muños y Silva).	mostrando no ejemplos de triángulos no congruentes. Por otra parte, si miden el $\measuredangle ABC$, pueden llegar al criterio de congruencia ALA, el cual puede ser trabajado en la clase sin dejar de lado el criterio LAL. Por último, los estudiantes formulan un enunciado donde describen qué información se necesita para construir untriángulo congruente a otro dado.

Podemos decir que las descripciones que realizan Durán-Rodríguez y Muños-Silva son acordes con lo que plantean en el enunciado de la tarea y con los aprendizajes esperados que cada pareja de autores propone. Sin embargo, como nuestro aprendizaje y enunciado son diferentes a los de los autores, no hacemos uso de las descripciones que platean. En nuestra propuesta realizamos una explicación de lo que se espera que los estudiantes hagan, las posibles respuestas que se pueden recibir para solucionar la situación problema y una propuesta de actuación del docente ante esas respuestas.

Requisitos. Al revisar las planeaciones de clase de ambas parejas de autores observamos que cada una cuenta con los requisitos de la tarea. La información hallada se encuentra en la columna izquierda de la Tabla 4.61. Nuestra propuesta la incluimos en la columna derecha.

Tabla 4.61

Tarea 9 – Requisitos planteados por los autores y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Nuestra propuesta
"Características de triángulos congruentes (que todos los lados y ángulos sean congruentes)**"** (Durán y Rodríguez). "Segmento, ángulo, congruencia de segmentos y congruencia de ángulos" (Muños y Silva).	**Lenguaje matemático:** triángulo, segmento, longitud, ángulo y congruencia de segmentos y ángulos. **Destrezas:** usar de manera adecuada la regla graduada y el transportador. **Conocimientos previos:** conocer cuáles son las partes constitutivas del triángulo e interpretar cuando dos triángulos son congruentes.

Estamos de acuerdo en los requisitos que plantean las dos parejas de autores. Consideramos que estos términos y elementos geométricos son necesarios para el desarrollo de la tarea. Por ello, en nuestra propuesta tomamos los requisitos de cada pareja y los agrupamos de acuerdo con el lenguaje matemático que los estudiantes pueden usar, las destrezas y los conocimientos previos que son necesarios para realizar la tarea.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En las planeaciones de clase encontramos información sobre los procesos cognitivos. Durán y Rodríguez proponen cinco procesos mientras que Muños y Silva consideran tres procesos. En la Tabla 4.62, columna izquierda, presentamos lo hallado. En la columna derecha, mostramos nuestro análisis para cada proceso y en la parte inferior damos a conocer nuestra propuesta.

Tabla 4.62

Tarea 9 – Procesos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización "Se da a través de la observación de objetos de manera dinámica, teniendo en cuenta sus medidas, para que los estudiantes puedan apreciar visualmente los lados y ángulos congruentes que hay entre los dos triángulos" (Durán y Rodríguez).	Los autores consideran que la visualización se desarrolla al momento en que los estudiantes observan objetos de manera dinámica. Sin embargo, no mencionan el nivel al que hace referencia la tarea, las habilidades, los principios o las aprehensiones que pueden estar inmersos en ella.
Representación "Se favorece a través de la construcción de un triángulo congruente a otro, haciendo uso de las congruencias de algunos de sus elementos" (Durán y Rodríguez). "Se busca desarrollar el proceso matemático de la representación de figuras geométricas, en este caso "triángulos" en el software GeoGebra" (Muños y Silva).	Durán y Rodríguez mencionan que este proceso se lleva a cabo cuando los estudiantes construyen un triángulo congruente al dado. Por otra parte, Muños y Silva hacen referencia al instrumento que utilizarán para representar los triángulos, pero no especifican el tipo de representación que se está realizando.
Conceptualización "Se favorece al incentivar la comprensión de la definición de triángulos congruentes, del significado de criterio de congruencia y en particular, del criterio Lado-Ángulo-Lado" (Durán y Rodríguez).	Consideramos que es clave lo que dicen Durán y Rodríguez de comprender qué son triángulos congruentes. Sin embargo, este es un conocimiento previo para descubrir el criterio.
Conjeturación "Se incentiva a través de la exploración en geometría dinámica, para descubrir propiedades geométricas" (Durán y Rodríguez). "Después que los estudiantes estén seguros de que la propiedad funciona para cualquier par de triángulos se les pedirá que formulen una conjetura de la forma "si-entonces" que contenga las condiciones y conclusiones de lo que se trabajó en clase con el propósito que construyan la	Consideramos que lo mencionado por Durán y Rodríguez es acertado en cuanto a que la exploración hace parte de este proceso. Sin embargo, los autores no dicen cuál es el producto de esa exploración. Por otra parte, lo que plantean Muños y Silva es acorde con lo que nosotros consideramos para este proceso, pues mencionan que los estudiantes proponen

definición del criterio de congruencia L.A.L" (Muños y Silva).	un enunciado acerca de la relación encontrada. No obstante, los autores no mencionan en qué se basan los estudiantes para encontrar la relación.
Argumentación "Los estudiantes llegan a generar un argumento con los 3 elementos claves como lo son la aserción los datos y la garantía" (Durán y Rodríguez). "Se desarrolla a la hora en que el estudiante formule la conjetura. Se busca que el elemento de la argumentación que salga a la luz sea la aserción, ya que se evidenciará cuando el estudiante identifique las condiciones que debe poner en la conjetura para que lo que concluya sea verdadero. El argumento que se trabajará será el inductivo de tipo particular-general ya que el estudiante empezará analizando dos triángulos en particular para llegar a concluir el criterio de congruencia L.A.L que será lo general" (Muños y Silva).	En el caso de Durán y Rodríguez, estamos de acuerdo con que los estudiantes pueden formular un argumento con los tres elementos que nombran. Sin embargo, no hacen referencia al tipo de argumento que quieren que los estudiantes realicen. Por otra parte, estamos de acuerdo con Muños y Silva en que los estudiantes pueden realizar un argumento de tipo inductivo particular-general. Pasan de dar una caracterización de un par de triángulos a generalizar el criterio para todos los triángulos. No obstante, cuando se realiza un argumento inductivo no solo se obtiene la aserción, sino que también debería formularse la garantía.
Nuestra propuesta	
Teniendo en cuenta lo anterior y el enunciado que hemos propuesto, consideramos que los cuatro procesos más relevantes en la tarea que proponemos son: ***Visualización:*** este proceso se trabaja en el Nivel 2, conocido como percepción e interpretación de elementos constitutivos y propiedades de estos. Los estudiantes perciben las partes constitutivas del triángulo y los componentes de este, lo que permite el descubrimiento y formulación del criterio. ***Representación:*** este proceso se desarrolla cuando los estudiantes construyen el triángulo congruente al dado. Esto por medio de instrumentos de medición como la regla y el trasportador. Lo anterior hace parte del tipo de representación con instrumentos de medida. ***Conjeturación:*** este proceso se fortalece cuando los estudiantes visualizan, exploran y descubren cómo construir un triángulo congruente a uno dado. También cuando formulan una conjetura describiendo qué información necesitan para construir un triángulo congruente a otro dado. ***Argumentación:*** este proceso se trabaja cuando los estudiantes realizan un argumento inductivo de tipo particular-general. A partir de los datos infieren la aserción y la garantía. Además, parten de un caso concreto y generalizan la relación encontrada para cualquier tipo de triángulo. El argumento sería: dos triángulos que tengan dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre esos lados también congruente son congruentes.	

Materiales y recursos. En un apartado de las planeaciones de clase de cada pareja, encontramos información sobre este aspecto. Lo encontrado lo mostramos en la Tabla 4.63 junto a nuestra propuesta.

Tabla 4.63

Tarea 9 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta para la tarea 9
Tanto Durán y Rodríguez como Muñoz y Silva mencionan que van a trabajar con el software GeoGebra, este visto como recurso. Pues este les permitirá a los estudiantes arrastrar, mover, cambiar de color, dejar rastro, etc.	**Materiales:** - Hoja con el enunciado de la tarea **Recursos:** - Regla graduada y transportador: para que los estudiantes puedan construir el triángulo congruente.

Consideramos que el recurso que mencionan los autores es acorde con cada una de las propuestas de tarea. Sin embargo, como las dos parejas diseñan un archivo de GeoGebra este deja de ser un recurso para convertirse en material. Por otra parte, como nuestra propuesta de enunciado es distinta, planteamos el material y los recursos necesarios para abordar la tarea.

4.4. Análisis didáctico de las tareas para el Grupo 8°-9°

El Grupo 4 incluye cinco tareas. Todas tienen como temas distintos. A continuación, presentamos el análisis de cada una de ella y su respectivo ajuste si este es necesario.

Identificación de la Tarea 10.

Tabla 4.64

Identificación de la Tarea 10

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Ángulos opuestos en paralelogramo	Marín. J y Ortega. L	Leonor Camargo	2020-2

Análisis de la Tarea 10.

Aprendizajes esperados. En la planeación de clase de Marín y Ortega encontramos el aprendizaje esperado que se muestra en la Tabla 4.65. En esta también se encuentra nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.65

Tarea 10 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
“Mediante la exploración de una representación en GeoGebra, en la que se encuentra un paralelogramo, se propone que el estudiante descubra y justifique la	Explorar, descubrir y conjeturar que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, por medio de una representación en GeoGebra, y

propiedad ángulos opuestos congruentes del paralelogramo” (Marín y Ortega).	crear un argumento inductivo para justificar la propiedad descubierta.

La propuesta de los autores cumple con la mayoría de los elementos de un aprendizaje esperado. Se puede evidenciar el objeto matemático que se va a abordar, lo que se quiere que los estudiantes hagan y cómo se espera que lo hagan. Sin embargo, es una oración que no inicia con un verbo; por ende, no cuenta con la estructura de un aprendizaje esperado, según nuestro marco de referencia. Además, no se menciona el tipo de argumento usarán los estudiantes para realizar la justificación de la propiedad encontrada. Por lo anterior, modificamos el aprendizaje esperado de tal manera de que sea claro para el lector qué es lo que se quiere lograr con esta tarea.

Enunciado. En la documentación que tenemos de Marín y Ortega encontramos el enunciado que se muestra en la Tabla 4.66. En ella también se encuentra nuestra propuesta.

Tabla 4.66

Tarea 10 – Enunciado planteado por Marín y Ortega y nuestra propuesta

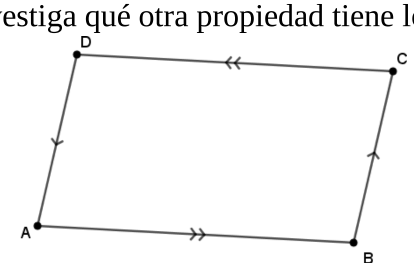
<table>
<tr><th>Enunciado propuesto por Marín y Ortega</th></tr>
<tr><td>Mide, … arrastra y te diré quién soy
Probablemente has estudiado en tu curso que los paralelogramos son cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos y congruentes. Utilizando el archivo de GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/aukju4yd el cual contiene la representación de un paralelogramo (ver Figura 1), investiga qué otra propiedad tiene los paralelogramos.


Figura 1. Vista previa del paralelogramo ABCD en GeoGebra</td></tr>
<tr><th>Nuestra propuesta</th></tr>
<tr><td>Mide, arrastra y te diré quién soy
Recuerda que los paralelogramos son cuadriláteros que tienen lados opuestos paralelos. Haciendo uso de GeoGebra construye un paralelogramo. Ahora explora el cuadrilátero construido tomando medidas ¿Qué regularidad encuentras entre las medidas tomadas?</td></tr>
</table>

La propuesta de enunciado de Marín y Ortega cumple con tener un título que es llamativo para los estudiantes. También contiene una instrucción que lleva a los estudiantes a investigar, razonar y manifestar lo que ellos hacen por su cuenta. No obstante, consideramos que no es necesario presentarles una definición que incluye dos propiedades de un paralelogramo. Nos parece más provechoso que los estudiantes descubran las propiedades que surgen de medir los lados y los ángulos del paralelogramo. En consecuencia, modificamos la tarea, aunque mantuvimos el título. Decidimos dejar la información sobre una las propiedades, ya que es necesario que ellos la conozcan para realizar la construcción. También consideramos pertinenteel uso de GeoGebra que proponen los autores para descubrir la propiedad, puesto que permite alos estudiantes hacer varias representaciones de paralelogramos y realizar una exploración dinámica.

Descripción de la tarea. En la Tabla 4.67 presentamos la propuesta de descripción de la tarea realizada por Marín y Ortega. También mostramos nuestra propuesta.

Tabla 4.67

Tarea 10 – Descripción planteada por los autores y nuestra propuesta

Descripción planteada	Nuestra propuesta
"El estudiante a partir de un paralelogramo que se ha construido en GeoGebra deberá utilizar arrastre y demás herramientas que le ofrece la geometría dinámica con el objetivo de que el estudiante identifique la propiedad de ángulos opuestos congruentes del paralelogramo" (Marín y Ortega).	Los estudiantes construirán en GeoGebra un paralelogramo a partir de dos pares de segmentos paralelos. Utilizando las herramientas del software miden y exploran por arrastre las longitudes de los segmentos y las amplitudes de los ángulos. De esta manera se espera que encuentren la propiedad de ángulos opuestos congruentes. Sin embargo, se puede presentar que los estudiantes descubran que los segmentos opuestos son congruentes. Las propiedades se pueden abordar en cualquier orden. Los estudiantes realizan una conjetura y la justifican verificando que la propiedad se cumple para todos los paralelogramos.

La descripción realizada por los autores es acorde a la tarea que ellos proponen. Sin embargo, no evidenciamos en qué momento los estudiantes realizan la justificación de la propiedad de ángulos opuestos congruentes. Por otra parte, dado que modificamos el enunciado, en nuestra propuesta describimos qué se espera que los estudiantes hagan y contemplamos qué hacer si encuentran las dos propiedades del paralelogramo.

Requisitos. En la planeación de clase de Marín y Ortega encontramos información sobre los requisitos. En la Tabla 4.68 presentamos lo hallado y nuestra propuesta.

Tabla 4.68

Tarea 10 – Requisitos planteado por los autores y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Nuestra propuesta
"Conocimiento de la definición de paralelogramo y la propiedad de lados	**Lenguaje matemático:** paralelogramo, rectas paralelas, ángulo, segmento, congruencia de segmentos y congruencia de ángulos.

opuestos congruentes" (Marín y Ortega).	**Destrezas:** habilidad en el uso de herramientas de GeoGebra como: recta, punto, distancia o longitud, ángulo, arrastre, paralela e intersección. **Conocimientos previos:** relación de paralelismo entre rectas y congruencia entre segmentos y ángulos.

En la propuesta que realiza Marín y Ortega acerca de los conocimientos que deben tener los estudiantes se encuentra la definición de paralelogramo, la cual consideramos necesaria para el desarrollo de la tarea. Sin embargo, la definición que ellos plantean en el enunciado no es provechosa, económica ni útil ya que tiene dos propiedades. Creemos que no es necesario que los estudiantes conozcan la propiedad de los lados opuestos congruentes ya que esta puede ser descubierta por los estudiantes. En nuestra propuesta diferenciamos el lenguaje, las destrezas y los conocimientos que los estudiantes necesitan para desarrollar nuestra propuesta de tarea.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En la planeación de clase de Marín y Ortega encontramos información sobre cuatro de los cinco procesos que consideramos en nuestro marco de referencia. En la Tabla 4.69, columna izquierda, presentamos lo hallado. En la columna derecha se encuentra, el análisis de lo planteado por los autores. En la parte inferior está nuestra propuesta.

Tabla 4.69

Tarea 10 – Procesos cognitivos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización y Representación "Los procesos de visualización y representación se desarrollan al momento en que se arrastra y se hace uso de las herramientas de GeoGebra. También se ve reflejado al comparar figuras tales como: el cuadrado, rombo y rectángulo. Y con esta comparación se pretende que se identifique una propiedad en la cual permita la invariante, es decir que, tienen una propiedad en común. Para así concluir que los paralelogramos tienen ángulos opuestos congruentes" (Marín y Ortega).	No es claro qué de los procesos de visualización y de representación se está fortaleciendo o desarrollando con esta tarea. Además, la comparación a la que hacen alusión los autores no se menciona ni en el aprendizaje esperado ni en la descripción de la tarea.
Conceptualización "Se da una conjetura al momento en que los estudiantes determinan la propiedad que se cumple en todas las figuras al momento de su comparación" (Marín y Ortega).	No estamos de acuerdo con la pareja de autores, pues, aunque la conceptualización está ligada con la conjeturación, estos son procesos distintos. Cabe aclarar que la comparación sí hace parte de uno de los mecanismos de construcción de significado de una propiedad.

Argumentación “Se desarrolla al momento en que el estudiante realiza un argumento inductivo de tipo particular-general, pues al ya explorar con los tipos de paralelogramo da paso a concluir la propiedad para todos ellos” (Marín y Ortega).	Estamos de acuerdo con Marín y Ortega, pues la tarea se basa en llegar a un argumento inductivo. Los estudiantes, a partir de los datos, obtienen una aserción y una garantía.
Nuestra propuesta	
Al analizar este aspecto y teniendo en cuenta que nuestra propuesta de tarea se centra en el proceso de conjeturación y argumentación, consideramos los siguientes procesos cognitivos. ***Visualización:*** este proceso se fortalece cuando los estudiantes exploran e intentan revelar la propiedad que existe entre los ángulos opuestos del paralelogramo. Con esto se hace uso del principio “ver más de lo que se ve”. Además, se usa la aprehensión discursiva, del anclaje visual al discursivo, pues los estudiantes, a partir de la representación pueden asociar distintos enunciados a la representación. ***Representación:*** este proceso se desarrolla al momento en que los estudiantes construyen el paralelogramo y cuando realizan el arrastre de los vértices para obtener diversas configuraciones. El tipo de representación al que se alude en esta tarea es el de construcción en GeoGebra. ***Conjeturación:*** este proceso se impulsa al momento en que los estudiantes realizan una exploración de las representaciones y con esto descubren que la propiedad se cumple para todo paralelogramo. ***Argumentación:*** este proceso se desarrolla, pues los estudiantes tienen que construir un argumento inductivo para la propiedad encontrada.	

Materiales y recursos. Marín y Ortega mencionan el material. En la Tabla 4.70 mostramos la información encontrada y nuestra propuesta.

Tabla 4.70

Tarea 10 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
“El material requerido es la aplicación GeoGebra, para representar una figura bidimensional sin que el estudiante recurra a elementos externos. Esta herramienta se usa para la ayuda en la exploración del objeto. Este software contiene muchas herramientas, donde el usuario puede seleccionar y armar sus propias representaciones, también el estudiante tiene acceso a construir figuras y otro tipo de elementos matemáticos facilitando versatilidad y aproximación a situaciones cotidianas. Las herramientas que el estudiante deberá utilizar en la clase será la distancia o longitud y el arrastre de puntos” (Marín y Ortega).	**Material:** - Hoja con el enunciado de la tarea. **Recurso:** - GeoGebra: con ayuda de este software los estudiantes construyen el paralelogramo y usan las herramientas del programa para encontrar propiedades.

En la propuesta de Marín y Ortega no se evidencia que los autores diferencien entre material y recurso. Sin embargo, ellos hacen una explicación amplia del uso que los estudiantes dan al recurso. Por lo anterior, en nuestra propuesta planteamos los materiales y recursos necesarios para el desarrollo de la tarea, teniendo en cuenta nuestro enunciado.

Identificación de la Tarea 11.

Tabla 4.71

Identificación de la Tarea 11

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Cuadriláteros	Cuartas. W y Tavera. L	Leonor Camargo	2019-2

Análisis de la Tarea 11

Aprendizajes esperados. En la propuesta de tarea de Cuartas y Tavera encontramos información sobre este aspecto. En la Tabla 4.72 mostramos lo hallado y nuestra propuesta.

Tabla 4.72

Tarea 11 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Introducir, por medio de la exploración y actividades orientadas a las distintas aprehensiones que suponen la visualización, las principales familias de cuadriláteros y sus definiciones, para reconocer algunas de las propiedades de estos a partir de las características de sus diagonales" (Cuartas y Tavera).	Caracterizar cuadriláteros mediante la construcción de estos a partir de dos segmentos que serían sus diagonales y la exploración de las relaciones entre estas.

El aprendizaje esperado que proponen Cuartas y Tavera incluye el objeto matemático que se quiere abordar. Sin embargo, evidenciamos que lo propuesto tiene forma de un objetivo de enseñanza más no de un aprendizaje esperado. Expresa lo que el profesor va a hacer y no lo que los estudiantes van a lograr. Además, no consideramos apropiado que en una sola tarea se busque definir varios objetos matemáticos y además encontrar propiedades porque puede ser muy dispendioso para el aprendizaje de los estudiantes. Por lo anterior, en nuestra propuesta solo consideramos abordar la caracterización de los cuadriláteros a partir de sus diagonales.

Enunciado. En la Tabla 4.73 mostramos el enunciado encontrado en el informe de gestión de la clase de Cuartas y Tavera. También, presentamos nuestra propuesta alternativa.

Tabla 4.73

Tarea 11 – Enunciado propuesto por Cuartas y Tavera y nuestra propuesta

Enunciado propuesto por Cuartas y Tavera
Dados los segmentos $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$ que se intersecan en el punto M, ¿cuál(es) cuadrilátero(s) se determinan a través de los puntos W, X, Y, Z?

1. Sobre una hoja blanca de papel, realicen con *Regla y Compás* una representación gráfica de cada cuadrilátero que hayan obtenido: Los segmentos se bisecan en M, son congruentes y perpendiculares entre sí. A partir de sus experiencias, ¿conocen el nombre de la(s) figura(s) que han encontrado? Intenten establecer una definición a partir de lo que observen sobre ella. 2. ¿Podrían identificar otros cuadriláteros además de los anteriores? ¿Qué condiciones de las que estudiaron en el punto anterior cambiarían para representar dichos cuadriláteros? Realicen una representación gráfica del cuadrilátero(s) que han encontrado.
Nuestra propuesta
Encuentra cuadriláteros En GeoGebra construye los segmentos WY y XZ que se intersecan en un punto M. Arrastra los vértices y examina cuáles cuadriláteros se determinan, cuyos vértices son los puntos W, X, Y, Z, segúnlas relaciones que encuentres entre los segmentos WY y XZ.

Respecto al enunciado propuesto por los autores, creemos que la tarea que plantean es retadora para los estudiantes. No obstante, este no cuenta con un título. Además, consideramos que el tener en cuenta solo la visualización y no la exploración para identificar los posibles cuadriláteros no es suficiente para encontrar los tipos de cuadriláteros. Este proceso sí apoya la caracterización, pero no es el único que se utiliza para generar significado y para descubrir propiedades. En el enunciado tampoco evidenciamos el uso que se pretende dar a las diagonales, pues no se pide que estas sean modificadas. Es por ello, que en nuestra propuesta centramos la atención en las relaciones entre las diagonales y en cómo con estas se pueden identificar varios tipos de cuadriláteros.

Descripción de la tarea. En la tarea entregada por Cuartas y Tavera no encontramos información sobre la descripción de la tarea. Por este motivo no podemos realizar un análisis de este aspecto. En la Tabla 4.74 se encuentra nuestra propuesta, teniendo en cuenta nuestro enunciado.

Tabla 4.74

Tarea 11 – Nuestra propuesta de descripción de tarea

Nuestra propuesta
Los estudiantes realizan la construcción y exploración en GeoGebra de dos segmentos que se intersecan “WY y XZ”. Después construyen el cuadrilátero cuyos vértices son W, X, Y, Z y exploran posibles configuraciones según las relaciones de los segmentos, que serán las diagonales. Pueden considerar: diagonales congruentes y perpendiculares; diagonales congruentes, pero no perpendiculares; diagonales no congruentes pero perpendiculares; diagonales ni congruentes niperpendiculares; diagonales que se bisecan; y diagonales que no se bisecan. Estas relaciones y combinaciones entre ellas conllevan a la caracterización de cuadriláteros.

Requisitos. En los documentos que tenemos de Cuartas y Tavera no encontramos lo referente a este aspecto. En la Tabla 4.75 presentamos nuestra propuesta.

Tabla 4.75

Tarea 11 - Nuestra propuesta de requisitos

Nuestra propuesta
Lenguaje matemático: paralelogramo, cuadrado, rectángulo, rombo, cometa, trapecio segmentos congruentes, diagonal, perpendicular, paralela, segmentos que se bisecan. **Destrezas:** habilidad en el uso del arrastre y herramientas de construcción de segmentos y puntos de intersección. Uso de la herramienta distancia o longitud y de la herramienta para trazar perpendiculares en GeoGebra. **Conocimientos previos:** tener interpretaciones de algunos cuadriláteros diferenciándolos por los atributos de sus lados y sus ángulos. Tener una noción de congruencia, perpendicularidad y paralelismo.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. Cuartas y Tavera en su propuesta de tarea solo mencionan un proceso. En Tabla 4.76 mostramos lo hallado, nuestro análisis respecto a la propuesta de los autores y nuestra propuesta.

Tabla 4.76

Tarea 11 – Proceso planteado por los autores, análisis y nuestra propuesta

Proceso planteado	Análisis
Visualización "En la tarea tienen lugar las siguientes aprehensiones: De tipo discursivo en tanto los estudiantes han tenido la posibilidad de poner en juego sus conocimientos previos en geometría y asociarlos tanto con las representaciones gráficas dadas inicialmente, como con las de tipo simbólico que caracterizan los objetos geométricos iniciales. De tipo operativo, en tanto las actividades de exploración hasta ahora suponen configurar distintos tipos de cuadriláteros a partir de sus diagonales" (Cuartas y Tavera).	Consideramos que la tarea sí fortalece el proceso de visualización, en los dos tipos de aprehensiones nombradas por los autores. Sin embargo, no es claro cómo se moviliza la aprehensión discursiva, pues los autores hablan de representaciones gráficas y simbólicas que se muestran antes de iniciar el enunciado. Pero al revisar la documentación, no hallamos las representaciones a las que ellos hacen alusión. En cuanto a la aprehensión operativa, consideramos que sí se desarrolla ya que se hace referencia a la modificación de la configuración inicial para resolver el problema que se plantea.
Nuestra propuesta	
Teniendo en cuenta lo anterior y nuestra propuesta de enunciado, consideramos que se fortalecen los siguientes procesos cognitivos. ***Visualización:*** este proceso se fortalece en dos tipos de aprehensión: la discursiva del anclaje visual al anclaje discursivo, pues los estudiantes cuando construyen las diagonales y efectúan el arrastre identifican las características del cuadrilátero resultante y la(s) relaciones que hay entre las diagonales de este. Y la aprehensión operativa cuando los estudiantes llevan a cabo	

alguna modificación en los extremos de las diagonales para construir distintos cuadriláteros. También se desarrolla el Nivel 1 “visual operativo”, pues los estudiantes hacen una manipulación mental de las subconfiguraciones de las diagonales, para obtener otros cuadriláteros. ***Representación:*** este proceso se desarrolla mientras los estudiantes construyen las diagonales y las modifican para lograr relaciones entre ellas. Se trabaja en el cuarto tipo de representación, es decir, con un programa de geometría dinámica. Además, al momento en que los estudiantes modifican los segmentos por medio del arrastre se están generando infinitas representaciones de cuadriláteros. ***Conjeturación:*** este proceso se fortalece cuando los estudiantes observan que las diagonales que han construido, con ciertas propiedades, conducen a la construcción de ciertos tipos de cuadriláteros. También se desarrolla, cuando los estudiantes formulan una oración donde especifican la(s) propiedad(es) que cumplen las diagonales para que se genere cierto cuadrilátero.

Materiales y recursos. En el informe de gestión de la clase de Cuartas y Tavera encontramos los elementos que los autores consideran necesarios para llevar a cabo la tarea. Enla Tabla 4.77 damos a conocer lo encontrado y nuestra propuesta.

Tabla 4.77

Tarea 11 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
“Hojas, lápiz, regla y compás” (Cuartas y Tavera).	**Material:** - Hoja con el enunciado de la tarea **Recurso:** - GeoGebra: en él los estudiantes podrán construir las diagonales y explorar (por medio del arrastre o una nueva construcción) las distintas configuraciones.

Cuartas y Tavera proponen trabajar con material concreto, pero no diferencian entre material o recurso. Consideramos que hacer uso de un recurso como GeoGebra puede facilitar la construcción y la exploración de las diagonales y sus relaciones de tal manera que se permite pueden caracterizar distintos cuadriláteros. Por ende, en nuestra propuesta consideramos hacer uso del software GeoGebra, permitiéndoles a los estudiantes una exploración más exhaustiva de posibles relaciones entre las diagonales.

Identificación de la Tarea 12.

Tabla 4.78

Identificación de la Tarea 12

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Teorema segmentos-puntos medios	Niño. D y Romero. L	Leonor Camargo	2020-2

Análisis de la Tarea 12.

Aprendizajes esperados. Al revisar los documentos de Niño y Romero encontramos laformulación de un aprendizaje esperado. En la Tabla 4.79 mostramos lo hallado y nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.79

Tarea 12 – Aprendizajes esperados: Información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Mediante el uso del programa de geometría dinámica GeoGebra y siguiendo unas instrucciones, construyan la situación propuesta y posteriormente la exploren de tal manera que descubran e identifiquen la propiedad: "El segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado" (Niño y Romero).	Formular una conjetura a partir de la exploración y el descubrimiento de la relación que existente entre el segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de un triángulo y el tercer lado de este.

La estructura que utilizan los autores para la formulación del aprendizaje esperado no empieza con un verbo y no es una oración breve. Sin embargo, sí aparece el objeto matemático a abordar en la clase, el propósito en función de lo que los estudiantes deben hacer y cómo se espera que lo hagan. Considerando lo anterior, en nuestra propuesta planteamos un aprendizaje esperado que está relacionado con la exploración, descubrimiento y conjetura del hecho geométrico.

Enunciado. En la parte superior de la Tabla 4.80 mostramos el enunciado que proponen Niño y Romero. En la parte inferior presentamos nuestra propuesta.

Tabla 4.80

Tarea 12 – Enunciado planteado por Niño y Romero y nuestra propuesta

Enunciado planteado por Niño y Romero
¡Representa, explora y descubre una de las propiedades de los triángulos! 1. Construye un ΔABC y determina a D y a E como los puntos medios de dos lados del ΔABC. Luego construye el $\overline{DE}$.

2. Explora moviendo los vértices del triángulo para encontrar una propiedad o relación entre los segmentos. Si quieres, puedes cambiar el color de los segmentos si lo consideras pertinente para ayuda de tu visualización. 3. Encuentra una propiedad y descríbela.
Nuestra propuesta
¡Representa, explora y descubre una de las propiedades de los triángulos! Construye un ΔABC y determina a D y E puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Construye el $\overline{DE}$. Busca relaciones especiales entre $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ y DE y BC. Describe cómo las encontraste y formula dichas relaciones.

La propuesta de los autores contiene los elementos que debe tener un enunciado, pues tiene un título llamativo para los estudiantes, una situación retadora e interrogantes que orienta la exploración que hacen los estudiantes. Además, consideramos que el punto 2 del enunciado de Niño y Romero es importante porque moviendo los vértices del triángulo, se puede encontrar que la relación se cumple para cualquier triángulo. Decidimos cambiar la estructura del enunciado, manteniendo el título y modificando un poco la redacción. Buscamos que sea claro para los estudiantes lo que deben hacer con la construcción.

Descripción de la tarea. Al revisar la propuesta de tarea de Niño y Romero encontramos la descripción de la tarea. La presentamos en la columna izquierda de la Tabla 4.81. En la columna derecha se encuentra nuestra propuesta.

Tabla 4.81

Tarea 12 – Descripción planteada por los autores y nuestra propuesta

Descripción planteada	Nuestra propuesta
"Los estudiantes descubrirán una propiedad que involucra triángulos y la relación de paralelismo y congruencia entre rectas: "El segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo y congruente al tercer lado." Para ello los alumnos construirán en GeoGebra un triángulo cualquiera y un segmento que tiene como extremos los puntos medios de dos lados de este. Luego deben explorar la configuración del triángulo por medio del arrastre de sus vértices, si desean la configuración de colores de los segmentos en cuestión y la herramienta distancia, para así descubrir dicha relación de paralelismo y congruencia. De esta manera encontrarán la regularidad o invariante que les permita conjeturar y argumentar de manera general	Los estudiantes construyen en el software GeoGebra un ΔABC. Luego construirán los puntos D y E tal que sean puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Realizan una exploración arrastrando los vértices del triángulo. Se esperaque encuentren dos relaciones: *i)* el paralelismoentre $\overline{DE}$ y $\overline{AC}$.*ii)* $DE = \frac{1}{2}AC$. Mediante la exploración se quiere que los estudiantes conjeturen y argumenten que estas relaciones se cumplen para cualquier triángulo. El docente puede hacer preguntas acerca de cuál es la relación del con cada uno de los segmentos del triángulo para orientar la identificación del paralelismo. También, puede sugerir la toma de medidas para que descubran la relación numérica involucrada. De esta

que cualquier triángulo cumple la propiedad que se trabajará" (Niño y Romero).	manera ya los estudiantes empezarán a ver qué pasa con estas medidas y podrán llegar a el hecho geométrico.

La propuesta planteada por los autores cumple con ser una explicación breve donde se menciona que se espera que los estudiantes hagan con el enunciado de la tarea. Sin embargo, Niño y Romero aluden a dos aspectos los cuales no habían mencionado. Menciona una relación de congruencia, lo cual no se presenta en este caso pues los segmentos que son paralelos no son congruentes. Además, plantean que los estudiantes deben realizar un argumento, pero en el aprendizaje esperado y en el enunciado no se dice nada al respecto. Es por ello por lo que en nuestra propuesta aclaramos los hechos geométricos a los que se espera que los estudiantes lleguen. Sugerimos considerar lo dicho por Camargo, Perry y Samper (2019), para orientar el trabajo de los estudiantes.

Requisitos. En la planeación de clase de Niño y Romero encontramos una sección que menciona los requisitos para afrontar la tarea. La información que encontramos se muestra en la Tabla 4.82 junto con nuestra propuesta.

Tabla 4.82

Tarea 12 – Requisitos planteados por los autores y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Nuestra propuesta
"Tener un acercamiento en la construcción en GeoGebra de objetos geométricos como puntos, rectas y rectas paralelas, segmentos, y triángulos" (Niño y Romero).	**Lenguaje matemático:** triángulo, segmentos paralelos, punto medio, distancia entre puntos y notación de distancia. **Destrezas:** habilidad en el uso de las herramientas de GeoGebra como: punto, segmento, medio o centro, recta, relación y distancia o longitud. **Conocimientos previos:** identificación de segmentos paralelos e interpretación de punto medio.

Consideramos que los requisitos propuestos por los autores son adecuados para el desarrollo de la tarea. Sin embargo, creemos que se deben tener en cuenta otros conocimientos para que la tarea se lleve a cabo sin dificultades. Por ende, en nuestra propuesta consideramos el lenguaje matemático, las destrezas y conocimientos previos necesarios. Aquí agregamos la interpretación de punto medio y las habilidades en el uso de las herramientas de GeoGebra, ya que estos son esenciales para poder lograr los aprendizajes esperados que hemos planteado.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En la planeación de clase que proponen Niño y Romero hallamos los procesos cognitivos que se favorecen en la tarea. En la Tabla 4.83 mostramos lo encontrado, el análisis de lo planteado por los autores y nuestra propuesta.

Tabla 4.83

Tarea 12 – Procesos cognitivos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

<table>
<tr><th>Procesos cognitivos encontrados</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>Visualización
“Los estudiantes desarrollarán la visualización de la propiedad a trabajar al explorar mediante el arrastre de los objetos geométricos implicados en la construcción de la situación en GeoGebra (vértices del triángulo). Y eventualmente, con el cambio de colores de estos objetos, tendrán un apoyo visual de la propiedad que queremos que descubran” (Niño y Romero).</td><td>No estamos de acuerdo con lo que plantean los autores, puesto que consideran que la visualización es la exploración y este proceso es propio de la conjeturación. Sin embargo, coincidimos que el cambio de colores de los segmentos puede favorecer la visualización.</td></tr>
<tr><td>Representación
“Se impulsará mediante la construcción de figuras en el software de geometría dinámica GeoGebra. En este caso, los estudiantes deben construir triángulos, segmentos y sus puntos medios, y rectas paralelas” (Niño y Romero).</td><td>Estamos de acuerdo que el proceso de representación se fortalece con esta tarea cuando los estudiantes hacen la construcción de un triángulo y puntos medios de dos lados de este. Pero no solo esto. También, cuando realizan el arrastre de los vértices del triángulo generan nuevas representaciones. Los autores de la tarea no nombran el tipo de representación del cual hacen uso.</td></tr>
<tr><td>Conjeturación
“Al realizar la exploración y descubrir la propiedad se desarrolla el proceso de conjeturación, el cual lleva al establecimiento de una conjetura sobre la propiedad encontrada” (Niño y Romero).</td><td>Lo que proponen los autores es correcto, pues para la creación de conjeturas se debe desarrollar un proceso de exploración para así determinar cuáles son las regularidades o invariantes. Sin embargo, los autores no mencionan la estrategia que consideran que los estudiantes pueden realizar.</td></tr>
<tr><td>Conceptualización
“Se desarrolla al interpretar la relación de paralelismo de los segmentos en cuestión” (Niño y Romero).</td><td>Consideramos que este proceso no se lleva a cabo de la manera como lo proponen los autores ya que la base fundamental de este es la generalización.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Nuestra propuesta</th></tr>
<tr><td colspan="2">Teniendo en cuenta la tarea a desarrollar, consideramos que la tarea apoya los siguientes procesos cognitivos:
Visualización: este proceso se desarrollará al hacer uso del principio “ver más de lo que se ve”, pues los estudiantes deberán observar la relación que existe entre el segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de un triángulo y el tercer lado de este. Además, se presenta la aprehensión discursiva del anclaje visual al discursivo pues la representación se asocia con dos afirmaciones matemáticas.
Representación: este proceso se fortalece al momento de construir el triángulo, determinar los puntos medios de los lados y generar el segmento que los une. También mediante el arrastre de</td></tr>
</table>

los vértices del triángulo para generar diferentes triángulos. Aquí se está llevando a cabo untipo de representación con GeoGebra ***Conjeturación:*** este proceso se impulsa al momento en que los estudiantes realizan la construcción de un enunciado condicional donde generalicen los hechos geométricos. El tipo de estrategia que los estudiantes pueden utilizar es el ejemplo genérico. A partir de la exploración de una representación los estudiantes enuncian la conjetura.

Materiales y recursos. En la planeación de clase de Niño y Romero encontramos los materiales y recursos. En la Tabla 4.84 presentamos lo encontrado y nuestra propuesta.

Tabla 4.84

Tarea 12 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
"El software educativo GeoGebra, que es un programa de geometría dinámica para computadora o dispositivos móviles (usaremos la versión de computador en nuestro caso) en el cual los estudiantes por medio de instrucciones deberán realizar la construcción de la situación y desarrollar todo el proceso durante la clase. Un documento que se compartirá en el momento de la clase, en el cual se presentarán una serie de instrucciones para que los estudiantes desarrollen" (Niño y Romero).	**Material:** - Hoja con el enunciado de la tarea **Recurso:** - GeoGebra: en el cual los estudiantes deberán realizar la construcción del enunciado y con ayuda de la herramienta de arrastre ir representando y explorando otros triángulos.

La propuesta que realizan Niño y Romero es apropiada para este aspecto y para la tarea a desarrollar. Sin embargo, notamos que no realizan una diferencia entre material y recurso. Por lo tanto, en nuestra propuesta tenemos en cuenta lo formulado por los autores y realizamos una diferenciación entre material y recurso.

Identificación de la Tarea 13

Tabla 4.85

Identificación de la Tarea 13

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Relación entre el lado mayor y el ángulo opuesto a este, en un triángulo.	Olarte. A y Rodríguez. H	Leonor Camargo	2020-2

Análisis de la Tarea 13.

Aprendizajes esperados. En los documentos que tenemos de Olarte y Rodríguez se encuentra un apartado donde los autores mencionan el aprendizaje esperado. En la columna izquierda de la Tabla 4.86 presentamos lo encontrado y en la columna derecha mostramos nuestra propuesta alternativa.

Tabla 4.86

Tareas 13 – Aprendizajes esperados: Información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Mediante la exploración de la representación de un triángulo en GeoGebra, se les propone a los estudiantes que intenten construir un triángulo con características imposibles, luego de encontrar la imposibilidad de dicha construcción los estudiantes exploraran cualquier triángulo mediante las herramientas de GeoGebra (arrastre y medición). Lo anterior se hace con el fin de que los estudiantes descubran una relación entre las medidas de los lados y de los ángulos" (Olarte y Rodríguez).	Encontrar y formular la relación que existe entre el lado mayor y el ángulo opuesto a este, en un triángulo, a partir de una exploración realizada en GeoGebra, y argumentar por qué la relación encontrada, se cumple en cualquier triángulo.

El aprendizaje esperado que plantean los autores de la tarea no tiene una estructura como la que proponemos, dado que no inicia con un verbo. Además, no es una oración breve. Sin embargo, Olarte y Rodríguez sí especifican el objeto matemático a tratar y lo que se espera que hagan y digan los estudiantes. Teniendo en cuenta lo anterior, en nuestra propuesta reformulamos el aprendizaje esperado. Nos centramos en el descubrimiento, la conjeturación y la argumentación de la relación que existe en un triángulo entre el lado mayor y el ángulo opuesto a este.

Enunciado. En la parte superior de la Tabla 4.87 damos a conocer el enunciado que propusieron los autores. En la parte inferior se encuentra nuestra propuesta.

Tabla 4.87

Tarea 13 – Enunciado propuesto por Olarte y Rodríguez y nuestra propuesta

Enunciado propuesto por Olarte y Rodríguez
¡El redescubrimiento de una hermosa relación geométrica, una conexión entre la medida de los lados y los ángulos de un triángulo! 1. Mediante la exploración en GeoGebra, analiza si puedes construir un triángulo con la siguiente condición: el ángulo de mayor medida no sea el opuesto al lado de mayor medida. 2. Encuentra una relación entre la medida de los lados y los ángulos y escribe tu descubrimiento. 3. Justifica el por qué el lado de mayor medida es el opuesto al ángulo mayor y así mismo el por qué el lado de menor medida es el opuesto al ángulo menor.
Nuestra propuesta
¡El redescubrimiento de una hermosa relación geométrica, una conexión entre lamedida de los lados y la medida de los ángulos de un triángulo!

Intenta construir en GeoGebra un triángulo con la siguiente condición**:** el ángulo de mayor medida no sea el opuesto al lado de mayor medida. De acuerdo con tu exploración, ¿qué podrías decir respecto a la relación entre la medida de los lados y la medida de los ángulos de cualquier triángulo? Justifica tu respuesta.

Nos parece que el enunciado propuesto por Olarte y Rodríguez presenta una situación que retadora para los estudiantes. Además, consideramos que el título es llamativo para los estudiantes. Sin embargo, pensamos que no es necesario hacer las preguntas y que el ítem tres debe reformularse dado que en este se da la respuesta del ítem dos. Por lo anterior, en nuestra propuesta sintetizamos el enunciado.

Descripción de la tarea. En dos documentos que tenemos de Olarte y Rodríguez encontramos la descripción de la tarea. En la Tabla 4.88 damos a conocer los hallado y nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.88

Tarea 13 – Descripción planteada por los autores y nuestra propuesta

Descripción planteada	Nuestra propuesta
“La tarea consiste en que los estudiantes descubran una relación que existe entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. Para ello los estudiantes realizarán un proceso de exploración de la representación de un triángulo “dinámico” mediante las herramientas que proporciona el software de geometría dinámica (la opción arrastre, la medición y colores). También, serán guiados por una serie de preguntas orientadoras que buscan enfocar la atención del estudiante en la relación entre la medida de un lado y su ángulo opuesto. El propósito de esta tarea es que los estudiantes desarrollen procesos propios de la actividad geométrica como: la visualización del tamaño del lado con relación al tamaño del ángulo de un triángulo y viceversa, la exploración de las medidas de los ángulos y los lados en busca de relaciones entre ellos, la conjeturación de la relación que existe entre las medidas de dichos elementos del triángulo, la argumentación del por qué el lado de mayor media es el opuesto al ángulo mayor y así mismo el por qué el lado de menor medida es el opuesto al ángulo menor; y finalmente la generalización de la propiedad y su recíproco” (Olarte y Rodríguez).	Se les propone a los estudiantes que intenten construir en GeoGebra un triángulo con características imposibles en el que el ángulo de mayor medida no sea el opuesto al lado de mayor medida. Luego de encontrar la imposibilidad de dicha construcción los estudiantes exploran cualquier triángulo mediante las herramientas de GeoGebra, con el fin de que descubran una relación entre el lado mayor y el ángulo opuesto a este. Se puede presentar que los estudiantes propongan como solución un triángulo equilátero. En este caso, el docente les sugerirá construir un triángulo con un lado evidentemente más largo de los otros. Al arrastrar los vértices del triángulo los estudiantes observan que la relación encontrada se cumple. Luego, pueden elaborar un argumento de tipo inductivo.

De acuerdo con lo planteado por los autores vemos que, en el primer párrafo, ellos dan una explicación global de cómo llevar a cabo la tarea y los aprendizajes que se espera que obtengan los estudiantes. En el segundo párrafo describen lo que esperan lograr al desarrollar cada uno de los procesos cognitivos. Con ello consideramos que no se presenta una descripción de manera global de cómo se va a llevará a cabo la tarea y como se irán abarcando los aprendizajes que se espera que obtengan los estudiantes. En nuestra propuesta, describimos como se irán alcanzando cada uno de los aprendizajes esperados de acuerdo con el enunciado propuesto. Además, consideramos una exploración poco útil a la que pueden llegar los estudiantes y cómo el docente puede abordarla.

Requisitos. En la planeación de la clase de Olarte y Rodríguez encontramos información sobre este aspecto. En la Tabla 4.89, columna izquierda, damos a conocer lo hallado. En la columna derecha, mostramos nuestra propuesta.

Tabla 4.89

Tarea 13 – Requisitos planteados por los autores y nuestra propuesta

Requisitos planteados	Nuestra propuesta
“Los estudiantes deben comprender los conceptos de congruencia de segmentos y ángulos y establecer relaciones de desigualdad” (Olarte y Rodríguez).	**Lenguaje matemático:** triángulo, segmento, ángulo, medida del ángulo, medida del segmento, relación de orden (mayor, menor e igual) y congruencia. **Destrezas:** uso de herramientas de construcción de triángulos, arrastre y medición de longitudes y amplitudes en GeoGebra. **Conocimientos previos:** tener un significado de: las partes constitutivas del triángulo; la congruencia de segmentos y de ángulos; y el orden de los números naturales.

Consideramos que los requisitos planteados por Olarte y Rodríguez sí contienen varios conceptos que los estudiantes necesitan para abordar la tarea. Por lo anterior, en nuestra propuesta tomamos en cuenta lo mencionado, pero lo modificamos para que este se adapte a lo requerido para la tarea. También, agregamos el lenguaje matemático, las destrezas y los conocimientos previos que son necesarios para abordar la tarea.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En la documentación de Olarte y Rodríguez encontramos los procesos que ellos buscan desarrollar con la propuesta de tarea. En la Tabla 4.90, columna izquierda mostramos lo hallado. En la columna derecha, realizamos el análisis de lo planteado por los autores. En la parte inferior, damos a conocer nuestra propuesta para este aspecto.

Tabla 4.90

Tarea 13 – Procesos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización "Cuando observen la relación del tamaño del lado con respecto al tamaño del ángulo de un triángulo y viceversa" (Olarte y Rodríguez).	Observamos que lo propuesto por los autores no se refiere a los niveles, habilidades, principios o aprehensiones; que desean desarrollar o fortalecer con esta tarea.
Representación "Cuando los estudiantes tengan que representar diversos triángulos en GeoGebra, donde deben establecer los ángulos y lados" (Olarte y Rodríguez).	Consideramos que sí se lleva a cabo este proceso con ayuda del software GeoGebra, cuando los estudiantes construyen un triángulo y arrastran sus vértices. Sin embargo, observamos que Olarte y Rodríguez no lo clasifican en algún tipo de representación.
Conjeturación "Cuando formulen la relación que descubrieron por medio de la exploración" (Olarte y Rodríguez).	Olarte y Rodríguez platean que, mediante la exploración, los estudiantes formulan la relación encontrada, lo cual nos parece apropiado.
Conceptualización "Cuando se hable de congruencia de segmentos y ángulos, las relaciones de orden y las relaciones descubiertas en cualquier triangulo" (Olarte y Rodríguez).	Consideramos que esta tarea no busca conceptualizar ningún objeto geométrico, sino descubrir una propiedad.
Argumentación "Mediante el tipo de argumento inductivo, cuando los estudiantes establezcan los siguientes elementos de lo particular a lo general. - Todos los triángulos tienen un lado opuesto a un ángulo. (Atributo P) - En algunos triángulos el lado de mayor medida esel opuesto al ángulo de mayor medida. (Atributo q) - Todos los triángulos tienen un lado opuesto a un ángulo y además el lado de mayor medida es el opuesto al ángulo de mayor medida. (Patrón de generalización)" (Olarte y Rodríguez).	Estamos de acuerdo con que el tipo de argumentación que se lleva a cabo es inductivo. Además, nos parece que las características listadas son acordes con el tipo de argumentación.

Nuestra propuesta
De acuerdo con el análisis que realizamos anteriormente de cada uno de los procesos cognitivos, consideramos que nuestra tarea desarrolla los siguientes procesos: ***Visualización:*** la tarea favorece el Nivel 2 de visualización porque los estudiantes observan la propiedad que surge al arrastrar los vértices de un triángulo. ***Representación:*** la tarea permite que este proceso se desarrolle cuando los estudiantes realizan la construcción de un triángulo en el programa de geometría dinámica y arrastran sus vértices haciendo uso de las herramientas del software. El tipo de representación que se utiliza es el de uso de un programa de geometría dinámica. ***Conjeturación:*** la tarea lleva al uso del "experimento crucial", dado que además de que los estudiantes exploran representaciones de algunos triángulos, probablemente examinan en un caso extremo (donde el ángulo de mayor medida del triángulo no parezca el opuesto al lado de mayor medida). ***Argumentación:*** la tarea lleva a que los estudiantes realicen un argumento inductivo, dado que ellos utilizarán la aserción y la garantía como prueba de que su conjetura se cumple. Además, la inducción que realizan va de lo particular a lo general.

Materiales y recursos. En la planeación de la clase encontramos la descripción del material que plantearon los autores. En la Tabla 4.91 mostramos lo hallado junto a nuestra propuesta.

Tabla 4.91

Tarea 13 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos propuestos	Nuestra propuesta
"GeoGebra es un software educativo y dinámico que permite abordar la geometría a través de la exploración y la manipulación de distintos objetos matemáticos, facilitando la realización de construcciones para descubrir propiedades a partir de la visualización" (Olarte y Rodríguez).	***Material:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. ***Recurso:*** - GeoGebra: donde los estudiantes realizan las construcciones del triángulo y hacen las exploraciones necesarias para hallar las relaciones.

Consideramos que los autores hacen una descripción de lo que es el software y de sus beneficios. Sin embargo, no mencionan el uso que se le dará a este en la clase. Además, Olarte y Rodríguez, no diferencian entre material y recurso. En nuestra propuesta damos a conocer el material y el recurso necesarios para desarrollar la tarea.

Identificación de la Tarea 14

Tabla 4.92

Identificación de la Tarea 14

Tema	Autores	Profesor orientador	Semestre
Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo para triángulos rectángulos.	Rojas. L y Zamudio. G	Leonor Camargo	2020-2

Análisis de la Tarea 14.

Aprendizajes esperados. En el conjunto de documentos que tenemos de Rojas y Zamudio encontramos el aprendizaje esperado. En la Tabla 4.93 columna izquierda presentamos lo hallado y en la columna derecha nuestra propuesta.

Tabla 4.93

Tarea 14 – Aprendizajes esperados: información encontrada y nuestra propuesta

Información encontrada	Nuestra propuesta
"Identificar la semejanza de los triángulos rectángulos mediante el descubrimiento del criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA) estableciendo la relación de la congruencia de dos ángulos agudos correspondientes por medio de la exploración y arrastre en una representación gráfica de un triángulo rectángulo, utilizando un software dinámico de geometría (GeoGebra)" (Rojas y Zamudio).	Establecer el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo para el triángulo rectángulo, a partir de una exploración en GeoGebra de una representación.

El aprendizaje esperado inicia con un verbo, se nombra el objeto matemático, se plantea el propósito y cómo se espera que los estudiantes logren cumplirlo. Sin embargo, es incorrecto hablar de la "semejanza de los triángulos rectángulos" como si todos los triángulos de este tipo fueran semejantes. Además, consideramos que no es necesario establecer la congruencia de los dos pares de ángulos agudos correspondientes dado que, como los dos triángulos ya tienen un ángulo recto, con que se compruebe la congruencia de un par de ángulos agudos correspondientes congruentes ya se comprobara la semejanza. Proponemos un aprendizaje esperado teniendo en cuenta lo que los autores buscan con esta tarea, pero corrigiendo detalles de la enunciación.

Enunciado. En la planeación de clase de Rojas y Zamudio encontramos el enunciado que mostramos en la parte superior de la Tabla 4.94 y en la parte inferior presentamos nuestra propuesta.

Tabla 4.94

Tarea 14 – Enunciado planteado por Rojas y Zamudio y nuestra propuesta

Enunciado propuesto por Rojas y Zamudio

Explora, relaciona, ¡conjetura y juega con los triángulos rectángulos!

En la pantalla de GeoGebra, se observa el triángulo rectángulo $\Delta\, AFD$, el ángulo $\angle AHG$ y los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$, tal que H pertenezca al $\overline{AF}$ y G pertenezca al $\overline{AD}$.

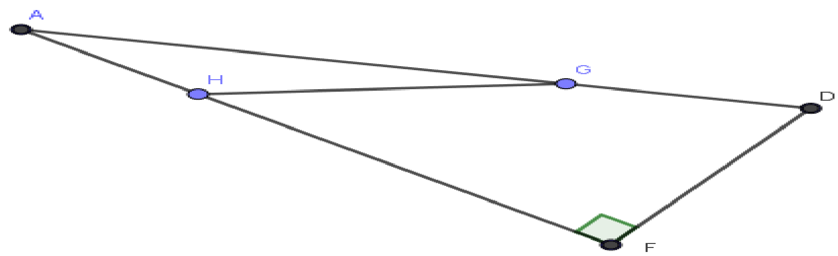


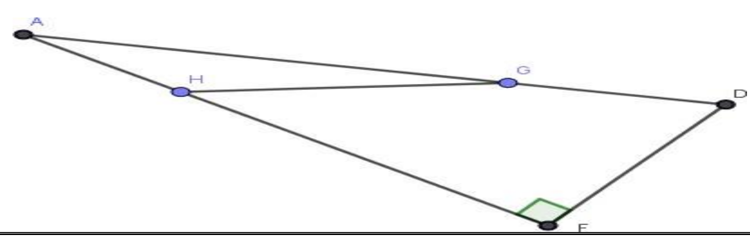
Figura 1

1. Explore la figura mediante el arrastre de los puntos G y D del $\Delta\, AFD$ hasta lograr que el $\angle AGH$ y $\angle ADF$ sean congruentes, una vez alcanzada la congruencia ¿Qué se puede afirmar acerca de las medidas de los ángulos $\angle AHG$ y $\angle AFD$?
2. ¿Qué características tienen los triángulos $\Delta\, AHG$ y $\Delta\, AFD$? ¿Tienen la misma forma? ¿Son los triángulos semejantes? ¿Porqué?
3. ¿Cuándo ángulos son congruentes se puede afirmar que los triángulos son semejantes? ¿Por qué?
4. ¿Podrías completar el enunciado: Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen __________________?
5. Arrastre los puntos H y G hasta los puntos F y D, ¿Qué característica tienen ahora los triángulos $\Delta\, AHG$ y $\Delta\, AFD$?

Nuestra propuesta

Explora, relaciona, ¡conjetura y juega con los triángulos rectángulos!

En la pantalla de GeoGebra, observas el triángulo rectángulo AFD, con el $⊾F$. $H \in \overline{AF}$ y $G \in \overline{AD}$. Explora posiciones para el punto H en las que $\Delta AFD \sim \Delta AHG$ y descubre cuál es la mínima información que serequiere para poder afirmar, que dos triángulos rectángulos son semejantes.



Consideramos que el enunciado que proponen los autores contiene algunos elementos interesantes, pues tiene un título llamativo y la tarea es interesante. No obstante, creemos que se dan muchas instrucciones, limitando la exploración y el descubrimiento del criterio por parte de los estudiantes. De acuerdo con este análisis, decidimos proponer una situación en la que los estudiantes tengan la oportunidad de explorar y llegar a descubrir el criterio de semejanza.

Descripción de la tarea. En la propuesta de tarea y planeación de la clase que tenemosde los autores se encuentra la descripción planteada. En la Tabla 4.95, columna izquierda, presentamos lo hallado y en la columna derecha nuestra propuesta.

Tabla 4.95

Tarea 14 – Descripción planteada por los autores y nuestra propuesta

Descripción planteada	Nuestra propuesta
"Se propone el uso del software dinámico de geometría GeoGebra para el descubrimiento del criterio de semejanza ángulo-ángulo de triángulos rectángulos, por parte de los estudiantes, mediante la relación entre las medidas de los ángulos agudos correspondientes de dos triángulos rectángulos. Finalmente, se elabora un argumento inductivo del tipo general - particular, por parte de los estudiantes, conjeturando que todos los triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos ángulos agudos correspondientes congruentes" (Rojas y Zamudio).	Se presenta a los estudiantes una representación hecha en GeoGebra de un triángulo rectángulo AFD, con el $\llcorner F$. $H \in \overline{AF}$ y $G \in \overline{AD}$. En esta los estudiantes deben arrastrar el punto H hasta lograr la semejanza de los triángulos AFD y AHG. Los estudiantes realizan la configuración para descubrir propiedades comunes en los triángulos. De esta manera se espera que encuentren el criterio de semejanza para triángulos rectángulos que les permitirá conjeturar y argumentar de manera general que dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen uno de sus ángulos agudos de igual medida.

En la descripción elaborada por los autores encontramos el aprendizaje esperado. Sin embargo, no hay una explicación acerca de lo que se espera que los estudiantes realicen, de acuerdo con el enunciado de la tarea. Proponemos una descripción diferente, dónde describimos qué se espera que los alumnos hagan, a qué deberían llegar y que podrían argumentar.

Requisitos. En los documentos que se tenemos de Rojas y Zamudio no encontramos una sección para los requisitos. Por ello no podemos llevar a cabo un análisis de la propuesta de ellos. Por lo tanto, en la Tabla 4.96 presentamos nuestra propuesta de requisitos.

Tabla 4.96

Tarea 14 – Requisitos nuestra propuesta

Nuestra propuesta
Lenguaje matemático: triángulo, triangulo rectángulo, hipotenusa, cateto, ángulo, congruencia de ángulos, semejanza de triángulos, segmentos y ángulos correspondientes. **Destrezas:** habilidad en el uso de herramientas de GeoGebra como: arrastre, distancia o longitud y ángulo

Conocimientos previos: conocer las partes constitutivas del triángulo rectángulo, qué es y cómo medir un ángulo y tener una noción cuando dos triángulos son semejantes.

Procesos cognitivos geométricos que se favorecen. En la planeación de clase de Rojas y Zamudio encontramos una sección para este aspecto. En la Tabla 4.97, columna izquierda, presentamos lo hallado. En la columna derecha, esta nuestro análisis de lo planteado por los autores. En la parte inferior nuestra propuesta.

Tabla 4.97

Tarea 14 – Procesos cognitivos planteados por los autores, análisis y nuestra propuesta

Procesos planteados	Análisis
Visualización "Identificar que en la representación se encuentran dos triángulos" (Rojas y Zamudio).	Consideramos que, sí se desarrolla este proceso, tal y como lo plantean Rojas y Zamudio, mediante la percepción de los triángulos que están en la figura, los cuales están solapados. Sin embargo, los estudiantes también están dando un paso al nivel operativo de percepción visual, ya que implica reorganizar los elementos constitutivos de la figura para "ver" formas semejantes.
Representación "Mediante el proceso de arrastre con el manejo del software de geometría dinámica donde podrían caracterizar los triángulos semejantes" (Rojas y Zamudio).	Este proceso se fortalece en la tarea, ya que, como plantean los autores, cuando los estudiantes manipulan la representación que se les presenta están haciendo modificaciones en la configuración, sin afectar las propiedades esenciales de la construcción. Tienen diversidad de representaciones.
Conceptualización "Mediante la identificación de los triángulos semejantes y encontrar particularidades puedan conceptualizar la semejanza de triángulos" (Rojas y Zamudio).	Consideramos que lo que plantean Rojas y Zamudio no es correcto, dado que ellos proponen conceptualizar la semejanza de triángulos, concepto que es necesario que los estudiantes conozcan de ante mano. Además, en el planteamiento de los autores, no es claro cómo esta tarea ayuda al desarrollo de la conceptualización.
Conjeturación "Mediante la exploración podrán descubrir el criterio de semejanza ángulo-ángulo de triángulos rectángulos mediante la relación entre medidas de los ángulos" (Rojas y Zamudio).	Estamos de acuerdo con que la conjetura está basada en la exploración que realizan los estudiantes. Sin embrago, no se nombra cuál es la estrategia que se está usando.
Argumentación "El argumento que se propone es el inductivo de tipo general – particular" (Rojas y Zamudio).	Estamos de acuerdo que el tipo de argumentación es inductivo. Sin embargo, falta explicación de cómo se configura.

Nuestra propuesta
Por el anterior análisis, realizamos cambios para cada uno de los procesos. ***Visualización:*** la tarea contribuye al desarrollo de este proceso, en el Nivel 1 visual operativo ya que los estudiantes deben reorganizar los triángulos para "ver" cuando se logra la semejanza. También, se desarrolla la habilidad de discriminación visual ya que se están contrastando dos triángulos para determinar su semejanza. ***Representación:*** este proceso se fortalece cuando los estudiantes realizan la manipulación de la construcción que se les presenta y realizan modificaciones a la configuración, sin afectar las propiedades esenciales de esta para poder encontrar que el segmento es paralelo a un lado del triángulo rectángulo. Este tipo de representación es con un programa de geometría dinámica. ***Conjeturación:*** la estrategia utilizada es el experimento genérico dado que se conjetura a partir de la exploración de la representación de un triángulo rectángulo que está solapando a otro. Se generaliza a partir de varios triángulos rectángulos. ***Argumentación:*** el tipo de argumentación que se espera que los estudiantes den es de tipo inductivo, dado que ellos proponen una aserción y usan como dato y garantía lo que exploran y lo que generalizan.

Materiales y recursos. En la planeación de clase encontramos una sección para este aspecto. En la columna izquierda de la Tabla 4.98 presentamos lo hallado. En columna izquierda se encuentra nuestra propuesta.

Tabla 4.98

Tarea 14 – Materiales y recursos planteados por los autores y nuestra propuesta

Materiales y recursos planteados	Nuestra propuesta
"Software de geometría dinámica GeoGebra que se usa como herramienta de exploración para la construcción del argumento por parte de los estudiantes" (Rojas y Zamudio).	***Material:*** - Hoja con el enunciado de la tarea. - Archivo de GeoGebra en el cual aparece la construcción que los estudiantes exploran.

Rojas y Zamudio no clasifican programa de geometría dinámica como material o recurso. Sin embargo, sí mencionan la función que tiene para lograr resolver la tarea. Teniendo en cuenta nuestro análisis, en nuestra propuesta decidimos que el enunciado y el archivo de GeoGebra es un material.

5. Capítulo 5. Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones de nuestro trabajo. Las organizamos refiriéndonos al cumplimiento del objetivo general y los objetivos específicos, los aprendizajes como futuros licenciados, el aporte del trabajo a la comunidad de educación matemática y la proyección del trabajo.

5.1. Cumplimiento del objetivo general y objetivos específicos

Logramos cumplir satisfactoriamente con el objetivo general. Como mostramos en el Capítulo 4, realizamos el análisis didáctico de 16 tareas que se propusieron en las prácticas iniciales de los cursos de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, cohortes 2019-2 a 2020-2. De este análisis surgieron nuevas propuestas, que son versiones mejoradas de las tareas y, desde nuestro punto de vista, podrían promover de mejor manera un cambio de la enseñanza memorística a laenseñanza por procesos.

Con base en los objetivos específicos, recopilamos 103 documentos, de los cuales 33 fueron propuestas de tareas, 30 planeaciones de clase y 40 informes de gestión. Estos fueron desarrollados por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, cohortes 2019-2 a 2020-2.

Construimos un marco de referencia donde realizamos un estudio bibliográfico sobre qué es una tarea, qué es una tarea matemática y qué es una tarea matemática escolar. Este nos permitió definir cada uno de estos conceptos, ya que son entendidos por varios autores de distinta manera. Además, planteamos ocho elementos que son necesarios para el diseño de una tarea matemática escolar, basados en los planteamientos de Gómez, Mora y Velasco, (2016), Cañadas, Gómez y Pinzón, (2018) y algunos aprendizajes logrados en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. También, hace parte de estos elementos, los procesos cognitivos propios del trabajo en geometría. Consideramos cinco de ellos, visualización, representación, conceptualización, conjeturación y argumentación.

Realizamos un informe sobre el material documental primario. Describimos cómo obtuvimos los documentos (propuestas de tareas, planeaciones de clase e informes de gestión); cómo los organizamos, mediante la creación de una base de datos de acuerdo con cada tipo de trabajo y tomamos decisiones sobre qué tareas analizar. Además, realizamos el análisis de las propuestas de tarea y/o planeaciones de clase organizadas en cuatro grupos con base en lo expuesto en nuestro marco de referencia.

Hacemos la aclaración de que, aunque los procesos cognitivos se complementan entre ellos, en el rediseño de las tareas no consideramos el desarrollo o fortalecimiento de todos en la clase. Dependiendo de los aprendizajes esperados, decidimos potenciar algunos de ellos. Por último, en el Anexo 3, mostramos un cuadernillo donde se pueden encontrar nuestras propuestas de tareas. Estas se construyeron con base en el análisis de las propuestas de tareas que realizaron los futuros educadores matemáticos.

5.2. Principales cambios realizados a las tareas

Consideramos que los aspectos en los que más debimos intervenir o mejorar la formulación de la tarea, fueron los enunciados, aprendizajes esperados y procesos cognitivos geométricos. El primero, debido a que, en la mayoría de los casos, la estructura de los enunciados parecía una guía, pues los estudiantes debían seguir una serie de pasos para lograr el aprendizaje que se deseaba. Esto no nos parece retador para los estudiantes, pues no les permite pensar, hacer y decir algo por su cuenta. El segundo, ya que en algunas propuestas no se consideraba o no era claro: el objeto matemático, el propósito en función de lo que se esperaba que los estudiantes hicieran o interpretaran y cómo se esperaba que realizaran la tarea. El tercero, pues varias de las propuestas tenían una concepción errónea o superficial de lo que es cada uno de los procesos y sus niveles, tipos, habilidades, etc.

Para abordar las debilidades que encontramos en cada una de las tareas, hicimos uso de nuestro marco de referencia. Con este, realizamos cada uno de los análisis didácticos de las propuestas de tareas e hicimos modificaciones, manteniendo lo que más se podía de la estructura que planteaban los autores. También, nos ayudó a agregar elementos claves para enriquecer cada aspecto de las tareas, por ejemplo, en los procesos cognitivos geométricos.

5.3. Aprendizajes como futuros licenciados

La elaboración de este trabajo significó para nosotros una oportunidad para diseñar tareas matemáticas dirigidas a la educación básica, con un enfoque nuevo en donde quisimos hacer un aporte al cambio de la enseñanza memorística a la enseñanza por procesos. El desarrollo del trabajo nos permitió evidenciar que los procesos cognitivos son importantes en el diseño de una tarea. Ganamos conciencia de lo que deseamos que los estudiantes logren con esta y junto con los aprendizajes esperados vemos que permiten crear una ruta cognitiva de aprendizaje de los estudiantes. Nos parece importante esto, ya que es una labor diaria de los docentes.

Al realizar el análisis de las tareas observamos que en los tipos de representaciones no habíamos considerado el sellado como tipo de representación. En el presente trabajo sí consideramos al sellado como un tipo de representación. También, pudimos observar que uno de los mejores materiales a usar son los multicubos, para trabajo en 3D. Al realizar nuestras propuestas de tareas pudimos evidenciar tres cosas: i) algunas fortalecen principalmente algunos procesos, pero esto no quiere decir que los otros procesos no se desarrollen; ii) hay varias estrategias en el actuar del docente para abordar las dificultades quese den en el desarrollo de la clase. En nuestras descripciones mostramos algunas de acuerdo conla tarea; por ejemplo, cuando describimos el uso de cuñas para la enseñanza de medición de ángulos, o el uso de palitos en el transportador para este mismo objetivo; iii) la estructura del enunciado debe invitar a explorar a los estudiantes, convirtiéndolos en protagonistas del procesode construcción de su conocimiento.

Al terminar este trabajo de grado pudimos notar lo difícil que es analizar propuestas ajenas, pues teníamos que ser muy precavidos con los comentarios y argumentos que usábamos cuando no estábamos de acuerdo con una idea planteada. Sin embargo, creemos que es más complejo sugerir nuevas propuestas, ya que se puede caer en errores ya documentados.

5.4. Aporte del trabajo a la comunidad de educación matemática.

El material producido (Anexo 3) es nuestra contribución a la comunidad de educación matemática. Está dirigido a maestros y futuros licenciados. Esperamos que sirva para impulsar un cambio en la enseñanza de los contenidos matemáticos, para plantear a los estudiantes tareas que los desafíen y los lleven a mejorar su aprendizaje geométrico. Además, creemos que futuros licenciados en matemáticas pueden aplicar las tareas aquí planteadas y dar a conocer los resultados del desarrollo del pensamiento geométrico en la educación básica, como un trabajo de grado. También se pueden disponer de ejemplos sobre cómo poner en funcionamiento los elementos de diseño que proponen Gómez, Mora y Velasco, (2016).

5.5. Proyecciones del trabajo

Vemos la posibilidad de escribir un artículo de divulgación y realizar alguna ponencia para que otros profesores conozcan la propuesta que planteamos en este documento. También, proyectamos retomar este trabajo en nuestros estudios de posgrado, ya que queremos profundizar mucho más en el análisis y diseño de tareas de geometría, realizar modificaciones de acuerdo con las sugerencias que recibamos de las personas que las implementen y proponer otras tareas.

6. Referencias bibliográficas

Acosta, M., Camargo, L., Castiblanco, A. y Urquina, H. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Enlace Editores Ltda.

Aguayo, C., Flores, P., y Moreno, A. (2018). *The Objective Concept of a Mathematical Task for Future Teachers.* Bolema.

Aray, C., Párraga, O., y Chun, R. (2019). *La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. ReHuSo, 20 – 31.*

Ballestero, E., & Gamboa, R. (2009). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, 127.*

Camargo, L., Leguizamón, C., y Samper, C. (2002). *La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría.* EMA*, 293-309.*

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2017). *Tareas de geometría plana para la educación básica.*

Cañadas, M., Gómez, P., y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. *Obtenido de funes uniandes: http://funes.uniandes.edu.co/11904/1/Canadas2018Analisis.pdf*

Farias, Deninse & Pérez, Javier. (2009). *Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la Administración*. Formación universitaria. 3. 33-40.

Gómez, P. (03 de 12 de 2019). Noción de tarea matemática escolar. *Obtenido de coursea: https://es.coursera.org/lecture/ensenanza-matematicas-primaria/nocion-de-tarea-matematica-escolar-ndp6F*

Gómez, P., Mora, M., y Velasco, C. (2016). Análisis de instrucción. *Obtenido de funes uniandes: http://funes.uniandes.edu.co/11906/1/Gomez2018AnalisisInstruccion.pdf*

Gonzalvez , M. (2016). *El contexto, elemento de análisis para enseñar.* Revista del Instituto de Estudios en Educación y del Instituto de Idiomas Universidad del Norte*, 34-48.*

Gutiérrez, A. (1992): *Procesos y habilidades en visualización espacial*, en Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría (pp-44-59). México: CINVESTAV.

Gutiérrez, A. (1998). *Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial.* EMA*, 204-206.*

Herbst, P. (2012). *Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría.* AIEM, *7.*

Hershkowitz, R., Ben Haim, D., Holes, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., y Vinner, S. (1990). *International Group for the Psychology of Mathematics Education* p. 70.

Jiménez, S., y Salazar, V. (2016). Interpretaciones de niños de 4.º de primaria relativas al ángulo. *Obtenido de funes uniandes: http://funes.uniandes.edu.co/14208/1/Jimenez2019Interpretaciones.pdf*

Margolinas, C. (2013). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22 Oxford:* ICMI studies, p. 9-15.

Marín, A. (2015). Selección de tareas "ricas" para el aprendizaje matemático en educación secundaria. *Obtenido de funes uniandes: http://funes.uniandes.edu.co/6518/1/Mar%C3%ADn2015Selecci%C3%B3n.pdf*

Marrades, R, y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44, 87-125.*

MEN. (07 de 06 de 1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. *Obtenido de Ministerio de Educación Nacional: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf*

Prior, J., y Torregrosa, G. (2013). *Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico.* Relime.

Tarky, M. I. (1979). *Estudio del pensamiento hipotético-deductivo en adolescentes chilenos.* Revista Latinoamericana de Psicología, 11*(2), 273-286.*

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). *On concept formation in geometry*. Zentralblattfür Didaktik der Mathematik, 83(1), 20-25.

7. Anexos

Anexo 1.

Base de datos

Tipo de trabajo	Autor(es)	Titulo	Tema matemático	Grado escolar al que va dirigido	Semestre en que se desarrolló el documento	Tipo de material usado en el diseño (concreto o software)	Profesor(a) a cargo del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría (Camargo o Pérez)
Tarea	Barragán.M y Barrera.J	Aprendiendo qué es un prisma, una pirámide y un cilindro con plastilina, palillos y moldes	Sólidos (prisma, pirámide y cilindro)	5°	2019-2	Concreto	Camargo
Tarea	Barreto.J	Desarrollo de habilidades de visualización espacial con rompecabezas en 3d	Sólidos (cubo)	10° y 11°	2019-2	Concreto	Camargo
Planeación	Barreto.J	Desarrollo de habilidades de visualización espacial con rompecabezas en 3d	Sólidos (cubo)	10° y 11°	2019-2	Concreto	Camargo

Informe	Barreto.J	Desarrollo de habilidades de visualización espacial con rompecabezas en 3d	Sólidos (cubo)	10° y 11°	2019-2	Concreto	Camargo
Tarea	Bejarano.A y Sánchez.R	Remodelando mi apartamento	Polígonos regulares e irregulares	8°	2019-2	Concreto	Camargo
Informe	Bejarano.A y Sánchez.R	Remodelando mi apartamento	Polígonos regulares e irregulares	8°	2019-2	Concreto	Camargo
Tarea	Bejarano.S y Benavides.S	Interactuemos con paralelogramos	Paralelogramos	8°	2019-2	Software	Camargo
Planeación	Bejarano.S y Benavides.S	Interactuemos con paralelogramos	Paralelogramos	8°	2019-3	Software	Camargo
Informe	Bejarano.S y Benavides.S	Interactuemos con paralelogramos	Paralelogramos	8°	2019-4	Software	Camargo
Tarea	Camacho.L y Pinzón.A	Concurso de percepción de formas 3D en sistemas de representación 2D	Sólidos irregulares	10°	2019-2	Concreto y Software	Camargo
Informe	Camacho.L y Pinzón.A	Concurso de percepción de formas 3D en sistemas de representación 2D	Sólidos irregulares	10°	2019-2	Concreto y Software	Camargo

Tarea	Cortes.W y Guzmán.C	Curiosa proporción entre lados y ángulos	Teorema del seno	9°	2019-2	Software	Camargo
Planeación	Cortes.W y Guzmán.C	Curiosa proporción entre lados y ángulos	Teorema del seno	9°	2019-2	Software	Camargo
Informe	Cortes.W y Guzmán.C	Curiosa proporción entre lados y ángulos	Teorema del seno	9°	2019-2	Software	Camargo
Tarea	Fernández.K y Vallejo.M	Problemas de medición indirecta en triángulos	Teorema del seno	9°	2019-2	Software	Camargo
Planeación	Fernández.K y Vallejo.M	Problemas de medición indirecta en triángulos	Teorema del seno	9°	2019-2	Software	Camargo
Informe	Fernández.K y Vallejo.M	Problemas de medición indirecta en triángulos	Teorema del seno	9°	2019-2	Software	Camargo
Tarea	Pérez.H	Midamos ángulos en nuestra ciudad	Medición de ángulos	4°	2019-2	Concreto	Camargo
Planeación	Pérez.H	Midamos ángulos en nuestra ciudad	Medición de ángulos	4°	2019-2	Concreto	Camargo
Informe	Pérez.H	Midamos ángulos en nuestra ciudad	Medición de ángulos	4°	2019-2	Concreto	Camargo
Tarea	Pineda.K y Romero.V	Descubriendo relaciones entre el perímetro y el área de figuras en	Perímetro y área	7°	2019-2	Concreto	Camargo

		el plano cartesiano					
Informe	Pineda.K y Romero.V	Descubriendo relaciones entre el perímetro y el área de figuras en el plano cartesiano	Perímetro y área	7°	2019-3	Concreto	Camargo
Tarea	Puentes.F y Sarmiento.J	Rompecabezas de áreas equivalentes	Perímetro y área	7°	2019-2	Concreto	Camargo
Informe	Puentes.F y Sarmiento.J	Rompecabezas de áreas equivalentes	Perímetro y área	7°	2019-3	Concreto	Camargo
Tarea	Rivas.J y Robayo.J	Descubramos algunas relaciones entre las fórmulas del área del paralelogramo y el trapecio usando rompecabezas	Área (paralelogramo, rectángulo y trapecio)	6°	2019-2	Concreto	Camargo
Tarea	Alarcón.D y Sánchez.T	¿Sabes que puede significar expresión a^2+b^2=c^2	Teorema de pitágoras	8°	2019-2	Software	Camargo
Informe	Alarcón.D y Sánchez.T	¿Sabes que puede significar expresión a^2+b^2=c^3	Teorema de pitágoras	8°	2019-2	Software	Camargo

Tarea	Cuartas.W y Tavera.L	Las ventanas de la iglesia y las familias de cuadriláteros	Cuadriláteros (paralelogramo-cometa-rectángulo-cuadrado y rombo)	8°	2019-2	Concreto	Camargo
Informe	Cuartas.W y Tavera.L	Las ventanas de la iglesia y las familias de cuadriláteros	Cuadriláteros (paralelogramo-cometa-rectángulo-cuadrado y rombo)	8°	2019-2	Concreto	Camargo
Planeación	Gonzalez.A	Relación entre formas 2D y 3D	Formas 2D y 3D	1°	2020-1	Concreto	Camargo
Informe	Gonzalez.A	Relación entre formas 2D y 3D	Formas 2D y 3D	1°	2020-1	Concreto	Camargo
Planeación	Hernández.A	Traslación figuras	Traslación figuras	7°	2020-1	Concreto	Camargo
Informe	Hernández.A	Traslación figuras	Traslación figuras	7°	2020-1	Concreto	Camargo
Informe	Carvajal.A y García.M	Rotación de figuras	Rotación de figuras	6°	2020-1	Concreto	Camargo
Informe	Contreras.B y Granados.A	Formas en tres dimesiones	Formas 3D	1°	2020-1	Concreto	Camargo
Planeación	Contreras.B y Granados.A	Formas en tres dimesiones	Formas 3D	1°	2020-1	Concreto	Camargo
Planeación	Montañez.K y Muñoz.E	Representación de formas sólidas y formas planas.	Vistas de formas 3D	4°	2020-1	Concreto	Camargo
Informe	Montañez.K y Muñoz.E	Representación de formas sólidas y formas planas.	Vistas de formas 3D	4°	2020-1	Concreto	Camargo

Planeación	Sarmiento.J	Justificación de la propiedad: la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180	Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo	10°	2020-1	Software	Camargo
Informe	Sarmiento.J	Justificación de la propiedad: la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 181	Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo	10°	2020-1	Software	Camargo
Planeación	Cruz.J	Triángulo Isósceles	Triángulo Isósceles	6°	2020-1	Software	Camargo
Informe	Cruz.J	Triángulo Isósceles	Triángulo Isósceles	6°	2020-1	Software	Camargo
Planeación	García.K	Figuras tridimensionales y bidimensionales	Formas 2D y 3D	4°	2020-1	Concreto	Camargo
Planeación	Forero.J y Villarraga.V	Símetría Axial	Símetría Axial	4°	2020-1	Concreto	Camargo
Informe	Forero.J y Villarraga.V	Símetría Axial	Símetría Axial	4°	2020-1	Concreto	Camargo
Planeación	Castañeda.V y Ortega.J	Formas geométricas 2D y 3D	Formas 2D y 3D	2°	2020-1	Concreto	Camargo
Informe	Castañeda.V y Ortega.J	Formas geométricas 2D y 3D	Formas 2D y 3D	2°	2020-1	Concreto	Camargo

Tarea	Alonso.D y Devia.J	¿Será posible construir un triángulo con cualquier trio de segmentos?	Desigualdad triangular	7°	2020-2	Concreto y Software	Camargo
Planeación	Alonso.D y Devia.J	¿Será posible construir un triángulo con cualquier trio de segmentos?	Desigualdad triangular	7°	2020-2	Concreto y Software	Camargo
Informe	Alonso.D y Devia.J	¿Será posible construir un triángulo con cualquier trio de segmentos?	Desigualdad triangular	7°	2020-2	Concreto y Software	Camargo
Tarea	Monroy.J y Ávila.O	¡Explorando y descubriendo el triángulo isósceles y sus propiedades!	Triángulo Isósceles	7°	2020-2	Software	Camargo
Informe	Monroy.J y Ávila.O	¡Explorando y descubriendo el triángulo isósceles y sus propiedades!	Triángulo Isósceles	7°	2020-2	Software	Camargo

Informe	Carvajal.D y Moreno.L	¿Cómo promover la argumentación inductiva en estudiantes de grado sexto a partir de la exploración en GeoGebra y el descubrimiento de la bisección de las diagonales de los paralelogramos?	Bisección paralelogramos	6°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Carvajal.D y Moreno.L	¿Cómo promover la argumentación inductiva en estudiantes de grado sexto a partir de la exploración en GeoGebra y el descubrimiento de la bisección de las diagonales de los paralelogramos?	Bisección paralelogramos	6°	2020-2	Software	Camargo
Planeación	Duran.A y Rodríguez.B	Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado	Criterio de congruencia LAL	7°	2020-2	Software	Camargo
Informe	Duran.A y Rodríguez.B	Criterio de congruencia	Criterio de congruencia LAL	7°	2020-2	Software	Camargo

		Lado-Ángulo-Lado					
Tarea	Duran.A y Rodríguez.B	Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado	Criterio de congruencia LAL	7°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Malagón.S y Pinzón.L	Exploración de triángulos semejantes	Semejanza de triángulos	9°	2020-2	Software	Camargo
Informe	Malagón.S y Pinzón.L	Exploración de triángulos semejantes	Semejanza de triángulos	9°	2020-2	Software	Camargo
Planeación	Marín.J y Ortega.L	En un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes	Ángulos paralelogramo	8°	2020-2	Software	Camargo
Informe	Marín.J y Ortega.L	En un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes	Ángulos paralelogramo	8°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Marín.J y Ortega.L	En un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes	Ángulos paralelogramo	8°	2020-2	Software	Camargo
Informe	Muñoz.O y Silva.J	Si dos triángulos tienen dos lados congruentes y el ángulo que estos lados determinan es también congruente, entonces los	Criterio de congruencia LAL	8°	2020-2	Software	Camargo

		triángulos son congruentes					
Tarea	Muñoz.O y Silva.J	Si dos triángulos tienen dos lados congruentes y el ángulo que estos lados determinan es también congruente, entonces los triángulos son congruentes	Criterio de congruencia LAL	8°	2020-2	Software	Camargo
Planeación	Muñoz.O y Silva.J	Si dos triángulos tienen dos lados congruentes y el ángulo que estos lados determinan es también congruente, entonces los triángulos son congruentes	Criterio de congruencia LAL	8°	2020-2	Software	Camargo
Planeación	Niño.D y Romero.L	El segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado	T. Segmento – puntos medios	8° y 9°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Niño.D y Romero.L	El segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de	T. Segmento – puntos medios	8° y 9°	2020-2	Software	Camargo

		un triángulo es paralelo al tercer lado					
Informe	Niño.D y Romero.L	El segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado	T. Segmento – puntos medios	8° y 9°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Olarte.A y Rodríguez.H	T. Lados desiguales – ángulos desiguales y T. Ángulos desiguales – lados desiguales	T. Lados desiguales – ángulos desiguales y T. Ángulos desiguales – lados desiguales	9°	2020-2	Software	Camargo
Informe	Olarte.A y Rodríguez.H	T. Lados desiguales – ángulos desiguales y T. Ángulos desiguales – lados desiguales	T. Lados desiguales – ángulos desiguales y T. Ángulos desiguales – lados desiguales	9°	2020-2	Software	Camargo
Planeación	Olarte.A y Rodríguez.H	T. Lados desiguales – ángulos desiguales y T. Ángulos desiguales – lados desiguales	T. Lados desiguales – ángulos desiguales y T. Ángulos desiguales – lados desiguales	9°	2020-2	Software	Camargo

Planeación	Rojas.L y Zamudio.G	Criterio de Semejanza Ángulo-Ángulo (AA) para triángulos rectángulos: Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente entonces son semejantes	Criterio de semejanza AA	9°	2020-2	Software	Camargo
Informe	Rojas.L y Zamudio.G	Criterio de Semejanza Ángulo-Ángulo (AA) para triángulos rectángulos: Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente entonces son semejantes	Criterio de semejanza AA	9°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Rojas.L y Zamudio.G	Criterio de Semejanza Ángulo-Ángulo (AA) para triángulos rectángulos: Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo	Criterio de semejanza AA	9°	2020-2	Software	Camargo

		agudo congruente entonces son semejantes					
Informe	Vargas.M y Vargas.Y	Cambiando de lugar	Rotación de figuras	6°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Vargas.M y Vargas.Y	Cambiando de lugar	Rotación de figuras	6°	2020-2	Software	Camargo
Tarea	Diaz.J y Mayorga.R	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	7°	2020-1	Concreto	Pérez
Planeación	Diaz.J y Mayorga.R	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	7°	2020-1	Concreto	Pérez
Informe	Diaz.J y Mayorga.R	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	7°	2020-1	Concreto	Pérez
Tarea	Casallas.M y Parra.J	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	7°	2020-1	Concreto	Pérez
Planeación	Casallas.M y Parra.J	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	7°	2020-1	Concreto	Pérez
Informe	Casallas.M y Parra.J	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	7°	2020-1	Concreto	Pérez
Tarea	Supelano.L	Movimiento y transformaciones en el plano	Movimiento y transformaciones en el plano	8°	2020-1	Concreto	Pérez
Planeación	Supelano.L	Movimiento y transformaciones en el plano	Movimiento y transformaciones en el plano	8°	2020-1	Concreto	Pérez
Informe	Supelano.L	Movimiento y transformaciones en el plano	Movimiento y transformaciones en el plano	8°	2020-1	Concreto	Pérez
Tarea	Bohórquez.L y Suarez.L	Lineas y puntos notables de un triángulo	Lineas y puntos notables de un triángulo	8°	2020-1	Concreto	Pérez

Planeación	Bohórquez.L y Suarez.L	Lineas y puntos notables de un triángulo	Lineas y puntos notables de un triángulo	8°	2020-1	Concreto	Pérez
Informe	Bohórquez.L y Suarez.L	Lineas y puntos notables de un triángulo	Lineas y puntos notables de un triángulo	8°	2020-1	Concreto	Pérez
Tarea	Mendivelso.N y Moreno.E	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	9°	2020-1	Concreto	Pérez
Planeación	Mendivelso.N y Moreno.E	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	9°	2020-1	Concreto	Pérez
Informe	Mendivelso.N y Moreno.E	Congruencia de triángulos	Congruencia de triángulos	9°	2020-1	Concreto	Pérez
Tarea	Torres.R	Circunferencia	Circunferencia	5°	2020-2	Concreto y Software	Pérez
Planeación	Torres.R	Circunferencia	Circunferencia	5°	2020-2	Concreto y Software	Pérez
Informe	Torres.R	Circunferencia	Circunferencia	5°	2020-2	Concreto y Software	Pérez
Tarea	García.D	Teorema de pitágoras y teorema de Tales	Teorema de pitágoras y teorema de Tales	9°	2020-2	Concreto	Pérez
Planeación	García.D	Teorema de Pitágoras y teorema de Tales	Teorema de Pitágoras y teorema de Tales	9°	2020-2	Concreto	Pérez
Informe	García.D	Teorema de Pitágoras y teorema de Tales	Teorema de Pitágoras y teorema de Tales	9°	2020-2	Concreto	Pérez
Tarea	Vargas.S	Demostración teorema de Pitágoras	Demostración teorema de Pitágoras	9°	2020-2	Concreto	Pérez
Planeación	Vargas.S	Demostración teorema de Pitágoras	Demostración teorema de Pitágoras	9°	2020-2	Concreto	Pérez

Informe	Vargas.S	Demostración teorema de Pitágoras	Demostración teorema de Pitágoras	9°	2020-2	Concreto	Pérez
Tarea	Gonzalez.D	Coordenadas polares	Coordenadas polares	11°	2020-2	Concreto y Software	Pérez
Planeación	Gonzalez.D	Coordenadas polares	Coordenadas polares	11°	2020-2	Concreto y Software	Pérez
Informe	Gonzalez.D	Coordenadas polares	Coordenadas polares	11°	2020-2	Concreto y Software	Pérez

Anexo 2

Base de Datos de los Elementos

Autor (es)	Requisitos	Metas o aprendizajes esperados	Enunciado de la tarea	Descripción de la tarea	Procesos cognitivos	Materiales y recursos	Interacción y comunicación en clase, agrupamiento y temporalidad	Estructura conceptual	Fenomenología
Alarcón.D y Sánchez.T	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
García.D	✓	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Vargas.S	✓	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Alonso.D y Devia.J	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Barragán.M y Barrera.J	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x
Bejarano.A y Sánchez.R	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Bejarano.S y Benavides.S	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Carvajal.D y Moreno.L	x	x	✓	✓	✓	x	x	x	x

Marín.J y Ortega.L	x	x	✓	R	✓	✓	✓	✓	x
Duran.A y Rodríguez.B	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Muñoz.O y Silva.J	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Diaz.J y Mayorga.R	✓	✓	R	x	R	✓	x	✓	x
Casallas.M y Parra.J	✓	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Mendivelso.N y Moreno.E	✓	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Hernández.A	x	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	x
Vargas.M y Vargas.Y	x	x	✓	✓	x	x	x	x	x
Supelano.L	x	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Gonzalez.A	x	✓	R	x	✓	✓	✓	✓	x
Contreras.B y Granados.A	x	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	x
Montañez.K y Muñoz.E	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x
García.K	x	✓	x	x	✓	✓	x	x	x
Castañeda.V y Ortega.J	x	✓	x	x	✓	✓	✓	✓	x
Cruz.J	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x
Monroy.J y Ávila.O	x	x	✓	✓	x	x	x	x	x

Forero.J y Villarraga.V	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	x
Pérez.H	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x
Malagón.S y Pinzón.L	x	x	✓	✓	x	x	x	x	x
Rojas.L y Zamudio.G	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Niño.D y Romero.L	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Olarte.A y Rodríguez.H	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x
Pineda.K y Romero.V	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x
Puentes.F y Sarmiento.J	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Rivas.J y Robayo.J	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Cuartas.W y Tavera.L	x	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	x
Bohórquez.L y Suarez.L	✓	✓	R	x	R	✓	✓	✓	x
Torres.R	✓	✓	✓	x	R	✓	✓	✓	x

Anexo 3

Cuadernillo de tareas

TAREAS DE GEOMETRÍA PARA MAESTROS DE LA EDUCACIÓN BÁSICA: UN APOYO A LA ENSEÑANZA POR PROCESOS

Adriana Sofia Ivana González Vargas
Heyber Alejandro Pérez Ramírez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2022

Presentación

El presente compendio de tareas de geometría para educación básica (primaria y secundaria), es un material de apoyo dirigido a los profesores de la asignatura de matemáticas, de los grados primero a noveno. Cuenta con la fundamentación de cada uno de los elementos tenidos en cuenta para el diseño de las tareas, los procesos cognitivos geométricos a desarrollar y las 14 tareas diseñadas.

El propósito principal de este libro es enriquecer los recursos de que dispone el profesor para ayudar a sus estudiantes a estudiar y entender las matemáticas, específicamente la geometría. Además, se desea proporcionar un cambio en la enseñanza tradicional memorística y llevar a que los estudiantes desarrollen procesos tales como: visualizar, representar, conceptualizar, conjeturar y argumentar.

Con este trabajo los maestros dispondrían de propuestas alternativas para la enseñanza de algunos temas seleccionados. No pretendemos que las tareas se constituyan en la respuesta única a los problemas que se dan en la enseñanza de la geometría, pero sí que sirvan como insumo para que los docentes amplíen su conocimiento, conozcan otras opciones y, lo más importante, desarrollen su creatividad para favorecer los procesos de pensamiento de sus estudiantes.

Por ello, las tareas que encontrará el lector estarán constituidas por: el o los aprendizajes esperados, el enunciado, la descripción, los requisitos, los procesos geométricos que se buscan desarrollar y los materiales y/o recursos que se requieren para realizar la tarea.

Contenido

Fundamento

En este apartado consideramos cinco elementos para el diseño una tarea matemática escolar. Para la conceptualización y caracterización de estos nos basamos en las propuestas de Gómez, Mora y Velasco, (2016) y algunos aprendizajes logrados en el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, orientado por la docente Leonor Camargo.

Aprendizajes esperados. Los aprendizajes esperados son oraciones breves, iniciadas por un verbo, donde se especifican: los objetos matemáticos, los propósitos expresados en función de lo que se espera que los estudiantes logren hacer o interpretar, y cómo se espera que lo logren al realizar la tarea. Estos permiten demarcar el objetivo de la tarea desde el punto de vista del aprendizaje de los escolares (Gómez, Mora y Velasco, 2016).

Enunciado: El enunciado es una formulación o instrucción concisa que va dirigida a los escolares. Esta debe estimular a pensar, hacer o decir algo por su cuenta. Debe incluir: un título sugestivo; la descripción de una situación problemática, la cual, si se presenta en un contexto, debe ser cercano a los estudiantes; y una o más preguntas que se constituyan en el reto para ellos (Camargo, comunicación personal).

Descripción de la tarea. La descripción de una tarea es una breve explicación dirigida al maestro, en donde se indica lo que se espera que los estudiantes realicen, de acuerdo con el enunciado de la tarea. Esta debe contener de manera global cómo se va a llevar a cabo la tarea y los aprendizajes que se espera que obtengan los escolares (Camargo, comunicación personal).

Requisitos. Los requisitos se refieren al lenguaje matemático, las destrezas y los conocimientos previos, que se vinculan directamente con los aprendizajes esperados de una tarea, de acuerdo con el grado al que va dirigida (Gómez, Mora y Velasco, 2016).

Materiales y recursos. Los materiales son medios diseñados con fines didácticos y los recursos son medios que se emplean para el aprendizaje de un concepto o procedimiento geométrico, aunque no hayan sido diseñados con este fin. Su función es contribuir al logro de las metas que se tienen de la tarea, ser un intermediario entre el conocimiento matemático y el de los escolares y servir de modelo de las ideas matemáticas al proporcionar un paso de lo concreto a lo abstracto (Gómez, Mora y Velasco, 2016). La tarea debe incluir el nombre del material o recurso y una breve descripción del uso que se le dará.

Procesos cognitivos propios del trabajo en geometría

En este apartado damos a conocer lo que entendemos como proceso de: visualización, representación, conceptualización, conjeturación y argumentación. Además, proponemos algunas clasificaciones.

Proceso de visualización

Sobre el proceso de visualización, tomamos en cuenta la definición que formulan Hershkowitz, BenHaim, Holes, Lappan, Mitchelmore, y Vinner (1990). La visualización es la "habilidad de construir, transformar, generalizar, comunicar y representar mentalmente imágenes que están inmersas en las matemáticas" (p.75).

Para establecer cómo una tarea apoya la visualización nos basamos en los siguientes niveles propuestos por Acosta, Camargo, Castiblanco y Urquina (2004).

- *Percepción visual global*: es en el que las formas o figuras se perciben como un todo y eventualmente se asocian a objetos físicos.
- *Percepción e interpretación de elementos constitutivos y propiedades de estos*: aquí no solamente se percibe la forma global, sino que se percibe la forma o la figura constituida por elementos de una misma dimensión o de dimensiones inferiores.
- *Visual operativa*: ya no se trata únicamente de percibir elementos constitutivos de una configuración, sino de hacer una manipulación mental de las subconfiguraciones, para obtener otra disposición significativa y útil.

Por otra parte, Del Grande (1990; citado por Gutiérrez, 1992) determina ciertas habilidades que intervienen en el proceso de visualización. Estas son:

- *Coordinación motriz de los ojos*: es la destreza para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma rápida y eficaz.
- Identificación visual: es la pericia para reconocer una figura aislándola de su contexto.
- *Conservación de la percepción*: es la habilidad para identificar que un objeto mantiene su forma, aunque deje de verse total o parcialmente.
- *Reconocimiento de posiciones en el espacio*: es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo o con otro objeto que actúa como punto de referencia.
- *Reconocimiento de las relaciones espaciales*: es la destreza que permite determinar correctamente las características de las relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
- *Discriminación visual*: es la pericia para contrastar varios objetos determinando sus semejanzas y diferencias visuales.
- *Memoria visual*: es la habilidad que permite tener presente las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que están a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Además, tuvimos en cuenta dos principios fundamentales para trabajar con geometría dinámica, propuestos por Acosta, Camargo, Castiblanco y Urquina (MEN, 2004), los cuales describimos a continuación:

- *Dudar de lo que se ve*: es no dar como verdadero lo que se percibe en una imagen estática, mediante exploración hay que confirmar su invariabilidad.
- *Ver más de lo que se ve:* es estudiar una figura e intentar revelar las relaciones que no se ven a simple vista.

Por último, consideramos las aprehensiones visuales propuestas por Duval (1998; citado por Prior y Torregrosa, 2013):

-La aprehensión perceptiva: se caracteriza por la identificación simple de una configuración, es decir, que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar.

– *La aprehensión discursiva*: es donde se asocia la configuración identificada con definiciones, teoremas, axiomas matemáticos conocidos. Ésta se realiza a partir de dos cambios de anclaje posibles:

- *Del anclaje visual al discursivo*: a una representación se le puede asociar distintas afirmaciones matemáticas.
- *Del anclaje discursivo al visual*: ante una afirmación acerca de un objeto matemático, el observador es capaz de realizar una configuración que refleja alguna de las características de este.

-*La aprehensión operativa*: se produce cuando, para resolver un problema geométrico, el resolutor realiza alguna modificación física o mental de la configuración inicial. Dependiendo de la modificación producida, podemos distinguir dos tipos:

- Aprehensión operativa de cambio figural: cuando a la configuración inicial se le añaden (o quitan) elementos geométricos (subconfiguraciones).
- Aprehensión operativa de reconfiguración: cuando las subconfiguraciones iniciales se mueven como si fueran piezas de un rompecabezas.

Proceso de representación

El proceso de representación consiste en la elaboración y uso de imágenes bi y tridimensionales externas, las cuales, a medida de su creación van reflejando propiedades, elementos y/o relaciones geométricas que las representan. Ninguna representación captura y expone de manera transparente al objeto a representar, pues, aunque este proceso ayuda a la percepción de elementos y propiedades, es inevitable la pérdida de información (Camargo, comunicación personal).

Para examinar cómo una tarea favorece la representación plana nos vamos a basar en los siguientes tipos de representación:

- *Mano alzada:* en este tipo de representación los estudiantes hacen uso únicamente de lápiz y papel. Gutiérrez (1998) sugiere distintas etapas, las cuales son: Esquemática plana (dibujos bidimensionales), Esquemática espacial (dibujos tridimensionales sin tener en cuenta varias nociones geométricas), Pre-realista (contempla algunas nociones geométricas) y Realista (representación que tiene en cuenta elementos y propiedades geométricas).

- *Instrumentos de medición*: en este tipo se emplea regla graduada, escuadra y transportador. Los estudiantes atienden a subconfiguraciones con medidas específicas y además se empiezan a cuestionar sobre la existencia o no de una o varias representaciones que contengan una lista de atributos (Camargo, Perry y Samper, 2017).
- *Instrumentos de trazo*: en este tipo los estudiantes realizan representaciones con instrumentos de trazo: regla no graduada y compás. En tales representaciones, los atributos geométricos han sido obtenidos como consecuencia del uso de los instrumentos. Acercan y ubican al estudiante más en el terreno de las propiedades geométricas que en el de la percepción visual.
- *Programas de geometría dinámica*: permiten construir varias representaciones donde los estudiantes pueden arrastrar ciertos elementos independientes de la construcción y apreciar modificaciones en la configuración, sin afectar las propiedades esenciales de esta, teniendo así a su disponibilidad gran cantidad de representaciones o ejemplos del objeto (Camargo, Perry y Samper, 2017).

Para el caso de los tipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, identificamos, como lo sugiere Gutiérrez (1998), las siguientes:

- *Módulos multicubo*: está representación se realiza con varios cubos iguales, pegados de manera que sus caras se superponen. Estos permiten trabajar diversidad de problemas de construcción a partir de figuras planas.
- *Representación tridimensional*: es una representación próxima a los sólidos, como los modelos de madera, papel o varillas.
- *Representación plana*: es una representación 2D de cuerpos espaciales. Dado que ninguna representación plana de cuerpos sólidos es perfecta, existen varios niveles de cercanía con el objeto 3D. Algunas de estas representaciones guardan información del aspecto visual, pero pierden la correspondiente a la parte oculta de los sólidos. Un ejemplo es la representación en perspectiva.

Proceso de conceptualización

Según Camargo, Leguizamón y Samper (2002), conceptualizar es construir el significado de un objeto, propiedad o relación geométrica que interviene en una tarea. Esta construcción se basa en la edificación mental de interpretaciones personales de una noción a través del cual se va construyendo la idea de esta. La interpretación se lleva a cabo a través de representaciones, visualización, impresiones o experiencias y del conjunto de propiedades que se van reconociendo del objeto. También se fundamenta en la elaboración de una definición del concepto, la cual es presentada por medio de un enunciado que fija con exactitud y precisión el significado o la naturaleza de un objeto geométrico. El reto del proceso de conceptualización es favorecer la articulación entre la definición del concepto y la imagen del concepto, para avanzar en la conceptualización geométrica. Esto se logra de cuatro maneras: la primera es el establecimiento de propiedades relevantes e irrelevantes que tienen los objetos. La segunda en la construcción de figuras representativas con diferentes instrumentos. La tercera en la construcción de un espacio de ejemplos y la última en el análisis de definiciones (Camargo, Leguizamón y Samper, 2002).

Por lo anterior, para observar de qué manera una tarea ayuda al desarrollo de la conceptualización miramos si la tarea busca:

- Ampliar la identificación de componentes (configuraciones 3D, 2D, 1D, 0D), relaciones entre componentes (paralelismo, perpendicularidad, congruencia, equidistancia, colinealidad) y propiedades entre elementos constitutivos que se conocen.
- Establecer semejanzas y diferencias entre objetos geométricos.
- Clasificar los objetos en familias.
- Identificar de atributos en ejemplos y el reconocimiento de la falta de atributos en no ejemplos.
- Elaborar un conjunto de propiedades necesarias y suficientes que determinan el objeto o la relación; esto en función de producir o analizar una definición (Vinner y Hershkowitz, 1983).

Proceso de conjeturación

Conjeturar es formular enunciados de carácter general, que están basados en la visualización o en la exploración que realice el escolar (Camargo, comunicación personal).

Para abordar la conjeturación en una tarea, los estudiantes pueden explorar y descubrir propiedades de diferentes maneras. Según Marrades y Gutiérrez (2000) hay estas:

- *Empirismo ingenuo*: los estudiantes formulan la conjetura a partir de percibir o explorar un número pequeño de representaciones y descubren la propiedad que cumplen todas estas.
- *Experimento crucial*: los estudiantes examinan un caso extremo, con alguna característica que no es común, además exploran un pequeño número de representaciones.
- *Ejemplo genérico*: los estudiantes enuncian la conjetura a partir de la exploración de una representación particular, la cual representa una clase de objetos.
- *Experimento mental:* los estudiantes formulan la conjetura con ayuda de la exploración teórica de relaciones entre propiedades geométricas.

Proceso de argumentación

Argumentar es producir razones a través de enunciados que sustentan afirmaciones que requieren ser justificadas con las reglas asumidas por la comunidad de la clase. Según el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (comunicación personal), para establecer cómo una tarea apoya la argumentación se debe identificar si la tarea pide sustentar una afirmación. Si es así, se debe ver si la tarea promueve la explicitación de la aserción y de datos y garantías que la sustentan. Dichas garantías pueden ser:

- *Informales*: producto de una convicción personal, de una autoridad, de fuentes no institucionalizadas.

- *Matemáticas*: provenientes de hechos geométricos o definiciones del sistema de conocimientos del que se dispone.

El grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría también tiene en cuenta si la tarea se enfoca en que el escolar exprese un argumento deductivo o inductivo. A continuación, presentamos la definición de cada uno de estos tipos de argumento.

- *Argumento deductivo*: la aserción es el elemento inferido (durante la argumentación) necesariamente a partir de un dato y una garantía. Es decir, la aserción es consecuencia necesaria del dato con el que cuenta quien argumenta; el rasgo característico de "consecuencia necesaria" proviene de la garantía escogida y del uso de un esquema de razonamiento válido en la lógica bivalente.
- *Argumento inductivo*: la aserción y la garantía (patrón de generalización) son los elementos inferidos (durante la argumentación) a partir de un dato, y ambos son de naturaleza probable. Un argumento inductivo puede ir de lo particular a lo general [P-G], de lo particular a lo particular [P-P], de lo general a lo particular [G-P] y de lo general a lo general [G-G].

RELACIÓN DE FORMAS 2D Y 3D

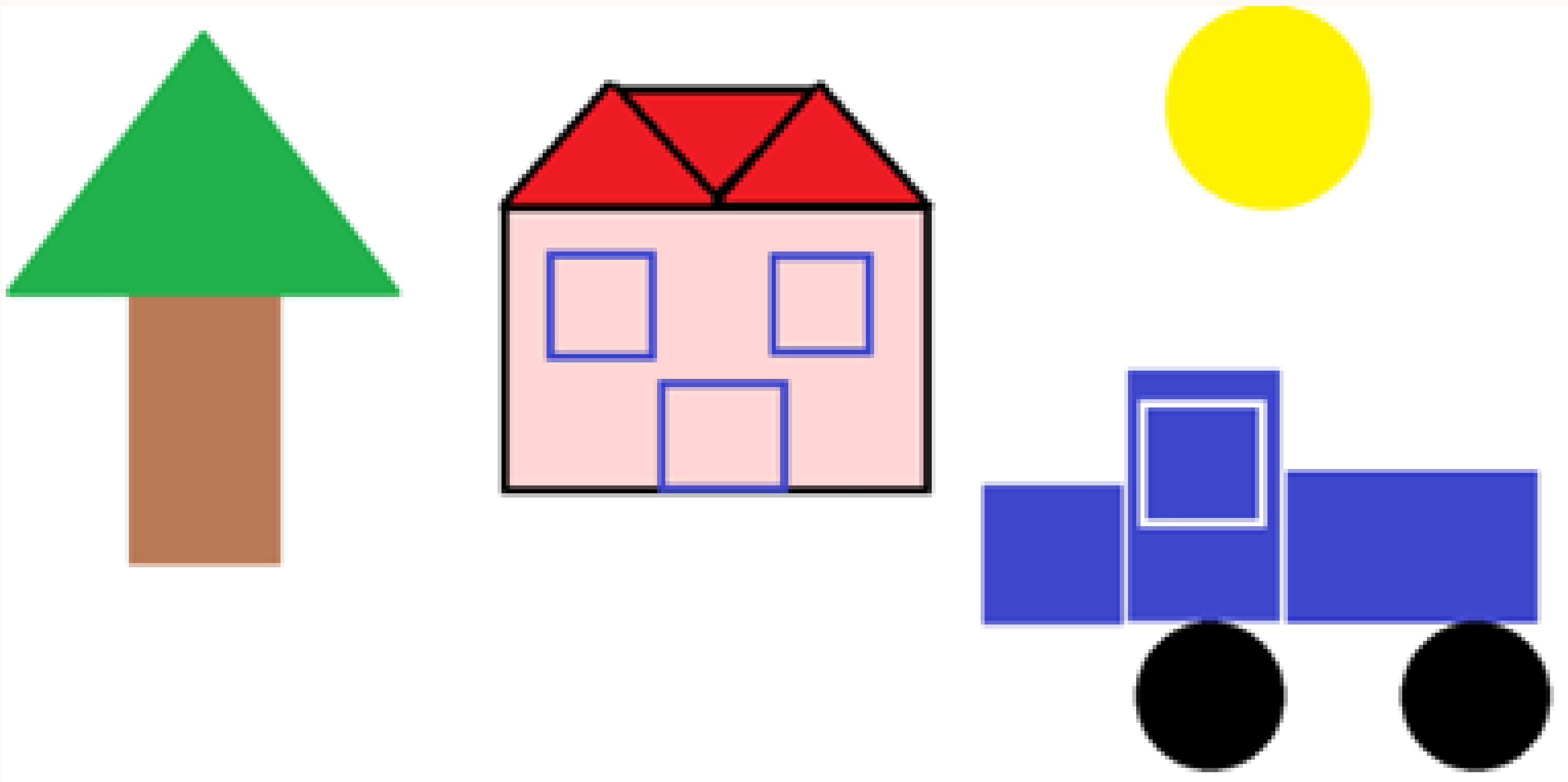
Aprendizaje esperado

Reconocer qué formas planas (cuadrado, círculo, rectángulo y triángulo) son partes constitutivas de formas 3D (cono, cilindro, prisma rectangular, prisma triangular, pirámide y cubo), a partir del sellado de las caras de los sólidos.

Enunciado

¡Ayúdame a reconstruir la obra de arte!

Evelin fue con sus padres a visitar el museo de arte. Se encontró con la siguiente obra que le gustó mucho.



Ella quiere reconstruir esa pintura en una pared de su cuarto, para ello cuenta con las siguientes formas 3D.

¿Pueden ayudarla a encontrar las formas que dejaron las huellas en la obra de arte?

Descripción de la tarea

Los escolares visualizan el diseño que quiere reconstruir Evelin. Luego relacionan qué caras de las formas 3D dejan las huellas de las figuras que se usan en la obra de arte. Ya sea tomando la forma y observando si sirve ...nsayo y error", o

Requisitos

Lenguaje matemático: denominación de: cuadrado, triángulo, rectángulo y círculo.
Destrezas: habilidad para usar pintura y pinceles.
Conocimientos previos: reconocimiento perceptual –

Procesos geométricos

Visualización: la tarea contribuye al desarrollo de este proceso, tanto en el Nivel 1 de percepción global de las formas 2D y 3D con las que se va a trabajar, como en el Nivel 2 en la identificación de partes constitutivas. Lo anterior, porque los estudiantes pueden reconocer que el sólido está constituido de caras y que estas tienen cierta forma conocida. Además, se propicia la aprehensión discursiva del anclaje visual al discursivo ya que los estudiantes asocian a cada una de las formas 3D una afirmación matemática respecto a sus caras.
Conceptualización: la tarea favorece este proceso cuando los estudiantes identifican semejanzas y diferencias entre las formas bidimensionales y las caras de los cuerpos tridimensionales.
Argumentación: la tarea desarrolla este proceso al momento en que los estudiantes argumentan, desde su convicción personal, por qué eligen cierta forma 3D para dejar una huella de una forma 2D.

Materiales y recursos

Materiales:

- Hoja con el enunciado de la tarea.
- Formas sólidas: Se sugiere que el material con el que estén hechas las formas sea el icopor.

Recursos:

- Pintura: Para poder realizar el sellado de las caras.
- Pliegos de papel periódico: Para que los estudiantes realicen su diseño.
- Pincel o plato plano desechable: Para poder pintar la cara de la forma a usar.

MODELACIÓN, REPRESENTACIÓN Y VISUALIZACIÓN DE FORMAS 3D

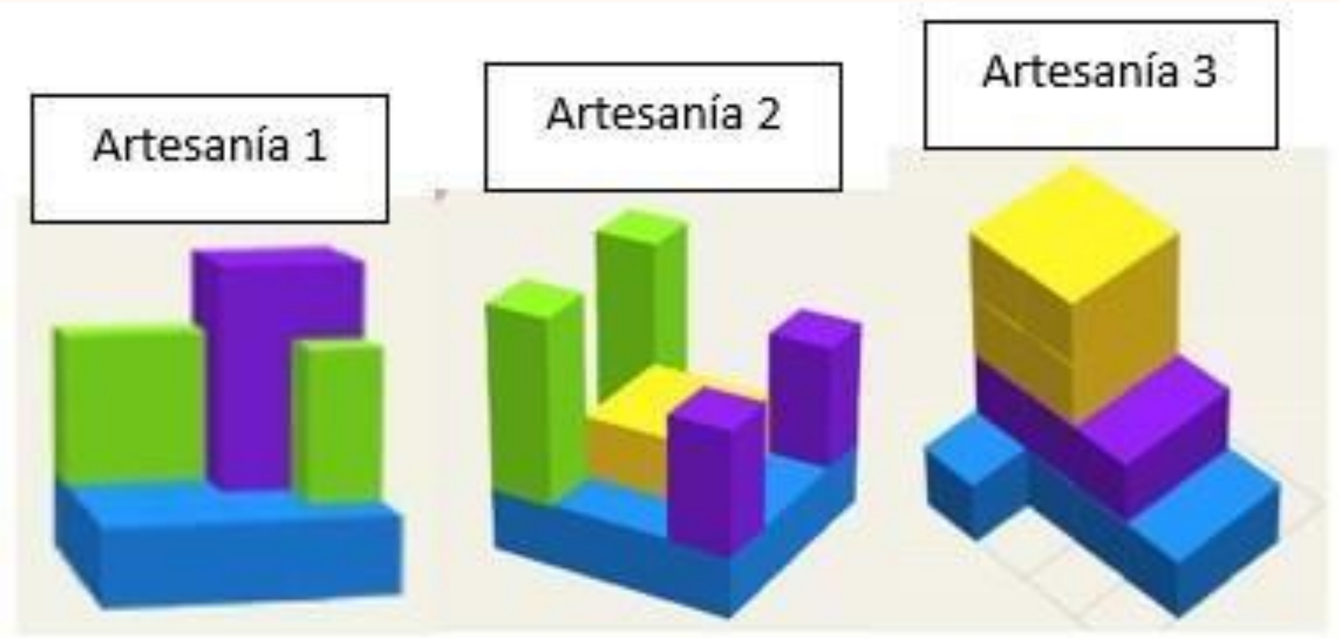
Aprendizajes esperados

- Identificar y relacionar las formas planas que se pueden encontrar en las caras de objetos sólidos (que tienen sus caras paralelas y perpendiculares).
- Modelar un objeto sólido dadas las caras de este, a partir del uso multicubos.

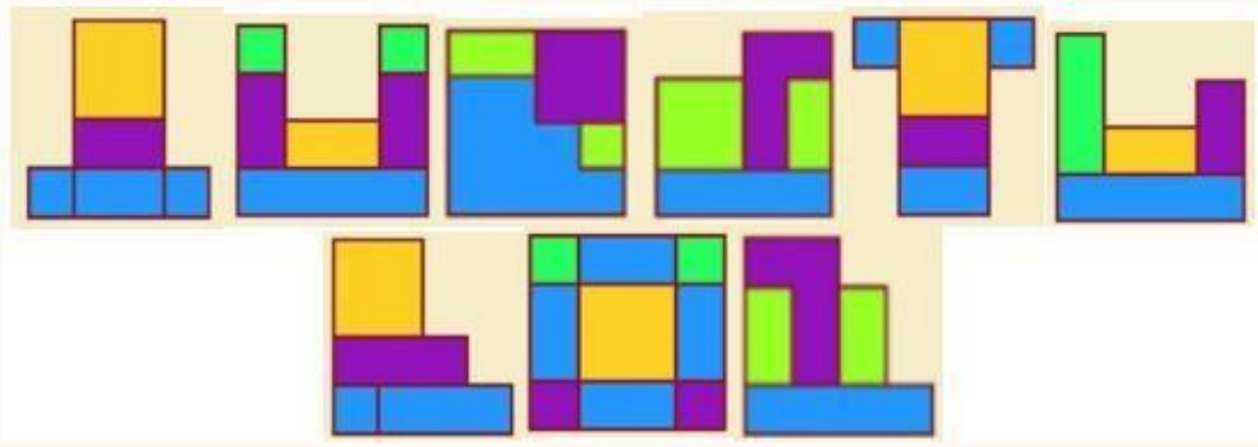
Enunciado

Identifica las caras de las artesanías

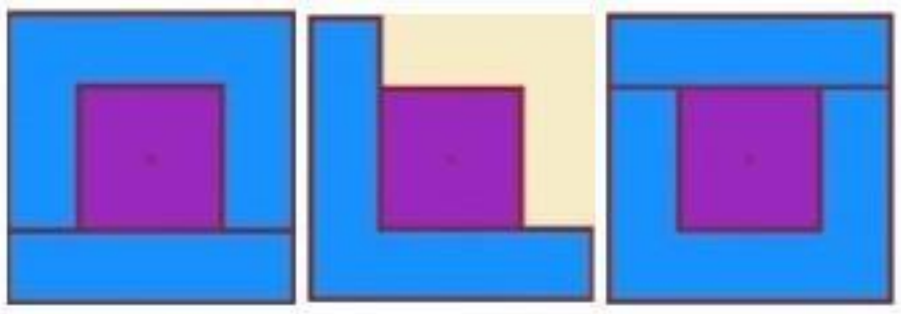
Un carpintero trabaja con madera para hacer artesanías que le encargan sus clientes. Algunas de las siguientes son representaciones de esas artesanías:



Un día el carpintero dejó una de esas artesanías encima de una mesa. Su hijo, mientras caminaba, notó que dependiendo del lugar de donde estaba él veía las artesanías de una forma diferente. Con un lápiz y un papel dibujó las siguientes representaciones de cómo se veían las artesanías desde arriba, desde el frente y desde un lado. Averigua cuáles son las caras de cada artesanía y en cada caso responde: ¿A qué artesanía pertenece la cara? y ¿Qué vista es frente, superior o lateral?



Después hacer la identificación, modela una tercera artesanía y hazlo teniendo en cuenta la representación de las caras en el papel; para la construcción, utiliza los multicubos. Por último, coloca la forma que hiciste en una mesa y camina alrededor, como lo hizo el artesano. Compara tu artesanía con las imágenes de las caras y comprueba si está bien hecha.



Descripción de la tarea

En un primer momento los escolares visualizan unos objetos sólidos conformados por multicubos (llamadas artesanías 1, 2 y 3). Seguido a ello, identifican cuáles de las caras, que se dan en el enunciado, pertenecen a cada artesanía. Luego las clasifican escribiendo si estas corresponden a la vista superior, frontal o lateral. Por último, se propone a los estudiantes modelar una artesanía con ayuda de las caras que se le presentan y los multicubos que les proporcionará el docente.

Requisitos

Lenguaje matemático: caras del sólido, arriba, frente y lado, vistas: superior, lateral y frontal.
Destrezas: habilidad en el uso de multicubos para armar objetos estáticos.
Conocimientos previos: reconocimiento de algunos atributos de una forma sólida, tales como: caras y elementos constituyentes. Identificación de figuras planas como el cuadrado y el rectángulo.

Procesos geométricos

Visualización: la tarea contribuye al desarrollo de este proceso en el Nivel 2 de identificación de partes constitutivas, porque los estudiantes deben reconocer que el sólido está constituido de caras y que estas tienen una forma. También en el Nivel 1 visual operativo, ya que deben hacer una manipulación mental para llegar a identificar qué caras y qué vistas corresponden al sólido que se les muestra. Además, a la habilidad de identificación visual, al momento en que los estudiantes se centran en una cara o vista. Fortalece el principio “dudar de lo que se ve”, pues los estudiantes tienen que clasificar las caras entre vistas superiores, laterales y frontales.
Representación: la tarea fortalece este proceso, ya que los estudiantes hacen uso de multicubos, los cuales permiten construir representaciones tridimensionales a partir de las formas 2D.

Materiales y recursos

Materiales:

- Hoja con el enunciado de la tarea.
- Formas sólidas: tres figuras 3D construidas con multicubos (llamadas artesanías 1, 2 y 3).

Recursos:

- Multicubos: son figuras sólidas en forma de cubo acoplables que se utilizan para que los estudiantes construyan los sólidos.

SIMETRÍA AXIAL

Aprendizaje esperado

Identificar y caracterizar la relación simétrica de parejas de formas planas, a través del proceso de copiado y de representaciones que se reflejan según el efecto espejo.

Enunciado

Decoradores de fiestas por un día

Daniela es una organizadora de fiestas. A ella le encanta ayudar en el proceso de decoración del lugar donde se desarrollan las festividades. Para el mes de amor y amistad Daniela es contratada por una empresa para realizar un evento con el fin de celebrar esta gran fecha. Para ella es muy importante dar a conocer su trabajo y siempre coloca el logo de su empresa en alguna parte de la decoración.

Logo de la empresa

Para esta ocasión Daniela quiere que todas las servilletas tengan su logo. Ella quiere que el logo quede copiado en las dos mitades de la servilleta, de tal forma que quede idéntico y que sea la imagen en espejo. ¿Puedes ayudar a Daniela a descubrir el procedimiento que tendría que hacer para esto?

Descripción de la tarea

Los escolares visualizan el logo que quiere copiar Daniela. Tienen el reto de proponer un procedimiento para poder copiar la figura de modo que su resultado quede idéntico y se encuentre localizado en modo espejo. Para ello esperamos que usen calcado o que exploren y analicen cómo realizar un copiado sin doblar el papel. Esto lo pueden realizar ya sea construyendo un eje de simetría y segmentos perpendiculares al eje que les ayuden a identificar la ubicación. Lo anterior se hace para descubrir las propiedades de la simetría axial.

Requisitos

Lenguaje matemático: términos como punto, vértice, segmento, ángulo, equidistancia, congruencia y eje.
Destrezas: habilidades en el uso de la regla, la escuadra y el transportador.
Conocimientos previos: tener una noción de horizontal, vertical, paralelismo y perpendicularidad

Procesos geométricos

Visualización: los estudiantes deben observar la figura para poder realizar un copiado y, a medida que lo realizan, van encontrando propiedades de la simetría axial. Se desarrolla el Nivel 2 de visualización; es decir, la percepción e interpretación de elementos constitutivos y propiedades de estos. También se trabaja el principio "ver más allá de lo que se ve", pues los estudiantes tienen que enriquecer la representación buscando de qué manera caracterizar geométricamente la configuración de la pareja de figuras simétricas o que están en relación de simetría.
Representación: este proceso se trabaja al desarrollar la tarea, pues los estudiantes representan el simétrico del logo de la empresa de Daniela en una hoja blanca y después realizan un dibujo que represente su propia empresa de organización de eventos. Todo esto se hace con ayuda de instrumentos de medición como regla y transportador.
Conceptualización: la tarea está centrada en este proceso, pues el objetivo general es que los estudiantes descubran que las propiedades de la simetría axial son: la isometría (pues se conservan las distancias entre pares de puntos de una figura geométrica y sus correspondientes por simetría), la medida de un ángulo y la de su simétrico son iguales, la recta simétrica de una paralela al eje de simetría también es paralela a dicho eje

Materiales y recursos

Materiales:

- Hoja con el enunciado de la tarea.
- Hoja blanca con el logo de la empresa de Daniela: Para que los estudiantes realicen la representación.

Recursos:

- Transportador y regla graduada: Para que los estudiantes realicen el copiado y su representación.

Nota: No se recomienda el uso del papel pergamino para la realización de esta tarea, pues este no permite llevar a los niños a pensar en el procedimiento de simetría, sino que más bien lleva a trabajar el proceso de calcado, el cual no va ligado al aprendizaje esperado.

MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Aprendizaje esperado

Medir la abertura de algunos ángulos con ayuda del transportador y asociar la medida de la abertura de un ángulo con la unidad de medida “grados”.

Enunciado

Midamos ángulos en nuestra ciudad

Adalia Schell es una ingeniera alemana que está diseñando un nuevo sistema de alcantarillado para los sitios más famosos de Bogotá. Ella necesita saber la medida de los ángulos indicados con rojo en el mapa. Demuestra que sabes medir ángulos y ayuda a construir tu ciudad. Podrías decirnos, ¿Cuál es la medida del ángulo C?

Descripción de la tarea

En la tarea se pretende que los escolares midan la abertura de los ángulos denotados en color rojo en el mapa. Esto lo harán con ayuda del transportador. En caso de que no lo sepan usar, el docente puede plantear algunas estrategias. Aquí mencionamos dos de ellas. La primera, consta de utilizar dos palitos, uno fijo en el centro del transportador y otro no fijo. El palito fijo debe ir sobre uno de los rayos del ángulo a medir. El palito móvil se debe sobreponer sobre el otro rayo del ángulo a medir. De esta manera se podrá encontrar la medida del ángulo. La segunda estrategia puede usarse previo a la manipulación del transportador. Esta consiste en el uso de cuñas que representan ángulos de determinada medida. Para más información sobre el uso de las cuñas sugerimos dirigirse a documento de Jiménez y Salazar (2016).

Después de medir se compararán las medidas de los ángulos que encontraron y se analizará si las medidas encontradas son consistentes con la abertura.

Requisitos

Lenguaje matemático: ángulo, vértice, rayo y grado.
Destrezas: saber usar el transportador o las cuñas.
Conocimientos previos: Distinguir las partes constitutivas del ángulo e identificar ángulos en configuraciones complejas. Identificar cuando un ángulo es de 90° y cuando es mayor o menor a esta medida.

Procesos geométricos

Visualización: La tarea fortalece la habilidad de identificación visual, puesto que el estudiante debe reconocer los ángulos aislándolos del contexto donde se encuentran. Además, contribuye al desarrollo del Nivel 2 de visualización porque los estudiantes visualizan la abertura y la asocian con un número reconociendo el elemento medible del ángulo. También está presente el principio "dudar de lo que se ve", pues los estudiantes, al visualizar un ángulo y ver que puede tener la misma abertura del otro, se dan cuenta que este tiene la misma medida a lo cual, al medir se dan cuenta que su idea es correcta o no.

Materiales y recursos

Material:
- Hoja con el enunciado de la tarea.
- Hoja con el mapa de la ciudad, en la cual medirán los ángulos.

Recurso:
- Transportador: el cual se utilizará para medir los ángulos del plano o cuñas.
- Cuñas: (si es el caso) se utilizará la para dar una primera entrada a la medición de ángulos.

CIRCUNFERENCIA

Aprendizaje esperado

Identificar y caracterizar la circunferencia como: el conjunto de puntos coplanares que equidistan de un punto, haciendo uso del software GeoGebra.

Enunciado

Descubriendo un lugar geométrico

Sara está realizando una representación en GeoGebra que consiste en partir de dos puntos A y B. Luego quiere construir otros puntos de tal manera que la distancia de estos al punto A sea la misma que la distancia del punto A al punto B. Replica en GeoGebra larepresentación que quiere hacer Sara e identifica el lugar geométrico que se forma.

Descripción de la tarea

A través de la exploración en GeoGebra se espera que los estudiantes construyan puntos que equidisten a otro punto llamado centro de la circunferencia. Cabe aclarar que este proceso se puede llevar de dos maneras. El primero es realizándolo a "ojo", es decir, sin usar ninguna herramienta de medida. El segundo es haciendo uso de la herramienta "distancia o longitud". En cualquiera de los dos casos, el lugar geométrico que se logra entrever es la circunferencia. Después se les puede indicar a los estudiantes cómo construir la circunferencia dados los dos puntos. Con esto se puede verificar que el lugar geométrico que se forma es la circunferencia. Por último, construirán una definición del objeto geométrico.

Requisitos

Lenguaje matemático: punto y equidistancia.
Destrezas: manejo de la opción "punto" de GeoGebra y de las herramientas de "arrastre" y "distancia y longitud".
Conocimientos previos: distancia entre dos puntos y equidistancia entre pares de puntos.

Procesos geométricos

Visualización: este proceso se favorece mediante la aprehensión discursiva de anclaje visual al discursivo, pues los estudiantes, a partir de la representación de la circunferencia, proponen como enunciado que la circunferencia es un lugar geométrico formado por puntos coplanares que equidistan de su centro. Además, se trabaja la aprehensión operativa de cambio figural, pues los escolares tienen que añadir elementos geométricos (puntos) a la configuración, para poder hallar el lugar geométrico.
Conceptualización: este proceso se desarrolla cuando los estudiantes construyen el significado de circunferencia. Esto lo hacen a partir de la identificación de las características necesarias y suficientes que hay que incluir en la enunciación.

Materiales y recursos

Material:

- Hoja con el enunciado de la tarea.

Recurso:

- GeoGebra: los estudiantes replicarán la representación realizado por Sara. Esto lo harán por medio de las herramientas que nombramos en las destrezas

TRIÁNGULO ISÓSCELES

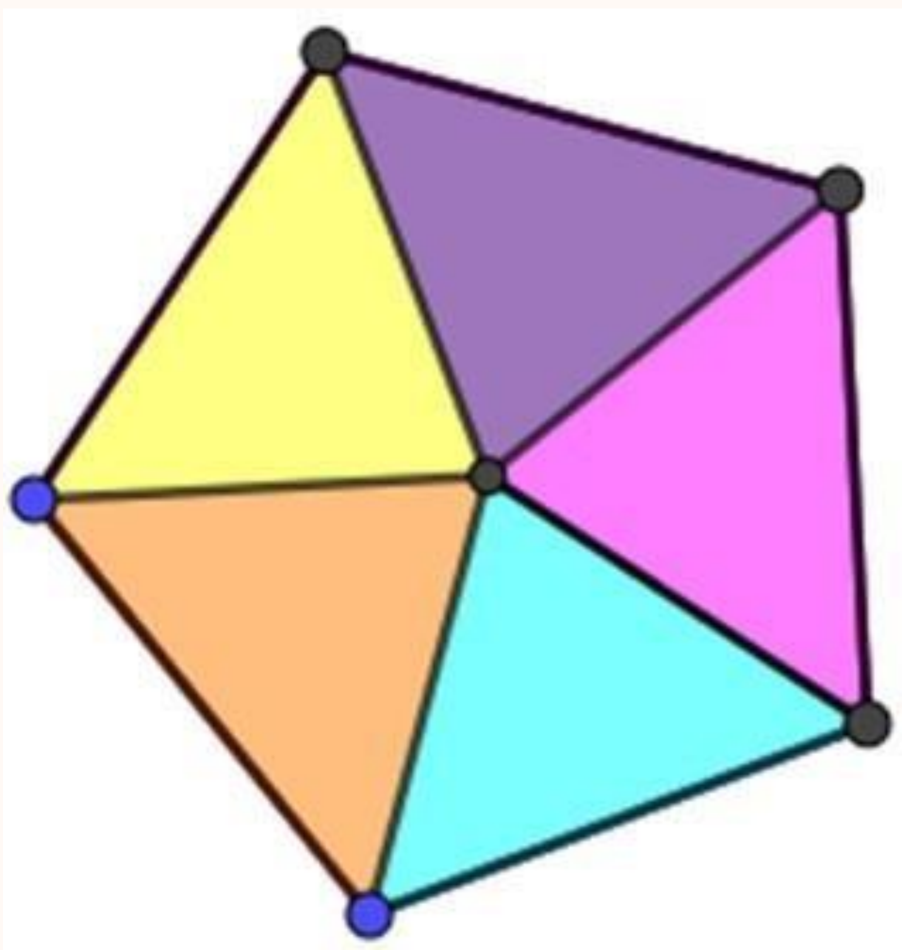
Aprendizaje esperado

Definir triángulo isósceles como aquel con solo dos lados congruentes y descubrir que los ángulos internos opuestos a los lados congruentes son congruentes a través de la medición de lados y ángulos.

Enunciado

Encontremos la baldosa apropiada

Zelenne quiere remodelar el piso de su apartamento y ha pensado en crear pentágonos regulares con baldosas triangulares de manera que los 5 lados midan lo mismo.



Ella tiene tres opciones de baldosas triangulares, pero no sabe cuál le sirve para crear la figura que quiere. ¿Cuál opción le sirve a Zelenne para crear el pentágono que desea para su piso? ¿Por qué con los otros triángulos no se puede crear el pentágono? ¿Qué características tiene el triángulo que permite construir el pentágono?

Opción 1 – Opción 2 – Opción 3

Descripción de la tarea

Se les entrega a los estudiantes 15 triángulos (5 equiláteros, 5 escalenos y 5 isósceles) con los cuales deben intentar construir un pentágono regular. Cuando los escolares identifiquen que el pentágono regular solo se puede construir con triángulos isósceles deberán a través de la medición, identificar las características que tiene el triángulo. Al medir pueden encontrar dos propiedades. La primera es que dos lados del triángulo deben ser congruentes. La segunda, es que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes. La primera propiedad será usada para definir el objeto geométrico y la segunda quedará como propiedad de este.

Requisitos

Lenguaje matemático: vértice, segmento o lado, ángulo, medida igual, segmentos congruentes, triángulo y pentágono.
Destrezas: saber usar la regla y el transportador.
Conocimientos previos: tener una imagen del objeto matemático a tratar (triángulo), tener una noción de yuxtaponer y solapar.

Procesos geométricos

Visualización: este proceso se favorece en el Nivel 2 ya que los estudiantes identifican las propiedades de los lados y ángulos de cada triángulo; es decir, observan si son congruentes o no. Además, evidencian que con el triángulo isósceles es con el único con el que se puede construir el pentágono regular, porque los ángulos que forman los lados del pentágono deben ser congruentes y la suma de las medidas de los ángulos con vértice en el centro del pentágono debe ser 360 grados. También se trabaja el principio "dudar de lo que se ve", ya que los estudiantes pueden afirmar que con todos los triángulos se puede construir el polígono regular, pero al explorar con el material se dan cuenta de que esto no es correcto.
Conceptualización: este proceso se desarrolla cuando los estudiantes elaboran el listado de propiedades del triángulo isósceles. Se aporta a la construcción de la definición del concepto del triángulo isósceles y la formulación de la propiedad de la congruencia de dos ángulos.
Conjeturación: este proceso se desarrolla cuando los estudiantes realizan la exploración con los tres tipos de triángulos. Ellos descubren que solo uno de ellos funciona para crear el pentágono regular y que este triángulo cumple con ciertas propiedades las cuales también se les pide descubrir. De aquí surge una conjetura basada en empirismo ingenuo, dado que solo se les está presentando una representación particular de este tipo de triángulo.

Materiales y recursos

Materiales:
- Hoja con el enunciado de la tarea.
- Triángulos (5 equiláteros, 5 escalenos y 5 isósceles):se sugiere que estén hechos en un material resistente (por ejemplo, cartón paja) ya que serán manipulados por los escolares cuando intenten dar respuesta al interrogante presentado en el enunciado. Los triángulos isósceles deben tener la medida de los ángulos de la siguiente manera 72°, 54° y 54°.

Recursos:
- Transportador y regla graduada: Para que los estudiantes midan los segmentos y ángulos.

TRASLACIÓN EN EL PLANO

Aprendizaje esperado

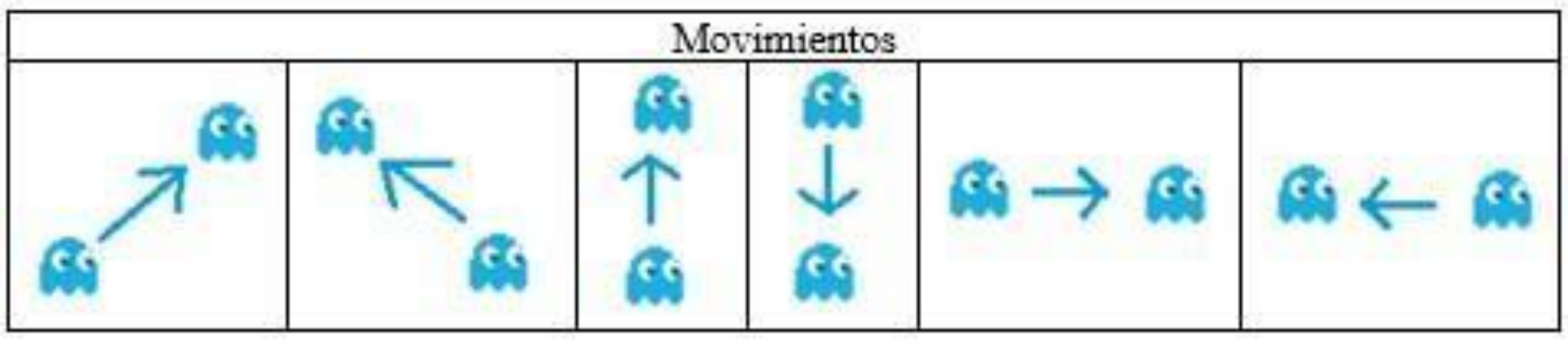
Sugerir una definición para el movimiento de traslación en el plano teniendo en cuenta la forma, el tamaño y la posición relativa de un personaje del juego Pacman en las posición inicial y final.

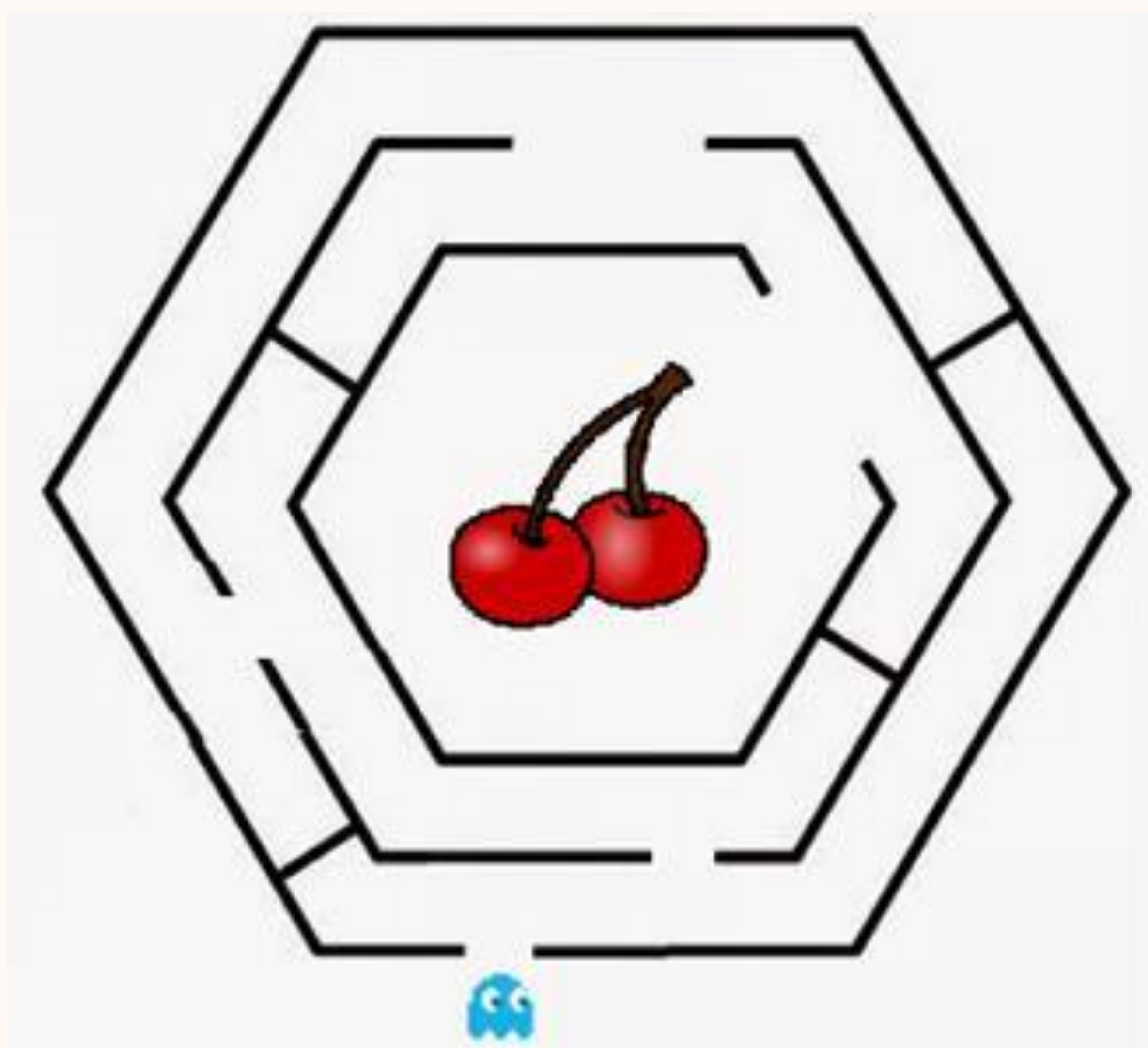
Enunciado

Trasladando a Inky

Inky se encuentra entrenando para mejorar su velocidad y con esto lograr atrapar a Pacman. En su entrenamiento para ser más veloz, encontró el laberinto donde se encuentra una fruta. Ayuda a Inky a llegar a la fruta y describe los movimientos que realizaste. Además, contesta las siguientes preguntas: Al realizar los movimientos ¿Inky cambia de tamaño? ¿Inky realiza alguna rotación?

Ten en cuenta que Inky puede realizar los siguientes movimientos:





Descripción de la tarea

Se presenta un personaje del juego de Pacman llamado Inky, el cual realiza algunos movimientos dentro de un laberinto, como se muestra en el enunciado. Se busca que los estudiantes describan los movimientos teniendo en cuenta el sentido, la dirección y la magnitud de cada uno de ellos. Si los estudiantes no tienen el lenguaje para describir el movimiento que realiza Inky, el docente introducirá los términos dirección, sentido y magnitud. Al realizar las descripciones podrán observar que el personaje no cambia de tamaño, forma y posición relativa. Con ello podrán generar una definición de traslación en el plano.

Requisitos

Lenguaje matemático: orientación espacial: arriba, abajo, derecha, izquierda, diagonal abajo izquierda, diagonal arriba izquierda, diagonal abajo derecha, diagonal arriba derecha, deslizarse y girar.
Conocimientos previos: interpretar qué es la posición relativa de una figura.

Procesos geométricos

Visualización: la tarea contribuye a este proceso al trabajar con imágenes dinámicas. Los estudiantes construyen una imagen mental del desplazamiento que hace el fantasma dentro del laberinto. Se trabaja la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio ya que los estudiantes, al momento de realizar cada movimiento, deben enlazar la posición del fantasma con un punto referencia el cual está determinado por el lugar al cual se quiere dirigir.
Conjeturación: la tarea impulsa este proceso al momento en que los estudiantes construyen un enunciado de carácter general sobre la definición de traslación, de acuerdo con la exploración realizada con el fantasma.
Conceptualización: la tarea moviliza este proceso cuando los estudiantes elaboran el significado de translación. Esto teniendo en cuenta las propiedades necesarias y suficientes para definir el movimiento en el plano.

Materiales y recursos

Material:
- Hoja con el enunciado de la tarea.
- Representaciones en foami del fantasma para que los escolares reproduzcan el movimiento, antes de dibujar el recorrido.

Recursos:
- Lápiz: para dibujar el recorrido que el fantasma hace en el laberinto.

DESIGUALDAD TRIANGULAR

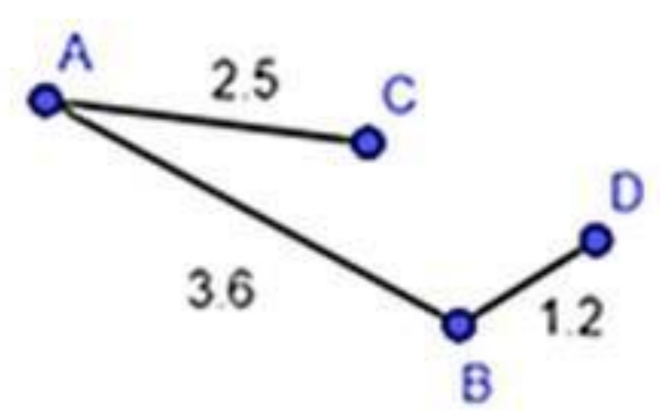
Aprendizaje esperado

Descubrir y conjeturar la desigualdad triangular, mediante la exploración en GeoGebra de las relaciones entre las medidas de los lados de triángulos, consignadas en una tabla.

Enunciado

¿Será posible construir un triángulo con cualquier trío de segmentos?

En la pantalla de GeoGebra observas los segmentos *AB*, *AC* y *BD*, sus longitudes varían. Queremos construir un triángulo *ABC* con estos tres segmentos, haciendo coincidir los puntos *C* y *D*.



	A	B	C	D
1	AB	AC	BD	AC + BD
2	3.6	2.5	1.4	3.9
3	3.6	2.5	1.4	3.9
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Busca una relación que deben cumplir las longitudes de los segmentos para que sea posible construir un triángulo. La tabla que aparece al lado derecho de la pantalla se genera automáticamente con las longitudes de los segmentos.

Cuando logres conformar el triángulo, ¿Ves una relación entre las longitudes de los segmentos?

Descripción de la tarea

Se presenta a los estudiantes un archivo de GeoGebra en donde aparecen los segmentos *AB*, *AC* y *BD*. Estos son con los que se desea construir el triángulo. Para construirlo, deben arrastrar los puntos *C* y *D*, de tal manera que uno quede sobrepuesto del otro. Adicionalmente, en el archivo se presenta una tabla en donde aparece automáticamente la longitud de los segmentos y la suma de la medida de dos de ellos. Con ayuda de este archivo podrán formular la conjetura acerca de la desigualdad triangular.

Requisitos

Lenguaje matemático: triángulo, segmentos, vértice, punto, longitud y relación de orden.
Destrezas: habilidad para el arrastre de puntos en GeoGebra.
Conocimientos previos: elementos constitutivos del triángulo y orden de los números naturales.

Procesos geométricos

Visualización: la tarea contribuye al fortalecimiento de la aprehensión discursiva, pues se hace un nexo entre una relación simbólica numérica con una representación gráfica. A diferencia de lo que propone Duval (1998) la representación no está acompañada de un enunciado, sino de una tabla. Además, se trabaja el principio “ver más allá de lo que se ve”, ya que los estudiantes estudian el triángulo que forman e intentan revelar la desigualdad triangular, la cual no se ve a simple vista.
Conjeturación: la tarea fortalece este proceso, pues se busca que los estudiantes realicen una conjetura a partir de la exploración que realizan de diversas representaciones.
Argumentación: la tarea impulsa este proceso cuando los estudiantes realizan las justificaciones de la veracidad de su conjetura sobre la desigualdad triangular y proponen un argumento.

Materiales y recursos

Materiales:

- Hoja donde se encuentra el enunciado de la tarea.
- Archivo de GeoGebra en el cual aparece la construcción y la tabla donde los estudiantes realizan la exploración.

CRITERIO DE CONGRUENCIA LADO-ÁNGULO-LADO (LAL)

Aprendizaje esperado

Descubrir y conjeturar el criterio de congruencia LAL al realizar la construcción en papel, con regla graduada y transportador, de un triángulo congruente a otro, a partir del análisis de casos

Enunciado

Explora y descubre un criterio de congruencia

Teniendo en cuenta la información que se te presenta en la Figura 1, construye en una hoja un triángulo *EFG* congruente al triángulo *ABC*, a partir de un segmento *EF* cuya medida sea igual a la longitud del *segmento AB* y el *ángulo E* mida igual al *ángulo A*.

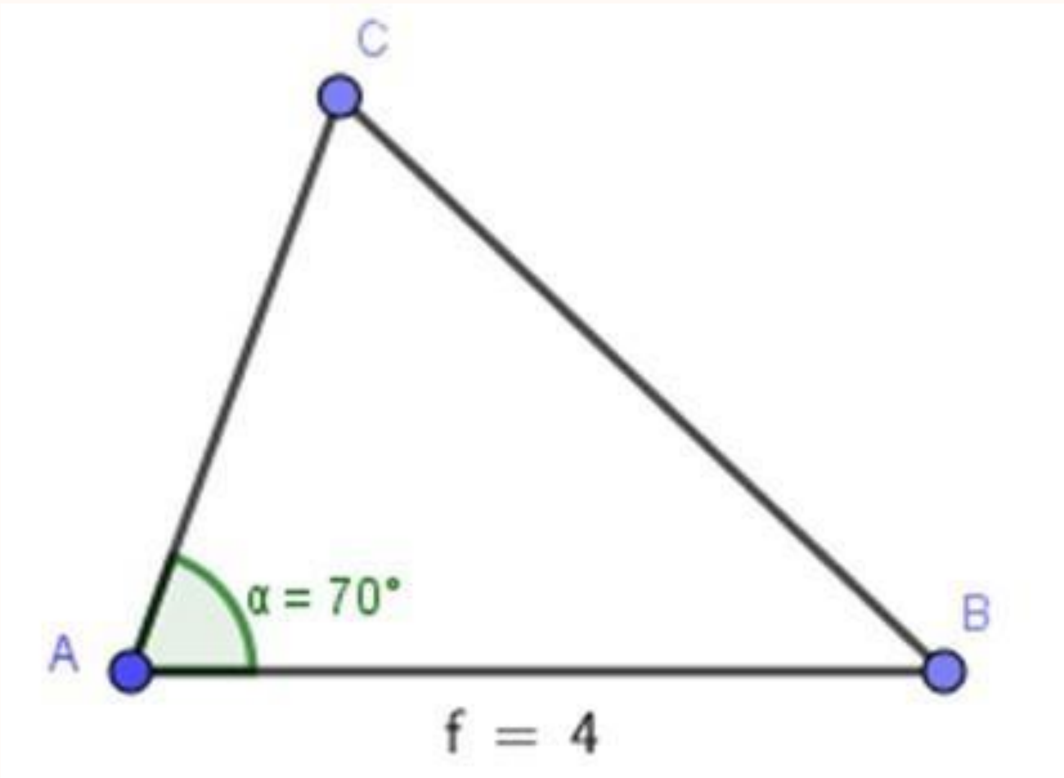


Figura 1

- Describe el procedimiento que realizaste para poder construir el *triángulo EFG* congruente al *triángulo ABC* .
- Formula una conjetura relacionada con la información que se necesita para construir un triángulo congruente a otro dado.
- Investiga si dos triángulos que tengan dos lados respectivamente correspondientes congruentes y un ángulo opuesto a uno de estos lados también congruente al correspondiente son congruentes.

Descripción de la tarea

Se desea que los estudiantes descubran e interpreten el criterio de congruencia LAL. Para esto, construyen un triángulo *EFG* congruente al triángulo *ABC*, a partir de dos medidas, una de longitud igual a la del *segmento AB* y la otra de amplitud igual a la del *ángulo CAB*. Se espera que ellos midan el lado *AC* y la usen para construir el triángulo congruente. Sin embargo, se puede dar el caso en el que midan el *segmento BC y lo usen para obtener el triángulo congruente*. El docente puede problematizar este procedimiento mostrando no ejemplos de triángulos no congruentes. Por otra parte, si miden el *ángulo ABC , pueden llegar al criterio de congruencia* ALA, *el cual puede ser trabajado en la clase sin dejar de lado el criterio* LAL.

Por último, los estudiantes formulan un enunciado donde describen qué información se necesita para construir un triángulo congruente a otro dado.

Requisitos

Lenguaje matemático: triángulo, segmento, longitud, ángulo y congruencia de segmentos y ángulos.
Destrezas: usar de manera adecuada la regla graduada y el transportador.
Conocimientos previos: conocer cuáles son las partes constitutivas del triángulo e interpretar cuando dos triángulos son congruentes.

Procesos geométricos

Visualización: este proceso se trabaja en el Nivel 2, conocido como percepción e interpretación de elementos constitutivos y propiedades de estos. Los estudiantes perciben las partes constitutivas del triángulo y los componentes de este, lo que permite el descubrimiento y formulación del criterio.
Representación: este proceso se desarrolla cuando los estudiantes construyen el triángulo congruente al dado. Esto por medio de instrumentos de medición como la regla y el trasportador. Lo anterior hace parte del tipo de representación con instrumentos de medida.
Conjeturación: este proceso se fortalece cuando los estudiantes visualizan, exploran y descubren cómo construir un triángulo congruente a uno dado. También cuando formulan una conjetura describiendo qué información necesitan para construir un triángulo congruente a otro dado.
Argumentación: este proceso se trabaja cuando los estudiantes realizan un argumento inductivo de tipo particular-general. A partir de los datos infieren la aserción y la garantía. Además, parten de un caso concreto y generalizan la relación encontrada para cualquier tipo de triángulo. El argumento sería: dos triángulos que tengan dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre esos lados también congruente son congruentes.

Materiales y recursos

Materiales:
- Hoja con el enunciado de la tarea

Recursos:
- Regla graduada y transportador: para que los estudiantes puedan construir el triángulo congruente.

ÁNGULOS OPUESTOS PARALELOGRAMO

Aprendizaje esperado

Explorar, descubrir y conjeturar que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, por medio de una representación en GeoGebra, y crear un argumento inductivo para justificar la propiedad descubierta.

Enunciado

Mide, arrastra y te diré quién soy

Recuerda que los paralelogramos son cuadriláteros que tienen lados opuestos paralelos. Haciendo uso de GeoGebra construye un paralelogramo. Ahora explora el cuadrilátero construido tomando medidas ¿Qué regularidad encuentras entre las medidas tomadas?

Descripción de la tarea

Los estudiantes construirán en GeoGebra un paralelogramo a partir de dos pares de segmentos paralelos. Utilizando las herramientas del software miden y exploran por arrastre las longitudes de los segmentos y las amplitudes de los ángulos. De esta manera se espera que encuentren la propiedad de ángulos opuestos congruentes. Sin embargo, se puede presentar que los estudiantes descubran que los segmentos opuestos son congruentes. Las propiedades se pueden abordar en cualquier orden. Los estudiantes realizan una conjetura y la justifican verificando que la propiedad se cumple para todos los paralelogramos.

Requisitos

Lenguaje matemático: paralelogramo, rectas paralelas, ángulo, segmento, congruencia de segmentos y congruencia de ángulos.
Destrezas: habilidad en el uso de herramientas de GeoGebra como: recta, punto, distancia o longitud, ángulo, arrastre, paralela e intersección.
Conocimientos previos: relación de paralelismo entre rectas y congruencia entre segmentos y ángulos.

Procesos geométricos

Visualización: este proceso se fortalece cuando los estudiantes exploran e intentan revelar la propiedad que existe entre los ángulos opuestos del paralelogramo. Con esto se hace uso del principio "ver más de lo que se ve". Además, se usa la aprehensión discursiva, del anclaje visual al discursivo, pues los estudiantes, a partir de la representación pueden asociar distintos enunciados a la representación.
Representación: este proceso se desarrolla al momento en que los estudiantes construyen el paralelogramo y cuando realizan el arrastre de los vértices para obtener diversas configuraciones. El tipo de representación al que se alude en esta tarea es el de construcción en GeoGebra.
Conjeturación: este proceso se impulsa al momento en que los estudiantes realizan una exploración de las representaciones y con esto descubren que la propiedad se cumple para todo paralelogramo.
Argumentación: este proceso se desarrolla, pues los estudiantes tienen que construir un argumento inductivo para la propiedad encontrada

Materiales y recursos

Material:
- Hoja con el enunciado de la tarea.

Recurso:
- GeoGebra: con ayuda de este software los estudiantes construyen el paralelogramo y usan las herramientas del programapara encontrar propiedades

CUADRILÁTEROS

Aprendizaje esperado

Caracterizar cuadriláteros mediante la construcción de estos a partir de dos segmentos que serían sus diagonales y la exploración de las relaciones entre estas.

Enunciado

Encuentra cuadriláteros

En GeoGebra construye los segmentos *WY* y *XZ* que se intersecan en un punto *M*. Arrastra los vértices y examina cuáles cuadriláteros se determinan, cuyos vértices son los puntos *W*, *X*, *Y*, *Z*, según las relaciones que encuentres entre los segmentos *WY* y *XZ*.

Descripción de la tarea

Los estudiantes realizan la construcción y exploración en GeoGebra de dos segmentos que se intersecan "*WY* y *XZ*". Después construyen el cuadrilátero cuyos vértices son *W*, *X*, *Y*, *Z* y exploran posibles configuraciones según las relaciones de los segmentos, que serán las diagonales. Pueden considerar: diagonales congruentes y perpendiculares; diagonales congruentes, pero no perpendiculares; diagonales no congruentes pero perpendiculares; diagonales ni congruentes ni perpendiculares; diagonales que se bisecan; y diagonales que no se bisecan. Estas relaciones y combinaciones entre ellas conllevan a la caracterización de cuadriláteros.

Requisitos

Lenguaje matemático: paralelogramo, cuadrado, rectángulo, rombo, cometa, trapecio segmentos congruentes, diagonal, perpendicular, paralela, segmentos que se bisecan.

Destrezas: habilidad en el uso del arrastre y herramientas de construcción de segmentos y puntos de intersección. Uso de la herramienta distancia o longitud y de la herramienta para trazar perpendiculares en GeoGebra.

Conocimientos previos: tener interpretaciones de algunos cuadriláteros diferenciándolos por los atributos de sus lados y sus ángulos. Tener una noción de congruencia, perpendicularidad y paralelismo.

Procesos geométricos

Visualización: este proceso se fortalece en dos tipos de aprehensión: la discursiva del anclaje visual al anclaje discursivo, pues los estudiantes cuando construyen las diagonales y efectúan el arrastre identifican las características del cuadrilátero resultante y la(s) relaciones que hay entre las diagonales de este. Y la aprehensión operativa cuando los estudiantes llevan a cabo alguna modificación en los extremos de las diagonales para construir distintos cuadriláteros. También se desarrolla el nivel "visual operativo", pues los estudiantes hacen una manipulación mental de las subconfiguraciones de las diagonales, para obtener otros cuadriláteros.

Representación: este proceso se desarrolla mientras los estudiantes construyen las diagonales y las modifican para lograr relaciones entre ellas. Se trabaja en el cuarto tipo de representación, es decir, con un programa de geometría dinámica. Además, al momento en que los estudiantes modifican los segmentos por medio del arrastre se están generando infinitas representaciones de cuadriláteros.

Conjeturación: este proceso se fortalece cuando los estudiantes observan que las diagonales que han construido, con ciertas propiedades, conducen a la construcción de ciertos tipos de cuadriláteros. También se desarrolla, cuando los estudiantes formulan una oración donde especifican la(s) propiedad(es) que cumplen las diagonales para que se genere cierto cuadrilátero.

Materiales y recursos

Material:

- Hoja con el enunciado de la tarea

Recurso:

- GeoGebra: en él los estudiantes podrán construir las diagonales y explorar (por medio del arrastre o una nueva construcción) las distintas configuraciones.

TEOREMA SEGMENTOS-PUNTOS MEDIOS

Aprendizaje esperado

Formular una conjetura a partir de la exploración y el descubrimiento de la relación que existente entre el segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de un triángulo y el tercer lado de este.

Enunciado

¡Representa, explora y descubre una de las propiedades de los triángulos!

Construye un triángulo *ABC* y determina a *D* y *E* puntos medios de los segmentos *AB* y *BC*, respectivamente. Construye el segmento *DE*. Busca relaciones especiales entre los segmentos *DE* y *BC* y las distancias *DE* y *BC*. Describe cómo las encontraste y formula dichas relaciones.

Descripción de la tarea

Los estudiantes construyen en el software GeoGebra un triángulo *ABC*. Luego construirán los puntos *D* y *E* tal que sean puntos medios de los segmentos *AB* y *BC*, respectivamente. Realizan una exploración arrastrando los vértices del triángulo. Se espera que encuentren dos relaciones: i) el paralelismo entre los segmentos *DE* y *AC*. ii) $DE = (1/2)\ AC$. Mediante la exploración se quiere que los estudiantes conjeturen y argumenten que estas relaciones se cumplen para cualquier triángulo.

El docente puede hacer preguntas acerca de cuál es la relación del segmento *DE* con cada uno de los segmentos del triángulo para orientar la identificación del paralelismo. También, puede sugerir la toma de medidas para que descubran la relación numérica involucrada. De esta manera ya los estudiantes empezarán a ver qué pasa con estas medidas y podrán llegar a el hecho geométrico

Requisitos

Lenguaje matemático: triángulo, segmentos paralelos, punto medio, distancia entre puntos y notación de distancia.
Destrezas: habilidad en el uso de las herramientas de GeoGebra como: punto, segmento, medio o centro, recta, relación y distancia o longitud.
Conocimientos previos: identificación de segmentos paralelos e interpretación de punto medio.

Procesos geométricos

Visualización: este proceso se desarrollará al hacer uso del principio "ver más de lo que se ve", pues los estudiantes deberán observar la relación que existe entre el segmento que se construye con los puntos medios de dos lados de un triángulo y el tercer lado de este. Además, se presenta la aprehensión discursiva del anclaje visual al discursivo pues la representación se asocia con dos afirmaciones matemáticas.
Representación: este proceso se fortalece al momento de construir el triángulo, determinar los puntos medios de los lados y generar el segmento que los une. También mediante el arrastre de los vértices del triángulo para generar diferentes triángulos. Aquí se está llevando a cabo un tipo de representación con GeoGebra.
Conjeturación: este proceso se impulsa al momento en que los estudiantes realizan la construcción de un enunciado condicional donde generalicen los hechos geométricos. El tipo de estrategia que los estudiantes pueden utilizar es el ejemplo genérico. A partir de la exploración de una representación los estudiantes enuncian la conjetura.

Materiales y recursos

Material:
- Hoja con el enunciado de la tarea

Recurso:
- GeoGebra: en el cual los estudiantes deberán realizar la construcción del enunciado y con ayuda de la herramienta de arrastre ir representando y explorando otros triángulos.

RELACIÓN ENTRE EL LADO MAYOR Y EL ÁNGULO OPUESTO A ESTE, EN UN TRIÁNGULO

Aprendizaje esperado

Encontrar y formular la relación que existe entre el lado mayor y el ángulo opuesto a este, en un triángulo, a partir de una exploración realizada en GeoGebra, y argumentar por qué la relación encontrada, se cumple en cualquier triángulo.

Enunciado

¡El redescubrimiento de una hermosa relación geométrica, una conexión entre la medida de los lados y la medida de los ángulos de un triángulo!

Intenta construir en GeoGebra un triángulo con la siguiente condición: el ángulo de mayor medida no sea el opuesto al lado de mayor medida. De acuerdo con tu exploración, ¿qué podrías decir respecto a la relación entre la medida de los lados y la medida de los ángulos de cualquier triángulo? Justifica tu respuesta.

Descripción de la tarea

Se les propone a los estudiantes que intenten construir en GeoGebra un triángulo con características imposibles en el que el ángulo de mayor medida no sea el opuesto al lado de mayor medida. Luego de encontrar la imposibilidad de dicha construcción los estudiantes exploran cualquier triángulo mediante las herramientas de GeoGebra, con el fin de que descubran una relación entre el lado mayor y el ángulo opuesto a este. Se puede presentar que los estudiantes propongan como solución un triángulo equilátero. En este caso, el docente les sugerirá construir un triángulo con un lado evidentemente más largo de los otros. Al arrastrar los vértices del triángulo los estudiantes observan que la relación encontrada se cumple. Luego, pueden elaborar un argumento de tipo inductivo.

Requisitos

Lenguaje matemático: triángulo, segmento, ángulo, medida del ángulo, medida del segmento, relación de orden (mayor, menor e igual) y congruencia.
Destrezas: uso de herramientas de construcción de triángulos, arrastre y medición de longitudes y amplitudes en GeoGebra.
Conocimientos previos: tener un significado de: las partes constitutivas del triángulo; la congruencia de segmentos y de ángulos; y el orden de los números naturales.

Procesos geométricos

Visualización: la tarea favorece el Nivel 2 de visualización porque los estudiantes observan la propiedad que surge al arrastrar los vértices de un triángulo.
Representación: la tarea permite que este proceso se desarrolle cuando los estudiantes realizan la construcción de un triángulo en el programa de geometría dinámica y arrastran sus vértices haciendo uso de las herramientas del software. El tipo de representación que se utiliza es el de uso de un programa de geometría dinámica.
Conjeturación: la tarea lleva al uso del "experimento crucial", dado que además de que los estudiantes exploran representaciones de algunos triángulos, probablemente examinan en un caso extremo (donde el ángulo de mayor medida del triángulo no parezca el opuesto al lado de mayor medida).
Argumentación: la tarea lleva a que los estudiantes realicen un argumento inductivo, dado que ellos utilizarán la aserción y la garantía como prueba de que su conjetura se cumple. Además, la inducción que realizan va de lo particular a lo general.

Materiales y recursos

Material:
- Hoja con el enunciado de la tarea.

Recurso:
- GeoGebra: donde los estudiantes realizan las construcciones del triángulo y hacen las exploraciones necesarias para hallar las relaciones.

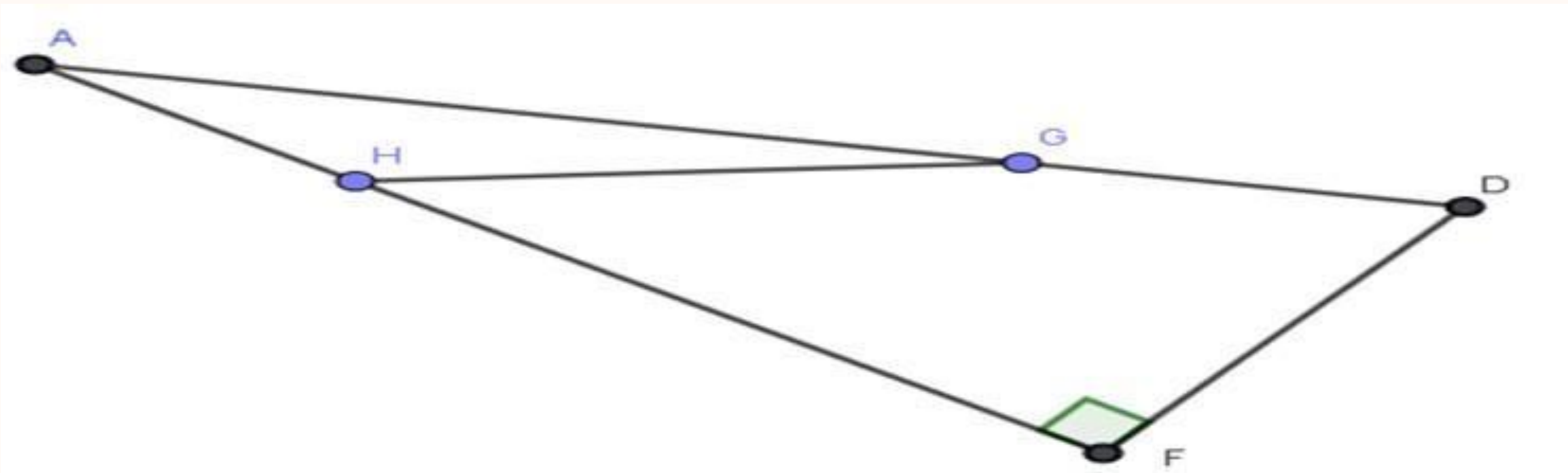
CRITERIO DE SEMEJANZA ÁNGULO-ÁNGULO PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Aprendizaje esperado

Establecer el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo para el triángulo rectángulo, a partir de una exploración en GeoGebra de una representación.

Explora, relaciona, ¡conjetura y juega con los triángulos rectángulos!

En la pantalla de GeoGebra, observas el *triángulo rectángulo AFD*, con el *ángulo F recto*. *H pertenece* al *segmento AF* y *G pertenece al segmento AD*. Explora posiciones para el punto *H* en las que el *triángulo AFD y AHG* sean semejantes y descubre cuál es la mínima información que se requiere para poder afirmar, que dos triángulos rectángulos son semejantes.



Descripción de la tarea

Se presenta a los estudiantes una representación hecha en GeoGebra de un triángulo rectángulo *AFD*, con el ángulo *F recto*. *H* pertenece al segmento *AF* y *G* pertenece al segmento *AD*. En esta los estudiantes deben arrastrar el punto *H* hasta lograr la semejanza de los triángulos *AFD* y *AHG*. Los escolares realizan la configuración para descubrir propiedades comunes en los triángulos. De esta manera se espera que encuentren el criterio de semejanza para triángulos rectángulos que les permitirá conjeturar y argumentar de manera general que dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen uno de sus ángulos agudos de igual medida.

Requisitos

Lenguaje matemático: triángulo, triangulo rectángulo, hipotenusa, cateto, ángulo, congruencia de ángulos, semejanza de triángulos, segmentos y ángulos correspondientes.
Destrezas: habilidad en el uso de herramientas de GeoGebra como: arrastre, distancia o longitud y ángulo
Conocimientos previos: conocer las partes constitutivas del triángulo rectángulo, qué es y cómo medir un ángulo y tener una noción cuando dos triángulos son semejantes.

Procesos geométricos

Visualización: la tarea contribuye al desarrollo de este proceso, en el Nivel 1 visual operativo ya que los estudiantes deben reorganizar los triángulos para "ver" cuando se logra la semejanza. También, se desarrolla la habilidad de "discriminación visual" ya que se están contrastando dos triángulos para determinar su semejanza.
Representación: este proceso se fortalece cuando los estudiantes realizan la manipulación de la construcción que se les presenta y realizan modificaciones a la configuración, sin afectar las propiedades esenciales de esta para poder encontrar que el segmento es paralelo a un lado del triángulo rectángulo. Este tipo de representación es con un programa de geometría dinámica.
Conjeturación: la estrategia utilizada es el experimento genérico dado que se conjetura a partir de la exploración de la representación de un triángulo rectángulo que está solapando a otro. Se generaliza a partir de varios triángulos rectángulos.
Argumentación: el tipo de argumentación que se espera que los estudiantes den es de tipo inductivo, dado que ellos proponen una aserción y usan como dato y garantía lo que exploran y lo que generalizan.

Materiales y recursos

Material:

- Hoja con el enunciado de la tarea.
- Archivo de GeoGebra en el cual aparece la construcción que los estudiantes exploran.

Referencias bibliográficas

Acosta, M., Camargo, L., Castiblanco, A. y Urquina, H. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Enlace Editores Ltda.

Camargo, L., Leguizamón, C., y Samper, C. (2002). *La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría.* EMA, 293-309

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2017). *Tareas de geometría plana para la educación básica.*

Gómez, P., Mora, M., y Velasco, C. (2016). Análisis de instrucción. *Obtenido de funes uniandes: http://funes.uniandes.edu.co/11906/1/Gomez2018AnalisisInstruccion.pdf*

Gutiérrez, A. (1992): *Procesos y habilidades en visualización espacial,* en Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría (pp- 44-59). México: CINVESTAV.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. EMA, 204-206.

Hershkowitz, R., Ben Haim, D., Holes, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., y Vinner, S. (1990). *International Group for the Psychology of Mathematics Education* p. 70.

Jiménez, S., y Salazar, V. (2016). Interpretaciones de niños de 4.º de primaria relativas al ángulo. *Obtenido de funes uniandes: http://funes.uniandes.edu.co/14208/1/Jimenez2019Interpretaciones.pdf*

Marrades, R, y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44, 87-125.*

Prior, J., y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. Relime.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). *On concept formation in geometry.* Zentralblattfür Didaktik der Mathematik, 83(1), 20-25.