PROMOVIENDO EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DESDE UNA APLICACIÓN PARA ANDROID

ÁNGELA MARÍA PINEDA CHACÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2021

PROMOVIENDO EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DESDE UNA APLICACIÓN PARA ANDROID

ÁNGELA MARÍA PINEDA CHACÓN
C.C 1010246271 CÓD:2016240064

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

MODALIDAD
INTERÉS PERSONAL DEL ESTUDIANTE

DIRECTORA
LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA
MAGÍSTER EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2021

DEDICATORIA

A mi amada madre, Mónica, por su inagotable lucha para garantizar el bienestar de los suyos, por ser mi mayor fuente de inspiración y motivación, por su entrega y amor incondicional.

A mi abuelita, Alicia, por todo el amor, paciencia y consideración con las que me acompañó en todos estos años.

A mis hermanas, Danna y Angie, por ser mis compañeras de aventuras, porque he tenido la fortuna de contar con su valiosa presencia en mi vida.

A mis adorados niños: Adrián, Alejo y Sara. Quienes me han inspirado y espero que encuentren en mi un ejemplo para perseguir sus sueños.

AGRADECIMIENTOS

A Dios porque me dio fortaleza y sabiduría para continuar y concluir este proceso.

A mi amada familia por acompañarme durante este tiempo, ser mi bastón, mi soporte en los momentos en los que el panorama no era tan claro.

A mi querida asesora, Lyda Mora, por ser un gran ejemplo de mujer y profesional; por ayudarme de manera incondicional en la construcción de este documento, por compartir sus experiencias y saberes conmigo. Especialmente agradezco su comprensión y admiro el amor con el que ejerce la docencia y con el que me ayudó a avanzar y culminar este trabajo.

A todos mis amigos, que han sido parte fundamental de todo el proceso, por todas las tardes de estudio, de risas y por el ánimo que muchas veces me incentivó para seguir adelante. Especialmente, agradezco a mis amigas y colegas, Angélica y Karen, que me han apoyado en lo académico y en lo personal.

A Andrés por contagiarme de su alegría, por probar *Ealgebrapp* en repetidas ocasiones identificando errores que permitieron mejorar la aplicación y por acompañarme en esta etapa tan importante de mi vida.

Tabla de contenidos

Introducción ... 1
Capítulo I. Preliminares ... 2
Justificación ... 2
Objetivos ... 4
1.1.1 General ... 4
1.1.2 Específicos ... 4
Antecedentes ... 5
1.1.3 Trabajos de grado que buscan aportar al desarrollo del PA a través de aplicaciones ... 5
1.1.4 Trabajos que pretenden aportar al desarrollo del pensamiento algebraico ... 8
1.1.5 Aplicaciones en la Web para el aprendizaje de las matemáticas ... 11
1.1.5.1 IXL Aprendizaje personalizado y adaptable ... 12
1.1.5.2 Biblioteca nacional de manipuladores virtuales ... 12
1.1.5.3 Smartick ... 13
Capítulo II. Marco de referencia ... 16
Early Algebra y pensamiento algebraico ... 16
2.1.1 Early Algebra ... 16
2.1.2 Pensamiento algebraico ... 18
Modos de pensamiento algebraico ... 22
2.1.3 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada. ... 22
2.1.3.1 Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual ... 22
2.1.3.2 Estudio de algunas operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones ... 25
2.1.3.3 Estudio de relaciones de equivalencia y orden ... 27
2.1.3.4 Estudio y generalización de patrones ... 29
2.1.4 Álgebra como estudio de funciones ... 32
Aspectos del currículo nacional ... 34
Noción de tarea ... 37
Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) ... 38
Capítulo III. Metodología ... 44
Diseño tareas ... 44

3.1.1 Elementos y dimensiones de las tareas ... 44

3.1.2 Diseño de las tareas en relación con el modo o sub – modo de pensamiento asociado 52

3.1.2.1 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual ... 52

3.1.2.2 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio de las operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones ... 54

3.1.2.3 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio de relaciones de equivalencia y orden ... 55

3.1.2.4 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio y generalización de patrones. ... 56

3.1.2.5 Álgebra como estudio de funciones. ... 57

Diseño de la aplicación ... 57

Ealgebrapp. ... 69

Prueba de escritorio. ... 75

Conclusiones ... 79

Referencias ... 81

Anexos ... 85

Anexo 1 ... 85

Anexo 2: ... 102

Anexo 3: ... 112

Anexo 4: ... 126

Índice de Tablas

TABLA 1 7
TABLA 2 14
TABLA 3 21
TABLA 4 23
TABLA 5 24
TABLA 6 30
TABLA 7 31
TABLA 8 35
TABLA 9 41
TABLA 10 51
TABLA 11 53
TABLA 12 54
TABLA 13 55
TABLA 14 56
TABLA 15 69

Introducción

Se da inicio al trabajo presentando algunos aspectos preliminares tales como la justificación de la propuesta, los objetivos planteados y se continúa con los antecedentes; en cuanto a estos últimos se consultaron tres tipos de trabajos: (1) trabajos que pretendieran apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico por medio de aplicaciones, (2) trabajos que buscaran apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico y (3) aplicaciones para el aprendizaje de las matemáticas.

Seguidamente, se presenta el capítulo correspondiente al marco de referencia en el que, en primer lugar, se describe la corriente *Early Algebra* como propuesta curricular y línea de investigación, los estudios realizados para este trabajo permitieron identificar dos modos de pensamiento algebraico principales: (1) *Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada* y (2) *Álgebra como estudio de funciones.* En este capítulo también se explicitan los conocimientos propios de *Early Algebra.* En segundo lugar, se caracterizan los dos modos de pensamiento algebraico en el marco de *Early Algebra*, determinando así cuatro sub–modos de pensamiento asociados al primer modo de pensamiento algebraico. Cabe destacar que en esta caracterización se encontró que hay otros pensamientos, como el relacional y el funcional que pueden contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. En tercer lugar, se muestra que en los referentes curriculares de matemáticas colombianos hay elementos que se encuentran en conformidad con lo que se propone en *Early Algebra*. En cuarto lugar, se ahonda en la noción de tarea, sus elementos, dimensiones y tipos; para finalizar, se ubica la importancia de incorporar las Tecnologías de la información y la comunicación en la educación matemática y el reto que implica para los profesores utilizar o diseñar software de manera intencionada, para la enseñanza de las matemáticas.

Posteriormente, se expone la metodología dividida en tres partes: diseño de las tareas, diseño de la aplicación y prueba de escritorio. En el diseño de las tareas se presentan los elementos específicos que permitieron su construcción; en el diseño de la aplicación, que recibe el nombre de *Ealgebrapp* y se divide en seis partes, se presenta cada una de estas partes; en el apartado de la prueba de escritorio, se presentan los cambios realizados a la aplicación en atención a fallas encontradas.

Finalmente, se presentan las conclusiones y consideraciones en relación con los objetivos propuestos, las referencias y los anexos.

Capítulo I. Preliminares

Justificación

El trabajo “Promoviendo el desarrollo del pensamiento algebraico desde una aplicación para Android” pretende contribuir a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; específicamente, al pensamiento algebraico temprano en estudiantes del primer ciclo de la educación primaria a través del diseño o adaptación de tareas dispuestas en una aplicación para Android.

De acuerdo con Radford (2010, citado en Vergel & Rojas, 2018) *el pensamiento algebraico* (PA) es “un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado que ha sido refinado progresivamente a lo largo del tiempo” (p. 51). Esto supone que pensar algebraicamente va mucho más allá de manipular expresiones algebraicas; este implica construir esquemas mentales que propicien la comprensión de estructuras matemáticas. Para ejemplificar lo anterior se puede hacer referencia a la generalización de patrones: el estudiante en principio maneja cantidades conocidas; posteriormente, debe identificar qué es lo común o lo que se va repitiendo, encuentra una regularidad que se cumple para los casos particulares que está considerando, ahora debe validar si su conjetura sobre la regularidad es verdadera para cualquier caso trabajando con cantidades desconocidas, por lo tanto, debe reconocer de qué manera se encuentran relacionadas las cantidades en ese contexto, es allí, donde nace esa “reflexión matemática”, cuando surge el PA.

Early Algebra (o álgebra temprana) es una propuesta que propone como enfoque curricular incluir y promover el pensamiento algebraico desde la educación preescolar y básica primaria, a través de observaciones de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Así mismo, su objetivo principal gira en torno a promover el pensamiento algebraico de manera simultánea con el aritmético para facilitar la transición entre ellos (Socas, 2011). En Colombia se sugiere esta corriente. En los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM), los Lineamientos Curriculares y en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) se indica que en los primeros niveles de escolarización es apropiado que los estudiantes realicen actividades que potencien el desarrollo del pensamiento algebraico: reconocer, describir y analizar relaciones, regularidades y patrones.

Por otra parte, las tecnologías de la información y comunicación (TIC) cuentan con un protagonismo importante en la vida de cada individuo, ya que, de acuerdo con lo planteado por la Unesco (2013), no hay algún aspecto de la vida humana que no se haya visto afectado por estas; y más actualmente después de haber experimentado una pandemia, este suceso trajo consigo una crisis educativa (al menos para una gran parte de la población) porque dio lugar al cierre masivo de instituciones, lo cual obligó a algunas comunidades educativas a transitar a la virtualidad. Fue evidente que muchos niños, padres, cuidadores y profesores no tenían acceso a juegos o aplicaciones que ayudaran a dar continuidad a la educación y que contribuyeran a ocupar el tiempo libre de manera óptima. A partir de esto, es importante reconocer que las TIC son significativas en la educación ya que permiten establecer puentes o conexiones entre saberes; además, los estudiantes por lo general se sienten atraídos por descubrir o explorar cada vez más estas herramientas. Asimismo, se han vuelto relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues gracias a estas tecnologías dichos procesos se han visto beneficiados por el desarrollo de herramientas pedagógicas, didácticas y metodológicas. Estas herramientas ofrecen distintas maneras de abordar, representar o modelar situaciones problema, en relación con lo anterior, es importante resaltar que "las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos" (MEN, 2006, p. 49).

Esta iniciativa surge al reconocer, a partir de la experiencia de la autora, tres aspectos:

(1) Como profesora en formación y como estudiante, se ha evidenciado que, en el contexto colombiano, de manera efectiva, el estudio del Álgebra tiene lugar en la educación básica secundaria (aunque curricularmente, como se expuso antes, puede estar presente desde la educación primaria), específicamente en el grado octavo, esto significa que solo hasta allí los estudiantes tienen su primer encuentro con el manejo de cantidades desconocidas. Es importante resaltar que, en la mayoría de los casos, según Agudelo (2002), en el estudio escolar del Álgebra simplemente se presentan expresiones algebraicas sin significado o relaciones aparentes, y que esto conduce a que los estudiantes se limiten a tratar de manipularlas, pero al no comprenderlas presentan dificultades y cometen errores debido a la incomprensión del significado de las letras, escritura de las declaraciones generales, ideas erradas en la notación y el uso de convenciones. De acuerdo con lo anterior, cabría preguntarse: ¿en dónde queda el desarrollo del pensamiento algebraico?

(2) A través de la experiencia como cuidadora de familiares en edad escolar, particularmente del primer ciclo de educación primaria, se ha observado que la concepción de las matemáticas para los estudiantes continúa siendo la de una ciencia estática y procedimental, dejando de lado pensar, inducir, cuestionar, proponer, errar y comprender a profundidad los objetos matemáticos. Lo cual permite reafirmar el tercer aspecto:

(3) En el marco de uno de los cursos de la licenciatura, Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra, orientado por la Dra. Cecilia Agudelo, la autora logró identificar la urgencia y el potencial que tiene apostarle al desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras edades escolares.

En concordancia con lo anteriormente enunciado, este trabajo de grado tiene como propósito caracterizar y disponer un conjunto de tareas en el marco de *Early Algebra* (EA), a través de una aplicación para dispositivos Android mediante la cual se pretende desarrollar el pensamiento algebraico. Tanto las tareas como la aplicación están dirigidas a estudiantes del primer ciclo de educación primaria. Se procura que por medio de esta aplicación los estudiantes tengan la oportunidad de explorar, visualizar y conjeturar de manera interactiva.

Al explorar aplicaciones dirigidas a estudiantes del primer ciclo de educación primaria dedicadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Smartick, Bmath, Todo Math y Juego Infantil Series Lógicas), se encontró que:

(1) Algunas tareas vienen con tutoriales en los que se le indica al estudiante qué está involucrado sin permitir que lo descubra; por ejemplo, evaluar si la igualdad $33 + 8 = 8 + 33$ es verdadera, el tutorial explicita que sí ¡claro! es cierta porque la adición de números naturales tiene la propiedad conmutativa; posteriormente, provee algunas igualdades para que el estudiante evalúe si son verdaderas o falsas, pero se considera que el verdadero reto estaría en que el estudiante descubriera la propiedad y su veracidad para cualquier par de números naturales.
(2) En relación con secuencias y patrones, el trabajo se ha centrado en listar números con un patrón de repetición definido y dejar espacios vacíos en los que el estudiante debe colocar el número que hace falta; también, hay trabajos con secuencias icónicas en las que el estudiante debe identificar el patrón, completarlo, proponer uno similar y razonar si de acuerdo con el patrón hay un elemento o varios que no pertenezcan a la secuencia.
(3) En casi todas las aplicaciones cuando el estudiante da una respuesta diferente a la que el programa tiene guardada, no hay oportunidad de hacer nuevos intentos en los que de alguna manera al menos se le informe que hay algo que no corresponde para que lo revise; sino que el programa muestra la respuesta a la que debía llegar el estudiante; en la aplicación a desarrollar se pretende tener este aspecto en cuenta para que el estudiante tenga al menos una oportunidad de caer en cuenta en qué está fallando.

Por estas razones, se consideró que podría ser útil contar con herramientas diseñadas intencionalmente para apoyar, en este caso, el desarrollo del pensamiento algebraico a través de una herramienta tecnológica, en la que el estudiante tenga la oportunidad de descubrir, verificar y caer en cuenta de qué está fallando.

Objetivos

1.1.1 General

Aportar al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes del primer ciclo de la educación primaria, a través del diseño o adaptación de tareas dispuestas en una aplicación para Android en el marco de la corriente *Early Algebra*.

1.1.2 Específicos

- Identificar los aspectos propios de *Early Algebra* como un enfoque propicio para la enseñanza del álgebra en las primeras edades escolares, que permitan caracterizar las tareas a diseñar, seleccionar o adaptar.

- Potenciar habilidades para la creación de aplicaciones educativas mediante arrastre y configuración de componentes utilizando la plataforma *Kodular*.
- Diseñar una aplicación para Android que busca promover el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes del primer ciclo de la educación primaria.

Antecedentes

Este apartado se encuentra dividido en tres secciones: (1) descripción de algunos trabajos, la mayoría de ellos desarrollados en el Departamento de Matemáticas de la UPN que se encuentran relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico (PA), a través de tareas dispuestas en una aplicación diseñada y desarrollada en el marco de dicho trabajo; (2) presentación de algunos trabajos vinculados con el desarrollo del PA a partir de tareas; (3) aplicaciones en la Web dirigidas al aprendizaje de las matemáticas que, por su interfaz o tareas propuestas, se consideran pertinentes para el desarrollo de la aplicación objeto de este trabajo. Para estas, se mostrará un breve resumen y las conclusiones que son de interés para el desarrollo de esta monografía.

1.1.3 Trabajos de grado que buscan aportar al desarrollo del PA a través de aplicaciones

A continuación, se presentan cuatro trabajos de grado de la Licenciatura en Matemáticas o de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, para los cuales se diseñó e implementó una aplicación como mediadora del aprendizaje, en cada una se dispusieron algunas tareas cuyos objetivos se centraron en apoyar el proceso de generalización específicamente.

El primer trabajo titulado "Desarrollo de procesos de generalización por medio de un videojuego" (Ríos, 2020), es una monografía de pregrado en la que, como su título lo dice, se diseñó un videojuego, en *Stencyl*, dirigido a cinco niños de 7 a 8 años, cuyo propósito fue desarrollar procesos de generalización. El videojuego se dividió en 7 escenarios, cada uno tenía una meta específica asociada a reconocer un patrón numérico o reconocer un patrón a partir de la posición, lo cual permitiría ganar; así pues, las metas se relacionaron con los procesos matemáticos que se esperaba realizarán los estudiantes a partir de las tareas propuestas. En la aplicación se le planteó al estudiante obtener cierto número de monedas o diamantes de algún color, esquivar monedas, descubrir el camino correcto o seleccionar apropiadamente algunos elementos para que se escuchara acertadamente una canción. Además, cada escenario estuvo acompañado de un conjunto de tareas que buscaban que el estudiante comunicara y verificara patrones.

De acuerdo con lo anterior, Ríos (2020) concluyó que los cinco estudiantes a quienes se dirigió la actividad lograron reconocer un patrón, comunicarlo de manera oral o escrita y verificarlo. También resaltó que un acompañamiento docente adecuado podría garantizar el desarrollo de los procesos de generalización. Por otra parte, se identificó que en este contexto los tipos de generalización más recurrentes son el factual y contextual.

EI segundo trabajo titulado “El mundo de las secuencias: un aplicativo dirigido a niños de 4 a 8 años para iniciarlos en el proceso de generalización” (Navarro, 2014), es otra monografía de pregrado que tuvo como objetivo el diseño tareas que involucrasen a estudiantes en el proceso de generalización, particularmente para el desarrollo de su primera fase: ver o percibir un patrón, mediante un aplicativo en *Scratch*. La aplicación se divide en cinco mundos, cada mundo se divide en tres secciones, cada sección cuenta con algún tipo de secuencia (corporal, manipulativa, icónica, tabular, gráfico numérico, numérica, por recurrencia) para que los estudiantes resuelvan tareas como: copiar un patrón dado, identificar la regularidad, extender una serie, completar un patrón y utilizar el mismo patrón con propiedades diferentes.

Se realizó un pilotaje con 24 niños de primero de primaria y 5 maestros en formación de la Licenciatura en Educación Especial de la Universidad Pedagógica Nacional. En el caso del pilotaje con los niños, se tuvieron en cuenta 4 aspectos para validar la aceptación del *software,* dichos aspectos fueron: aceptación del aplicativo, personajes, secciones de juego y percepción de la dificultad de las tareas; adicionalmente, se realizaron encuestas tipo *Likert* adaptadas a los niños en las que se logró captar que, en general, el aplicativo fue aceptado. En cuanto a los maestros en formación, se buscó que comentaran (1) si las imágenes, tareas, personajes o demás elementos del aplicativo, fueron pertinentes en relación con las edades propuestas a las que se dirigió (inicialmente fue de 6 a 9 años); y (2) rango de edad para el que el aplicativo fuese oportuno. Es conveniente señalar que, teniendo en cuenta los resultados que arrojó el “doble” pilotaje, se realizó un diseño final del aplicativo y se modificó el rango de edad al cual se dirigía.

También, se resalta que el pilotaje permitió concluir que las tareas y herramientas utilizadas y dispuestas en el aplicativo fueron llamativas para los niños, así que mediante el juego se logró que los estudiantes experimentaran la primera fase de la generalización. Además, se concluyó que las imágenes, colores, cantidades, sonidos, etc. utilizados fueron elementos familiares para los niños de acuerdo con el rango de edad establecido.

Con respecto a los dos trabajos anteriores, se resalta que ambos autores señalaron que el uso de la aplicación favoreció el aprendizaje de los estudiantes, dado a que, por medio de esta, su motivación por aprender se incrementó.

El tercer trabajo titulado “Mathgame: acercamiento al proceso de generalización a través de un videojuego” (Cardona & Guevara, 2017), es un trabajo de grado de Licenciatura en Matemáticas que tuvo como objetivo el diseño de un videojuego que funcionara como herramienta para el acercamiento a la generalización. El juego fue programado en *App Inventor*, contiene 4 mundos, que a su vez contienen 7 pruebas cada uno. Las tareas propuestas en cada mundo consisten en continuar una sucesión, interpolar términos en una sucesión, realizar cambios de representación y expresar el término general de una sucesión; además, teniendo en cuenta las características del *Smartphone* la tarea se completaría dibujando, seleccionando, emparejando o escribiendo; por ejemplo, el estudiante debía hallar el valor de x en $4, 7, 10, 13, x, \ldots$ para ello, tiene que deslizarse una bolita que aparece en pantalla para golpear la opción correcta.

Finalmente, es importante mencionar que los autores no proponen alguna edad específica para la cual se dirija el videojuego.

El cuarto trabajo titulado "Aplicación para móviles Android: una propuesta para el desarrollo de habilidades en el proceso de generalización" (Brango & Rojas, 2016), es un trabajo de grado de Especialización en Educación Matemática cuyo objetivo fue el desarrollo de habilidades de generalización; para ello, los autores diseñaron una aplicación *Android* como herramienta mediadora del aprendizaje, en la que propusieron ver animaciones y videos en los que mostraron el desarrollo geométrico y algebraico de algunas sumatorias, responder preguntas de selección múltiple y realizar algunos ejercicios. La aplicación se diseñó para contar con acompañamiento y orientación docente. La aplicación estuvo dirigida a estudiantes de grado octavo del Colegio Bachillerato Patria quienes, finalizando el proceso, evaluaron la aplicación mediante una encuesta tipo *Likert*.

Como parte del desarrollo del trabajo, los autores describieron brevemente seis plataformas (*Mobincube, Infinity Monkeys, Mobapp Creator, Como, Instant AppBuilder y Good Barber*) para crear aplicaciones que no requieren de conocimientos de programación. De las seis plataformas consideradas, destacaron y seleccionaron *Mobincube* porque es gratuita y permite personalizar completamente cada apartado de la aplicación. Finalmente, señalaron que *Mobincube* facilitó la creación y diseño de la aplicación; así mismo, el uso de la aplicación favoreció el desarrollo de las habilidades y el ambiente de la clase. Conviene destacar que, aunque los autores mencionaron como objetivo el desarrollo de habilidades de generalización, en el documento no mencionaron cuáles son esas habilidades que pretendieron desarrollar y que concluyeron haber desarrollado.

A modo de conclusión, de los anteriores trabajos se destaca que los estudiantes, de manera implícita, realizan dos tareas en una. Es decir, cada tarea debe responder a asuntos de corte matemático y de componente tecnológico, esto puede resultar obvio; sin embargo, es de interés identificar de qué manera estos autores utilizan la aplicación para lograr los objetivos referidos al aprendizaje de las matemáticas. En la Tabla 1 se muestra un resumen de las tareas propuestas en cada aplicación distinguiendo el componente matemático del tecnológico (que alude a lo que se debe hacer en la aplicación).

Tabla 1

Distinción de los componentes matemático y tecnológico de las tareas dispuestas en aplicaciones

Nombre del trabajo	Tareas	
	Componente matemático	Componente tecnológico
Desarrollo de procesos de generalización por medio de un videojuego	Reconocer un patrón numérico Reconocer el patrón de una secuencia identificando el término que debe	Obtener cierto número de monedas o diamantes Esquivar monedas Descubrir el camino correcto

Nombre del trabajo	Tareas	
	Componente matemático	Componente tecnológico
	haber en cualquier posición	Seleccionar correctamente algunos elementos para que suene acertadamente una canción
El mundo de las secuencias: un aplicativo dirigido a niños de 4 a 8 años para iniciarlos en el proceso de generalización	Copiar un patrón dado Identificar regularidades Extender una sucesión Completar un patrón Conformar un patrón teniendo en cuenta algunas propiedades conocidas previamente Utilizar diferentes tipos de secuencias	Imitar a un personaje Escuchar sonidos de animales, instrumentos, etc. Ayudar a un animal a cruzar cierto lugar Ayudar a un personaje a acomodar algunos animales A través de un personaje se recorre una fábrica para aprender cómo empacar chocolates, enviar pedidos y realizar facturas, lo que posibilitará que más adelante el estudiante complete un pedido, acomode algunos chocolates y complete una factura
Mathgame: acercamiento al proceso de generalización a través de un videojuego	Continuar una sucesión Interpolar términos en una sucesión Realizar cambios de representación Expresar el término general de una sucesión	Dibujar Seleccionar con ayuda del acelerómetro, micrófono o táctil Emparejar Escribir
Aplicación para móviles Android: una propuesta para el desarrollo de habilidades en el proceso de generalización	Reconocer el desarrollo geométrico y algebraico de algunas sumatorias Realizar ejercicios	Ver animaciones y videos en los que se presenta el desarrollo geométrico y algebraico de algunas sumatorias Responder preguntas de selección múltiple

1.1.4 Trabajos que pretenden aportar al desarrollo del pensamiento algebraico

En las siguientes líneas, se presentan cuatro trabajos (tres de la Universidad Pedagógica Nacional, uno de Licenciatura en Matemáticas y dos de la Maestría en Docencia de la Matemática; y una ponencia internacional), para dos de ellos las autoras diseñaron y desarrollaron un cuadernillo de tareas. El primero, presenta algunas rutas seguidas por los estudiantes al momento de tomar la generalización como estrategia para resolver tareas. El segundo, muestra una cartilla dirigida a personas de la tercera edad que pretende promover el proceso de generalización. El tercero, presenta algunas tareas para apoyar el PA desde contextos numéricos y a través del trabajo con patrones figurales. El cuarto, presenta tareas que pretenden aportar al pensamiento relacional que a su vez aporta al PA.

El primer trabajo revisado alude a la investigación titulada "Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años" (García, 2011), en esta tesis de Maestría la autora estableció estrategias de nivel para cada una de las fases en la construcción de una generalización, lo cual permitió identificar las rutas que siguieron los estudiantes al momento de generalizar.

En la investigación fueron partícipes 5 estudiantes de grado sexto identificados como talentosos en matemáticas, a partir de las soluciones a las seis tareas propuestas se identificaron catorce rutas, las más comunes fueron: 1) Conjeturar acerca de las relaciones entre las partes, describir las relaciones entre las partes, escribir con palabras la conjetura observada y no verificar la conjetura, 2) Conjeturar acerca de las relaciones entre las partes, describir las relaciones entre las partes, escribir con símbolos la conjetura observada y no verificar su conjetura y 3) Analizar la imagen, describir las propiedades comunes entre los casos particulares, escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares y verificar su conjetura mediante un término cercano. En cuanto a las rutas, se evidenció que es común que los estudiantes no verifiquen, por lo cual, se concluyó que es fundamental diseñar tareas o preguntas destinadas a fortalecer este aspecto.

Adicionalmente, por un lado, se logró confirmar que es más factible que el estudiante describa un patrón de manera verbal que de manera algebraica; por el otro, se encontró que en las tareas que involucraron un contexto geométrico hubo más aciertos, con respecto a las relacionadas con contextos numéricos. En este sentido, es conveniente mencionar que, en ninguna de las tareas que involucraron contextos numéricos los estudiantes llegaron a la escritura algebraica, mientras que en algunas tareas con contexto geométrico sí.

El segundo trabajo revisado se titula "Hacia la generalización de patrones: una cartilla para la tercera edad" (Huertas & Sandoval, 2020), en este trabajo de grado para optar al título de Licenciadas en Matemáticas, se buscó analizar el proceso que llevaron a cabo tres adultos mayores al abordar tareas de generalización de patrones, para ello se diseñó una cartilla. La cartilla está compuesta por nueve tareas en cada una de las cuales se planteó una pregunta general y en algunas se presentó un contexto (construcción de pulseras o la tienda de artesanías); los adultos debían observar, identificar, explicar, completar, dibujar, comunicar, construir y representar patrones.

Se concluyó que las tareas propuestas fueron un importante medio a través del cual los adultos mayores lograron desarrollar procesos de generalización, se añade que "el camino que se siguió es una forma de llegar a expresiones de generalidad sin necesidad de usar variables" (Huertas & Sandoval, 2020). Además, la mayoría de las tareas aportaron a las etapas de generalización ver y decir.

Como se ha mencionado antes, García (2011) y Sandoval & Huertas (2020) producen una cartilla o cuadernillo final, que constituyen un insumo importante para tener en cuenta en el marco de la presente monografía, ya que muestran específicamente las tareas propuestas y algunas preguntas que de cierta manera llevan al estudiante a vivenciar el proceso de generalización; es decir, en la tarea se disponen preguntas con distintos niveles de dificultad en un orden que busca favorecer el aprendizaje. Ahora, la estructura de las preguntas también es relevante por el tipo de interacción y exploración que pueden permitir, esto pensando en la aplicación a diseñar en el presente trabajo; por ejemplo, en alguna de las cartillas existe una pregunta que dice: "¿encuentras algo en común entre estos elementos?" , para la cual el estudiante tiene dos opciones sí o no; en caso de seleccionar sí, debería señalar qué; en caso de seleccionar no, debería existir otra pregunta u otro tipo de información que le permitiera identificar que en este caso sí había algo común.

El tercer trabajo revisado se titula "Una exploración del potencial para impulsar el desarrollo de pensamiento algebraico, de una innovación curricular que hace énfasis en la identificación de estructura matemática" (Saavedra & Tocarruncho, 2018), es una tesis de maestría cuyo objetivo se centró en identificar la pertinencia y posibles efectos de una propuesta de innovación curricular para apoyar el desarrollo del PA con un grupo de 16 estudiantes de grado octavo. La propuesta se divide en dos partes: la primera, "apoyo del desarrollo del PA en contextos numéricos", para lo que realizaron una exploración inicial del pensamiento numérico presente en los estudiantes al momento de abordar tareas matemáticas específicas, las cuales pretendían identificar la percepción que tenían los estudiantes acerca del signo igual, si reconocían expresiones equivalentes o propiedades de operaciones entre números enteros; la exploración permitió identificar que el pensamiento aritmético de la mayoría de los estudiantes se limitó a los cálculos numéricos, identificaron el signo igual como un operador (hay que hacer algo) y tuvieron dificultad para reconocer cuándo dos expresiones aritméticas son equivalentes, en consecuencia, surge la "Actividad I" que pretendió ayudar a los estudiantes a ampliar su significado del signo igual, se dividió en tres tareas que buscaron explorar las formas de conteo que proponían los estudiantes para conducirlos a hacerlas explícitas; es decir, el registro escrito de las operaciones involucradas.

En la segunda parte de la propuesta, "apoyo del desarrollo del pensamiento algebraico a través del trabajo con patrones figurales", realizaron una exploración del pensamiento de los estudiantes cuando hay involucradas letras como número general y se debe operar con este número, buscaron observar si los estudiantes identifican un patrón a partir de una secuencia y la manera de comunicar dicho patrón, así como la manera de abordar una situación en la que debían encontrar la forma en que se relacionan dos magnitudes (relación funcional). Fruto de ello, encontraron que en ocasiones los estudiantes ignoran la letra o le asignan valores arbitrarios para hacer operaciones, la mayoría difícilmente logró abstraer y generalizar cuando se dejó de lado la representación geométrica en una secuencia; así mismo, pudieron encontrar cierto término solicitado teniendo en cuenta una regularidad, pero les costó generalizarlo, se les dificultó expresar con palabras lo que veían y hacían al momento de abordar preguntas que se relacionan con su pensamiento. Para atender a estas dificultades y apoyar el desarrollo del PA diseñaron las actividades II, III y IV, cada una cuenta con tareas situadas en un contexto cercano al estudiante (medio ambiente, una persona que pone baldosas, etc.); sumado a esto, cada tarea cuenta con preguntas que desafían el pensamiento de los estudiantes y buscan que este describa con detalle la(s) estrategia(s) que utilizan.

Se concluyó que 15 de los 16 estudiantes lograron reconocer el signo igual como una equivalencia; adicionalmente, esto aportó a la construcción del significado de la propiedad conmutativa de la adición y la multiplicación. Para continuar, 14 estudiantes lograron identificar la forma en que se pueden relacionar dos cantidades y expresar esa relación de manera general, recurriendo en primera instancia al lenguaje natural. Asimismo, todos los estudiantes identificaron la necesidad de transitar a un lenguaje más "corto" para expresar la relación entre cantidades. Además, se realizó una reflexión importante en torno a la no existencia de afán por trabajar expresiones literales para apoyar el desarrollo del PA, que trabajar con situaciones comprensibles para los estudiantes y atender a sus necesidades de aprendizaje es una oportunidad para que exploren y describan la variación entre números.

El cuarto trabajo revisado se titula "Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años" (Molina, 2011), es una ponencia que tuvo lugar en el Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática del año 2011, allí se presentó un experimento de enseñanza en el marco de *Early Algebra* realizado con 26 estudiantes de 8-9 años de grado tercero que buscó identificar el potencial de la propuesta y la capacidad presente en el estudiantado para desarrollar pensamiento relacional. Situada en el contexto de las igualdades, se propuso a los estudiantes validar sentencias numéricas (juzgar si una igualdad es verdadera o falsa argumentando) basadas en propiedades aritméticas y enfrentarse a igualdades abiertas (falta un número para que se cumpla la igualdad); las segundas fueron utilizadas para identificar qué comprendían los estudiantes por el signo igual y las estrategias o dificultades al momento de resolverlas, las primeras se emplearon para favorecer y detectar el uso del pensamiento relacional en la resolución, así como promover la comprensión del signo igual.

Se logró concluir que el experimento pone de manifiesto parte del potencial del cambio curricular propuesto por *Early Algebra*, lo accesible que es ponerlo en práctica en un contexto concreto favoreciendo el pensamiento relacional en este caso; asimismo, permitió evidenciar la capacidad de los niños para trabajar en aritmética con "ojos" algebraicos. También, se hizo evidente que desde que el uso del pensamiento relacional se puso en juego en el aula los estudiantes fueron desarrollándolo poco a poco, lo cual indica que es un tipo pensamiento que surge y progresa a partir de la experiencia con la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética.
De los dos últimos trabajos revisados, Saavedra & Tocarruncho (2018) y Molina (2011), se destaca que atienden a otros elementos del PA distintos a generalización de patrones. Además, proponen que desde la Aritmética se puede desarrollar PA, aprendizaje con comprensión y, particularmente, desarrollar un significado profundo de la igualdad.

Finalmente, es importante señalar que, como se podrá evidenciar más adelante en el marco de referencia, hay distintos tipos o modos de PA. Si bien, los antecedentes no logran acaparar cada uno de esos tipos, de manera general permiten vislumbrar algunos asuntos que deben considerarse al diseñar aplicaciones que buscan promover el PA.

1.1.5 Aplicaciones en la Web para el aprendizaje de las matemáticas

A continuación, se presentan brevemente tres aplicaciones halladas en la Web, de acceso libre total o parcial, cuyo propósito es el aprendizaje de las matemáticas. Se incluye los apartados que contienen y resultan de interés para el presente trabajo. Se revisará qué tipo de interacción tiene con el usuario y la interfaz.

1.1.5.1 IXL Aprendizaje personalizado y adaptable

Cuenta con 7 cursos, preescolar y de primero a sexto; cada curso contiene categorías que a su vez contienen competencias, hay bastantes tareas por competencia que el estudiante puede realizar.

Esta plataforma en línea permite al estudiante afianzar conocimientos o aprender bajo su propio ritmo a medida que va realizando tareas de tipo ejercicio, asigna una puntuación de 1 – 100 teniendo en cuenta el tiempo que se tarda en responder y si la respuesta es correcta o no, lo cual permite a la plataforma identificar si al estudiante se le dificulta o no cierta tarea propuesta; así, de acuerdo con el avance, se va intensificando la dificultad de las tareas. Por otra parte, las puntuaciones asignadas permiten un análisis del progreso del estudiante.
Adicional a lo anterior, IXL ofrece premios virtuales a los estudiantes. Para acceder a todo el contenido de manera libre se debe realizar una suscripción mensual o anual; sin embargo, la plataforma permite navegar entre cursos, temas y competencias.
En cuanto al asunto de interés para el presente trabajo, se encontraron los siguientes temas:

- Patrones: se encuentra desde preescolar hasta segundo grado, el estudiante debe completar o crear un patrón pictórico de repetición y completar progresiones aritméticas crecientes o decrecientes.
- Patrones y secuencias de números: se encuentra en el grado tercero, contiene ejercicios similares a los de la categoría patrones, salvo que las progresiones contienen números mayores a los que se presentan en la categoría Patrones.
- Secuencias de números: el usuario debe completar progresiones aritméticas y geométricas, la categoría hace parte de las temáticas para cuarto y quinto grado.
- Teoría de números: está dirigida a sexto grado, allí se trabajan progresiones aritméticas y geométricas.

Es importante mencionar que al ingresar una respuesta que el programa no tiene guardada, se indica que la respuesta es incorrecta y se da una explicación en la cual se muestra la respuesta correcta; posteriormente, el programa arroja una pregunta similar.

1.1.5.2 Biblioteca nacional de manipuladores virtuales

Es una biblioteca virtual de manipuladores interactivos para matemáticas, financiada por la Fundación Nacional de Ciencia de EE. UU. Cuenta con manipuladores para todos los grados y contiene 5 apartados: Números y operaciones, Medidas y Análisis de Datos, Álgebra, Geometría y Probabilidad. Además, cuenta con instrucciones de uso e indicaciones para el profesor por cada manipulador.

En el apartado de Álgebra se encuentran manipulables relacionados con patrones, a continuación, se hace una breve descripción de estos:

- Bloques de Patrones (Pre – k – 2): haciendo uso de seis figuras geométricas comunes, propone al estudiante describir y construir patrones a través las seis tareas que se describen en seguida:
    a) ABAB: el estudiante debe "crear" un patrón combinando dos figuras, teniendo en cuenta que ya se muestra cómo hacerlo y cómo interpretarlo. Además, se muestra una correspondencia entre cada figura y una letra del alfabeto, para que el estudiante pueda crear formas con un patrón dado.
    b) Alrededor: propone trabajar con las seis figuras y sus perímetros. El estudiante debe crear diferentes formas (al unir figuras) que cumplan con un patrón y debe hallar su perímetro como si fuera una sola pieza, así podrá contrastar entre perímetros de manera individual y con la forma creada, para realizar conjeturas o encontrar nuevos patrones.
    c) Describe el patrón: propone crear patrones en cierta disposición (una fila, por ejemplo); así, posteriormente, el estudiante deberá hacer una descripción lo más detallada posible en la cual narre su patrón.
    d) Describe las partes: presenta algunos boques de patrones y propone al estudiante separar esos bloques e inventar conjuntos de figuras teniendo en cuenta algún aspecto de estas, posteriormente debe describir cada conjunto de figuras.
    e) Crea un conjunto: el estudiante debe agregar diferentes figuras, de acuerdo con la cantidad indicada mediante una tabla.
    f) Clasificación y conteo: propone clasificar un conjunto de bloques que tengan un patrón; pueden estar dispuestos de manera horizontal o vertical, cada fila o columna debe tener un color diferente. Finalmente, el estudiante debe dar una descripción detallada de las clasificaciones hechas.
- Patrones de colores: el estudiante debe describir la secuencia de colores que se presenta para reconocer un patrón y completar los espacios que se encuentran sin colorear.

1.1.5.3 Smartick

Es una aplicación para el celular y una plataforma en línea que está dirigida a niños entre 4 y 14 años, es de pago, está diseñada para que el niño pueda manejarla sin compañía de algún adulto, asegura que con 15 minutos al día es suficiente para dominar las matemáticas, desarrollar agilidad mental, concentración, hábitos de estudio y comprensión lectora.

Por otra parte, de acuerdo con la edad que tiene el niño arroja ciertos ejercicios; después de hacer una primera prueba, permite ingresar al "mundo virtual" del niño. Se compone de 7 lugares: habitación, casita del árbol, gimnasio, tienda, juegos, escuela y pozo de agua. A medida que va completando cierta cantidad de tareas el juego obsequia estrellas con las que el estudiante puede hacer compras en la tienda.

Adicionalmente, al ir a la escuela puede seleccionar qué estudiar, hay un apartado denominado "operaciones y pensamiento algebraico" que contiene 35 tutoriales interactivos en los que inicialmente se presentan algunas explicaciones, para posteriormente, proponer tareas al estudiante. Los apartados explorados se sitúan en contextos cercanos como fiestas o un concurso de matemáticas; hay un tutorial titulado “pensamiento relacional” en el que se propone al estudiante juzgar la veracidad de una igualdad teniendo como precedentes algunas explicaciones como propiedades o ejemplos de cómo lo haría algún personaje en la aplicación. Por otra parte, al ir al gimnasio e iniciar una competición se presentan siete temas, entre ellos “series”, este contiene tareas en las que se deben organizar objetos de acuerdo con alguna característica (por altura, capacidad, grosor, etc.) y organizar objetos teniendo en cuenta atributos y un patrón (en función del color, tamaño, forma, etc.), contiene actividades en las que el niño debe reproducir, identificar, extender o extrapolar patrones de repetición o recurrencia que pueden ser numéricos o icónicos. En la zona de juegos hay distintos apartados (“memoria”, “razonamiento”, “atención” y “flexibilidad”) que contienen algunos juegos con distintos niveles de dificultad para los niños. Finalmente, en los demás lugares se personaliza el avatar que representa al niño en el mundo virtual, se puede establecer conexión con otros niños en *Smartick* y comprar elementos con las estrellas ganadas al practicar.

De acuerdo con la descripción de las tres aplicaciones y su manipulación por parte de la autora de este documento, en la Tabla 2, se presenta un breve análisis de estas aplicaciones organizado en cinco aspectos: interacción, satisfacción, recursos, aprendizaje y progreso.

Tabla 2

Análisis de algunas aplicaciones para el aprendizaje de las Matemáticas

Apps / Aspectos	IXL	Smartick	Biblioteca de nacional de manipuladores virtuales
Interacción	Al reportar una respuesta diferente a la programada, muestra error y la respuesta correcta junto con una explicación (esto podría ser una limitación ya que no permite al estudiante explorar de una manera diferente, señala que la respuesta no es correcta y le provee la respuesta correcta acompañada de una explicación).	Al reportar una respuesta diferente a la programada, muestra error y la respuesta correcta. Permite al estudiante situarse en distintos escenarios como lo son habitación, casita del árbol, gimnasio, tienda, zona de juegos, escuela y pozo de agua.	Propone preguntas abiertas a los estudiantes, lo que no sesga sus respuestas. Propone la construcción de tablas, lo cual ayuda a manejar información. El estudiante tiene la oportunidad de manipular las fichas, ponerlas, arrastrarlas, quitarlas, cambiar su color, etc.
Satisfacción	Entrega premios virtuales como reconocimiento.	El usuario puede comprar elementos en la tienda con las estrellas ganadas al	El usuario tiene la ventaja de aprender por medio de la exploración.

Apps / Aspectos	IXL	Smartick	Biblioteca de nacional de manipuladores virtuales
		completar tareas; cada que se termina una fase de estudio permite corregir todas las respuestas incorrectas que se introdujeron antes; también, presenta distintos tipos de juegos que pretenden apoyar alguna capacidad o habilidad en el estudiante.	
Recursos	Cuenta con distintos colores, dibujos y animaciones; visualmente la aplicación es agradable. Además, dispone de audio; es decir, si el niño desea o lo requiere, la aplicación le puede leer las preguntas.	El entorno virtual cuenta con distintos contextos, colores, dibujos y animaciones; visualmente la aplicación es agradable. Además, cuenta con sonido, es decir, si el niño desea, la aplicación le puede leer las preguntas.	Tiene un buen volumen de manipuladores virtuales que permiten la exploración. Cuenta con un entorno sobrio, lo cual podría no ser muy llamativo para niños pequeños.
Aprendizaje	Tiene un gran banco de tareas y ejercicios mediante los cuales el estudiante puede aprender y practicar.	Tiene un gran banco de tareas y ejercicios mediante los cuales el estudiante puede aprender y practicar.	Las tareas propuestas permiten la exploración por parte de los estudiantes. Se puede identificar la secuencia en las tareas propuestas.
Progreso	Tiene un sistema de evaluación propio que permite mostrar el progreso del estudiante en tiempo real.	Tiene un sistema de evaluación propio que permite mostrar el progreso del estudiante en tiempo real.	Cada estudiante va a su propio ritmo.

Capítulo II. Marco de referencia

En este capítulo, en primer lugar, se describe la corriente *Early Algebra* (EA) como propuesta curricular y línea de investigación que trata del pensamiento algebraico (PA). En segundo lugar, habiendo distinguido algunos elementos del PA se presentan los modos de pensamiento identificados como principales en el marco de EA. En tercer lugar, se muestra un breve análisis que sintetiza la presencia de EA en los conocidos referentes de calidad para la educación en matemáticas en Colombia y otros países. En cuarto lugar, se relaciona un apartado con la noción de tarea que se adoptará en la presente monografía, junto con sus elementos y dimensiones. Finalmente, se muestra una sección que aborda la importancia de integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) con la educación matemática y, particularmente para EA en relación directa con el propósito de este trabajo.

Early Algebra y pensamiento algebraico

Esta sección se encuentra fundamentada principalmente en Kaput (2000), Vergel (2016), Kieran et al. (2016) y Pincheira & Alsina (2021); en consecuencia, gran parte de la información que se muestra está parafraseándose con base en los aportes de dichos autores. En primer lugar, se presentan algunos antecedentes de EA, para continuar describiendo qué es EA, cuáles son sus propósitos y cuáles son las áreas de contenido que involucra; y, en segundo lugar, se presentan las caracterizaciones propuestas por Radford (2010) y Godino et al. (2014) para el PA en general.

2.1.1 Early Algebra

Algunas investigaciones (por ejemplo, Wagner & Kieran, 1989; Kieran, 1992; Linchevski, 1995, citadas en Kieran, 2016; Alonso et al., 1993 y Rojano & Sutherland, 2001), han mostrado que el paso del pensamiento aritmético al PA supone ciertas dificultades para los estudiantes; particularmente, a finales del *siglo XX*, la investigación en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra reveló que jóvenes entre los 12 y 15 años tenían deficiencias en las formas de pensamiento aritmético cuando se enfrentaban por primera vez al álgebra. Por consiguiente, los investigadores comenzaron a interesarse por ciertos tipos de tareas que permitieran actividad algebraica accesible a los niños.

Según señaló Davis (1995, citado en Kieran, 2016), la reflexión en torno a incluir el álgebra a lo largo de la escuela primaria y secundaria habría tenido lugar desde la década de los 60 (por ejemplo, Duckworth, 1979; Küchemann, 1981 lo propusieron); sin embargo, fue hasta 2001 cuando se habló oficialmente de EA al ser incluida como tema en dos de los eventos más importantes en Educación Matemática (Congreso Internacional de Educación Matemática –CIEM- y el Foro de Investigación del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática -PME-).

Kieran (2016) afirma que los temas de interés en EA antes del 2000 estuvieron relacionados con:

(1) generalización relacionada con la actividad de creación de patrones,
(2) generalización de las propiedades de las operaciones y su estructura numérica,
(3) representación de relaciones entre cantidades e
(4) introducción de notación alfanumérica.

Mientras que después del 2000 la atención se ha centrado en:
(1) relaciones matemáticas,
(2) generalización de patrones y
(3) estudio de estructuras aritméticas.
Resaltando la importancia de los procesos de razonamiento utilizados por los estudiantes de 6 – 12 años.

Kaput (2000) propuso integrar el razonamiento algebraico en todos los grados y temas, él lo llamó "algebrizar el currículo" que, según sus concepciones, ayudaría (1) a abrir curricularmente un espacio para las matemáticas del *siglo XXI* que son necesarias, (2) a concebir las matemáticas como hábito mental y a nivel curricular serían un poco más profundas y coherentes y (3) a eliminar los cursos de álgebra tardíos, abruptos, aislados y superficiales. Además, dijo que el pensamiento algebraico se compone de cinco formas interrelacionadas de razonamiento, que pueden y deben iniciarse de manera temprana:

(1) Álgebra como generalización y formalización de patrones y restricciones
(2) Álgebra como manipulación sintácticamente guiada de formalismos
(3) Álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones
(4) Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta
(5) Álgebra como un cúmulo de lenguajes de modelado y de lenguajes de control de fenómenos

Con el paso del tiempo y mientas varios educadores e investigadores se fueron vinculando con EA, se generó la dicotomía entre si el simbolismo algebraico debía o no incluirse en los primeros niveles, pues hay quienes consideran que no es pertinente o no es propósito de EA, mientras que otros argumentan lo contrario (Kieran, 2016).

Según Kieran (2016), poco a poco fue posible identificar que la lista de formas de pensamiento para los primeros niveles escolares se redujo a tres:

(1) Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética.
(2) Álgebra como estudio de funciones.
(3) Álgebra como resolución de problemas.

No obstante, la mayoría de los estudios alrededor de EA integran el tercer modo de pensamiento en los otros dos (Kaput, 2008 citado en Kieran 2016); por lo tanto, las formas de PA principales en el marco de EA son:

(a) Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética y
(b) Álgebra como estudio de funciones.

Es importante resaltar que la forma *(a)* de pensamiento algebraico, también es conocida como Aritmética generalizada, lo cual es un detalle importante, pues anteriormente la aritmética generalizada se entendía como el álgebra simbólica; sin embargo, en el marco de EA, esta forma permite que los estudiantes exploren relaciones entre números y propiedades con sus operaciones aritméticas generalizables, sin que de manera necesaria se incluyan símbolos alfanuméricos (Kieran, 2016).

Por otra parte, en una investigación reciente, Pincheira & Alsina (2021) caracterizaron los conocimientos propios de EA en la educación infantil y primaria[1], así:

Los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Infantil (EI) son:

a) Experimentación con elementos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etcétera).
b) Seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón).
c) Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

En Educación Primaria (EP):

a) Comprensión de distintos tipos de relaciones de equivalencia y orden, etcétera y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etcétera).
b) Uso de símbolos[2] y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.
c) Comprensión del cambio.
d) Uso de variables para determinar una constante o incógnita.

Teniendo una mirada general sobre lo que ha sido y es EA pasamos ahora a precisar qué se entiende por pensamiento algebraico.

2.1.2 Pensamiento algebraico

De acuerdo con Radford (2010, citado en Vergel & Rojas, 2018) el *pensamiento algebraico*[3] es un "tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado que ha sido refinado progresivamente a

---

[1] Los resultados se lograron a través del análisis de los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile; se analizaron estos currículos ya que el álgebra temprana se encuentra de manera explícita en ellos. Además, es importante tener en cuenta que el currículo estadounidense es fuente de referencia del currículo latinoamericano.

[2] En el documento original los autores hacen referencia a símbolos algebraicos; sin embargo, en esta monografía no se considera que estudiantes de las primeras edades escolares comprendan verdaderamente la naturaleza de los símbolos algebraicos; por lo tanto, se tendrá en cuenta el uso de símbolos, bien sea verbales, icónicos o numéricos.

[3] Esta percepción surge, en primer lugar, de su idea de pensamiento como una manera de reflexionar continuamente sobre el mundo, pues para este autor tal actividad humana es un proceso que se mueve, cambia constantemente y no se da únicamente en el cerebro, sino que es mediado por artefactos (objetos, sistemas de signos, instrumentos…) que permiten materializarlo, por tanto son parte esencial de este; y, en segundo lugar, de su concepción del pensamiento matemático, pues en la reflexión matemática "la relación del individuo con el mundo enfatiza ideas en torno a la forma, el número, la medida, el tiempo, el espacio, etc." (Radford, 2006, p. 115).

lo largo del tiempo" (p. 51); esto es, un conjunto de formas en las que se puede "materializar" o "dar cuerpo" a una idea o concepto mediante un proceso de acción forjado por la realidad que se constituye por su historia y por las formas de interpretarla; en este caso la reflexión gira en torno a ideas o conceptos asociados a tres principios: (1) *el sentido de indeterminación*, lo que indica que la tarea a resolver involucra términos desconocidos como variables o parámetros y esto es identificado por el estudiante; (2) *la designación o denotación simbólica*, que refiere a la manera específica o particular en la que se nombran los objetos; esta simbolización se puede lograr valiéndose del lenguaje natural, de números, símbolos algebraicos, símbolos no convencionales o una combinación de estos; y (3) *la analiticidad*, alude a la manera en la que se trabaja con los objetos indeterminados, es decir, "manipular" los objetos desconocidos como si fuesen conocidos, así que se opera con ellos de manera analítica. Gracias a esta caracterización se puede pensar y replantear la manera en que las cantidades desconocidas adquieren significado para los estudiantes.

El mismo Radford (2010) también propone tres niveles de pensamiento algebraico:

(1) *Pensamiento algebraico factual*, es en el que intervienen *medios semióticos de objetivación*[4] como gestos, percepciones, movimientos o palabras; en este nivel de pensamiento la indeterminación se hace implícita, precisamente, porque todo se expresa a través de acciones concretas. Por ejemplo, señalar con la mirada, señalar con un lápiz, realizar movimientos con el lápiz, etc.
(2) *Pensamiento algebraico contextual*, en este nivel de pensamiento los medios semióticos de objetivación como los gestos y las palabras son sustituidos por otras herramientas, como frases "claves"; los objetos indeterminados se hacen explícitos y se vuelven parte del discurso, por ejemplo, el estudiante dice "arriba quito 1", "multiplico por 2 y le sumo 1", etc. Esto indica que los estudiantes trabajan con formas reducidas de expresión, por lo tanto, se identifica que hay evolución (Vergel & Rojas, 2018).
(3) *Pensamiento algebraico simbólico*, surge la representación mediante lenguaje algebraico, en otras palabras, las frases "claves" son traducidas a símbolos, lo cual es un cambio significativo.

En el marco de EA, estos niveles de pensamiento permiten comprender las estrategias y los procedimientos que utilizan los estudiantes a través de los medios semióticos (gestos, palabras…) que movilizan al abordar tareas (Vergel & Rojas, 2018). Es importante precisar que Vergel & Rojas (2018) se refieren específicamente a las tareas en el contexto de la generalización de patrones; sin embargo, al ser estos niveles del PA en general, se considera que pueden permitir comprender las estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes al abordar alguna tarea en el marco de EA y con ello, proponer tareas que lleven a poner en evidencia estos niveles.

Ahora bien, siguiendo los planteamientos de Godino et al. (2014) desde el enfoque ontosemiótico (EOS), es necesario considerar las prácticas matemáticas algebraicas, estas se

[4] Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados para lograr una estable conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones (Radford, 2003).

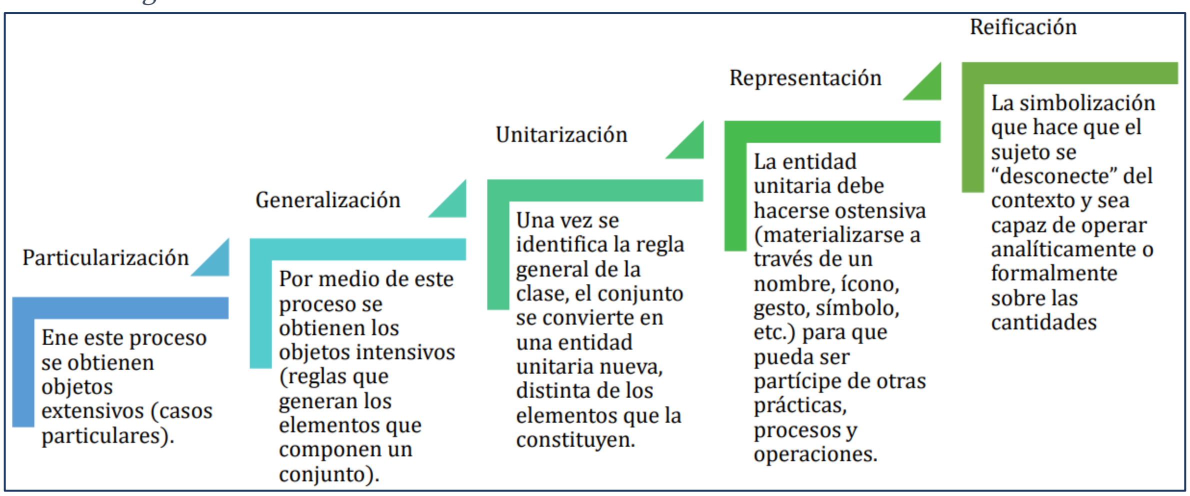
dan cuando hay presencia de ciertos objetos y procesos normalmente asociados en la literatura como algebraicos. Estos *objetos algebraicos* se dividen en cuatro:

(1) *Relaciones binarias y sus propiedades*. Pueden ser de equivalencia u orden. Dichas relaciones son utilizadas para definir nuevos conceptos matemáticos.
(2) *Operaciones y sus propiedades.* Realizadas sobre los elementos de distintos conjuntos. El cálculo algebraico es caracterizado por el uso de las propiedades de las operaciones en el conjunto. Además, se relacionan con los conceptos de ecuación, inecuación, incógnita, y procedimientos de eliminación, transposición de términos, factorización, etc.
(3) *Funciones algebraicas no trascendentes.* Aquellas generadas a través de la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación o radicación de la variable independiente. Considerando los distintos tipos de funciones (polinómicas, racionales y radicales), sus representaciones (tabular, gráfica o analítica) y su álgebra asociada (operaciones y propiedades).
(4) *Estructuras y tipos de estructuras.* Especialmente del álgebra superior o abstracta. Por ejemplo, semigrupo, grupo, anillo, cuerpo, etc.

Y los *procesos algebraicos* como se muestra en la Figura 1:

Figura 1

Procesos algebraicos



Nota. La información con la cual se construyó esta figura fue tomada de Godino et al. (2014).

A partir de lo anterior, Godino et al. (2014) caracterizan el PA distinguiendo entre cuatro niveles así: un nivel 0 en el que hay ausencia de razonamiento algebraico, dos niveles de algebrización primarios denominados proto-algebraicos y un tercer nivel en el que se puede considerar la actividad algebraica formal o propiamente algebraica; en la se muestra una descripción de cada nivel.

Tabla 3

Niveles de algebrización

Niveles	Objetos	Transformaciones	Lenguajes
0	Intervienen objetos extensivos (particulares) de primer grado. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos
1	Intervienen de manera implícita objetos intensivos (generales).	Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos extensivos, tanto en tareas estructurales como funcionales	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos intervinientes.
2	Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.
3	Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

Nota. Adaptado de Godino et al. (2014).

Con respecto a los niveles que propone Radford (2014) y a los niveles que proponen Godino et al. (2014), se resalta que se asignan a la solución de la tarea, no a la tarea *per se*, por lo tanto, se debe evaluar la solución que provee el estudiante para saber en qué nivel de PA o en qué nivel de algebrización se encuentra.

En virtud de EA, Godino et al. (2014) proponen la caracterización de los dos niveles de algebrización proto-algebraicos para que sean distinguibles de otras maneras de razonamiento algebraico. Esta caracterización es importante porque, por ejemplo, para otros autores (Gascón, 1999; Ruiz et al., 2010; y Gascón, 2011) la primera etapa en el proceso de algebrización corresponde a tareas y actividades matemáticas de carácter formal o que se pueden situar en el nivel 3 de algebrización. Además, si se analizan o estudian los comportamientos de los estudiantes a la luz de los objetos y procesos descritos anteriormente, se pueden identificar cuáles prácticas o tareas matemáticas son pertinentes para apoyar a los estudiantes en su progreso o tránsito por los niveles de algebrización.

Modos de pensamiento algebraico

Ya habiendo distinguido algunos elementos del PA en general como sus principios, objetos, procesos y niveles; continuaremos presentando las formas o modos de PA reconocidas como principales en el contexto de EA agrupados de una manera particular, de acuerdo con la interpretación lograda en el marco de la elaboración de este documento, sobre los diferentes escritos revisados y antes mencionados: Godino et al. (2014), Kieran (2016), Kaput (2000), Molina (2011), Carpenter et al. (2005), Vergel y Rojas (2018) y Vergel (2016); unidos a la experiencia de la autora en su tránsito por la Licenciatura en Matemáticas y de su asesora como exintegrante del Grupo de Álgebra de la UPN y al estudio de producciones del mismo grupo, específicamente Luque et al. (2013).

2.1.3 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada

Este modo de pensamiento se encuentra relacionado con distintos tipos de estructura; por un lado, la estructura algebraica de los sistemas numéricos determinada por las relaciones entre los números junto con sus propiedades; hay autores (por ejemplo, Molina, 2011 y Carpenter et al., 2005) que aportan a este modo de pensamiento en EA en conexión con el *pensamiento relacional*, entendido como una actividad cognitiva referida al reconocimiento y uso de relaciones y propiedades presentes en expresiones numéricas y algebraicas. Por el otro lado, se encuentran las estructuras numéricas o en conexión con las formas en que se hallan patrones en secuencias. También, integra expresiones, ecuaciones y la comprensión del signo igual.

Para este modo de pensamiento decidimos incluir cuatro enfoques que consideramos se encuentran estrechamente relacionados. En primer lugar, se encuentra el *estudio de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual*, en el que hay un énfasis en la comprensión amplia de la igualdad, para lo cual es importante comprender algunas operaciones y utilizar o reconocer ciertas propiedades. En segundo lugar, dispusimos el *estudio de algunas operaciones no usuales, propiedades, expresiones y ecuaciones*, en la que se hace énfasis a las operaciones, precisamente por ser distintas a las usuales, buscando identificar cuáles propiedades podrían o no cumplirse. En tercer lugar, incorporamos el *estudio de las relaciones de equivalencia y orden*, en las que actividades como la clasificación, la seriación, la comparación y la enumeración son el foco principal, especialmente en los primeros niveles escolares. Finalmente, mostramos el *estudio y generalización de patrones*, que se encuentra relacionado con nociones como patrón, secuencia, orden o regularidad.

2.1.3.1 Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual

Aquí abordamos en qué consisten las ideas o conceptos asociados al estudio de las operaciones junto con sus propiedades, de las expresiones y de las ecuaciones en el terreno usual; por terreno usual se alude al contexto escolar en el que generalmente se estudian operaciones binarias internas[5]; habitualmente la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación, la radicación y la logaritmación; normalmente en el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, reales o complejos, en algunos de los cuales resultan, algunas veces, no ser operaciones binarias. En estas operaciones, es común estudiar algunas propiedades como la conmutatividad, la asociatividad, la existencia de elemento neutro y la propiedad distributiva de unas operaciones respecto a otras.

Molina (2011) en el marco de EA propone considerar propiedades entre números naturales como la conmutatividad de la adición ($5+8=8+5$), la no conmutatividad de la sustracción ($15-8=8-15$), complementariedad de la adición y la sustracción ($80+100-100=80$), compensación ($15+14=13+16$), cero como elemento neutro de la adición y de la sustracción por la derecha ($0+325=325, 130-0=130$), la resta de dos números iguales es cero ($20-20=0$), composición/descomposición ($99-26=99-20-6, 8+8+9=16+9$), tamaño[6] ($37+22=300$) y reflexividad de la igualdad ($95=95$); todas ellas en el contexto de la igualdad, con sentencias que pueden ser, o no, verdaderas. Adicionalmente, las sentencias o igualdades que se tiene en cuenta son de acción o de no-acción; las primeras, son las que tienen operaciones en un solo lado del signo igual y, las otras, son las que tienen operaciones en ambos lados del signo igual (o en ninguno de ellos). En la Tabla 4, encuentra las definiciones de igualdad abierta y cerrada, así como de sentencia verdadera o falsa y algunos ejemplos.

Tabla 4

Igualdades y sentencias

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo</th><th>Definición</th><th>Ejemplo de acción</th><th>Ejemplo de no-acción</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Igualdad</td><td>Abierta</td><td>Igualdad con un término por averiguar.</td><td>$\quad + 3 = 4$
$5 = 7 -$</td><td>$\quad + 4 = 5 + 3$
$9 + 4 = 3 + \quad + 4$</td></tr>
<tr><td>Cerrada</td><td>Igualdad sin términos desconocidos.</td><td rowspan="2">$5 + 7 = 12$
$13 = 10 + 3$</td><td rowspan="2">$12 + 11 = 11 + 12$
$7 + 19 = 6 + 20$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sentencia</td><td>Verdadera</td><td>Proposición verdadera que contiene el signo igual.</td></tr>
<tr><td>Falsa</td><td>Proposición Falsa que contiene el signo igual.</td><td>$9 = 5 + 5$
12
$= 6 + 6 - 12$</td><td>$72 + 12 = 15 -$</td></tr>
</table>

Nota. La información presentada en esta tabla fue adaptada de Molina (2006, pp. 117 – 120).

Ahora bien, nótese que la comprensión del signo igual tiene un papel fundamental para el reconocimiento de las propiedades, en el marco de este enfoque es fundamental una comprensión amplia de este signo, que de acuerdo con de Matthews et al. (2012), aporta al

[5] Una operación binaria interna * en un conjunto A, es una función que asigna a cada par ordenado de elementos de ese conjunto, algún elemento del conjunto; es decir, *: $A \times A \to A$

[6] Originalmente es denominada como *magnitud*, pero consideramos que *tamaño* se ajusta mejor a su significado, pues precisamente 37 y 22 son números "pequeños" en comparación con 300, que podría decirse es un número más "grande"; así, sin necesidad de hacer la operación, es "evidente" que el resultado no corresponde.

desarrollo del pensamiento algebraico ya que debería permitir a los estudiantes identificar que este símbolo "=" representa la igualdad entre dos expresiones o cantidades. Estos autores proponen cuatro niveles en la construcción del conocimiento del signo igual, como se muestra en la Tabla 5:

Tabla 5

Niveles para el conocimiento del signo igual como indicador de equivalencia

Nivel	Descripción	Ejemplo
Rígido operacional	El estudiante resuelve, evalúa y codifica exitosamente ecuaciones "tradicionales"; es decir, a la izquierda del igual hay alguna operación por resolver y a la derecha su respuesta. Identifica la igualdad de manera operativa (hay que resolver algo).	$a + b = c$
Flexible operacional	El estudiante resuelve, evalúa y codifica exitosamente ecuaciones atípicas que coinciden con las "tradicionales", esto es, las operaciones pueden aparecer a la derecha y la respuesta la izquierda del signo igual. Identifica la igualdad de manera operativa.	$c = a + b$
Básico relacional	El estudiante resuelve, evalúa y codifica exitosamente estructuras de ecuaciones con operaciones en ambos lados del signo igual. Identifica que el símbolo "=" indica la equivalencia de las expresiones o cantidades dispuestas a cada lado de la igualdad (definición relacional del signo igual).	$a + b + c = d + e$
Comparativo relacional	El estudiante resuelve y evalúa ecuaciones o sentencias con éxito, comparando las expresiones en los dos lados del signo igual, incluido el uso de estrategias compensatorias y el reconocimiento de que las transformaciones mantienen la igualdad. Genera consistentemente una interpretación relacional del signo igual.	Sin sumar $62 + 83$, ¿puedes encontrar el número que hace falta $62 + 83 = \blacksquare + 82$? Sin sumar $62 + 83$, ¿puedes decir si la oración numérica "$63 + 82 = 62 + 83$" es verdadera o falsa?

Nota. Adaptado de Matthews et al., (2012).

Además, la conexión entre este sub – modo de pensamiento y el pensamiento relacional resulta natural, pues al pensar relacionalmente el estudiante puede observar las expresiones o ecuaciones como totalidades, no como alguna operación que se debe resolver; lo cual indica que previamente tuvo que reconocer y utilizar relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones, que es lo que caracteriza a este tipo de pensamiento. De hecho, Molina (2011) señala al respecto del pensamiento relacional que "se presenta como una acción intelectual, alternativa a la aplicación de procedimientos estándares, centrada en la consideración y exploración de la estructura de expresiones aritméticas y algebraicas" (p. 32). Por ejemplo, para que el estudiante pueda determinar si la sentencia $21 + 15 = 20 + 16$ es verdadera, debe identificar la estructura de toda la expresión "leerla completa" y hacer uso de las relaciones que puede percibir, en este caso, desasociar y asociar identificando que $16 - 1 = 15$ y $20 + 1 = 21$ o $21 - 1 = 20$ y $15 + 1 = 16$, lo cual permite considerar la equivalencia; muy distinto a realizar las operaciones y comparar los resultados.

Así mismo, Molina (2011) propuso sentencias como $8 + 4 = \boxdot + 5$, los estudiantes debían identificar la estructura de las expresiones a cada lado de la igualdad y las propiedades o relaciones a establecer para que la ecuación fuera verdadera; claramente, incluir ecuaciones atiende a un grado distinto de dificultad con respecto a las sentencias sin incógnitas. Al respecto, Alonso et al. (1993) ya habían señalado que el uso del cuadrado sirve para ilustrar que hay algo desconocido, así como para hacer un acercamiento intuitivo a lo que es una ecuación y al concepto de solución que permite identificar que existe un número (en este caso) que hace verdadera la sentencia.

Finalmente, de acuerdo con Vergel y Rojas (2018) el pensamiento relacional tiene un carácter algebraico importante que permite conectar la aritmética y el álgebra, ya que su uso o desarrollo comprende algunos aspectos didácticos que encontramos directamente relacionados con este sub – modo de pensamiento:

- Considerar estructuralmente las expresiones aritméticas, concibiéndolas como objetos y no solamente como algo a resolver, lo cual favorece el uso y desarrollo de sentido numérico.
- Aceptar las expresiones como totalidades que se pueden comparar, ordenar, igualar o transformar.
- Elevar la capacidad de explorar, identificar y describir patrones y relaciones sobre los números y las operaciones; lo cual se considera importante porque aporta al desarrollo del proceso de generalización.
- Favorecer la exploración de la igualdad como relación de equivalencia.
- Utilizar lenguaje horizontal, tradicionalmente más propio del álgebra que de la aritmética.
- Potenciar un enfoque aplicable a la resolución de ecuaciones, en el contexto de la resolución de igualdades numéricas abiertas.

2.1.3.2 Estudio de algunas operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones

En este caso, como en el anterior, la idea es identificar propiedades de las operaciones en conjuntos no comunes o propiedades no tan conocidas en el ámbito escolar, con el fin de comprender o bien las mismas propiedades clásicas o nuevas propiedades.
Por ejemplo, se puede definir en el conjunto de los números naturales (sin el 0), una nueva operación binaria, digamos ∇, para la cual $a \nabla b = b$.

Para esta nueva operación se puede, por ejemplo, encontrar que ∇ no es conmutativa, pero sí es asociativa y no tiene elemento neutro.

También se podría, sobre esta misma operación, o sobre las usuales, revisar otras propiedades menos comunes como[7] (Luque et al., 2013):

1) Identidad I de Stein: $x(xy) = yx$
2) Identidad II de Stein: $x(yx) = (yx)y$
3) Identidad I de Schröder: $x(xy) = (xy)y$
4) Elasticidad: $x(yx) = (xy)x$
5) Asociativa cíclica I: $x(yz) = z(xy)$
6) Asociativa cíclica II: $x(yz) = (zx)y$
7) Identidad de Abel – Graßmann I: $x(yz) = (yx)$
8) Identidad de Abel – Graßmann II: $x(yz) = (yx)z$
9) Permutabilidad a izquierda: $x(yz) = y(xz)$
10) Permutabilidad a derecha: $(xy)z = (xz)y$
11) Propiedad del producto reducido o cruzado: $(xy)z = x(zy)$
12) Autodistributividad a izquierda: $x(yz) = (xy)(xz)$
13) Autodistributividad a derecha: $(xy)z = (xz)(yz)$
14) Autodistributividad a izquierda abeliana: $x(yz) = (xy)(zx)$
15) Autodistributividad a derecha abeliana: $(xy)z = (zx)(yz)$
16) Bisimetría: $(xy)(uv) = (xu)(yv)$

Esta operación, ∇, cumple, de las propiedades antes listadas, las 3,4,8,9,12,13,15 y 16.

Naturalmente, este apartado también se relaciona con la igualdad, partiendo de la definición de las operaciones y conservando la idea de Molina (2011) en la cual plantea distintas sentencias para las cuales se debe identificar la estructura de las expresiones a cada lado de la igualdad, de manera que se pueda argumentar la veracidad o falsedad de esta –por ejemplo, $(3\nabla 4)\nabla(6\nabla 7) = (3\nabla 6)\nabla(4\nabla 7)$– o se resuelva una ecuación –por ejemplo, $(3\nabla 4)\nabla 5 = (3\nabla 2)\nabla \boxed{\cdot}$– en ambos casos aludiendo a las operaciones y sus propiedades.

Por otra parte, de manera empírica consideramos que el estudio de operaciones o propiedades distintas a las usuales ampliaría el panorama de los niños por varias razones: (1) conceptualmente conlleva un trabajo *especial*, precisamente por la diferencia con lo que ya conocen como usual, porque para establecer las relaciones necesitan primero utilizar la definición del objeto (en este caso la operación) lo cual implica una reflexión frente a lo que van a realizar; (2) permite ver la versatilidad de las matemáticas, alejando la idea de que son algo absoluto y predefinido; (3) así como en los otros modos, es posible inventar, proponer o poner en juego la creatividad, permitiendo que el niño se sienta desde un comienzo en confianza; y, (4) permite, de manera similar a la subsección anterior, el desarrollo de habilidades para la comprensión de la igualdad como relación de equivalencia[8].

---

[7] Se omite el símbolo de la operación para que la escritura sea algo más simple y comprensible, por lo cual, yz representa $y \circledast z$, las demás combinaciones son análogas y quedan expresadas de manera implícita.

[8] De manera similar sucede en la geometría, de acuerdo con los planteamientos de Zapata & Peñaloza (2020), cuando se aborda el estudio de los lugares geométricos en la escuela, generalmente se hace a través de su representación algebraica y no se utiliza la definición del objeto, lo cual impide el desarrollo de procesos propios del saber matemático como conjeturar, justificar, identificar, entre otros; por tal razón, consideran que es relevante, por ejemplo, trabajar con otras métricas para potenciar estos procesos.

2.1.3.3 Estudio de relaciones de equivalencia y orden

Las relaciones de equivalencia permiten agrupar objetos de una colección al encontrar entre ellos propiedades en común, lo que permite definir clases o particiones de equivalencia en el conjunto. De acuerdo con los planteamientos propuestos por Chamorro (2005) “toda la Matemática elemental se basa en la consideración y construcción de clases de equivalencia, por ello resulta un ejercicio importante la designación de las clases resultantes como consecuencia de la aplicación de una relación de equivalencia en un conjunto dado” (p. 83).

Ahora bien, poder relacionar objetos distintos encontrando características similares o distintas lleva a una actividad fundamental que es la de *clasificar*. De acuerdo con Arteaga & Macías (2016), clasificar es la primera actividad básica en el desarrollo del pensamiento lógico y el estudio de conceptos matemáticos, dado que vincula la percepción, la atención y la memoria (funciones cognitivas), por lo que es importante desarrollarla en edades tempranas. Así mismo, tiene como eje dos procesos fundamentales:

(1) *centración*, es la acción que pone en juego la capacidad del sujeto para fijar la atención en únicamente una característica de un objeto a través de la percepción; y
(2) *decantación*, otra acción que visibiliza la capacidad del sujeto para elegir en un conjunto de objetos algunos que tengan alguna propiedad en particular.

Adicionalmente, es importante mencionar que para clasificar se requiere: (a) partir de un conjunto base, (b) identificar o percibir cualidades comunes o diferenciales entre los objetos del conjunto base y (c) construir las clases de equivalencia configuradas a partir de las cualidades halladas antes (Mora & Torres, 2021).

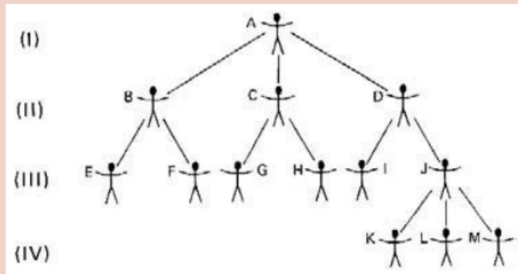
Adicionalmente, es importante mencionar que el concepto de clase se construye a través de “abstracciones, generalizaciones y operaciones lógicas de composición, reversibilidad y asociatividad” (Chamorro, 2005, p. 126). Las clasificaciones adquieren una mayor significación cuando dan lugar a categorías, estas últimas se definen por una relación existente entre clases. En la Figura 2, se puede apreciar de mejor manera la distinción entre categorización y clasificación a través de un ejemplo:

Figura 2

Distinción entre clasificación y categorización

Ejemplo 5: Jerarquización de clases

Supongamos que el árbol genealógico de una familia es el siguiente:



Esta situación implica la posibilidad de establecer una relación jerárquica de clases en cuanto que todas ellas están relacionadas entre sí. La clase de los hijos en el nivel II implica la clase de los padres en el nivel I y la presencia de las clases de los hijos y nietos en los niveles III y IV. El niño que comprende este sistema jerarquizado, tanto verticalmente como horizontalmente, puede entender perfectamente que una misma persona J puede pertenecer a la clase de los padres, de los hijos, de los hermanos, de los primos y de los nietos.

Nota. Tomado de Chamorro (2005, p. 127).

Por otra parte, las relaciones de orden muestran o permiten organizar un conjunto de objetos bajo cierto criterio, por lo cual se relacionan con los procesos de *seriación* y *comparación*. Seriar refiere a hacer una "lista" de elementos de un conjunto que se siguen unos a otros guardando una relación entre sí, dicha relación se establece a partir de la comparación entre los elementos (menor que, mayor que, más alto que, más bajo que, etc.). Además, Chamorro (2005) y Arteaga & Macías (2016) señalan, en primer lugar, que desde edades tempranas los estudiantes normalmente trabajan con seriaciones cualitativas o basadas en convenciones sociales, para transitar gradualmente a las seriaciones cuantitativas; y, en segundo lugar, que para que los estudiantes logren construir series[9] ordenadas deben iniciar por comprender operaciones lógicas que impliquen el control de propiedades como:

a. *La reversibilidad*: aptitud para organizar hacia adelante y hacia atrás.
b. *La transitividad*: capacidad para admitir que si A es anterior a B y B es anterior a $C \rightarrow A$ es anterior a C.
c. *La asignación de un carácter dual a todo elemento de la sucesión*: un elemento, según su posición en la sucesión, puede ser al mismo tiempo sucesor del anterior y antecesor del que sigue.
d. *La asimetría*: aptitud para asignar a todo par de elementos de la sucesión una relación asimétrica, esto es, dados dos elementos A, B; si A es anterior a B, B no es anterior a A.

[9] Matemáticamente, una serie se define como la suma de los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, lo cual se representa como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dicho esto, nos permitimos señalar que en este caso una palabra más acorde con lo que se presenta es *secuencia*; sin embargo, en la literatura para la educación básica primaria se utilizan expresiones como serie, seriación o seriar.

Asimismo, encontramos las relaciones de orden total[10]; por ejemplo, los números naturales con la relación menor o igual que $(\mathbb{N}, \leq)$ son un conjunto completamente ordenado, pues siempre encontraremos que al tomar cualquier pareja de números naturales alguno será menor que el otro o serán iguales; distinto a lo que sucede con la relación de divisibilidad en los números naturales $(\mathbb{N},/)$, pues no se cumple que al tomar cualquier pareja de números naturales alguno sea divisor del otro (por ejemplo, 3 y 7). Esto trae a colación la *enumeración*, "desde el punto de vista matemático, la enumeración de los elementos de un determinado conjunto finito supone establecer una relación de orden total en el mismo" (Chamorro, 2015, p. 136); de hecho, Briand (1993, citado en Arteaga & Macías, 2016) a través de sus investigaciones señaló que la enumeración es uno de los conocimientos fundamentales para abordar desde edades tempranas, ya que aporta a la construcción del número y conteo en el estudiante. Cabe resaltar que enumeración refiere a la expresión sucesiva de las partes de que consta un todo y hay algunos tipos de enumeración como (a) enumerar, que corresponde a llevar a cabo una acción sobre un objeto; (b) numerar, es asignar una expresión, un enunciado, un numeral, un signo a una cantidad de objetos; y (c) contar, es una manera sistemática de comparar y ordenar objetos diferenciados (Bishop, 2005, p. 37).

Para enumerar correctamente los elementos de una colección, de acuerdo con Chamorro (2015) y Arteaga & Macías (2016), el niño debe:

1. Ser capaz de distinguir dos elementos diferentes de esta colección.
2. Reconocer la pertenencia o no de los elementos a la colección.
3. Elegir un primer elemento de la colección.
4. Determinar el sucesor en el conjunto de elementos no elegidos anteriormente.
5. Conservar la memoria de las elecciones precedentes.
6. Recomenzar el paso 4.
7. Saber que ha elegido el último elemento.

Finalmente, es importante tener en cuenta que las relaciones de equivalencia cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; y las relaciones de orden cumplen las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva; que pueden iniciarse, como ya se mencionó, en las primeras edades escolares.

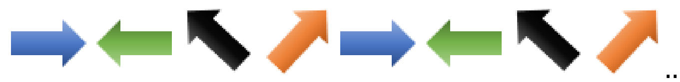
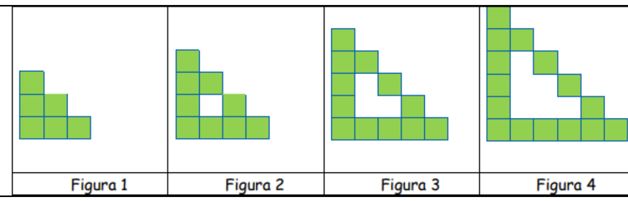
2.1.3.4 Estudio y generalización de patrones

De acuerdo con los planteamientos de Molina & Cañadas (2018), este tipo de PA se relaciona con las nociones de patrón, secuencia, orden, regularidad o estructura. Las secuencias son agrupaciones de elementos que se encuentran dispuestos siguiendo un patrón, más formalmente y de acuerdo con Mora (2012) las secuencias son un conjunto de signos que pueden ser orales, gestuales, físicos, comportamentales, gráficos, numéricos etc., y que se encuentran organizados; los signos son llamados términos que se encuentran dispuestos de acuerdo con una regla de repetición de un patrón. Asimismo, Mora (2012) propone tipificar las secuencias como se presenta en la *Tabla 6*.

[10] R es una relación de orden total en A, si se cumple que: dados cualquier par de elementos $a, b \in A$, aRb o bRa.

Tabla 6

Tipificación de secuencias

<table>
<tr><th>Secuencias</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Corporales: se utilizan movimientos corporales, ritmos o sonidos.</td><td>Dar un salto, aplaudir dos veces, dar un salto, aplaudir dos veces, dar un salto, aplaudir dos veces…
</td></tr>
<tr><td>Manipulativas: se utilizan materiales manipulativos como fichas de colores, fichas de formas, fichas con distintos tamaños, etc.</td><td>Con fichas de distintas formas
</td></tr>
<tr><td>Figurativas o icónicas: se utilizan figuras, pueden entenderse como la representación “virtual” de las secuencias manipulativas o simplemente como imágenes.</td><td>Con flechas de colores
</td></tr>
<tr><td>Secuencias grafico-numéricas: se presentan en imágenes y se puede establecer una correspondencia numérica.</td><td></td></tr>
<tr><td>Secuencias numéricas: se representan con numerales.</td><td>$1 + 2 = 3$
$4 + 5 + 6 = 7 + 8$
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 14$
…</td></tr>
<tr><td>Tabulares: se presentan en tablas</td><td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>…</td></tr><tr><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>…</td></tr></table></td></tr>
</table>

Nota. Adaptado de Mora (2012).

Asociado a esto, los patrones pueden ser (1) de repetición, en los que se puede percibir una unidad que se repite; (2) de recurrencia, que tienen en cuenta el(los) término(s) anterior(es) que sigue(n) cierta regla que se repite dando lugar a una regularidad que cumplen los términos de la secuencia (Bressan & Gallego, 2010).

Clements & Sarama (2015) ofrecen una caracterización más profunda acerca de *patrón* pues mencionan que “los patrones son más que un contenido: son un proceso, un dominio de estudio y un hábito de la mente” (p. 304); de acuerdo con esta idea, mencionan que los niños desde el primer año son sensibles a los patrones porque perciben conductas, acciones e impresiones visuales.

En la construcción de generalizaciones se proponen cuatro fases (Alonso et al., 1993; Mason et al., 2014) muy conocidas en la literatura: ver, decir, escribir y verificar. En la *Tabla 7* se encuentra cada fase junto con su descripción y algunas estrategias de nivel propuestas por García (2011):

Tabla 7

Fases en la generalización de patrones y sus estrategias de nivel

Fases	Estrategias de nivel	
Ver (¿qué ve?): Este es un proceso mental que permite identificar la estructura o el "comportamiento" en general de un conjunto de elementos (números, figuras, formas, etc.). Se trata de distinguir las características que son específicas de cada situación, lo que se mantiene invariante.	I	Observa la imagen como un todo (OI)
	II	Analiza la imagen, descomponiendo el todo en sus partes (AI)
	III	a. Establece relaciones necesarias (ERN) b. Establece relaciones suficientes (ERS)
	IV	Conjetura acerca de las relaciones entre las partes de la imagen (CRP)
Decir (¿de qué manera comunica lo que ve?): Una vez se han percibido, características, diferencias, relaciones, es importante hablar de ellas. Es importante describirlas, en este sentido, hay diferentes maneras de describir lo que se ve y diferentes grados de precisarlo. De ahí la importancia de primero ver, porque es lo que permite identificar y posteriormente comunicar, se va adquiriendo la habilidad de "poner el ojo" en lo que sea útil para reconocer la estructura.	I	Describe características de la imagen como un todo (DIT).
	II	Describe las propiedades comunes entre los casos particulares (DPC).
	III	Describe la forma en que se relacionan las partes (DRP).
	IV	Describe la conjetura observada de relaciones entre las partes (DCR).
Escribir (¿cómo escribe? ¿utiliza símbolos, palabras o una combinación?): Tiene como objetivo la expresión escrita, es una de las fases más complejas ya que apunta a escribir de manera progresiva con símbolos alfanuméricos, aunque admite para iniciar variedad de formatos.	I	a. Escribe con palabras las características de la imagen (EPCP). b. Escribe con palabras y símbolos las características de la imagen (EPCM). c. Escribe con símbolos las características de la imagen (EPCS).
	II	a. Escribe con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares (ECPP). b. Escribe con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares (ECPM). c. Escribe con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares (ECPS).
	III	a. Escribe con palabras la forma en que se relacionan las partes (EFRP). b. Escribe con palabras y símbolos la forma en que se relacionan las partes (EFRM). c. Escribe con símbolos la forma en que se relacionan las partes (EFRS).

Fases		Estrategias de nivel
	IV	a. Escribe con palabras la conjetura observada de las relaciones entre las partes (ECOP). b. Escribe con palabras y símbolos la conjetura observada de relación entre las partes (ECOM). c. Escribe con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes (ECOS).
Verificar (¿Cómo o mediante qué verifica?): una vez que se han visto, descrito y escrito propiedades, relaciones o conjeturas; hay que ratificar que lo que se ha construido, en efecto, se cumple en general en esa situación.	IV	a. Verifica su conjetura construyendo un término cercano (VCTC). b. Verifica su conjetura haciendo uso de la calculadora (VCC). c. Verifica su conjetura manualmente (VCM). d. No verifica su conjetura (NVC).

Nota. La información que aparece en esta tabla fue tomada y adaptada de Mason et al. (2014) y García (2011).

Como se puede apreciar, la última fase solamente se encuentra definida para el cuarto nivel; por cuanto, se considera que solamente los estudiantes que logran transitar por las primeras dos o tres fases de la generalización en sus cuartos niveles llegan a construir algo qué verificar.

Finalmente, es importante resaltar que a partir de los antecedentes fue posible identificar que en el trabajo con secuencias se pueden trabajar procedimientos como:

1. Reproducir: consiste en copiar una secuencia.
2. Identificar: hacer explícito el patrón que tiene una secuencia.
3. Extender: completar un tramo de una secuencia dependiendo de su patrón.
4. Extrapolar: completar un espacio vacío en cualquier tramo de la secuencia.
5. Trasladar: consiste en copiar la misma estructura con propiedades perceptibles distintas. Por ejemplo, la secuencia triangulo, cuadrado, triángulo, cuadrado, … y la secuencia verde, rojo, verde, rojo, … estructuralmente son iguales; en este caso las tareas pueden involucrar, proponer secuencias con la misma estructura o comparar algunas dadas.

2.1.4 Álgebra como estudio de funciones

En este modo de pensamiento se tiene como eje central la covariación y el cambio, lo cual resulta natural ya que las funciones son el contenido temático central; por lo tanto, el pensamiento funcional se convierte en protagonista, este implica “generalizar relaciones entre cantidades covariables; expresar relaciones en palabras, símbolos, tablas o gráficos; y, razonar con esas representaciones para analizar el comportamiento de las funciones” (Blanton et al., 2011 citado en Kieran et al., 2016, p. 13).

Blanton et al. (2015 citado en Kieran et al., 2016) propusieron una trayectoria de aprendizaje mediante la cual pretendían describir el pensamiento de estudiantes de 6 años al momento de generalizar relaciones funcionales, dicha trayectoria mostraría la sofisticación que con el acompañamiento adecuado podrían alcanzar los estudiantes:

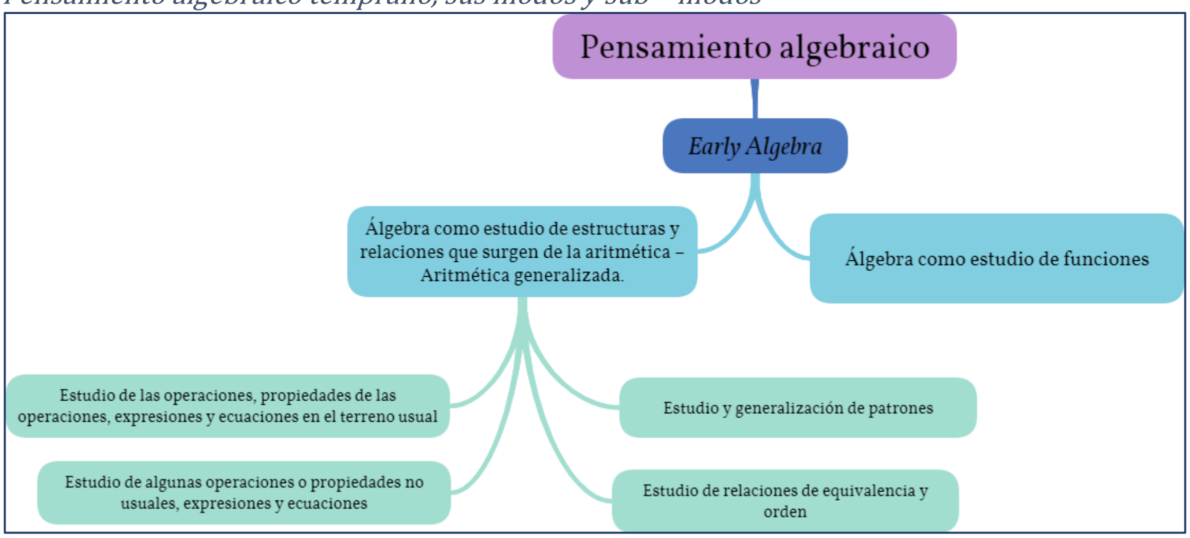
(1) Nota que hay características matemáticas en una tarea,
(2) comprende las relaciones entre cantidades a través del pensamiento funcional,
(3) observa la regularidad dentro de instancias particulares o de otra manera en todas las instancias,
(4) describe una relación funcional en una forma generalizada,
(5) elabora sobre dos cantidades que se comparan y la relación funcional entre ellas, y
(6) trata sobre la función como un objeto mientras comprende los límites de la generalidad.

Como se observa, este modo de pensamiento algebraico se encuentra relacionado directamente con la generalización de patrones. Lo que diferencia el *álgebra como estudio de funciones de* la generalización de patrones es la relación establecida con el proceso de modelación. El estudio de funciones está un poco más en el terreno de lo analítico y variacional, por ejemplo, preguntarse qué le sucede a al valor $\frac{1}{x}$ cuando x toma valores muy grandes o pequeños, es un ejercicio que permite vislumbrar esta distinción, pues en este caso no es importante cómo se ha obtenido $\frac{1}{x}$, lo relevante es analizar qué le sucede a la función, identificar que si x es un número muy grande $\frac{1}{x}$ será un valor muy pequeño y viceversa (Usiskin, 1999).

Finalmente, en la Figura 3 se presentan a modo de síntesis los elementos principales abordados hasta el momento en este apartado.

Figura 3

Pensamiento algebraico temprano, sus modos y sub – modos



Nota. Fuente: elaboración propia.

Aspectos del currículo nacional

En los referentes de calidad del currículo de matemáticas colombiano (MEN, 1998) se proponen tres aspectos para organizar el currículo. En primer lugar, se atiende a los *procesos* generales relacionados con el aprendizaje: el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación y, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; en segundo lugar, se alude los *conocimientos básicos* que están relacionados con los pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio) y con los sistemas propios de las matemáticas (sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y, sistemas algebraicos y analíticos). En tercer lugar, se encuentra el *contexto* que puede ser matemático, de la vida diaria o de otras ciencias.

Ahora bien, desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM), se plantea que "en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio" (MEN, 1998, p. 17); así que debe involucrar uso y comprensión de la variable en su carácter multifacético, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, la utilización de expresiones simbólico algebraicas para la representación así como métodos de solución de ecuaciones para resolver problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general; lo cual relaciona al álgebra con el desarrollo del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional involucra conceptos y procedimientos que se relacionan entre sí, poniendo énfasis en procesos de generalización, comunicación, argumentación y modelación de situaciones de cambio; asimismo, está relacionado con reconocer, percibir, identificar la variación y el cambio. De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM) el desarrollo de este pensamiento inicia con el estudio de regularidades o reglas de formación para identificar un patrón; además, se proponen los enunciados de los estándares para el desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros niveles de la básica primaria:

> Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas (MEN, 2006, p. 67).

Adicionalmente, desde los LCM se plantea la organización de tareas enfocadas en "la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración, la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación" (MEN, 2006, p. 58); lo cual está directamente relacionado con el pensamiento numérico.

En concordancia con los LCM y los EBCM, encontramos los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) que hacen explícitos los aprendizajes para cada grado en relación con los cinco pensamientos y aportan elementos para consolidar una ruta de enseñanza que permita alcanzar los EBCM planteados para cada grado. En la Tabla 8 se relacionan algunos enunciados de los DBA que se considera son propios de EA.

Tabla 8

Derechos básicos de competencias matemáticas propios de Early Algebra

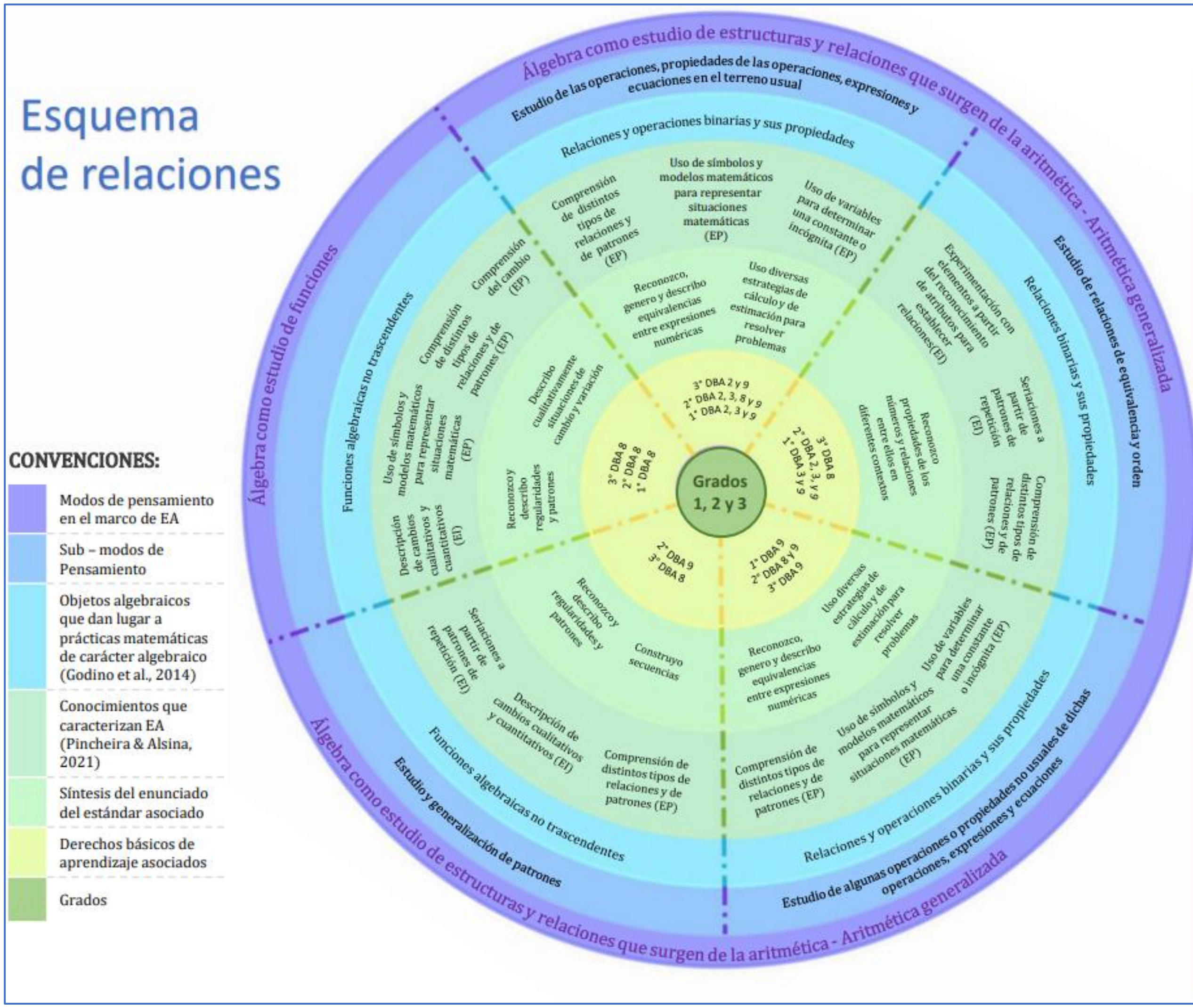
Curso	DBA	Enunciado
1°	2	Utiliza diferentes estrategias para contar, realizar operaciones (suma y resta) y resolver problemas aditivos.
	3	Utiliza las características posicionales del Sistema de Numeración Decimal (SND) para establecer relaciones entre cantidades y comparar números,
	8	Describe cualitativamente situaciones para identificar el cambio y la variación usando gestos, dibujos, diagramas, medios gráficos y simbólicos.
	9	Reconoce el signo igual como una equivalencia entre expresiones con sumas y restas.
2°	2	Utiliza diferentes estrategias para calcular (agrupar, representar elementos en colecciones, etc.) o estimar el resultado de una suma, resta, multiplicación o reparto equitativo.
	3	Utiliza el Sistema de Numeración Decimal para comparar, ordenar y establecer diferentes relaciones entre dos o más secuencias de números con ayuda de diferentes recursos.
	8	Propone e identifica patrones y utiliza propiedades de los números y de las operaciones para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas.
	9	Opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes y utiliza las propiedades de las operaciones en contextos escolares o extraescolares.
3°	2	Propone e identifica patrones y utiliza propiedades de los números y de las operaciones para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas.
	8	Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación.
	9	Argumenta sobre situaciones numéricas, geométricas y enunciados verbales en los que aparecen datos desconocidos para definir sus posibles valores según el contexto.

Como se ha podido notar, los documentos curriculares comparten varios aspectos de la propuesta de EA porque, *grosso modo*, pretenden incluir y promover el PA desde la educación preescolar y básica primaria. Además, explícitamente señalan la importancia de contemplar contenidos y procesos característicos de la propuesta EA.

De acuerdo con lo anterior y lo presentado al inicio del capítulo, en la Figura 4 se relaciona: (1) los modos de PA en el marco de EA; (2) los sub – modos de PA; (3) los objetos algebraicos que dan lugar a prácticas matemáticas, en relación con lo enunciado por Godino et al., (2014) y con cada modo o sub – modo de pensamiento; (4) los conocimientos caracterizados por Pincheira & Alsina (2021) para EA y en relación con 3, 2 y 1; (5) los estándares (pensamiento aleatorio y variacional) en relación con 4, 3, 2 y 1; los DBA atendiendo a 5, 4, 3, 2 y 1; y, los grados escolares a los cuales se dirige la aplicación.

Figura 4

Relaciones entre los modos de PA, los objetos algebraicos, los conocimientos que caracterizan EA y las disposiciones curriculares.



Curso	DBA #	Enunciado
1°	2	Utiliza diferentes estrategias para contar, realizar operaciones (suma y resta) y resolver problemas aditivos.
	3	Utiliza las características posicionales del Sistema de Numeración Decimal (SND) para establecer relaciones entre cantidades y comparar números,
	8	Describe cualitativamente situaciones para identificar el cambio y la variación usando gestos, dibujos, diagramas, medios gráficos y simbólicos.
	9	Reconoce el signo igual como una equivalencia entre expresiones con sumas y restas.
2°	2	Utiliza diferentes estrategias para calcular (agrupar, representar elementos en colecciones, etc.) o estimar el resultado de una suma, resta, multiplicación o reparto equitativo.
	3	Utiliza el Sistema de Numeración Decimal para comparar, ordenar y establecer diferentes relaciones entre dos o más secuencias de números con ayuda de diferentes recursos.
	8	Propone e identifica patrones y utiliza propiedades de los números y de las operaciones para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas.
	9	Opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes y utiliza las propiedades de las operaciones en contextos escolares o extraescolares.
3°	2	Propone e identifica patrones y utiliza propiedades de los números y de las operaciones para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas.
	8	Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación.
	9	Argumenta sobre situaciones numéricas, geométricas y enunciados verbales en los que aparecen datos desconocidos para definir sus posibles valores según el contexto.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Para alcanzar las metas propuestas en los documentos curriculares que se encuentran en armonía con los propósitos de EA, es necesario que las profesoras y los profesores de matemáticas diseñen tareas que permitan a las y los estudiantes alcanzar tales objetivos; en ese sentido, es fundamental reconocer qué se entiende por tarea, cuáles son sus requisitos y cómo se debe construir una tarea.

Noción de tarea

Una tarea es un conjunto de instrucciones cuyo propósito es que los estudiantes alcancen los objetivos previstos para una clase o un tema en particular y pretende apoyar el aprendizaje; además, se compone de algunos elementos: (1) requisitos, son requerimientos o habilidades necesarias para que el estudiante pueda abordar la tarea; (2) metas u objetivos específicos, son los conocimientos o habilidades que se pretende fomentar en los estudiantes por medio de la tarea; (3) formulación, es la instrucción específica que se da al estudiante; (4) materiales y recursos, son las herramientas que se prevé utilizar para abordar la tarea; (5) agrupamiento, alude a la manera en la que se planea organizar a los estudiantes para resolver la tarea; (6) interacción, la manera en la que el grupo se relaciona con el profesor y viceversa (Gómez et al., 2018).

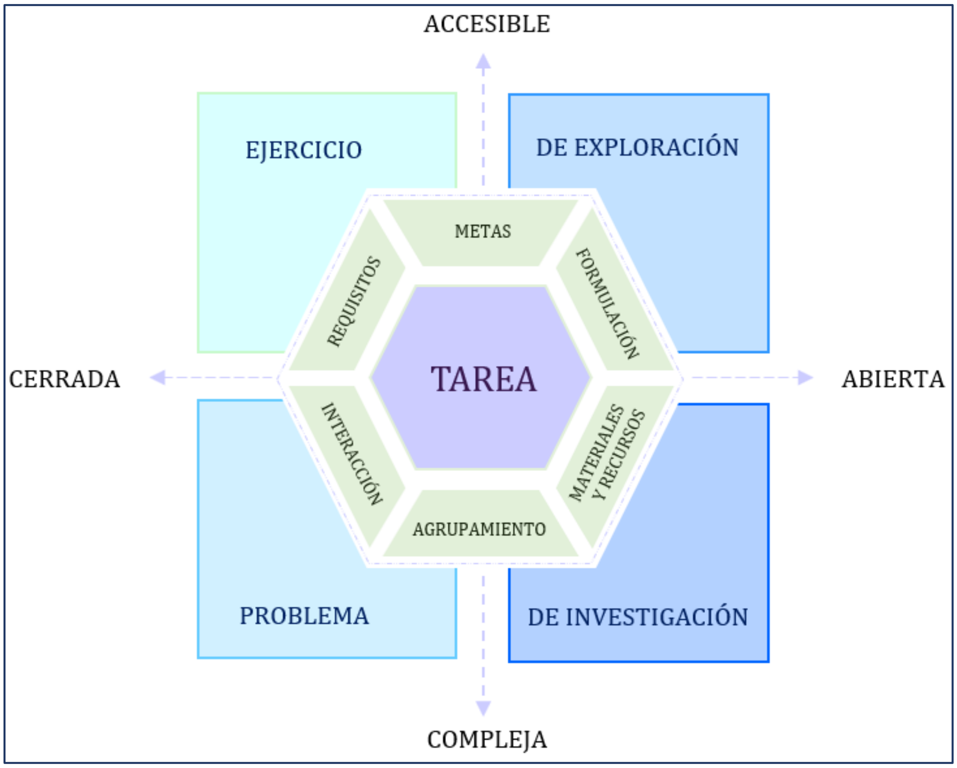
Así mismo, de acuerdo con los planteamientos de Ponte (2004) la tarea tiene cuatro dimensiones:

1. Grado de dificultad: se mueve entre lo *accesible* y lo *complejo* procurando de alguna manera medir lo que se propone a los estudiantes.
2. Grado de estructura: se mueve entre lo *abierto* y lo *cerrado;* lo primero indica que hay un grado de indeterminación significativo entre lo que se proporciona o lo que se solicita o en las dos cosas; y lo segundo alude a que es claro lo que se proporciona y lo que se solicita.
3. Duración: dependiendo del tipo de tarea, puede requerir de algunos minutos, horas, semanas, etc.
4. Contexto: puede ser real, semirreal o puramente matemático.

El cruce entre las dimensiones 1 y 2, permite ubicar los cuatro tipos de tarea como se puede apreciar en la Figura 5:

Figura 5

Noción de tarea



Nota. Fuente: elaboración propia.

Un *ejercicio* es una tarea cerrada y accesible, en la que el estudiante puede practicar y consolidar conocimientos; el *problema* es una tarea cerrada con un nivel de dificultad alto, en la que el estudiante utiliza lo que ya sabe, pero debe planear una estrategia de solución; la *de exploración* es una tarea abierta de complejidad reducida, en la que el estudiante puede iniciar a trabajar sin tener que pensar en alguna estrategia; la *de investigación*, es una tarea abierta de alta complejidad, en la que el estudiante necesita planear una estrategia para poder iniciar a trabajar.

Teniendo claridad de la noción de tarea, sus dimensiones y elementos; se da paso a la sección de TIC para identificar su importancia en el marco de la educación matemática y en EA atendiendo a los objetivos de la presente monografía.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) son un conjunto de técnicas, desarrollos, recursos, herramientas, soportes de información y vías de comunicación que permiten compilar, procesar, almacenar, digitalizar y transmitir información. Además, han permitido la inclusión de nuevas estrategias, métodos y modos de enseñanza y aprendizaje en el ámbito educativo; de hecho, de acuerdo con lo mencionado por Grisales (2018), fueron las universidades e institutos de educación superior los primeros en aprovechar el auge que produjo el uso de la web a principios del 2000, pues fueron los que se dieron a la tarea de desarrollar recursos como Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) o sistemas de gestión de aprendizaje (LMS) a fin de desarrollar los contenidos en algunos de sus programas.

Específicamente, las TIC en la educación matemática promueven la experimentación, manipulación, conjeturación, verificación, establecimiento de propiedades, etc., por parte de los estudiantes. Así, "las TIC nos proporcionan múltiples formas de representar situaciones problemáticas que les permite a los estudiantes desarrollar estrategias de resolución de problemas y mejor comprensión de los conceptos matemáticos que están trabajando" (Cruz & Puentes, 2012).

Por otra parte, teniendo en cuenta los grados a los que se dirige este trabajo de grado, es importante resaltar que si bien hay resistencias de algunos por el uso de la tecnología informática en los más pequeños, también hay estudios que presentan algunos hallazgos en la investigación con niños y tecnología, específicamente en Clements & Sarama (2015) se presentan algunas de las virtudes del trabajo entre niños y computadoras, a saber: los niños se muestran emocionados al utilizar computadoras, para ellos resulta positivo este acompañamiento; por lo general, prefieren trabajar con un compañero que solos, lo cual podría estimular el trabajo colaborativo; los estudiantes que tienen acceso a estos dispositivos desde casa se desempeñan mejor académica y cognitivamente; agregar este tipo de tecnología no interumpe el trabajo que ya tenga el curso, tampoco las interacciones sociales, más bien ayuda a que los estudiantes interactuen y mejora la cooperación; los computadores pueden representar un ambiente en el que se estimulan las interacciones sociales y cognitivas de manera simultánea; pueden motivar el trabajo académico; pueden generar creatividad y pensamiento matemático creativo; y, finalmente, los computadores pueden facilitar el pensamiento matemático en los niños pequeños.

Además, es conveniente subrayar que esta monografia se desarrolló en parte durante el confinamiento, tiempo en el que el uso de las TIC se hizo vital para la mayoría de personas; particularmente, permitió dar continuidad a la educación desde casa. Por un lado, en este tiempo los docentes se vieron en la necesidad de contar con herramientas digitales apropiadas para apoyar la enseñanza y el aprendizaje; por la otra parte, los estudiantes, se vieron en la obligación de aprender (si es que ya no lo sabían) a manejar computadores, celulares, tabletas o cualquier elemento que les permitiera estar (conectados) en clase, desde los de preescolar hasta los de undécimo.

Si bien se reconoce que el uso prolongado de dispositivos electónicos no es favorable para ninguna persona, lo que se promueve con este trabajo es el uso prudente y bien intencionado. Particularmente el acceso a los dispositivos electrónicos por parte de niños y niñas del primer ciclo de la educación primaria es innegable, ya está arraigado en su generación; de manera anecdótica, la autora de este documento ha visto que desde antes de los dos años sus sobrinos y hermano sabían cuál era el logo de YouTube y cómo poner las rondas infantiles de su preferencia; esto solamente para ilustrar que es algo que hace parte de las nuevas generaciones. Naturalmente, ya estamos inmersos en este mundo tecnológico y como profesores jóvenes tenemos que ser concientes de esta realidad, por lo cual es necesario buscar estrategias para que los niños utilicen la tecnología de manera que esta aporte a su desarrollo, en este caso, cognitivo.

Incorporar el uso de las TIC implica un reto a los profesores, bien sea utilizar software ya creado para la enseñanza de las matemáticas; por ejemplo, programas como GeoGebra o emplear aplicativos prediseñados (como Smartick, la biblioteca nacional de manipuladores virtuales, IXL, Mathgame, el mundo de las secuencias, etc.); o hacer sus propias creaciones, por ejemplo, diseñar software para apoyar el aprendizaje. De acuerdo con el propósito de la presente monografía, nos concentraremos en este último.

Existen distintas plataformas que permiten el diseño de software, a continuación, se presenta la Tabla 9, en la que se muestra una comparación entre algunas ventajas y limitaciones (en relación con los propósitos de la presente monografía) de las plataformas que utilizaron los autores de los trabajos mencionados en los antecedentes, para los que se desarrollaron aplicaciones o aplicativos:

Tabla 9

Plataformas para el diseño de aplicaciones

<table>
<tr><th>Plataforma</th><th colspan="2">Ventajas</th><th>Limitaciones</th></tr>
<tr><td>Mobincube</td><td>No requiere de conocimientos de programación y permite crear aplicaciones para celulares y tabletas. Además, su plataforma se encuentra en línea, así que no se debe descargar algún software para crear las aplicaciones.</td><td rowspan="3">Son plataformas para programar bastante conocidas, por lo cual, se encuentra una gran variedad de tutoriales acerca de su manejo y uso. También cuentan con instructivos para el docente.</td><td>Al no utilizar la programación, la interacción disminuye. Por ejemplo, cuando se le asigna una función a un botón, claramente la desarrollará al dar clic; sin embargo, cuando se puede programar, con cada clic el botón podría hacer una tarea diferente o mostrar algo distinto, así, en caso de que un estudiante no escriba la respuesta programada, el primer clic le podría dar una pista u otra indicación.</td></tr>
<tr><td>Stencyl - Scratch</td><td>Si bien son dos plataformas diferentes, Stencyl está inspirada en Scratch, lo cual hace que tengan características similares. Ambas permiten crear aplicaciones en línea o en el ordenador (descargando el software), programando mediante bloques. Además, facilitan crear historias, animaciones y juegos, ya que cuentan con una librería de medios bastante amplia y con gran variedad de proyectos de ejemplo. Así mismo, permiten publicar los juegos en plataformas para Android, Windows, Linux y Mac.</td><td>En ocasiones la aplicación no corre de manera fluida. Además, la versión gratuita no permite crear aplicaciones para Android.</td></tr>
<tr><td>App Inventor</td><td>Permite crear aplicaciones para celulares y tabletas, cuenta con programación por bloques, se puede desarrollar en línea o en el escritorio. Además, permite descargar la aplicación de diferentes maneras y ver cada elemento programado en tiempo real.
Por otra parte, permite utilizar recursos del celular como cámara, giroscopio, micrófono, sensor de movimiento, entre otros.</td><td></td></tr>
</table>

Como se puede notar en la tabla, una de las plataformas que más se ajusta a los propósitos del presente trabajo de grado es *App Inventor*, dadas las virtudes que posee; sin embargo, existe otra plataforma que se encuentra diseñada a partir de *App Inventor*, *Kodular*, por lo cual poseen características similares.

Tanto *Kodular* como *App Inventor* poseen categorías de componentes que permiten personalizar el aspecto y el comportamiento de las aplicaciones. Por su parte, *Kodular*[11] cuenta con 16 categorías mientras que *App Inventor*[12] tiene 12; entre las categorías adicionales que tiene *Kodular* se encuentran las utilidades de animación y los componentes dinámicos; los primeros, como su nombre lo indica, son útiles para animar componentes; mientras que los otros permiten crear componentes en un momento dado.

Adicionalmente, en algunas de las categorías de componentes de *Kodular* hay más herramientas que en las de *App Inventor*; herramientas como la creación de botones flotantes, distintas animaciones para evidenciar el progreso de carga de alguna función, disposición de elementos en pantalla como una tarjeta o circular, lector de metadatos de archivos de audio o video, lector de texto de imágenes, editor de imágenes, sensor de sonido, notificaciones *push*[13], entre muchos otros, que ofrecen mayor versatilidad al diseñador.

Finalmente, en este capítulo se logró describir la corriente *EA* y vislumbrar sus dos modos de pensamiento principales (1) *Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética y (2) Álgebra como estudio de funciones; p*ara continuar precisando qué se entiende por pensamiento algebraico en el marco de la presente monografía. Con estos dos elementos se logró realizar una caracterización de cada modo de pensamiento y se propusieron 4 enfoques llamados sub – modos de pensamiento para *Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética*:

(a) Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual
(b) Estudio de algunas operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones
(c) Estudio de relaciones de equivalencia y orden
(d) Estudio y generalización de patrones

Así mismo, se logró identificar que el currículo nacional es consistente con la propuesta *EA* y se describió de qué manera se observa esta consistencia desarrollando un "mapa" que relacionó: cada modo de pensamiento con los objetos algebraicos que dan lugar a prácticas matemáticas de carácter algebraico propuestas por Godino et al (2014), con los conocimientos que caracterizan a *EA* de acuerdo con Pincheira & Alsina (2021), con los estándares básicos de competencias y los derechos básicos asociados que se consideran propios de esta corriente.

[11] Referencia de componentes Kodular: https://docs.kodular.io/components/screen/
[12] Referencia de componentes App Inventor: http://code.appinventor.mit.edu/reference/components/index.html
[13] Mensajes que envía un servidor remoto en tiempo real al dispositivo que tiene la aplicación instalada sin necesidad que el usuario deba actualizar para recibir la información, por ejemplo, las notificaciones de correo, Facebook, WhatsApp, etc.; actualmente, casi todas las aplicaciones utilizan este tipo de notificaciones.

También, por los propósitos de la monografía se describieron los elementos que debe contener una tarea y la importancia/pertinencia de utilizar las TIC a favor del desarrollo cognitivo de los niños.

Todos los elementos mencionados hasta este punto fueron suma vital importancia para dotarse de los elementos conceptuales que permitieran diseñar o seleccionar cada una de las tareas a disponer en la aplicación como se muestra en el siguiente capítulo.

Capítulo III. Metodología

En esta sección se muestra, en primer lugar, la manera específica en que se tuvieron en cuenta cada uno de los elementos que debe contener una tarea y sus dimensiones; y, cómo se relacionaron los contenidos específicos de cada modo para el diseño de las tareas. En segundo lugar, se presenta cómo se diseñó la aplicación y algunas especificidades de la plataforma seleccionada para tal fin. En tercer lugar, se describe la aplicación, las pantallas entre las que se puede navegar y cómo se debe instalar. Finalmente, se presenta una prueba de escritorio con la que se precisó validar que la aplicación funcionara correctamente.

Diseño tareas

En este apartado se especifica de qué manera se ven reflejados los elementos que debe contener una tarea y sus dimensiones en el marco de las tareas diseñadas para la aplicación, destacando que se decidió diseñar y programar la aplicación en la plataforma *Kodular* por las ventajas que ofrece como se mostró anteriormente en el último apartado del marco de referencia. Luego, se presentan los elementos específicos de cada modo de pensamiento que se tuvieron en cuenta para el diseño o adaptación de las tareas. Finalmente, se expone el proceso seguido para el diseño y programación de la aplicación.

3.1.1 Elementos y dimensiones de las tareas

Uno de los primeros pasos para el desarrollo del presente trabajo fue el diseño o adaptación de tareas en correspondencia con cada modo de pensamiento, para lo cual se tuvieron en cuenta sus requisitos, metas u objetivos, formulación, materiales y recursos, agrupamiento e interacción; elementos que debe tener una tarea descritos anteriormente en el marco de referencia.

En cuanto a los *requisitos*, es importante que el estudiante sepa leer, aunque no es imprescindible, pues la aplicación cuenta con audio por si el estudiante requiere de la lectura de lo que se esté mostrando en pantalla. Además, es deseable que maneje las operaciones básicas usuales (suma, resta y multiplicación) en números naturales e identifique ante qué situaciones se hacen necesarias; sin embargo, la aplicación cuenta con una calculadora para apoyar este aspecto.

Con respecto a los *objetivos*, los modos y sub – modos de pensamiento pretenden apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano desde ciertos enfoques y atendiendo a objetivos relacionados con esos enfoques, por lo que esto se tuvo en cuenta para el diseño de las tareas, y dichos objetivos se corresponden con los objetivos de las tareas.

En relación con la *formulación*, se procuró utilizar un lenguaje un poco informal, que permita a los estudiantes comprender la instrucción a realizar; por ejemplo, en vez de preguntar “a qué es equivalente la incógnita” se pregunta “cuál es el número secreto”.

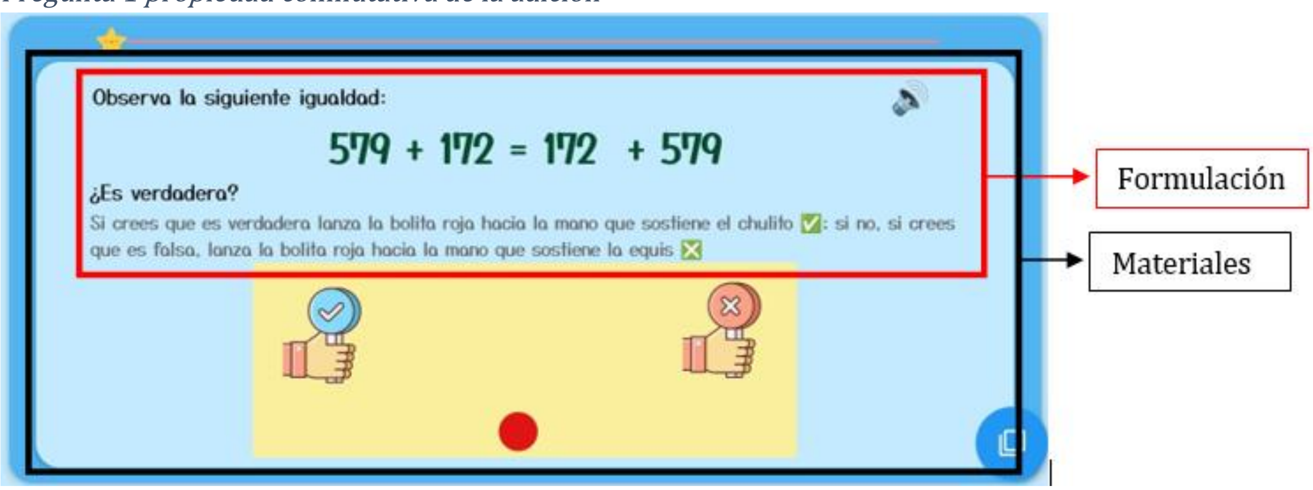
Referente a los *materiales y recursos*, en su mayoría se encuentran inmersos en la aplicación, pero en algunas tareas se solicitan herramientas que se asume el estudiante tiene o puede conseguir fácilmente; por ejemplo, una hoja de papel y colores.

En lo asociado con el *agrupamiento*, la aplicación está pensada para que sea abordada de manera individual; sin embargo, en el marco de una clase podría pensarse grupos de máximo dos estudiantes, pues podría permitir la discusión y así la reflexión de lo que se realiza, y no se "sacrifica" la interacción entre aplicación y usuario.
En cuanto a la *interacción*, encontramos algo de versatilidad, si el usuario está aprendiendo por su cuenta, la interacción será estudiante – aplicación; pero si está acompañado de un acudiente o docente, la interacción será triangular, así en un vértice estará la aplicación, en el otro el estudiante y en el otro el acudiente o docente, de esta manera cada uno interactuará con los otros dos. Además, la aplicación todo el tiempo le está "hablando", si acierta utiliza frases como "*¡Muy bien!*", o si desacierta utiliza frases como "*Intentémoslo nuevamente*". A través de botones de sonido permite la lectura de lo que se muestra en pantalla; además, se utilizan notificadores que la aplicación lee automáticamente, mediante los cuales se hacen sugerencias al usuario (más adelante se ahondará acerca de lo que son los notificadores y los botones de lectura).

En adelante, con el propósito de ejemplificar, se presentarán algunas de las preguntas de la secuencia de tareas "*Propiedad conmutativa de la adición*" contenida en el sub – modo "*Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual*". Particularmente, la pregunta de la Figura 6 tiene como objetivo que el estudiante se involucre con una igualdad para verificar su veracidad o falsedad, además de dar paso a la siguiente parte de la secuencia de tareas en la que el estudiante podrá validar si acertó o no y comprenderlo.

Figura 6

Pregunta 1 propiedad conmutativa de la adición

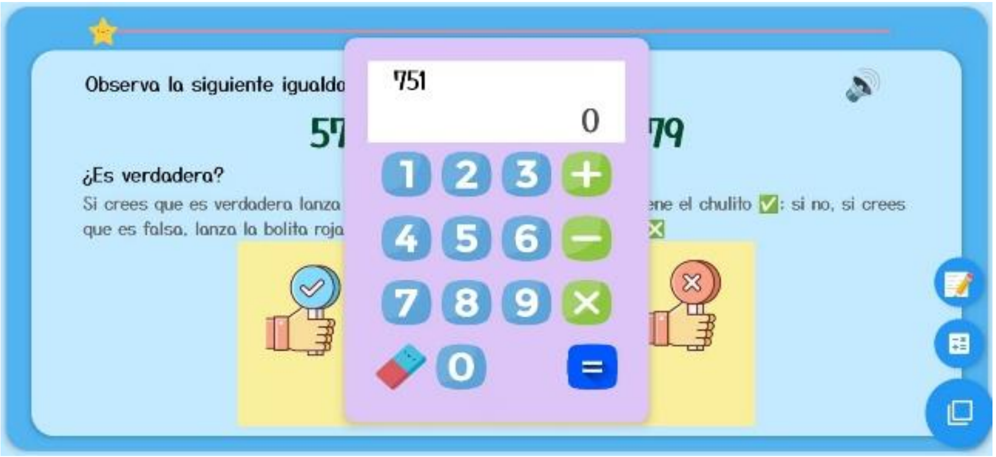


Nota. Fuente: elaboración propia.

Para verificar la veracidad o falsedad de la igualdad el estudiante tiene a su disposición una calculadora y un tablero que se muestran sobre la tarea que, en general, serán útiles para realizar cualquier tipo de operación que se requiera (ver Figura 7 y Figura 8).

Figura 7

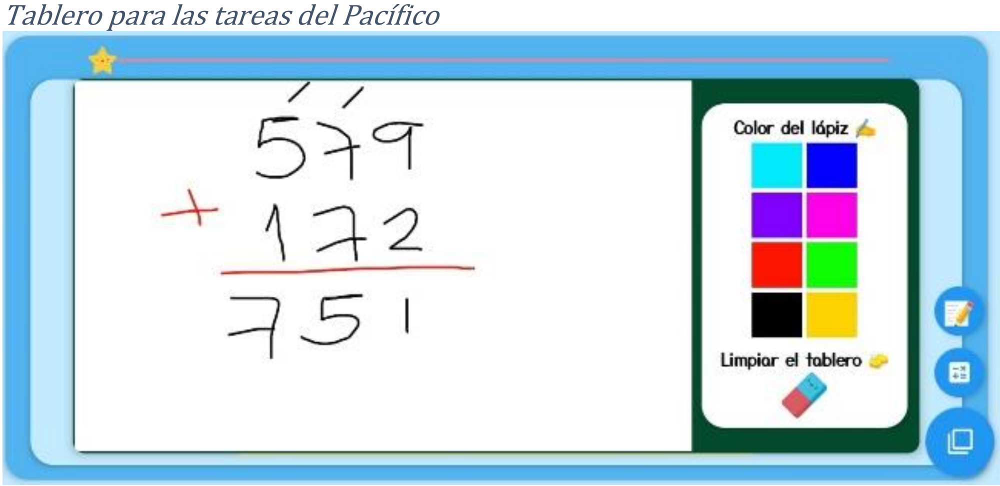
Calculadora para las tareas del Pacífico



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 8

Tablero para las tareas del Pacífico



Nota. Fuente: elaboración propia.

Además de contar con los seis elementos mencionados anteriormente, cada tarea debe tener cuatro dimensiones; a continuación, se describen estas dimensiones en el marco de la propuesta:

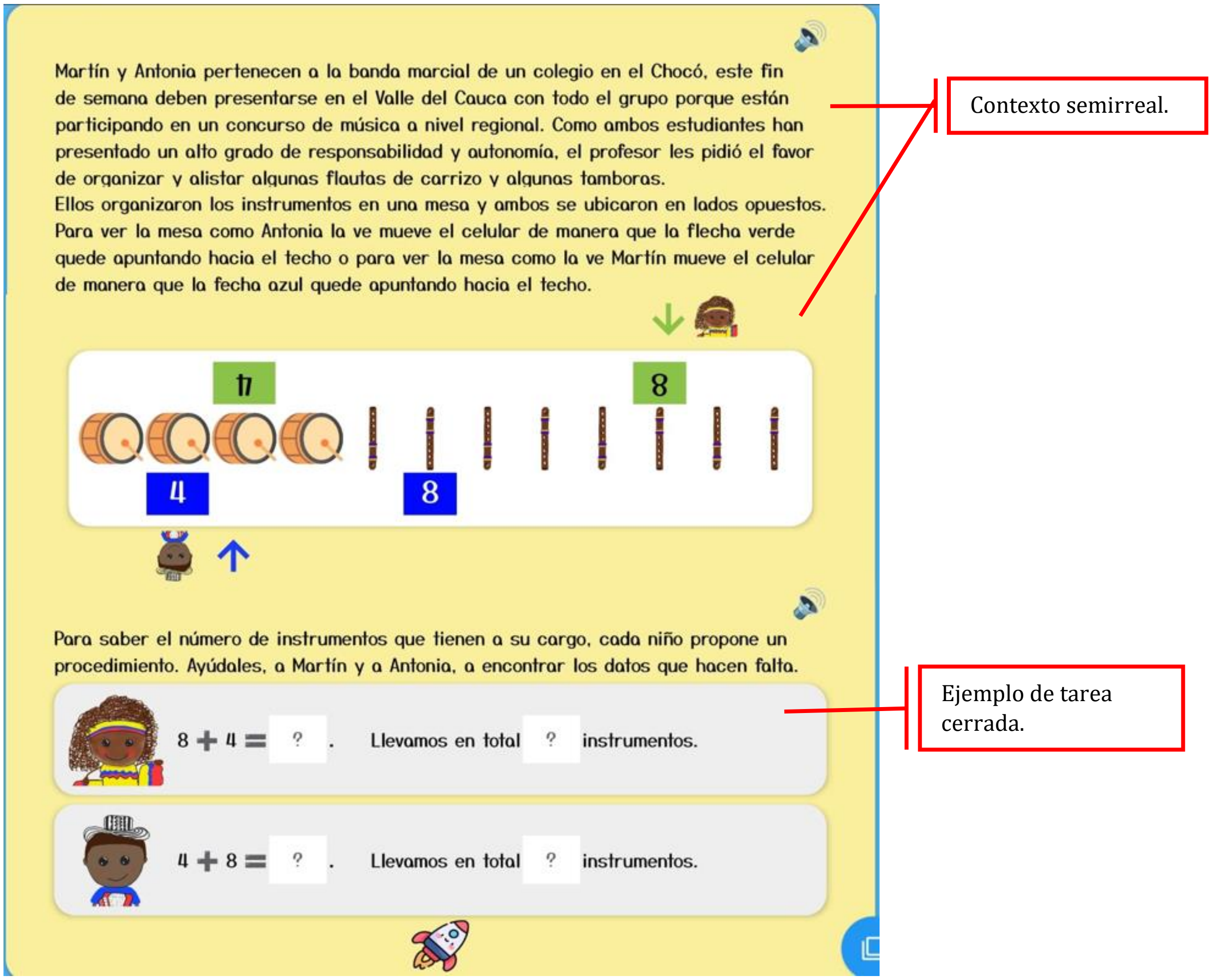
I. **Contexto**: la mayoría de las tareas se desarrollan en contextos semirreales (ver Figura 9) y matemáticos (ver Figura 10). Se pretende que los estudiantes tengan un acercamiento desde lo cotidiano, buscando con esto incentivar su motivación y de alguna manera, encuentren resultados lógicos a la realidad, así se pasa al contexto matemático en el que se prevé centren su atención en el contenido matemático asociado a la tarea. Sumado a lo anterior, el contexto semirreal al que se hace referencia consiste en conocer Colombia a partir de algunas características que tienen sus seis regiones, por lo tanto, a cada región se le asignó un modo o sub – modo de pensamiento así:

a. Región Pacífica: estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual (sub – modo de Aritmética generalizada).
b. Región Andina: estudio de algunas operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones (sub – modo de Aritmética generalizada).
c. Región Caribe: estudio de relaciones de equivalencia y orden (sub – modo de Aritmética generalizada).
d. Región Orinoquía: estudio y generalización de patrones (sub – modo de Aritmética generalizada).
e. Región Amazonía: álgebra como estudio de funciones.

En la región insular se dejaron algunos premios virtuales que se pueden reclamar con estrellas ganadas al resolver las tareas, esto pretende que el estudiante tenga otro factor motivacional, ganar más estrellas, que implica aprender y acertar con las preguntas de las tareas.

Figura 9

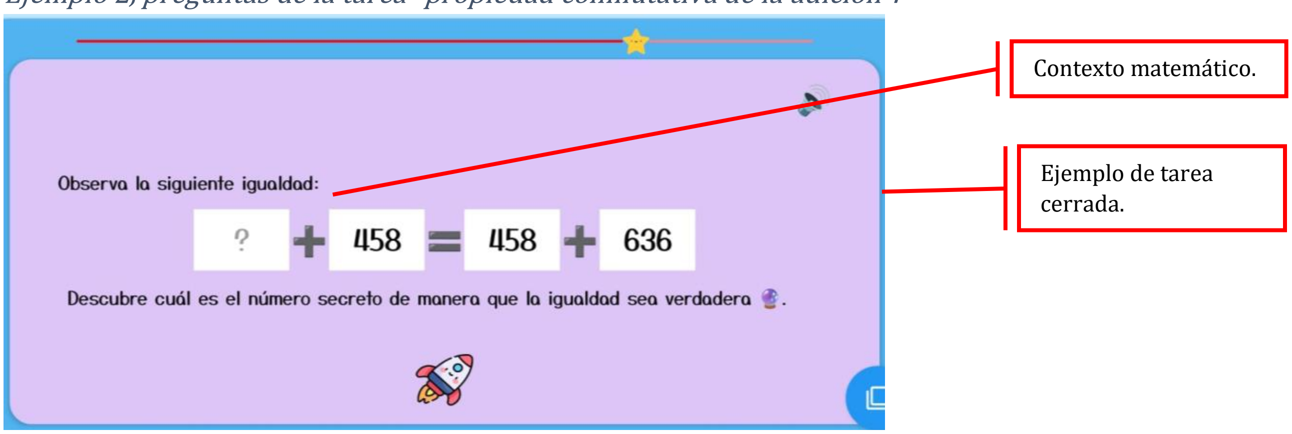
Ejemplo 1, preguntas de la tarea “propiedad conmutativa de la adición”.



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 10

Ejemplo 2, preguntas de la tarea “propiedad conmutativa de la adición”.



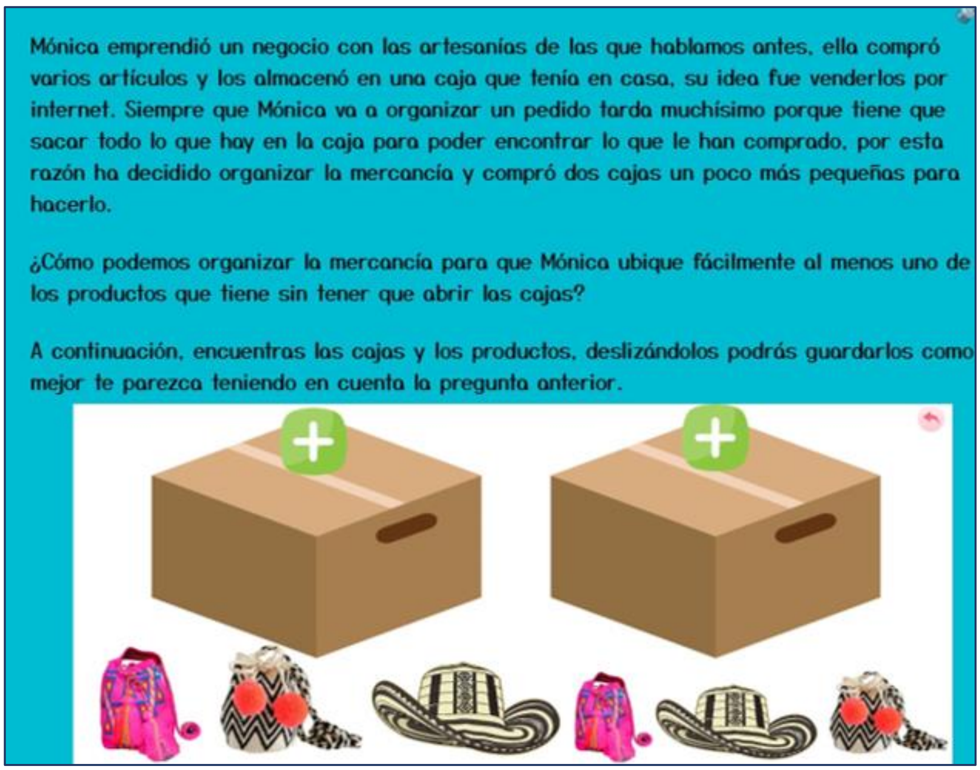
Nota. Fuente: elaboración propia.

II. **Duración:** en caso de que el estudiante se encuentre solo, resolver una tarea le podrá tomar entre veinte y treinta minutos. Si hay un acudiente o docente el tiempo puede aumentar o disminuir; aumentaría en caso de que, por ejemplo, en una clase se reflexione por qué una igualdad es verdadera o falsa, que el estudiante de una u otra forma busque argumentar su respuesta a medida que avanza; disminuiría si recibe algún tipo de ayuda; por ejemplo, otro tipo de especificaciones u orientaciones que no aparezcan en los enunciados.

III. **Grado de estructura:** la mayoría de las tareas son cerradas (ver nuevamente Figura 9 y Figura 10); es decir, es claro para el usuario los datos que tiene y lo que se le solicita realizar; sin embargo, en algunas tareas se consiguió algún grado de indeterminación en relación con lo solicitado, por lo que hay algunas tareas abiertas (ver Figura 11).

Figura 11

Ejemplo 3, preguntas de la tarea "Las artesanías de Mónica".



Nota. Fuente: elaboración propia.

Esta tarea es abierta porque es estudiante es libre de elegir de qué manera guarda los elementos en las cajas, solamente debe tener en cuenta que Mónica debe ubicar fácilmente al menos un producto, así que tiene varias opciones, en esta tarea puede clasificar o seleccionar: (1) clasifica si se da cuenta que en una caja puede guardar mochilas y en la otra sombreros, (2) selecciona si elige, por ejemplo, solo los sombreros pequeños para guardarlos en la primer caja y pone el resto de objetos en la segunda (podría pensar análogamente con las mochilas wayuu o arhuacas).

IV. **Grado de dificultad**: si partimos de que los elementos matemáticos relacionados son nuevos para el estudiante, las tareas son complejas, aunque, como se mencionaba anteriormente, se procura primero brindar un contexto real que permita recurrir a lo intuitivo y paulatinamente se va llevando al contexto puramente matemático.

Así mismo, para el diseño de las tareas se consideraron los modos y sub – modos de pensamiento atendiendo a los conocimientos de EA (Pincheira & Alsina, 2021), esto junto con el número de tareas y el contenido matemático se puede apreciar en la Tabla 10. También, se resalta que no se tuvieron en cuenta los objetos algebraicos propuestos por Godino et al. (2014) ya que se consideró que se encuentran inmersos en los modos de pensamiento, así como se mostró en la Figura 4.

Tabla 10

Síntesis del diseño de las tareas

Modos de pensamiento y sub – modos de pensamiento		Conocimientos que caracterizan EA							Número de tareas	Contenido matemático de las tareas
		Educación infantil			Educación primaria					
		a	b	c	a	b	c	d		
Aritmética generalizada	Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual.				x	x		x	8	Propiedad conmutativa de la adición y la multiplicación, y la no conmutatividad de la sustracción; propiedad asociativa de la adición y la multiplicación, y la no asociatividad de la sustracción; tamaño en la adición, multiplicación y sustracción; complementariedad de la adición y la sustracción.
	Estudio de algunas operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones				x	x		x	8	Propiedades y no propiedades no usuales que se cumplen o no en el conjunto Z_{12} con la operación $\oplus$, específicamente: elasticidad, identidad I de Stein, identidad I de Schröder, asociativa cíclica I, identidad de Abel – Graßmann I, identidad de Abel – Graßmann II, autodistributividad a izquierda y bisimetría.
	Estudio de relaciones de equivalencia y orden	x	x		x				8	Procesos de centración y decantación, selección, clasificación simple, clasificación compuesta. Manejo de propiedades como: reversibilidad, transitividad, asignación de un carácter dual y asimetría. Enumeración.
	Estudio y generalización de patrones		x	x	x				13	Procesos de reproducción, identificación, extensión, extrapolación y traslación de patrones. Fases de la generalización: observar, decir, escribir y verificar. Secuencias corporales, manipulativas, icónicas, gráfico numéricas, numéricas y tabulares.
Estudio de funciones				x	x	x	x		2	Covariación y cambio.

Nota. Educación infantil: (a) experimentación con elementos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones, (b) seriaciones a partir de patrones de repetición y (c) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos. Educación primeria: (a) comprensión de distintos tipos de relaciones de equivalencia y orden, etcétera y de patrones, (b) uso de símbolos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, (c) comprensión del cambio y (e) eso de variables para determinar una constante o incógnita.

Habiendo descrito de manera general el diseño de las tareas, en el siguiente apartado se presentan los elementos que se tuvieron en cuenta asociados a los contenidos específicos de cada modo de pensamiento.

3.1.2 Diseño de las tareas en relación con el modo o sub – modo de pensamiento asociado

3.1.2.1 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual

Para el primer sub – modo de pensamiento se consideraron las tres operaciones básicas adición $(+)$, sustracción $(-)$ y multiplicación $(*)$ en el conjunto de los números naturales junto con las propiedades (o no propiedades) conmutativa, asociativa, tamaño y complementariedad de la adición con la sustracción.

Para cada una de las propiedades señaladas al comienzo de este apartado, se estima realizar una tarea, cada tarea se dividirá en tres partes: (1) ambientación, (2) profundización y (3) institucionalización; en el apartado de ambientación siempre aparecerá una sola pregunta que consiste en identificar la veracidad o falsedad de una igualdad cerrada, para continuar con el apartado de profundización en el que aparecen algunas preguntas que pretenden involucrar al estudiante con la propiedad o no propiedad en un contexto semirreal, para que posteriormente, en el apartado de institucionalización, logre analizar la veracidad o falsedad de diferentes tipos de igualdades o sentencias. Además, en el último apartado la cantidad de preguntas dependerá de la cantidad de sentencias posibles atendiendo la propiedad o no propiedad. A continuación, en la Tabla 11, se presentan todas las sentencias a considerar; sin embargo, de las que tienen mismo color y tonalidad se elegirá una al azar para disponerla en la aplicación; por ejemplo, para la propiedad conmutativa de la adición se dispondrían en la aplicación tres sentencias de las cinco posibles y para la propiedad asociativa de la adición se dispondrían quince de las veintinueve posibles.

Tabla 11

Sentencias o igualdades que se tuvieron en cuenta para el diseño de las tareas asociadas al primer sub – modo de pensamiento.

Propiedad o no propiedad	Sentencias o igualdades consideradas					
	Adición		Multiplicación		Sustracción	
Conmutativa	$a+b=b+a$		$a*b=b*a$		$a-b=b-a$	
	$\quad +b=b+a$	$a+\quad =b+a$	$\quad *b=b*a$	$a*\quad =b*a$		
	$a+b=\quad +a$	$a+b=b+$	$a*b=\quad *a$	$a*b=b*$		
Asociativa	Con cinco números y cuatro signos		Con cinco números y cuatro signos		$a-(b-c)=(a-b)-c$	
	$d=a+b$ y $e=b+c$		$d=a*b$ y $e=b*c$			
	$a+b+c=d+c$	$d+c=a+b+c$	$a*b*c=d*c$	$d*c=a*b*c$		
	$\quad +b+c=d+c$	$d+c=\quad +b+c$	$\quad *b*c=d*c$	$d*c=\quad *b*c$		
	$a+\quad +c=d+c$	$d+c=a+\quad +c$	$a*\quad *c=d*c$	$d*c=a*\quad *c$		
	$a+b+\quad =d+c$	$d+c=a+b+$	$a*b*\quad =d*c$	$d*c=a*b*$		
	$a+b+c=\quad +c$	$\quad +c=a+b+c$	$a*b*c=\quad *c$	$\quad *c=a*b*c$		
	$a+b+c=d+$	$d+\quad =a+b+c$	$a*b*c=d*$	$d*\quad =a*b*c$		
	$a+b+c=a+e$	$a+e=a+b+c$	$a*b*c=a*e$	$a*e=a*b*c$		
	$\quad +b+c=a+e$	$a+e=\quad +b+c$	$\quad *b*c=a*e$	$a*e=\quad *b*c$		
	$a+\quad +c=a+e$	$a+e=a+\quad +c$	$a*\quad *c=a*e$	$a*e=a*\quad *c$		
	$a+b+\quad =a+e$	$a+e=a+b+$	$a*b*\quad =a*e$	$a*e=a*b*$		
	$a+b+c=\quad +e$	$\quad +e=a+b+c$	$a*b*c=\quad *e$	$\quad *e=a*b*c$		
	$a+b+c=a+$	$a+\quad =a+b+c$	$a*b*c=a*$	$a*\quad =a*b*c$		
	Con cuatro números y tres signos		Con cuatro números y tres signos			
	$a+e=d+c$		$a*e=d*c$			
	$\quad +e=d+c$	$a+\quad =d+c$	$\quad *e=d*c$	$a*\quad =d*c$		
	$a+e=\quad +c$	$a+e=d+$	$a*e=\quad *c$	$a*e=d*$		
Tamaño (Ejemplos)	$3+5=50$	$50=3+5$	$20*10=5$	$5=20*10$	$20-10=30$	$30=20-10$
	500+300=100	100=400+900	$20*\quad =5$	$5=\quad *10$	$20-\quad =30$	$30=20-$
Complementariedad de la adición y la sustracción			$a+b-b=a$	$a-b+b=a$		
			$a=a+b-b$	$a=a-b+b$		
			$a+b-b=e$	$a-b+b=e$		

El conjunto completo de estas tareas se encuentra en el Anexo 1.

3.1.2.2 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio de las operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones

En este apartado se propondrán tareas para aprender acerca de la suma en Z_{12}, por lo tanto, en primer lugar, habrá una tarea destinada a explicar cómo sumar en este “mundo”; para continuar con tareas en las que se verificarán algunas propiedades o no propiedades. De esta manera, cada tarea está dividida en tres apartados de manera similar al modo anterior: (1) ambientación, (2) profundización e (3) institucionalización. En el primer apartado siempre aparecerá una sola pregunta que consiste en identificar la veracidad o falsedad de una igualdad cerrada, para continuar con el segundo apartado en el que se pretende involucrar al estudiante con la propiedad o no propiedad, así se continúa con el tercer apartado en el que se proponen las igualdades asociadas y el estudiante debe identificar si son verdaderas o no, o si hay algún número que hace que la igualdad sea verdadera o si para cualquier valor es falsa. Además, en el último apartado la cantidad de preguntas dependerá de la cantidad de sentencias posibles atendiendo la propiedad o no propiedad. En la Tabla 12 encontrará las propiedades e igualdades que se consideraron.

Tabla 12

Sentencias o igualdades que se tuvieron en cuenta para el diseño de las tareas asociadas al segundo sub – modo de pensamiento

Propiedad para $\oplus$ en Z_{12}	Igualdades		
Elasticidad	$a(ba) = (ab)a$		
	$\quad(ba) = (ab)a$	$a(\quad a) = (ab)a$	$a(b\quad) = (ab)a$
	$a(ba) = (\quad b)a$	$a(ba) = (a\quad)a$	$a(ba) = (ab)$
Identidad I de Stein	$a(ab) = ba$		
	$\quad(ab) = ba$	$a(\quad b) = ba$	$a(a\quad) = ba$
	$a(ab) = \quad a$	$a(ab) = b$	
Identidad I de Schröder	$x(xy) = (xy)y$		
	$\quad(xy) = (xy)y$	$x(\quad y) = (xy)y$	$x(x\quad) = (xy)y$
	$x(xy) = (\quad y)y$	$x(xy) = (x\quad)y$	$x(xy) = (xy)$
Asociativa cíclica I	$x(yz) = z(xy)$		
	$\quad(yz) = z(xy)$	$x(\quad z) = z(xy)$	$x(y\quad) = z(xy)$
	$x(yz) = \quad(xy)$	$x(yz) = z(\quad y)$	$x(yz) = z(x\quad)$
Identidad de Abel – Graßmann I	$x(yz) = (yx)$		
	$\quad(yz) = (yx)$	$x(\quad z) = (yx)$	$x(y\quad) = (yx)$
	$x(yz) = (\quad x)$	$x(yz) = (y\quad)$	
Identidad de Abel – Graßmann II	$x(yz) = (yx)z$		
	$\quad(yz) = (yx)z$	$x(\quad z) = (yx)z$	$x(y\quad) = (yx)z$
	$x(yz) = (\quad x)z$	$x(yz) = (y\quad)z$	$x(yz) = (yx)$

Propiedad para ⊕ en Z_{12}	Igualdades		
Autodistributividad a izquierda	$x(yz) = (xy)(xz)$		
	$(\quad yz) = (xy)(xz)$	$x(\quad z) = (xy)(xz)$	$x(y\quad) = (xy)(xz)$
	$x(yz) = (\quad y)(xz)$	$x(yz) = (x\quad)(xz)$	$x(yz) = (xy)(\quad z)$
	$x(yz) = (xy)(x\quad)$		
Bisimetría	$(xy)(uv) = (xu)(yv)$		
	$(\quad y)(uv) = (xu)(yv)$	$(x)(uv) = (\quad u)(yv)$	
	$(x\quad)(uv) = (xu)(yv)$	$(xy)(uv) = (x\quad)(yv)$	
	$(xy)(\quad v) = (xu)(yv)$	$(xy)(uv) = (xu)(\quad v)$	
	$(xy)(u\quad) = (xu)(yv)$	$(xy)(uv) = (xu)(y\quad)$	

El conjunto completo de estas tareas se encuentra en el Anexo 2.

3.1.2.3 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio de relaciones de equivalencia y orden

De acuerdo con lo descrito en el marco de referencia, el estudio de relaciones de equivalencia y orden se pueden apoyar de manera temprana a partir de procesos como clasificar y seriar y comparar, razón por la que este apartado se dividirá en dos partes: (1) tareas asociadas a la clasificación y (2) tareas relacionadas con la seriación y comparación, no significa que sean completamente disyuntas, sino que se centra la atención en unos procesos u otros.

Por su parte, la clasificación requiere de los procesos de centración y decantación, para cada uno se dispondrá una tarea. Así mismo, se considerarán los tres tipos de clasificación: selección, clasificación simple y clasificación compuesta; que naturalmente, se abordarán en ese orden. En la Tabla 13 se muestra lo que se tendrá en cuenta para cada tipo de clasificación.

Tabla 13

Clasificación

Clasificación		
Selección	Simple	Compuesta
Separar objetos de una colección de elementos sin interesarse por qué sucede con los elementos no seleccionados.	Organizar todos los elementos de una colección de objetos atendiendo a un criterio (forma, color, peso, material, uso, entre otros).	1. Organizar todos los elementos de una colección de objetos atendiendo dos criterios. 2. Organizar todos los elementos de una colección de objetos atendiendo tres criterios. 3. Organizar todos los elementos de una colección de objetos atendiendo cuatro criterios.

En atención a la seriación y comparación, se entiende que para que los estudiantes logren construir series ordenadas deben manipular propiedades como: la reversibilidad, transitividad, asignación de carácter dual y asimetría; además, se contempla la enumeración para la que se tienen ciertos pasos establecidos. Para apoyar la manipulación de las propiedades, se realizará

una tarea enfocada a que el estudiante se involucre con cada propiedad, haciendo énfasis en el proceso de enumeración de manera paralela.
Las tareas asociadas a este sub – modo de pensamiento, se encuentran divididas por niveles de dificultad, partiendo del más fácil al más difícil; en el primer nivel el estudiante se familiariza con el proceso o propiedad utilizando una colección con pocos objetos, para transitar a los demás niveles en los que el número de objetos a manipular aumenta.

El conjunto completo de estas tareas se encuentra en el Anexo 3.

3.1.2.4 Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada: estudio y generalización de patrones

Es importante resaltar que, a través de los antecedentes se identificó que hay cinco procedimientos importantes para apoyar la generalización de patrones a partir de secuencias, estos son: reproducir, identificar, extender, extrapolar y trasladar. Además, se tendrán en cuenta las sentencias tipificadas por Mora (2012) en la Tabla 6.

Adicionalmente, con respecto a las fases de la generalización, se destaca que se pretenden apoyar las fases ver, decir, escribir y verificar; a través de preguntas apoyadas en las estrategias de nivel.

En conclusión, se prevé realizar una tarea por cada "tipo" de secuencia que atienda cada una de las acciones que se identificaron relevantes para este estudio y apoyen las fases ver, decir, escribir y verificar, así como se muestra en la Tabla 14.

Tabla 14

Elementos considerados para el estudio y generalización de patrones asociado a secuencias

Secuencia	Procedimientos	Fases
Corporal	Reproducir Identificar Extender Extrapolar Trasladar	Ver, decir, escribir y verificar.
Manipulativa		
Icónica		
Gráfico numérico		
Numérica		
Tabular		

Nota. No se debe entender que se van a realizar los cinco procedimientos por cada secuencia, sino que se tuvieron en cuenta algunos, los que se consideraron pertinentes, para el diseño de cada tarea.

Para estas tareas hubo que realizar una adaptación a la fase escribir, dado a que no hay quien lea algo escrito "limpiamente" por los estudiantes, así que se ofrecen respuestas de selección múltiple, organizar o completar un argumento.

Por otra parte, haciendo énfasis en los significados de las palabras ver (percibir por los ojos los objetos mediante la acción de la luz), mirar (dirigir la vista a un objeto. Revisar o registrar) y observar (examinar atentamente); se considera que la palabra más adecuada para lo que se espera realicen los estudiantes es observar, atendiendo a las ideas y elementos de la fase ver.

El conjunto completo de estas tareas se encuentra en el Anexo 4.

3.1.2.5 Álgebra como estudio de funciones

En este modo de pensamiento la covariación y el cambio son el eje principal, que se abordará siguiendo la trayectoria propuesta por Blanton et al., (2015 citado en Kieran et al., 2016). El énfasis en este modo se encuentra en el análisis de modelos, así que se presentan algunos modelos para su respectivo análisis, por ejemplo, mientras que una variable aumenta la otra disminuye o viceversa, que las dos aumenten o las dos disminuyen. Algunas estrategias que se van a utilizar están asociadas con el dinero, entre más dinero gasto menos dinero se tiene; de manera similar, a medida avanza el tiempo menos vida queda.

Estas tareas se encuentran en el Anexo 5.

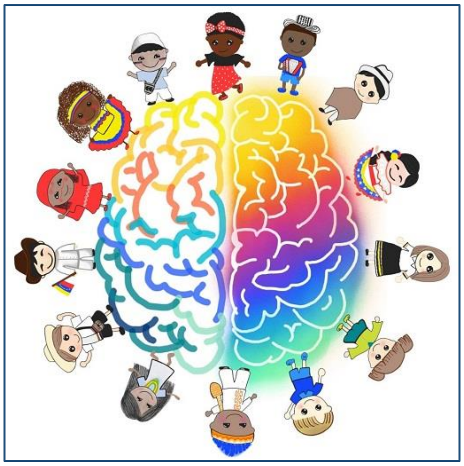
Diseño de la aplicación

Es importante resaltar, nuevamente, que la aplicación se desarrolló en la plataforma *Kodular* que permite crear aplicaciones para Android con un editor de tipo bloques. Esta plataforma es gratuita, basta con crear una cuenta o acceder con una cuenta de *Google*, *GitHub* o *Twitter*, para poder comenzar a crear aplicaciones. Además, dispone de una página web (https://docs.kodular.io/) en la que se pueden encontrar guías, descripción de cada uno de los componentes, descripción de los bloques y un apartado de preguntas de apoyo frecuentes; además, existe una comunidad o grupo en el que ayudan a resolver inquietudes, muchas veces errores de código. En conclusión, dado a que ampliamente conocida cuenta con un buen volumen de ayudas audiovisuales y documentos para aprender a programar allí.

El nombre de la aplicación es *Ealgebrapp*, E de *Early*, *algebra* por el saber que se pretende abordar y *app* de aplicación, con este nombre se pretendió de cierta manera reflejar su contenido, una aplicación para el álgebra temprana. En el logo (ver Figura 12) se muestran los catorce personajes que se diseñaron para la aplicación. Hay doce que representan las regiones del país y dos representantes venezolanos, pues el contexto con las regiones también fue ideado para que los niños pudieran sentirse identificados y como es sabido, hay más de dos millones de venezolanos radicados en Colombia. Además, los catorce personajes se encuentran alrededor de un cerebro con el que se quiere representar el pensamiento o el razonamiento y la creatividad que ya tienen o que se puede procurar ayudar a emerger en los niños, particularmente, por medio de *Ealgebrapp*.

Figura 12

Ícono Ealgebrapp



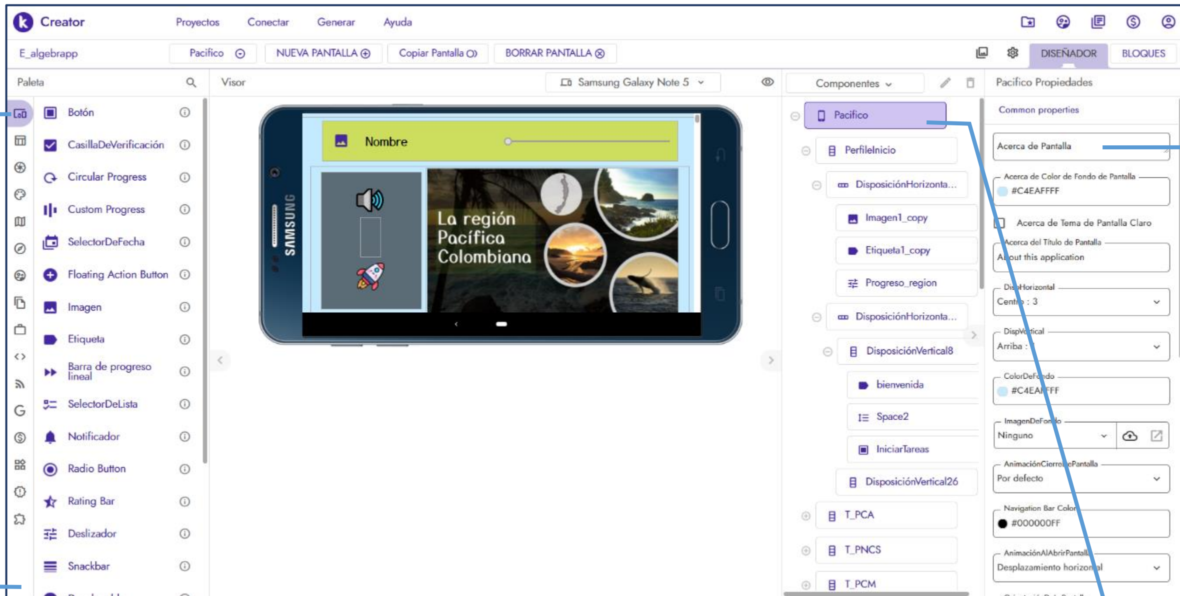
Nota. Fuente: elaboración propia.

La autora de la presente monografía se encargó de diseñar todo el apartado visual de la aplicación, para el que tuvo en cuenta las edades promedio a las cuales está dirigida; basada en su estética se seleccionaron colores y fuente de las letras, diseñó escenarios, personajes y demás elementos de la aplicación; cabe resaltar que se tuvieron en cuenta las sugerencias de la asesora. Así mismo, la autora de este trabajo fue la encargada de programar todas las tareas diseñadas. Por otra parte, se destaca que los íconos (de tipo imagen) e imágenes fueron creados o tomados de dos páginas que permiten la libre descarga https://www.flaticon.es/ y https://www.pngegg.com/es; los emojis y otros íconos (de tipo texto) fueron tomados de otras dos páginas https://emojiterra.com/es/ y https://fonts.google.com/icons; finalmente, las fuentes dispuestas en el aplicativo fueron tomadas de https://fonts.google.com/.
Con el propósito de ejemplificar cómo funciona Kodular, se presenta el diseño y la programación de una de las preguntas que contiene la tarea "*Propiedad conmutativa de la adición*", pero antes de ello se explicará brevemente cómo funciona la plataforma.

Kodular se divide en dos partes; una ventana de diseño y una ventana de bloques. En la ventana de diseño (ver Figura 13) se encuentran disponibles todos los componentes que ofrece la plataforma para disponer todo lo que se verá en pantalla; en la ventana de bloques se programan los componentes a partir de bloques que funcionan como una especie de rompecabezas (ver Figura 14)

Figura 13

Ventana de diseñador Kodular



Nota. Fuente: elaboración propia.

Estas son las 16 categorías de componentes disponibles para utilizar, con ellos se puede personalizar el comportamiento y el aspecto de la aplicación.

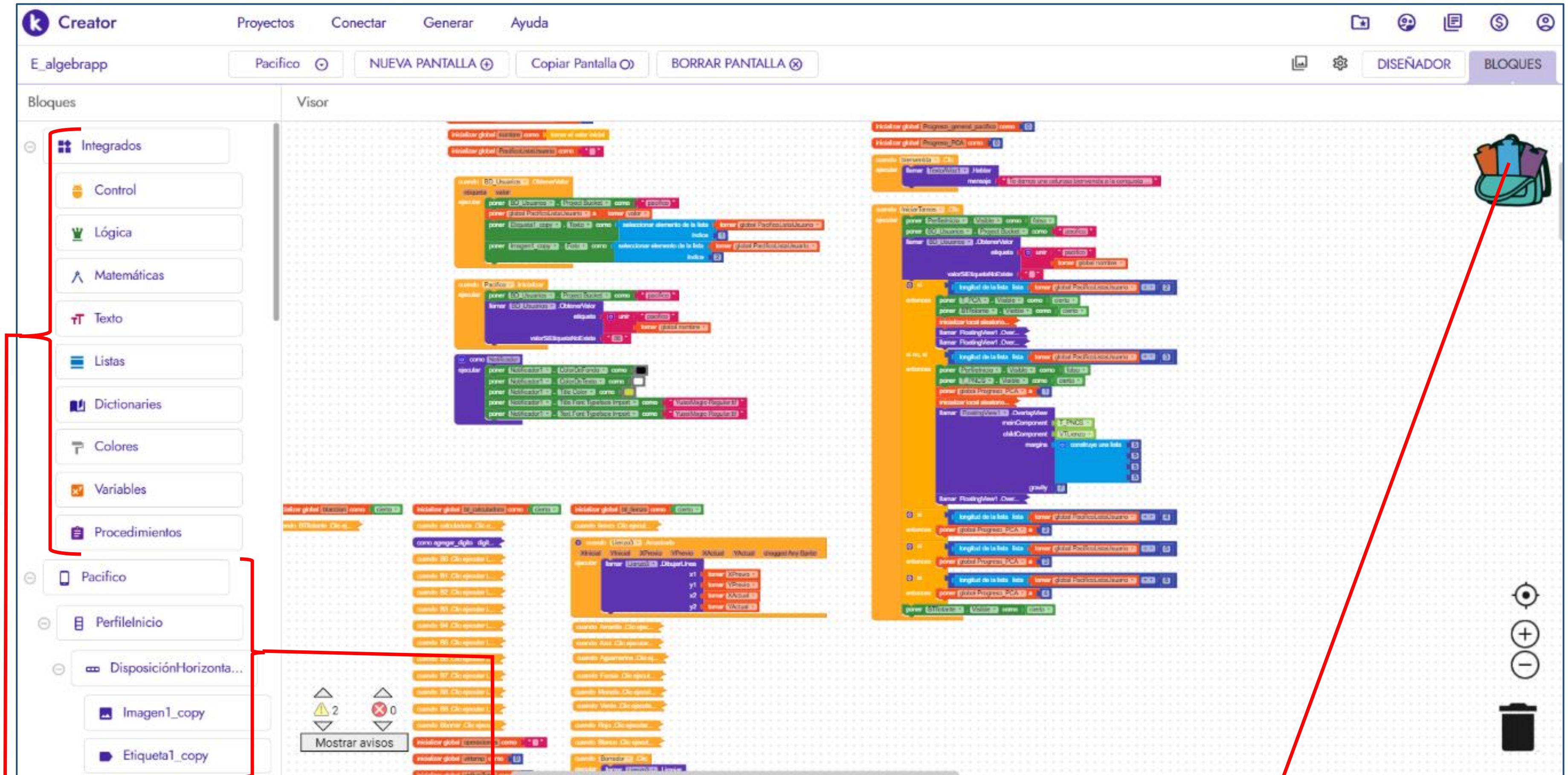
Se pueden ver los componentes de la categoría "interfaz de usuario" una de las más utilizadas para el diseño de la aplicación ya que allí se encuentran componentes como: botón, etiqueta, deslizadores, notificador, botón flotante, imagen, entre otros.

Al momento de tomar la captura, estaba seleccionada la pantalla, por ello se ve sombreada. En toda esa columna se pueden identificar los componentes que ya hacen parte de la interfaz.

Como estaba seleccionada la pantalla en general, en este apartado se encuentran algunas de sus propiedades, de la misma manera sucede con los demás componentes.

Figura 14

Ventana de bloques/programación Kodular



Nota. Fuente: elaboración propia.

En la parte de bloques, encontramos los bloques integrados; es decir, bloques generales que no son propios de algún componente o no están asociados a algún componente directamente.

Además, encontramos los bloques que sí están asociados a todos los componentes dispuestos en el diseño.

En esta maleta se pueden guardar bloques de códigos para llevarlos a otras ventanas y utilizarlos allí.

Con respecto al ejemplo, se presenta el diseño, programación y resultado final de la tarea que se muestra a continuación (solamente la pregunta 1 parte a):

1. Observa la siguiente igualdad:
   a. $\quad + b = b + a$
   b. $a + b = \quad + a$

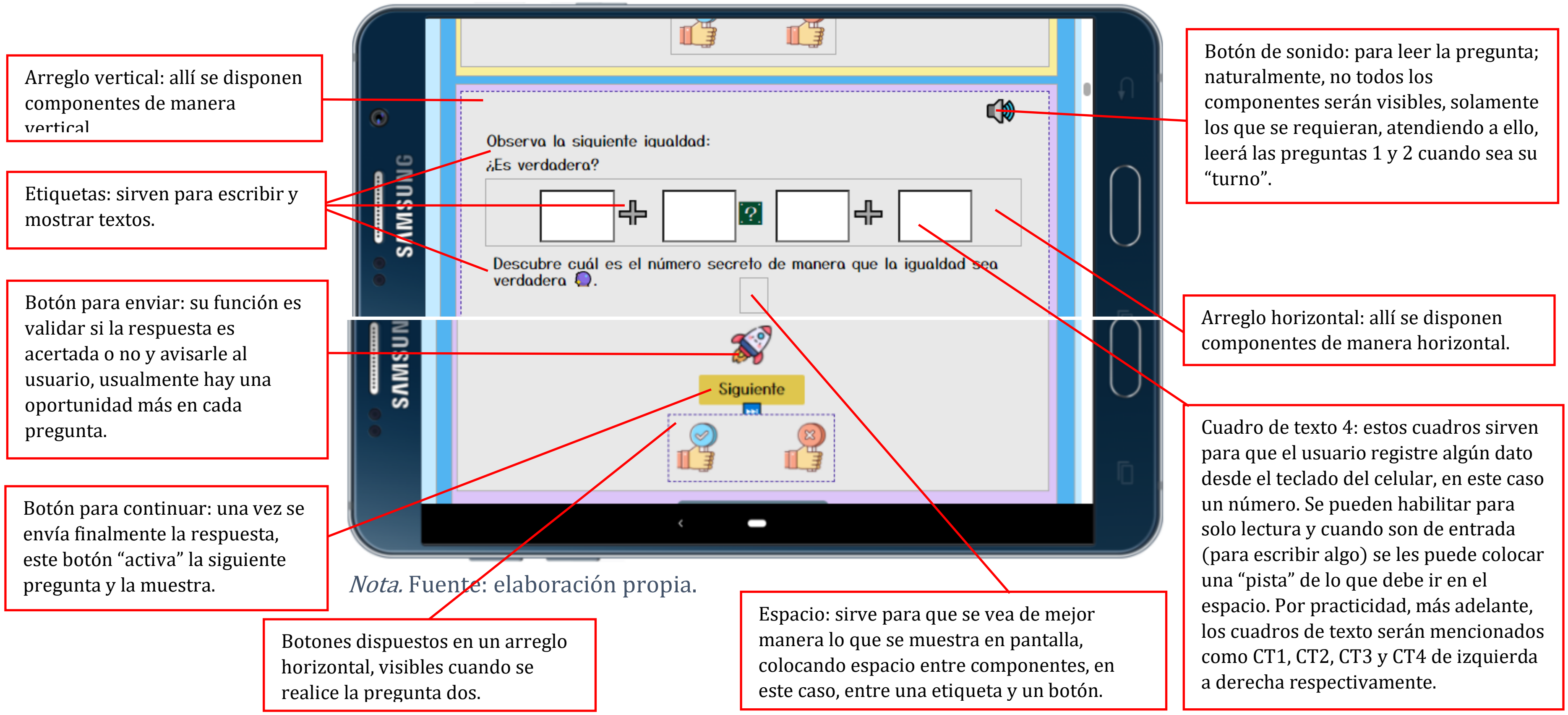
   Descubre cuál es el número secreto de manera que la igualdad sea verdadera .
2. Observa la siguiente igualdad: $a + b = b + e$

   ¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No

En primer lugar, se explica mediante la Figura 15 qué se realizó en el apartado de diseño y cuáles componentes se utilizaron:

Figura 15

Ejemplo del diseño de una tarea en Kodular

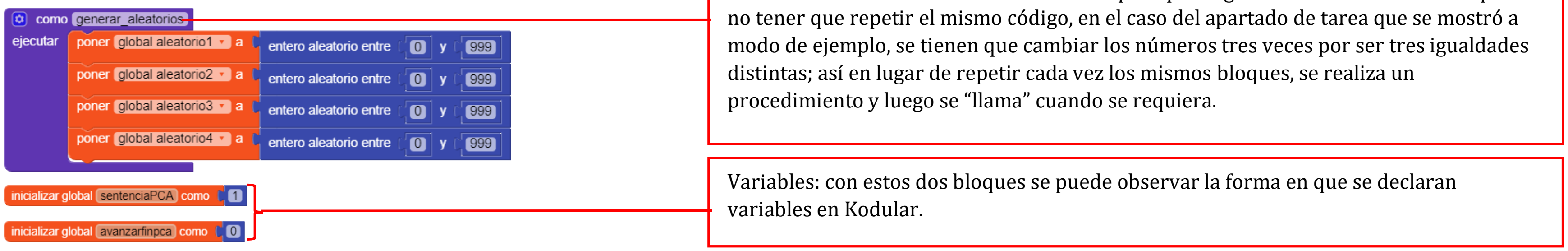


Nota. Fuente: elaboración propia.

En segundo lugar, se presentarán los bloques asociados a esta tarea, inicialmente solo son visibles los componentes que muestran la pregunta 1 parte a. Se destaca que cuando se termina la pregunta anterior a la del ejemplo, se activa un procedimiento (ver Figura 16) que genera números aleatorios y son esos números los que se muestran en la pregunta 1 parte a.

Figura 16

Procedimiento Kodular

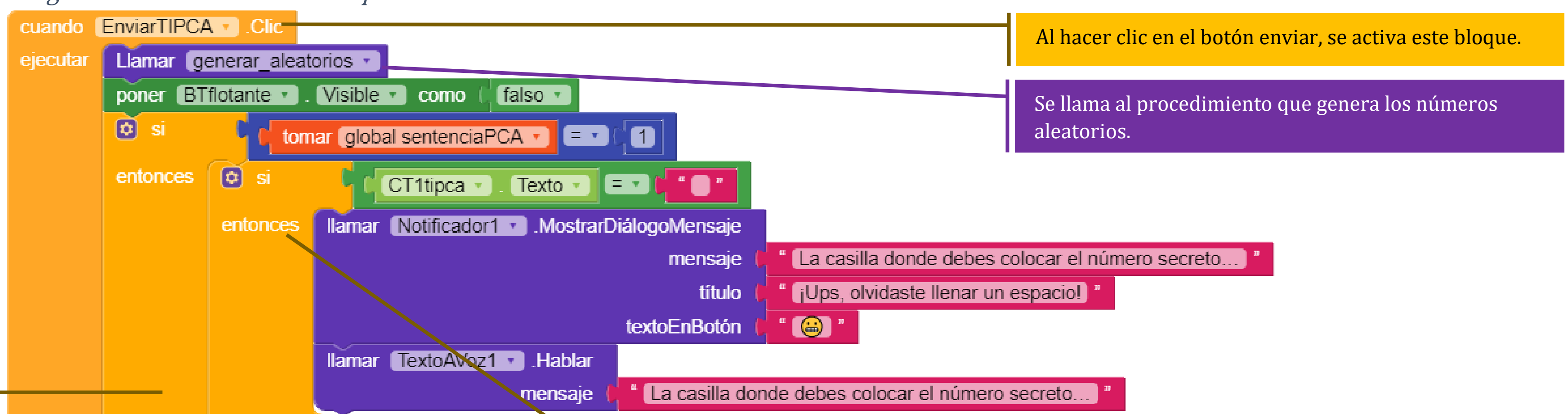


Nota. Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, en la Figura 17 se presenta la primer parte del botón enviar; en resumen, esta primera parte evalúa que la casilla en donde se debe ingresar el número no esté vacía, de ser así, le va a informar al usuario por medio de un notificador como se logra apreciar en la Figura 18.

Figura 17

Programación del botón enviar parte 1.



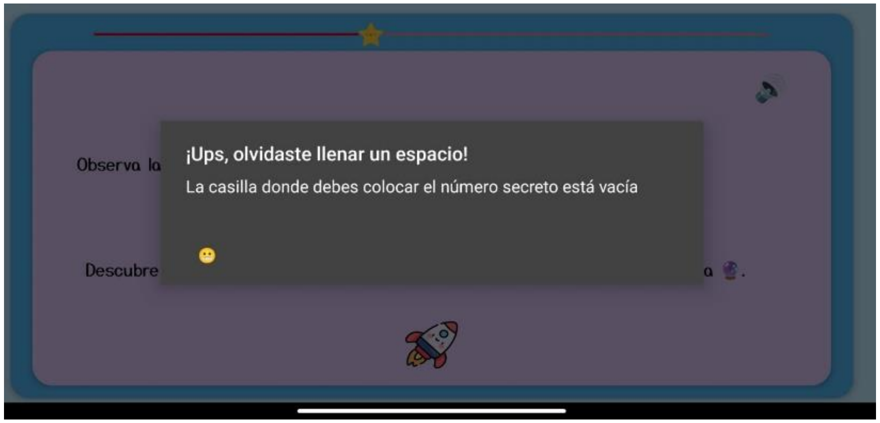
Nota. Fuente: elaboración propia.

Es de bloque es de tipo sí pasa x evento, entonces debe suceder el evento y. En este caso si la variable “sentenciaPCA” equivale a uno, entonces se lee el bloque.

Este bloque señala que, si el CT1 es vacío se le debe indicar al usuario. Se hace con un notificador y un texto a voz que lee la información que contiene el notificador. Un notificador es una especie de ventana que flota sobre lo que se esté mostrando en pantalla (ver Figura 18). Además, un texto a voz es un bloque al que se le encaja un texto, el texto que se le quiere leer al usuario.

Figura 18

Notificador Kodular

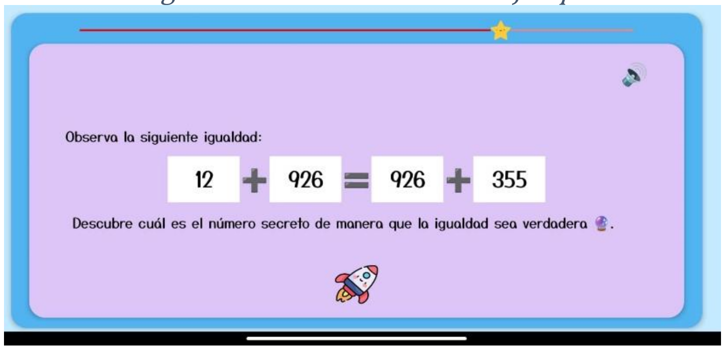


Nota. Fuente: elaboración propia.

Siempre y cuando el texto del CT1 sea distinto de vacío se va a leer la segunda parte del botón enviar, que de manera sucinta evalua si la respuesta no es correcta (por ejemplo, ver Figura 19) y en caso de ser así, nuevamente, a través de un notificador (ver Figura 20) se le informará al usuario, así tendrá la oportunidad de corregir.

Figura 19

El usuario ingresa un valor incorrecto - ejemplo 1



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 20

Se le sugiere al usuario realizar una revisión - ejemplo 1

Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 21

Programación del botón enviar parte 2

Nota. Fuente: elaboración propia.

Si el CT1 no está vacío, la programación lee este bloque. Si lo que hay en CT1 es distinto de lo que hay en CT4 (ver Figura 19

Figura 22

El usuario ingresa un valor incorrecto

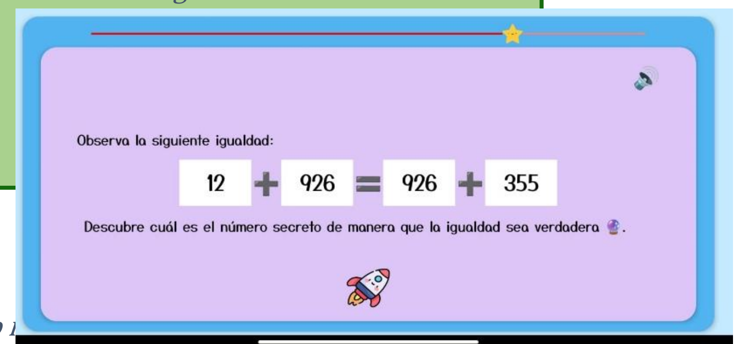
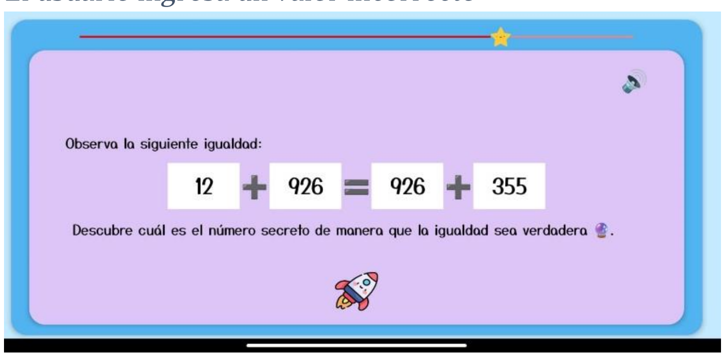


Figura 22

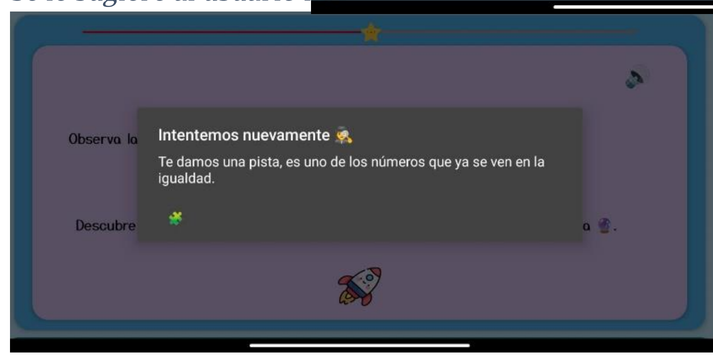
El usuario ingresa un valor incorrecto



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 23

Se le sugiere al usuario i

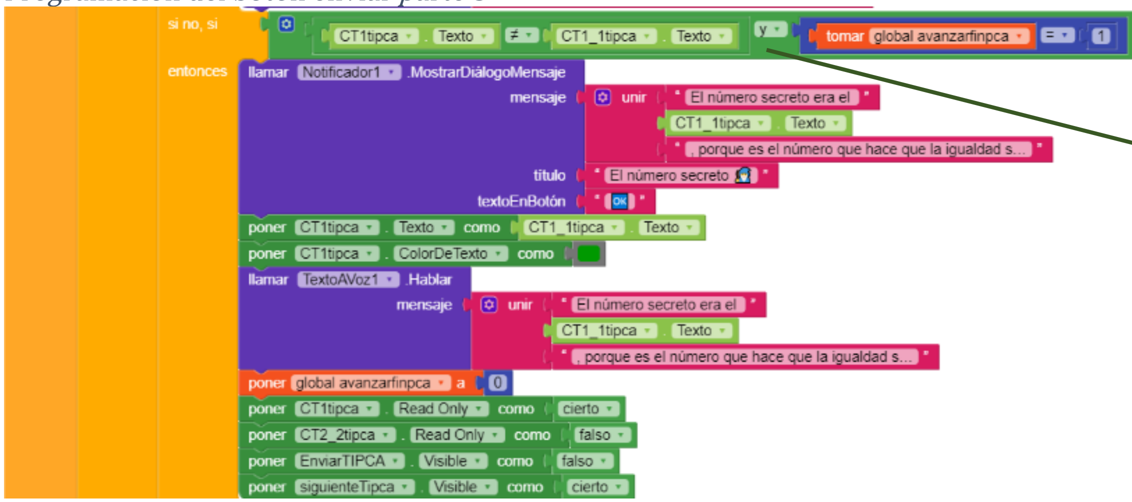


Nota. Fuente: elaboración propia.

Si el CT1 no está vacío y es la segunda vez que el usuario ingresa un valor incorrecto, la aplicación ya le muestra al usuario cuál era la respuesta programada (ver Figura 24) por medio de un notificador (ver Figura 25) y cambiando el número directamente en la casilla colocándole otro color (ver Figura 26). Además, pone visible el botón siguiente.

Figura 24

Programación del botón enviar parte 3

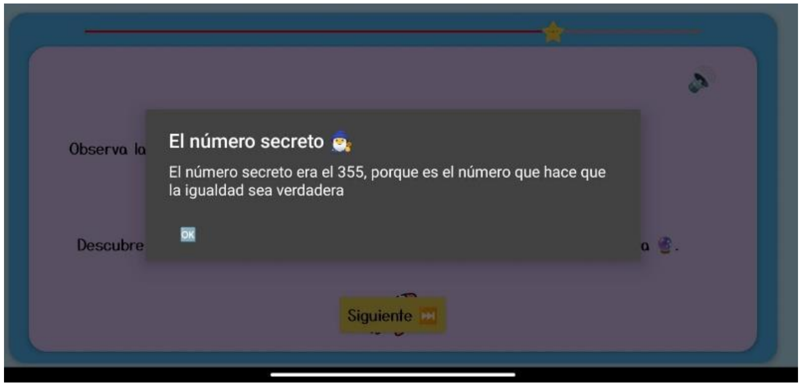


Si la programación lee este bloque es porque el usuario se equivocó y no corrigió o cambió el número y se volvió a equivocar. Por medio de un notificador y su lectura automática, se le explica al usuario cuál era el número secreto y se le muestra en pantalla con un color distinto (ver Figura 25 y Figura 26). Además, se activa el botón “siguiente” que va a permitir pasar a la siguiente igualdad, en esa igualdad la incógnita está en el CT3, entonces se le debe habilitar la escritura mientras que a CT1 se le debe inhabilitar.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 25

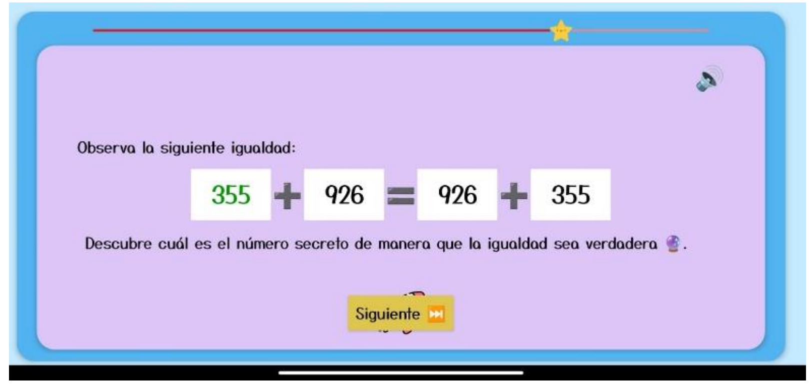
Se le indica al usuario cuál era la respuesta correcta



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 26

Se le muestra al usuario la respuesta correcta y se hace visible el botón "siguiente"

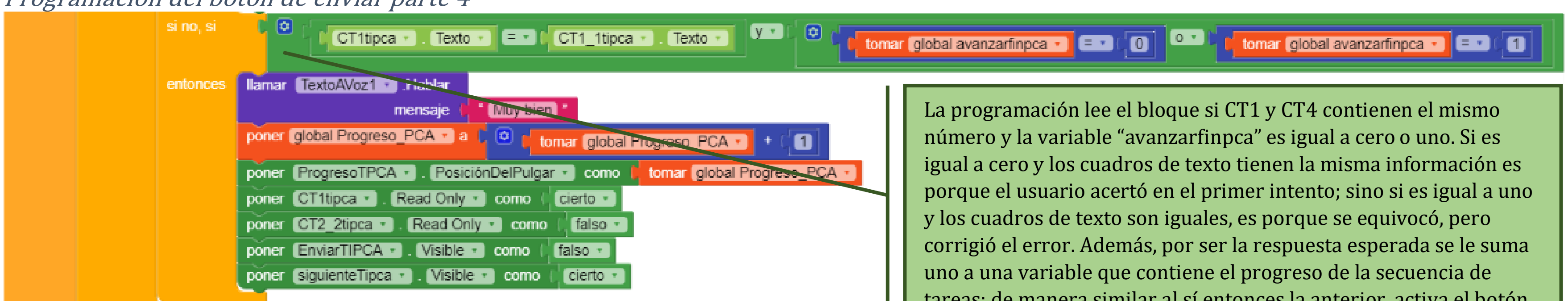


Nota. Fuente: elaboración propia.

Para continuar, la siguiente instrucción de manera breve consiste en identificar si lo que hay en la CT1 es correcto, de ser así agregará un punto al progreso general que tiene el usuario en esta tarea, el usuario escuchará la frase "Muy bien" (ver Figura 27).

Figura 27

Programación del botón de enviar parte 4



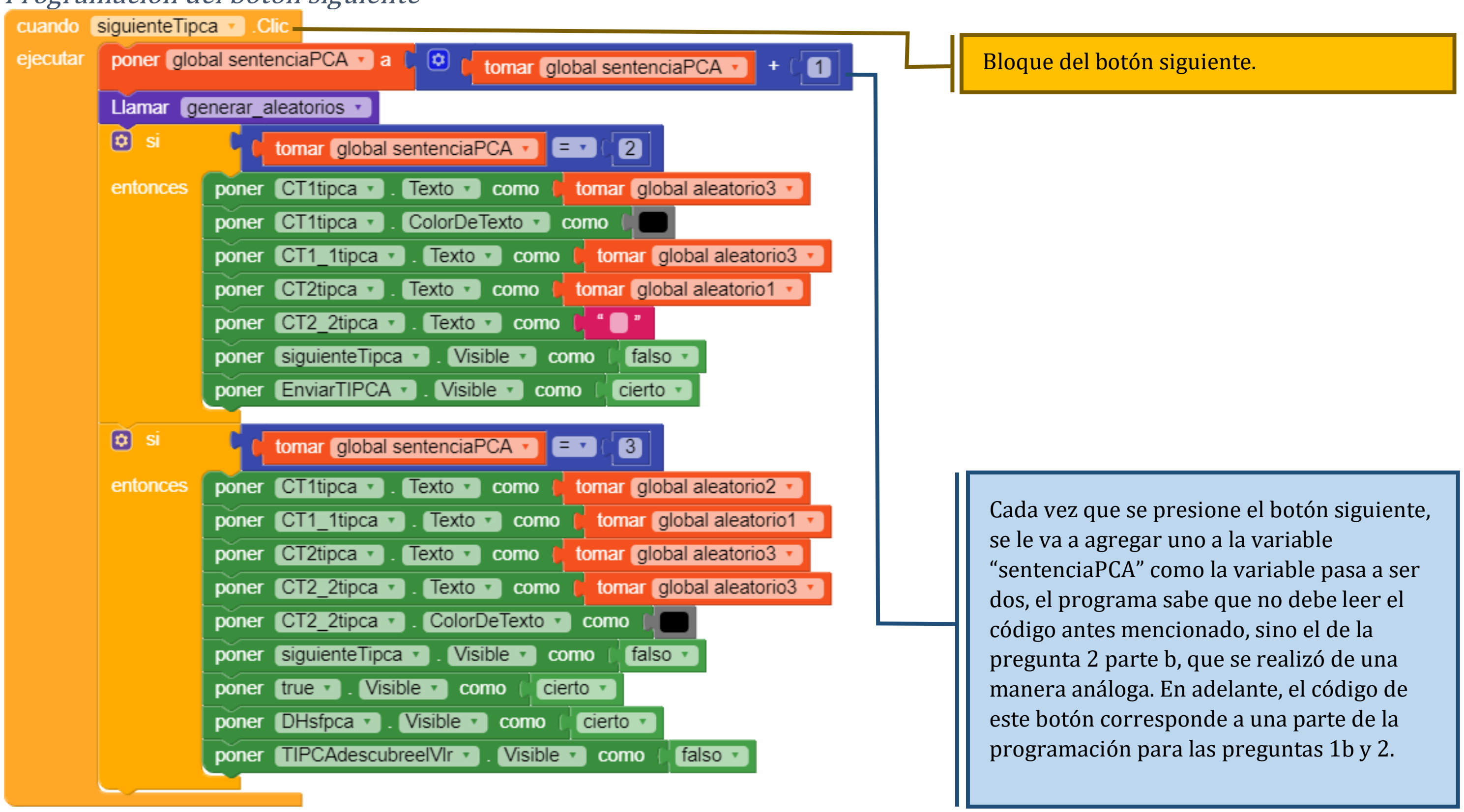
Nota. Fuente: elaboración propia.

La programación lee el bloque si CT1 y CT4 contienen el mismo número y la variable "avanzarfinpca" es igual a cero o uno. Si es igual a cero y los cuadros de texto tienen la misma información es porque el usuario acertó en el primer intento; sino si es igual a uno y los cuadros de texto son iguales, es porque se equivocó, pero corrigió el error. Además, por ser la respuesta esperada se le suma uno a una variable que contiene el progreso de la secuencia de tareas; de manera similar al sí entonces la anterior, activa el botón "siguiente" que va a permitir pasar a la siguiente igualdad, en esa igualdad la incógnita está en el CT3, entonces se le debe habilitar la escritura mientras que a CT1 se le debe inhabilitar.

Cuando se revisó la parte 3 y 4 de la programación del botón enviar, sobre el final se indicó que, si el usuario vuelve a ingresar una respuesta incorrecta o acierta, se dejará visible el botón siguiente. El botón siguiente como se muestra en la Figura 28, es el encargado de poner nuevamente aleatorios distintos en las cajas de texto y reestablecer el color negro en caso de que el usuario se haya equivocado.

Figura 28

Programación del botón siguiente



Nota. Fuente: elaboración propia.

Ya se expuso someramente cómo funciona Kodular y se presentó un ejemplo de cómo se programó *Ealgebrapp* con esta plataforma.

Ealgebrapp

Como se mencionó en el capítulo anterior, Ealgebrapp es un aplicación diseñada en *Kodular*, dirigida a estudiantes del primer ciclo de la educación básica primaria colombiana fundamentalmente, cuyo propósito es el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. Para ello la aplicación cuenta con 6 secciones, cada una asociada a una región geográfica y cultural colombiana y a un modo de pensamiento algebraico[14].

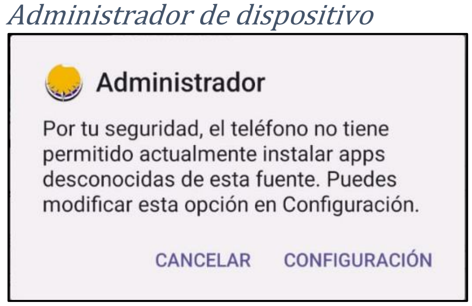
Esta aplicación está diseñada para que el estudiante aprenda matemáticas de manera autónoma, pero también se considera que puede articularse en la clase de matemáticas como herramienta para dinamizar la enseñanza y el aprendizaje o para ser utilizada con el apoyo de un cuidador. Para acceder a ella, se deben seguir los pasos que se muestran en la Tabla 15.

Tabla 15

Cómo instalar Ealgebrapp

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>En la carpeta Ealgebrapp (el enlace redirige a una carpeta en one drive) aparece un archivo llamado “Ealgebrapp.apk”. Si accedió desde el ordenador debe copiarlo y pegarlo en alguna carpeta del celular, se sugiere en la carpeta de descargas porque es de fácil acceso desde el administrador de archivos. Si no, si accedió directamente desde el dispositivo móvil el apk se descargará automáticamente en la carpeta de descargas.</td><td>Haciendo clic sobre el archivo debe aparecer un letrero similar al que se muestra en la Figura 29, por lo tanto, debe ir a configuración.

Figura 29

Administrador de dispositivo


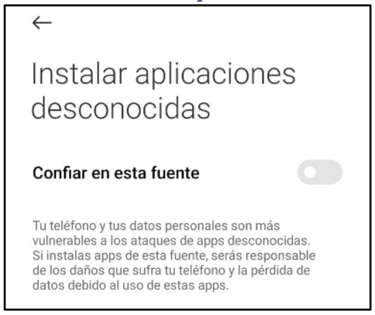
Nota. Fuente: elaboración propia.</td></tr>
<tr><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>En configuración le aparecerá algo similar a lo que se muestra en la Figura 30; aunque la aplicación se cataloga como desconocida ya que no está publicada en la tienda oficial de aplicaciones para *Android,* la *Play Store,* se puede instalar sin algún problema.</td><td>Ahora, al hace clic nuevamente sobre el archivo deberá aparecer un letrero similar al que se muestra en la Figura 31, seleccione la opción de instalar.</td></tr>
</table>

[14] Entre modos y sub – modos de pensamiento, encontramos 5 enfoques; luego hay una región, la Insular, que no tiene un modo o sub – modo asociado, pero tiene juegos y premios virtuales que se canjean con las estrellas ganadas en las otras regiones.

<table>
<tr>
<td>

Figura 30

Instalación de aplicaciones desconocidas

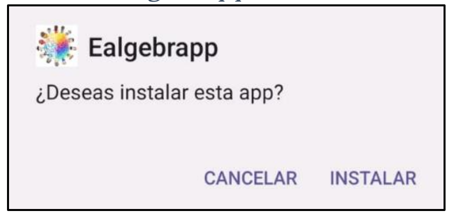


Nota. Fuente: elaboración propia.

</td>
<td>

Figura 31

Instalar Ealgebrapp



Nota. Fuente: elaboración propia.

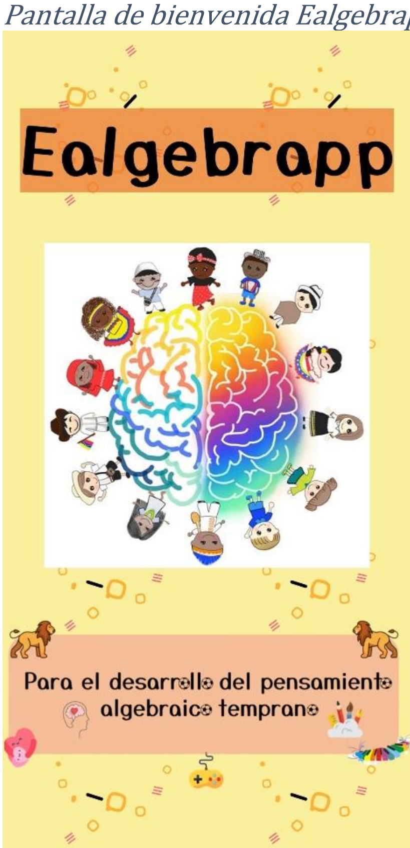
</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ingrese a Ealgebrapp.</td></tr>
</table>

En cuanto el usuario ingresa comienza a interactuar con las diferentes pantallas con las que cuenta la aplicación, a continuación, se describe cada una:

Pantalla introductoria: se muestra una animación (ver Figura 32) con el nombre de la aplicación, que al concluir da paso automáticamente a la siguiente pantalla.

Figura 32

Pantalla de bienvenida Ealgebrapp

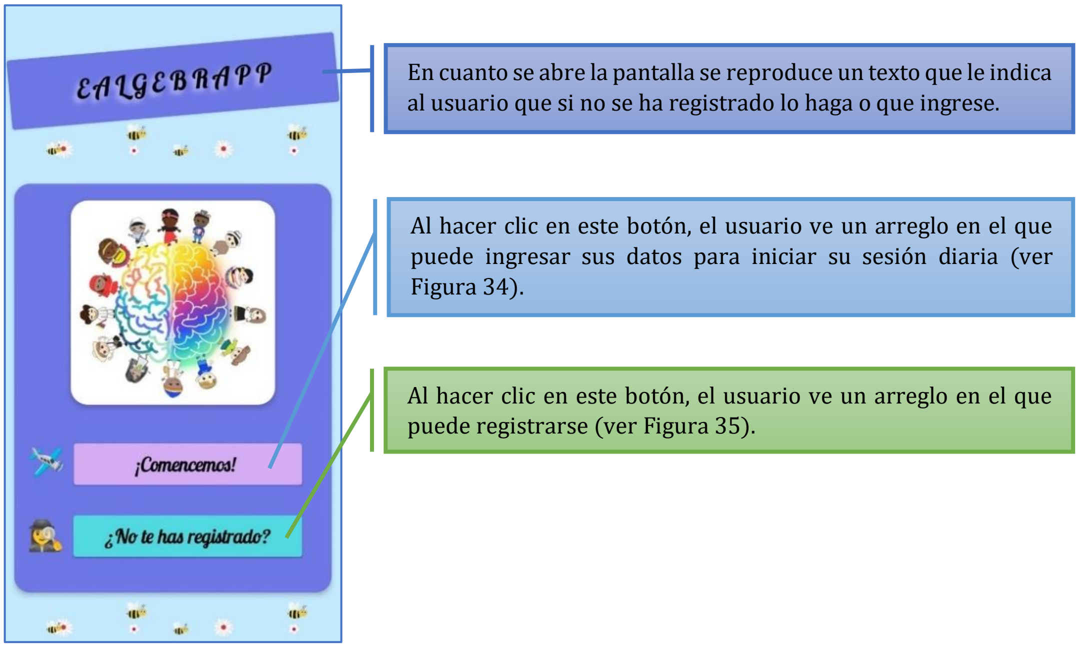


Nota. Fuente: elaboración propia.

Pantalla de registro o ingreso: En esta pantalla el usuario accede o crea un usuario para poder ir a las regiones y así a las tareas (ver Figura 33, Figura 34 y Figura 35).

Figura 33

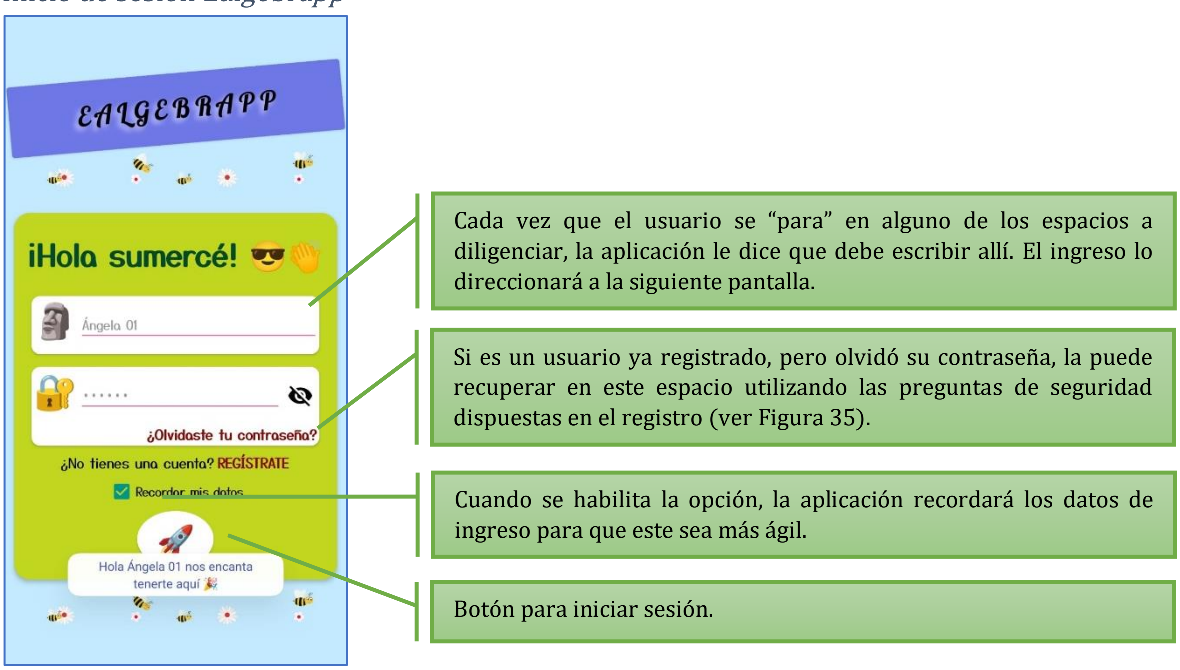
Pantalla de registro o ingreso Ealgebrapp



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 34

Inicio de sesión Ealgebrapp



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 35

Registro Ealgebrapp

El usuario registrarse completando información básica como nombre de usuario, contraseña, edad y seleccionando el personaje de su preferencia.

Se realizan algunas preguntas de seguridad, en caso de que el usuario olvide su contraseña, si bien este método no es el más confiable para restablecer una contraseña, se tiene en cuenta que la aplicación no va a guardar información confidencial o sensible.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Este registro es importante porque permite guardar el progreso del usuario, pues las tareas se van a presentar en cierto orden con el propósito de que resuelva una al día; así, cuando el usuario se registra se crea una base de datos que permite asociar el progreso por región al estudiante. Adicionalmente, la *Firebase* (base de datos de Google) se actualiza en tiempo real.

El inicio de sesión se pensó inicialmente para que en la aplicación se pudiese guardar el progreso que tiene cada estudiante, de manera que se registra y se crea una base de datos relacionada esa información. Esto se realizó por medio de uno de los servicios de *Firebase*[15], el *Realtime Database*, que, como su nombre indica, es una base de datos que se almacena y sincroniza datos en tiempo real en la nube, lo cual indica que la aplicación debe utilizarse con conexión a internet. Finalmente, al usuario ingresar a la cuenta es redirigido a la siguiente pantalla.

Pantalla de bienvenida a Colombia: en esta pantalla se presentan las regiones de Colombia y algunas palabras o contenidos que indican someramente qué se encontrara en cada una (ver Figura 36), una vez el usuario ha "repasado" las 6 regiones, debe elegir a cuál quiere ir (ver

Figura 37), una vez haya elegido será direccionado a cada una de las pantallas asociadas a cada una de las seis regiones.

[15] Es una plataforma creada por Google que permite desarrollar o facilitar el desarrollo de aplicaciones. Para más información se puede consultar: https://firebase.google.com/

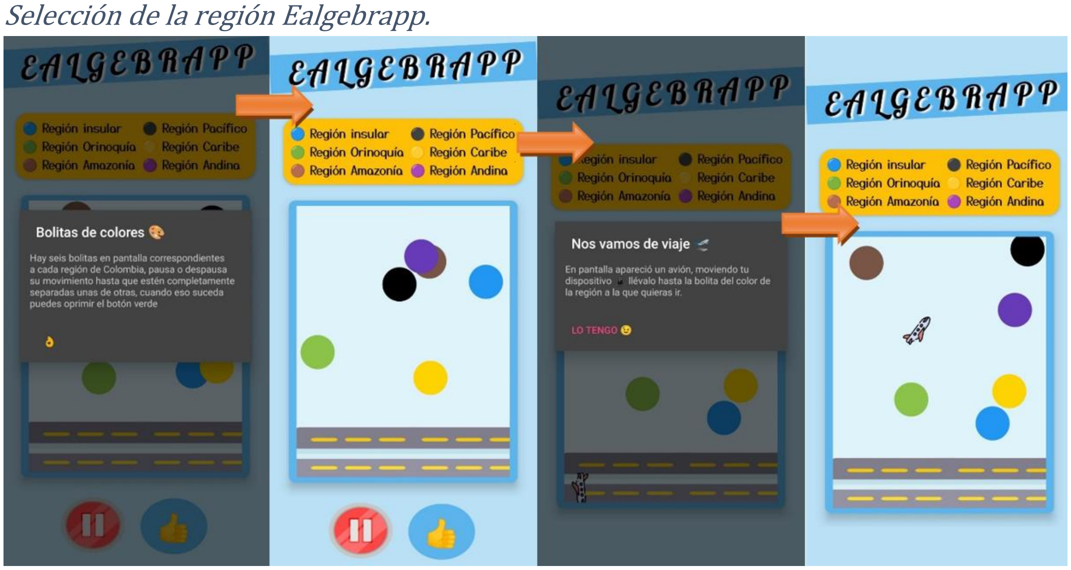
Figura 36

Ejemplo regiones Ealgebrapp.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 37

Selección de la región Ealgebrapp.



Nota. Fuente: elaboración propia.

Pacífico: en esta región se encuentran las tareas asociadas con *Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual*, en total se programaron 39 tareas, se espera que el estudiante realice una por día.

Figura 38

Pantalla inicial del Pacífico Ealgebrapp.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Las pantallas de Caribe, Orinoquía y Amazonía son análogas a la del pacífico, salvo que cada una tiene su propia portada, naturalmente.

Prueba de escritorio

Al tener la versión final de la aplicación, la autora decidió realizar una revisión general de esta para validar que todo lo dispuesto funcionara de manera correcta; procedió a compilar el proyecto para generar el *APK*[16], pero en este proceso la plataforma arrojó un error inesperado, realizando una consulta con los datos del error (ver Figura 39) se lograron identificar posibles causas y soluciones. Se describirán como sigue, explicando primero el posible error, seguido de la solución planteada.

Figura 39

Error inesperado Ealgebrapp

```
Kodular no puede compilar este proyecto.
El error de compilación fue
________Preparing application icon
________Creating animation xml
________Creating fragment xml
________Creating listview xml in res/layout/..
________Creating listview xml in res/layout-v21/..
________Creating xml in res/drawable/..
________Creating splash png in res/drawable/..
________Creating colors xml
________Creating styles xml
________Creating drawables xml v21
________Checking for firebase
________Creating provider_path xml
________Creating network_security_config xml
________Generating adaptive icon file
________Generating round adaptive icon file
________Generating adaptive icon background file
________Generating manifest file
________Attaching native libraries
________Attaching Android Archive (AAR) libraries
________Attaching component assets
________Invoking AAPT
AAPT time: 2.3 seconds
________Compiling source files
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/Pacificop2.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.Pacificop2)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/insular.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.insular)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/orinoquia.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.orinoquia)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/PacificoPCA.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.PacificoPCA)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/PacificoTamCom.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.PacificoTamCom)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/amazonia.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.amazonia)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/andina.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.andina)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/Pacifico.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.Pacifico)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/bienvenida_a_Colombia.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.bienvenida_a_Colombia)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/registro.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.registro)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/Screen1.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.Screen1)
(compiling io/kodular/angelapineda980/Epppppppppp_algebrapp/caribe.yail to io.kodular.angelapineda980.Epppppppppp_algebrapp.caribe)
(compiling /tmp/runtime4846703941988593626.scm to com.google.youngandroid.runtime)
Kawa compile time: 49.895 seconds
________Invoking DX
YAIL compiler - DX execution failed.
```

Nota. Fuente: elaboración propia.

(a) Primer posible desacierto: que exista algún error de codificación, los errores usualmente impiden la compilación del proyecto.

Estos errores se identifican fácilmente ya que en la parte inferior izquierda de la pantalla se puede observar si hay alguno, por ejemplo, en la Figura 40, se puede ver que hay 3 alertas (triángulo amarillo), usualmente es porque se ha quedado algún bloque suelto o hace falta anidarle algún componente, como es el caso del bloque de notificador de la Figura 41.

[16] Es el paquete de instalación que contiene los datos de la aplicación.

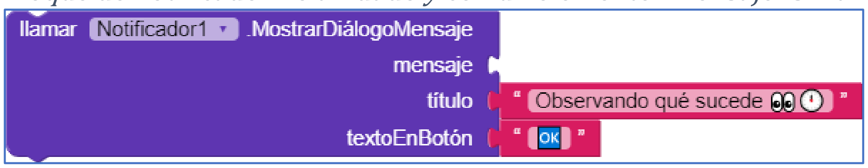
Figura 40

Advertencias y errores Kodular

Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 41

Bloque de notificador no anidado y con un elemento "mensaje" sin anidar



Nota. Fuente: elaboración propia.

En sí, haciendo una revisión minuciosa de cada pantalla, no se encontraron errores, pero si alertas; todas las que se encontraron se corrigieron exitosamente. Sin embargo, el error de compilación persistió.

(b) Segundo posible desacierto: puede que se hayan cargado muchos recursos al servidor, como imágenes, y esto esté ocasionando el error al momento de compilar.

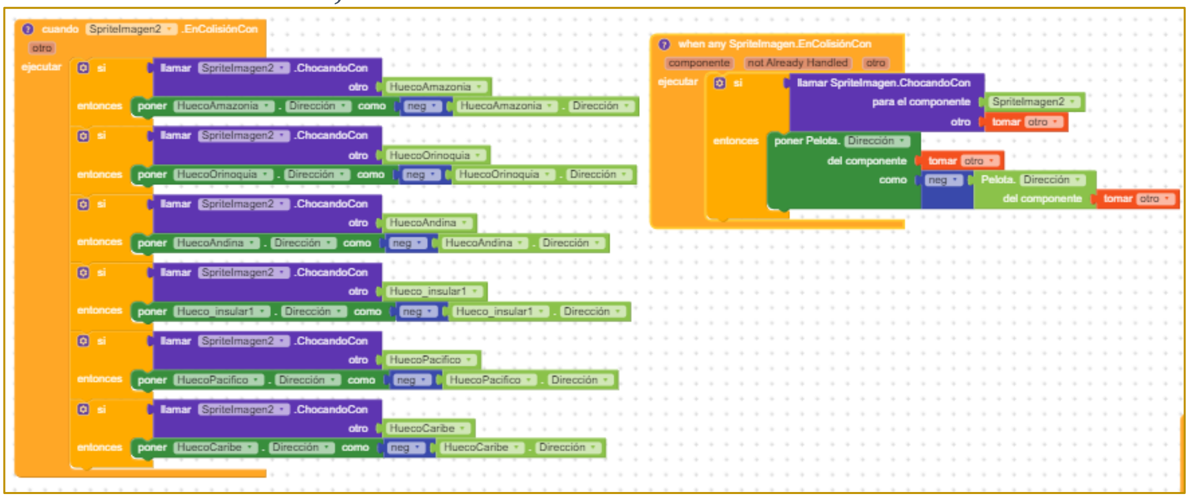
Para sanear este aspecto se creó una base de datos auxiliar en la que por categorías se colocaron varias de las imágenes dispuestas en la aplicación para "descongestionar", si era ese el caso, el servidor de *Kodular*; para ser un poco más descriptivas, se eliminaron las imágenes propiamente del servidor para la aplicación *Ealgebrapp*, pero para que todo quedara de la misma manera, en cuanto se inicia cada pantalla se "llama" a la base de datos y a cada componente de imagen se le asigna su foto correspondiente que está alojada en la base de datos en la nube y ya no en el servidor. No obstante, el error persistió.

(c) Tercer posible desacierto: es factible que la cantidad de bloques sea muy alta y esto le impida a la plataforma compilar adecuadamente la aplicación.

Se reconoce que al momento de programar hay diversas maneras de ejecutar una misma acción o procedimiento, cuando la autora inició a programar utilizaba procedimientos más largos atendiendo a su saber en ese momento, pero poco a poco fue descubriendo y aprendiendo acerca de otros procedimientos que permiten hacer el código algo más simple, por ejemplo, en la Figura 42, en la parte izquierda hay un bloque que contiene otros componentes, en total contado cada "ficha" se sabe que hay 37 bloques funcionando allí, mientras que en el código que hay a la derecha contando cada "ficha" hay 10 bloques; inmediatamente se ve la simplicidad y la cantidad de bloques que se "ahorran". Ahora bien, entrando un poco más en materia la acción que se deseaba ejecutar era que: cuando cualquier pelota chocara con cierta imagen, rebotara; por lo que en un primer momento se programó de manera independiente el choque de cada pelota con la imagen, pero se identificó que hay un componente con el que se puede programar lo que sucederá con todas las pelotas al mismo tiempo y el mismo componente identifica cuál es la pelota en cuestión, luego la acción en el bloque queda simplificada a que si cualquier pelota se choca con la imagen entonces debe rebotar.

Figura 42

Dos maneras distintas de ejecutar la misma acción

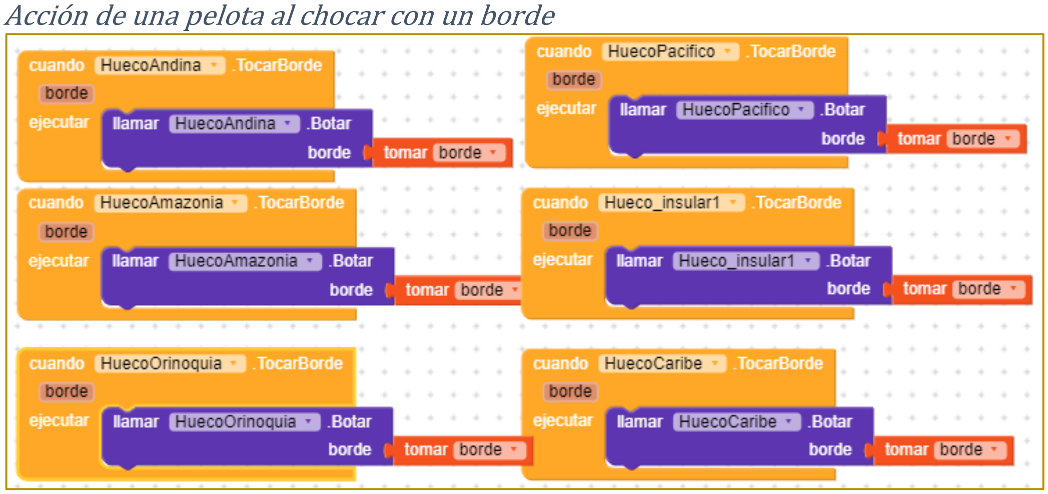


Nota. Fuente: elaboración propia.

Otro ejemplo similar se puede evidenciar cuando hay elementos que ejecutan acciones similares, por ejemplo, vea la Figura 43, la acción a ejecutar es que cuando la pelota toque un borde debe rebotar, nuevamente, se realiza por separado para cada pelota. En la revisión final se evidencia que se puede simplificar como se muestra en la Figura 44, la acción allí es que cuando cualquier pelota choque con un borde debe rebotar; de esta manera se pasa de tener 18 bloques a 4.

Figura 43

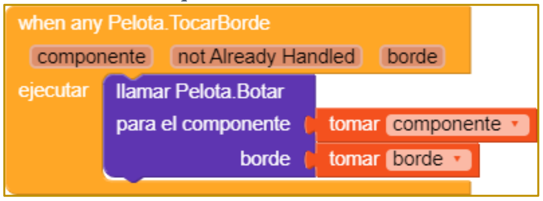
Acción de una pelota al chocar con un borde



Nota. Fuente: elaboración propia.

Figura 44

Acción de una pelota al chocar con un borde - simplificado



Nota. Fuente: elaboración propia.

Los dos ejemplos presentados anteriormente, son simples en comparación con otras “reducciones” que se lograron realizar revisando cada pantalla, por lo que se disminuyó en la medida de las posibilidades una cantidad significativa de bloques en total. Sin embargo, el problema persistió, razón por la que se decidió restringir la aplicación. Para cumplir con los propósitos del trabajo se presenta, en la aplicación, un conjunto de tareas que posibilitan el desarrollo del pensamiento algebraico en relación con el primer modo de pensamiento y específicamente con el estudio de las operaciones en el terreno usual; la aplicación lograda se puede descargar como se mencionó en la sección 3.3.

Conclusiones

Se lograron identificar y describir los elementos propios de *EA* y su presencia en el currículo escolar colombiano, lo cual permitió corroborar que sí es un enfoque propicio para la enseñanza del álgebra en el primer ciclo de la educación primaria.

Al revisar en la literatura se encuentran hasta cinco concepciones del estudio del álgebra, pero en el marco de este trabajo se logran destacar dos principales:

(1) Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética – Aritmética generalizada y
(2) Álgebra como estudio de funciones.

Incluyendo en el primer modo de pensamiento algunos otros que se denominaron sub – modos de pensamiento algebraico, por considerarlos más específicos, estos son:

1. Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones en el terreno usual.
2. Estudio de algunas operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones.
3. Estudio de relaciones de equivalencia y orden.
4. Estudio y generalización de patrones.

Lo cual se considera un aporte a la Educación Matemática.

De acuerdo con la forma en que se diseñaron las tareas, sus elementos, dimensiones y objetivos específicos, los elementos del currículo y de *EA* que se tuvieron en cuenta, se puede afirmar que se logró diseñar una aplicación que permite promover el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes del primer ciclo de educación primaria; no obstante, este trabajo solo abordó el diseño de las tareas y su disposición en una aplicación, el siguiente paso es ponerla a prueba.

Como futura licenciada, se reconoce la importancia de que los estudiantes se muevan en tareas abiertas, lo cual implica otro tipo de interacciones, pues la aplicación se ve limitada porque no puede procesar exactamente qué o cómo comunica el estudiante lo que piensa; luego, resulta pertinente pensar si este tipo de tareas solo se pueden abordar de manera "presencial" o si hay otro tipo de herramientas – tecnologías que permitan desarrollar tareas abiertas de manera autónoma.

Se resalta que no todas las tareas se diseñaron con el mismo "formato"; por ejemplo, para el primer y segundo sub – modo de pensamiento; además de tener en cuenta los elementos, dimensiones de las tareas, se propusieron tres momentos (1) ambientación, (2) profundización e (3) institucionalización. Por otra parte, para el tercer sub – modo se organizaron por niveles de dificultad: fácil, medio y difícil. Esto se realizó para que las tareas se tornaran amigables, previniendo la monotonía y reconociendo las posibles habilidades de los usuarios; esto emergió el momento de diseñar las tareas, pues no se habían contemplado estas variables en el marco de referencia.

Como se mostró en la parte final de la metodología, la autora logró poner en juego las competencias adquiridas durante su tránsito por la Licenciatura en Matemáticas en espacios académicos como Introducción a los Lenguajes de Programación al crear *Ealgebrapp* en la plataforma *Kodular*; además de adquirir nuevos conocimientos acerca de las herramientas con las que cuenta esta plataforma que permite como educadores apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Uno de los asuntos más relevantes para destacar en este trabajo atiende a que el diseño de las tareas es una fase fundamental, pero disponerlas en un aplicativo conlleva otros asuntos que muchas veces no son considerados, como la compilación, la capacidad del programa, por lo que resulta importante tener un equilibro con la cantidad de tareas que se quieren proponer o de manera previa diseñarlas y esbozar sus requerimientos programáticos para elegir de manera más idónea la plataforma de programación; es así como, para este caso se considera que *Kodular,* a pesar de tener tantas ventajas, limitó el tamaño de la aplicación. Además, es importante ser más conscientes de todo lo que implica no solo diseñar las tareas, sino también disponerlas en un aplicativo pues esto conlleva bastante tiempo, conocimiento e incluso requeriría de trabajo interdisciplinar.

Con todos los elementos presentados en el marco de referencia y el diseño de las tares respondiendo a esos elementos, hubiese sido posible la ejecución de todas las tareas para todos los modos de pensamiento; sin embargo, esto superó los alcances de tiempo en un trabajo de este tipo, por lo que se considera fundamental fijar metas más reales en relación con el tiempo, conocimientos y herramientas disponibles; por estos motivos queda en proyección una segunda parte de *Ealgebrapp* en donde se compilen todas las tareas en atención a los modos de pensamiento.

Referencias

Aguayo-Arriagada, C., Flores, P., & Moreno, A. (2018). Concepto de objetivo de una tarea matemática de futuros maestros. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 990–1011. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a12

Agudelo, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. Aula Urbana *(37), 18-19.*

Agudelo Valderrama, C. (2017). *Dos enfoques de enseñanza en el inicio del trabajo algebraico escolar*.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., Ortiz, A., Riviere, V., & da Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Síntesis.

Arteaga, B., & Macías, J. (2005). *Didáctica de las matemáticas en educación infantil*. UNIR.

Brango, J., & Rojas, C. (2016). *Aplicación para dispositivos móviles Android: Una propuesta para el desarrollo de habilidades en el proceso de generalización* [Tesis de especialización, Universidad Pedagógica Nacional]. http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/149/TO-19979.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bressan, A., & Gallego, M. (2010). El proceso de matematizacion progresiva. *Correo del Maestro*, *num. 168*, 5–21.

Cardona, L., & Guevara, C. (2017). *Mathgame: Acercamiento al proceso de generalización a través de un videojuego*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 53–59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1–13.

Chamorro, M. del C. (2005). Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil. En *Colección Didáctica Infantil*. PEARSON.

Clements, D., & Sarama, J. (2015). Otros dominios del contenido. En *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad*.

Cruz, I., & Puentes, A. (2012). Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica. *Edmetic, 1*(2), 128-144.

Fraleígh, J. B. (1988). *Algebra Abstracta Primer Curso*. https://www.academia.edu/16484289/Algebra_Abstracta_Primer_Curso_-_John_B._Fraleígh

García, S. (2011). *Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional].

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación M*, *11*(1), 77–88.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *14*(2), 203–231.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Gómez, P., Mora, M., & Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197–268).

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, *14*(2), 198–214. https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751

Huertas, D., & Sandoval, F. (2020). *Hacia la generalización de patrones: Una cartilla para la tercera edad*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

Kaput, J. (2000). *Trasforming algebra from a engine of inquity to an engine of mathematical power by "Algebrafying" the k-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng Fong, S. (2016). Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching. En *Springer Open*. Springer.

Luque, C., Mora, L., & Torres, J. (2014). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Clasificar, medir e invertir*. Universidad Pedagógica Nacional.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (2014). *Rutas hacia el álgebra y raíces del álgebra*. Universidad del Tolima.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 220–254. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0316

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Competencias: Matemáticas. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias: Matemáticas. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Recuperado de: https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento variacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de granada].

Molina, M, & Cañadas, M. (2018). La noción de estructura en early algebra. *Enseñar matemáticas, homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz*, 129–141.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. *EIEM 2011*, 27–51. http://funes.uniandes.edu.co/1615/1/molina2011EIEM.pdf

Montes, S. (2012). Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pac-man. En *Tesis de maestría*. http://bdigital.unal.edu.co/7739/1/sergioandresmontesalarcon.2012.pdf

Mora, L., & Torres, J. Unidad 2. Introducción, pensamiento numérico y sistemas numéricos. Tema 1. El proceso de clasificar y los conjuntos. Curso: Taller de Educación Matemática I.

Resolución de problemas. Licenciatura en Educación Básica Primaria. Publicado en el Moodle de UPN Virtual.

Moss, J., & London McNab, S. (2011). *An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation* (Número January, pp. 277–301). https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16

Luque, C., Jiménez, H., & Ángel, J. (2013). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables.* Universidad Pedagógica Nacional.

Navarro, M. (2014). *"El mundo de las secuencias " Un aplicativo dirigido a niños de 4 a 8 años para iniciarlos en el proceso de generalización*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educacion Matematica*, *33*(1), 153–180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), La actividad matemática en el aula (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0501_02

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2010), 37–62.

Ríos, N. (2020). *Desarrollo de procesos de generalización por medio de un videojuego*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

Rojano, T., & Shutherland, R. (2001). Arithmetic world—algebra world. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, 515–522.

Ruiz, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. *Investigación en Educación Matemática XIV*, *XIV*(Anthropologic Theory of the Didactic), 545–556.

Saavedra, J., & Tocarruncho, D. (2018). *Una exploración del potencial para impulsar el desarrollo del pensamiento algebraico, de una innovación curricular que hace énfasis en la identificación de estructura Matemática*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional].

Sepúlveda, O. (2016). *U Niversidad N Acional De C Olombia*.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (Vol. 148). http://funes.uniandes.edu.co/8434/1/sobre_la_emergencia_del_pensamiento_algebraico_temprano0ay_su_desarrollo_en_la_educacion_primaria.pdf

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números*, 77, 5-34.*

UNESCO. (2013). Enfoques estratégicos sobre las TICs en educación en América Latina y el Caribe.*Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe,* http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/ticsesp.pdf

Usiskin, Zalman. “Conceptions of School Algebra and Uses of Variables.” In Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM’s School-Based Journals and Other Publications, edited by Barbara Moses, pp. 7–13.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en aula*. Editorial UD.

Anexos

Anexo 1

Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética: Estudio de las operaciones, propiedades de las operaciones, expresiones y ecuaciones en el terreno usual.

<table>
<tr><th colspan="3">¿Cómo apoyar el aprendizaje?</th></tr>
<tr><td colspan="3">

Ayude a la niña o niño a comprender los enunciados, inicialmente puede ser un trabajo dispendioso.
Mantenga un dialogo dirigido para ayudarlo a explicar o justificar verbalmente su pensamiento.
Es ideal que se fundamente en las relaciones que puede establecer entre los números para responder las preguntas; aunque inicialmente no sea así, ayude a transitar a medida que avanza en la tarea, están diseñadas con ese propósito.

</td></tr>
<tr><th colspan="3">Flujo de aprendizaje</th></tr>
<tr><td colspan="3">Ambientación→Profundización→Institucionalización

En el apartado de ambientación siempre aparecerá una sola pregunta que consiste en identificar la veracidad o falsedad de una igualdad cerrada, para continuar con el apartado de profundización en el que aparecen algunas preguntas que pretenden involucrar al estudiante con la propiedad o no propiedad en un contexto semirreal, para que posteriormente, en el apartado de institucionalización logre analizar la veracidad o falsedad de diferentes tipos de igualdades o sentencias.</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con la tarea en sí misma</th></tr>
<tr><th>Tipo de tarea</th><th>Duración</th><th>Contexto</th></tr>
<tr><td>Problema</td><td>15 - 20 minutos</td><td>Semirreal</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con el objeto matemático</th></tr>
<tr><th colspan="3">Contenido EA</th></tr>
<tr><td colspan="3">

Uso de variables para determinar una incógnita.
Comprensión de distintos tipos de relaciones entre números.

</td></tr>
<tr><th>Estándar asociado</th><th colspan="2">DBA asociado</th></tr>
<tr><td>Reconozco y describo equivalencias entre expresiones numéricas.</td><td colspan="2">

Reconoce el signo igual como una equivalencia.
Argumenta sobre situaciones numéricas en las que aparecen datos desconocidos para definir sus posibles valores.
Identifica y utiliza propiedades de los números para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas.
Utiliza las propiedades de las operaciones en diferentes contextos.

</td></tr>
<tr><th>Objetivos de aprendizaje</th><th>Habilidades</th><th>Actitudes</th></tr>
<tr><td>Descubrir que:

$a+b=b+a$
$a-b\neq b-a$
$a*b=b*a$
$a+(b+c)=(a+b)+c$
$a-(b-c)\neq(a-b)-c$
$a*(b*c)=(a*b)*c$
$a-b+b=a$

</td><td>

Resolver problemas aditivos y multiplicativos.
Explicar cómo funciona cada una de las propiedades o no propiedades en cuestión.

</td><td>Interés por ayudar a resolver situaciones en contextos semireales haciendo uso de las propiedades o no propiedades.</td></tr>
</table>

Reconocer y utilizar las propiedades conmutativa, asociativa y tamaño de la adición, sustracción y multiplicación.		

Tarea 1: Propiedad conmutativa de la suma

Ambientación:

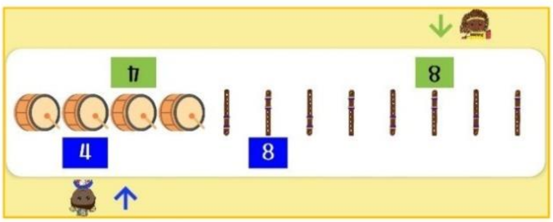
Observa la siguiente igualdad: $a + b = b + a$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

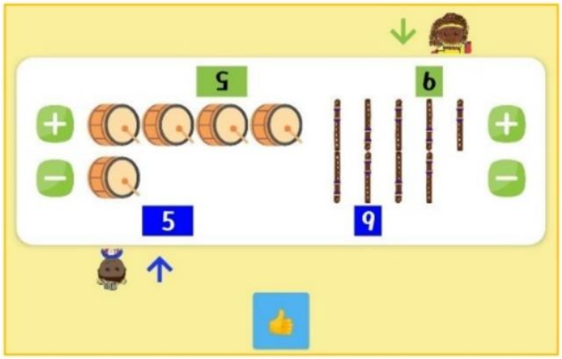
Martín y Antonia pertenecen a la banda marcial de un colegio en el Chocó, este fin de semana deben presentarse en el Valle del Cauca con todo el grupo porque están participando en un concurso de música a nivel regional. Como ambos estudiantes han presentado un alto grado de responsabilidad y autonomía, el profesor les pidió el favor de organizar y alistar algunas flautas de carrizo y algunas tamboras.



1. Para saber el número de instrumentos que tienen a su cargo, los niños hacen las cuentas así:

   Antonia: $8 + 4 =$. Llevamos en total instrumentos.
   Martín: $4 + 8 =$. Llevamos en total instrumentos.
   Completa los valores que hacen falta.

2. ¿Por qué crees que a los dos les dio el mismo número de instrumentos si realizaron procesos distintos?
   a. Porque es lo mismo sumar $8 + 4$ que $4 + 8$.
   b. Porque al sumar les da el mismo resultado.
3. Ahora, supón que tú eres el profesor 👨‍🏫 o la profesora 👩‍🏫 de Antonia y Martín, da clic en los botones ➕ o ➖ para aumentar o disminuir el número de flautas de carriza y tamboras que les pedirías el favor de alistar. Cuando sobre la mesa se vea lo que les pedirás alistar, presiona la manita con el pulgar arriba.



Cuando se presiona el botón mencionado en la instrucción anterior en la tabla se disponen automáticamente los números y el estudiante debe escribir los valores que hacen falta. Se debe repetir el mismo procedimiento dos veces más, cambiando cada vez el número de instrumentos sobre la mesa.

4. Antonia no está de acuerdo con los procedimientos que realizó Martín y Martín no está de acuerdo con los procedimientos que realizó Antonia. Como tú estás de profe, explícales si tiene o no sentido que peleen seleccionado alguno de los siguientes argumentos.
   a. Antonia es quien tiene la razón, pues solamente sumando primero el número de flautas y después el número de tamboras se encuentra la respuesta correcta.
   b. Martín es quien tiene la razón, pues solamente sumando primero el número de tamboras y después el número de flautas se encuentra la respuesta correcta.
   c. Los dos tienen razón, no importa en cuál orden se realiza la suma, el resultado será el mismo.

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad:
   a. $\quad + b = b + a$
   b. $a + b = \quad + a$

   Descubre cuál es el número secreto de manera que la igualdad sea verdadera.
2. Observa la siguiente igualdad:

   $a + b = b + e$

   ¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No

Tarea 2: No conmutatividad de la sustracción

Ambientación:

Observa la siguiente sentencia: $a - b = b - a$

1. ¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

Top de cinco cosas que tal vez no sabías de las tortugas marinas 🐢:

1. Todos los años iniciando el mes de septiembre, en Bahía Solano nacen muchas tortuguitas que se van hacia el mar del Pacífico colombiano.
2. Imagínate que las tortugas no tienen vínculos parentales, eso significa que los adultos no cuidan a las crías, ponen los huevitos en un nido debajo de la arena de la playa y el calor del sol es el que ayuda a encubar los huevos.
3. Cuando nacen deben desplazarse del nido al mar; es una corta, pero arriesgada travesía porque los depredadores aprovechan para alimentarse de las crías; por esa razón, las tortugas adultas depositan entre 65 y 180 huevos por nido y pueden anidar varias veces en el año.
4. Las tortugas son muy importantes para el mar porque algunas son depredadoras de medusas, si hubiera muchas medusas la vida marina se vería afectada.
5. Hay varias especies de tortugas marinas que están en peligro de extinción por dos razones; la primera, por la depredación de los huevos por parte de humanos y animales; y la segunda, por la contaminación de la mar causada por el plástico.

La empresa "Limpiemos el mar" es un lugar en el que desde hace tres años se tomó la iniciativa de recoger parte del plástico que llega al mar cuando no reciclamos, esta empresa busca reducir el impacto ambiental para que el número de tortugas que mueren a causa de la contaminación disminuya al menos un poquito □.

En la siguiente tabla, podremos ver la capacidad de toneladas de plástico que la empresa está en capacidad de recolectar al año versus la capacidad recolectada al año.

Año	Capacidad anual de la empresa para la recolección de toneladas de plástico	Toneladas de plástico que se recolectaron anualmente
Primero	580	437
Segundo	600	478
Tercero	620	563

Se puede ver en la tabla que el número de toneladas de plástico que se recolectaron en cada año siempre fue menor que el número que toneladas de plástico que la empresa tenía capacidad de recolectar.

Se desea analizar si la empresa ha ido mejorando o desmejorando con respecto a la capacidad que tiene; para ello, Alicia y Cecilia preparan un informe. Quien logre ilustrar correctamente el comportamiento de la empresa obtendrá un bono 💵.

1. Ayúdales, a Alicia y a Cecilia, a encontrar los números faltan, recuerda que puedes utilizar el tablero auxiliar o la calculadora.

Informe realizado por Alicia

Año	Cantidad de toneladas de plástico que la empresa estaba en capacidad de recolectar menos la cantidad de toneladas de plástico recolectadas.	Cantidad de toneladas de plástico faltantes para haber utilizado toda la capacidad que tenía la empresa.
1	580 - 437	?
2	600 - 478	?
3	620 - 563	?

Informe realizado por Cecilia

Año	Toneladas de plástico recolectadas menos la cantidad de toneladas de plástico que la empresa estaba en capacidad de recolectar.	Cantidad de toneladas de plástico faltantes para haber utilizado toda la capacidad que tenía la empresa.
1	437 - 580	?
2	478 - 600	?
3	563 - 620	?

2. ¿Crees que los dos informes presentan la misma información?
   a. Sí
   b. No

Si las dos alternativas son iguales, significa que los resultados a los que llegó cada una para cada año son iguales, es decir:

$$143 = -143$$

$$122 = -122$$

$$57 = -57$$

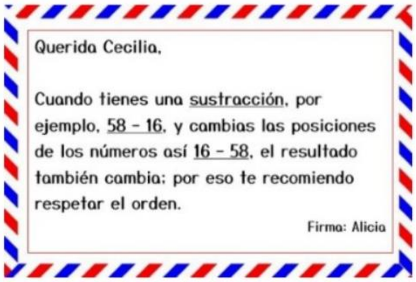
Y como ves, las cifras de la derecha tienen un signo menos que las antecede, cuando esto se da decimos que los números son negativos, mientras que los de la izquierda decimos son números positivos.

¿En qué se diferencian?

a. Alicia realiza las sustracciones correctamente, mientras que Cecilia invierte el orden de los números, por eso sus resultados son unos números distintos , llamados números negativos.
b. Cecilia realiza las restas correctamente, mientras que Alicia invierte el orden de los números, por eso sus resultados son unos números distintos , llamados números negativos.

3. ¿Quién ganó el bono ?
   a. Alicia
   b. Cecilia
4. A propósito de los informes ¿será que siempre importa el orden al momento de hacer la sustracción entre dos números distintos? Completa los siguientes ejemplos:
   a. $a - b = \boxed{\cdot}$ y $b - a = \boxed{\cdot}$
   b. $c - d = \boxed{\cdot}$ y $d - c = \boxed{\cdot}$
   c. $e - f = \boxed{\cdot}$ y $f - e = \boxed{\cdot}$
5. ¿Importa el orden para la sustracción?
   a. No, porque los resultados siempre son iguales.
   b. No se sabe, porque algunas veces los resultados son iguales y otras no.
   c. Sí, porque los resultados siempre son distintos.

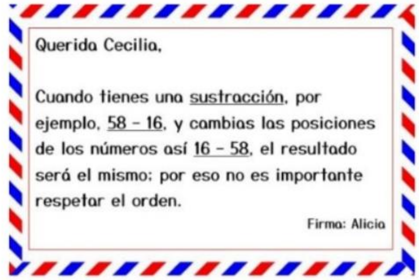
6. Cecilia quiere aprender de su error y Alicia le escribió una carta para ayudarla ¿cuál carta escribió Alicia?



Querida Cecilia,

Cuando tienes una sustracción, por ejemplo, 58 - 16, y cambias las posiciones de los números así 16 - 58, el resultado también cambia; por eso te recomiendo respetar el orden.

Firma: Alicia



Querida Cecilia,

Cuando tienes una sustracción, por ejemplo, 58 - 16, y cambias las posiciones de los números así 16 - 58, el resultado será el mismo; por eso no es importante respetar el orden.

Firma: Alicia

Institucionalización:

Observa la siguiente sentencia y selecciona el argumento que apoyas:

$$a - b = b - a$$

a. Es verdadera porque se cumple que $a - b$ da el mismo resultado que $b - a$.
b. Es falsa porque no se cumple que $a - b$ da el mismo resultado que $b - a$.

Tarea 3: Propiedad conmutativa de la multiplicación

Ambientación:

1. Observa la siguiente sentencia: $a * b = e * a$
   ¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No

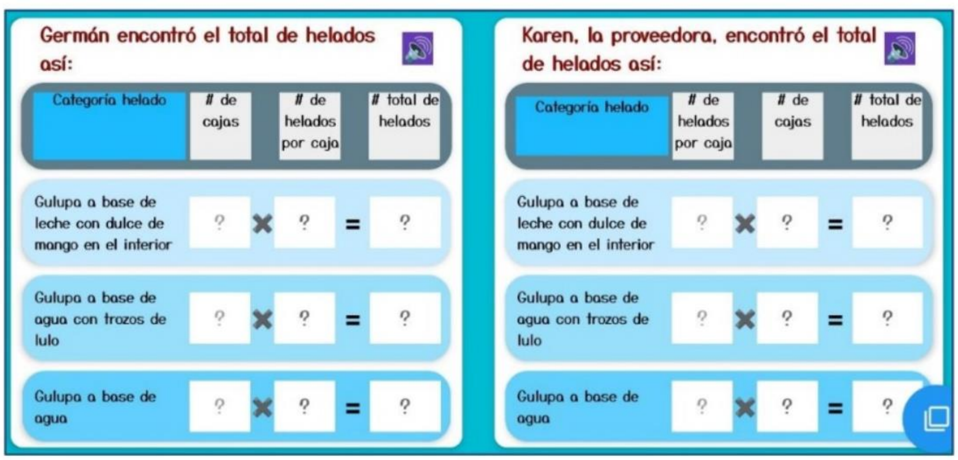
Profundización:

La gulupa es una de las frutas más apetecidas en el pacífico colombiano, por ello, Yaila, fundó una empresa que vende distintos tipos de helado en los que el sabor principal es la gulupa y los vende por toda la región. En la siguiente tabla podrás encontrar los distintos tipos de helado que ofrece:

Tipo de Helado
Gulupa a base de leche
Gulupa a base de leche con dulce de mango en el interior
Gulupa a base de agua
Gulupa a base de agua con trozos de lulo

Germán, un tendero, compró 2 cajas de 25 helados de gulupa a base de leche con dulce de mango en el interior, 3 cajas de 10 helados de gulupa a base de agua con trozos de lulo y 2 cajas de 10 helados de gulupa a base de agua.

Tanto el tendero como la proveedora necesitan saber la cantidad total de helados por categoría para hallar el precio final, ayúdalos a completar las casillas que están en blanco:



Karen le muestra su tabla a Germán para que dé el visto bueno y puedan calcular el costo de los helados. Germán la comienza a revisar, se da cuenta de que ambos han realizado procedimientos distintos, pero el número total de helados es el mismo y se pregunta ¿cómo es esto posible?

Ayuda a Germán seleccionando una de las siguientes explicaciones.

a. Germán multiplicó el número de cajas por el número de helados, mientras que Karen multiplicó el número de helados por el número de cajas; ambos obtuvieron los mismos resultados porque en estas multiplicaciones no importa si cambiamos el orden de los números.

b. Germán multiplicó el número de helados por el número de cajas, mientras que Karen multiplicó el número de cajas por el número de helados; ambos obtuvieron los mismos resultados porque en estas multiplicaciones no importa si cambiamos el orden de los números.

c. ¡Esto es pura casualidad! No siempre sucede que al invertir el orden de los números en una multiplicación den el mismo resultado.

En las multiplicaciones de los helados y las cajas no importaba el orden ¿será que en otras multiplicaciones el orden si cambia el resultado?

Tira los dados y completa la tabla:

Dado 1	*	Dado 2	=	
Dado 1	*	Dado 2	=	
Dado 1	*	Dado 2	=	

Dado 2	*	Dado 1	=	
Dado 2	*	Dado 1	=	
Dado 2	*	Dado 1	=	

Ahora sí respondamos la pregunta ¿será que en otras multiplicaciones el orden si cambia el resultado?

a. Sí, porque con el juego de los dados vimos que los resultados fueron distintos.
b. No, porque con el juego de los dados vimos que los resultados fueron iguales.

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad: $\quad * b = a * b$
   Descubre cuál es el número secreto de manera que la igualdad sea verdadera.
2. Observa la siguiente igualdad: $a * b = \quad * b$
   Descubre cuál es el número secreto de manera que la igualdad sea verdadera.
3. Observa la siguiente igualdad: $a * b = b * a$
   ¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No

Tarea 4: Propiedad asociativa de la adición

Ambientación:
Observa la siguiente igualdad: $a + b + c = d + c \ (d = a + b)$
¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:
¿Recuerdas la fábrica de helados de gulupa?
La gulupa es una de las frutas más apetecidas en el pacífico colombiano, por ello, Yaila, fundó una empresa que vende distintos tipos de helado en los que el sabor principal es la gulupa y los vende por toda la región. En la siguiente tabla podrás encontrar los distintos tipos de helado que ofrece:

Tipo de Helado	Costo por unidad

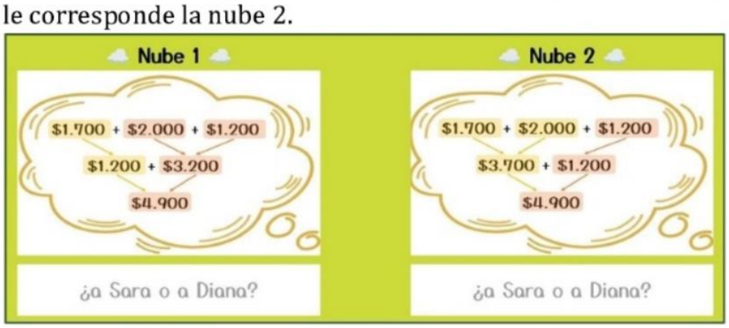
Gulupa a base de leche	$ 1.700
Gulupa a base de leche con dulce de mango en el interior	$ 2.000
Gulupa a base de agua	$ 1.200
Gulupa a base de agua con trozos de lulo	$ 2.000

1. Adrián, Alejandro y Sara, fueron a una sede de la empresa, y compraron helados para cada uno como se muestra en la siguiente tabla:

Nombre	Tipo de helado	Costo
Sara	Gulupa a base de leche	$ 1.700
Adrián	Gulupa a base de leche con dulce de mango en el interior	$ 2.000
Daniel	Gulupa a base de agua	$ 1.200

Hoy Sara invitó los helados, entonces se acercó a Diana, la tendera, para pagar con un billete de $5.000.

Diana dice: “1700 y 2000 son 3700, más 1200 son 4900. Serían 4900 pesos”
Sara dice: “2000 y 1200 son 3200, más 1700 son 4900. Am sí, Diana tiene razón”
De acuerdo con lo que dice cada una identifica a quién le corresponde la nube 1 y a quién le corresponde la nube 2.



2. ¿Sara alcanzó a pagar con el dinero que llevaba?
   a. Sí
   b. No
3. Después, Sara, Adrián y Alejandro fueron a la casa 🏠 por dinero 🤑 porque querían ir a la tienda de mascotas a comprarle algo a su gatica 🐈. Ya en la tienda, le compraron un collar de 15.000 pesos, una arena sanitaria de 30.000 pesos y unas galletas de 3.000 pesos.
   Nuevamente, Sara va haciendo sus cuentas mentalmente al igual que Sandra:

Teniendo en cuenta lo que plantea cada una, la igualdad: $45.000 + 3.000 = 15.000 + 33.000$, ¿es verdadera?

a. Sí

b. No

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad:

1	$a + \quad + c = d + c$	6	$\quad + c = a + b + c$
2	$a + b + c = d +$	7	$a + e = a + \quad + c$
3	$\quad + b + c = a + e$	8	$a + \quad = a + b + c$
4	$a + b + c = \quad + c$	9	$\quad + e = d + c$
5	$d + c = a + \quad + c$	10	$a + e = \quad + c$

Descubre cuál es el número secreto de manera que la igualdad sea verdadera.

2. Observa la siguiente igualdad

1	$a + b + c = d + c$ (v)
2	$d + b + c = a + e$ (f)
3	$d + e = a + b + c$ (f)
4	$a + e = a + b + c$ (v)
5	$a + e = d + c$ (v)

¿Es verdadera o falsa?

a. Verdadera

b. Falsa

Tarea 5: No asociatividad de la sustracción

Ambientación:

Observa la siguiente igualdad: $a - (b - c) = a - b - c$

¿Es verdadera o falsa?

a. Verdadera

b. Falsa

Profundización:

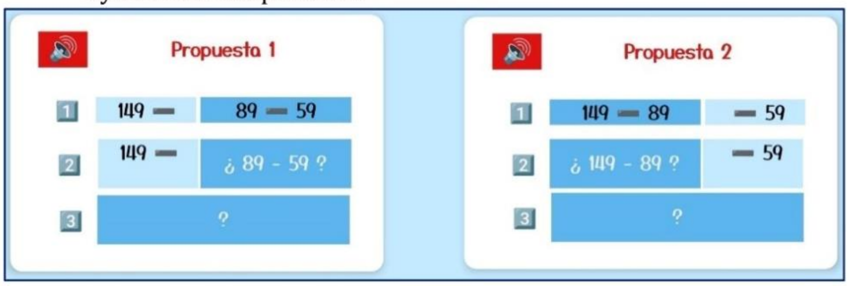
Recordemos el top 5 de las tortugas marinas:

1. Todos los años iniciando el mes de septiembre, en Bahía Solano nacen muchas tortuguitas que se van hacia el mar del Pacífico colombiano.
2. Imagínate que las tortugas no tienen vínculos parentales, eso significa que los adultos no cuidan a las crías, colocan los huevitos en un nido debajo de la arena de la playa y el calor del sol es el que ayuda a encubar los huevos.
3. Cuando nacen, deben desplazarse del nido al mar, es una corta, pero arriesgada travesía porque los depredadores aprovechan para alimentarse de las crías; por esa razón, las tortugas adultas depositan entre 65 y 180 huevos por nido y pueden anidar varias veces en el año.
4. Las tortugas son muy importantes para el mar porque algunas son depredadoras de medusas, si hubiera muchas medusas la vida marina se vería afectada.

5. Hay varias especies de tortugas marinas que están en peligro de extinción por dos razones, la primera es por la depredación de los huevos por parte de humanos y animales, la segunda por la contaminación de la mar causada por el plástico.

En septiembre del 2010, Abril, una tortuga de 25 años y llegó a la playa, puso 149 huevos y se fue, de esos huevitos 89 fueron el alimento de algunos cangrejos; los demás nacieron, pero en el trayecto del nido al mar 59 fueron el alimento de aves; el resto de tortugas llegaron al mar.

1. Para saber si la afirmación 3 del Top 5 de las tortugas es verdadera, Shani desea saber cuántas tortugas llegaron al mar, para ello sus amigos le presentaron dos propuestas, ayúdalos a completarlas:



2. ¿Las dos propuestas son iguales?
   a. Sí, porque en ambas se resta para encontrar el número de tortugas que llegaron al mar.
   b. No, porque ambas tienen resultados distintos.
3. En qué paso podemos ver que se comienza a hacer algo distinto
   a. Desde el primer paso ambas propuestas ya son distintas.
   b. En el paso dos porque agrupan distintos números.
4. ¿Qué podemos concluir de lo anterior?
   a. Cuando hay sustracción no se puede agrupar de cualquier manera porque el resultado será distinto.
   b. Cuando hay sustracción se puede agrupar de cualquier manera porque el resultado será igual.
5. ¿Cuál era la propuesta correcta?
   a. La propuesta 1
   b. La propuesta 2

Institucionalización:

Observa las dos siguientes igualdades:

$a - b - c = a - (b - c)$ y $a - b - c = a - (b - c)$

Una persona afirma que hay una igualdad verdadera y la otra es falsa. ¿Tú qué piensas al respecto?

a. La persona está en lo cierto, la primera es verdadera, mientras que la segunda es falsa.
b. La persona no está en lo cierto, ninguna de las dos igualdades es verdadera.
c. La persona está en lo cierto, la primera es falsa, mientras que la segunda es verdadera.

Tarea 6: Propiedad asociativa de la multiplicación

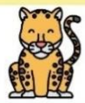
Ambientación:
Observa la siguiente igualdad: $a * b * c = \color{red}{d} * c$ donde $d = a * b$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

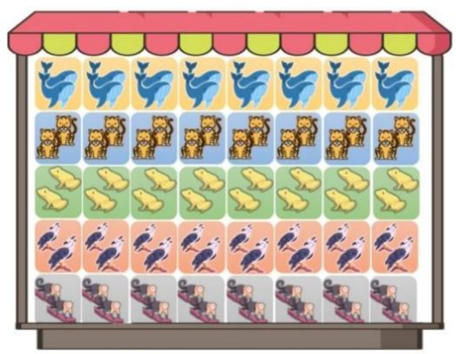
Profundización:

Danna es fundadora de una empresa que hace peluches para niños, la empresa está ubicada en Nariño y distribuye peluches por todo el pacífico colombiano. Inspirada en algunas de las especies más importantes de la región los peluches que Danna fabrica son:

Animal	Jaguar	Mono Titi	Ballena jorobada	Águila harpía	Rana dorada venenosa
Imagen					

Cuando los aprietas suenan como el animal real.

Resulta que hoy estarán en una feria mostrando los peluches y tienen promoción de 2x1, mira su estand:



Angie y Adrián son los encargados del estand para la feria de hoy, en este momento se están asegurando de que el número de peluches sea 80 como les indicó Danna. Angie está calculando en su mente el total de peluches, rápidamente Adrián dice: “son 80”. Angie está sorprendida por la agilidad que tuvo Adrián para encontrar el resultado, así que le preguntó cómo hizo.

1. Adrián le cuenta que se puede hacer de dos maneras, ayúdalo a completarlas:

Observando los números en el paso 1, sé que para mí lo más conveniente es agrupar 5 ✖ 2, porque eso es 10 y las multiplicaciones por 10 las puedo hacer fácilmente.

2. Teniendo en cuenta lo realizado por Adrián, la igualdad: $5 * 17 = 10 * 8$ ¿es verdadera?
   a. Sí
   b. No

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad:

1	$a * \quad * c = d * c$	6	$\quad * c = a * b * c$
2	$a * b * c = d *$	7	$a * e = a * \quad * c$
3	$\quad * b * c = a * e$	8	$a * \quad = a * b * c$
4	$a * b * c = \quad * c$	9	$\quad * e = d * c$
5	$d * c = a * \quad * c$	10	$a * e = \quad * c$

Descubre cuál es el número secreto de manera que la igualdad sea verdadera.

3. Observa la siguiente igualdad

1	$a * b * c = d * c$ (v)
2	$d * b * c = a * e$ (f)
3	$d * e = a * b * c$ (f)
4	$a * e = a * b * c$ (v)
5	$a * e = d * c$ (v)

¿Es verdadera o falsa?
   c. Verdadera
   d. Falsa

Tarea 7: Tamaño adición (parte 1)

Ambientación:
Observa la siguiente igualdad: $50 = 3 + 5$

¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No

Profundización:

Saúl prepara las mejores cocadas de todo el Chocó, son tan ricas que son muy famosas. A diario vende mínimo 300 cocadas y máximo ha vendido 350, así que siempre prepara 350 por si llega a venderlas todas.

1. Teniendo en cuenta esta información ¿sería correcto afirmar que en dos días Saúl habrá vendido más o menos 100 cocadas?
   a. Sí, porque puede que en el primer día haya vendido 50 y en el otro día 50, así en los dos días habría vendido 100.
   b. No, porque si mínimo vende 300 al día, cómo va a vender menos en dos días.
2. Saúl vende cada cocada a mil pesos, si el martes vendió 310 cocadas y el miércoles vendió 315 ¿sería correcto decir que recogió alrededor de 900.000 pesos en los dos días?
   a. Sí
   b. No

Institucionalización:
Observa la siguiente igualdad ¿es verdadera?:

1	$50 = 3 + 5$
2	$300 + 900 = 100$

a. Verdadera
b. Falsa

Observa la siguiente igualdad:

1	$500 + \_ = 100$
2	$100 = \_ + 900$

Encuentra el número secreto, que hace que la igualdad sea verdadera (después de dejar que el estudiante realice algunos intentos y se dé cuenta que no es posible se continúa).

¿Es posible encontrar un número que haga posible que la igualdad sea verdadera?

a. Sí
b. No

¿Cuál?

¿Por qué? Ayúdanos a organizar el argumento:

500 más otro número, será un número mayor o iguala 500, entonces no tiene sentido que el resultado sea un número más pequeño que 500. Por eso la igualdad es falsa (el argumento se mostrará en desorden).

Tarea 7: Tamaño sustracción (parte 2)

Ambientación:
Observa la siguiente igualdad: $20 - 10 = 30$

¿Es verdadera?
a. Sí
b. No

Profundización:

María fue al salón de belleza a cortarse el cabello, ella quiere solo quitarse las puntas. Su cabello tiene un largo de 100 cm aproximadamente, la estilista le cortó 10 cm porque tenía las puntas muy feas. Al terminar, le dice a María que se mire en el espejo y le cuente cómo siente que le quedó el cabello, pero María se mira y le dice: ¡Ay no! Me dejaste calva 😱.

Qué piensas de lo que dijo María, ¿es posible que haya quedado calva?

a. Sí
b. No

Institucionalización:

Observa la siguiente igualdad: $5 - 0 = 50$

a. Se puede asegurar que es verdadera porque en un lado de la igualdad está el 5 y el 0, al otro lado también.
b. Se puede asegurar que es falsa porque 5 es menor que 50.

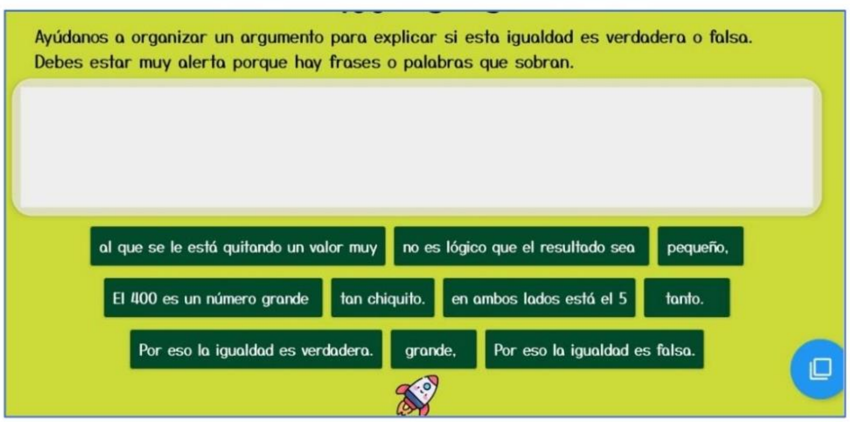
Observa la siguiente igualdad: $30 = 20 - ?$

Samuel dice que sin importar cuál número se coloque en donde está el signo de interrogación (?) la igualdad es falsa. ¿Qué opinas?

a. Samuel está equivocado, sí hay un número que hace que la igualdad sea verdadera.
b. Samuel tiene razón porque el 20 es menor que el 30, si le quitamos algo va a quedar más pequeño.

Observa la siguiente igualdad: $400 - 5 = 5$

Ayúdanos a organizar un argumento para explicar si esta igualdad es verdadera o falsa. Debes estar muy alerta porque hay frases o palabras que sobran.



Tarea 7: Tamaño multiplicación (parte tres)

Ambientación:

Observa la siguiente igualdad: $20 * 10 = 5$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

Elon tiene un carrito de empanadas con el que recorre todo el Pacífico colombiano, en su carrito podrás encontrar diferentes tipos de empanadas, las más vendidas son las empanadas de cangrejo , por hora se venden en promedio 15 empanadas. Si han pasado 5 horas

¿Es posible que Elon haya vendido alrededor de 20 empanadas de cangrejo?

a. Sí, es posible.
b. No es razonable.

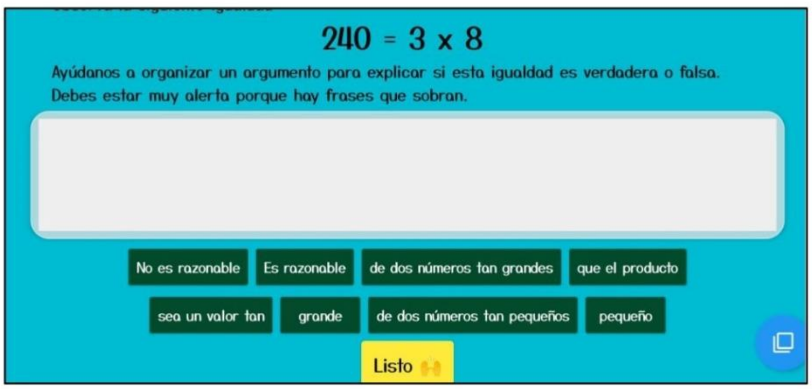
Institucionalización:

Observa la siguiente igualdad: $6 \times 5 = 5$

a. Se puede asegurar que es falsa 6 x 5 no es igual a 5.
b. Se puede asegurar que es verdadera porque en un lado de la igualdad está el 5, al otro lado también.

Observa la siguiente igualdad: $240 = 3 \ \times 8$

Ayúdanos a organizar un argumento para explicar si esta igualdad es verdadera o falsa. Debes estar muy alerta porque hay frases o palabras que sobran.



Tarea 8: complementariedad de la suma y la resta

Ambientación:

Observa la siguiente igualdad:

$a = a + b - b$

¿Es verdadera o falsa?

a. Verdadera
b. Falsa

Profundización:

Yirleid va a realizar una fiesta de cumpleaños para su hija Sofia, así que invitó a algunos familiares. Incluyendo a Yirleid y Sofía, en la reunión habrá 30 personas, de las cuales 25 confirmaron asistencia y 5 dijeron que tal vez asistirían.

Para el postre se quiere repartir helado a los invitados, así que Yirleid se contacta con la empresa de Yaila (la empresa de helados de gulupa) para pedir 25 helados surtidos, al colgar piensa en que las 5 personas que no confirmaron asistencia podrían llegar, por prevención llama nuevamente y solicita que añadan 5 helados surtidos a su factura. Justo después de colgar Sofía le avisa que los 5 invitados que estaban pendientes llamaron para avisar que finalmente no pueden asistir al evento. Nuevamente, Yirleid llama a la empresa y solicita retiren 5 helados de su factura.

1. Finalmente ¿cuántos helados llegarán a la casa de Yirleid?
   ____
2. Selecciona el argumento que con el que estés más de acuerdo:

a. En la primera llamada pidió 25 helados, luego agregó 5, $25 + 5 = 30$, iba 30 helados, luego quitó 5, así que $30 - 5 = 25$, entonces la cantidad de helados final es 25

b. Como primero pidió 25 y después llamó a agregar 5, pero los canceló, queda el pedido inicial, 25 helados

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad:

$a + b - b = a$	$a - b + b = a$
$a = a + b - b$	$a = a - b + b$
$a + b - b = e$	$a - b + b = e$

¿Es verdadera o falsa?

a. Verdadera

b. Falsa

2. ¿Se puede asegurar que siempre que a un número se le agrega otro y luego se le quita, queda el mismo número inicial?

a. Sí

b. No

Anexo 2:

Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética: Estudio de las operaciones o propiedades no usuales, expresiones y ecuaciones en el terreno usual

<table>
<tr><th colspan="3">¿Cómo apoyar el aprendizaje?</th></tr>
<tr><td colspan="3">

- Ayude a la niña o niño a comprender los enunciados, inicialmente puede ser un trabajo dispendioso.
- Mantenga un dialogo dirigido para ayudarlo a explicar o justificar verbalmente su pensamiento.
- Es ideal que se fundamente en las relaciones que puede establecer entre los números para responder las preguntas; aunque inicialmente no sea así, ayude a transitar a medida que avanza en la tarea, están diseñadas con ese propósito.

</td></tr>
<tr><th colspan="3">Flujo de aprendizaje</th></tr>
<tr><td colspan="3">

Ambientación→Profundización→Institucionalización

En el apartado de ambientación siempre aparecerá una sola pregunta que consiste en identificar la veracidad o falsedad de una igualdad cerrada, para continuar con el apartado de profundización en el que aparecen algunas preguntas que pretenden involucrar al estudiante con la propiedad o no propiedad en un contexto, para que posteriormente, en el apartado de institucionalización logre analizar la veracidad o falsedad de diferentes tipos de igualdades o sentencias haciendo uso de las relaciones que puede establecer entre los números.

</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con la tarea en sí misma</th></tr>
<tr><th>Tipo de tarea</th><th>Duración</th><th>Contexto</th></tr>
<tr><td>Problema</td><td>15 - 20 minutos</td><td>Semirreal - matemático</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con el objeto matemático</th></tr>
<tr><th colspan="3">Contenido EA</th></tr>
<tr><td colspan="3">

- Uso de variables para determinar una incógnita.
- Comprensión de distintos tipos de relaciones entre números.

</td></tr>
<tr><th>Estándar asociado</th><th colspan="2">DBA asociado</th></tr>
<tr><td>Reconozco y describo equivalencias entre expresiones numéricas.</td><td colspan="2">

- Reconoce el signo igual como una equivalencia.
- Argumenta sobre situaciones numéricas en las que aparecen datos desconocidos para definir sus posibles valores.
- Identifica y utiliza propiedades de los números para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas.
- Utiliza las propiedades de las operaciones en diferentes contextos.

</td></tr>
<tr><th>Objetivos de aprendizaje</th><th>Habilidades</th><th>Actitudes</th></tr>
<tr><td>

Descubrir que en Z_{12}:

- $a\oplus(b\oplus a) = (a\oplus b)\oplus a$
- $a\oplus(a\oplus b) \neq b\oplus a$
- $x\oplus(x\oplus y) \neq (x\oplus y)\oplus y$
- $x\oplus(y\oplus z) = z\oplus(x\oplus y)$
- $x\oplus(y\oplus z) \neq (y\oplus x)$

</td><td>

- Resolver problemas aditivos en Z_{12}
- Explicar cómo funciona cada una de las propiedades o

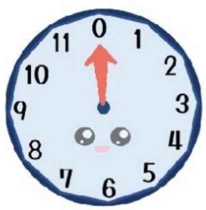
</td><td>Interés por ayudar a resolver situaciones en contextos semireales haciendo uso de las propiedades o no propiedades.</td></tr>
</table>

▪ $x\oplus(y\oplus z) = (y\oplus x)\oplus z$ ▪ $x\oplus(y\oplus z) \neq (x\oplus y)\oplus(x\oplus z)$ ▪ $(x\oplus y)\oplus(u\oplus v) = (x\oplus u)\oplus(y\oplus v)$ Reconocer y utilizar las propiedades listadas anteriormente.	no propiedades en cuestión.	Interés por aprender a sumar en el mundo de los relojes.

Tarea 1: Conociendo una nueva operación

Bienvenidas y bienvenidos al mundo de los relojes, en este mundo los relojes son quienes ponen las reglas.

Para iniciar, en este mundo solamente existen los números que se pueden ver en el reloj:



1. De la siguiente lista de números, selecciona TODOS los que NO pertenecen al mundo de los relojes:
   *vista

En la esquina inferior derecha ↘ encuentras un botón con un reloj, haciendo clic en él podrás ver el reloj; además haciendo clic en el botón ⊕ que está al lado del reloj puedes mover la manecilla. Puedes utilizarlo para responder algunas preguntas que se mostrarán más adelante.

2. ¿Qué sucede a medida que oprimes el botón ⊕?
   a. No sucede algo.
   b. La manecilla se mueve.
   c. La manecilla se mueve a la siguiente hora.

¿Has escuchado hablar de España?

Imagínate que este año Juliana tuvo la oportunidad de ir a estudiar un semestre en España, todo ha sido muy novedoso para ella, está muy feliz. A Juliana y a su familia les ha costado un poco comunicarse a horas adecuadas, pues en España el horario de verano es de 7 horas más con respecto a Colombia; es decir, mientras que en Colombia son las 12 del mediodía en España son las 7 de la noche.

3. Si la mamá de Juliana le quiere hacer una videollamada ¿cuál de las siguientes horas es la más prudente?
   a. A las 7 de la noche.
   b. A las 3 de la tarde.
   c. A las 10 de la mañana.

A la mamá y al papá de Juliana les encanta el fútbol, justamente están viendo los partidos de la Liga Española.

4. Usualmente los partidos de esta liga se transmiten en Colombia a las 2 de la tarde ¿A qué hora se juegan en España?

Angélica y Derly siempre han soñado con conocer la nieve, les parece algo mágico. Cuando un amigo del trabajo las escuchó hablar, les comentó que en Colombia hay muchos sitios que pueden visitar para cumplir su sueño, especialmente les recomendó el Parque Nacional Natural el Cocuy porque allí se concentra la mayor masa glaciar de Colombia.

Ambas están muy felices y sorprendidas porque no sabían que Colombia tenía lugares en los que hay nieve, así que rápidamente contactaron a una agencia de viajes y compraron un tour para el parque que les recomendó su amigo.

Mira su itinerario del primer día:

> Se inician actividades a las 9 de la mañana.
>
> i. Cada persona llega de manera independiente al municipio El Cocuy, para ser ubicados en su alojamiento (2 horas).
> ii. Cuando todas las personas estén ubicadas se hará un recorrido histórico por el municipio (4 horas).
> iii. Almuerzo (1 hora).
>
> Así finalizan las actividades del primer día.

5. Si solo se gastaron una hora alojando a las personas ¿A qué hora terminarían el recorrido histórico?
6. Si se gastaron las dos horas alojando a las personas ¿A qué hora terminarían el recorrido histórico?

Este es el itinerario del segundo día:

> Se inician actividades a las 8 de la mañana.
>
> i. Desayuno (1 hora).
> ii. Transporte en carro desde el Cocuy hasta la vereda el Carrilzal (1 hora).
> iii. Caminata de 8 kilómetros ida y vuelta hasta el mirador Cerro de Mahoma (3 horas).
> iv. Transporte desde la vereda el carrizal hasta el Cocuy (1 hora).
> v. Almuerzo en el municipio (1 hora).
> vi. Taller artesanal (2 horas).
>
> Así se finalizan las actividades del segundo día.

7. ¿A qué hora finalizarían las actividades del segundo día?

El itinerario del tercer y último día es:

> Este día se inician actividades a las 6 de la mañana.
>
> i. Desayuno (1 hora).
> ii. Transporte en carro desde el Cocuy hasta la Kanwara (2 horas).
> iii. Recorrido ida y vuelta al glaciar del Ritacuba Blanco (8 horas).

iv.	Transporte en carro desde la Kanwara hasta el cocuy (2 horas).
v.	Cena (1 hora).
Así se finalizan las actividades del tercer día.	

8. ¿A qué hora terminarán el recorrido de ida y vuelta al glaciar?
9. ¿A qué hora se terminan las actividades del día 3?
10. Ahora hagamos algunas sumas del mundo de los relojes, recuerda que el símbolo para sumar en el mundo de los relojes es $\oplus$.
    Resuelve: $a \oplus b = \boxed{\cdot}$
    En cuanto el usuario resuelva 10 sumas de manera acertada pasará a la siguiente pregunta.
11. ¿Se te ocurre alguna manera de hacer las sumas en el mundo de los relojes sin necesidad de utilizar el reloj? Piénsalo

Tarea 2: ¿En el mundo de los relojes se cumple la elasticidad?

Ambientación:

Observa la siguiente igualdad: $a \oplus (b \oplus a) = (a \oplus b) \oplus a$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

1. Queremos identificar si algunas igualdades son verdaderas o falsas, para ello haremos las sumas del mundo de los relojes y comprobaremos:

$a \oplus (b \oplus a)$	=	$(a \oplus b) \oplus a$
$a \oplus$__	=	__$\oplus a$
	=	

2. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos el mismo número significa que:
   a. La igualdad es falsa.
   b. La igualdad es verdadera.
   c. No significa algo.
3. Hagamos un ejemplo más

$a \oplus (b \oplus a)$	=	$(a \oplus b) \oplus a$
$a \oplus$__	=	__$\oplus a$
	=	

4. Pensemos ¿habrá algún par de números con los que la igualdad se vuelva falsa?
   a. Sí
   b. No

   ¿Cuáles?

   Ayúdanos a organizar un argumento que explique por qué no.

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad: $a \oplus (b \oplus a) = (a \oplus b) \oplus a$
   ¿Es verdadera?
   a. Sí

b. No
2. Observa la siguiente igualdad:

$\oplus(b\oplus a) = (a\oplus b)\oplus a$	$a\oplus(\quad \oplus a) = (a\oplus b)\oplus a$
$a\oplus(b\oplus a) = (\quad \oplus b)\oplus a$	$a\oplus(b\oplus a) = (a\oplus \quad)\oplus a$

Descubre el número secreto que hace que la igualdad sea verdadera.

Tarea 3: ¿En el mundo de los relojes se cumple la Identidad I de Stein?

Ambientación:

Observa la siguiente igualdad: $a\oplus(a\oplus b) = b\oplus a$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

1. Identifiquemos si la siguiente igualdad es verdadera o falsa completando los espacios:

$a\oplus(a\oplus b)$	=	$b\oplus a$
$a\oplus$__	=	___
___	=	___

2. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos números distintos significa que:
   a. La igualdad es falsa.
   b. La igualdad es verdadera.
   c. No significa algo.
3. Hagamos un ejemplo más

$a\oplus(a\oplus b)$	=	$b\oplus a$
$a\oplus$__	=	___
___	=	___

4. ¿Solamente observando la igualdad podremos saber si es verdadera o falsa?
   a. Sí
   b. No
   Completa el argumento

   Reto: lee atentamente los dos argumentos y selecciona el que creas que es correcto.

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad: $a\oplus(a\oplus b) = b\oplus a$
   ¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No
2. Observa la siguiente igualdad:

$\oplus(a\oplus b) = b\oplus a$
$a\oplus(a\oplus b) = \quad \oplus a$

   Supón que en el espacio del número secreto colocamos el número a ¿la igualdad sería verdadera?

Tarea 4: ¿En el mundo de los relojes se cumple la Identidad I de Schröder?

Observa la siguiente igualdad: $x\oplus(x\oplus y) = (x\oplus y)\oplus y$

¿Es verdadera?

a. Sí

b. No

Profundización:

1. Identifiquemos si la siguiente igualdad es verdadera o falsa completando los espacios:

$x\oplus(x\oplus y)$	=	$(x\oplus y)\oplus y$
$x\oplus$___	=	___$\oplus y$
___	=	___

2. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos números distintos significa que:
   a. La igualdad es falsa.
   b. La igualdad es verdadera.
   c. No significa algo.
3. ¿Solamente observando la igualdad podremos saber si es verdadera o falsa?
   c. Sí
   d. No
   Completa el argumento

   Reto: lee atentamente los dos argumentos y selecciona el que creas que es correcto.

Institucionalización:
Observa la siguiente igualdad:

$x(\quad y) = (xy)y$	Si en el lugar del número secreto colocamos el número x ¿la igualdad es verdadera? Ayúdanos a organizar el argumento.
$x(xy) = (x \quad)y$	Si en el lugar del número secreto colocamos el número y ¿la igualdad es verdadera? Ayúdanos a organizar el argumento.

Tarea 5: ¿En el mundo de los relojes se cumple la elasticidad Asociativa cíclica I?

Observa la siguiente igualdad: $x\oplus(y\oplus z) = z\oplus(x\oplus y)$
¿Es verdadera?
a. Sí
b. No

Profundización:

1. Queremos identificar si algunas igualdades son verdaderas o falsas, para ello observa la siguiente igualdad y completa los espacios vacíos:

$x\oplus(y\oplus z)$	=	$z\oplus(x\oplus y)$
$x\oplus$___	=	$z\oplus$__
	=	

2. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos el mismo número significa que:
   a. La igualdad es falsa.
   b. La igualdad es verdadera.
   c. No significa algo.
3. Hagamos una suma más

$x\oplus(y\oplus z)$	=	$z\oplus(x\oplus y)$
$x\oplus$___	=	$z\oplus$__
	=	

4. Pensemos ¿habrá algún par de números con los que la igualdad se vuelva falsa?
   a. Sí
   b. No

¿Cuáles?
Ayúdanos a organizar un argumento que explique por qué no.

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad: $x\oplus(y\oplus z) = z\oplus(x\oplus y)$
   ¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No
2. Observa la siguiente igualdad:

$x\oplus(\quad \oplus z) = z\oplus(x\oplus y)$	$x\oplus(y\oplus \quad) = z\oplus(x\oplus y)$
$x\oplus(y\oplus z) = z\oplus(\quad \oplus y)$	$x\oplus(y\oplus z) = z\oplus(x\oplus \quad)$

   Descubre el número secreto que hace que la igualdad sea verdadera.

Tarea 6: ¿En el mundo de los relojes se cumple la Identidad de Abel – Graßmann I?

Observa la siguiente igualdad: $x\oplus(y\oplus z) = (y\oplus x)$

¿Es verdadera?

1. Sí
2. No

Profundización:

1. Observa atentamente la siguiente igualdad: $x\oplus(y\oplus z) = (y\oplus x)$

   Sara dice que es verdadera porque en ambas partes de la igualdad se ven y y x. ¿Crees que Sara tiene razón?

   a. Sí

   Compruébalo:

$x\oplus(y\oplus z)$	=	$(y\oplus x)$
$x\oplus$___	=	$(y\oplus x)$
___	=	___

   b. No

   Ayúdanos a organizar un argumento explicando por qué Sara no tiene la razón.

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad: $x\oplus(y\oplus z) = (y\oplus x)$
   a. Sí
   b. No
2. Observa la siguiente igualdad:

$x(\quad z) = (yx)$	Si en el lugar del número secreto colocamos el número y ¿la igualdad es verdadera? Ayúdanos a organizar el argumento.
$x(yz) = (y \quad)$	Si en el lugar del número secreto colocamos el número x ¿la igualdad es verdadera? Ayúdanos a organizar el argumento.

Tarea 7: ¿En el mundo de los relojes se cumple la Identidad de Abel – Graßmann II?

Ambientación:

Observa la siguiente igualdad: $x \oplus (y \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

1. Queremos identificar si algunas igualdades son verdaderas o falsas, para ello haremos las sumas del mundo de los relojes y comprobaremos:

$x \oplus (y \oplus z)$	=	$(y \oplus x) \oplus z$
$x \oplus$___	=	__$\oplus z$
	=	

2. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos el mismo número significa que:
   a. La igualdad es falsa.
   b. La igualdad es verdadera.
   c. No significa algo.
3. Hagamos un ejemplo más

$x \oplus (y \oplus z)$	=	$(y \oplus x) \oplus z$
$x \oplus$___	=	__$\oplus z$
	=	

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad: $x \oplus (y \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z$
   ¿Es verdadera?
   a. Sí
   b. No
2. Observa la siguiente igualdad:

$\quad \oplus (b \oplus a) = (a \oplus b) \oplus a$	$a \oplus (\quad \oplus a) = (a \oplus b) \oplus a$
$a \oplus (b \oplus a) = (\quad \oplus b) \oplus a$	$a \oplus (b \oplus a) = (a \oplus \quad) \oplus a$

   Descubre el número secreto que hace que la igualdad sea verdadera.

Tarea 8: ¿En el mundo de los relojes se cumple la Autodistributividad a izquierda?

Observa la siguiente igualdad: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus (x \oplus z)$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

1. Comprueba si la siguiente igualdad es verdadera o falsa:

$x \oplus (y \oplus z)$	=	$(x \oplus y) \oplus (x \oplus z)$
$x \oplus$___	=	__$\oplus$__
	=	

2. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos un número distinto significa que:
   a. La igualdad es falsa.
   b. La igualdad es verdadera.
   c. No significa algo.
3. Hagamos un ejemplo más

$x\oplus(y\oplus z)$	=	$(x\oplus y)\oplus(x\oplus z)$
$x\oplus$___	=	__$\oplus$__
	=	

4. Piensa en tres números cualesquiera del mundo de los relojes y escríbelos en su cajita correspondiente:

   ________ ________ ________

   En cuanto el usuario ingrese los valores se mostrará una tabla que relacione la no propiedad y los números para que, nuevamente, la complete.

$x\oplus(y\oplus z)$	=	$(x\oplus y)\oplus(x\oplus z)$
$x\oplus$___	=	__$\oplus$__
	=	

Institucionalización:

1. Observa la siguiente igualdad: $x\oplus(y\oplus z) = (x\oplus y)\oplus(x\oplus z)$
   ¿sin hacer cálculos, cómo explicas que la siguiente igualdad es falsa? Ayúdanos organizando el argumento.
3. Observa la siguiente igualdad:

$\oplus(y\oplus z) = (x\oplus y)\oplus(x\oplus z)$	Si en el lugar del número secreto colocamos el número y ¿la igualdad es verdadera? Ayúdanos a organizar el argumento.
$x\oplus(y\oplus z) = (\quad \oplus y)\oplus(x\oplus z)$	Si en el lugar del número secreto colocamos el número x ¿la igualdad es verdadera? Ayúdanos a organizar el argumento.

Tarea 10: ¿En el mundo de los relojes se cumple la Bisimetría?

Observa la siguiente igualdad: $(x\oplus y)\oplus(u\oplus v) = (x\oplus u)\oplus(y\oplus v)$

¿Es verdadera?

a. Sí
b. No

Profundización:

1. Comprueba si la siguiente igualdad es verdadera o falsa:

$(x\oplus y)\oplus(u\oplus v)$	=	$(x\oplus u)\oplus(y\oplus v)$
___$\oplus$___	=	___$\oplus$___
	=	

2. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos el mismo número significa que:
   a. La igualdad es falsa.
   b. La igualdad es verdadera.
   c. No significa algo.
3. Comprueba si la siguiente igualdad es verdadera o falsa:

$(x\oplus y)\oplus(u\oplus v)$	=	$(x\oplus u)\oplus(y\oplus v)$
___$\oplus$___	=	___$\oplus$___
	=	

4. Que en ambos lados de la igualdad obtengamos el mismo número significa que:
   a. La igualdad es falsa.

b. La igualdad es verdadera.
c. No significa algo.

5. ¿Será que siempre son verdaderas estas igualdades?
   a. Sí
      Ayúdanos a organizar el argumento en el que se explica por qué todas son verdaderas.
   b. No
      En las cajas de texto escribe cuatro números con los que creas que la igualdad se vuelve falsa:
      ______ _______ _______ __________
      Comprueba:

$(x \oplus y) \oplus (u \oplus v)$	$=$	$(x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$
$\_\_ \oplus \_\_$	$=$	$\_\_ \oplus \_\_$
	$=$	

Institucionalización:

Observa la siguiente igualdad:

$(\quad \oplus y) \oplus (u \oplus v) = (x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$	$(x \oplus y)(u \oplus v) = (\quad \oplus u) \oplus (y \oplus v)$
$(x \oplus \quad) \oplus (u \oplus v) = (x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$	$(x \oplus y) \oplus (u \oplus v) = (x \oplus \quad) \oplus (y \oplus v)$
$(x \oplus y) \oplus (\quad \oplus v) = (x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$	$(x \oplus y) \oplus (u \oplus v) = (x \oplus u) \oplus (\quad \oplus v)$
$(x \oplus y) \oplus (u \oplus \quad) = (x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$	$(x \oplus y) \oplus (u \oplus v) = (x \oplus u) \oplus (y \oplus \quad)$

Descubre el número secreto que hace que la igualdad sea verdadera.

Anexo 3:

Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética: Estudio de relaciones de equivalencia y orden

<table>
<tr><th colspan="3">¿Cómo apoyar el aprendizaje?</th></tr>
<tr><td colspan="3">▪ Ayude a la niña o niño a comprender los enunciados, inicialmente puede ser un trabajo dispendioso.
▪ Mantenga un dialogo dirigido para ayudarlo a explicar o justificar verbalmente su pensamiento.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Flujo de aprendizaje</th></tr>
<tr><td colspan="3">Nivel fácil→nivel medio→nivel difícil

Usualmente aparecerá una tarea con pocos elementos y posteriormente este número irá aumentando, es así entre tareas y en la misma secuencia de tareas.</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con la tarea en sí misma</th></tr>
<tr><th>Tipo de tarea</th><th>Duración</th><th>Contexto</th></tr>
<tr><td>Problema</td><td>15 - 20 minutos</td><td>Semirreal - matemático</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con el objeto matemático</th></tr>
<tr><th colspan="3">Contenido EA</th></tr>
<tr><td colspan="3">▪ Experimentación con elementos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones.
▪ Seriación.
▪ Comprensión de distintos tipos de relaciones.</td></tr>
<tr><th>Estándar asociado</th><th colspan="2">DBA asociado</th></tr>
<tr><td>Reconozco y utilizo propiedades de las relaciones en diferentes contextos.</td><td colspan="2">Utiliza diferentes estrategias para agrupar o representar elementos en colecciones.</td></tr>
<tr><th>Objetivos de aprendizaje</th><th>Habilidades</th><th>Actitudes</th></tr>
<tr><td>Clasificar, seriar y comparar distintos elementos de una colección.</td><td>▪ Manejar el operador y y la negación.
▪ Identificar atributos de distintos objetos buscando clasificarlos u organizarlos.</td><td>Interés por clasificar colecciones de objetos atendiendo a algún atributo.</td></tr>
</table>

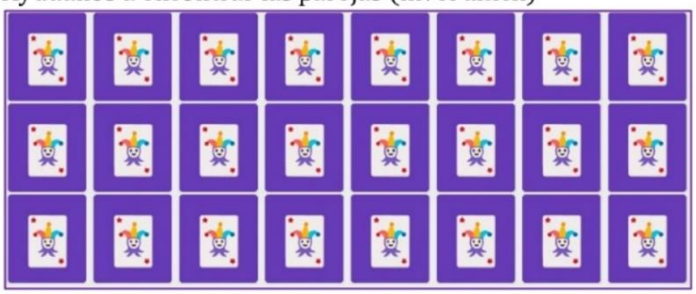
Clasificación

Tarea 1: ¿Qué tal está tu memoria?

1. Ayúdanos a encontrar las parejas (nivel fácil)

2. Ayúdanos a encontrar las parejas (nivel intermedio)

3. Ayúdanos a encontrar las parejas (nivel difícil)

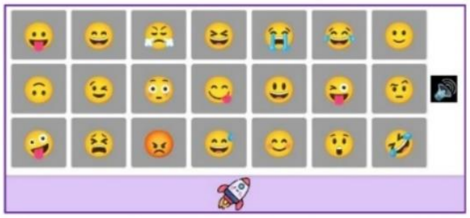


Tarea 2: Juguemos a veo veo

1. A continuación, encontrarás las caritas de cinco gatitos, oprimiendo el botón de sonido escucharás pistas para adivinar cuál carita vemos nosotros, cada vez que oprimas el botón escucharás una nueva pista. En el momento en el que estés segura o seguro de haber ganado el juego presiona durante algunos segundos la imagen ganadora.

2. Ahora, con la mirada selecciona una de las seis frutas que aparecen a continuación, te haremos algunas preguntas para adivinar cuál fue tu elección (las preguntas se relacionan con el color, uso, forma y tamaño).

3. A continuación, encontrarás 21 caritas, oprimiendo el botón de sonido escucharás pistas para adivinar cuál carita vemos nosotros, cada vez que oprimas el botón escucharás una nueva pista. En el momento en el que estés segura o seguro de haber ganado el juego presiona durante algunos segundos la carita ganadora.
   Al hace clic sobre la carita esta se oculta, cuando solo quede visible la carita que cumpla con todas las pistas, oprime el cohete.

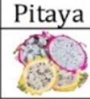


4. Ahora, con la mirada selecciona una de las 18 imágenes, te haremos algunas preguntas para adivinar cuál fue tu elección.

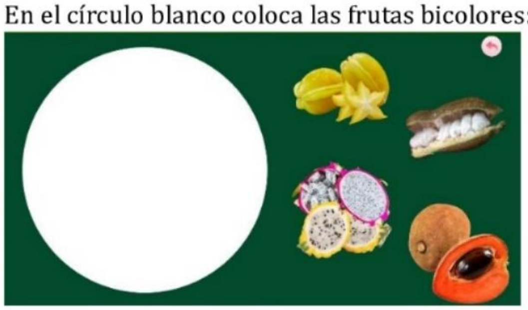
Tarea 3: Hablando de la Región caribe: frutas destacadas, economía flora y fauna

1. Mira y escucha el siguiente video

2. El Caribe colombiano produce gran variedad de frutas, te mostraremos algunas no tan conocidas:

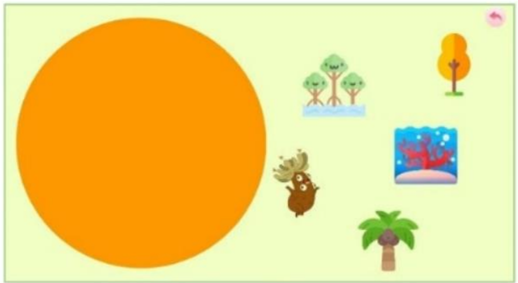
Guama	Pitaya	Zapote	Carambolo
			

En el círculo blanco coloca las frutas bicolores:



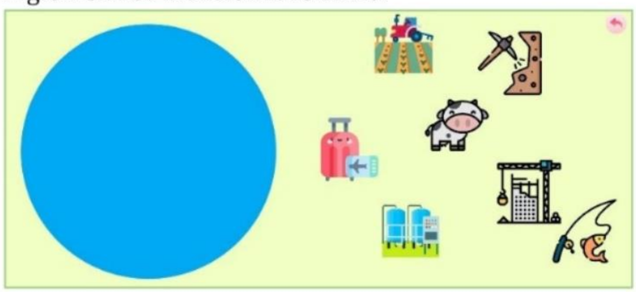
La flora es quizá la más biodiversa comparada con la de las demás regiones, gracias a los diferentes pisos térmicos en la región Caribe encuentras desde frailejones en los páramos de la Sierra Nevada, hasta especies únicas como los manglares y los arrecifes coralinos en las Islas Corales del Rosario y San Bernardo.

3. Todas las imágenes que aparecen a continuación representan parte de la flora de la región caribe. En el círculo anaranjado coloca la flora acuática:



La región Caribe sustenta su economía 🤑 con actividades como la agricultura 👩‍🌾👨‍🌾, la pesca 🎣 🎣, la ganadería 🐄🐄, la minería 👷‍♀️👷 y el turismo 🏨🏖.

4. En el circulo azul, coloca las imágenes asociadas con las actividades económicas de la región Caribe mencionadas antes:



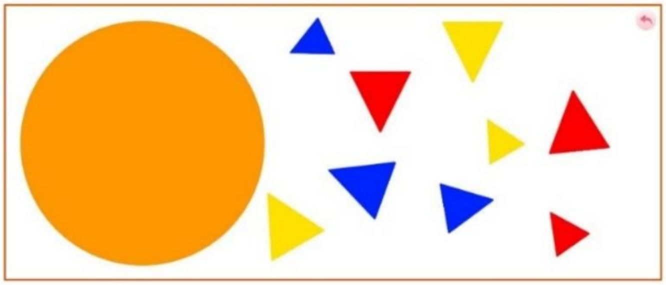
Gracias a los pisos térmicos de la región ☀ ⛅ ☁ ❄, la diversidad de animales también es representativa, entre los más destacados están: el tigrillo, el mico tití, el flamenco, la guacamaya, algunas serpientes, uno de los caimanes más grandes del mundo y el bocachico.

5. En el circulo negro, coloca los animales que tienen cuatro patas:

Tarea 4: Hablando de las figuras geométricas (selección y clasificación compuesta)

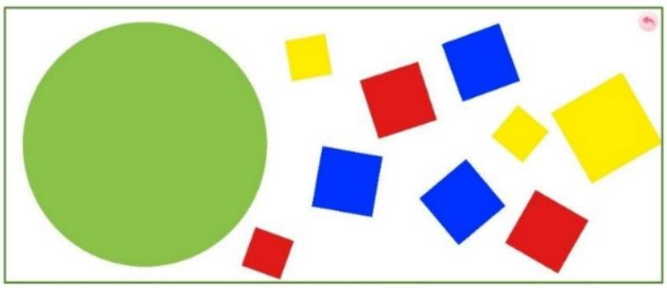
Un triángulo es una figura plana que tiene tres lados.

1. Todas las imágenes que aparecen a continuación representan triángulos, en el círculo anaranjado coloca los que son de color azul:

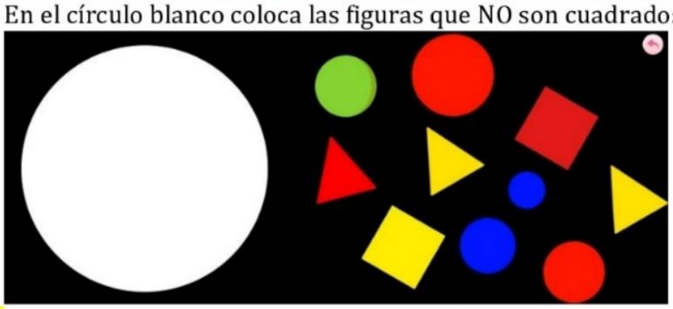


Los cuadriláteros son toda una familia de figuras planas que tienen cuatro lados, hay distintos tipos de cuadriláteros, uno de ellos es el cuadrado. El cuadrado es especial porque sus cuatro lados tienen la misma medida.

2. Todas las figuras que ves a continuación son cuadrados, hay de tres tamaños: grande, mediano y pequeño. Identifica cuál o cuáles son los más pequeños y guárdalos en el círculo azul:



3. En el círculo blanco coloca las figuras que NO son cuadrados o triángulos:



4. Ayúdanos a colocar cada figura geométrica en el espacio que le corresponde.

Color / Forma			

Tarea 6: Artesanías de la región Caribe y la tienda de Mónica (parte1)

1. Leer o escuchar:

Entre las artesanías más destacadas del Caribe colombiano se encuentran: el sombrero vueltiao, las mochilas y las hamacas de San Jacinto.

El sombrero vueltiao es uno de los elementos más representativos de nuestro país, se elabora con hojas de una palma llamada caña flecha.

Las mochilas más famosas son las wayuu y las arhuacas, son muy lindas y pueden tener patrones de colores o formas. A continuación, te contamos un poco más sobre cada una:

Mochilas wayuu: los Wayúu son un pueblo indígena que habita en la Guajira, gracias a ellos tenemos este este tipo de mochilas, las elaboran en crochet o con ganchillo y se pueden demorar hasta 20 días fabricando una sola; además, lo que hace diferentes a las mochilas Wayuu es lo coloridas que pueden ser.

Mochilas arhuacas: los Arhuacas son un pueblo indígena que habita en la Sierra Nevada de Santa Marta, gracias a ellos tenemos este este tipo de mochilas; son tejidas con lana de ovejo, por son de colores tierra (café, beige, gris y negro).

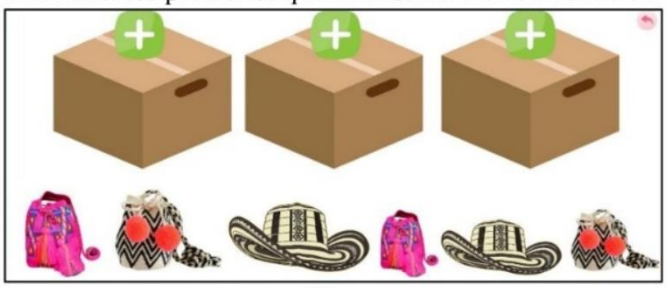
2. Mónica emprendió un negocio con las artesanías de las que hablamos antes, ella compró varios artículos y los almacenó en una caja que tenía en casa, su idea fue venderlos por internet. Siempre que Mónica va a organizar un pedido tarda muchísimo porque tiene que sacar todo lo que hay en la caja para poder encontrar lo que le han comprado, por esta razón ha decidido organizar la mercancía y compró dos cajas un poco más pequeñas para hacerlo
   ¿Cómo podemos organizar la mercancía para que Mónica ubique fácilmente al menos uno de los productos que tiene sin tener que revisar qué hay en cada caja abrir las cajas? A continuación, encuentras las cajas y los productos, deslizándolos podrás guardarlos como mejor te parezca teniendo en cuenta la pregunta anterior.

3. Trae una hoja y colores. Teniendo en cuenta la manera en la que organizaste las artesanías, diseña una pegatina para cada caja de manera que Mónica pueda identificar qué hay en cada una sin tener que abrirla, cuando termines oprime el botón azul, luego vuelve a la vista de las cajas.
   Sobre cada caja hay dos botones verdes con un +, haciendo clic en cada uno se activará tu cámara, tómale una foto al diseño correspondiente de la caja. Haz esto para ambas cajas y cuando termines presiona el avión.

Tarea 7: Artesanías de la región Caribe y la tienda de Mónica (parte2)

Sigamos ayudando a Mónica a organizar su mercancía.

1. Antes le ayudamos a organizar su mercancía en dos cajas, pero ya consiguió tres cajas un poco más pequeñas ¿Cómo podemos organizar la mercancía para que ubique fácilmente los productos que tiene sin necesidad de revisar cada caja?



2. Trae una hoja 🗋 y colores 🎨. Teniendo en cuenta la manera en la que organizaste las artesanías, diseña una pegatina para cada caja de manera que Mónica pueda identificar qué hay en cada una sin tener que abrirla, cuando termines oprime el botón azul, luego vuelve a la vista de las cajas.
   Sobre cada caja hay dos botones verdes con un +, haciendo clic en cada uno se activará tu cámara, tómale una foto al diseño correspondiente de la caja. Haz esto para ambas cajas y cuando termines presiona el avión.
3. Mónica consiguió seis cajas un poco más pequeñas ¿Cómo podemos organizar la mercancía para que ubique fácilmente los productos que tiene sin necesidad de revisar cada caja?

4. Trae una hoja 🗋 y colores 🎨. Teniendo en cuenta la manera en la que organizaste las artesanías, diseña una pegatina para cada caja de manera que Mónica pueda identificar qué hay en cada una sin tener que abrirla, cuando termines oprime el botón azul, luego vuelve a la vista de las cajas.
   Sobre cada caja hay dos botones verdes con un +, haciendo clic en cada uno se activará tu cámara, tómale una foto al diseño correspondiente de la caja. Haz esto para las seis cajas y cuando termines presiona el avión.
5. Tarea para la próxima sesión de estudio:
   a. Pide ayuda para acceder al siguiente enlace e imprimir el documento que aparece allí: https://drive.google.com/file/d/1OU6qe1ZllVe_AEpSQ7IaqhPl_71SiGG8/view?usp=sharing
   b. Recorta cuidadosamente cada tarjeta.

c. Prepara dos hojitas cuadradas que tengan como ancho 12 centímetros y de alto 12 centímetros.
d. Ten a la mano 12 cauchitos.

Tarea 8: Elecciones estudiantiles

1. ¿Sabes hacer sobres?
   Escucha y observa el siguiente video, allí te explicaremos cómo hacer uno.
2. Realiza dos sobres.
3. En el colegio de Amarú se está llevando a cabo el proceso de elección del representante estudiantil. Para la representación del primer ciclo de básica primaria, se postularon 3 estudiantes, veamos el tarjetón:

Además, en este colegio el representante trabaja de la mano con un secretario que se encarga de transmitirle ideas o inconformidades que tienen los estudiantes de este ciclo. Para el secretariado se postularon otros tres candidatos, veamos el tarjetón:

Te han elegido a ti para el conteo de los votos y el reporte de los candidatos ganadores a cada cargo, debes organizar los tarjetones para hacer el conteo.

Ten en cuenta los tipos de votos:

a. Voto no marcado: es un voto en el que no aparece alguna marca, por ejemplo:

b. Voto nulo: es un tarjetón en el que seleccionan más de una opción, por ejemplo:

c. Voto en blanco: la persona elije la casilla voto en blanco, por ejemplo:

d. Voto válido: aquel en el que solamente se ha seleccionado un candidato, por ejemplo:

Pasos para la organización de los tarjetones:

i. Primero te entregan dos bolsas para separar los tarjetones, organízalos de tal manera que sepas que hay en cada bolsa sin necesidad de abrirla.
ii. Ahora, te entregan 6 cauchitos y una de las bolsas, organiza los votos de tal manera que puedas contar:
   a. Los votos no marcados
   b. Los votos nulos
   c. Los votos en blanco
   d. Los votos para el candidato 1
   e. Los votos para el candidato 2
   f. Los votos para el candidato 3
iii. Ahora, te entregan otros 6 cauchitos y la otra bolsa, organiza los votos de tal manera que puedas contar
   a. Los votos no marcados
   b. Los votos nulos
   c. Los votos en blanco
   d. Los votos para el candidato 1
   e. Los votos para el candidato 2
   f. Los votos para el candidato 3

4. Finalmente, debes completar la información que hace falta en la tabla:

Elecciones estudiantiles

Representante					
Alaia	Sami	Nahuel	Votos en blanco	Votos nulos	Votos no marcados
?	?	?	?	?	?

Secretariado					
Ashanti	Karen	Juan	Votos en blanco	Votos nulos	Votos no marcados
?	?	?	?	?	?

Seriación y comparación

Tarea 1: Mensajes secretos y el cuanto de Marcelo

1. Andrés y Francesco son muy buenos amigos, desde pequeños inventaron una manera para comunicarse sin que otras personas los pudieran entender. Hoy se han texteado lo siguiente:

   Anímate a descubrir la manera en que se comunican este par de amigos, cuando lo logres presiona el cohete.
2. Completa el chat de Francesco y Andrés de manera que cualquier persona lo pueda leer fácilmente:

3. Ahora, un cuento: escucha atentamente la siguiente historia
   Marcelo perdió sus dientes
   (se escucha en la aplicación)
4. Ayúdanos a organizar cronológicamente lo que le pasó a Marcelo, al frente de cada frase encuentras una cajita de texto en la que debes escribir un número del 1 al 5, donde 1 fue lo primero que le pasó y 5 lo último:
   Cuando estaba comiendo un caramelo se le cayó un diente.
   Cuando se estaba comiendo un bombón un diente se le cayó.
   Cuando se estaba comiendo un helado dos dientes se le cayeron.
   Cuando fue a dar un paseo un balón lo golpeó y tres dientes se le cayeron.
   Cuando se fue a lavar los dientes ¡zas! Tres dientes se le cayeron.
5. En un mundo en el que se puede utilizar un botón para retroceder el tiempo, el final de la historia sería el comienzo, significa que al final Marcelo tendría sus 10 dientes ¡eh!

Ayúdanos a organizar el número de dientes que tenía Marcelo en cada momento si contáramos su historia al revés:
10, 9, 8, 6, 3, 3 y 0.

6. ¿Cómo te gustaría que finalice el cuento?
   a. Marcelo acepta que perdió todos sus dientes y ahora solamente toma sopa.
   b. Marcelo va al dentista y este le ayuda, ahora se siente mucho mejor.

Tarea 2: Figuras y números

Observa la siguiente colección de figuras:

1. ¿Cuántas figuras hay?
2. ¿Cuál de estas figuras tiene el mayor número de lados?
3. ¿Cuál de estas figuras tiene el menor número de lados?
4. De acuerdo con el número de lados, organiza las figuras de manera que en primer lugar quede la que tiene más lados y en último lugar la que menos lados tiene.

Observa la siguiente colección de números:

1. ¿Cuántos elementos tiene esta colección?
2. De todos los número que ves, selecciona solamente los que terminan en cinco.
3. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto formado por los números que terminan en cinco?
4. ¿Cuál es el menor de todos?
5. ¿Cuál es el mayor de todos?
6. Organiza los números del más pequeño al más grande.
7. Ahora, organízalos del más grande al más pequeño.

Tarea 3: Autos, animales y números

Observa los carros que guardaron hoy en el estacionamiento:

1. ¿Cuántos carros hay en esta zona de parqueo?
2. ¿De qué color es el carro que llegó primero a la zona de parqueo?
3. ¿De qué color es el último carro que llegó a la zona de parqueo??
4. El conductor del carro verde necesita sacar su auto del parqueadero, ayúdalo a hacerlo. Presionando cualquier carro aparecerá un control para que lo puedas mover.

¿Recuerdas algunos de los animales más representativos del caribe colombiano?

Te mostraremos su expectativa de vida promedio:

Especie	Tigrillo	Flamenco	Guacamayas	Tití
Años promedio de vida	17	40	50	13

1. ¿Cuál de todos tiene la expectativa de vida más baja?
2. ¿Cuál de todos tiene la expectativa más alta?
3. El caimán también es uno de los animales más representativos del Caribe colombiano. La expectativa de vida de un caimán es mayor a la expectativa de vida un tigrillo, pero menor a la de un flamenco, teniendo esto en cuenta, escribe “v” si crees que la frase es verdadera, si no, si crees que es falsa escribe “f”
   a. La expectativa de vida del caimán es menor a la del Tití.

b. La expectativa de vida del caimán es menor a la de las guacamayas.
4. Organiza a los animales de acuerdo con su expectativa de vida, puede ser de menor a mayor o de mayor a menor.

Escribe en las casillas vacías números que cumplan con las descripciones: El número que debe ir en la casilla 2, debe ser mayor al de la casilla 1; el número que debe ir en la casilla 3, debe ser mayor al número que hay en la casilla 2; el número que va en la casilla 4 debe ser mayor al que hay en la casilla 3; y el número de debe ir en la casilla 5 debe ser mayor al de casilla 4.

7 _ _ _ _

1. ¿Cómo es el número de la casilla 5 con respecto al de la casilla 1?
   a. Menor
   b. Igual
   c. Mayor
2. ¿Cómo logras identificar que el __ es mayor al __? Elige la explicación que creas correcta:
   a. Porque los números quedaron organizados de menor a mayor, entonces el último es mayor que todos los que están antes de él.
   b. Porque es obvio que el __ es mayor que el __.
   c. Porque los números quedaron organizados de mayor a menor, entonces el último es menor que todos los que están antes de él.

Hala la palanca:

1. ¿Cómo es el #1 con respecto al #2?
   a. Menor
   b. Igual
   c. Mayor
2. Cómo es el #2 con respecto al #3
   a. Menor
   b. Igual
   c. Mayor
3. Cómo es el #1 con respecto al número #3
   a. Menor
   b. Igual
   c. Mayor

Tarea 4: Simón dice ¿cuál es el número secreto?

Hoy tendrás la tarea de adivinar cuál es el número en el que estamos pensando:

1. Simón dice que encuentres el número que tiene dos cifras iguales, es mayor que el 26 y menor que el 50.
   21 30 56 58 33 25 22 63 66
2. Simón dice que encuentres un número que termina en 2 y es menor que el 15.
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
3. Simón dice que encuentres el número que es mayor que 5 y menor que 3+3+3
   3 6 9 12 15 18 21 24

4. Simón dice que encuentres un número cuya primer cifra es el cinco, es mayor que el 49 y menor que el 55.
   10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
5. Simón dice que encuentres un número mayor al 6+3 y menor que el 6+5.
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
6. Simón dice que encuentres un número que tenga más de una decena y menos de tres decenas.
   10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Tarea 5: ¿Es posible?

Hoy vamos a hablar de posibilidades:

1. Si Juana tiene 23 años y su hermano Andrés tiene 8 años menos es INCORRECTO afirmar que:
   a. Juana es mayor que Andrés.
   b. Andrés es mayor que Juana.
   c. Andrés tiene 8 años menos que Juana.
2. Si Marcela tiene 60 hojas de colores y Aurora tiene 61 es INCORRECTO afirmar que:
   a. Marcela tiene menos hojas que Aurora
   b. Aurora tiene más hojas que Marcela
   c. Aurora tiene menos hojas que Marcela
3. Observa la siguiente imagen:

   ¿Sería correcto afirmar que la figura verde tiene menos lados que la figura anaranjada?
   a. Sí
   b. No
   ¿por qué? Ayúdanos a organizar el argumento
4. Leonardo le dice a Dayana que el 50 es mayor que el 55, pero Dayana le dice que eso no es posible, que el 55 es mayor que el 50. Leonardo le dice que no importa, que cuando tienes dos números distintos, como el 50 y el 55, cualquiera de los dos puede ser el mayor o el menor.
   ¿estás de acuerdo con Leonardo?
   a. Sí
   b. No
   ¿por qué? Ayúdanos a organizar el argumento.
5. Observa la siguiente cadena de objetos:

a. ¿Cuántos objetos hay?
b. ¿Se podría afirmar que están organizados del más pequeño al más grande?
   Sí
   No
c. Elimina la cuchara infiltrada de manera que se pueda afirmar que las cucharas están organizadas de la más pequeña a la más grande.

6. Observa la siguiente cadena de objetos:

a. ¿Cuántos objetos hay?
b. ¿Se podría afirmar que están organizadas de alguna manera?
   Sí
   No
c. ¿Es posible meter la muñeca 1 en la muñeca 2?
d. Organiza las muñecas de manera que la que esté a la derecha sea más grande que la que está en la izquierda.

Anexo 4:

Álgebra como estudio de estructuras y relaciones que surgen de la aritmética: Estudio y generalización de patrones

<table>
<tr><th colspan="3">¿Cómo apoyar el aprendizaje?</th></tr>
<tr><td colspan="3">▪ Ayude a la niña o niño a comprender los enunciados, inicialmente puede ser un trabajo dispendioso.
▪ Mantenga un dialogo dirigido para ayudarlo a explicar o justificar verbalmente su pensamiento.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Flujo de aprendizaje</th></tr>
<tr><td colspan="3">observar→decir→escribir→verificar

En las tareas se pretende que el estudiante vaya transitando por cada fase, es decir, las preguntas están orientadas para que primero observe, posteriormente exteriorice lo que va pensando y lo “escriba” en la aplicación; así finalmente, podrá verificar y validar sus conjeturas.</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con la tarea en sí misma</th></tr>
<tr><th>Tipo de tarea</th><th>Duración</th><th>Contexto</th></tr>
<tr><td>Problema</td><td>15 - 20 minutos</td><td>Semirreal - matemático</td></tr>
<tr><th colspan="3">En relación con el objeto matemático</th></tr>
<tr><th colspan="3">Contenido EA</th></tr>
<tr><td colspan="3">▪ Comprensión de distintos tipos de patrones y relaciones.
▪ Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.
▪ Seriaciones a partir de patrones.</td></tr>
<tr><th>Estándar asociado</th><th colspan="2">DBA asociado</th></tr>
<tr><td>Reconozco y describo regularidades y patrones.</td><td colspan="2">▪ Opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes y utiliza las propiedades de las operaciones en contextos escolares o extraescolares.
▪ Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación.</td></tr>
<tr><th>Objetivos de aprendizaje</th><th>Habilidades</th><th>Actitudes</th></tr>
<tr><td>Utilizar procesos propios de la generalización de patrones: reproducir, identificar, extender, extrapolar y trasladar.</td><td>Transita asertivamente por las fases de la generalización a través de distintos tipos de secuencias.
Distingue regularidades y patrones.</td><td>Interés por identificar patrones de repetición o recurrencia en actividades cotidianas o en contextos matemáticos.</td></tr>
</table>

Tarea 1: La respiración

Como la serpiente:

1. Sigue los pasos que te listamos a continuación para respirar como una serpiente:
   a) Busca una silla y siéntate con la espalda recta.

b) Coloca tus manos sobre el estómago.
c) Ahora, toma aire por la nariz durante cuatro segundos:
d) Ahora deja salir el aire lentamente haciendo como una serpiente durante 5 segundos.
e) Repite este ejercicio 10 veces, puedes utilizar el reloj para que te ayude a contar los segundos.

2. ¿Cuáles son los dos pasos clave que repetimos varias veces para respirar como una serpiente?
   a) Buscar una silla y sentarnos con la espalda recta.
   b) Tomar aire durante cuatro segundos y expulsarlo durante cinco.
   c) Tomar aire durante cinco segundos y expulsarlo durante cuatro.
3. Completa la cadena de acciones teniendo en cuenta los pasos clave:
   *inhala4bota5, que complete un pedacito
4. Observa la cadena de acciones y en el espacio vacío coloca la acción que crees que debería ir.

Como los elefantes:

1. Sigue los pasos que te listamos a continuación para respirar como un elefante:
   a) Ponte de pie con las piernas un poco separadas.
   b) Coloca una de tus manos en el estómago y deja la otra suelta.
   c) Ahora, toma aire por la nariz durante 6 segundos, a medida que vas tomando aire debes subir la mano que dejaste suelta, esa será la trompa del elefante.
   d) Deja salir el aire durante 5 segundos haciendo como un elefante y ve bajando la trompa.
   e) Repite este ejercicio 10 veces, puedes utilizar el reloj para que te ayude a contar los segundos y la cantidad de repeticiones.
2. ¿Cuáles son los pasos clave para respirar como un elefante?
   a) Ponernos de pie y separar un poco las piernas.
   b) Tomar aire durante 6 segundos e ir subiendo la trompa del elefante; luego soltar el aire durante 5 segundos e ir bajando la trompa del elefante; y nuevamente tomar aire durante 6 segundos e ir subiendo la trompa del elefante.
   c) Tomar aire durante 6 segundos e ir subiendo la trompa del elefante, luego soltar el aire durante 5 segundos e ir bajando la trompa del elefante.
3. Completa la cadena de acciones teniendo en cuenta los pasos clave:
4. Observa la cadena de acciones y en el espacio vacío coloca la acción que crees que debería ir.

Dibujando:

1. Trae una hoja de papel y un color o lápiz.
2. Vas a dibujar el contorno de tu mano, cuando el lápiz vaya subiendo debes tomar aire por la nariz y cuando vaya bajando debes expulsar el aire por la boca. La idea es sincronizar el dibujo y la respiración, puedes ir a tu propio ritmo.
3. ¿Cuál son los pasos clave para sincronizar la respiración con el dibujo de la silueta de tu mano?
   a) Traer una hoja de papel y un color o lápiz.
   b) Tomar aire por la nariz y soltarlo por la boca.
   c) Tomar aire por la nariz cuando el lápiz sube e irlo soltando cuando el lápiz baje.

¿Cómo te sientes?

a) Normal.
b) Un poco relajada o relajado.

- Estas maneras de respirar pueden ser útiles para ti o cualquier persona que conozcas porque nos pueden ayudar a tranquilizarnos o también a concentrarnos.
  Selecciona las fichas y crea tu propia manera para respirar y relajarte:

¿Crees que hay algo parecido entre las maneras de respirar que vimos hoy?

a) Sí
b) No

¿En qué se parecen?

a) Siempre hay que tomar aire durante un tiempo y luego soltarlo.
b) Siempre hay que tomar aire durante un tiempo, sostenerlo y luego soltarlo.
c) Siempre hay que soltar aire durante un tiempo y luego tomarlo.

Tarea:

Para la siguiente sesión alista los siguientes materiales

a. Plastilina
b. Papel crepé
c. Una cartulina
d. Una hoja del color que más te guste
e. Un marcador

Tarea 2:

Te recordamos que para hoy debías tener estos materiales listos:
Plastilina, papel crepé, una cartulina, una hoja del color que más te guste, un marcador y colbón. ¿ya los tienes listos?

1. Observa y escucha el siguiente video:
2. ¿Cómo son las flores de la primer rama?
   a. Lisas porque son de plastilina.
   b. Arrugaditas porque se hicieron arrugando un pedacito de papel y convirtiéndolo en bolita.
3. ¿Cómo son las flores de la segunda rama?
   a. Lisas porque son de plastilina.
   b. Arrugaditas porque se hicieron arrugando un pedacito de papel y convirtiéndolo en bolita.
4. Si hiciéramos una sexta rama ¿de qué material y color deberían ser las flores?
   a. Plastilina tata
   b. Papel arrugado tata
5. Andrea dice que la séptima rama debería ser de color tata y con un material tata ¿estás de acuerdo?
   a. Si, porque tata
   b. No, porque tata
6. Andrés quiere hacer una manualidad igual a esta, ya hizo hasta el paso de las ramas, pero le faltan las flores. Explícale qué debe hacer:
   a. Para la primer rama, debe romper pedacitos de papel crepé, hacer bolitas y llenarla con esas bolitas; para la segunda rama, debe hacer bolitas de plastilina y

llenarla toda con esas bolitas; en las siguientes ramas repite el mismo procedimiento.

b. Para la primer rama, debe hacer bolitas de plastilina y llenarla toda con esas bolitas; para la segunda rama, debe romper pedacitos de papel crepé, hacer bolitas y llenarla con esas bolitas; en las siguientes ramas repite el mismo procedimiento.

Andrés está tratando de memorizar la explicación, así que decide repetir la siguiente cadena de palabras:

Papel-plastilina-plastilina-papel-papel

7. Si crees que es correcta presiona el cohete, si no, ayúdale a organizar las palabras y después presiona el cohete.

Tarea 3: El joropo

En el oriente del país encontramos los Llanos Orientales que hacen parte de la región Orinoquía. En esta región el joropo es uno de los bailes más representativos y cuando hay ferias y fiestas se hacen concursos de baile.

Para las ferias y fiestas que se aproximan varios grupos se están organizando, una de las cosas más importantes son los trajes para bailar. El grupo de Angélica decidió que el traje de la mujer sería de color anaranjado y con estampados de flores, así que fueron a encargarle 5 vestidos a la señora Aurora, ella es una experta en este tipo de vestidos.

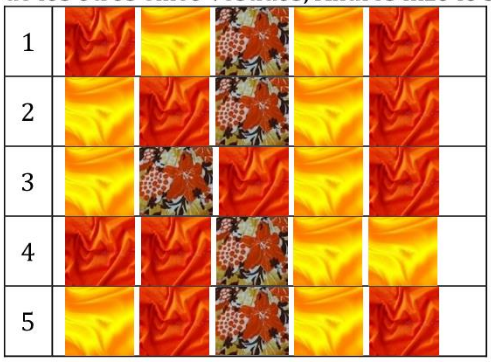
Aurora se imagina fabricar un vestido como el siguiente:

Fue a la fábrica de telas, allí le empacaron telas como las que te mostraremos a continuación:

1. ¿Todas las telas que le empacaron corresponden al vestido que Aurora va a diseñar?
   a. Sí
   b. No

Aurora cortó la tela y ahora la está organizando para dejar lista la de cada vestido:

Para que le rinda un poco más, le pidió el favor a su nieto Andrés de organizar las telas de los otros cinco vestidos, Andrés hizo lo siguiente:



2. ¿Todas las telas quedaron como indicó la abuelita?
   a. Sí
   b. No
3. Andrés es un poco distraído, identifica en qué lugar no organizó la tela como le indicó su abuelita y ayúdalo a organizarla correctamente.
4. La señora Aurora quiso agregar unas pulseras de cortesía, las comenzó a armar con algunos materiales que tenía en casa, pero en medio del proceso notó que le hacían falta algunos elementos, identifica cuales son y haz una lista para que Andrés vaya a comprarlos

Pulsera 1	❀✿ ❀✿ ❀✿ ❀___ ❀___ ❀___
Pulsera 2	🦋 ❁ 🦋 ❁ 🦋 ❁ 🦋 ❁ 🦋 ___ ___ ___
Pulsera 3	✾ ♥ ✾ ♥ ✾ __ ✾ __ ✾ __ ✾ ♥

Lista

❀
✿
🦋
❁
✾
♥

Tarea 4: La película

Observa las escenas:

Escena 1	Escena 2	Escena 3	Escena 4	Escena 5	Escena 6
Salto	Un aplauso	Salto	Dos aplausos	Salto	Tres aplausos

1. ¿Qué debería suceder en la escena 7?
   a. Debería hacer un salto.
   b. Debería aplaudir tres veces.
   c. Debería aplaudir cuatro veces.
   d. Ninguna de las anteriores.
2. ¿Qué debería hacer en la escena 8?
   a. Debería hacer un salto.
   b. Debería aplaudir tres veces.
   c. Debería aplaudir cuatro veces.
   d. Ninguna de las anteriores.

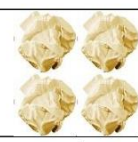
3. De acuerdo con lo que hemos venido realizando, completa lo que debería suceder en cada escena:

Escena 7	Escena 8	Escena 9	Escena 10	Escena 11	Escena 12
Salto	Cuatro aplausos	Salto			Seis aplausos

4. ¿Hay escenas que tienen algo en común?
   a. Sí
   b. No
5. Deja visibles únicamente las escenas en las que se hace un salto.
6. ¿El número de estas escenas tiene alguna particularidad?
   a. Sí
   b. No
7. ¿Cuál?
   a. Todos los números son impares.
   b. Todos los números son pares.
8. Ahora, deja visibles solamente las escenas en las que se aplaude.
9. ¿El número de estas escenas tiene alguna particularidad?
   a. Sí
   b. No
10. ¿Cuál?
   a. Todos los números son impares.
   b. Todos los números son pares.
11. Anímate a decir cuál debe ser el número de aplausos para la escena 30. ¿cómo lo sabes?
12. Anímate a decir qué se debería hacer en la escena 45 ¿cómo lo sabes?
13. ¿Cuál podría ser el nombre de la película?

Tarea 5: Bolitas de papel

1. Observa la siguiente secuencia

					
1	2	3	4	5	6

2. ¿Cuántas bolitas hay en la casilla 1?
3. ¿Cuántas bolitas hay en la casilla 2?
4. ¿Cuántas bolitas hay en la casilla 3?
5. ¿Cuántas bolitas hay en la casilla 4?
6. ¿Cuántas bolitas debería haber en la figura 5?
7. Realiza las 5 bolitas con un cuadrito de papel higiénico, tómale una foto seleccionado la casilla 5.
8. ¿Cuántas bolitas debería haber en la casilla 6?
9. Realiza las 6 bolitas con un cuadrito de papel higiénico, tómale una foto seleccionado la casilla 6.
10. Si existiera la casilla 9 ¿cuántas bolitas debería tener?
11. Si existiera la casilla 16 ¿cuántas bolitas debería tener?
12. Si existiera una casilla 21 ¿cuántas bolitas debería tener?

13. ¿Cómo harías para explicarle a otra persona el número de bolitas que de ir en la casilla número 30?
    Ayúdanos a organizar una carta.
14. ¿Cuál es el número de bolitas que deben ir en cualquier casilla?
    Ayúdanos a organizar el argumento.

Tarea 6: Productos curiosos

1. Realiza los siguientes cálculos y escribe sus resultados:

#	Factor 1	×	Factor 2	=	
1	3×6			=	18
2	33×66			=	2178
3	333×666			=	221778
4	3333×6666			=	22217778
5					

2. ¿Cuál debería ser la multiplicación en el renglón 5?

5		×	

3. ¿Cuál es el resultado de la multiplicación del renglón 5?
4. ¿El número de cifras de los dos factores siempre es igual?
5. ¿En todos los resultados aparece el 1 y el 8?
6. ¿Qué cambia entre el resultado del primer renglón y el segundo?
7. ¿Qué cambia entre el resultado del segundo renglón y el tercero?
8. ¿Qué cambia entre el resultado del tercer renglón y el cuarto?
9. ¿Qué cambia entre el resultado de cuarto renglón y el quinto?
10. ¿Encuentras algo parecido entre los resultados?
    a. Sí
    b. No
11. Sin utilizar la calculadora, encuentra el resultado de:

6	333333×66666	=	

12. Utiliza la calculadora para comprobar si el resultado es correcto
13. ¿Te dio igual?
14. ¿Cómo hacemos para saber cuál es el resultado sin utilizar la calculadora?
    Organiza el argumento
15. ¿Hay alguna regla para encontrar los resultados de las multiplicaciones?
    a. Sí
    b. No
16. Ayúdanos a completar las palabras para explicar la regla

Tarea 7: Las sumas de la tabla

Observa la siguiente tabla:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12
4	13	14	15	16
5	17	18	19	20
6	21	22	23	24
7	25	26	27	28

8	29	30	31	32

1. Encuentra la suma de los números de la primer fila, es decir: $1 + 2 + 3 + 4 =?$
2. Encuentra la suma de los números de la segunda fila, es decir: $5 + 6 + 7 + 8 =?$
3. Encuentra la suma de los números de la tercer fila, es decir: $9 + 10 + 11 + 12 =?$
4. Encuentra la suma de los números de la cuarta fila
5. ¿Cómo encontraste el resultado?
   a. Sumando
      Anímate a encontrar el resultado de otra manera ¿lo lograste?
   b. De otra manera
      ¿Se parece a alguna de estas opciones?
6. Encuentra la suma de los números de la séptima fila
7. Organicemos todos los resultados en una nueva tabla

Fila	Resultado de la suma
1	10
2	26
3	42
4	58
5	74
6	90
7	106
8	

8. ¿Utilizando esta última tabla, podrías decir cuál es la suma de los números de la fila 8?
   a. Sí
      ¿Cuál es la suma?
      ¿Cómo la hallaste?
   b. No
      ¿Cuántos números hay del 10 al 26?
      ¿Cuántos números hay del 26 al 42?
9. ¿Hay una regla para encontrar el resultado de la suma para cualquier fila?
   a. Sí
      ¿Con cuál de estas explicaciones te identificas?
   b. No
      ¿Te contamos un secreto? Sí hay una manera, sorprendente ¿no? Ahora, el reto es que la encuentres.

Tarea 8: Girasoles

Observa la siguiente tabla:

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

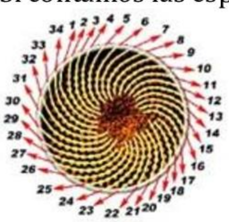
Los casillas de color indican la posición del número que está en la parte superior.

1. ¿Qué número está en la primer posición?
2. ¿Qué número está en la tercer posición?
3. ¿Qué número está en la cuarta posición?
4. ¿Qué número está en la novena posición?
5. ¿Cuál es la suma de los números que aparecen en la primera y segunda posición?
6. ¿Cuál es la suma de los números que aparecen en la tercer y cuarta posición?
7. ¿Cuál es la suma de los números que aparecen en la cuarta y quinta posición?

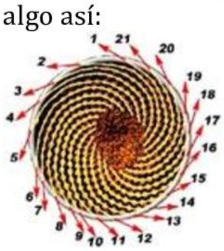
8. ¿Cuál es la suma de los números que aparecen en la quinta y sexta posición?
9. ¿Cuál es la suma de los números que aparecen en la sexta y séptima posición?
10. ¿Hay alguna relación entre las sumas y los números de la tabla?
    a. Sí
    b. No
11. ¿Cuál debería ser el número de la posición 11?
12. ¿Cuál debería ser el número de la posición 12?
13. ¿Cómo haríamos para saber el número que está en la posición 31? Selecciona uno de los argumentos
14. ¿Sabías que?
    Las semillas de los girasoles forman espirales:

    Si contamos las espirales que van en el sentido de las agujas del reloj se vería algo así:

    Si contamos las espirales que van en contra del sentido de las agujas del reloj se vería algo así:

    ¿Ya hemos visto este par de números antes?
    a. Sí
       ¿dónde?
    b. No

    Fíjate que siempre sucede que las espirales son dos números seguidos de la tabla que vimos antes, sorprendente ¿no crees?

15. Si encontramos que un girasol tiene 34 espirales que van en contra de las manecillas del reloj, es posible que el número de espirales que van en el sentido de las manecillas del reloj sean:
    a. 55 o 21
    b. 55
    c. 21
    d. Ninguna, no se podría saber, habría que contarlas.

Anexo 5:

Álgebra como estudio de funciones

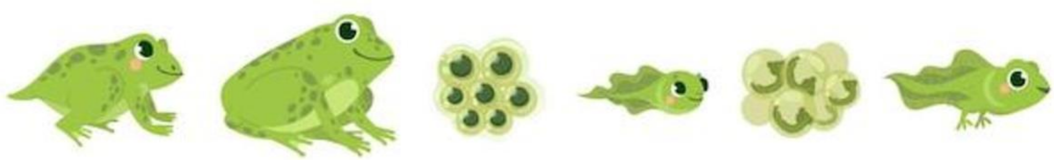
Tarea 1: La metamorfosis

Este es un proceso biológico por el que un animal se desarrolla desde que nace hasta que madura.

La mariposa es un animal que experimenta la metamorfosis:

1. Numera el orden en el que crees que sucede la metamorfosis de la mariposa.
2. ¿Qué sucede de la etapa 1 a la etapa 2?
3. ¿Qué sucede de la etapa 3 a la etapa 4?
4. ¿Qué sucede de la etapa 4 a la etapa 5?
5. ¿Qué sucede de la etapa 5 a la etapa 6?

Otro animal que también pasa por el proceso de metamorfosis en la rana mira:



6. Numera el orden en el que crees que sucede la metamorfosis de la rana.
7. ¿Qué sucede de la etapa 1 a la etapa 2?
8. ¿Qué sucede de la etapa 3 a la etapa 4?
9. ¿Qué sucede de la etapa 4 a la etapa 5?
10. ¿Qué sucede de la etapa 5 a la etapa 6?
11. ¿Qué cambia en ambos animales?
    a. La forma
    b. El tamaño
    c. Nada

12. Ayúdanos a organizar la frase:
    Cambia la forma/tamaño de los animales porque cambian/crecen a medida que va pasando el tiempo. Significa que en los animales que hacen metamorfosis varía su forma/tamaño dependiendo del tiempo (se muestra en desorden).

Tarea 2: De compras

Amarú está conociendo el Amazonas colombiano, se encuentra en la tienda de artesanías:


Él es fan #1 de las artesanías, le encanta coleccionarlas, mira en su factura todo lo que compró:

Burrito de colores	45.000
Cara indio piel roja	20.000
Cara indio con un sikus	21.000
Bordado	30.000
Total	

1. ¿Cuánto tuvo que pagar Amarú por todos los productos?
2. Podemos asegurar que:
   a. Entre más gasta más dinero tiene
   b. Entre más gasta menos dinero tiene
   c. Entre menos gasta menos dinero tiene
3. ¿Siempre sucede esto, es decir, siempre entre más dinero gastamos menos dinero tenemos?
   a. Sí
   b. No
4. En qué otras situaciones de la vida cotidiana identificas que sucede algo similar:
   a. En la estatura: a medida que aumenta el tiempo menos alto soy.
   b. En la construcción: entre mayor es el número de empleados, menor es el tiempo que se tarda en estar listo el proyecto.