Introducción a los Haces

Oscar Daniel Ramírez Correa

Asesor: Gil Alberto de Jesus Donado Nuñez

Universidad Pedagógica Nacional

Bogotá D.C.

2022

Dedicatoria

Para Alba y Ernesto Ramírez

0.1. Introducción

Dada la emergencia de las matemáticas contemporáneas en todo el saber matemático, y la inclinación de estas (desde 1950 hacía adelante) intentándose alejar de técnicas un tanto artificiosas e insuficientes para atacar nuevos problemas, la teoría de haces se enmarca como una de las ramas de las matemáticas que seguirá dando mucho en los próximos años en el entorno creativo de estás. Desde su nacimiento y formalización en la escuela francesa (Cartan, 1951) el concepto de haz se ha prefigurado como el sustentador de diversas teorías, mejorando y naturalizando ideas previas de la matemática, y haciendo que tales objetos tuvieran un mayor radio de influencia no solo conceptual, sino también relacional. Es por esta razón que un entendimiento de la teoría de haces se hace necesaria para estar al tanto de las nuevas formas matemáticas de los próximos años.

Desde su consolidación, el concepto de haz se ha enmarcado como un concepto muy especial en donde su característica fundamental radica pasar de formas limitadas (locales) a formas totalmente generales (globales) y desde allí poder quitar rastres conceptuales que dependen de consideraciones de tipo local. Es el caso de que algunos objetos matemáticos que, aunque bien constituidos, no permiten ir más allá, como puede ser la generalización o la resolución de problemas. El haz permitió que aquellos conceptos "viejos" tomaran rumbos más "suaves" y se desarrollaran en teorías nuevas cuya exploración y gama de influencia hoy en día no ha acabado, tomemos por ejemplo la teoría de topos, los esquemas, la K-teoría, las categorías abelianas, etc. Hoy en día los haces también hacen parte fundamental de teorías cuya meta es una explicación general de las matemáticas y la búsqueda de relaciones entre las diferentes ramas de esta, como son hoy el programa de Langlands o el programa de unificación de Olivia Caramello.

Este trabajo tiene un distribución muy general sobre los haces resumida de la siguiente forma: El capítulo 1 hace una breve presentación de los conceptos previos para llegar a la noción de haz. El capítulo 2 presenta los conceptos de prehaz y haz, haciendo ayuda de varios ejemplos para el entendimiento de estas dos nociones. El capítulo 3 alude a varias construcciones de haces en donde la más destacada es la hacificación de un prehaz. Finalmente en el capítulo 4 hablaremos sobre el espacio étalé, cuya definición dada por Cartan en los años 50 rememora los cimientos del concepto de haz.

Índice general

Lista de Símbolos

Símbolos

$\emptyset$	conjunto vacío
$\mathcal{T}_X$	topología asociada al conjunto X
$\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \ldots$	haces (prehaces)
$\mathcal{F}(U)$	conjunto de secciones de U
$\{A_i\}_{i\in I}$	familia
$\{A_{ij}, \varphi_{ij}\}$	sistema directo
$\varinjlim_{i\in I} A_i$	límite directo
$f\|_U$	función f restringida a U
0_G	elemento neutro del grupo G
$\widetilde{0_G}$	función módulo de un grupo G
Id_X	función identidad del conjunto X
$\mathbb{Z}_n$	enteros módulo n
$\mathbb{R}$	conjunto números reales
$\mathrm{GL}(n)$	grupo lineal general de orden n
$\mathbb{C}$	conjunto de números complejos
$\Gamma(U, \mathcal{F})$	conjunto de secciones de U en $\mathcal{F}$
$\mathbb{S}^1$	circunferencia unitaria
$\mathbb{B}^2$	bola unitaria cerrada
$X \times Y$	producto cartesiano de conjuntos
$f \circ g$	composición de funciones
$\mathcal{F}^U_V$	morfismo de restricción
$\mathcal{V}(x)$	vecindades abiertas de x
$s\|_U$	morfismo de restricción aplicado a s
$\mathcal{F}_x$	tallo asociado a x
$\mathcal{F}_U$	función de secciones a germenes
$\mathcal{F}^+$	hacificación del haz $\mathcal{F}$
$\mathcal{F}\|_U$	haz restringido a U
$\bigsqcup_{i\in I} A_i$	unón disyunta de una familia de conjuntos
$\langle U, s\rangle$	germen asociado al abierto U y la sección s
$f_*\mathcal{F}$	haz imagen directa
$f^*\mathcal{F}$	haz imagen inversa
$X \oplus Y$	suma directa de dos conjuntos
$G \otimes H$	producto tensorial de grupos
$\mathrm{Hom}(G, H)$	conjunto de homomorfismos de grupos
$\mathcal{E}$	espacio étalé
$\mathcal{F}_\mathcal{E}$	haz asociado a $\mathcal{E}$
π	función proyección
$\pi^{-1}(x)$	fibra asociada a x
σ	sección de un espacio étalé

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo vamos a dar las definiciones y proposiciones previas para llegar al concepto de haz. Pasaremos primero por la noción de grupo, después por la noción de espacio topológico y finalmente introduciremos la idea de límite directo o límite inductivo en la categoría de grupos.

1.1. Grupos

Definición 1.1 (Grupo). [5]

Sea G un conjunto no vacío y $\star$ una operación binaria definida en G . Se dice que G es un **grupo** respecto de $\star$, o también que $\star$ da a G da una estructura de grupo, si $\star$ cumple las siguientes propiedades:

(i) $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ para todo $a, b, c \in G$

(ii) Existe $e \in G$ de manera que $g \star e = e \star g = g$ para todo $g \in G$

(iii) Para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ de manera que $g \star g^{-1} = e = g^{-1} \star g$

Definición 1.2 (Subgrupo). [5]

Sea $(G, \star)$ un grupo y $S \neq \emptyset$ un subconjunto de G. Se dice que S es un subgrupo de G si S bajo la operación $\star$ tiene estructura de grupo. En tal caso se escribe $S \leq G$.

Ejemplo 1.1. Algunos ejemplos de grupos y subgrupos son:

- $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$ es un grupo donde $+_{\mathbb{Z}}$ es la suma usual de números enteros.
- $(\mathrm{GL}(n), \cdot)$ es un grupo donde $\cdot$ es la multiplicación usual de matrices.
- $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$ es un grupo donde $+_{\mathbb{C}}$ es la suma usual de números complejos.
- $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{C}})$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$.

Definición 1.3 (Homomorfismo de grupos). [5]

Sean $(G, \star)$ y $(F, *)$ dos grupos. Una función $\psi \colon G \to F$ tal que $\psi(g \star h) = \psi(g) * \psi(h)$ para todo $g, h \in G$ se denomina un **homomorfismo** del grupo G en el grupo F.

1.2. Espacios Topológicos

Definición 1.4 (Espacio Topológico). [9] Una **Topología** para un conjunto X es una familia

$$\mathcal{T} = \{U_i : i \in I\}, \text{con } U_i \subseteq X$$

tal que:

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$

(b) $\bigcap_{i \in F} U_i \in \mathcal{T}$ con F un subconjunto finito de I

(c) $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$ para todo $J \subseteq I$

Observación 1.1. Los elementos U_i se les conoce como los abiertos de la topología.

Ejemplo 1.2. [9] Algunos ejemplos de espacios topológicos son los siguientes:

- Sea X un conjunto, cuando $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(X)$ se dice que X esta dotado de la topología discreta.
- Sea X un conjunto, cuando $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X\}$ se dice que X esta dotado de la topología grosera.
- Sea X un conjunto y $p \in X$, cuando $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_p$ se dice que X esta dotado de la topología punto incluido, esto es $U \in \mathcal{T}_p$ si y solo si $p \in U$, o, $U = \emptyset$.
- Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales, decimos que $\mathbb{R}$ esta dotado de la topología ususal $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}^u$ cuando cada abiertos es unión de intervalos abiertos.

Definición 1.5 (Subespacio topológico). [9]

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $A \subseteq$. La colección

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A | U \in \mathcal{T}_X\}$$

es una topología sobre A.

$\mathcal{T}_A$ se llama la topología de subespacio inducido sobre A o la topología asociada al subespacio A.

Definición 1.6 (Cubrimiento de abierto). [9]

Dado $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$ decimos que una colección $\{U_i\}_{i \in I}$ de abiertos de X es un cubrimiento abierto de A si

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

Definición 1.7 (Espacio conexo). [9]

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo si no existe una separación para X; esto es, no existen A y B subconjuntos abiertos de X de manera que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Definición 1.8 (Subconjunto abierto conexo). [9]

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $U \subseteq X$ un subconjunto abierto. U es conexo si U como subespacio topológico de X es conexo.

Definición 1.9 (Función continua). [9]

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topolóficos y $f\colon X \to Y$ decimos que f es continua si y solo si para cada abierto $V \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$

Definición 1.10 (Función localmente constante). [7]

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ decimos que f es localmente constante si y solo si para cada $x \in X$ existe $U_x \subseteq X$ abierto de manera que $f|_{U_x}$ sea constante.

Proposición 1.1. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $\left(Y, \mathcal{T}_Y^d\right)$ donde $\mathcal{T}_Y^d$ representa la topología discreta para Y. Sea $f\colon X \to Y$, entonces f es continua si y solo si f es localmente constante.

Demostración. Hagamos la demostración en dos partes

($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua, a ver que para todo $x \in X$ existe $U_x \subseteq X$ abierto de manera que $f|_{U_x}$ es constante. Sea $x \in X$, dado que $f(x) \in Y$, entonces $\{f(x)\}$ es un abierto de Y pues la topología asociada es la discreta. Como f es continua, $f^{-1}(\{f(x)\})$ es un abierto de la topología $\mathcal{T}_X$, escogiendo $U_x = f^{-1}(\{f(x)\})$ vemos que este es una vecindad abierta de x y que $f|_{U_x}$ es constante.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es localmente constante a ver que f es continua, es decir que para todo $V \in \mathcal{T}_Y^d$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Sea $V \subseteq Y$ abierto y $v \in V$, veamos que sucede con $f^{-1}(\{v\})$.

(a) Suponga que existe $x \in X$ de manera que $v = f(x)$, como f es localmenrte constante eso quiere decir que existe $U_{x_v} \in \mathcal{T}_X$ de manera que $f|_{U_{x_v}}$ es constante, eso implica que $\forall x' \in U_x,\ v = f(x')$, entonces $f^{-1}(\{v\}) = U_{x_v}$

(b) Suponga que no existe $x \in X$ de manera que $v = f(x)$, entonces $f^{-1}(\{v\}) = \emptyset$

Por las dos anteriores observaciones formemos el siguiente conjunto:

$$A = \{v \in V : v = f(x) \text{ para algún } x \in X\}$$

Tenemos ahora tres casos a considerar:

(i) Si $A = \emptyset$

Si A es vacio eso quiere decir decir que $v \neq f(x)$ para todo $x \in X$, por tanto $f^{-1}(\{v\}) = \emptyset$ para todo $v \in V$. Dado que $V \in \mathcal{T}_Y^d$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \bigcup_{v \in V} f^{-1}(\{v\}) \\ &= \bigcup_{v \in V} \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Como $\emptyset \in \mathcal{T}_X$, entonces f es continua.

(ii) Suponga que $\emptyset \neq A \subsetneq V$

Como $V = (V - A) \cup A$, es sencillo observar que

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}(V - A \cup A) \\ &= f^{-1}(V - A) \cup f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Pero $f^{-1}(V - A) = \emptyset$, de allí que $f^{-1}(V) = f^{-1}(A)$. Tenemos ahora que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}(A) \\ &= \bigcup_{v \in A} f^{-1}(\{v\}) \\ &= \bigcup_{v \in A} U_{x_v} \end{aligned}$$

Como la unión arbitaria de abiertos de $\mathcal{T}_X$ es un abierto, entonces f es continua.

(c) Si $A = V$, entonces:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \bigcup_{v \in V} f^{-1}(\{v\}) \\ &= \bigcup_{v \in V} U_{x_v} \end{aligned}$$

Finalmente, como la unión arbitaria de abiertos de X es un abierto, entonces f es continua.

$\square$

Proposición 1.2. [9]

Sean $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_2)$ dos espacio topológicos y f una función $f\colon X \to Y$, si $\mathcal{T}_1$ corresponde a la topología discreta, entonces f es continua.

Definición 1.11 (Homeomorfismo). [9]

Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ decimos que X es homeomorfo a Y si existe una biyección $f\colon X \to Y$ con f y f^{-1} continuas.

1.3. Límites Directos

Definición 1.12 (Conjunto dirigido). [3]

Un conjunto dirigido $(I, \leq)$ es un conjunto no vacío I con un relación binaria $\leq$ de manera que:

- para todo $i, j \in I$ tenemos que $i \leq j$ y $j \leq i$ si y solo si $i = j$
- para todo $i, j, k \in I$, si $i \leq j$ y $j \leq k$, entonces $i \leq k$
- para todo $i, j \in I$ existe algún $k \in I$ de manera que $i \leq k$ y $j \leq k$

Definición 1.13 (Sistema directo). [3]

Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido, y sea una familia de grupos abeliano $\{G_i\}_{i \in I}$ indexados por I y una familia de homomorfismos $\varphi_{ij}\colon G_i \to G_j$ con las siguientes condiciones:

(a) $\varphi_{ii} = Id_{G_i}$

(b) Para $i \leq j \leq k$ se tiene que $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$

Decimos entonces que $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ constituye un sistema directo

Definición 1.14 (Límite directo). [3]

Un límite directo de un sistema directo de grupos abelianos $\{G_i, \varphi_{ij}\}$, es un grupo abeliano G junto con una familia de homomorfismos $\psi_i\colon G_i \to G$ tal que se cumple las siguientes condiciones:

(a) Para $i \leq j$ se tiene que $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$

(b) Cumple con la siguiente propiedad universal

Si L es otro grupo abeliano junto con una familia de homomorfismos $\theta_i\colon G_i \to L$ tal que para cada $i \leq j$ se tiene que $\theta_i = \theta_j \circ \varphi_{i,j}$, entonces existe un único homomorfismo $h\colon G \to L$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "h"'] & G_i \arrow[l, "\psi_i"'] \arrow[d, "\theta_i"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Es decir $h \circ \psi_i = \theta_i$. Al grupo G se le suele notar como $G = \varinjlim_{i \in I} G_i$

Ejemplo 1.3. [3] Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos de manera que para todo $i, j \in I$ si $i \leq j$, entonces $A_i \subseteq A_j$. Si consideramos la contencia de conjuntos como las respectivas funciónes de inclusión, tenemos que para todo $i, j \in I$ si $i \leq j$, entonces $\iota_{ij} \colon A_i \to A_j$, donde ι_{ij} son las funciónes de inclusión. Probemos que $\{A_i, \iota_{ij}\}$ es un sistema directo:

- Si para todo $i, j \in I$ con $i \leq j$ se tiene que $A_i \subseteq A_j$, es sencillo ver que $\iota_{ii} = Id_{A_i}$.
- Sean $i, j, k \in I$ con $i \leq j \leq k$, veamos que $\iota_{ik} = \iota_{jk} \circ \iota_{ij}$. Dado que $A_i \subseteq A_j \subseteq A_k$ es sencillo ver que $\iota_{ik} = \iota_{jk} \circ \iota_{ij}$.

Entonces $\{A_i, \iota_{ij}\}$ forma un sistema directo. Dado que el límite directo existe este viene dado por:

$$\varinjlim_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$$

CAPÍTULO 2

Prehaces y Haces

En este capítulo vamos a definir la noción de haz, y daremos varios ejemplos de dicho objeto . Para ello tendremos que dar una noción anterior que es la de prehaz, y así mismo veremos como en algunos casos tener un prehaz no necesariamente se tiene un haz.

2.1. Prehaces

Definición 2.1. [6]

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un **prehaz** $\mathcal{F}$ sobre el espacio $(X, \mathcal{T})$ se define como:

(i) Para todo $U \in \mathcal{T}$ se le asocia un conjunto $\mathcal{F}(U)$. $\mathcal{F}(\emptyset)$ es un conjunto unitario.

(ii) A cada par de abiertos U y V con $U \subseteq V$ se asocia una función $\mathcal{F}_U^V \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ que satisface las siguientes condiciones:

   (a) $\mathcal{F}_U^U = id_{\mathcal{F}(U)}$, para todo abierto U de (X, τ)

   (b) Para cualesquiera abiertos $U \subseteq V \subseteq W$ de (X, τ) se tiene que $\mathcal{F}_U^W = \mathcal{F}_U^V \circ \mathcal{F}_V^W$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(W) \arrow[r, "\mathcal{F}_V^W"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_U^W"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\mathcal{F}_U^V"] \\ & \mathcal{F}(U) \end{tikzcd}$$

Observación 2.1. [8] Demos ahora algunas observaciones importantes respecto a la anterior definición.

(i) Al conjunto $\mathcal{F}(U)$ se le conoce como el conjunto de secciones del prehaz $\mathcal{F}$ sobre el abierto U. Algunas veces a $\mathcal{F}$ lo vamos a notar como $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Cuando $U = X$ diremos que los elementos de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ son las secciones globales del prehaz $\mathcal{F}$.

(ii) La función $\mathcal{F}_U^V$ se le conoce como función restricción del abierto V al abierto U. Una aclaración respecto a la notación de elementos via las funciones de restricción es la siguiente, sea $z \in \mathcal{F}(V)$ una sección, a la imagen de z por $\mathcal{F}_U^V$ se le conoce como la restricción de z en U y se nota como $z|_U$ y $z|_U = \mathcal{F}_U^V(z)$

(iii) En general a los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ se les puede dotar de una estructura algebraica, como puede ser la de grupo, anillo, módulo, espacio vectorial, álgebra, etc. Si por ejemplo hubiésemos dicho que para todo abierto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ es un grupo, anillo, o módulo, entonces a $\mathcal{F}$ se le conoce como el prehaz $\mathcal{F}$ de grupos, anillos, o modulos asociado al espacio topológico X.

(iv) Si el prehaz $\mathcal{F}$ resulta ser de grupos, anillos o módulos u cualquier otra estructura algebraica, se les pide a las funciones $\mathcal{F}_U^V$ que sean homomorfismos de dichas estructuras.

Ahora veamos algunos ejemplos para observar lo que significa definir una estructura de prehaz para un espacio topológico.

Ejemplos

Ejemplo 2.1 (Prehaz de funciones continuas). [8] Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(N, \mathcal{T}_N)$ dos espacios topológicos. Definamos para $U \subseteq X$ subconjunto abierto:

$$\mathcal{F}(U) := \mathcal{C}(U, N) = \{f \colon U \to N : f \text{ continua}\}$$

Para U y V subconjuntos abiertos de X de manera que $U \subseteq V$ definimos las funciones de restricción $\mathcal{F}_U^V$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_U^V \colon \mathcal{C}(V, N) \to \mathcal{C}(U, N)$$
$$f \mapsto \mathcal{F}_U^V(f) = f|_U$$

Veamos que $\mathcal{F}$ forma una estructura de prehaz sobre el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$.

Demostración. Para $\emptyset \subseteq \mathcal{T}_X$ definimos $\mathcal{F}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Veamos que $\mathcal{F}_U^V$ cumple con las dos condiciones dadas en la definición de prehaz.

(i) $\mathcal{F}_U^U = i_{\mathcal{F}(U)}$

Recordemos que $\mathcal{F}_U^U \colon \mathcal{C}(U, N) \to \mathcal{C}(U, N)$. Sea $f \in \mathcal{C}(U, N)$, aplicando $\mathcal{F}_U^U$ a f observamos que $\mathcal{F}_U^U(f) = f|_U$ y como $f|_U = f$ obtenemos que $\mathcal{F}_U^U(f) = f$. De allí que $\mathcal{F}_U^U = i_{\mathcal{F}(U)}$.

(ii) Sean W, V y U abiertos de X de manera que $U \subseteq V \subseteq W$. A ver que

$$\mathcal{F}_U^W = \mathcal{F}_U^V \circ \mathcal{F}_V^W$$

Sea $h \in \mathcal{F}(W)$, entonces $\mathcal{F}_U^W(h) = h|_U$. Calculemos ahora $\left(\mathcal{F}_U^V \circ \mathcal{F}_V^W\right)(h)$. Vemos que $\left(\mathcal{F}_U^V \circ \mathcal{F}_V^W\right)(h) = \mathcal{F}_U^V\left(\mathcal{F}_V^W(h)\right) = \mathcal{F}_U^V(h|_V) = h|_U$ y como h fue arbitrario se tiene para todo $h \in \mathcal{F}(W)$, entonces $\mathcal{F}_U^W = \mathcal{F}_U^V \circ \mathcal{F}_V^W$.

Mostramos que $\mathcal{F}$ resulta ser una prehaz sobre el espacio X. A este prehaz se le conoce como el prehaz de funciones continuas entre dos espacios topológicos.

□

Ejemplo 2.2 (Prehaz constante). [7]

Sea X un espacio topológico y A un grupo abeliano. Definimos el prehaz constante $\mathcal{C}_A$ para $U \subseteq X$ abierto como sigue:

$$\mathcal{C}_A(U) = \begin{cases} A & si \quad U \neq \emptyset \\ \{0_A\} & si \quad U = \emptyset \end{cases}$$

si $U \subseteq V$, entonces las funciones de restricción se definen como:

$$(\mathcal{C}_A)_U^V = \begin{cases} Id_A & si \quad U \neq \emptyset \\ \widetilde{0_A} & si \quad U = \emptyset \text{ y } V \neq \emptyset \\ Id_{\{0_A\}} & si \quad V = \emptyset \end{cases}$$

Comprobemos que efectivamente es un prehaz de grupos abelianos.

Demostración. (a) Veamos que en efecto $(\mathcal{C}_A)_U^U = Id_{\mathcal{C}_A(U)}$. Aquí hay dos casos a demostrar

(i) Si $U \neq \emptyset$, por definición tenemos que $\mathcal{C}_A(U) = A$ y $(\mathcal{C}_A)_U^U = Id_A$, entonces $(\mathcal{C}_A)_U^U = Id_{\mathcal{C}_A(U)}$

(ii) Si $U = \emptyset$ por definición $\mathcal{C}_A(U) = \{0_A\}$ y $(\mathcal{C}_A)_U^U = Id_{\{0_A\}}$, entonces $(\mathcal{C}_A)_U^U = Id_{\mathcal{C}_A(U)}$

(b) Veamos que si $U \subseteq V \subseteq W$, entonces $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V \circ (\mathcal{C}_A)_V^W$

(i) Supongamos que $U \neq \emptyset$, por definición tenemos que $\mathcal{C}_A(U) = \mathcal{C}_A(V) = \mathcal{C}_A(W) = A$ y que $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V = (\mathcal{C}_A)_V^W = Id_A$, entonces $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V \circ (\mathcal{C}_A)_V^W$, pues $Id_A \circ Id_A = Id_A$.

(ii) Supongamos que $U = \emptyset$ y $V \neq \emptyset$, por definición tenemos $\mathcal{C}_A(U) = \{0_A\}$ y $\mathcal{C}_A(V) = \mathcal{C}_A(W) = A$, también que $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V = \widetilde{0_A}$ y $(\mathcal{C}_A)_V^W = Id_A$. Démonos cuenta que:

$$(\mathcal{C}_A)_U^W(a) = 0_A \text{ y } (\mathcal{C}_A)_U^V\left((\mathcal{C}_A)_V^W(a)\right) = (\mathcal{C}_A)_V^W(a) = 0_A$$

Entonces $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V \circ (\mathcal{C}_A)_V^W$

(iii) Supongamos ahora $U = V = \emptyset$ y que $W \neq \emptyset$, por defininción tenemos: $\mathcal{C}_A(U) = \mathcal{C}_A(V) = \{0_A\}$ y $\mathcal{C}_A(W) = A$ y $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_V^W = \widetilde{0_A}$. Véase que:

$$(\mathcal{C}_A)_U^W(a) = 0_A \text{ y } (\mathcal{C}_A)_U^V\left((\mathcal{C}_A)_V^W(a)\right) = (\mathcal{C}_A)_U^V(0_A) = 0_A$$

Entonces $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V \circ (\mathcal{C}_A)_V^W$

(iv) Supongamos ahora $W = \emptyset$, entonces $\mathcal{C}_A(U) = \mathcal{C}_A(V) = \mathcal{C}_A(W) = \{0_A\}$ y $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V = (\mathcal{C}_A)_V^W = Id_{\{0_A\}}$, entonces $(\mathcal{C}_A)_U^W = (\mathcal{C}_A)_U^V \circ (\mathcal{C}_A)_V^W$

□

Veremos en la sección 2.2 que en realidad este prehaz no tiene estructura de haz, y en la sección 3.2 cómo la hacificación de este prehaz coincide con el haz de funciones localmente constantes.

Ejemplo 2.3 (Prehaz de funciones localmente constantes). [4] Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Dotemos a G de una topología $\mathcal{T}_G$. Definamos para $U \subseteq X$ abierto el siguiente prehaz:

$$\mathcal{G}(U) = \{f\colon U \to G : f \text{ localmente constante}\}$$

Para $U \subseteq V$ definamos los morfismos de restricción $\mathcal{G}_U^V$ como :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_U^V\colon \mathcal{G}(V) &\to \mathcal{G}(U) \\ f &\mapsto f|_U \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{G}$ determina un estructura de prehaz sobre X

Demostración. (a) $\mathcal{G}_U^U = Id_{\mathcal{G}(U)}$. Sea $f \in \mathcal{G}(U)$, entonces $\mathcal{G}_U^U(f) = f|_U$. Como $f|_U = f$, concluimos que $\mathcal{G}_U^U = Id_{\mathcal{G}(U)}$.

(b) Sean $U \subseteq V \subseteq W$ veamos que $\mathcal{G}_U^W = \mathcal{G}_U^V \circ \mathcal{G}_V^W$. Observamos que:

$$\mathcal{G}_U^W(f) = f|_U \text{ y } \mathcal{G}_U^V\left(\mathcal{G}_V^W(f)\right) = \mathcal{G}_U^V(f|_V) = f|_U$$

Entonces $\mathcal{G}$ determina una estructura de prehaz sobre X.

□

Ejemplo 2.4 (Prehaz rascacielos). [4] Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y G un grupo abeliano. Tomemos $x \in X$ fijo , llamamos x_*G al prehaz rascacielos que se define de la siguiente manera. Sea $U \subseteq X$ un conjunto abierto, entonces:

$$x_*G(U) = \begin{cases} G & si \quad x \in U \\ \{0_G\} & si \quad x \notin U \end{cases}$$

Definimos los homomorfismos de restricción $x_*G_U^V$ de la siguiente manera: para $U \subseteq V$ tenemos que:

$$x_*G_U^V = \begin{cases} Id_G & si \quad x \in U \\ \widetilde{0_G} & si \quad x \notin U \text{ y } x \in V \\ Id_{\{0_G\}} & si \quad x \notin V \end{cases}$$

Donde $\widetilde{0_G}$ es la función que envia cualquier elemento $g \in G$ en 0_G. Comprobemos que efectivamente x_*G es un prehaz de grupos abelianos sobre X .

(a) Probemos que $x_*G_U^U = Id_{x_*G(U)}$. Aqui hay dos casos a demostrar:

1. Si $x \in U$, entonces $x_*G(U) = G$ y $x_*G_U^U = Id_G$. Probamos que $x_*G_U^U = Id_{x_*G(U)}$
2. Si $x \notin U$, entonces $x_*G(U) = \{0_G\}$ y $x_*G_U^U = Id_{\{0_G\}}$. Probamos que $x_*G_U^U = Id_{x_*G(U)}$

(b) Sean $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos cualesquiera, probemos que $x_*G_U^W = x_*G_U^V \circ x_*G_V^W$.

1. Supongamos que $x \in U$, entonces $x_*G(U) = x_*G(V) = x_*G(W) = G$, y también que $x_*G_U^W = x_*G_U^V = x_*G_V^W = Id_G$. Debido a esto tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Id_G"] \arrow[dr, "Id_G"'] & G \arrow[d, "Id_G"] \\ & G \end{tikzcd}$$

   Entonces $x_*G_U^W = x_*G_U^V \circ x_*G_V^W$.

2. Supongamos que $x \notin U$ y $x \in V$, entonces $x_*G(V) = x_*G(W) = G$ y $x_*G(U) = \{0_G\}$. También que $x_*G_U^W = x_*G_U^V = \widetilde{0_G}$ y $x_*G_V^W = Id_G$. Con la anterior información podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Id_G"] \arrow[dr, "\widetilde{0_G}"'] & G \arrow[d, "\widetilde{0_G}"] \\ & \{0_G\} \end{tikzcd}$$

   El anterior diagrama conmuta ya que

$$x_*G_U^W(g) = \widetilde{0_G}\{g\} = 0_G = x_*G_U^V\left(x_*G_V^W(g)\right) = x_*G_U^V(g) = 0_G$$

   Entonces $x_*G_U^W = x_*G_U^V \circ x_*G_V^W$

3. Supongamos que $x \notin U$, $x \notin V$ y $x \in W$, entonces $x_*G(W) = G$ y $x_*G(V) = x_*G(U) = \{0_G\}$, también que $x_*G^W_U = x_*G^W_V = \widetilde{0_G}$ y $x_*G^V_U = Id_{\{0_G\}}$. Construyamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\widetilde{0_G}"] \arrow[dr, "\widetilde{0_G}"'] & \{0_G\} \arrow[d, "Id_{\{0_G\}}"] \\ & \{0_G\} \end{tikzcd}$$

Veamos que el anterior diagrama conmuta:

$$x_*G^W_U(g) = 0_G = x_*G^V_U\left(x_*G^W_V(g)\right) = x_*G^V_U(0_G) = 0_G$$

Entonces $x_*G^W_U = x_*G^V_U \circ x_*G^W_V$.

4. Supongamos que $x \notin W$, entonces $x_*G(W) = x_*G(V) = x_*G(U) = \{0_G\}$ y $x_*G^W_U = x_*G^V_U = x_*G^W_V = Id_{\{0_G\}}$.

$$\begin{tikzcd} \{0_G\} \arrow[r, "Id_{\{0_G\}}"] \arrow[dr, "Id_{\{0_G\}}"'] & \{0_G\} \arrow[d, "Id_{\{0_G\}}"] \\ & \{0_G\} \end{tikzcd}$$

Entonces $x_*G^W_U = x_*G^V_U \circ x_*G^W_V$

Vimos que x_*G tiene una estructura de prehaz (en este caso de grupos abelianos) sobre el espacio topológico X. Más adelante mostraremos que el prehaz rascacielos en efecto tiene la estructura de haz sobre X.

Ejemplo 2.5 (Prehaz constante 2). [8] Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y G un grupo abeliano, dotemos a G de la topologia discreta $\mathcal{T}_d$, entonces:

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{C}(U, G) = \{f\colon U \to G | f \text{ continua}\}$$

Sean U y V abiertos de X de manera que $U \subseteq V$, definimos los homomorfismos de restricción $\mathcal{F}^V_U$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^V_U\colon \mathcal{C}(V, G) &\to \mathcal{C}(U, G) \\ f &\mapsto \mathcal{F}^V_U(f) = f|_U \end{aligned}$$

Gracias al ejemplo 2.1 vemos que $\mathcal{F}$ define una estructura de prehaz de grupos abelianos sobre X, donde para cada $U \subseteq X$ abierto $\mathcal{F}(U)$ es un grupo abeliano cuya operación es la misma de G pero aplicado a las imagenes de cada $u \in U$.

Lo interesante de este ejemplo es hacer notar que $\mathcal{F}(U) \cong G$ siempre y cuando U sea un conjunto abierto y conexo. Para ello mostremos que si U es un conjunto abierto y conexo de X, entonces $f(U) = \{g\}$ con $g \in G$ y $f \in \mathcal{F}(U)$. Suponga que $f(U) = \{g, g'\}$, como G esta dotado con la topología discreta $\{g\}$ y $\{g'\}$ son abiertos y dado que f es continua, entonces $f^{-1}(\{g\})$ y $f^{-1}(\{g'\})$ son abiertos de la topología de X. Usando el hecho de que la imagen inversa de la unión arbitaria de conjuntos es exactamente igual a la unión arbitraria de las imagenes inversas de cada conjunto, tenemos que:

$$U = f^{-1}(\{g\}) \cup f^{-1}(\{g'\})$$

y esto es una contradicción pues estamos diciendo que U es conexo, concluimos entonces mostrando que para toda $f \in \mathcal{F}(U)$ existe $g \in G$ de manera que $f(U) = \{g\}$, es decir f es locamente constante (de allí el nombre de prehaz constante), y eso implica que $\mathcal{F}(U) \cong G$, donde el isomorfismo (de grupos abelianos) viene dado por la función $\varphi\colon \mathcal{F}(U) \to G$, de manera que $\varphi(f) = g$.

En la mayoría de ocasiones caracterizar el conjunto de seccións de un prehaz no es siempre es fácil. En los siguientes dos ejemplos vamos a ver; (1) cómo se caracterizan las secciones de un prehaz y (2) un ejemplo en donde podamos ver geométricamente el conjunto de secciones de un prehaz.

Ejemplo 2.6. Sea $X = \{0, 1\}$ y démolse a X la topología discreta, es decir

$$\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Ahora tomemos el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_2, +)$ con una topología cualesquiera $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}_2}$. Pensemos ahora en el prehaz $\mathcal{G}$ sobre X tal que para $U \subseteq X$ abierto tenemos que:

$$\mathcal{G}(U) = \{f\colon U \to \mathbb{Z}_2 | f \text{ continua}\}$$

Para U y V subconjuntos abiertos de X tal que $U \subseteq V$ definimos los homomorfismos de restricción $\mathcal{G}_U^V$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_U^V\colon \mathcal{G}(V) &\to \mathcal{G}(U) \\ f &\mapsto \mathcal{G}_U^V(f) = f|_U \end{aligned}$$

Démonos a la tarea de caracterizar $\mathcal{G}(\emptyset)$, $\mathcal{G}(\{0\})$, $\mathcal{G}(\{1\})$ y $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(\{0, 1\})$

(i) Caracterización del conjunto $\mathcal{G}(\{0, 1\})$

$$\mathcal{G}(\{0, 1\}) = \{f\colon \{0, 1\} \to \mathbb{Z}_2 : f \text{ continua}\}$$

Como X esta dotado de la topología discreta, entonces toda función que tome valores en X y cuya imagen esté en $\mathbb{Z}_2$ es continua usando la proposición 1.2. Eso quiere decir que cualquier función que tomemos en $\mathcal{G}(\{0, 1\})$ es continua.

$$\begin{aligned} f_1\colon \{0,1\} &\to \mathbb{Z}_2 \\ 0 &\mapsto \overline{0} \\ 1 &\mapsto \overline{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2\colon \{0,1\} &\to \mathbb{Z}_2 \\ 0 &\mapsto \overline{1} \\ 1 &\mapsto \overline{1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3\colon \{0,1\} &\to \mathbb{Z}_2 \\ 0 &\mapsto \overline{0} \\ 1 &\mapsto \overline{1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_4\colon \{0,1\} &\to \mathbb{Z}_2 \\ 0 &\mapsto \overline{1} \\ 1 &\mapsto \overline{0} \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{G}(\{0, 1\})$ es un grupo abeliano. Como $(\mathbb{Z}_2, +)$ es un grupo abeliano podemos inducir una operación de siguiente manera: sobre $\mathcal{G}(\{0, 1\})$ sean $f, g \in \mathcal{G}(\{0, 1\})$, definimos $\boldsymbol{+}$ como $(f \boldsymbol{+} g)(x) = f(x) + g(x)$. Dado que $(\mathcal{G}(\{0, 1\}), \boldsymbol{+})$ es un grupo, veamos como se operan los elementos f_1, f_2, f_3 y f_4 en un tabla.

+	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Como solo hay dos grupos de orden cuatro, y en $\mathcal{G}(\{0, 1\})$ cada elemento es inverso consigo mismo tenemos que:

$$\mathcal{G}(\{0, 1\}) \cong K$$

Donde K es el grupo de Klein. Como $K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, entonces:

$$\mathcal{G}(\{0, 1\}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

(ii) Caracterización del conjunto $\mathcal{G}(\{0\})$:

$$\mathcal{G}(\{0\}) = \{g\colon \{0\} \to \mathbb{Z}_2 : g \text{ continua}\}$$

Veáse que las únicas funciones de $\mathcal{G}(\{0\})$ son :

$$\begin{aligned} g_1\colon \{0\} &\to \mathbb{Z}_2 \\ 0 &\mapsto \bar{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g_2\colon \{0\} &\to \mathbb{Z}_2 \\ 0 &\mapsto \bar{1} \end{aligned}$$

Tanto g_1 como g_2 son continuas por la proposición 1.2. Entonces: $\mathcal{G}(\{0\}) = \{g_1, g_2\}$. Como $(\mathcal{G}(\{0\}), +)$ es un grupo abeliano de orden dos, entonces

$$\mathcal{G}(\{0\}) \cong \mathbb{Z}_2$$

(iii) Análogo al índice **(ii)** tenemos que:

$$\mathcal{G}(\{1\}) \cong \mathbb{Z}_2$$

(iv) Definimos $\mathcal{G}(\emptyset) = \{h_\emptyset\}$ donde $h_\emptyset$ es la función vacía. Como $\mathcal{G}(\emptyset)$ es un grupo abeliano de orden uno, entonces:

$$\mathcal{G}(\emptyset) \cong \{\bar{0}\}$$

Lo anterior lo podemos resumir en dos diagramas reticulares como los siguentes:

$$\begin{tikzcd} & \{0,1\} & \\ \{1\} \arrow[ur, "i_3"] & & \{0\} \arrow[ul, "i_4"'] \\ & \emptyset \arrow[ul, "i_1"] \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[uu, "i_5"] & \end{tikzcd} \quad \overset{\text{Aplicando } \mathcal{G}}{\Rightarrow} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{G}(\{0,1\}) \arrow[dl, "\mathcal{G}^{\{0,1\}}_{\{1\}}"'] \arrow[dr, "\mathcal{G}^{\{0,1\}}_{\{0\}}"] \arrow[dd, "\mathcal{G}^{\{0,1\}}_{\emptyset}"] & \\ \mathcal{G}(\{1\}) \arrow[dr, "\mathcal{G}^{\{1\}}_{\emptyset}"'] & & \mathcal{G}(\{0\}) \arrow[dl, "\mathcal{G}^{\{0\}}_{\emptyset}"] \\ & \mathcal{G}(\emptyset) & \end{tikzcd}$$

Vemos como bajo la acción de $\mathcal{G}$ sobre el diagrama reticular del conjunto $X = \{0,1\}$ donde los i_k con $1 \le k \le 5$ representan las respectivas inclusiones, las flechas se invierten.

El diagrama reticular de las secciones del prehaz $\mathcal{G}$ vienen representadas como:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}(\{0,1\}) \arrow[dl, "\mathcal{G}^{\{0,1\}}_{\{1\}}"'] \arrow[dr, "\mathcal{G}^{\{0,1\}}_{\{0\}}"] \arrow[dd, "\mathcal{G}^{\{0,1\}}_{\emptyset}"] & \\ \mathcal{G}(\{1\}) \arrow[dr, "\mathcal{G}^{\{1\}}_{\emptyset}"'] & & \mathcal{G}(\{0\}) \arrow[dl, "\mathcal{G}^{\{0\}}_{\emptyset}"] \\ & \mathcal{G}(\emptyset) & \end{tikzcd} \quad \overset{\cong}{\Rightarrow} \quad \begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "\tilde{0}"] & \\ \mathbb{Z}_2 \arrow[dr, "\tilde{0}"'] & & \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, "\tilde{0}"] \\ & \{\bar{0}\} & \end{tikzcd}$$

Donde p es la función proyección, esto es $p(x,y) = x$ ó $p(x,y) = y$.

Ejemplo 2.7. [4] Sean $(F, \mathcal{T}_F)$ y $(X, \mathcal{T}_X)$ dos espacios topológicos y sea $\pi\colon F \to X$ una función continua y sobreyectiva. Para $U \subseteq X$ subconjunto abierto definimos

$$\Gamma(U, \mathcal{J}) = \{s\colon U \to F : s \text{ continua y } \pi \circ s = Id_U\}$$

Gracias al ejemplo 2.1 vemos que $\mathcal{J}$ define una estructura de prehaz sobre X. Veremos mas adelante que también define una estructura de haz sobre X.

Ya que hemos dado algunos ejemplos de prehaces de tipo algebraico, vamos a construir prehaces de tipo geométrico. Para ello vamos a considerar los prehaces del ejemplo 2.7 para nuestra construcción.

Ejemplo 2.8. Sea $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ el cilindro y $\mathbb{B}^2$ la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^2$. Consideremos la siguiente función φ:

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] &\to \mathbb{B}^2 \\ (\vec{z}, t) &\mapsto (1-t)\vec{z} \end{aligned}$$

Si consideramos a $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ y $\mathbb{B}^2$ ambos con la topología discreta, por la proposicion 1.2 φ es continua, y además es sobreyectiva. Visualmente tendriamos que la función corresponde :

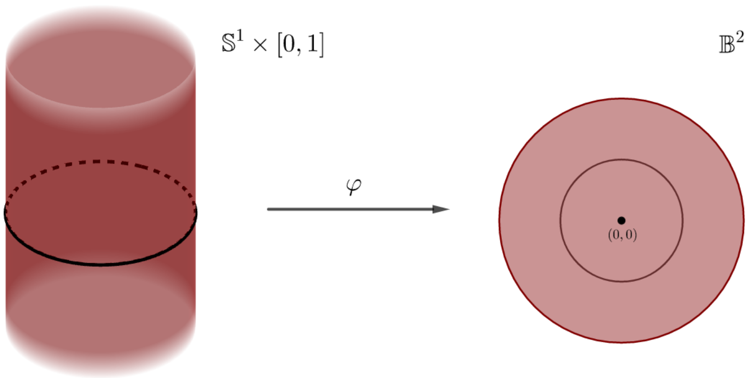

Figura 2.1: Visualización de la función φ

Damos la siguiente estructura de prehaz a $\left(\mathbb{B}^2, \mathcal{T}_d\right)$. Sea V un abierto de $\mathbb{B}^2$, definimos el prehaz $\mathcal{J}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{J}(V) = \left\{ s \colon V \to \mathbb{S}^1 \times [0,1] : s \text{ es continua y } \varphi \circ s = id_V \right\}$$

Gracias al ejemplo 2.7 sabemos que $\mathcal{J}$ tiene una estructura de prehaz sobre $\mathbb{B}^2$. Para algunos abiertos de $\left(\mathbb{B}^2, \mathcal{T}_d\right)$ caracterizamos su conjunto de secciones.

(a) Sea el abierto $V = \{(0,1)\}$ de $\mathbb{B}^2$. Calculemos $\mathcal{J}(\{(0,1)\})$. Por definición de $\mathcal{J}$ tenemos que:

$$\mathcal{J}(\{(0,1)\}) = \left\{ s \colon \{(0,1)\} \to \mathbb{S}^1 \times [0,1] : s \text{ es continua y } \varphi \circ s = Id_{\{(0,1)\}} \right\}$$

En $\mathcal{J}(\{0,1\})$ todas las funciones son continuas, veamos cuales de estas cumplen con que $\varphi \circ s = Id_{\{(0,1)\}}$. Sea $s \in \mathcal{J}(\{(0,1)\})$ tal que $s(0,1) = ((x,y),t)$. Para $((x,y),t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Hagamos

$$(\varphi \circ s)(0,1) = (0,1) \tag{2.1}$$
$$\varphi(s(0,1)) = (0,1) \tag{2.2}$$
$$\varphi((x,y),t) = (0,1) \tag{2.3}$$
$$(1-t)(x,y) = (0,1) \tag{2.4}$$

El único t para el cual se cumple la condición (2.4) es $t = 0$. Si $t = 0$ tenemos que $(x,y) = (0,1)$, es decir hay una única función continua s en $\mathcal{J}(\{(0,1)\})$ que hace

$$(\varphi \circ s)(0,1) = ((0,1),0)$$

Graficamente tenemos:

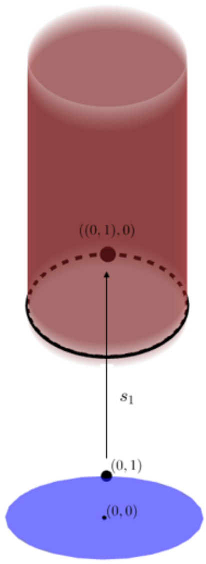

Figura 2.2: Visualización gráfica de $\mathcal{J}(\{(0,1)\})$

entonces $\mathcal{J}(\{(0,1)\}) = \{s\}$

(b) Sea $V = \{(0,0)\}$ subconjunto abierto de $\mathbb{B}^2$. Describamos $\mathcal{J}(\{(0,0)\})$. Por defintión de $\mathcal{J}$ tenemos que:

$$\mathcal{J}(\{(0,0)\}) = \left\{s\colon\ \{(0,0)\} \to \mathbb{S}^1 \times [0,1] : s \text{ es continua y } \varphi \circ s = Id_{\{(0,0)\}}\right\}$$

En $\mathcal{J}(\{0,0\})$ todas las funciones son continuas, veamos cuales de estas cumplen con que $\varphi \circ s = Id_{\{(0,0)\}}$. Sea $s \in \mathcal{J}(\{(0,0)\})$ tal que $s(0,0) = ((x,y),t)$ para $((x,y),t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Hagamos

$$(\varphi \circ s)(0,0) = Id_{\{(0,0)\}}(0,0) \tag{2.5}$$
$$\varphi(s(0,0)) = (0,0) \tag{2.6}$$
$$\varphi((x,y),t) = (0,0) \tag{2.7}$$
$$(1-t)(x,y) = (0,0) \tag{2.8}$$

El único t que cumple la condición de la ecuación 2.8 es $t = 1$. Si $t = 1$ tenemos que la ecuación 2.8 es verdadera para cualquier $(x,y) \in \mathbb{S}^1$. Entonces:

$$\mathcal{J}(\{(0,0)\}) = \left\{s\colon\ \{(0,0)\} \to \mathbb{S}^1 \times [0,1] : s(0,0) = ((x,y),1)\ \text{ para }\ (x,y) \in \mathbb{S}^1\right\}$$

Gráficamente $\mathcal{J}\left(\{(0,0)\}\right)$ se representa como:

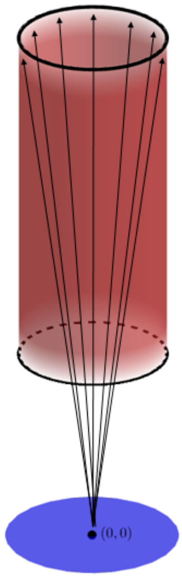

Figura 2.3: Visualización de $\mathcal{J}\left(\{0,0\}\right)$

(c) Sea $V = \mathbb{S}^1$ subconjunto abierto de $\mathbb{B}^2$. Describamos $\mathcal{J}\left(\mathbb{S}^1\right)$. Por definición de $\mathcal{J}$ tenemos que:

$$\mathcal{J}\left(\mathbb{S}^1\right) = \left\{s\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times [0,1] : s \text{ es continua y } \varphi \circ s = Id_{\mathbb{S}^1}\right\}$$

En $\mathcal{J}\left(\mathbb{S}^1\right)$ todas las funciones son continuas, veamos cuales de estas cumplen con que $\varphi \circ s = Id_{\mathbb{S}^1}$. Sea $s \in \mathcal{J}\left(\mathbb{S}^1\right)$ tal que $s(x,y) = \left((w,z), t\right)$ para $\left((w,z), t\right) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Hagamos.

$$\begin{aligned} (\varphi \circ s)(x,y) &= Id_{\mathbb{S}^1}(x,y) && (2.9)\\ \varphi\left(s(x,y)\right) &= (x,y) && (2.10)\\ \varphi\left((w,z), t\right) &= (x,y) && (2.11)\\ (1-t)(w,z) &= (x,y) && (2.12) \end{aligned}$$

De la ecuación 2.12 tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1-t)w = x \\ (1-t)z = y \end{cases}$$

el cual implica el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-t)^2 w^2 = x^2 \\ (1-t)^2 z^2 = y^2 \end{cases}$$

sumando las dos anteriores ecuaciones tenemos:

$$(1-t)^2(w^2+z^2) = x^2 + y^2 \tag{2.13}$$

Dado que $(x,y), (w,z) \in \mathbb{S}^1$, la ecuación 2.13 queda de la forma:

$$(1-t)^2 = 1 \tag{2.14}$$

El único valor de t para el cuál se cumple 2.14, es $t = 0$. Si $t = 0$, entonces $x = w$ y $y = z$. Es decir $s(x, y) = ((x, y), 0)$. Con esta información podemos describir $\mathcal{J}(\mathbb{S}^1)$.

$$\mathcal{J}\left(\mathbb{S}^1\right) = \left\{s \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times [0,1] : s(x,y) = ((x,y),0)\right\}$$

Una representación gráfica de $\mathcal{J}(\mathbb{S}^1)$ es:

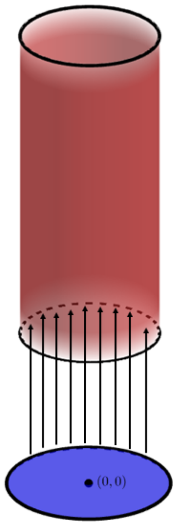

Figura 2.4: Visualización gráfica de $\mathcal{J}(\mathbb{S}^1)$

Definición 2.2 (Homomorfismos de prehaces). [7]

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces de grupos abelianos sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$. Un homomorfismo de prehaces $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste en:

- Para todo abierto $U \subseteq X$, un homomorfismo $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.
- Para cada U y V abiertos de X de manera que $U \subseteq V$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\mathcal{F}^V_U"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\mathcal{G}^V_U"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir $\mathcal{G}^V_U \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \mathcal{F}^V_U$.

2.2. Haces

Definición 2.3 (Haz). [6] Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X. Se dice que $\mathcal{F}$ es un **haz** sobre X si para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ y cada cubrimiento abierto de U, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Si $z, z' \in \mathcal{F}(U)$ son tales que $\mathcal{F}^{U}_{U_i}(z) = \mathcal{F}^{U}_{U_i}(z')$ para cada $i \in I$, entonces $z = z'$.

(ii) Sea $\{z_i : z_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$ una colección de elementos tal que para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene que

$$\mathcal{F}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(z_i) = \mathcal{F}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(z_j).$$

Entonces, existe un elemento $z \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\mathcal{F}^{U}_{U_i}(z) = z_i$, para cada $i \in I$

Proposición 2.1. [6] El elemento z de la condición (ii) es único

Demostración. Suponga que existe un $z' \neq z$ de manera que $\mathcal{F}^{U}_{U_i}(z') = z_i$ para todo $i \in I$. Dado que también $\mathcal{F}^{U}_{U_i}(z) = z_i$, entonces $\mathcal{F}^{U}_{U_i}(z) = \mathcal{F}^{U}_{U_i}(z')$ y por la condición (i) tenemos que $z = z'$ lo cual es una contradicción, entonces z es único.

□

Ejemplos

Ejemplo 2.9 (Haz de funciones continuas). En el ejemplo 2.1 mostramos que $\mathcal{F}$ tiene estructura de prehaz, veamos ahora que $\mathcal{F}$ es un haz. Comprobemos entonces que se cumplen las dos condicones de la definición. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U, entonces:

(i) Sean $f, g \in \mathcal{F}(U)$, con $\mathcal{F}^{U}_{U_i}(f) = \mathcal{F}^{U}_{U_i}(g)$ para todo $i \in I$, probemos que $f = g$. Para comprobar que $f = g$ basta ver que para todo $u \in U$, $f(u) = g(u)$. Sea $u \in U$, como $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ de manera que $u \in U_{i_0}$. Nos damos cuenta de que $f(u) = f|_{U_{i_0}}(u)$ y $g(u) = g|_{U_{i_0}}(u)$. Por hipótesis $f|_{U_{i_0}}(u) = g|_{U_{i_0}}(u)$, de allí que $f(u) = g(u)$. Como $u \in U$ fue escogido arbitrariamente tenemos que $f(u) = g(u)$ para todo $u \in U$, entonces $f = g$.

(ii) Sea $\{f_i : f_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$ una colección de secciones tales que para todo $i, j \in I$ se tiene que $\mathcal{F}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = \mathcal{F}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$. Por la defininción de las funciones de restricción lo anterior es lo mismo que decir $f_i|_{U_i\cap U_i} = f_j|_{U_i\cap U_j}$. Ahora tenemos que encontrar $f \in \mathcal{F}(U)$ de manera que $f|_{U_i} = f_i$ eso para cada $i \in I$. Definamos f de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f\colon U &\to N \\ u &\mapsto f(u) = f_i(u) \end{aligned}$$

Vamos a probar que la aplicación f esta bien definida y es continua:

a. Sea $u \in U$, como $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces $u \in \bigcup_{i\in I} U_i$ y por defininción existe $i_0 \in U$ de manera que $u \in U_{i_0}$. Supongamos que existe i_0 único, es decir, u solo esta en U_{i_0} y en ninguno más. Sea $u = u'$, como f_{i_0} esta bien definida dado que $f_{i_0} \in \mathcal{F}(U_{i_0})$, entonces $f_{i_0}(u) = f_{i_0}(u')$ y por definición $f(u) = f(u')$. Como $u \in U$ fue escogido arbitrariamente, entonces f esta bien definida.

b. Suponga que $u \in U$, eso significa que $u \in \bigcup_{i\in I} U_i$, es decir que existe $i \in I$ de manera que $u \in U_i$, con la condicón de que $u \in \bigcap_{k\in K} U_k$ donde $K \subseteq I$, por hipótesis $f_k(u) = f_k|_{U_k\cap U_{k'}}(u) = f_{k'}|_{U_k\cap U_{k'}}(u) = f_{k'}(u)$ eso para cada $k, k' \in K$. Si $u = u'$, entonces $f_k(u) = f_k(u') = f_{k'}(u) = f_{k'}(u')$, y por definición tenemos $f(u) = f(u')$.

c. f es continua: por defininción de f cada f_i es continua, entonces f es continua.

Ejemplo 2.10 (Haz rascacielos). Tomemos el prehaz x_*G dado en el ejemplo 2.4 veamos que en efecto es un haz. Para ello hay que comprobar las dos condiciones dadas en la defininción de haz.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ un subcojunto abierto y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U. A ver que si $z, z' \in x_*G(U)$ y para todo $i \in I$ se cumple que $x_*G^U_{U_i}(z) = x_*G^U_{U_i}(z')$, entonces $z = z'$.

1. Suponga que $x \in U$, eso implica que existe $i \in I$ de manera que $x \in U_i$. Por definición de los homomorfismos de restricción tenemos que $x_*G^U_{U_i} = Id_G$. De allí $x_*G^U_{U_i}(z) = z$ y $x_*G^U_{U_i}(z') = z'$ y por hipótesis $x_*G^U_{U_i}(z) = x_*G^U_{U_i}(z')$, entonces $z = z'$.
2. Suponga que $x \notin U$, entonces por definicón $x_*G(U) = \{0_G\}$,y si $z, z' \in x_*G(U)$, entonces $z = z' = 0_G$, de allí que $z = z'$

Sea $\{z_i : z_i \in x_*G(U_i)\}$ una colección de secciones tal que para todo $i, j \in I$ se tiene que $x_*G^{U_i}_{U_i\cap U_j}(z_i) = x_*G^{U_j}_{U_i\cap U_i}(z_j)$. Veamos que exsite $z \in x_*G(U)$ de manera que $x_*G^U_{U_i}(z) = z_i$

Consideremos los siguientes casos

(i) Supongamos que $x \in U$ y que además para todo $i \in I$ se tiene que $x \in U_i$. Por definición tenemos que para todo U_i, $x_*G(U_i) = G$ y tambień que $x_*G^{U_i}_{U_i\cap U_j}(z_i) = z_i$, y $x_*G^{U_j}_{U_i\cap U_i}(z_j) = z_j$ y por hipótesis estariamos diciendo que para todo $i, j \in I$ $z_i = z_j$. De allí defina entonces $z := z_i$. Vea que la unicidad esta garantziada por la hipótesis.

(ii) Supongamos que $x \in U$ pero que para algún $j \in I$ se tiene que $x \notin U_j$, entonces por defincíon tenemos que $x_*G(U_j) = \{0_G\}$, eso quiere decir que si $z_j \in x_*G(U_j)$, entonces $z_j = 0$. Ahora solo basta definir $z := z_i$ y vea que $x_*G^U_{U_j}(z) = 0_G$

(iii) Supongamos ahora que $x \notin U$, entonces para todo $i \in I$, $x \notin U_i$ y por defincíon tenemos que $x_*G(U) = \{0_G\}$ y $x_*G(U_i) = \{0_G\}$, solo basta entonces tomar $z := 0_G$ para que $x_*G^U_{U_i}(z) = z_i$ eso porque cada $z_i = 0_G$

□

En general tenemos que no todo prehaz es un haz, y en el siguiente ejemplo veremos claramente como es que esto sucede.

Ejemplo 2.11 (Prehaz que no es necesariamente un haz). [8] Definimos para un grupo abeliano A con $||A|| \geq 2$ y X un espacio topológico, el prehaz constante, esto es, para cada abierto U de X, $\mathcal{C}_A$ se define como:

$$\mathcal{C}_A(U) = \begin{cases} A & si \quad U \neq \emptyset \\ \{0_A\} & si \quad U = \emptyset \end{cases}$$

Veamos que $\mathcal{C}_A$ no es un haz, para ello haremos la demostración por contradicción. Supongamos que $\mathcal{C}_A$ es un haz. Tomemos $U = U_1 \cup U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1, U_2 \neq \emptyset$. Sean $g \in \mathcal{C}_A(U_1)$ y $h \in \mathcal{C}_A(U_2)$ con $g \neq h$. Aplicando los homorfismos de restricción $\mathcal{C}_A{}^{U_1}_{U_1\cap U_2}$ y $\mathcal{C}_A{}^{U_2}_{U_1\cap U_2}$ a los elementos g y h respectivamente, obtenemos que:

$$\mathcal{C}_A{}^{U_1}_{U_1\cap U_2}(g) = \mathcal{C}_A{}^{U_2}_{U_1\cap U_2}(h) = 0$$

Pues $\mathcal{C}_A(U_1 \cap U_2) = \{0_A\}$. Por la segunda condición de la defincíon de haz tenemos que existe $m \in \mathcal{C}_A(U) = G$ de manera que $\mathcal{C}_A{}^U_{U_1}(m) = g$ y $\mathcal{C}_A{}^U_{U_2}(m) = h$. Como $\mathcal{C}_A{}^U_{U_1}$ y $\mathcal{C}_A{}^U_{U_2}$ son los homomorfismos indentidad, entonces $m = g$ y $m = h$, y de lo anterior se tiene que $g = h$, lo cual es un contradicción.

Definición 2.4 (haz restricción). [7]

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Para $U \subseteq X$ abierto definimos el haz restricción como el haz asociado a U tal que para todo $V \subseteq U$ abierto le asociamos $\mathcal{F}(V)$. Este haz sobre U se nota como $\mathcal{F}|_U$.

CAPÍTULO 3

Construcción de Haces

3.1. Tallos (Stalks)

[8] Sea X un espacio topológico fijo y $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos sobre X, sea $x \in X$ definimos $\mathcal{V}(x)$ como:

$$\mathcal{V}(x) = \{ U \subseteq X \mid U \text{ abierto y } x \in U \}$$

Es decir $\mathcal{V}(x)$ es el conjunto de todas la vecindades abiertas de x. Ahora consideremos el siguiente conjunto:

$$L = \{ (U, s) \mid U \in \mathcal{V}(x) \text{ y } s \in \mathcal{F}(U) \}$$

Sobre L definamos una relación $\sim$ de la siguiente manera:

$$(U, s) \sim (V, t) \text{ si y solo si existe } W \in \mathcal{V}(x) \text{ de manera que } W \subseteq U \cap V \text{ y } s|_W = t|_W$$

Proposición 3.1. la relación $\sim$ es de equivalencia en el conjunto L

Demostración.

(i) Reflexividad: Veamos que $(U, s) \sim (U, s)$. Dado que existe $U \subseteq U \cap U$ de manera que $s|_U = s|_U$, entonce se tiene que $(U, s) \sim (U, s)$.

(ii) Simetría: Veamos que si $(U, s) \sim (V, t)$, entonces $(V, t) \sim (U, s)$:

Por definición

$$(U, s) \sim (V, t) \text{ si y solo si existe } W \in \mathcal{V}(x) \text{ de modo que } W \subseteq U \cap V \text{ y } s|_W = t|_W$$

Veamos que existe $W' \in \mathcal{V}(x)$ de manera que $W' \subseteq V \cap U$ y $t|_{W'} = s|_{W'}$. Resta tomar $W' = W$ y las dos siguientes propiedades: $U \cap V = V \cap U$, y que $s|_W = t|_W$ implica $t|_W = s|_W$. De lo anterior tenemos que $(V, t) \sim (U, s)$.

(iii) Transitividad: Veamos que si $(U, s) \sim (V, t)$ y $(V, t) \sim (H, r)$, entonces $(U, s) \sim (H, r)$

Por definición tenemos que:

$$(U, s) \sim (V, t) \text{ si y solo si existe } W \in \mathcal{V}(x) \text{ de modo que } W \subseteq U \cap V \text{ y } s|_W = t|_W$$

$$(V, t) \sim (H, r) \text{ si y solo si existe } W' \in \mathcal{V}(x) \text{ de modo que } W \subseteq V \cap H \text{ y } t|_{W'} = r|_{W'}$$

Tomemos $W'' = W \cap W' \subseteq U \cap H$, démonos cuenta que si $s|_W = t|_W$, entonces $(s|_W)|_{W\cap W'} = (t|_W)|_{W\cap W'}$. Dado que $\mathcal{F}$ es un prehaz tenemos que $s|_{W\cap W'} = t|_{W\cap W'}$. Nuevamente como $t|_{W'} = r|_{W'}$ tenemos que $(t|_{W'})|_{W\cap W'} = (r|_{W'})|_{W\cap W'}$ y dado que $\mathcal{F}$ es un prehaz $t|_{W\cap W'} = r|_{W\cap W'}$, entonces $s|_{W\cap W'} = r|_{W\cap W'}$ de allí que $(U,s) \sim (H,r)$. $\square$

Observación 3.1. Al conjunto cociente $^{L}/_{\sim}$ se le nota también como $\mathcal{F}_x$ y se le llama el **tallo** relativo al elemento x.

Observación 3.2. Los elementos de $\mathcal{F}_x$ son clases de equivalencia y se notan como $\langle U,s\rangle$. En algunos textos como [4] y [8] a estos elementos se les nota como $\langle U,s\rangle = s_x$ y se le conoce como el **germen** asociado al elemento x.

Proposición 3.2. [8] $(\mathcal{F}_x,+)$ es un grupo abeliano donde $+$ se define de la siguiente manera. Para $\langle U,s\rangle, \langle V,t\rangle \in \mathcal{F}_x$:

$$\langle U,s\rangle + \langle V,t\rangle = \langle U\cap V, s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V}\rangle$$

- El elemento neutro en $\mathcal{F}_x$ esta dado por $\left\langle U, 0_{\mathcal{F}(U)}\right\rangle$ donde $0_{\mathcal{F}(U)}$ es el elemento neutro en $\mathcal{F}(U)$.
- Para $\langle U,s\rangle$ el elemento inverso viene dado por $\langle U,-s\rangle$.

Veamos ahora que el tallo $\mathcal{F}_x$ asociado a x es isomorfo al límite directo del conjunto de seccióńes $\mathcal{F}(U)$ cuyos abiertos son vecindades de x $(U \in \mathcal{V}(x))$.

Proposición 3.3. [8]

Sea $x \in X$ fijo y $\mathcal{F}_x$ el tallo asociado a x, entonces $\mathcal{F}_x \cong \varinjlim_{U\in\mathcal{V}(x)} \mathcal{F}(U)$.

- En $\mathcal{V}(x)$ definimos el siguiente orden parcial.

  $$U \leq V \text{ si y solo si } V \subseteq U$$

  Es sencillo comprobar que $(\mathcal{V}(x),\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y que además es un conjunto dirigido. Para $U \leq V$ se definen las funciones $\mathcal{F}_V^U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. Por definción $\{\mathcal{F}(U), \mathcal{F}_V^U\}_{U\in\mathcal{V}(x)}$ es un sistema directo de grupos abelianos. Como existe $\varinjlim_{U\in\mathcal{V}(x)} \mathcal{F}(U)$ y es único veamos que $\mathcal{F}_x$ también es un límite directo del sistema directo anteriormente dado.

  Para cada $U \in \mathcal{V}(x)$ definimos:

  $$\begin{aligned}\mathcal{F}_U\colon \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{F}_x\\ s &\mapsto \mathcal{F}_U(s) = \langle U,s\rangle = s_x\end{aligned}$$

  Donde $\mathcal{F}_U$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Ahora veamos que dado $U \leq V$ el siguiente diagrama conmuta

  $$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\mathcal{F}_U"] \arrow[d, "\mathcal{F}_V^U"'] & \mathcal{F}_x \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\mathcal{F}_V"'] & \end{tikzcd}$$

  Es decir $\mathcal{F}_U = \mathcal{F}_V \circ \mathcal{F}_V^U$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $\mathcal{F}_U(s) = \langle U,s\rangle$. Ahora $\left(\mathcal{F}_V\circ\mathcal{F}_V^U\right)(s) = \mathcal{F}_V\left(\mathcal{F}_V^U(s)\right) = \left\langle V, \mathcal{F}_V^U(s)\right\rangle$. Dado que $(U,s) \sim \left(V, \mathcal{F}_V^U(s)\right)$, entonces $\langle U,s\rangle = \left\langle V, \mathcal{F}_V^U(s)\right\rangle$.

- Verifiquemos la propiedad universal para el grupo $\mathcal{F}_x$

  Sea G un grupo abeliano y una colección de homomorfismos $\{\theta_U\colon \mathcal{F}(U) \to G\}_{U\in\mathcal{V}(x)}$ y $\{\theta_V\colon \mathcal{F}(V) \to G\}_{V\in\mathcal{V}(x)}$ con $U \leq V$ de manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\mathcal{F}^U_V"'] & G \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\theta_V"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir $\theta_V \circ \mathcal{F}^U_V = \theta_U$

Veamos que existe un único $\psi\colon \mathcal{F}_x \to G$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\mathcal{F}_U"] \arrow[d, "\theta_U"'] & \mathcal{F}_x \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Es decir, veamos que $\psi \circ \mathcal{F}_U = \theta_U$.

Defínase a ψ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{F}_x &\to G \\ \langle U, s\rangle &\mapsto \theta_U(s) \end{aligned}$$

Verifiquemos que ψ es una aplicación bien definida y que además es un homomorfismo de grupos abelianos.

- ψ es una función bien definida: sean $\langle U, s\rangle = \langle V, t\rangle$, eso significa que $(U, s) \sim (V, t)$ y por definición existe $W \in \Omega_x$ de manera que $W \subseteq U \cap V$ y $s|_W = t|_W$. Aplicando θ_W a $s|_W$ y $t|_W$, entonces $\theta_W(s|_W) = \theta_W(t|_W)$, y dado que $\theta_W \circ \mathcal{F}^U_W = \theta_U$ y $\theta_W \circ \mathcal{F}^V_W = \theta_V$, obtenemos que $\theta_U(s) = \theta_V(t)$
- ψ es un homomorfismo de grupos abelianos:

$$\begin{aligned} \psi(\langle U, s\rangle + \langle V, t\rangle) &= \psi(\langle U \cap V, s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V}\rangle) && (3.1)\\ &= \theta_{U\cap V}(s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V}) && (3.2)\\ &= \theta_{U\cap V}(s|_{U\cap V}) + \theta_{U\cap V}(t|_{U\cap V}) && (3.3)\\ &= \theta_U(s) + \theta_V(s) && (3.4)\\ &= \psi(\langle U, s\rangle) + \psi(\langle V, t\rangle) && (3.5) \end{aligned}$$

En la parte (3.4) se usa las identidades $\theta_{U\cap V} \circ \mathcal{F}^U_{U\cap V} = \theta_U$ y $\theta_{U\cap V} \circ \mathcal{F}^V_{U\cap V} = \theta_V$

Es inmediato que el anterior diagrama conmuta, pues se da desde la misma definición de ψ. Dado que el límite directo es único salvo isomorfismos, entonces $\mathcal{F}_x \cong \varinjlim_{U\in\mathcal{V}(x)} \mathcal{F}(U)$.

Ahora, mostraremos algunos ejemplos en donde se calculan los tallos de algunos prehaces específicos haciendo uso de relaciones de equivalencia y límites directos.

Ejemplo 3.1. Sea el conjunto $X = \{0, 1\}$ dotado con la topología discreta. Gracias al ejemplo 2.6 podemos dotar a X de una estructura de prehaz. Calculemos los tallos asociados a los elementos 0 y 1.

- **Tallo** $\mathcal{F}_0$

  Sea $\mathcal{V}(0)$ el conjuto de todas las vecindades del elemento 0

  $$\mathcal{V}(0) = \{U \subseteq X : U \text{ abierto y } 0 \in U\}$$

  Dado que la topología asociada a X es la discreta tenemos que:

$$\mathcal{V}(0) = \{\{0\}, \{0,1\}\}$$

Sea $L = \{(U,s) : U \in \mathcal{V}(0),\ s \in \mathcal{F}(U)\}$ es decir:

$$L = \{(\{0\}, g_1), (\{0\}, g_2), (\{0,1\}, f_1), (\{0,1\}, f_2), (\{0,1\}, f_3), (\{0,1\}, f_4)\}$$

Calculemos ${}^{L}/_{\sim}$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada en la proposición 3.1.

- $(\{0\}, g_1) \sim (\{0,1\}, f_1)$
  Sea $\{0\} \in \mathcal{V}(0)$, es claro que $\{0\} \subseteq \{0\} \cap \{0,1\}$ y $g_1|_{\{0\}} = f_1|_{\{0\}}$
- $(\{0\}, g_1) \sim (\{0,1\}, f_3)$
  Sea $\{0\} \in \mathcal{V}(0)$, es claro que $\{0\} \subseteq \{0\} \cap \{0,1\}$ y $g_1|_{\{0\}} = f_3|_{\{0\}}$
  Entonces $\langle \{0\}, g_1 \rangle = \{(\{0\}, g_1)\,(\{0,1\}, f_1), (\{0,1\}, f_3)\}$

Ahora:

- $(\{0\}, g_2) \sim (\{0,1\}, f_2)$
  Sea $\{0\} \in \mathcal{V}(0)$, es claro que $\{0\} \subseteq \{0\} \cap \{0,1\}$ y $g_2|_{\{0\}} = f_2|_{\{0\}}$
- $(\{0\}, g_2) \sim (\{0,1\}, f_4)$
  Sea $\{0\} \in \mathcal{V}(0)$, es claro que $\{0\} \subseteq \{0\} \cap \{0,1\}$ y $g_2|_{\{0\}} = f_4|_{\{0\}}$
  Entonces $\langle \{0\}, g_2 \rangle = \{(\{0\}, g_2)\,(\{0,1\}, f_2), (\{0,1\}, f_4)\}$

En conclusión:

$$\mathcal{F}_0 = \{\langle \{0\}, g_1 \rangle, \langle \{0\}, g_2 \rangle\}$$

Dado que $\mathcal{F}_0$ es un grupo abeliano con dos elementos, entonces $\mathcal{F}_0 \cong \mathbb{Z}_2$. Haciendo un proceso similar para calcular el tallo asociado al elemento 1 obtenemos que $\mathcal{F}_1 \cong \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.2 (Tallos del haz rascacielos). [4]

Sea X un espacio topológico y G un grupo abelieano y x_*G el haz rascacielos asociado a X. Calculemos $(x_*G)_y$ para $y \in X$.

Sea $y \in X$ y $\mathcal{V}(y)$ el conjunto de todas la vecindades de y. Para calcular los tallos tenemos los siguientes dos casos:

- Para todo $V \in \mathcal{V}(y)$ tenemos que $x \in V$.

  Dado que para todo $V \in \mathcal{V}(y)$ tenemos que $x \in V$, entonces $x_*G(V) = G$. Tomemos una clase de equivalencia $\langle V, s \rangle \in (x_*G)_y$ e identifiquemos cuáles son los elementos de dicha clase $\langle V, s \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle V, s \rangle &= \{(U,t) : (U,t) \sim (V,s)\} \\
&= \left\{(U,t) : \text{existe } W \in \mathcal{V}(y) \text{ con } W \subseteq U \cap V \text{ y } x_*G^U_W(s) = x_*G^V_W(t)\right\} \\
&= \{(U,t) : \text{existe } W \in \mathcal{V}(y) \text{ con } W \subseteq U \cap V \text{ y } s = t\} \\
&= \{(U,s) : U \in \mathcal{V}(y)\}
\end{aligned}$$

Hagamos el siguiente isomorfismo de grupos abelianos:

$$\begin{aligned}
f\colon\ (x_*G)_y &\to G \\
\langle V, s \rangle &\mapsto s
\end{aligned}$$

Entonces $(x_*G)_y \cong G$ siempre que para todo $V \in \mathcal{V}(y)$ tengamos que $x \in V$. En otras palabras $(x_*G)_y \cong G$ siempre que $y \in \overline{\{x\}}$.

- Supongamos que existe $V \in \mathcal{V}(y)$ de manera que $x \notin V$

  Veamos que para todo germen $\langle U, t\rangle \in (x_*G)_y$ se tiene que $\langle U, t\rangle = \langle V, s\rangle$. Para ello encontremos $W \in \Omega_y$ de manera que $W \subseteq U \cap V$ y $x_*G^U_W(t) = x_*G^V_W(s)$. Dado que $x \notin V$ tenemos que por definición $x_*G\,(V) = \{0_G\}$ y que $s = 0_G$. Tomemos $W = U \cap V$ y observemos que $W \in \mathcal{V}(y)$ y $x \notin W$. Por defindión $x_*G\,(W) = \{0_G\}$ y $x_*G^U_W(t) = 0_G$, igualando las restricciones de las secciones s y t tenemos que $x_*G^U_W(t) = x_*G^V_W(s)$.

  Notamos que $(x_*G)_y = \{\langle V, s\rangle\}$. Dado que $(x_*G)_y$ es un grupo abeliano con un sólo elemento, entonces $(x_*G)_y \cong \{0_G\}$.

  Finalmente $(x_*G)_y \cong \{0_G\}$ siempre que exista $V \in \mathcal{V}(y)$ de manera que $x \notin V$, o en otras palabras $(x_*G)_y \cong \{0_G\}$ si $y \notin \overline{\{x\}}$.

Por lo anteriormente dicho tenemos que el tallo asociado a $y \in X$ viene dado por:

$$(x_*G)_y = \begin{cases} G & \text{si} \quad y \in \overline{\{x\}} \\ \\ \{0_G\} & \text{si} \quad y \notin \overline{\{x\}} \end{cases}$$

Calculemos los tallos asociados al haz rascacielos usando límites directos.

- Veamos que si $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $\varinjlim_{U\in\mathcal{V}(y)} x_*G\,(U) = G$.

  Supongamos que para todo $V \in \mathcal{V}(y)$ tenemos que $x \in V$. Eso significa que para todo $V \in \mathcal{V}(y)$ se tiene que $x_*G\,(U) = G$, entonces:

$$\varinjlim_{U\in\mathcal{V}(y)} x_*G\,(U) = \varinjlim_{U\in\mathcal{V}(y)} G = G$$

- Veamos que si $y \notin \overline{\{x\}}$, entonces $\varinjlim_{U\in\mathcal{V}(y)} x_*G\,(U) = \{0_G\}$

  Supongamos que existe $V \in \mathcal{V}(y)$ de manera que $x \notin V$. Ahora consideremos la siguiente familia de homorfismos de grupos $\{\theta_U \colon x_*G(U) \to \{0_G\}\}$ y $\{\theta_V \colon x_*G(V) \to \{0_G\}\}$ con $U, V \in \mathcal{V}(y)$.

$$\theta_U \colon x_*G\,(U) \to \{0_G\}$$

$$\theta_U = \begin{cases} \widetilde{0_G} & \text{si} \quad x \in U \\ \\ Id_{\{0_G\}} & \text{si} \quad x \notin U \end{cases}$$

  Es sencillo observar que para $V \subseteq U$ el siguiente diagram conmuta:

$$\begin{tikzcd} x_*G\,(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "(x_*G)^U_V"'] & \{0_G\} \\ x_*G\,(V) \arrow[ur, "\theta_V"'] & \end{tikzcd}$$

  Mostremos que $\{0_G\}$ cumple con la propiedad universal del límite directo. Supongamos que existe un grupo abeliano M y familias de homomorfismos de grupo abelianos $\{\varphi_U \colon x_*G(U) \to M\}$ y $\{\varphi_V \colon x_*G(V) \to M\}$ con $U, V \in \mathcal{V}(y)$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} x_*G(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "(x_*G)^U_V"'] & M \\ x_*G(V) \arrow[ur, "\varphi_V"'] & \end{tikzcd}$$

Demostremos que existe un único homomorfismo $\psi\colon \{0_G\} \to M$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\varphi_U"'] & \{0_G\} \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Defínase ψ de la siguiente manera:

$$\psi = \begin{cases} \varphi_{U\cap V} & \text{si} \quad x \in U \\ \varphi_U & \text{si} \quad x \notin U \end{cases}$$

Debido que $\varphi_{U\cap V}$ y φ_U son funciones bien definidas , entonces ψ esta bien definida.

Finalmente probemos que $\psi \circ \theta_U = \varphi_U$.

- Si $x \in U$, entonces $(\psi \circ \theta_U)(g) = \psi(\theta_U(g)) = \psi(0_G) = \varphi_{U\cap V}(0_G)$, como $\varphi_U = \varphi_{U\cap V} \circ (x_*G)^U_{U\cap V}$, entonces $\varphi_U(0_G) = \varphi_{U\cap V}(0_G)$, de allí que $\psi \circ \theta_U = \varphi_U$.
- Si $x \notin U$, entonces $\psi(\theta_U(0_G)) = \psi(0_G) = \varphi_U(0_G)$, de allí que $\psi \circ \theta_U = \varphi_U$.

  Hemos mostrado que:

$$\varinjlim_{U\in\mathcal{V}(y)} x_*(G)(U) \cong \{0_G\}$$

  En conclusión:

$$(x_*G)_y \cong \begin{cases} G & \text{si} \quad y \in \overline{\{x\}} \\ \{0_G\} & \text{si} \quad y \notin \overline{\{x\}} \end{cases}$$

3.2. Hacificación

Proposición 3.4. [8]

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Entonces existe un par $(\mathcal{F}^+, \psi)$ donde $\mathcal{F}^+$ es un haz y $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es un homomorfismo de prehaces que cumple la siguiente propiedad universal:

Si $\mathcal{G}$ es un haz de grupos abelianos y $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces, entonces existe un único morfismo de haces $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi^+"] \\ \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

Es decir $\varphi = \varphi^+ \circ \psi$

Demostración. Para $U \subseteq X$ abierto definimos $\mathcal{F}^+(U)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}^+(U) = \left\{ s\colon U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{F}_x \right\}$$

De manera que las funciones s cumplan las siguientes propiedades:

1. Para todo $x \in U$ se tiene que $s(x) \in \mathcal{F}_x$
2. Para todo $x \in U$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ con $V \subseteq U$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ de manera que para todo $y \in V$ se tiene que $s(y) = \langle V, t\rangle$

Definimos los morfismos de restricción como: para $V \subseteq U$ las funciones $(\mathcal{F}^+)^U_V$ son:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^+)^U_V : \mathcal{F}^+(U) &\to \mathcal{F}^+(V) \\ s &\mapsto (\mathcal{F}^+)^U_V(s) := s\,|_V \end{aligned}$$

Veamos que en efecto $\mathcal{F}^+$ es un haz.

(i) Sea $U \subseteq X$ un abierto y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento cualesquiera de U. Sean $s, s' \in \mathcal{F}^+(U)$ con $(\mathcal{F}^+)^U_{U_i}(s) = (\mathcal{F}^+)^U_{U_i}(s')$, veamos que $s = s'$.

Sea $x \in U$, dado que $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto, entonces existe $k \in I$ de manera que $x \in U_k$ por tal razón es sencillo notar que $s(x) = s\,|_{U_k}(x)$. Usando la hipótesis obtenemos que:

$$s(x) = s\,|_{U_k}(x) = s'\,|_{U_k}(x) = s'(x)$$

Entonces $s = s'$

(ii) Sea $\{s_i : s_i \in \mathcal{F}^+(U_i)\}$ de manera que para para todo i, j se tiene que:

$$(\mathcal{F}^+)^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = (\mathcal{F}^+)^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$$

Veamos que existe $s \in \mathcal{F}^+(U)$ tal que $(\mathcal{F}^+)^U_{U_i}(s) = s_i$

Sea $x \in U$, como $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de U, existe $k \in I$ de manera que $x \in U_k$. Definimos ahora la función s de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s\colon U &\to \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{F}_x \\ x &\mapsto s(x) := s_k(x) \end{aligned}$$

Veamos que s es una aplicación bien definida:

Sea $x \in U$, supongamos que existe un único $k \in I$ de manera que $x \in U_k$, si $x = y$ y dado que s_k es una función obtenemos que $s_k(x) = s_k(y)$, y por defnción concluimos que $s(x) = s(y)$.

Supongamos ahora que existen $i_0, \ldots, i_r \in I$ de manera que $x \in U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}$. Por hipótesis tenemos que:

$$(\mathcal{F}^+)^{U_{i_0}}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_r}}(s_{i_0}) = \cdots = (\mathcal{F}^+)^{U_{i_r}}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_r}}(s_{i_r})$$

Si $x = y$, gracias a la hipótesis $s_{i_0}(x) = \cdots = s_{i_r}(x)$ lo que por defnción resulta que $s(x) = s(y)$. En conclusión s es una función.

Ahora veamos que $s \in \mathcal{F}^+(U)$

(1.) Sea $x \in U$, como $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto existe $k \in I$ de manera que $x \in U_k$. Dado que $s_k \in \mathcal{F}^+(U_k)$, entonces $s_k(x) \in \mathcal{F}_x$ lo que por definición tenemos que $s(x) \in \mathcal{F}_x$.

(2.) Finalmente veamos que para todo $x \in U$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ con $V \subseteq U$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ de manera que para todo $y \in V$ se tiene que $s(y) = \langle V, t\rangle$. Tomemos $x \in U$ por el inciso (1.) sabemos que: (a) existe $k \in I$ de manera que $x \in U_k$, y (b) que si $s_k \in \mathcal{F}^+(U_k)$ existe $W^{(k)} \in \mathcal{V}(x)$ con $W^{(k)} \subseteq U_k$ y $t^{(k)} \in \mathcal{F}\left(W^{(k)}\right)$ de manera que para todo $y \in W^{(k)}$ tenemos que $s(y) = \left\langle W^{(k)}, t^{(k)}\right\rangle$. Basta tomar $V = W^{(k)}$ para que $W^{(k)} \subseteq U_k \subseteq U$ y $t = t^{(k)}$. De esta manera concluye la demostración.

Finalmente observemos que se cumple la propiedad universal

Veamos que para cada $U \subseteq X$ abierto existe φ_U^+ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\varphi_U"'] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[dl, dashed, "\varphi_U^+"] \\
\mathcal{G}(U) &
\end{tikzcd}$$

Definamos ψ_U

$$\begin{aligned}
\psi_U \colon \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{F}^+(U) \\
t &\mapsto \psi_U(t)(x) := \langle U, t\rangle
\end{aligned}$$

Sea $U \subseteq X$ un abierto. Sea $s \in \mathcal{F}^+(U)$ y $x \in U$. Por definición existe $V^{(x)} \in \mathcal{V}(x)$ con $V^{(x)} \subseteq U$ y $t^{(x)} \in \mathcal{F}\left(V^{(x)}\right)$ tal que $s(y) = \left\langle V^{(x)}, t^{(x)}\right\rangle$.

Dado que $\left\{V^{(x)}\right\}_{x\in U}$ es un cubrimiento abierto de U, y que $t^{(x)} \in \mathcal{F}\left(V^{(x)}\right)$, por el morfismo φ concluimos que

$$\varphi_{V^{(x)}}(t^x) \in \mathcal{G}\left(V^{(x)}\right)$$

Hagamos ahora un extensión sobre $\mathcal{G}$

Dado que $\left\{V^{(x)}\right\}_{x\in U}$ es un cubrimiento abierto de U, veamos que para todo $x, y \in U$ tenemos que:

$$\mathcal{G}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\varphi_{V^{(x)}}\left(t^{(x)}\right)\right) = \mathcal{G}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\varphi_{V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)$$

Sea $z \in V^{(x)} \cap V^{(y)}$ por hipótesis sabemos que $s(z) = \left\langle V^{(x)}, t^{(x)}\right\rangle$ y $s(z) = \left\langle V^{(y)}, t^{(y)}\right\rangle$, es decir que en el tallo $\mathcal{F}_z$ tenemos la siguiente igualdad:

$$\left\langle V^x \cap V^y, \mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(x)}\right)\right\rangle = \left\langle V^x \cap V^y, \mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right\rangle$$

Eso significa que existe $W^{(z)}$ con $W^{(z)} \subseteq V^{(x)} \cap V^{(y)}$ de manera que:

$$\mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(x)}\right)\right) = \mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)$$

Aplicando $\varphi_{W^{(z)}} \colon \mathcal{F}\left(W^{(z)}\right) \to \mathcal{G}\left(W^{(z)}\right)$ obtenemos que:

$$\varphi_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(x)}\right)\right)\right) = \varphi_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)\right)$$

Dado que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\left(V^{(x)}\cap V^{(y)}\right) & \xrightarrow{\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}} & \mathcal{G}\left(V^{(x)}\cap V^{(y)}\right) \\
\mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\downarrow & & \downarrow\mathcal{G}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}} \\
\mathcal{F}\left(W^{(z)}\right) & \xrightarrow[\varphi_{W^{(z)}}]{} & \mathcal{G}\left(W^{(z)}\right)
\end{array}$$

Es decir:

$$\mathcal{G}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}} \circ \varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}} = \varphi_{W^{(z)}} \circ \mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}$$

Entonces:

$$\varphi_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(x)}\right)\right)\right) = \mathcal{G}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(x)}\right)\right)\right)$$
$$\varphi_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)\right) = \mathcal{G}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)\right)$$

Como

$$\mathcal{G}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(x)}\right)\right)\right) = \mathcal{G}^{V^{(x)}\cap V^{(y)}}_{W^{(z)}}\left(\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)\right)$$

Por la condicón (i) de la definción de haz aplicado a $\mathcal{G}$ tenemos que:

$$\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(x)}\right)\right) = \varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)$$

Dados que los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\left(V^{(x)}\right) & \xrightarrow{\varphi_{V^{(x)}}} & \mathcal{G}\left(V^{(x)}\right) \\
\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\downarrow & & \downarrow\mathcal{G}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}} \\
\mathcal{F}\left(V^{(x)}\cap V^{(y)}\right) & \xrightarrow[\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}]{} & \mathcal{G}\left(V^{(x)}\cap V^{(y)}\right)
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}\left(V^{(y)}\right) & \xrightarrow{\varphi_{V^{(x)}}} & \mathcal{G}\left(V^{(y)}\right) \\
\mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\downarrow & & \downarrow\mathcal{G}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}} \\
\mathcal{F}\left(V^{(x)}\cap V^{(y)}\right) & \xrightarrow[\varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}]{} & \mathcal{G}\left(V^{(x)}\cap V^{(y)}\right)
\end{array}$$

conmutan, es decir:

$$\mathcal{G}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}} \circ \varphi_{V^{(x)}} = \varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}} \circ \mathcal{F}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}$$
$$\mathcal{G}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}} \circ \varphi_{V^{(y)}} = \varphi_{V^{(x)}\cap V^{(y)}} \circ \mathcal{F}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}$$

Obtenemos que

$$\mathcal{G}^{V^{(x)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\varphi_{V^{(x)}}\left(t^{(x)}\right)\right) = \mathcal{G}^{V^{(y)}}_{V^{(x)}\cap V^{(y)}}\left(\varphi_{V^{(y)}}\left(t^{(y)}\right)\right)$$

Dado que $\mathcal{G}$ es un haz por la condicón (ii) de la definición de este, tenemos que existe un único elemento $g \in \mathcal{G}(U)$ de manera que para todo $x \in U$ implica que $\mathcal{G}^{U}_{V(x)}(g) = \varphi_{V^x}\left(t^{(x)}\right)$. Definimos el morfismo φ^{+}_{U} de la siguiente manera:

$$\varphi^{+}_{U} \colon \mathcal{F}^{+}(U) \to \mathcal{G}(U)$$
$$s \mapsto \varphi^{+}_{U}(s) := g$$

Veamos que el primer diagram conmuta. Notemos primero que $\mathcal{G}^{U}_{U}(g) = \varphi_U(t)$, y como $\mathcal{G}^{U}_{U} = Id_{\mathcal{G}(U)}$, entonces $g = \varphi_U(t)$. Veamos ahora que:

$$\varphi^{+}_{U} \circ \psi_U = \varphi_U$$

Tomemos $V^{(x)} = U$, entonces $\varphi^{+}_{U}(\psi_U(t)) = g = \varphi_U(t)$, de allí que el diagrama conmute, y como se tiene para cada $U \subseteq X$ abierto, entonces se cumple la propiedad universal.

$\square$

Definición 3.1. Al haz $\mathcal{F}^{+}$ se le conoce como la hacificación de $\mathcal{F}$

Ejemplo 3.3 (Hacificación del prehaz constante). [7] Sea X un espacio topológico y A un grupo abeliano, en el ejemplo 2,2 se definió el prehaz constante como:

$$\mathcal{C}_A(U) = \begin{cases} A & si \quad U \neq \emptyset \\ \{0_A\} & si \quad U = \emptyset \end{cases}$$

En el ejemplo 2,11 demostramos que $\mathcal{C}_A$ no es necesariamente un haz. Para determinar el haz asociado al prehaz constante calculemos $(\mathcal{C}_A)^{+}$.

Recordemos que:

$$(\mathcal{C}_A)^{+}(U) = \left\{ s \colon U \to \bigsqcup_{x \in U} (\mathcal{C}_A)_x \right\}$$

Tal que las funciones s cumplen las propiedades (1.) y (2.) de la demostración de la proposición 3,4. Para encontrar $(\mathcal{C}_A)^{+}$, primero calculemos los tallos $(\mathcal{C}_A)_x$. Por definicón tenemos que para $x \in X$:

$$(\mathcal{C}_A)_x = \varinjlim_{U \in \mathcal{V}(x)} \mathcal{C}_A(U) = \varinjlim_{U \in \mathcal{V}(x)} A = A$$

Dado que cada tallo es igual al grupo A, entonces:

$$\bigsqcup_{x \in U} (\mathcal{C}_A)_x = \bigsqcup_{x \in U} A = A$$

Y las condiciones (1.) y (2.) quedan transformadas de la siguiente manera:

1. para cada $x \in U$ tenemos que $s(x) \in A$
2. para cada $x \in U$ existen $V \in \mathcal{V}(x)$ con $V \subseteq U$ y $a \in A$ de manera que $s(y) = a$ para todo $y \in Y$

Es decir

$$(\mathcal{C}_A)^{+} = \{s \colon U \to A : s \text{ es localmente constante}\}$$

Diremos entonces que la hacificación de $\mathcal{C}_A$ es el haz de funciones localmente constantes.

3.3. Otras formas de construir haces

En las matemáticas es casi normal encontrar nuevas estructuras usando una estructura ya derminanda previamente, por ejemplo desde el concepto de grupo podemos construir el grupo cociente, el grupo de automorfismos, el producto tensorial de dos grupos, el producto semidirecto de dos grupos, etc. En esta sección veremos como aparecen algunos haces asociados (como en el concepto de grupo) usando haces ya prefijados. Estudiaremos el haz imagen directa, y solo haremos mención de otras construcciones interesantes de haces.

3.3.1. Haz imagen directa

Definición 3.2 (Haz imagen directa). [7] Sean X y Y dos espacios topológicos y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Dada $f\colon X \to Y$ una función continua podemos definir una estructura de haz $f_*\mathcal{F}$ sobre Y de la siguiente manera: para $V \subseteq Y$ abierto

$$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right)$$

Y para $W \subseteq V$ las funciones de restricción $f_*\mathcal{F}^V_W\colon f_*\mathcal{F}(V) \to f_*\mathcal{F}(W)$ se definen como $f_*\mathcal{F}^V_W = \mathcal{F}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}$

Proposición 3.5. $f_*\mathcal{F}$ define una estructura de haz sobre Y.

Demostración. Veamos que $f_*\mathcal{F}$ es un prehaz sobre Y:

- Para $V \subseteq X$ abierto se tiene $f_*\mathcal{F}^V_V = Id_{f_*\mathcal{F}(V)}$. Por definición $f_*\mathcal{F}^V_V = \mathcal{F}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V)}$. Dado que $\mathcal{F}$ es un prehaz se tiene que $\mathcal{F}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V)} = Id_{\mathcal{F}(f^{-1}(V))}$ y aplicando una vez más la defínción de $f_*\mathcal{F}$ obtenemos que $Id_{\mathcal{F}(f^{-1}(V))} = Id_{f_*\mathcal{F}(V)}$. Haciendo las debidas suusticiones tenemos que:

$$f_*\mathcal{F}^V_V = Id_{f_*\mathcal{F}(V)}$$

- Sean $W \subseteq V \subseteq U$ conjuntos abiertos de Y veamos que $f_*\mathcal{F}^U_W = f_*\mathcal{F}^V_W \circ f_*\mathcal{F}^U_V$. Dado que $\mathcal{F}$ es un prehaz tenemos la siguiente identidad $\mathcal{F}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(W)} = \mathcal{F}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)} \circ \mathcal{F}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(V)}$. Haciendo uso de la definición de $f_*\mathcal{F}$ tenemos que:

$$f_*\mathcal{F}^U_W = f_*\mathcal{F}^V_W \circ f_*\mathcal{F}^U_V$$

Veamos que $f_*\mathcal{F}$ es un haz. Sea $V \subseteq Y$ un abierto Y y $\{V_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de V, a ver que:

- Si $z, z' \in f_*\mathcal{F}(V)$ son tales que $f_*\mathcal{F}^V_{V_i}(z) = f_*\mathcal{F}^V_{V_i}(z')$, entonces $z = z'$. Por la defínción de $f_*\mathcal{F}$ tenemos que $z, z' \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ y $\mathcal{F}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(z) = \mathcal{F}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(z')$. Dado que $\mathcal{F}$ es un haz sobre X y $f^{-1}(V)$ es un abierto de X y $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de este, entonces $z = z'$.
- Sea $\{z_i : z_i \in f_*\mathcal{F}(V)\}$ una colección de secciones tales que para todo $i, j \in I$

$$f_*\mathcal{F}^{V_i}_{V_i\cap V_j}(z_i) = f_*\mathcal{F}^{V_j}_{V_i\cap V_j}(z_j)$$

Veamos que existe $z \in f_*\mathcal{F}(V)$ de manera que $f_*\mathcal{F}^V_{V_i}(z) = z_i$. Usando la defínción de $f_*\mathcal{F}$ tenemos que las hipótesis quedan transformadas en:

  - Una colección de secciones $\{z_i : z_i \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))\}$
  - Para todo $i, j \in I$ se tiene que $\mathcal{F}^{f^{-1}(V_i)}_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)}(z_i) = \mathcal{F}^{f^{-1}(V_j)}_{f^{-1}(V_j)\cap f^{-1}(V_j)}(z_j)$

Dado que $\mathcal{F}$ es un haz de X y $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $f^{-1}(V)$, entonces existe $z \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ de manera que $\mathcal{F}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(z) = z_i$. Usando nuevamente la definición de $f_*\mathcal{F}$ tenemos que existe $z \in f_*\mathcal{F}(V)$ de manera que $f_*\mathcal{F}^V_{V_i}(z) = z_i$.

□

3.3.2. Otras construcciones de haces

A continuación presentaremos algunas construcciones de haces generadas por medio de operaciones en haces ya prefijados. Todas ellas pueden ser encontradas en [7].

Sea X un espacio topológico, entonces:

(1) Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces de grupos abelianos (módulos, álgebras,etc.) sobre X. Llamamos $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ al **haz suma directa** sobre X, de manera que:

- Para $U \subseteq X$ subconjunto abierto de X, definimos $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$.
- Para $V \subseteq U$ los homomorfismos de restricción estan definidos como:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^U_V :\ (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) &\to (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(V)\\ s+t &\mapsto (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^U_V(s+t)\end{aligned}$$

Donde $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})^U_V(s+t) = \mathcal{F}^U_V(s) + \mathcal{G}^U_V(t)$.

(2) Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces de grupos abelianos (módulos, álgebras,etc.) sobre X. Llamamos $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ al **haz de homomorfismos** sobre X, de manera que:

- Para $U \subseteq X$ subconjunto abierto de X definimos $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) := \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$.
- Para $U \subseteq V$ los homomorfismos de restricción estan definidos como:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})^U_V :\ \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) &\to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_V, \mathcal{G}|_V)\\ f &\mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})^U_V(f) = f|_V\end{aligned}$$

Donde $f|_V(W) = f(W) \colon \mathcal{F}(W) \to \mathcal{G}(W)$.

(3) Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces de grupos abelianos (módulos, álgebras, etc.) sobre X. Llamamos $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ el **haz producto tensorial** sobre X, de manera que:

- Para $U \subseteq X$ subconjunto abierto definimos $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$.
- Para $V \subseteq U$ los homomorfismos de restricción estan definidos como:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^U_V :\ (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(U) &\to (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(V)\\ s \otimes t &\mapsto (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^U_V(s \otimes t)\end{aligned}$$

Donde $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^U_V(s \otimes t) = \mathcal{F}^U_V(s) \otimes \mathcal{G}^U_V(t)$.

(4) Sean X y Y dos espacios topológicos, $f \colon X \to Y$ una función continua y $\mathcal{G}$ un haz sobre Y. Llamamos $f^*_{pre}\mathcal{G}$ al prehaz **imagen inversa** que consiste en:

- Para $U \subseteq X$ subconjunto abierto de X, definimos $f^*_{pre}\mathcal{G}(U)$ como:

$$f^*_{pre}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{\substack{V\subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{talque } f(U)\subseteq V}} \mathcal{G}(V)$$

- Para $W \subseteq U$ los homorfismos de restricción estan definidos por la propiedad universal del límite directo, esto es:

$$f^*_{pre}\mathcal{G}^U_W \colon f^*_{pre}\mathcal{G}(U) \to f^*_{pre}\mathcal{G}(W)$$

  Esto significa que $f^*_{pre}\mathcal{G}^U_W \circ \mathcal{G}^U_V = \mathcal{G}^W_V$ donde $\mathcal{G}^U_V$ y $\mathcal{G}^W_V$ son las respectivas inyecciones al límite directo.

  Aun así este prehaz no es un haz para X, para solucionar el problema sólo basta tomar la hacificación de $f^*_{pre}\mathcal{G}$. Definimos el **haz imagen inversa** como $f^*\mathcal{G} = \left(f^*_{pre}\mathcal{G}\right)^+$.

CAPÍTULO 4

Espacio étalé

Antes de la definición moderna de haz, fue el matemático frances Henri Cartan quien dio por primera vez una definición concreta del concpeto de haz bajo lo que hoy se conoce como espacio étalé. Cartan uso ya la idea de *faisceaux* introducida por el otro matemático francés Jean Leray para generar un concepto más general para su propio trabajo matemático involucrado en la topología algebraica y variable compleja. En este capítulo presentaremos la primera definición de haz y algunas de sus consecuencias.

4.1. Espacio étalé

Definición 4.1. [4], [8], [1] y [2]

Sea X un espacio topológico fijo. Un espacio étalé de grupos abelianos (conjuntos, módulos anillos, espacio vectorial, álgebras,etc.) sobre X es una tripla (X, Y, π), donde Y es un espacio topológico y $\pi\colon Y \to X$ una aplicación continua y sobreyectiva, de manera que se cumple las siguientes condiciones:

1. π es un homeomorfismo local, es decir: para cada $y \in Y$ existe $V \in \mathcal{V}(y)$ y $U \in \mathcal{V}(\pi(y))$ tal que $\pi(V) = U$ y $\pi|_V\colon V \to U$ es un homemorfismo.
2. Para cada $x \in X$ se tiene que $\pi^{-1}(x)$ es un grupo abeliano.
3. la operación:

$$\begin{aligned} Y \times_X Y &\to Y \\ (y_1, y_2) &\mapsto y_1 - y_2 \end{aligned}$$

es continua. Donde $Y \times_X Y$ es el producto fibrado de Y, esto es:

$$Y \times_X Y = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y : \pi(y_1) = \pi(y_2)\}$$

Observación 4.1. Cuando no se pida que el espacio étalé tenga una estructura definida como grupo, anillo, módulo, espacio vectorial, etc. se dice que el espacio étalé es de conjuntos, y sólo basta con que cumpla la primera condición.

Proposición 4.1. [8]

Sea $\mathcal{E} = (X, Y, \pi)$ un espacio étalé, entonces podemos asosciarle a $\mathcal{E}$ un haz $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ sobre X de la siguiente manera: para cada abierto $U \subseteq X$ definimos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}}(U) = \{s\colon U \to Y : s \text{ es continua y } \pi \circ s = Id_U\}$$

Demostración. Para hacer la demostración se hace uso de las mismas ideas del ejemplo 2,7 □

Ejemplo 4.1 (Espacio étalé constante). Sea X un espacio topológico cualquiera y G un grupo abeliano. Dotemos a G de la topología discreta; definamos $Y = X \times G$ y $\pi\colon X \times G \to X$ como la función proyección, entonces $\mathcal{E}_G = (X, X \times G, \pi)$ es un espacio étalé.

Demostración. Para comenzar la demostración hay que aclarar dos cosas, (1) la topología asociada a $X \times G$ es la topología producto, y (2) que la función proyección $\pi\colon X \times G \to X$ es continua y sobreyectiva. Veamos ahora que $\mathcal{E}_G$ es un espacio étalé.

- π es un homemorfismo local: Sea $(x, g) \in X \times G$ y U_x cualquier vecindad abierta de x en el espacio topológico X. Démonos cuenta que dado U_x existe una vencindad para $(x, g) \in X \times G$ de la forma $(U_x, \{g\})$, esto gracias a que $\{g\}$ es un conjunto abierto de G. Como π es la función proyección $\pi\left(U_x, \{g\}\right) = U_x$. Veamos ahora que $\pi_{U_x \times \{g\}}\colon U_x \times \{g\} \to U_x$ es un homeomorfismo.
  - $\pi_{U_x \times \{g\}}$ es una función biyectiva: sean $(w, g), (w', g) \in U_x \times G$ de manera que $\pi_{U_x \times \{g\}}(w, g) = \pi_{U_x \times \{g\}}(w', g)$, como $\pi_{U_x \times \{g\}}$ es la función proyección tenemos que $w = w'$, es decir $\pi_{U_x \times \{g\}}$ es inyectiva. Ahora, sea $w \in U_x$, veáse que $w = \pi_{U_x \times \{g\}}(w, 0_G)$; de allí que π sea sobreyectiva. Como $\pi_{U_x \times \{g\}}$ es una función inyectiva y sobreyectiva, $\pi_{U_x \times \{g\}}$ es una función biyectiva.
  - $\pi_{U_x \times \{g\}}$ es un homeomorfismo: veamos que $\pi_{U_x \times \{g\}}$ y $\pi^{-1}_{U_x \times \{g\}}$ son funciones continuas. Sea $W \subseteq U_x$ un abierto de U_x, véase que $\pi^{-1}_{U_x \times \{g\}}(W) = W \times \{g\}$, entonces π es continua, esto gracias a que $W \times \{g\}$ es un abierto de $U_x \times \{g\}$. Ahora, como $\{(V, \{g\}) : V \subseteq U_x \text{ abierto y } g \in G\}$ es una base para la topología producto, entonces, por definición $\left(\pi^{-1}_{U_x \times \{g\}}\right)^{-1}(V \times \{g\}) = V$ (la imagen inversa de $\pi^{-1}_{U_x \times \{g\}}$), es decir $\pi^{-1}_{U_x \times \{g\}}$ es continua. En conslusión $\pi|_{U_x \times \{g\}}$ es un homemorfismo.
- $\pi^{-1}\left(\{x\}\right)$ es un grupo abeliano: véase que $\pi^{-1}\left(\{x\}\right) = \{x\} \times G$. Al conjunto $\{x\} \times G$ podemos dotarlo de un estructura de grupo de la siguiente manera: si $(x, g), (x.g') \in \pi^{-1}\left(\{x\}\right)$, entonces $(x, g) + (x, g') = (x, g + g')$. Para todo $(x, g) \in \pi^{-1}\left(\{x\}\right)$ el módulo de $\pi^{-1}\left(\{x\}\right)$ esta dado como $(x, 0)$. El elemento inverso para un elemento (x, g) es de la forma $(x, -g)$. De allí que $\pi^{-1}\left(\{x\}\right)$ tenga estructura de grupo abeliano.
- La operación dada por

$$Y \times_X Y \to Y$$
$$((x_1, g_1), (x_2, g_2)) \mapsto (x_1, g_1 - g_2)$$

  esta bien definida: como $((x_1, g_1), (x_2, g_2)) \in Y \times_X Y$, eso implica que $x_1 = x_2$ y $(x_1, g_1 - g_2) \in Y$. La operación es continua, pues $(x_1, g_1 - g_2) = \left(p\left(x_1\right), t\left(g_1, g_2\right)\right)$ donde $t\colon G \times G \to G$ es la función $t(g_1, g_2) = g_1 - g_2$. Dado que la topología producto de $G \times G$ coincide con la topología discreta para $G \times G$, la función t es una función continua. De allí que la operación sea continua.

  Entonces $(X, X \times Y, \pi)$ es un espacio étalé.

□

Definición 4.2 (Fibra de un espacio étale). [1]

Sea $\mathcal{E} = (X, Y, \pi)$ un espacio étalé, y $x \in X$. La fibra asociada a x (también llamada tallo o stalk asociado a x) es el conjunto:

$$\pi^{-1}(x) = \{y \in Y : \pi(y) = x\}$$

Definición 4.3 (Sección de un espacio étalé). [1] Sea $U \subseteq X$ un subcojunto abierto de X, una sección σ de un espacio étale $\mathcal{E} = (X, Y, \pi)$ es una función continua $\sigma\colon U \to Y$ que satisface $\pi \circ \sigma = Id_U$. Al conjunto de secciones de U se le nota como $\Gamma(U, Y)$

Definición 4.4 (Sección global de un espacio étale). [1]

Diremos que una sección σ es global si σ es una aplicación continua del espacio topológico X al espacio topológico Y. Notaremos $\Gamma(X, Y)$ al conjunto de secciones globales del espacio étalé $\mathcal{E} = (X, Y, \pi)$.

Proposición 4.2. Sea un espacio étalé $\mathcal{E} = (X, Y, \pi)$ y $U \subseteq X$ un subconjunto abierto de X. Dadas dos secciones $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, Y)$, y $x \in U$, entonces se cumple lo siguiente:

$$\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \text{ s y solo si } \sigma_1|_{U'_x} = \sigma_2|_{U'_x} \text{ donde } U'_x \in \mathcal{V}(x) \text{ con } U'_x \subseteq U$$

Demostración. Puede verse la demostración en [1] □

Ejemplo 4.2 (Espacio étalé asociado al espacio recubridor de la circunferencia). [1]

Sea $(\mathbb{R}, p)$ el espacio recubridor de $\mathbb{S}^1$, con $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ y $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Casi siempre al espacio $(\mathbb{R}, p)$ se le representa como una helice como se ve en la figura 4.1.

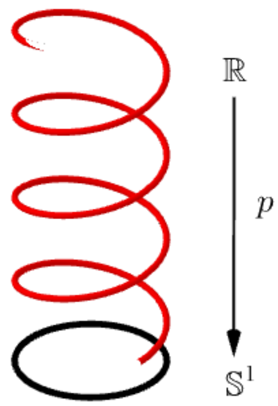

Figura 4.1: Representación de $(\mathbb{R}, p)$

Veamos que en efecto $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1, p)$ es un espacio étalé.

- Démonos cuenta p es una función continua y sobreyectiva.
- Veamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ existen $U_x \in \mathcal{V}(x)$ y $V_{p(x)} \in \mathcal{V}(p(x))$ de manera que $p(U_x) = V_{p(x)}$ y $p|_{U_x} \colon U_x \to V_{p(x)}$ es un homeomorfismo.

  Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, como $p(x) \in \mathbb{S}^1$ y $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio recubridor existe $V_{p(x)}$ de manera que:

  $$p^{-1}\left(V_{p(x)}\right) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

  Donde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ son abiertos de $\mathbb{R}$ y $p|_{U_\alpha} \colon U_\alpha \to V_{p(x)}$ es un homemorfismo para todo $\alpha \in \Lambda$. Como $x \in p^{-1}\left(V_{p(x)}\right)$ existe un único $\alpha \in \Lambda$ de manera que $x \in U_\alpha$. Llamemos a $U_\alpha = U_{\alpha,x}$, entonces existe $U_{\alpha,x} \in \mathcal{V}(x)$ y $V_{p(x)} \in \mathcal{V}(p(x))$ de manera que $p|_{U_{\alpha,x}} \colon U_{\alpha,x} \to V_{p(x)}$ es un homemorfismo y $p(U_{\alpha,x}) = V_{p(x)}$. □

De lo anterior resulta que $\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}, p\right)$ es un espacio étalé.

En los siguientes tres ejemplos veremos como son las fibras de dos puntos distinguidos del espacio étale, y cómo mediante una sección podemos "amarrar" dichas fibras.

Veamos dos ejemplos en donde podamos representar gráficamente las fibras de dos puntos del espacio étalé $(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}, p)$.

Ejemplo 4.3 (**Fibras y secciones del espacio étalé** $(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}, p)$ **).** Veamos algunas representaciones de fibras y secciones del espacio étalé $(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}, p)$

Sea $(1,0) \in \mathbb{S}^1$, calculemos $p^{-1}(\{(1,0)\})$.

$$p^{-1}(\{(1,0)\}) = \{x \in \mathbb{R} : (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) = (1,0)\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}\}$$

Una representación gráfica de la fibra puede ser la siguiente:

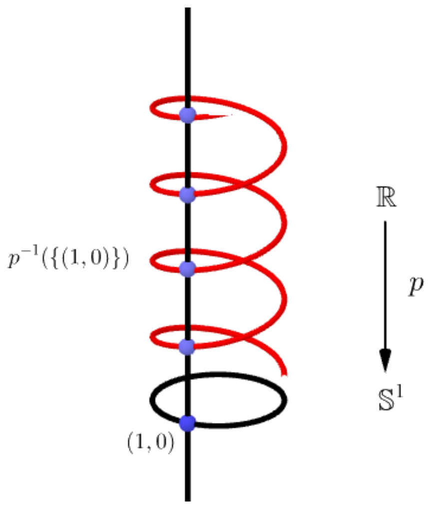

Figura 4.2: La fibra $p^{-1}(\{(1,0)\})$

La fibra asociada al punto $(-1,0)$ es la siguiente:

$$p^{-1}(\{(-1,0)\}) = \{x \in \mathbb{R} : p(x) = (-1,0)\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Una representación gráfica de la fibra puede ser la siguiente:

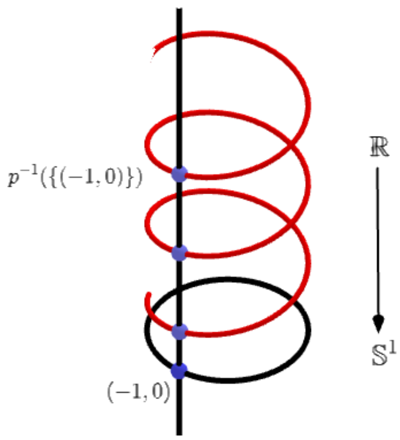

Figura 4.3: La fibra $p^{-1}(\{(-1,0)\})$

Ya que tenemos dos fibras de nuestro espacio étalé podemos intentar conseguir una sección σ, de manera que "amarre" dichas fibras. Consideremos el abierto U de $\mathbb{S}^1$ como se ve en la figura de manera que $(-1,0),(1,0) \in U$.

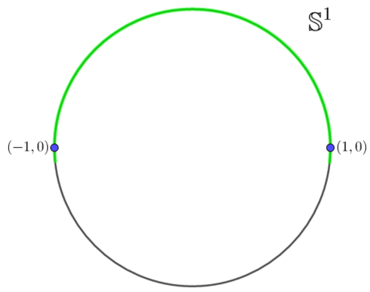

Figura 4.4: Abierto U de $\mathbb{S}^1$

Para el subconjunto abierto U consideremos la siguiente sección $\sigma\colon U \to \mathbb{R}$, definida como $\sigma(\cos(t),\sin(t)) = \frac{t}{2\pi}$, es sencillo observar que σ es una aplicación bien definida y continua sobre el abierto U. También es sencillo observar que $p \circ \sigma = Id|_U$. De lo anterior tenemos que σ es una sección. Una representación gráfica de la sección σ es la siguiente.

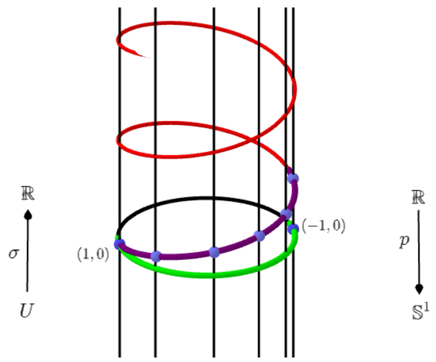

Figura 4.5: Representación de la sección σ

La sección σ esta representada por la curva purpura de la imagen. Vemos como la sección "ata" las fibras $p^{-1}(\{(1,0)\})$ y $p^{-1}(\{(-1,0)\})$.

4.2. Conclusiones

En general la teoría de haces no se estudia como una teoría propia, sino más bien como una herramienta de los matemáticos para intentar globalizar objetos de tipo local. Aunque se mostraron partes muy importantes en torno a la definición haz, faltaron conceptos de suma importancia que surgen de la definción de haz. Tomemos como ejemplo la cohomología de haces, en donde con ayuda del concepto de haz y los módulos de cohomología asociados a este, ayudaron a generalizar problemas de la variable compleja. Además de la ayuda de los haces en resolver problemas determinados, esta teoría no tendría tanta importancia si no fuera por la figura de Alexander Grothendieck quien uso dicho objeto para dar un giro revolucionario a toda la matemática de su época.

Falto en el cuerpo del texto no solo explicar la forma de pensar los haces a lá Grothendieck, sino las muchas estructuras importantes de nuestra época en torno al concepto de haz, por ejemplo los haces fibrados, los haces principales, los haces coherentes, los esquemas, los topos, los stacks, los $\mathcal{D}$-módulos, los haces automorfos, haces perversos, etc. Objetos que dan hoy gran parte de la investigación en matemáticas y que muy seguramente con el tiempo iran apareciendo en la investigación matemática de Colombia.

Bibliografía

[1] Caicedo, X. (1995). Lógica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 19(74):569–86.

[2] Cartan, H. (1950-1951). Faisceaux sur un espace topologique. I. *Séminaire Henri Cartan*, 3. talk:14.

[3] Halter-Koch, F. (2022). *Class Field Theory and L Functions: Foundations and Main Results*. CRC Press.

[4] Hartshorne, R. (2013). *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media.

[5] Lezama, O. (2020a). *Cuadernos de Álgebra, No 01: Grupos* . SAC^2, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[6] Lezama, O. (2020b). *Cuadernos de Álgebra, No 10: Geometría Algebraica* . SAC^2, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[7] Montero, P. (2021). *Geometría algebraica*. Universidad tecnica federico santa maria.

[8] Rivera, Y. (2017). Una introducción a la teoría de haces y esquemas. Master's thesis, Universidad del Valle, Colombia.

[9] Rubiano, G. (2010). *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia, tercera edition.