EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN LA EDUCACIÓN EN LÍNEA DE ESTUDIANTES DE GRADOS SEXTO Y ONCE FUNDAMENTADO EN EL MODELO DE VAN HIELE

JENNY ALEXANDRA HERRERA GONZALEZ

MICHAEL STEVEN FORERO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLIGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2022

EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN LA EDUCACIÓN EN LÍNEA DE ESTUDIANTES DE GRADOS SEXTO Y ONCE FUNDAMENTADO EN EL MODELO DE VAN HIELE

JENNY ALEXANDRA HERRERA GONZALEZ

Código 2016140043

MICHAEL STEVEN FORERO

Código 2016140028

Monografía para optar el título de
Licenciado en Matemáticas

Asesores:

DR. CARLOS ROBERTO PÉREZ MEDINA

MG. TANIA JULIETH PLAZAS MERCHÁN

Profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLIGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2022

Dedicatoria

A Dios quien me ha dado la fuerza y el valor para soñar y no desfallecer en este proceso, agradezco cada bendición y promesa que me ha brindado durante este tiempo.

A mis padres Jhon y Adriana por su amor, paciencia y comprensión durante este proceso formativo. Por sus oraciones y consejos, porque mediante estos hacían que recobrara el ánimo y la fe.

A mis hermanos Daniela y Mauricio, por su cariño, alegría y apoyo incondicional, por estar junto a mí en todo momento y ser mi mayor motivación para continuar este camino.

A mis líderes Jorge y Marcela por sus consejos y oraciones, ya que a lo largo de este camino me enseñaron a creer que en Dios todo es posible y que en él podemos dejar nuestras cargas.

- Jenny H.

A mi mami Anita que con su fortaleza, entrega, amor y apoyo incondicional desde mi infancia ha aportado en mi formación como ciudadano y ahora como futuro educador matemático. Por ese corazón grande y amoroso que me brinda respaldo y tranquilidad en todos mis propósitos.

A mi papi Andrés que toda su vida la entregó por nosotros. Desafortunadamente ahora estás en un sueño profundo, no pienso despertarte porque mereces descansar por tu tan arduo trabajo realizado mientras estabas despierto. A ti que me apoyaste y estuviste pendiente hasta de lo mínimo. Sé que mi carácter generó discordias, pero eso no quita lo orgulloso de lo valiente y guerrero que eres. (Duele tu ausencia Nochito)

A mi abuela Beny que con su apoyo, comprensión y palabras de aliento han forjado en mí las intenciones de salir adelante y superarme a diario.

A mis tíos y en especial a Georgi que me recibió en su hogar como un consentido más, me brindó su amor y complicidad. Gracias por todas las semanas Santas compartidas Georgi. De igual manera a mi tío Poncho que siempre fue el pilar de los Forero, con su ternura y afecto forjó una familia unida. Gracias por tan maravillosas visitas. (Descansen en paz Georgi y Poncho)

A mis hermanos Vero y Brayan que con sus palabras de aliento y compañía aliviaron este camino lleno de desafíos.

A Alexandra por tenerme paciencia y por ser esa confidente maravillosa que con una palabra o sonrisa motiva y alegra un día de tristezas. Infinita admiración y respeto a tu manera de ser y auguro muchos éxitos en tu vida. ¡Siempre mejorando porque somos …!

- Michael F.

Agradecimientos

Agradecemos a Dios por la vida, ya que con este tiempo de pandemia comprendimos que la muerte es una realidad innegable que no está ligada al envejecimiento. También agradecemos por todos los beneficios recibidos en este tiempo como la paciencia, sabiduría, entendimiento, discernimiento. Además, por todas las personas que nos puso en el camino de la vida, que con palabras de aliento nos dieron el valor y el ánimo para no desfallecer en nuestro proceso de formación como futuros educadores matemáticos y que desafortunadamente no nos acompañan en la culminación de este.

A la Universidad Pedagógica Nacional por brindarnos la oportunidad de hacer parte de un programa de formación de profesores de matemáticas, conformado por educadores dedicados y exigentes en su ejercicio profesional, ya que con esto despertaron en nosotros intenciones de ser educadores innovadores y comprometidos con la educación, de igual forma nos motivaron a ser promotores de principios, metas y ciudadanos críticos.

A nuestros directores por acompañarnos en esta etapa, y en particular a nuestro director Carlos Pérez que con su compromiso y diligencia nos apoyó durante este proceso, apreciamos mucho su esfuerzo, dedicación, exigencia y sacrificios. En muchas ocasiones quisimos desfallecer, pero su pasión por el quehacer docente nos motivó a establecer desafíos propios y continuar con esta experiencia de aprendizaje.

A nuestros padres por su amor, consejos, dedicación, sacrificios y motivación para que diéramos lo mejor de nosotros en este proceso de formación. A nuestros hermanos por ser los mejores compañeros de vida y apoyarnos en el cumplimiento de nuestras metas.

A la profesora Marcela Usaquén por su apoyo incondicional en la aplicación de la secuencia de tareas en su Colegio San Francisco de Asís de Nemocón.

Asimismo, agradecemos a Jeison, Leonardo, Juan, Mabel, Paula, Kely y Lennyx. Con los cuales vivenciamos lazos de amistad experimentado sentimientos de tristeza, cansancio, frustración, apoyo incondicional, alegría y motivación.

Gracias …

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Resumen

El Modelo de Van Hiele contempla un aspecto descriptivo en el que se describe el razonamiento de los estudiantes a través de una distribución escalonada en niveles secuenciales y ordenados que no van asociados a la edad. Este trabajo de grado se realiza con el objetivo de caracterizar el nivel de Van Hiele, con respecto a la clasificación de cuadriláteros, de estudiantes de sexto y once del Colegio San Francisco de Asís.

El instrumento empleado ha sido una secuencia de tareas compuesta por cinco etapas. Cada una tiene tareas de reto, al estilo de un test con respuesta libre. Con estas se espera que los estudiantes presenten respuestas enunciando elementos que conforman un cuadrilátero, o si únicamente se centran en el aspecto físico, haciendo referencia al color, tamaño, posición, entre otros. Asimismo, si relacionan figuras con objetos del entorno, reconocen y clasifican figuras teniendo en cuenta semejanzas o diferencias globales entre ellas, enuncian las propiedades de los cuadriláteros y relacionan propiedades generando clasificaciones. Tras el análisis de la información de las respuestas de los estudiantes, se ha obtenido como resultado que la mayoría de los estudiantes de grado sexto se encuentran mayoritariamente en el nivel de reconocimiento o visualización y los estudiantes de grado once se encuentran mayoritariamente en el nivel de análisis.

Palabras clave: niveles de Van Hiele, cuadriláteros, secuencia de tareas, educación en línea, gamificación y caracterización del nivel de razonamiento de Van Hiele.

Introducción

Debido al surgimiento del Covid – 19, la Secretaría de Educación de Cundinamarca mediante la circular No 000025 del 16 de marzo del 2020 convocó a las comunidades educativas del sector oficial y privado del departamento a implementar entornos digitales mediados por las Tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) con el fin de continuar atendiendo y cumpliendo sus funciones dentro de la comunidad.

Lo anterior descrito generó que en un lapso muy corto de tiempo los profesores modificaran y replantearan sus metodologías, materiales y recursos utilizados en clases presenciales, haciendo uso de las TIC en un entorno telemático. Esta transición de educación presencial a educación en línea trajo una necesidad de herramientas didácticas para desarrollar el contenido del currículo en la virtualidad.

Algunos autores como Cáceres (2017), Maldonado (2013, citado en Cáceres, 2017) y Vargas y Gamboa (2013, citados en Cáceres, 2017) han presentado propuestas didácticas mediadas por las TIC fundamentadas por el Modelo de Van Hiele. Este Modelo, propuesto por los esposos Van Hiele en el año 1957, describe el razonamiento de los estudiantes a través de una distribución escalonada en cinco niveles secuenciales y ordenados que no van asociados a la edad. Los niveles de razonamiento se conocen actualmente como: nivel de reconocimiento o visualización, nivel de análisis, nivel de ordenación o clasificación, nivel de deducción formal y nivel de rigor. Es de resaltar que cada uno de estos niveles contienen características que se reflejan en las producciones de los estudiantes.

Con base en lo anterior, deseamos contribuir a través de este trabajo de grado al desarrollo de recursos didácticos para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría vinculando entornos de educación en línea y el aspecto descriptivo del Modelo de Van Hiele. Es por eso que nos proponemos diseñar una secuencia de tareas mediadas por las TIC para los grados sexto y once, con la finalidad de caracterizar el nivel de razonamiento geométrico que tienen los estudiantes con relación a la clasificación de cuadriláteros. Se busca implementar la gamificación dado que asocia entornos de educación en línea y motiva, concentra y potencializa las habilidades de los estudiantes mediante diversas estrategias de juego.

Este trabajo de grado se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema abordando temáticas como la educación en pandemia, las consideraciones a tener en encuentra para el trabajo de campo en el Colegio San Francisco de Asís, investigaciones o trabajos asociados al tema de interés y la enunciación del objetivo general y los objetivos específicos del presente trabajo.

En el Capítulo 2 se presenta la indagación bibliográfica acerca de aspectos relevantes del Modelo de Van Hiele como su origen, los niveles de razonamiento, sus propiedades y su evaluación. También se presentan características de la educación en línea, la gamificación y el objeto geométrico cuadriláteros, con el fin de contar con insumos teóricos indispensables para el diseño de la secuencia de tareas.

En el Capítulo 3 se presenta el diseño de la secuencia de tareas, iniciando con la contextualización del Colegio San Francisco de Asís, la caracterización de los estudiantes de grado sexto y once y la descripción de los elementos involucrados en el diseño de la secuencia de tareas. Posteriormente se describen las tareas de reto diseñadas en GeoGebra *Classroom* organizados en cinco etapas que componen una secuencia.

En el Capítulo 4 se expone la aplicación de la secuencia de tareas y cómo se llevó a cabo la recolección de la información de las respuestas de los estudiantes de ambos grados. Asimismo, se realiza la descripción y análisis de las respuestas y se concluye determinando su respectivo nivel de Van Hiele.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones, sugerencias y proyecciones relacionadas directamente con los objetivos del presente trabajo de grado.

Luego se presentan los anexos del trabajo de grado. El anexo 1 muestra un ejemplo de los códigos de acceso a *Classcraft* que fueron enviados a los correos electrónicos de los estudiantes. Los anexos 2 a 6 corresponden respectivamente a las etapas I, II, III, IV y V de la secuencia de tareas propuesta. Por último, el anexo 6 atañe a un ejemplo particular de la copia de seguridad que crea GeoGebra *Classroom* de las respuestas de los estudiantes a cada una de las etapas que componen la secuencia de tareas.

Capítulo 1. Planteamiento del Tema

La Educación en Pandemia

El Decreto 140 del 16 de marzo de 2020 de la Gobernación de Cundinamarca declaró la Emergencia Sanitaria, en concordancia con la Directiva Presidencial No. 02 del 12 de marzo de 2020, en la cual, se brindan medidas para atender la contingencia generada por el Covid-19 mediante el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC). La circular No. 19 del 14 de marzo de 2020 del Ministerio de Educación Nacional, promovió el desarrollo de alternativas flexibles que integren lo académico y las TIC para adoptar medidas y garantizar la continuidad en la prestación del servicio educativo. El anuncio por parte del Gobierno Nacional el 15 de marzo de 2020 determinó la suspensión de clases presenciales a partir del 16 de marzo de 2020. Teniendo en cuenta estas disposiciones, la Secretaría de Educación de Cundinamarca, mediante la circular No. 000025 del 16 de marzo del 2020, convocó a las Comunidades Educativas del sector oficial y privado del Departamento a continuar atendiendo e implementando las recomendaciones para la prevención, manejo y control de las infecciones respiratorias en el entorno educativo. En esta circular también se expresó que el 20 de abril de 2020, de acuerdo con las disposiciones emanadas por el Gobierno Nacional, se reiniciarían las clases de manera presencial o se definirían alternativas no presenciales, aprovechando los entornos digitales que contemplen las Instituciones Educativas.

La Secretaría de Educación de Cundinamarca, mediante la Circular No. 0058 del 22 de julio del 2020, expresó las orientaciones que debían considerar los establecimientos educativos Privados de los municipios del Departamento para un posible retorno gradual y progresivo a la presencialidad bajo el esquema de alternancia. Este implica una combinación del trabajo académico en casa, complementado con encuentros periódicos presenciales. No obstante, la misma Secretaría aclaró que el proceso de alternancia se seguiría evaluando progresivamente a medida que evolucionara la emergencia sanitaria. Es de resaltar que algunas Instituciones

Educativas implementaron la modalidad de alternancia hasta mediados del año 2021, puesto que debían adecuar su planta física y cumplir todas las normas y reglamentos para llevar a cabo esta modalidad.

La Emergencia Sanitaria planteó enormes retos en el ámbito educativo en cuanto a la necesidad de buscar nuevas formas de trabajo con los niños, niñas, adolescentes y jóvenes, en las que los maestros contaran con metodologías y herramientas apropiadas para desarrollar las actividades de enseñanza y aprendizaje en entornos no presenciales. Por ello, las prácticas pedagógicas y los sistemas educativos sufrieron modificaciones y en algunos casos se replantearon por completo. Esto generó un antes y un después en el proceso de enseñanza y aprendizaje, dando paso a la creación, desarrollo e implementación de entornos escolares virtuales en reemplazo de los presenciales.

La educación virtual estaba más bien reservada a experiencias aisladas que aportaban estrategias innovadoras de enseñanza y aprendizaje de manera complementaria de la educación presencial, tal como lo enuncian Expósito y Marsollier (2020). A partir de la emergencia sanitaria se empezó a hablar constantemente de la educación virtual, educación a distancia, educación remota y educación en línea, cayendo en el error de asumir que se trata de lo mismo. Según el Ministerio de Educación Nacional [MEN] (Ministerio de Educación Nacional, 2017) de Colombia e Ibañez (2020) hay un contraste entre estas modalidades:

- La educación en línea es vista como aquella modalidad en la cual se crean ambientes sincrónicos de participación e interacción entre docentes y estudiantes, haciendo uso de plataformas como *Zoom*, *Meet*, *Teams*, etc. y posteriormente se suben actividades a plataformas que complementen el contenido abordado (Ibañez, 2020, p.1).
- En la educación virtual se desarrollan programas de formación que tienen como escenario de enseñanza y aprendizaje el ciberespacio. Funciona de manera asincrónica; es decir, los horarios de los profesores y estudiantes no

necesariamente coinciden para lograr un encuentro de diálogo o experiencia de aprendizaje. Sus recursos son estrictamente tecnológicos (Ministerio de Educación Nacional, 2017, p.1).

- La educación a distancia se desarrolla de forma presencial y virtual. Esto facilita el aprendizaje de los estudiantes al implementar herramientas o materiales que no requieren una conexión a internet o recursos computacionales. Un ejemplo actual de esta modalidad es la educación a distancia por canales de televisión abierta o por radio, que fueron impulsados por las secretarias de educación en varios países (Ibañez, 2020, p.1).
- La educación remota surgió debido a la crisis mundial por la enfermedad COVID - 19 en el año 2020. Esta muestra la variación de cómo cada institución asumió el cambio educativo; por esta razón no se encuentran definidos los roles y las herramientas a utilizar (Ibañez, 2020, p.1).

Atendiendo a la suspensión de clases presenciales por parte del Gobierno Nacional, el 15 de marzo de 2020 y la circular No.19 del 14 de marzo de 2020 del MEN, las instituciones Educativas de la Básica y la Media en contextos urbanos y rurales optaron por alguna de las modalidades anteriormente expuestas. Esto llevó a que en un lapso muy corto los docentes modificaran y replantearan sus metodologías, materiales y recursos utilizados en clases presenciales, haciendo uso de las TIC en un entorno telemático. En la transición de la educación presencial a la educación en línea se generaron grandes desafíos para los docentes, ya que la mayoría de recursos y propuestas didácticas están diseñados para un ambiente presencial. Ello hizo que los maestros no contaran con las suficientes herramientas didácticas para desarrollar las sesiones virtuales, lo que causó déficit en las herramientas didácticas con las que desarrollaban el contenido del currículo en la virtualidad y se recrearan clases tradicionales, expositivas y sesiones que limitaban la actividad de los estudiantes.

Según el MEN (2017) lo que garantiza la calidad de la educación es la consolidación coherente y armónica de un modelo que ponga el sentido pedagógico de los procesos por encima de los instrumentos. La propuesta curricular vigente en el país para la educación matemática (Ministerio de Educación Nacional, 1998, 2006) establece que se deben propiciar aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo se haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en el desarrollo de procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender. Los procesos de pensamiento generales de la actividad matemática son razonamiento; formulación, tratamiento y resolución de problemas; comunicación; modelación y formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

En este orden de ideas, en la situación de uso masivo de las TIC en la Educación Matemática en tiempos de pandemia, surgió la necesidad de conocer el nivel de desarrollo de los cinco procesos generales de la actividad matemática que tienen los estudiantes. En ese sentido, en este trabajo se propone el diseño de una secuencia de tareas de geometría para implementarse en entornos de educación en línea, que tiene como propósito caracterizar e identificar el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes de grados sexto y once según el Modelo de Van Hiele (Fouz y De Donosti, 2005). Con ello se pretende aportar material a los profesores para una situación de enseñanza remota y aislamiento, que les puede ayudar a conocer el nivel de desarrollo del proceso de razonamiento de sus estudiantes en geometría.

Consideraciones para el trabajo de campo

El Colegio católico San Francisco de Asís del municipio de Nemocón busca orientar la formación de personas críticas, solidarias e investigativas en el ámbito académico, social e intelectual. Cabe resaltar que su metodología constructivista favorece al desarrollo de seres autónomos y constructores de su propio conocimiento. Por esta razón, el Colegio propone proyectos transversales que vinculan diferentes asignaturas, con el objetivo de dar sentido y contexto al conocimiento nuevo (Colegio católico San Francisco de Asís de Nemocón, 2017). El Colegio cuenta con el proyecto Cundinamarca Apropia la Ciencia, Tecnología e Innovación (CACTI) que vincula matemáticas, ciencias y tecnología, en el que se propone la construcción de modelos robóticos que parten de una programación que requiere nociones matemáticas y la adaptabilidad de dicho robot a los entornos físicos. El proyecto CACTI va dirigido a los estudiantes de grado cuarto, quinto, sexto y séptimo. Sin embargo, con los grados octavo, noveno, décimo y once se desarrollan algunos temas de dicho proyecto. Los profesores del área de matemáticas del Colegio están en la búsqueda constante de actividades y/o proyectos que promuevan el desarrollo y solución de situaciones contextualizadas, con el objetivo de que los estudiantes identifiquen la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas.

En ese marco, el Colegio San Francisco de Asís nos presenta la posibilidad de aplicar nuestra propuesta pedagógica de secuencia de tareas de geometría mediadas por las TIC, para caracterizar e identificar el nivel de razonamiento que alcanzan sus estudiantes de grado sexto y once. El objeto matemático que se abordará en la secuencia de tareas se eligió de acuerdo con el currículo de matemáticas del Colegio y la comparación entre los contenidos de los grados sexto y once para geometría. El contenido cuadriláteros y su clasificación se aborda en grado sexto y se retoma en grado once para fortalecer los conocimientos de los estudiantes y ayudarlos en la preparación del examen Saber 11 propuesto por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES).

Diseñamos la secuencia de tareas tomando como referencia el Modelo de Van Hiele y siguiendo un procedimiento metodológico sistemático (Goncalves, 2006) sobre el contenido, caracterización y clasificación de cuadriláteros a partir de la identificación de sus propiedades.

Antecedentes

Algunos trabajos de investigación han mostrado que es pertinente el uso del Modelo de Van Hiele para el diseño de propuestas didácticas a través de la enseñanza mediada por las TIC. Por ejemplo, Cáceres (2017) analiza el proceso de aprendizaje de las traslaciones en el plano fundamentado en el Modelo de Van Hiele mediado por el software GeoGebra de estudiantes de grado séptimo del Centro educativo Rural Sucre del municipio de Mutiscua (Norte de Santander-Colombia). Esta investigación se caracterizó por ser cualitativa, en particular investigación-acción. Las preguntas que orientaron este trabajo fueron las siguientes:

- ¿Qué nivel de aprendizaje tienen los estudiantes de séptimo grado en cuanto a las traslaciones en el plano?
- ¿Cómo se puede apoyar el proceso de aprendizaje de las traslaciones?
- ¿Qué beneficios se obtienen en el aprendizaje de las traslaciones en el plano al implementar proyectos de aula basados en el Modelo de Van Hiele y mediados por GeoGebra?

Para dar respuesta a estas preguntas el investigador inicialmente realizó un pretest a los estudiantes con la finalidad de caracterizar su nivel de aprendizaje en cuanto al tema de traslaciones en el plano. Luego diseñó tres proyectos de aula tomando como referencia las fases del Modelo de Van Hiele y utilizando GeoGebra. Por último, diseñó y aplicó un postest a los estudiantes para reconocer su avance en el aprendizaje de las traslaciones en el plano. El autor de este trabajo concluyó que el Modelo de Van Hiele facilita el aprendizaje de los estudiantes y permite hacer una evaluación permanente del aprendizaje. También afirma que incluir las TIC permite que los estudiantes pasen por la fase de integración de una forma práctica y agradable.

Maldonado (2013, citado en Cáceres, 2017) realizó un trabajo de investigación que llamó “Enseñanza de las simetrías con uso de GeoGebra según el Modelo de Van Hiele”, en el que hizo una comparación entre tres currículos, el de enseñanza tradicional, otro en el que aplicó el Modelo de Van Hiele y otro en el que se aplica el Modelo de Van Hiele y el uso de GeoGebra. Este autor, por medio de su investigación, llega a la conclusión que la enseñanza basada en el Modelo de Van Hiele muestra mejores resultados que el del Modelo de enseñanza tradicional.

Asimismo, Vargas y Gamboa (2013, citados en Cáceres, 2017) en su trabajo titulado "La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso de GeoGebra, según el Modelo de van hiele", realizan una investigación con estudiantes de secundaria, en la cual abordan el teorema de Pitágoras y su recíproco mediante el uso de GeoGebra y el Modelo de Van Hiele. Estos autores llegan a la conclusión que el uso de GeoGebra motiva a los estudiantes y favorece sus resultados académicos.

A continuación, se muestran algunos trabajos que se toman como referencia para la caracterización y evaluación del nivel de razonamiento según el Modelo de Van Hiele. Estos trabajos presentan cómo se desarrolla la evaluación del nivel de razonamiento en escenarios en los cuales no hacen uso de las TIC.

Corberán et al. (1994) realizan un proyecto de investigación titulado "Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele". Buscaban ofrecer una propuesta curricular de enseñanza de la Geometría plana. En este proyecto de investigación se contemplaron tres etapas. En la primera se sentaron las bases teóricas en las que se resaltó el origen y las características del Modelo de Van Hiele; esta información la consideraron para planificar el trabajo del equipo investigador y desarrollar el material que se implementaría. Cabe resaltar que este material comprende unidades para la enseñanza de generalidades de polígonos, triángulos y cuadriláteros y dos test para evaluar el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes antes y después de haber estudiado el material de enseñanza.

En la segunda etapa, elaboraron las unidades de enseñanza de la Geometría y la experimentación que se realizó simultáneamente en 5 Institutos de Formación Profesional de la provincia de Valencia. La muestra que se tomó para realizar el estudio estaba conformada por 165 adolescentes con edades comprendidas entre 14 y 15 años, de primer curso de Formación Profesional y de primer curso de Bachillerato General. En la tercera etapa se redactaron las consideraciones y características de la evaluación según el Modelo de Van Hiele y se diseñaron dos test que se aplicaron con el objetivo de determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes en base a los contenidos geométricos centrales de las unidades de enseñanza experimentadas.

Por su parte, Jaime (1993) en su trabajo doctoral presenta, como objetivo, analizar algunas componentes del Modelo de Van Hiele, aportando sugerencias metodológicas y de aplicación que ayuden a conocer mejor el Modelo y a utilizar todo su potencial de manera eficaz para mejorar la enseñanza de las matemáticas. En la tesis doctoral se realizó una revisión y descripción de los principales componentes del Modelo de Van Hiele y se tomaron como referencia los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele para un diseño curricular de una unidad de enseñanza de las isometrías del plano. Cabe resaltar que la unidad propuesta en el trabajo es el resultado de experimentaciones realizadas con estudiantes de cursos 1° a 8° de Educación General Básica y estudiantes de la Escuela de Magisterio en Valencia.

Por último, Jaime (1993) se apoya en la idea de continuidad en la adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele, y plantea una interpretación del proceso seguido por los estudiantes en su avance a través de los sucesivos niveles. Propone una técnica para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes. Asimismo, presenta una definición del concepto de grado de adquisición de los niveles de Van Hiele y un método de evaluación de los grados de adquisición, el cual permite analizar e interpretar las respuestas a ítems de respuesta libre.

Objetivos

Teniendo en cuenta la masificación en la implementación de la virtualidad en la Educación Colombiana a nivel nacional, y la necesidad que todavía existe de recursos didácticos mediados por las TIC para implementarlos en la educación en línea, como futuros licenciados en matemáticas deseamos contribuir con este trabajo al desarrollo de recursos didácticos cuyo uso generarían aportes para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría en un entorno de educación en línea. Es por eso que nos proponemos diseñar una secuencia de tareas mediadas por las TIC para los grados sexto y once del Colegio San Francisco de Asís de Nemocón, con la finalidad de caracterizar el nivel de razonamiento geométrico que tienen los estudiantes con relación al contenido cuadriláteros, según el Modelo de Van Hiele. Los objetivos que planteamos para llevar a cabo este trabajo de grado son los siguientes:

Objetivo General

Diseñar una secuencia de tareas a implementar en entornos de educación en línea que permita caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto y once del Colegio San Francisco de Asís de Nemocón sobre la clasificación de cuadriláteros fundamentada en el Modelo de Van Hiele.

Objetivos Específicos

- Diseñar la secuencia de tareas a implementar en entornos de educación en línea sobre la clasificación de cuadriláteros para grados sexto y once fundamentada el Modelo de Van Hiele.
- Implementar la secuencia de tareas con estudiantes de grado sexto y once del Colegio San Francisco de Asís dentro de las sesiones de clase de Geometría, sincrónicas en línea, y recolectar sus producciones.

- Analizar las producciones de los estudiantes y caracterizar su nivel de razonamiento geométrico sobre la clasificación de cuadriláteros según el Modelo de Van Hiele.

Capítulo 2. Marco Teórico

Inicialmente haremos una descripción del origen del Modelo de Van Hiele, luego enunciaremos los elementos y características principales de los niveles de razonamiento del Modelo, mostraremos las fases de aprendizaje y. Por último, describiremos el proceso de evaluación de los niveles de razonamiento de Van Hiele. Asimismo, describiremos características propias de la educación en línea, la gamificación y del contenido geométrico, cuadriláteros.

El Modelo de Van Hiele

En el año 1957 Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, profesores holandeses de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, publican sus tesis doctorales en las que presentan un Modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría y un ejemplo concreto de aplicación de este Modelo en sus cursos de geometría. Estas investigaciones se desarrollaron con el fin de explicar, por una parte, la forma como se produce la evolución del razonamiento en los estudiantes y, por otra, la manera de contribuir en el mejoramiento de dicho razonamiento.

Según Jaime (1993) la difusión de este Modelo se dio inicialmente en la Unión Soviética y se tomó como base para el diseño de un nuevo currículo de matemáticas que se implementó en la primera mitad de los años sesenta. De igual manera, en el año 1971 en Holanda, se utilizó este Modelo en el proyecto *Wiskobas* de desarrollo curricular. Una década más tarde, España propuso periodos de difusión, equipos de investigación, conferencias, cursos y congresos de Didáctica de las Matemáticas para los que el tema principal era el Modelo de Van Hiele. Por otra parte, 29 años después de haberse publicado la primera propuesta del Modelo, en 1986, Van Hiele expuso sus ideas sobre el Modelo dejando ver la evolución que este tuvo durante los primeros años hasta llegar a la forma actualmente conocida.

El Modelo de Van Hiele presentó modificaciones en la cantidad de los niveles de razonamiento conforme al contraste de ideas con expertos y el aumento de investigaciones.

Jaime (1993) señala que la primera versión del Modelo de Van Hiele publicada en 1955 proponía la existencia de tres niveles, los cuales corresponden a los niveles 2° a 4° que actualmente se conocen como nivel de análisis, nivel de ordenación o clasificación y nivel de deducción formal. En virtud de las aportaciones y críticas de otros expertos, Van Hiele perfeccionó el Modelo proponiendo un nivel inferior que tuviera en cuenta el tipo de razonamiento visual que es frecuente entre los estudiantes. Esto da paso a la definición de cuatro niveles, conocidos actualmente como: nivel de visualización, nivel de análisis, nivel de ordenación o clasificación y nivel de deducción formal. Dentro de este marco, Van Hiele también mencionó que es posible la existencia de niveles superiores al cuarto. Por último, en junio de 1987 Van Hiele, en una conferencia en la Universidad de Siracusa, expuso una nueva propuesta con relación a la cantidad de niveles de razonamiento. En esta contempló únicamente la existencia de tres niveles, dejando de lado el 5° nivel (rigor) y reorganizando las características de los niveles. Sin embargo, en la evolución y reorganización de estos niveles se acepta actualmente la descripción detallada y extendida de los cinco niveles hecha en Wirszup (1976, citado en Jaime, 1993) que ha sido el eje central de investigaciones referentes al Modelo de Van Hiele.

En relación con los niveles del Modelo de Van Hiele es importante señalar que estos conforman el aspecto descriptivo del Modelo, ya que los esposos Van Hiele asumen que el razonamiento de los estudiantes pasa por un proceso secuencial y ordenado. Otro criterio que constituye el núcleo central de este Modelo es el aspecto instructivo, el cual marca unas pautas a través de las que los profesores fomenten y favorezcan el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento en el que se encuentran.

Goncalves (2006) afirma que el aspecto descriptivo de este Modelo presenta a los estudiantes como sujetos de acción, con criterios para reflexionar sobre lo que hacen, el cómo se hace, por qué se hace y las consecuencias de la acción, caracterizando el avance progresivo y secuencial del razonamiento. Dicho avance muestra el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas.

En cuanto al aspecto instructivo del Modelo de Van Hiele, Vargas y Gamboa (2013) describen que para lograr el avance en el razonamiento de los estudiantes es necesario que los profesores sean activadores y acompañantes en el proceso de la autoconstrucción del conocimiento, teniendo en cuenta unas directrices (fases) a la hora de diseñar las actividades y materiales a utilizar que motiven al estudiante a ser consciente de su propia manera de pensar.

El aspecto instructivo del Modelo de Van Hiele no se enfatiza en este marco teórico, ya que el objetivo de este trabajo de grado no es presentar una propuesta de enseñanza de un contenido geométrico sino caracterizar el nivel de Van Hiele de los estudiantes al abordar un objeto geométrico particular a través de encuentros de educación en línea con gamificación.

Goncalves (2006, p. 90) recoge la esencia del Modelo de Van Hiele enunciando que:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes.
- Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de la matemática que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- Si una relación matemática no puede expresarse en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior.
- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, pero sí se le puede ayudar mediante una enseñanza adecuada de la matemática.

La teoría presentada por los esposos Van Hiele describe el avance del razonamiento de los estudiantes a través de una distribución escalonada en cinco niveles secuenciales y ordenados. Ningún nivel de razonamiento es independiente de otro, por lo que no es posible saltarse algún nivel; para pasar de un nivel a otro es necesario que el individuo cumpla con la serie de fases de aprendizaje que propone el profesor dentro de cada nivel. Fouz y De Donosti (2005) mencionan que en el Modelo de Van Hiele estos niveles de pensamiento y conocimiento no van asociados a la edad; es más, señalan que, ante un nuevo contenido geométrico a aprender, cualquier persona pasa por todos los niveles de razonamiento y su mayor o menor dominio de la geometría influirá en lo que haga más o menos rápidamente, lo cual indica que va aumentando de esta manera el grado de comprensión y dominio del conocimiento.

Acerca de la enumeración de los niveles del Modelo de Van Hiele se presentan ambigüedades debido a que algunos autores hablan de los niveles del 0 al 4 y otros del 1 al 5. En este trabajo se utilizará la enumeración del 1 al 5, ya que algunos lectores pueden interpretar el nivel 0 como la ausencia de razonamiento. A continuación, presentamos las características generales de los cinco niveles de razonamiento.

Niveles de Razonamiento de Van Hiele

Nivel 1: Reconocimiento o Visualización

En este nivel, los estudiantes observan las figuras geométricas de manera global y realizan descripciones de estas basándose principalmente en su aspecto físico, suelen incluir atributos irrelevantes como el color, la orientación, la posición de la figura, el tamaño, entre otros. Asimismo, los reconocimientos, distinciones o clasificaciones de figuras se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.

Jaime (1993) afirma que es frecuente que las descripciones de las figuras estén apoyadas en su semejanza con otros objetos, no necesariamente geométricos sino del entorno, suelen utilizar frases como: “... se parece a ...”, “...tiene forma de ...”, “esquinas”, entre otros. Los estudiantes utilizan un lenguaje natural y un vocabulario básico. En Fouz y De Donosti (2005) se puede evidenciar el lenguaje de un estudiante al señalar que un rectángulo “es un cuadrado más estrecho", "un paralelogramo es un rectángulo inclinado", "un ángulo las agujas de un reloj".

Según Jaime (1993), los estudiantes reconocen algunas partes que componen las figuras y algunas propiedades. Sin embargo, estas no tienen un papel central y, frecuentemente, reflejan contradicciones. En este sentido, Jaime y Gutiérrez (1990) mencionan que, si se le pide a un estudiante que compare un círculo, un triángulo y un cuadrado, hará referencia a la redondez o a figuras más o menos puntiagudas y no a la cantidad de vértices, amplitud de ángulos, cantidad de lados, entre otros atributos netamente geométricos.

Por último, los estudiantes que se encuentran en este nivel de Van Hiele realizan clasificaciones exclusivas, esto es, "perciben las figuras de manera individual, por lo que cada figura es considerada como un objeto independiente de otra figura de la misma clase" (Jaime y Gutiérrez, 1990, p.307). Por ejemplo, un estudiante diferencia los cuadrados de los rombos por su forma, tamaño, posición o tal vez color, clasificando los cuadrados y los rombos como figuras de tipos diferentes.

Nivel 2: Análisis

De acuerdo con Jaime (1993), en el nivel de análisis los estudiantes reconocen y describen de manera informal las partes que integran una figura y las propiedades geométricas de estas. En este aspecto, Jaime y Gutiérrez (1990) afirman que un estudiante en este nivel define los conceptos listando todas las propiedades geométricas sin omitir alguna, dado que las reconoce de manera independiente y no las relaciona. Así pues, para un estudiante que se encuentre en este nivel, un rectángulo es un cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos, ángulos rectos y lados opuestos iguales. Es de resaltar, que en este nivel los estudiantes hacen uso de lenguaje matemático y la mayoría de veces dejan de lado el lenguaje natural.

Según Jaime y Gutiérrez (1990) los estudiantes no relacionan la existencia de ángulos de 90° con la perpendicularidad o el paralelismo de los lados. Esto hace que no puedan clasificar adecuadamente las diferentes familias de polígonos, puesto que, seguirán considerando, por ejemplo, que los rectángulos y los cuadrados hacen parte de diferentes familias, es decir que las clasificaciones siguen siendo exclusivas.

Goncalves (2006) señala que los estudiantes infieren y generalizan propiedades a partir de la experimentación. Un ejemplo de esta afirmación es presentado por Jaime y Gutiérrez (1990) quienes afirman que si los estudiantes, por medio de la manipulación de algunos rombos, descubren que las diagonales de estos son perpendiculares, sabrán, sin necesidad de comprobarlo, que las diagonales de cualquier otro rombo también son perpendiculares. Es por ello que la demostración en este nivel se entiende como la comprobación de propiedades por medio de casos o ejemplos.

Nivel 3: Clasificación

Los estudiantes que se encuentran en el nivel de clasificación formulan definiciones señalando las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una clase de figuras geométricas. De igual modo, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta. Según Jaime y Gutiérrez (1990) en este nivel los estudiantes reconocen que unas propiedades se deducen de otras, logrando así realizar clasificaciones de las figuras geométricas en familias. Por ejemplo, en el tema de cuadriláteros, “los estudiantes en este nivel entienden que la igualdad de los ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados o que la igualdad de los lados implica la perpendicularidad de diagonales” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 310). Los estudiantes ven la necesidad de justificar de manera general la veracidad de propiedades. Un ejemplo de esto es el querer justificar el por qué un cuadrado es un rectángulo o el por qué un cuadrado es un rombo. Con base en esto, se afirma que en este nivel se realizan clasificaciones inclusivas. Por último, cabe resaltar que los estudiantes comprenden las demostraciones que se les explican. Sin embargo, a la hora de argumentar sus respuestas no ven la necesidad de hacer demostraciones. Jaime y Gutiérrez (1990) afirman que los estudiantes hacen preguntas como: “¿Por qué tenemos que demostrar la propiedad, si ya sabemos que es verdad?”.

Nivel 4: Deducción formal

En este nivel los estudiantes comprenden las demostraciones y ven la necesidad de utilizarlas a la hora de determinar el valor de verdad de una afirmación. Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas, evidenciando el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, corolarios y teoremas. Es importante resaltar que los estudiantes en este nivel pueden demostrar formalmente las propiedades que en los niveles anteriores mencionaron o demostraron informalmente.

Jaime y Gutiérrez (1990) afirman que los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas; es decir, comprenden que hay distintas formas de demostrar un mismo teorema y que para un concepto existen varias definiciones equivalentes. Por ejemplo, un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes. Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes. Un rombo es un paralelogramo, cuyas diagonales se bisecan y son perpendiculares. Por último, el lenguaje que usan los estudiantes es matemáticamente preciso.

Nivel 5: Rigor

Los estudiantes que se encuentran en el nivel de rigor se caracterizan por trabajar con sistemas axiomáticos distintos al euclidiano. Como ejemplo, Fouz y De Donosti (2005) mencionan que un estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos. Jaime (1993) expresa que los estudiantes en este nivel realizan deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinados, dejando de lado el uso de modelos concretos; y establecen la coherencia de un sistema axiomático, comparan diferentes sistemas axiomáticos y determinan equivalencias entre estos.

Propiedades del Modelo de Van Hiele

Para comprender la propuesta de los esposos Van Hiele son importantes las características propias del aspecto descriptivo del Modelo, que son:

Recursividad: los elementos implícitos en el razonamiento de un nivel se hacen explícitos en el razonamiento del siguiente nivel.

Secuencialidad: el orden de los niveles es secuencial y no se puede alterar. Goncalves (2006) afirma que cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior. Por ejemplo, un estudiante no puede encontrase en el nivel 2 sin la capacidad de razonamiento del nivel 1. Es de resaltar que no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el anterior.

Especificidad del lenguaje: cada nivel posee un lenguaje propio y un significado del vocabulario matemático; es decir, el lenguaje va en ascenso de un nivel al siguiente. Para los esposos Van Hiele el papel que juega el lenguaje en la estructuración del pensamiento es decisivo, y se desarrolla en niveles de forma paralela a los niveles de razonamiento.

Continuidad: explica cómo un estudiante pasa de un nivel a otro. Jaime (1993) afirma que "el paso de un nivel al siguiente no se produce de forma brusca, sino que hay un periodo de transición, durante el cual se entremezclan momentos de razonamientos de los dos niveles consecutivos" (p. 17)

Localidad: el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga el estudiante son un elemento básico en su habilidad de razonamiento. Por esta razón, Vargas y Gamboa (2013) expresan que un individuo puede razonar en diferentes niveles al enfrentarse con distintos campos de la geometría.

Fases de Aprendizaje del Modelo de Van Hiele

Vargas y Gamboa (2013) señalan que el aspecto instructivo del Modelo de Van Hiele presenta a los profesores directrices o pautas sobre cómo guiar al estudiante a que alcance con más facilidad un nivel superior de razonamiento. A dichas directrices o pautas se le asocia el nombre de fases de aprendizaje y son, ordenadas: información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración.

La Evaluación del Nivel de Razonamiento

La Evaluación del nivel de razonamiento según el Modelo de Van Hiele tiene como objetivo reconocer los conocimientos previos de los estudiantes o caracterizar el nivel de razonamiento en el que se encuentran. Para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes, según el Modelo de Van Hiele, se pueden aplicar tres tipos de pruebas: test escritos de selección múltiple, entrevistas clínicas y test escritos de respuesta libre. Corberán et al. (1994) afirman que estos tipos de test fueron utilizados por diversos investigadores que trabajaron sobre el Modelo de Van Hiele.

El test escrito de selección múltiple presenta un enunciado y las posibles respuestas. Los estudiantes responden a este test seleccionando una de las soluciones propuestas. Corberán et al. (1994) expresan que este tipo de test no es idóneo para determinar el tipo de razonamiento de los estudiantes, puesto que varios estudiantes pueden elegir la misma respuesta por motivos diferentes.

La entrevista clínica se realiza de manera individual entre el profesor y cada estudiante. Por medio de este tipo de prueba el profesor propone diversas actividades o preguntas en forma de diálogo. Corberán et al. (1994) mencionan que la entrevista clínica es el método más fiable y eficaz para determinar el nivel de razonamiento. Esto se debe a que las preguntas se pueden redirigir según las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, Jaime (1993) y

Corberán et al. (1994) consideran que este tipo de test no es práctico para los profesores que trabajan con grupos de más de 30 estudiantes.

Según Corberán et al. (1994) los test escritos de respuesta libre se encuentran en una situación intermedia entre el test de respuesta múltiple y la entrevista clínica. Esto se debe a que el test de respuesta libre permite que el estudiante justifique o exprese detalladamente su forma de trabajar o los motivos que tuvo para responder de una forma a las preguntas, igualmente, evita el problema de los tiempos, como sucede en la entrevista clínica. Sin embargo, es necesario realizar un diseño cuidadoso del test de respuesta libre, teniendo en cuenta que algunas veces a los estudiantes les es difícil expresarse por escrito y las preguntas del test no pueden alterarse en función de las respuestas de los estudiantes.

Jaime y Gutiérrez (1990) indican que para diseñar un test con el objetivo de medir el nivel de razonamiento de los estudiantes, es conveniente considerar algunas normas que contribuyan a la fiabilidad de este. Las normas que proponen estos autores son las siguientes:

- Tener en cuenta que las actividades y preguntas propuestas en el test inciten a los estudiantes a explicar los motivos de sus respuestas, para promover dichas justificaciones se pueden utilizar frases como: “¿Por qué piensas eso?”, “Explica cómo has encontrado la solución”, entre otras similares.
- No debe confundirse un test tradicional cuyo propósito es evaluar el nivel de conocimientos con un test para conocer el nivel de razonamiento. Es de resaltar que en el test tradicional es importante que los estudiantes lleguen a respuestas correctas y. Por el contrario, en el test para conocer el nivel de razonamiento, lo más importante es el cómo contestan los estudiantes y el por qué de sus respuestas.
- Las actividades y preguntas que se propongan en el test deben seleccionarse de modo que puedan ser solucionadas en los cinco niveles de razonamiento.

También es conveniente que el profesor plantee cómo podrían contestar a cada ítem personas de diferentes niveles, para que se pueda hacer una selección equilibrada.

- Es necesario comprender que el nivel de razonamiento de los estudiantes no se determina por las preguntas que se realizan sino por las respuestas que ellos proporcionan. Esto se debe a que en la mayoría de los casos, una tarea puede resolverse correctamente por estudiantes de diferentes niveles, pero sus formas de resolverla serán diferentes.

En general, para el diseño de la evaluación es necesario comprender que en las preguntas no está el nivel de razonamiento, sino que está en las respuestas que proveen los estudiantes. Es importante resaltar que se debe tener en cuenta el cómo responden y el porqué de las respuestas. Por último, las preguntas no se deben limitar a un único nivel de razonamiento.

Educación en Línea

La educación en línea según Rama (2006, citado en Fernández y Vallejo, 2014), es el resultado de las nuevas tecnologías de comunicación e información digital y la creación de los sistemas de acceso a la red. Esta modalidad desplaza el salón de clases hacia la red y genera cambios en el aprendizaje. También, Herrera-Ordoñez y Herrera-López (2013) afirman que la educación en línea posibilita la oferta educativa a más individuos, procurando atender las necesidades actuales de la educación y generar una igualdad de oportunidades.

Fernández y Vallejo (2014) afirman que el cambio tecnológico promueve la virtualización de la educación como parte de un Modelo emergente de la enseñanza, en el que se incorporan la tecnología y distintas competencias por parte de los participantes. Asimismo, permite clasificar y definir las distintas demandas de los estudiantes y organizar los aprendizajes necesarios. Las TIC en la educación en línea se consideran como un apoyo para promover un nuevo espacio social, crítico, formativo y por ende, una nueva modalidad que funciona utilizando recursos educativos que no son físicos sino electrónicos, los cuales son los encargados de promover nuevas habilidades y destrezas en los individuos (Echeverría, 2001 citado en Fernández y Vallejo, 2014). Considerando lo anterior, para llevar a cabo esta modalidad de enseñanza es necesario contemplar variables como: los contenidos y las actividades; el nivel educativo; los conocimientos previos de los estudiantes; la interacción y comunicación entre los participantes y la plataforma tecnológica que se utilizará, mediante dispositivos tecnológicos conectados a internet.

Benítez (2000, citado en Fernández y Vallejo, 2014) considera que la virtualización de la educación debe seguir un diseño pedagógico orientado en tres sentidos: conceptual, el cual corresponde a los contenidos; actitudinal, que hace referencia a los valores y comportamientos de los participantes en esta modalidad; y práctico, en el que se contemplan las habilidades. El autor también señala que la educación en línea contribuye a la construcción del conocimiento mediante procesos de socialización entre los participantes (profesores y estudiantes). Herrera-Ordoñez y Herrera-López (2013) describen que la educación en línea requiere cambios en sus actores, principalmente en su método, ya que se constituye mediante la teoría del constructivismo. El alumno participa en la construcción de actividades para procesar información y se genera el aprendizaje colaborativo.

Por último, hay que mencionar que entre la modalidad presencial y la modalidad en línea hay algunas diferencias en cuanto a las características de los roles de profesores y estudiantes. Herrera-Ordoñez y Herrera-López (2013) sostienen que los profesores en la modalidad en línea dejan de ser fuente de información, esto gracias a la “inteligencia colectiva”. En esta modalidad los estudiantes colaboran de forma activa, creando y aportando sus contenidos, esto se debe a que los estudiantes tienen acceso a más información gracias a la internet. Es así como el rol del profesor es ser guía, asesor, constructor de métodos para lograr aprendizaje, orientador sobre la información, investigador, entre otros similares. El profesor debe formarse y actualizarse constantemente en el uso de herramientas tecnológicas y en nuevas metodologías de aprendizaje. De igual manera, el rol de los estudiantes es ahora participar y colaborar en la realización de las actividades propuestas, adaptando el proceso de formación a su estilo de aprendizaje.

Gamificación

De acuerdo con los planteamientos de este trabajo, es clave comprender y tener claridad conceptual de la teoría de la gamificación o *gamification* abordada desde un ámbito educativo. Así pues, se toman en cuenta dos interpretaciones acerca de ¿Qué es?

En primer lugar, según el pensamiento de Oliva (2016, citado en Pérez, 2020) la gamificación son las acciones educativas en las que el maestro hace uso de diversos elementos de juego, pero que no son un juego, para de esta forma motivar y captar la atención de los estudiantes, al mismo tiempo que enaltece el esfuerzo que cada uno hizo y sus méritos individuales en la búsqueda de conocimiento. En este sentido, la gamificación se puede entender como una estrategia educativa para fortalecer la relación estudiante-proceso de aprendizaje y así potenciar tanto la motivación como las habilidades, y, por ende, obtener mejores resultados.

En segundo lugar, Mocis (2015, citado en Pérez, 2020) entiende la gamificación como una retroalimentación positiva del proceso de aprendizaje que realizan los estudiantes en el aula de clase. Es decir, el estudiante al querer obtener un resultado representativo recibe un símbolo que indique o reconozca dicho resultado. En esta interpretación, hay un enfoque en el cambio de retroalimentación que se le dan a los resultados. No es la típica mala nota de la educación tradicional y se rompe un poco el paradigma del castigo al equivocarse, sino que más bien se tiene en cuenta el proceso cognitivo que se realizó y el esfuerzo que se hizo. Con esto se busca lograr una retroalimentación positiva al estudiante.

Al estudiar las dos interpretaciones anteriores, llegamos a comprender la gamificación como una herramienta que hace uso de diversas estrategias de juego con el fin de enseñar de una manera diferente. Esta nueva forma de enseñar busca que el proceso de aprendizaje sea dinámico, divertido, motivador y esperanzador, así como atraer al estudiante, motivarlo, concentrarlo y potenciar las diferentes habilidades que tiene, para de esta forma, lograr satisfactoriamente los objetivos educativos planteados. Y, en caso de no ser así, propiciar un ambiente constructivo desde la retroalimentación positiva. Cabe aclarar que dicha herramienta genera cierta competitividad, lo cual haría más interesante la dinámica, pero no se hace con el fin de tener conflictos entre estudiantes.

Otro aspecto a tener en cuenta son los principios de la gamificación planteados por Van Diggelen (2012, citado en Caballero et al., 2019):

1. Tipos de competición, es decir, el jugador contra quién compite. En este caso, el estudiante compite contra otro estudiante, contra el sistema, contra un profesor o realiza la dinámica solo.
2. Presión temporal, se refiere al tiempo con el que cuenta el estudiante para realizar la actividad, si este es cronometrado o es libre.
3. Presión social, el saber el progreso de los demás jugadores y/o sentirse observado mientras se realizan las actividades.
4. Escasez, la falta de elementos que tiene el jugador. En este caso, si tiene o no algunas herramientas, el objetivo puede ser mayor y cambia la dinámica del juego.
5. Enigma *Puzzles* o planteamientos que indican que debe haber una solución o un lugar a donde llegar.

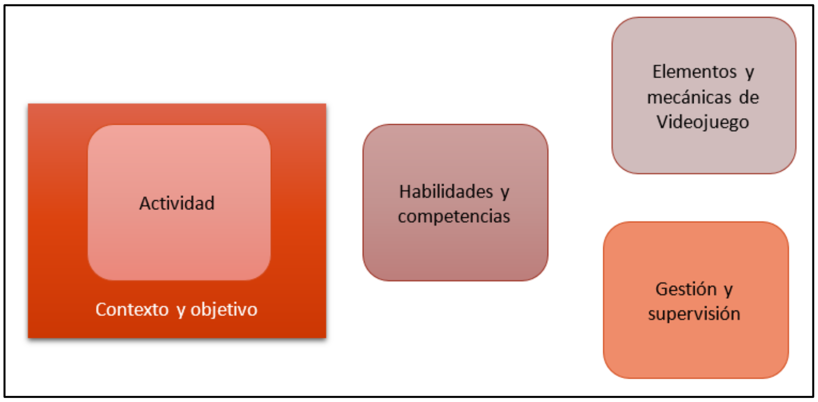
6. Intercambio, hacer trueque de alguna herramienta para así avanzar durante el juego.
7. Novedad, las modificaciones y lo nuevo que aparece en un nivel modifica la forma de pensar y de llevar a cabo una acción. Cambia el rumbo.
8. Nivel y progreso, los niveles que constituyen la estrategia y el progreso que va teniendo cada quien.
9. Poder, elementos denotativos del juego que aumentan o disminuyen el grado de poder jerárquico que tiene el jugador dentro del ambiente.

Estos principios son relevantes y se deben tener en cuenta a la hora de pensar en gamificar para un aula de clase. Es decir, no se debe implementar la gamificación deliberadamente y solo pensando en innovar, sino que, dicha innovación debe ser justificada y pensada en pro del objetivo educativo. Estos principios hacen que la gamificación sea sólida y contribuya a una herramienta satisfactoria. Al cumplir con todos los principios, los estudiantes asimilan la gamificación en el aula como la que llevan a cabo en su tiempo libre. Es decir, el estudiante deja los pre-juicios que pueda tener sobre las dinámicas en el aula y se sumerge en la actividad, como lo hace en los videojuegos extracurriculares.

El tercer aspecto relevante a tener en cuenta es la arquitectura funcional y va de la mano de los principios de la gamificación debido a que, a partir de ellos, se logra el éxito o decline a la hora de gamificar. Los principios son más generales y la arquitectura es más específica del ámbito educativo. Así pues, la arquitectura funcional consolida la acción de pensar el gamificar y según Hernández et al. (2017) consta de: actividad, contexto y objetivo, habilidades y competencias, gestión y supervisión, y elementos mecánicos de videojuego. Ello se ilustra en la Figura 1.

Figura 1

Arquitectura funcional de la gamificación educativa



Nota. Fuente propia

Al revisar el esquema, se observan 5 elementos. Primero, **Contexto y objetivo.** La gamificación está enfocada en el contexto donde se sitúa el profesor, los estudiantes y el aula. Es decir, las posibilidades con las que cuenta el docente para llegar a gamificar dentro del aula. El contexto institucional es determinante para poder o no llevar a cabo una acción. El objetivo se refiere a qué se desea obtener o lograr con la gamificación el aula de clase, a tener claridad con el propósito y la relación de este con el contexto; Segundo, **actividad**, debe pensarse consciente y estratégicamente según las posibilidades y limitaciones de los estudiantes. Allí se debe tener en cuenta la edad, las habilidades, el desarrollo, entre otros aspectos. Estas no pueden ser construidas genéricamente, si se piensa por el impacto que tendrá en el aula y el éxito de la herramienta (Hernández et al.,2017).

Cuadriláteros

A continuación, a fin de caracterizar los objetos geométricos del contenido geométrico sobre el que versa la secuencia de tareas, se enuncian las definiciones, propiedades y clasificación de los cuadriláteros que adoptamos. Para dicho estudio se tomaron como principal fuente de consulta los libros de Serie matemática Moderna de Moise y Downs (1972), Geometría de Samper (2008) y Baldor (1980).

La estructura que tiene este apartado es: esquema conceptual que presenta los conceptos que se tuvieron en cuenta para diseñar la secuencia de tareas; presentación de las definiciones y propiedades; y la ubicación del objeto matemático cuadriláteros en el currículo escolar colombiano (ya que, el currículo del Colegio San Francisco de Asís se rige por este).

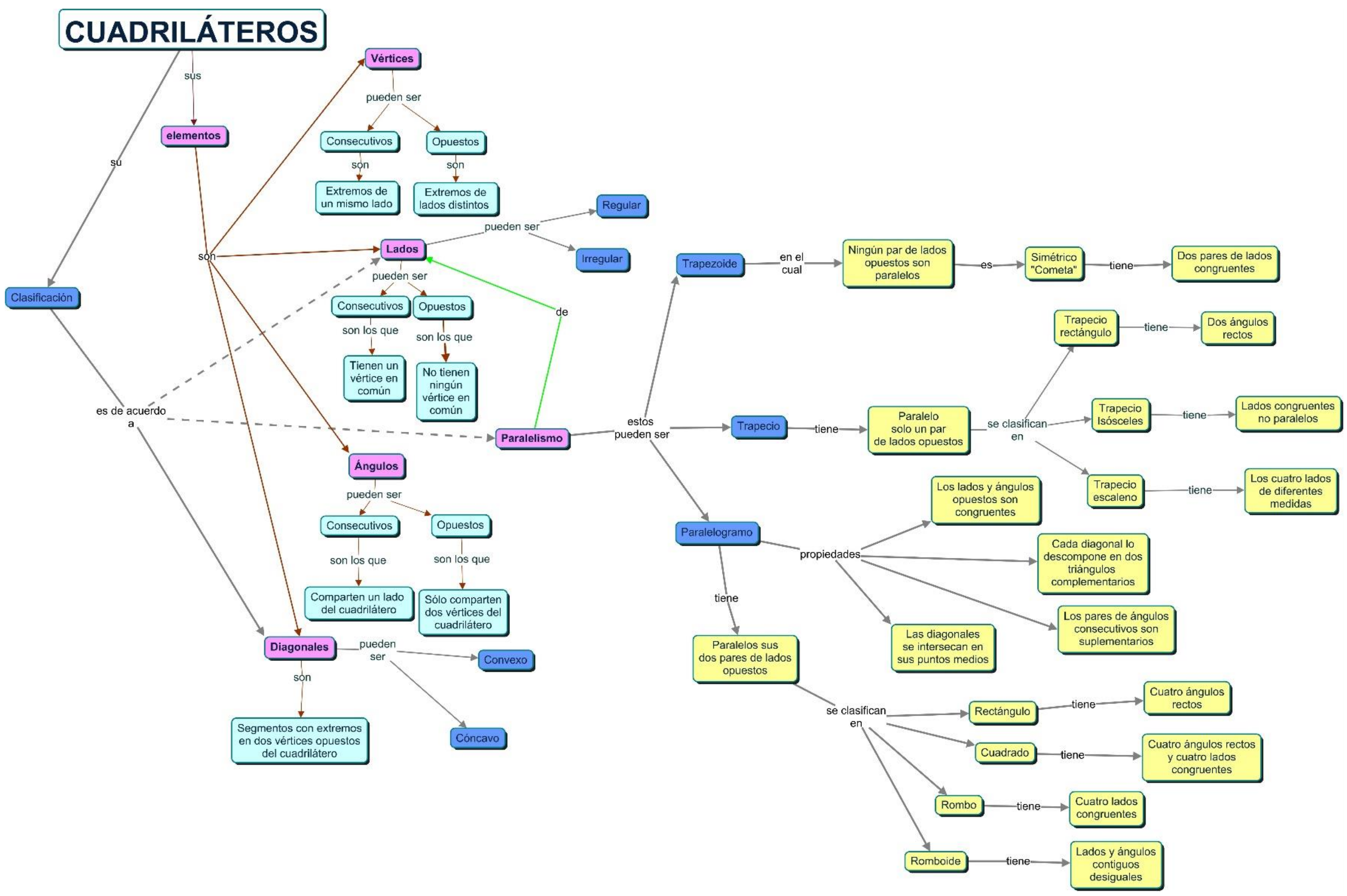
En la Figura 2 se presenta un esquema conceptual del objeto geométrico cuadriláteros, que incluye los conceptos geométricos que se consideraron para el diseño de la secuencia de tareas. La siguiente es la definición que tomamos de referencia para cuadrilátero.

Cuadrilátero: Sean A, B, C y D cuatro puntos coplanarios. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama *cuadrilátero.*

Los cuatro segmentos se llaman lados, y los puntos A, B, C y D se llaman vértices. Los ángulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ se llaman ángulos del cuadrilátero. Moise y Downs (1972).

Figura 2

Esquema conceptual de cuadrilátero



Definiciones y propiedades de los cuadriláteros

Samper (2008) expresa que para referirse a las partes de un cuadrilátero es necesario reconocer las siguientes definiciones:

- Dos lados de un cuadrilátero son opuestos si no se intersecan.
- Dos lados son consecutivos si comparten un extremo
- Dos ángulos son opuestos si sólo comparten dos vértices del cuadrilátero.
- Dos ángulos son consecutivos si comparten un lado del cuadrilátero.

Dentro de los cuadriláteros encontramos dos clasificaciones según la posición de sus diagonales, los cuadriláteros cóncavos y los cuadriláteros convexos. A continuación, se define la diagonal de un polígono y cuadrilátero convexo según Samper (2008).

Diagonal de un cuadrilátero: Es un segmento con extremos en dos vértices opuestos del cuadrilátero.

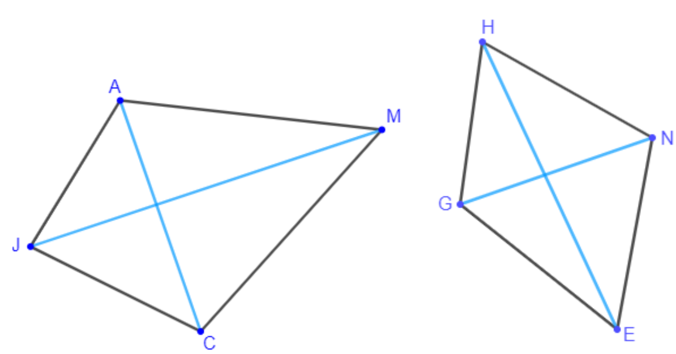
Cuadrilátero convexo: Es un cuadrilátero en el que sus diagonales contienen puntos del interior del cuadrilátero.

Cuadrilátero cóncavo (no convexo): Es un cuadrilátero en el que una de sus diagonales no contiene puntos del interior del cuadrilátero.

En la Figura 3 se presentan dos ejemplos de cuadriláteros convexos con sus respectivas diagonales.

Figura 3

Cuadriláteros convexos

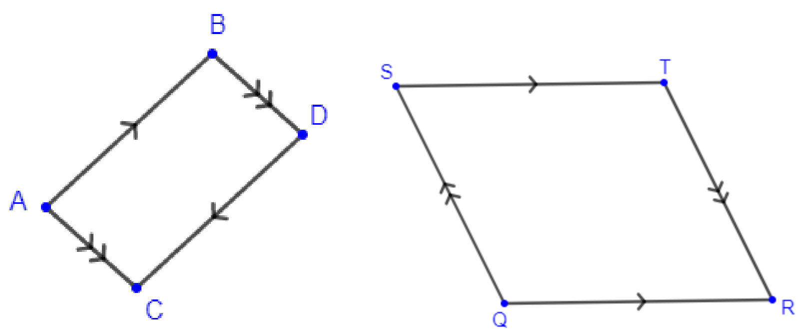


Una propiedad de los cuadriláteros convexos es que la suma de las medidas de sus ángulos interiores es $360°$. Los cuadriláteros convexos se pueden clasificar según la relación de paralelismo existente entre pares de sus lados, en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Samper (2008) define **paralelogramo** como un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos. En la Figura 4 se muestran dos ejemplos de paralelogramos.

Figura 4

Paralelogramos

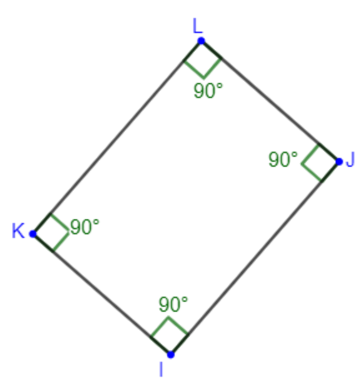


El rectángulo, cuadrado, rombo y romboide son paralelogramos. Seguidamente se mostrarán las definiciones según Samper (2008) y su representación.

Rectángulo: Es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. Un ejemplo en la Figura 5.

Figura 5

Rectángulo

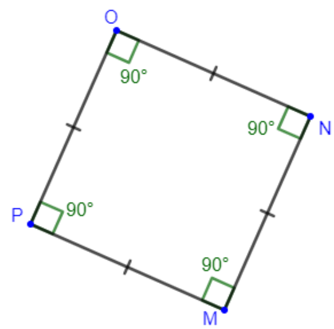


Una de las propiedades que tiene un rectángulo es que sus diagonales se bisecan y son congruentes.

Cuadrado: Es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes. A modo de ejemplo se presenta la Figura 6.

Figura 6

Cuadrado

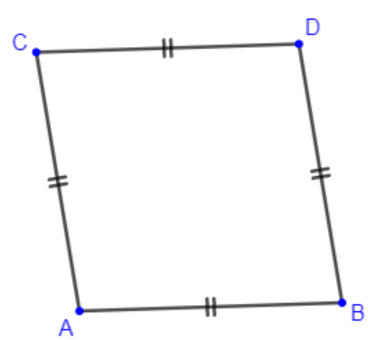


En un cuadrado sus diagonales se bisecan, son congruentes y además perpendiculares.

Rombo: Es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes. En la Figura 7 se muestra un ejemplo.

Figura 7

Rombo



Una propiedad del rombo es que sus diagonales se bisecan y son perpendiculares.

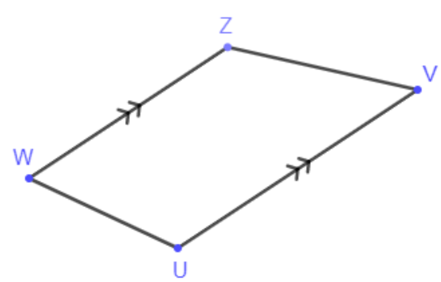
Algunas propiedades que cumplen los paralelogramos son las siguientes según Samper (2008):

- En un paralelogramo los lados opuestos son congruentes.
- En un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.
- En un paralelogramo los ángulos consecutivos son suplementarios.
- Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.

Respecto a los trapecios, Samper (2008) define un **trapecio** como un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. A modo de ejemplo se presenta la Figura 8.

Figura 8

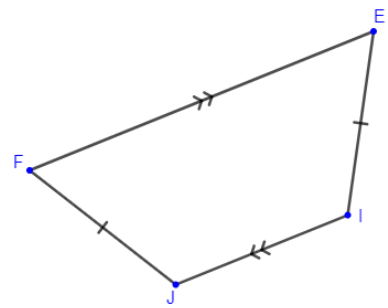
Trapecio



Los trapecios se pueden clasificar en trapecios isósceles, rectángulos y escalenos. El **trapecio isósceles** según Samper (2008) es un trapecio con un par de lados opuestos congruentes, en la Figura 9 se muestra un ejemplo. Cabe mencionar que los trapecios isósceles cumplen la propiedad de tener dos pares de ángulos congruentes y sus diagonales son congruentes.

Figura 9

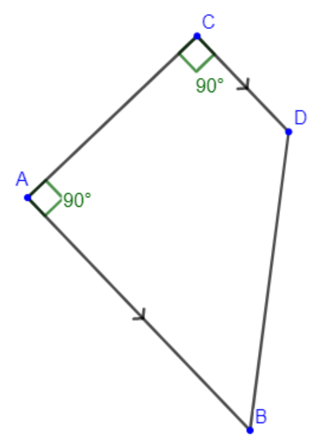
Trapecio isósceles



Baldor (1980) define los **trapecios rectángulos** como aquellos que tienen dos ángulos rectos. En la Figura 10 se muestra un ejemplo.

Figura 10

Trapecio rectángulo



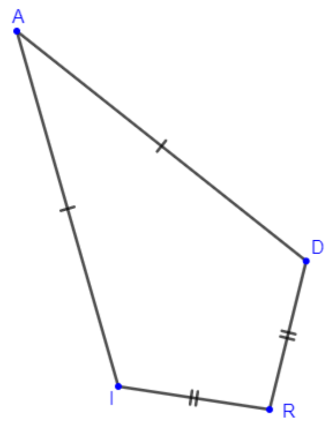
Según Oriol y Bernadet (1846) los **trapecios escalenos** son aquellos que tienen desiguales los lados opuestos no paralelos.

Según Baldor (1980) cuando no existe paralelismo alguno, la figura se llama trapezoide, dentro de esta familia de figuras se encuentran los cometas.

Según Samper (2008) un **Cometa** es un cuadrilátero en el que cada lado tiene exactamente un lado adyacente congruente y ningún par de lados opuestos son congruentes. En la Figura 11 hay un ejemplo. En los cometas sus diagonales son perpendiculares y exactamente una de ellas biseca a la otra.

Figura 11

Cometa



Teniendo en cuenta la congruencia de los lados y de los ángulos de un cuadrilátero, estos se pueden clasificar en regulares o irregulares.

Dado que un cuadrilátero es un polígono, la definición de polígono regular se cumple para cuadrilátero, es por ello que un cuadrilátero es regular si sus ángulos son congruentes y sus lados son congruentes (Samper, 2008). Por otro lado, los cuadriláteros irregulares se conciben como aquellos que carecen de tener sus lados congruentes o sus ángulos congruentes.

Cuadriláteros en el Currículo de Matemáticas según el MEN

Se presenta la propuesta curricular colombiana para abordar los cuadriláteros en las instituciones educativas, es decir, se procede a identificar la ubicación de estos en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

En los Derechos Básicos de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2016) se propone abordar los cuadriláteros como se muestra en la Tabla 1. En la segunda columna de la tabla se muestran los contenidos geométricos que establecimos con base en la lectura de los aprendizajes y las evidencias de aprendizaje para cada grado.

Tabla 1

Derechos Básicos de Aprendizaje de Secundaria y Media Asociados a los Cuadriláteros

Grado	Contenido Geométrico	Aprendizaje	Evidencia de Aprendizaje
6°	• Definición de Cuadriláteros • Definición de paralelogramos: rectángulo, cuadrado, rombo y romboide • Definición de trapecio • Definición de trapezoide	Utilizar y explicar diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos.	• Identifica, compara y clasifica las clases, las propiedades y las relaciones de los cuadriláteros. • Esquematiza el orden jerárquico de la clasificación de los cuadriláteros. • Resuelve situaciones didácticas sobre triángulos y cuadriláteros mediante software de geometría dinámica.
7°	Cuadriláteros	Identificar polígonos y clasificarlos de acuerdo a sus características propias.	Identifica las características de cuadriláteros.
8°	Cuadriláteros y sus propiedades	Argumentar de manera formal sobre propiedades de figuras geométricas e	Clasifica los cuadriláteros e identifica sus propiedades.

Grado	Contenido Geométrico	Aprendizaje	Evidencia de Aprendizaje
		identificar sus regularidades a partir de teoremas y aplicarlos en situaciones reales	

Se describen los Estándares Básicos de Competencias Metamatemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) que se ubican en el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos de los conjuntos de grados sexto y séptimo, octavo y noveno, y décimo y once que relacionan el tema de cuadriláteros.

Sexto a séptimo

- Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
- Clasifico polígonos en relación con sus propiedades
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.

Octavo a noveno

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Decimo a undécimo

- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

Capítulo 3. Diseño de la Secuencia de Tareas y su Aplicación

Contextualización y Caracterización de la Población

El Colegio San Francisco de Asís, del municipio Nemocón en el Departamento de Cundinamarca, es la Institución Educativa en la que aplicamos la secuencia de tareas diseñada para la educación en línea con el objetivo de caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto y once sobre la clasificación de cuadriláteros según el Modelo de Van Hiele. El Colegio es católico de carácter privado que fundamenta su metodología de enseñanza y aprendizaje en el constructivismo, con el fin de favorecer el desarrollo de seres autónomos y constructores de su propio conocimiento. En cuanto al espacio académico de geometría en el que se enmarca la secuencia de tareas, el Colegio en su currículo lo establece como una asignatura obligatoria y su estudio empieza desde primer grado. El Colegio cuenta únicamente con un curso por cada grado de los niveles de la educación básica y la educación media, y sus estudiantes son de estrato socioeconómico dos y tres. Se destaca que el Colegio ha obtenido buenos resultados en las pruebas Saber 11, propuestas por el ICFES, posicionándolo en el primer lugar a nivel municipal.

En el año 2020 en el que el presidente Iván Duque Márquez, a través del Decreto 457 del 20 de marzo del 2020, declaró el aislamiento preventivo debido al surgimiento de casos de contagio de Coronavirus de tipo 2 en Colombia, el Colegio implementó sesiones de educación en línea haciendo uso de plataformas como *Zoom*, *Teams*, *Google Meet* y *Moodle Institucional*. Es de resaltar que todos los miembros de la comunidad educativa del Colegio contaban con los recursos informáticos necesarios para llevar a cabo las sesiones de educación en línea. El Colegio mantuvo los horarios que se establecieron al inicio del año, es decir que profesores y estudiantes iniciaban jornada desde las 7:00 *a*. *m*. hasta las 2:00 *p*. *m*.

En cuanto al año 2021 el Colegio adecuó sus instalaciones según la normatividad establecida en la circular No. 0032 de la Secretaría de Educación de Cundinamarca, emitida el

02 de julio del 2021, con el propósito de retornar gradualmente a las aulas. Para esto, a cada salón se le instaló un punto de internet por cable y demarcaciones amarillas en el suelo para la ubicación de los pupitres, dejando un metro de distancia entre ellos. La sala de sistemas que está compuesta por 15 computadores se organizó teniendo en cuenta el distanciamiento. Algunas partes de los computadores como los teclados y los *mouses* se forraron con papel vinipel con el objetivo de lograr una mejor y efectiva desinfección después de cada manipulación. A principio del año 2021 establecimos contacto con la rectora de la Institución, con el fin de consultar por la posibilidad de implementar antes de la finalización del ciclo lectivo la secuencia de tareas diseñada para la educación en línea, con el objetivo de caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto y once sobre la clasificación de cuadriláteros según el Modelo de Van Hiele.

Los cursos de los grados sexto y once en los que se aplicó la secuencia de tareas, están conformados por nueve estudiantes con edades entre 10 y 12 años y, cinco estudiantes con edades entre 15 y 16 años, respectivamente.

En el rango de edad en el que se encuentran los estudiantes de grado sexto surgen cambios físicos y con estos su autopercepción y la forma de socializar también se ven influenciadas, ya que buscan cercanía y aceptación por otros. Los estudiantes le dan prioridad a los amigos y sus opiniones. En relación al desarrollo cognitivo Adrián (2012) menciona que en este rango de edad se desarrollan capacidades para realizar operaciones mentales[1] y la aplicación de principios lógicos de razonamiento a problemas concretos. De igual forma, Cigna (2021) enuncia que cuando los niños tienen entre 10 y 12 años de edad desarrollan resistencia y continúan mejorando sus habilidades motrices finas, como aquellas necesarias para una escritura a mano más clara y trabajos artísticos más detallados.

[1] Acciones interiorizadas que permiten hacer mentalmente lo que antes sólo se podía llevar a cabo físicamente

Los estudiantes de grado once por su rango de edad se encuentran en la etapa de adolescencia, en la cual según Pestana et al. (2015) desarrollan un pensamiento abstracto debido a que realizan representaciones simbólicas de situaciones y objetos. Además, consideran varios puntos de vista, por lo que empiezan a realizar comparaciones y debatir ideas u opiniones. También, tienen la capacidad de razonar a partir de principios conocidos, lo que indica que procesan sus propias ideas y preguntas. En esta etapa los adolescentes son influenciados por su entorno ya que sus emociones varían de un día a otro según sus relaciones personales, su autoestima se ve afectada por el alcance de sus metas o expectativas, de igual manera por la comparación que hacen de aspectos físicos con otras personas (Cigna, 2021). Por otro lado, los adolescentes en esta etapa tratan de encontrar su lugar en el mundo y presentan cambios de comportamiento, ya que, según Cigna (2021), a veces parecen maduros pero todavía tienen momentos de comportamiento infantil.

Análisis de instrucción

Gómez et al. (2018) mencionan que los estudiantes aprenden matemáticas cuando, al abordar tareas complejas que implican problemas contextualizados, ponen en juego los conocimientos y destrezas que tienen, interactúan y se comunican entre ellos o con el profesor, negocian significados, llegan a acuerdos sobre la solución de la tarea y justifican su solución. Con base en esto, el análisis de instrucción entendido como una metodología de diseño de tareas, se propone con el fin de brindar los conceptos y herramientas necesarios para el diseño de una secuencia de tareas que contribuya al logro de las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido el profesor, de igual manera, por medio de este diseño se busca brindar oportunidades para que los estudiantes superen las limitaciones de aprendizaje.

En el análisis de instrucción se hace una distinción entre las tareas de aprendizaje y las tareas de evaluación. Gómez et al. (2018) afirman que las tareas de aprendizaje se consideran como aquellas que se proponen con la intención de que los estudiantes logren las expectativas afectivas y de aprendizaje que establece el profesor y, asimismo, superen sus limitaciones de aprendizaje. Por otro lado, las tareas de evaluación “se utilizan para recoger información sobre la actuación de los estudiantes e identificar sus conocimientos y habilidades, para adaptar la enseñanza a esos conocimientos y habilidades, o clasificar a los estudiantes para asignar una nota” (Gómez et al., 2018, p. 202). Es de resaltar que el análisis de instrucción centra su atención en las tareas de aprendizaje.

De acuerdo con la distinción de Gómez et al. (2018) las tareas que se diseñan en este trabajo son de evaluación, ya que con ellas se busca caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto y once del Colegio San Francisco de Asís sobre la clasificación de cuadriláteros según el Modelo de Van Hiele. Pese a que el análisis de instrucción centra su atención en las tareas de aprendizaje, para el diseño de la secuencia de tareas de este trabajo se tienen en cuenta algunos elementos de dicho procedimiento, pues este se sustenta en dos ideas principales: tareas y secuencia de tareas (Ordenación de tareas). Igualmente, provee elementos conceptuales para el diseño, análisis y modificación de tareas y secuencias de tareas.

Para el diseño y descripción de la secuencia de tareas propuesta en este trabajo de grado se tendrán en cuenta siete elementos que componen a una tarea (requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad) presentados en el análisis de instrucción por Gómez et al. (2018), puesto que estos autores afirman que para analizar y modificar una tarea es necesario describirla, esto mediante la especificación de sus elementos.

A continuación, se presenta una descripción de los siete elementos que componen a una tarea:

- **Requisitos:** Corresponde a los conocimientos y las destrezas necesarias que deben tener los estudiantes para abordar las tareas.

- **Metas:** Son los propósitos que el profesor asigna a la tarea.
- **Formulación:** Es el texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes. La instrucción incluye la información de partida y especifica lo que se espera que hagan y produzcan como respuesta los estudiantes.
- **Materiales y Recursos:** Corresponde a las herramientas que los estudiantes utilizan para abordar la tarea. Gómez et al. (2018) señalan que los recursos se distinguen de los materiales, puesto que, los recursos son cualquier medio que se puede emplear en el aprendizaje de un concepto como, por ejemplo: un marcador, un tablero, un lápiz, entre otros. Mientras que los materiales se diseñan principalmente para la enseñanza y el aprendizaje, por ejemplo, un Geoplano, un dominó de fracciones, entre otros.

Antes de continuar la descripción de los siete elementos que componen a una tarea nos referimos a la pertinencia de la inclusión de un material o recurso en una tarea. Desde el punto de vista de Gómez et al. (2018) es necesario que los profesores a la hora de proponer el uso de recursos o materiales se hagan preguntas como por qué se deben usar, para qué usarlos y cómo usarlos, ya que los recursos o materiales no siempre se pueden o deben usar con una tarea. Con base en dos criterios, Eficiencia y Eficacia, estos autores proponen una técnica para analizar la pertinencia de la inclusión de un material o recurso en una tarea. Esta técnica abarca los siguientes criterios (Gómez et al., 2018):

1. **Acceso:** se debe considerar si el profesor y los estudiantes tienen acceso al material o recurso o, si estos funcionarán apropiadamente cuando se vayan a usar.
2. **Preparación del profesor:** se debe considerar si el profesor está preparado para usar el material o recurso, si no lo está, es necesario preguntarse si tiene

sentido que el profesor invierta tiempo en prepararse para saber usar el material o recurso.

3. **Preparación de los estudiantes:** se debe considerar cuánto tiempo se requiere para que los estudiantes aprendan a manejar el recurso o el material o si tiene sentido que los estudiantes inviertan tiempo en aprender a usarlos.
4. **Tiempo adicional:** se debe considerar cuánto tiempo adicional implica la inclusión del material o recurso en la realización de la tarea o si vale la pena invertir ese tiempo.
5. **Metas:** indican en qué medida y de qué forma el material contribuye a las metas de la tarea y el por qué esa contribución no habría sido posible sin la inclusión del material o recurso.
6. **Demandas cognitivas:** se debe validar si el recurso o material permite que las demandas cognitivas de la tarea se adapten a los conocimientos previos de los estudiantes.
7. **Reto:** se trata de verificar si el material o recurso contribuye a que la tarea sea un desafío para los estudiantes.
8. **Errores:** se debe tener en cuenta si el material o recurso contribuye a que los estudiantes se percaten de sus errores y si estos contribuyen a que el profesor favorezca a la superación de los errores.
9. **Indagación:** es necesario pensar si el material o recurso fomenta el análisis de información, el planteamiento de interrogantes, la búsqueda de estrategias propias, el descubrimiento de propiedades y relaciones, y el análisis de resultados.
10. **Interacción:** evidenciar si el material o recurso genera ambientes de interacción entre los estudiantes o entre el profesor y sus estudiantes.

11. **Relevancia e interés:** a la hora de proponer un material o recurso se debe contemplar si estos promueven el interés y la curiosidad de los estudiantes para resolver la tarea.
12. **Expectativas afectivas:** en este criterio se debe tener en cuenta si el material o recurso contribuye a las expectativas de tipo afectivo que se establecieron para el tema (p. 215).

Enseguida continuamos con la descripción de los siete elementos que componen a una tarea, se describen los tres elementos faltantes.

- **Agrupamiento:** Se refiere a las formas de organización de los estudiantes que se sugieren para resolver la tarea. Es de resaltar que este criterio se debe tener presente para definir las etapas de temporalidad.
- **Interacción:** hace referencia a las formas en que se planifica y prevé que los estudiantes y el profesor interactúen cuando se aborde la tarea.
- **Temporalidad:** consta de los momentos y tiempos en los que se abordan las diferentes partes de la tarea. En este criterio "El profesor puede prever que una tarea matemática se desarrolle como una secuencia de etapas" (Gómez et al., 2018, p. 222).

Descripción de la Secuencia de Tareas

Como se afirmó en el capítulo anterior, la secuencia de tareas requiere que los estudiantes usen sus conocimientos sobre cuadriláteros (elementos, propiedades y clasificación de cuadriláteros) dado que las tareas son de evaluación y no de aprendizaje, atendiendo a que se busca caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto y once sobre la clasificación de cuadriláteros según el Modelo de Van Hiele.

La secuencia de tareas está pensada para ser desarrollada por los estudiantes de grado sexto y once en tres encuentros sincrónicos en Google *Meet,* cada uno de cien minutos, de manera individual con el fin de no generar alteraciones en la caracterización del nivel de razonamiento de los estudiantes. Por lo anterior se incluirán los temas de cuadriláteros que están previstos en el currículo escolar colombiano y en particular el currículo del Colegio San Francisco de Asís para estos grados, según lo expuesto al final del capítulo anterior. De acuerdo con las características de los estudiantes según la edad, se diseñaron las preguntas de las tareas que componen la secuencia para que sean comprensibles para los estudiantes de ambos grados.

Conforme a la disponibilidad de recursos e infraestructura tecnológica del Colegio para la modalidad de educación en línea, se decidió que la secuencia se llevará a cabo en computadores de escritorio empleando GeoGebra *Classroom* y *Classcraft*. Estos constituyen los materiales que se utilizaron para el desarrollo de la secuencia, corresponden a plataformas virtuales creadas con fines didácticos. Para apoyar esto se incluyeron videos cortos[2], elaborados para la aplicación de la secuencia, enlazados en distintas partes de esta, en los que se explica el uso y las herramientas que proporcionan estas plataformas virtuales.

Classcraft[3] es una plataforma digital en la que se pueden diseñar, crear y desarrollar espacios de aprendizaje. Por medio de esta plataforma se promueve la motivación e interés de los estudiantes ya que es un espacio de gamificación en el que los estudiantes juegan a ser

---

[2] Tutorial de Inicio de Classcraft: https://youtu.be/yIAOY10tFFc

Cómo escribir sobre una figura en GeoGebra Classroom: https://www.youtube.com/watch?v=6-WkoZmB_Og

Escribir sobre una tabla en GeoGebra Classroom: https://www.youtube.com/watch?v=YtXlAJOgbnk

Reteñir figuras en Geogebra Classroom: https://youtu.be/XQTBRJASLG8

Uso de regla y Transportador en GeoGebra Classroom: https://youtu.be/Fx9yTsBN8js

Herramienta tabla en GeoGebra Classroom: https://youtu.be/M5vA4FLwjK8

[3] Dirección sitio web: https://www.classcraft.com/es-es/

guerreros, magos y curanderos, deben completar una serie de misiones que corresponden a tareas, actividades, foros, juegos, entre otros. Cada vez que se avanza en la clase, los estudiantes en sus roles de magos, guerreros y curanderos van adquiriendo poderes y puntos de experiencia, los cuales se ganan a partir de su desempeño y avance dentro del aula (participación, entrega de tareas, realización de trabajos, puntualidad). Con estos poderes y puntos de experiencia los estudiantes pueden desbloquear trajes para sus personajes, desbloquear habilidades, tener privilegios en cuanto a la entrega de tareas o solución de evaluaciones, entre otros. En *Classcraft* los profesores pueden diseñar clases, dentro de las cuales se ubican las misiones. Cada misión abarca un contenido que se desarrolla por etapas. Las etapas son las actividades, tareas o trabajos que se proponen para trabajar el contenido. Estas etapas pueden habilitarse según el ritmo de aprendizaje de cada estudiante.

GeoGebra *Classroom*[4] es una plataforma virtual por medio de la cual los profesores pueden diseñar y crear clases, donde se asignan tareas interactivas y atractivas para sus estudiantes. En esta plataforma los profesores pueden ver en tiempo real el progreso de los estudiantes cuando trabajan en la solución de una tarea específica, ver las tareas que han realizado y las que no. También permite trabajar de forma sincrónica o asincrónica, puesto que a las tareas se les puede poner en pausa si el profesor requiere que los estudiantes no avancen en el desarrollo de las tareas. GeoGebra *Classroom* cuenta con herramientas que facilitan la representación de figuras geométricas con elementos de geometría, herramientas de lápiz que permiten realizar notas o dibujos a mano alzada, herramientas para medir como la regla y el transportador y herramientas que permiten realizar tablas y cuadros de texto.

Se decidió que la secuencia de tareas en *Classcraft* se presentará como una misión en la que se darán 200 puntos de experiencia por cada etapa completada, ya que la gamificación potencializa la motivación como las habilidades de los estudiantes, y por ende promueve

[4] Dirección sitio web: https://www.geogebra.org/u

obtener mejores resultados. Con lo anterior un profesor en ejercicio genera un ambiente más rico y logra captar mayor interés en los estudiantes al realizar las actividades.

La secuencia de tareas en *Classcraft*[5] es una misión denominada AVENTURA GEOMÉTRICA que está compuesta por cinco etapas (enumeradas con números romanos) que abordan los siguientes contenidos geométricos, respectivamente: cuadriláteros convexos, cóncavos, regulares e irregulares; paralelogramos y trapecios; paralelogramos; trapecios y paralelogramos. Es importante destacar que dado que el lenguaje es fundamental para caracterizar el nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes, como se expuso en el capítulo anterior, en las tareas se incluirán preguntas abiertas y se dispondrán los elementos necesarios en GeoGebra *Classroom* para que los estudiantes ingresen sus razones o justificaciones de manera escrita.

El profesor inicialmente crea un perfil en *Classcraft* para cada estudiante con los nombres y apellidos, de allí la plataforma genera un código aleatorio para cada uno de los estudiantes, el cual se envía en un documento PDF (ver anexo 1) a través de sus correos electrónicos. Posteriormente, los estudiantes inician su participación en la secuencia de tareas con la creación de su usuario y contraseña haciendo uso del código. Luego, el estudiante inicia la personalización de su avatar eligiendo entre mago, sanador o guardián; aspecto masculino o femenino; primer poder; opciones de emblema y opciones de fondo. Finalizada la personalización del avatar, los estudiantes pueden iniciar el desarrollo de la secuencia que corresponde a la misión AVENTURA GEOMÉTRICA que se desarrolla en varias regiones de un territorio. Cada etapa de la secuencia corresponde a una región de ese territorio. Los

[5] La secuencia de tareas en *Classcraft* se puede ver desde el rol de profesor en: https://app.classcraft.com/teacher/import/quest/AJSMdLurvEKBqTQ34

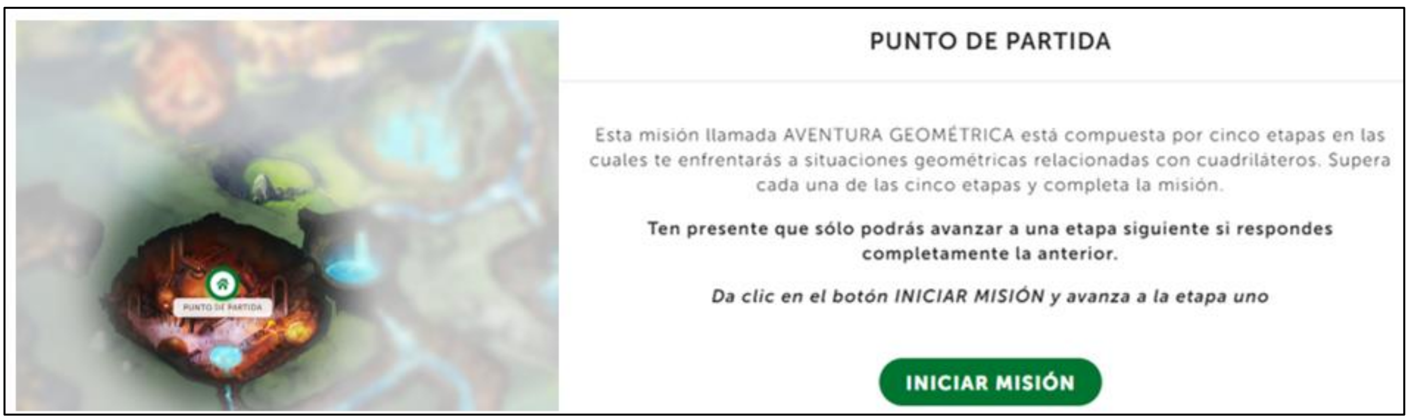
Video de la navegación por la secuencia de tareas en *Classcraft* desde el rol de estudiante: https://youtu.be/i9gSsD-8hsc No se visualizan las tareas en Google *Classroom* dado que aparecen en los anexos del 1 al 6.

estudiantes podrán acceder a las regiones cuando el profesor les dé ingreso. Ello sucede cuando el estudiante ha completado la resolución de una etapa y lo comunica al profesor mediante el chat de la reunión de Google *meet* escribiendo T1, si se trata de la etapa 1 por ejemplo. Todos los estudiantes se encuentran conectados a dicha reunión en Google *meet* dado que el encuentro se desarrolla de manera sincrónica.

El estudiante visualiza en primer lugar una región del mapa donde se lleva a cabo la misión y un botón que lo dirige a una primera instrucción. El mapa y la instrucción se pueden observar en la Figura 12.

Figura 12

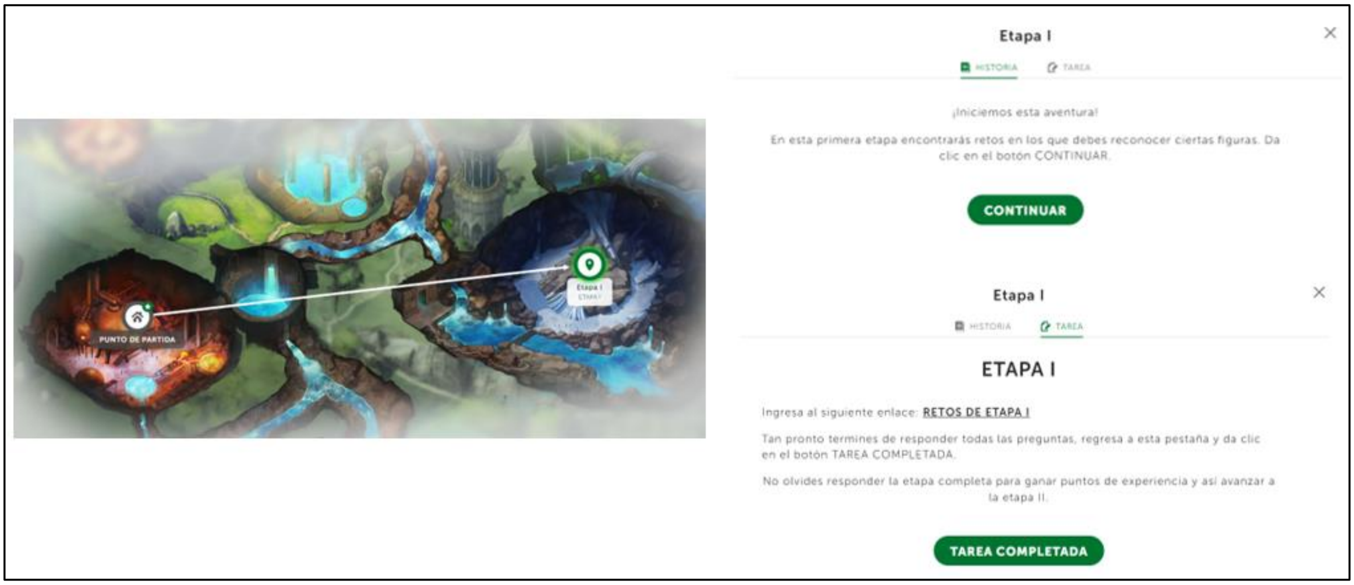
Primera región en el mapa de la misión e instrucción de la secuencia de tareas



En segundo lugar se muestra otra región del mapa de la misión, la que corresponde a la Etapa I, y se muestra la instrucción para iniciar su desarrollo (ver Figura 13). Esta instrucción consiste en dar clic al enlace denominado RETOS DE LA ETAPA I, el cual los dirige a la página web de la Etapa I en GeoGebra *Classroom* (ver anexo 2).

Figura 13

Segunda región en el mapa de la misión e instrucciones para la Etapa I



Las tareas de las etapas se nombran como **tareas de reto**. La Etapa I consta de ocho tareas de reto que se centran en la clasificación de cuadriláteros cóncavos, convexos, regulares e irregulares, y se desarrollan con base en once figuras geométricas enumeradas que se muestran en la primera parte de la etapa. Como se puede ver en el anexo 2, no todas las figuras geométricas corresponden a cuadriláteros. La primera tarea consiste en escribir el número de aquellas figuras que consideran como cuadrilátero, con lo cual se busca conocer qué figuras identifica el estudiante como cuadriláteros.

En la segunda tarea se les pide a los estudiantes escribir, con las herramientas que brinda GeoGebra *Classroom* (lápiz o resaltador), CX dentro de las figuras que son cuadriláteros convexos, CV dentro de las figuras que son cuadriláteros cóncavos, I dentro de las figuras que son cuadriláteros irregulares y R dentro de las figuras que son cuadriláteros regulares. Con esta tarea se busca conocer si los estudiantes realizan clasificaciones inclusivas como por ejemplo, al identificar primero los cuadriláteros y luego la propiedad ser cóncavo, convexo, regular o irregular, si reconocen que una figura puede ser convexa y a la vez regular o irregular; o si, por el contrario, hacen clasificaciones exclusivas al reconocer, por ejemplo, que una figura es cóncava, convexa, regular o irregular sin que esta sea un cuadrilátero.

En las tareas de reto 3, 4, 5 y 6 se pide escribir el número de las figuras que los estudiantes consideraron en la respuesta a la tarea reto 2, respectivamente, como cuadriláteros cóncavos (CV), cuadriláteros convexos (CX), cuadriláteros regulares (R) y cuadriláteros irregulares (I), y justificar el por qué de su elección. Con esto se pretende reconocer el lenguaje que usan los estudiantes, natural, básico o geométrico; también identificar si enuncian los elementos que conforman a un cuadrilátero cóncavo, para el caso de la tarea 3, o si únicamente se centran en el aspecto físico de las figuras, haciendo referencia a color, tamaño, posición, entre otros similares. Asimismo, si relacionan figuras con objetos del entorno, reconocen y clasifican figuras teniendo en cuenta semejanzas o diferencias globales entre ellas, enuncian las propiedades de los cuadriláteros cóncavos o de las figuras cóncavas y relacionan propiedades generando clasificaciones inclusivas.

Lo anterior se aplica de manera similar para las tareas 4, 5 y 6, en cada caso, para cuadriláteros convexos, regulares e irregulares, respectivamente.

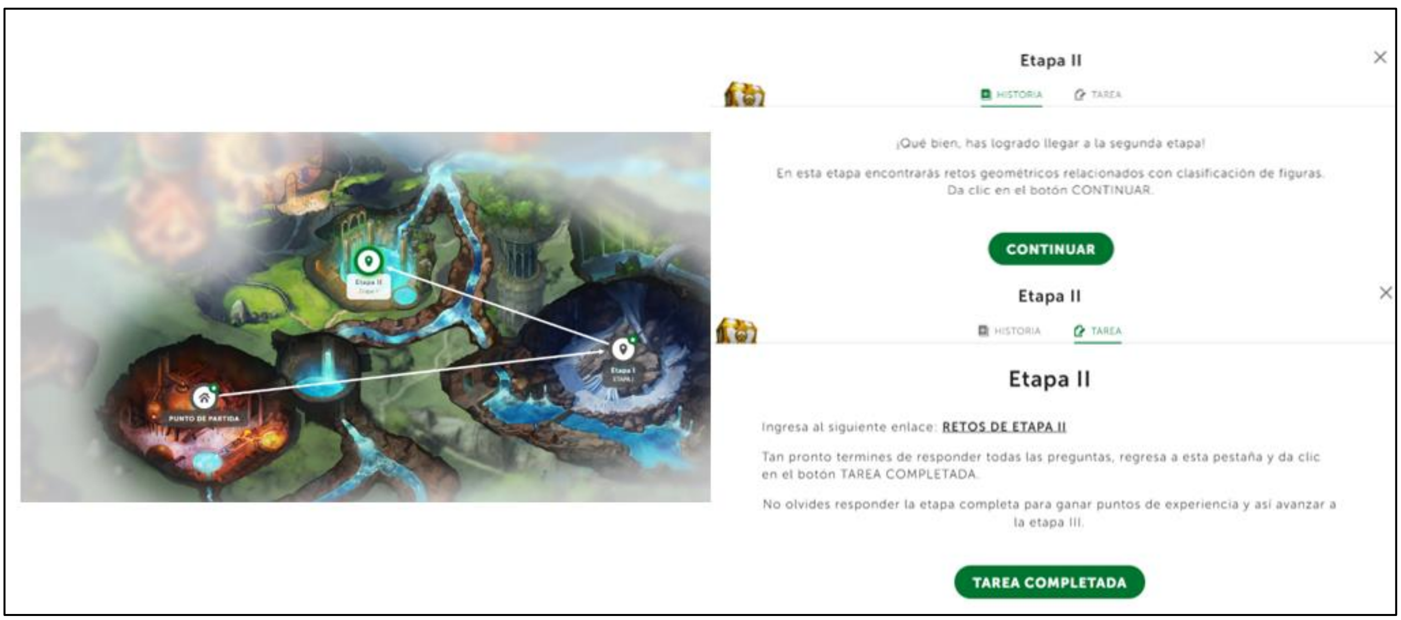
En la tarea siete, se pide enunciar el número de las figuras en las cuales los estudiantes no escribieron CV, CX, I ni R y explicar para cada una el por qué no le escribieron ninguna de las letras. Por medio de esta tarea se busca identificar si los estudiantes reconocen y describen las propiedades necesarias y suficientes de las figuras para que sean cuadriláteros cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

La última tarea en la etapa I es la ocho, que muestra una tabla en la cual se presentan cinco de las once figuras enumeradas que se mostraron al inicio de la etapa. La instrucción que se da es que para cada una de las figuras que están en la tabla, se debe marca con una X las celdas que correspondan a la letra o letras que los estudiantes escribieron dentro de ella y explicar de manera escrita el por qué eligieron esa o esas letras. Esto se realiza con las herramientas de GeoGebra *Classroom* lápiz, resaltador, cuadro de texto o escribir en la tabla. Con esta tarea se busca reconocer si los estudiantes realizan clasificaciones inclusivas en las que, por ejemplo, hay figuras que son cuadriláteros convexos y regulares o figuras que son cuadriláteros convexos e irregulares; si realizan clasificaciones exclusivas en las que, por ejemplo, las figuras son convexas pero no cuadriláteros o regulares pero no cuadriláteros; identificar el qué tienen en cuenta los estudiantes para realizar las clasificaciones, es decir, si se basan en su apariencia global, en las partes o propiedades de las figuras, y por último, conocer el lenguaje que utilizan.

Cuando el estudiante pasa a la Etapa II, se muestra una tercera región en el mapa de la misión y se dan las instrucciones para llevar a cabo la solución de la etapa (ver Figura 14). La instrucción en primer lugar deja saber a los estudiantes que han logrado llegar a la segunda etapa y les avisa sobre lo que encontrarán en esta. En segundo lugar, se les pide dar clic en el enlace que tiene como nombre RETOS DE LA ETAPA II, el cual los dirige a GeoGebra *Classroom* donde se presenta la segunda etapa de la secuencia de tareas (ver anexo 3).

Figura 14

Tercera región en el mapa de la misión e instrucciones para la Etapa II



La Etapa II está formada por seis tareas de reto que están orientadas a la clasificación de cuadriláteros en trapecios y paralelogramos. En la tarea uno se muestran once figuras (paralelogramos y trapecios) (ver anexo 3) y la instrucción es analizarlas y realizar una propuesta de cómo clasificarlas en grupos de figuras. Para ello los estudiantes, con la opción de lápiz o resaltador de GeoGebra *Classroom*, eligen un color para cada grupo de figuras y retiñen del mismo color los contornos de las figuras que corresponden a cada grupo. La tarea dos pretende conocer cuántos grupos de figuras propusieron los estudiantes, se pregunta por la cantidad de grupos formados. La tarea tres busca conocer qué tuvieron en cuenta los estudiantes para crear cada grupo de figuras, por ejemplo, si tuvieron en cuenta el paralelismo de los lados, si reconocen o dan algún significado a los símbolos de paralelismo, si proponen listas de propiedades en relación a las figuras del mismo grupo, si reconocen los paralelogramos y trapecios o identifican los elementos y propiedades de las figuras.

En la tarea cuatro se pregunta a los estudiantes qué tuvieron en cuenta para clasificar las figuras (ver anexo 3), con esta pregunta se pretende que describan qué tuvieron en cuenta de cada grupo, por ejemplo, la definición de cada grupo si es el caso de paralelogramos y trapecios, la diferencia entre las propiedades de las figuras, si consideraron las figuras de manera global y centran su atención en el aspecto físico, como el color que asignaron a cada grupo, el tamaño, el sentido o dirección de las figuras, o los símbolos de paralelismo.

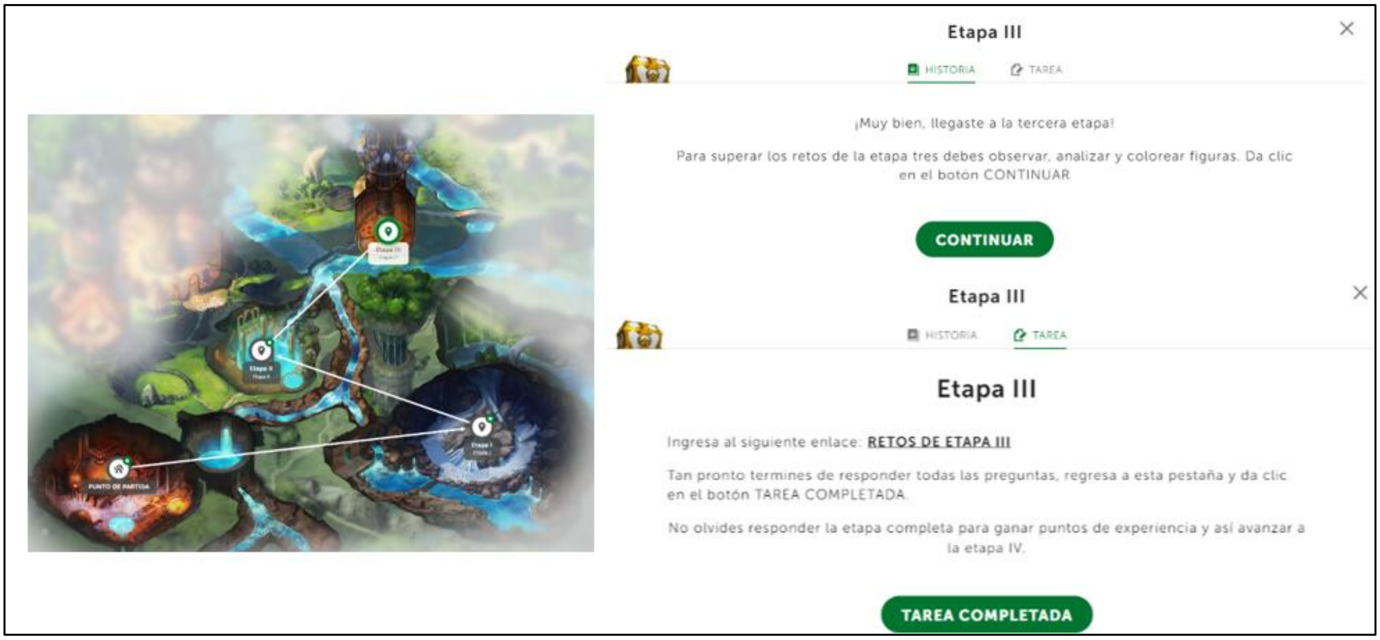
Con la tarea cinco se quiere identificar si las clasificaciones que presentan los estudiantes corresponden a los paralelogramos y trapecios, o si los estudiantes asignan el nombre a cada clasificación según aspectos físicos, globales o propiedades de las figuras. La última tarea es la seis, con la que se quiere reconocer e identificar si los estudiantes realizan clasificaciones exclusivas o inclusivas entre los grupos que propusieron, relacionando las propiedades o aspectos que tuvieron en cuenta para proponer cada grupo de figuras.

Cuando el estudiante pasa a la Etapa III, en la cuarta región en el mapa de la misión encuentra las instrucciones para realizar la etapa (ver Figura 15). Una de las instrucciones les informa a los estudiantes que han llegado a la tercera etapa y que deben observar, analizar y colorear figuras para superar los nuevos retos. Otra instrucción les pide a los estudiantes dar clic a un enlace que tiene como nombre RETOS DE LA ETAPA III, el cual los dirige a

GeoGebra *Classroom* donde se presenta la tercera etapa de la secuencia de tareas (ver anexo 4).

Figura 15

Cuarta región en el mapa de la misión e instrucciones para la Etapa III



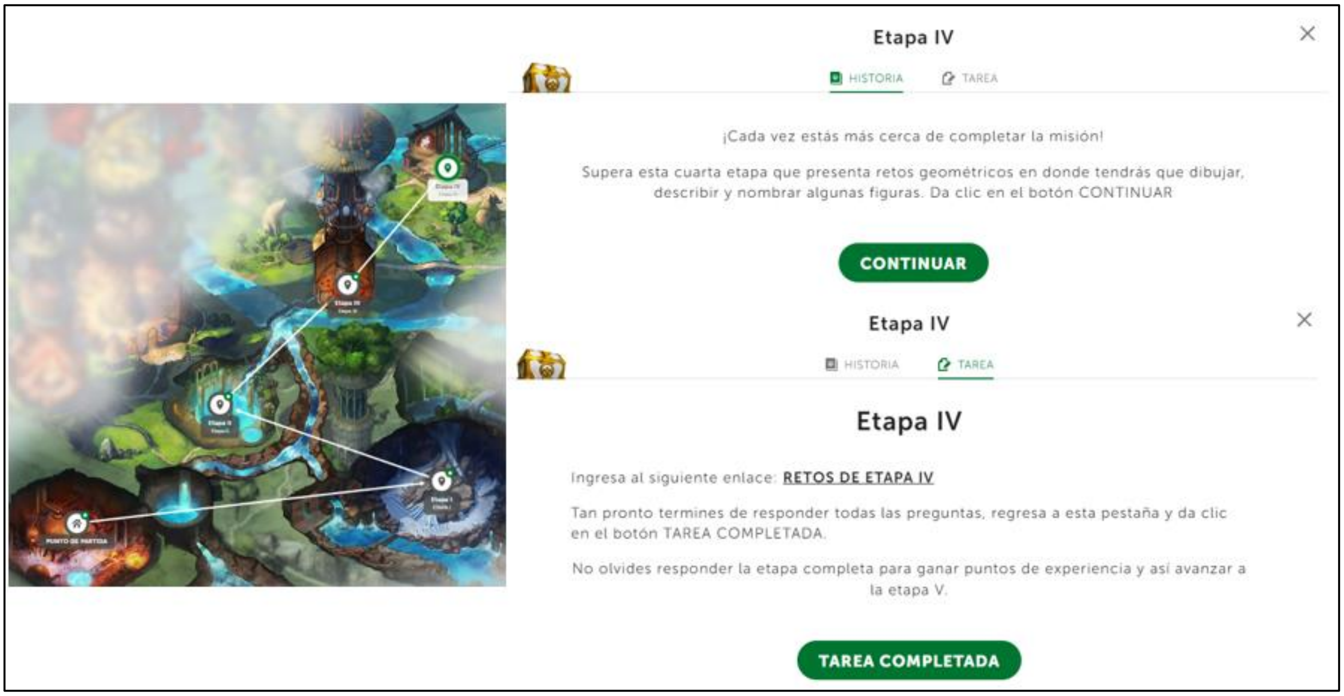
En la primera tarea de la Etapa III se muestran varias figuras geométricas (son cuadriláteros de distintos tipos, trapecios, cuadrados, rombos, cometas, romboides, rectángulos y cuadriláteros cóncavos) (ver anexo 4). Se les pide a los estudiantes que retiñan de color rojo el contorno de las figuras que son cuadrados, amarillo el de las que son rombos, naranja el de las que son rectángulos y verde el de las que son romboides. Es de mencionar que los contornos de las figuras se retiñen con las herramientas lápiz o resaltador de GeoGebra *Classroom*. Mediante esta tarea se busca en primer lugar, reconocer si los estudiantes identifican las figuras geométricas presentadas (ver anexo 4), teniendo en cuenta que no todas aparecen en su forma prototípica. Por ejemplo, en las figuras presentadas se puede observar: un romboide que tiene sus ángulos con medidas de 89,67° y 90,33°, por lo que a simple vista parece ser un rectángulo. En segundo lugar, se busca identificar si los estudiantes realizan clasificaciones inclusivas o exclusivas. Si los estudiantes realizan clasificaciones inclusivas se pueden encontrar figuras en las cuales su contorno fue reteñido con dos o más colores como, por ejemplo, el contorno de un cuadrado, el cual puede estar reteñido de color rojo, amarillo y naranja. Por el contrario, si las clasificaciones son exclusivas, el contorno de las figuras señaladas tendrá únicamente un color.

En la segunda tarea se pregunta ¿Qué tuviste en cuenta para elegir los cuadriláteros que reteñirías de rojo? Con esta tarea se busca reconocer si los estudiantes: enuncian las propiedades del cuadrado, brindan una definición, relacionan propiedades o describen el cuadrado según su aspecto físico o apariencia global (posición, tamaños, se parece a “una ventana”) haciendo uso de un lenguaje poco preciso, básico o geométrico. Las tareas cuatro, cinco y seis se proponen con la misma intención para rombos, rectángulos y romboides, respectivamente.

Cuando el estudiante tiene habilitada la Etapa IV, en el mapa de la misión aparecerá una nueva región en la que se encuentran instrucciones para realizar la etapa (ver Figura 16). A través de un texto se informa a los estudiantes que cada vez están más cerca de completar la misión y que deben dibujar, describir y nombrar algunas figuras para superar la cuarta etapa. Otra instrucción pide a los estudiantes dar clic a un enlace que tiene como nombre RETOS DE LA ETAPA IV, el cual los dirige a GeoGebra *Classroom* donde se presenta la Etapa IV (ver anexo 5).

Figura 16

Quinta región en el mapa de la misión e instrucciones para la Etapa IV



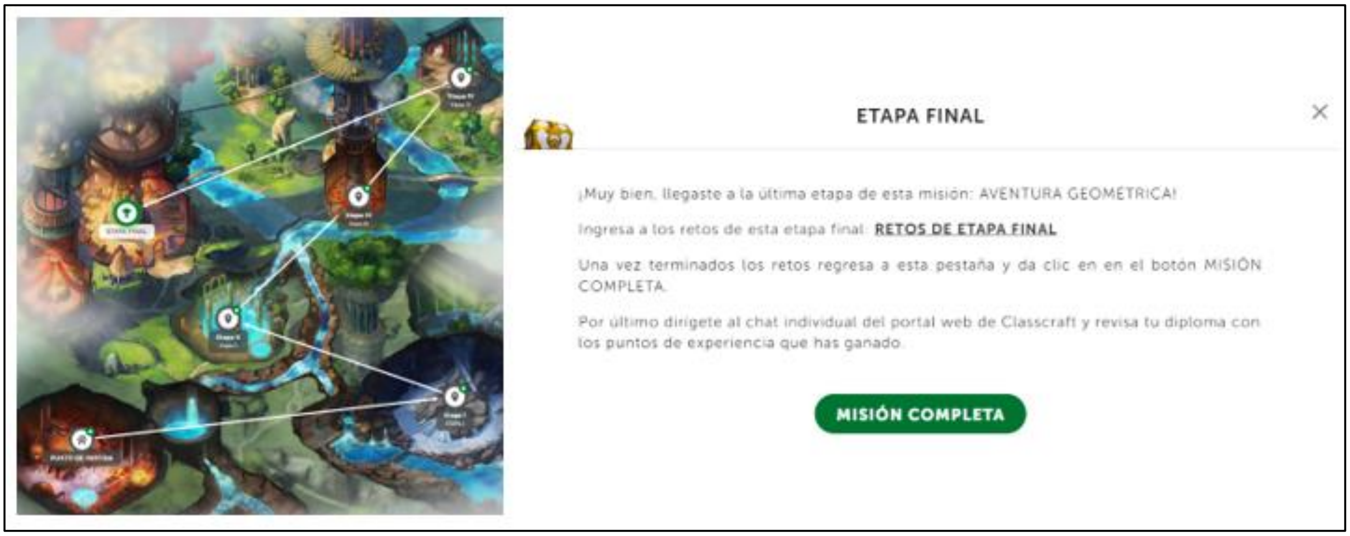
En esta etapa se presentan cinco tareas de reto que están orientadas a los trapecios rectángulos, isósceles y escalenos. En primer lugar, se da la instrucción de leer las definiciones correspondientes a tres figuras A, B y C (ver anexo 5), luego, de acuerdo a estas se proponen las siguientes tareas. En la tarea uno se pide a los estudiantes que dibujen la figura A, esto lo pueden hacer con las herramientas de lápiz, resaltador, regla o transportador de GeoGebra *Classroom*. Mediante esta tarea se busca identificar qué elementos o características consideraron los estudiantes de la definición de la figura A. En la tarea dos se pregunta por el nombre de la figura A, para saber qué figura geométrica consideran que es, si la relacionan específicamente con los trapecios o con otros cuadriláteros. En la tarea tres se pide a los estudiantes que escriban las características de la figura A, con lo que se quiere verificar qué tuvieron en cuenta de la definición dada o de la representación que hicieron en la tarea uno. Con esto, se quiere saber si los estudiantes reconocen los trapecios rectángulos y las propiedades particulares que los caracterizan, si toman las propiedades que se enunciaron en la definición o si por el contrario, a las características le agregan más propiedades o elementos irrelevantes como el color, tamaño o posición.

En relación con las definiciones de las figuras B y C, las cuales corresponden a trapecio isósceles y trapecio escaleno respectivamente, se plantean las tareas cuatro y siete para que los estudiantes dibujen las figuras que ellos consideran corresponden a las definiciones. En las tareas cinco y ocho los estudiantes deben escribir los nombres de las figuras que dibujaron en el ítem anterior. Igual que en la tarea dos, se quiere saber si los estudiantes reconocen que la definición de la figura B corresponde a un trapecio isósceles y la figura C a un trapecio escaleno, o si relacionan las definiciones con otro tipo de cuadriláteros. Las tareas seis y nueve se plantean con la finalidad de identificar el tipo de lenguaje que utilizan los estudiantes al escribir las características de las figuras que nombraron en el ítem anterior, si hacen uso de un lenguaje sencillo, básico o geométrico. También, se quiere saber qué tuvieron en cuenta a la hora de dibujar la figura y proponer sus nombres; si tienen en cuenta las propiedades que se enuncian en la definición de cada una de las figuras, respectivamente, o si por el contrario, a las características le agregan más propiedades o elementos irrelevantes como el color, tamaño o posición, considerando las figuras que ellos dibujaron en las tareas anteriores.

Cuando el estudiante tiene habilitada la etapa final en *Classcraft* se hace visible en el mapa de la misión como una nueva región (ver figura 17). Allí se encuentra una instrucción que le avisa a los estudiantes que esta etapa corresponde a la etapa final de la misión AVENTURA GEOMÉTRICA, y les indica que deben ingresar a los retos de esta etapa mediante el enlace que tiene como nombre RETOS DE ETAPA FINAL.

Figura 17

Sexta región en el mapa de la misión e instrucciones para la Etapa V



La Etapa V está compuesta por diez tareas de reto que están orientadas a los cuadrados, rombos y rectángulos. Inicialmente se muestra un párrafo que describe una situación que contiene afirmaciones sobre las relaciones entre dos figuras geométricas (ver anexo 6). En la tarea de reto uno se le pregunta al estudiante si está de acuerdo o en desacuerdo con la afirmación presentada y qué aspectos tiene en cuenta para su decisión, la afirmación es “Un rombo siempre es un cuadrado”. Con esta tarea se busca evidenciar si los estudiantes establecen clasificaciones inclusivas, es decir, si reconocen que un rombo es a veces un cuadrado y no siempre, si realizan comparaciones entre las propiedades de cada figura geométrica, si resaltan diferencias o relaciones entre propiedades. En la tarea dos se presenta un espacio de dibujo con las herramientas de GeoGebra *Classroom* para que los estudiantes puedan realizar representaciones que sirvan como ejemplos y refuercen la explicación dada en la tarea uno.

En la tarea 3 se presenta la afirmación “María dijo que un cuadrado es siempre un rectángulo” y se le pregunta al estudiante qué diría acerca de la afirmación que realiza María. Con esta tarea se quiere identificar el tipo de clasificación que realizan los estudiantes (inclusivas o exclusivas) entre cuadrado y rectángulo, si realizan comparaciones entre el aspecto global del cuadrado y el rectángulo, o si por el contrario comparan las partes o establecen relaciones entre las propiedades que caracterizan a cada uno de estos cuadriláteros. En la tarea cuatro se presenta un espacio de dibujo con las herramientas de dibujo de GeoGebra *Classroom* para que los estudiantes puedan realizar representaciones que sirvan como ejemplos y refuercen la explicación dada en la tarea tres.

Seguido de esto se presentan tres carteles numerados (ver anexo 6) con las siguientes afirmaciones sobre relaciones entre dos figuras geométricas:

- Cartel 1: Un cuadrado es siempre, a veces o nunca un rombo
- Cartel 2: Un rombo es siempre, a veces o nunca un rectángulo
- Cartel 3: Un rectángulo es siempre, a veces o nunca un rombo

En la tarea cinco se pide a los estudiantes que escriban lo que piensan acerca del enunciado que se encuentra en el cartel uno, con lo cual se busca que los estudiantes establezcan si un cuadrado es siempre, a veces o nunca un rombo e identifiquen qué consideran de estas figuras geométricas para dar su opinión. En la tarea 6 se presenta un espacio de dibujo con las herramientas de dibujo de GeoGebra *Classroom* para que los estudiantes puedan realizar representaciones que sirvan como ejemplos y refuercen la explicación dada en la tarea cinco. Lo anterior se desarrolla de la misma manera en las tareas siete y ocho y nueve y diez, ya que son similares a las tareas cinco y seis, pero referido a los carteles dos y tres, respectivamente.

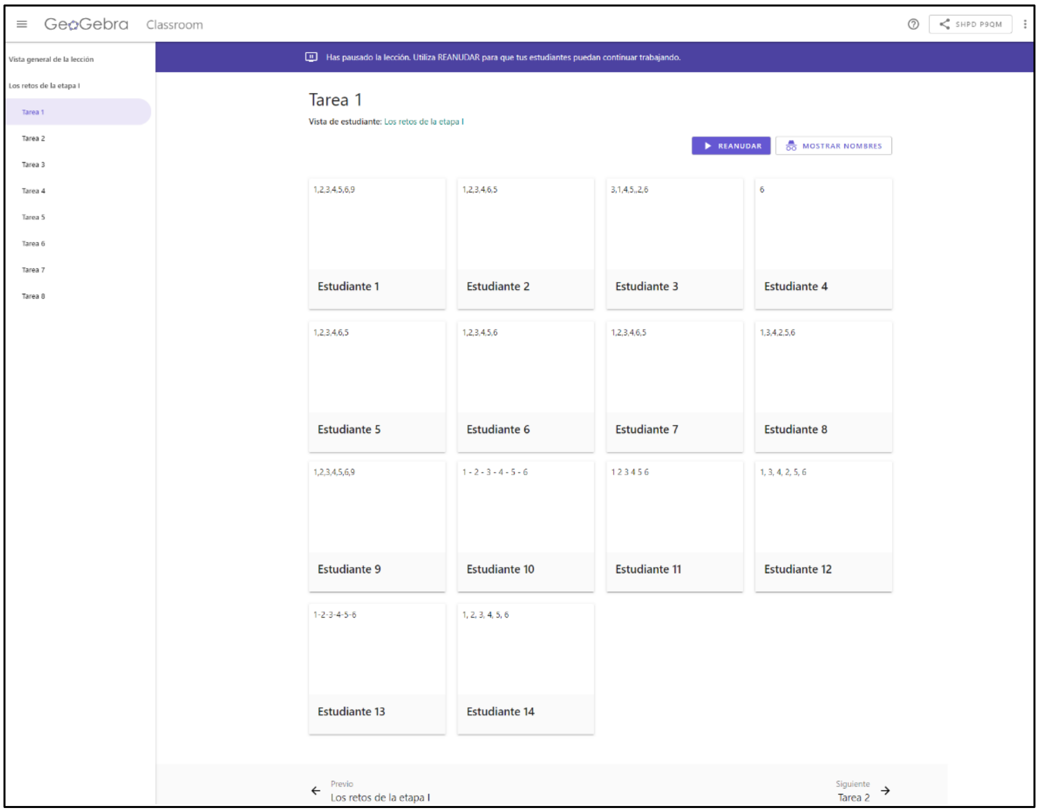
Cuando los estudiantes hayan finalizado la etapa V deben volver a *Classcraft* y dar clic sobre el botón MISIÓN COMPLETA para dar por terminada la misión (secuencia de tareas).

Recolección y análisis de datos

En cuanto a la recolección de la información de las respuestas de los estudiantes nos apoyamos en GeoGebra *Classroom*, ya que muestra en tiempo real el progreso general de los estudiantes en cada una de las tareas de reto propuestas por etapa, indicando cuántos de ellos han respondido cada tarea, y muestra por tarea el nombre de los estudiantes y su respectiva respuesta. Es de resaltar que la plataforma brinda la opción de ocultar los nombres y asigna a cada estudiante un número. Para ilustrar esto, en la Figura 18 se muestran las respuestas de catorce estudiantes a una tarea de reto.

Figura 18

Respuestas de catorce estudiantes a una tarea de reto



Otra de las herramientas de GeoGebra *Classroom* que contribuye a la recolección de datos es la vista general de la lección de cada uno de los catorce estudiantes. Allí se muestra toda la etapa, con sus respectivas respuestas por estudiante. Un ejemplo de esto se muestra en el anexo 7.

Creamos una copia de seguridad de las respuestas de los estudiantes a cada tarea, por etapa, a través de documentos en formato PDF, con el fin de no perder las producciones de los estudiantes en caso de que la plataforma presente inconsistencias.

El análisis se realizó presentando la tendencia del nivel de razonamiento de los estudiantes por curso, de modo que el nivel de Van Hiele que se caracterizó fue para el grupo de estudiantes de grado sexto; y por otro lado para el grupo de estudiantes de grado once. Es de resaltar, que, aunque el análisis se expresa para el grupo, este se hizo con las respuestas de cada estudiante y se hace referencia a cada uno con un código.

Para desarrollar el análisis de las respuestas de los estudiantes a la secuencia de tareas, realizamos, en primer lugar, la descripción y agrupamiento de las respuestas para cada una de las tareas de reto que componen la etapa. El agrupamiento se hizo en función de la similitud o cercanía de las respuestas. En segundo lugar se identificó qué características propias de un nivel del Modelo de Van Hiele evidencian dichas respuestas a través de los descriptores que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2

Descriptores según el Modelo de Van Hiele

Niveles de Razonamiento geométrico de Van Hiele	Descriptores
Nivel 1: Visualización o Reconocimiento	Los estudiantes se ubican en el nivel de visualización cuando: • Reconocen y describen las figuras de manera global, enunciando atributos irrelevantes (color, orientación, posición de la figura). • Usan un lenguaje natural y un vocabulario básico. • Relacionan figuras con objetos del entorno

	• Reconocen, distinguen o clasifican figuras teniendo en cuenta semejanzas o diferencias globales entre ellas. • Reconocen algunas partes que componen las figuras y algunas propiedades, sin embargo, no les dan un papel central a estas. • Realizan clasificaciones exclusivas percibiendo cada figura como objeto independiente de otra de la misma clase. • Define las figuras a partir de un listado de atributos irrelevantes (color, orientación, posición de la figura) o propiedades físicas.
Nivel 2: Análisis	Los estudiantes se ubican en el nivel de análisis cuando: • Reconocen y describen de manera informal las propiedades y elementos que integran una figura, haciendo uso de un lenguaje apropiado. • Argumentan sus respuestas conociendo y reconociendo propiedades de figuras de manera independiente, es decir, no establecen relaciones entre ellas. • Definen las figuras a partir de las propiedades que caracterizan. • Justifican la verdad o falsedad de enunciados presentando ejemplos, llegando a generalizar propiedades de una misma familia de figuras.

Nivel 3: Ordenación o Clasificación	Los estudiantes se ubican en el nivel de ordenación o clasificación cuando: • Reconocen y describen las propiedades necesarias y suficientes de las figuras para definirlas de manera formal. • Reconocen que hay propiedades que se deducen de otras, logrando clasificaciones inclusivas y exclusivas de figuras geométricas. • Hacen uso de definiciones y propiedades para demostrar la validez de enunciados, sin embargo, no realizan demostraciones formales.
Nivel 4: Deducción formal	Los estudiantes se ubican en el nivel de deducción formal cuando: • Identifican el sentido y la utilidad de un sistema axiomático a la hora de validar de manera formal un enunciado. • Desarrollan una visión globalizadora de las figuras geométricas reconociendo equivalencia entre definiciones. • Demuestran formalmente teoremas ya utilizados o propiedades nuevas haciendo uso de un sistema axiomático. • El lenguaje que utilizan los estudiantes es preciso.

Dentro de los descriptores no consideramos el nivel 5 de Rigor ya que Fouz y Doností (2004) mencionan que este nivel es inalcanzable para los estudiantes de colegio y muchas veces se prescinde de él. Afirman que hay trabajos en los que señalan que los estudiantes no universitarios, como mucho, alcanzan los tres primeros niveles.

Para terminar de realizar el análisis, en tercer lugar, concluimos la tendencia del nivel de razonamiento geométrico de Van Hiele del grupo de estudiantes, según los descriptores que se encontraron asociados a cada grupo de respuestas encontrado para el contenido geométrico abordado en la tarea de reto.

Capítulo 4. Análisis y resultados

Como explicamos en el Capítulo 3, la secuencia de tareas propuesta en este trabajo de grado está organizada en cinco etapas, en las cuales se proponen tareas de reto. Con cada una de las etapas se busca conocer el razonamiento geométrico de los estudiantes relativo a los contenidos de cuadriláteros que cada una trata, así:

- Etapa I: Cuadriláteros cóncavos, convexos, regulares e irregulares.
- Etapa II: Paralelogramos y trapecios.
- Etapa III: Paralelogramos (cuadrado, rombo, romboide, rectángulo).
- Etapa IV: Trapecios (Trapecio rectángulo, isósceles, escaleno).
- Etapa Final: Paralelogramos (cuadrado, rombo, rectángulo).

Teniendo en cuenta el límite de páginas establecido para el documento escrito del trabajo de grado y el volumen de trabajo que implica analizar la gran cantidad de respuestas de las cinco etapas por grado, decidimos presentar únicamente el análisis de la etapa I de la secuencia de tareas de los dos grados. Con lo cual, consideramos que se cumpliría el objetivo de este trabajo de grado al caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de Van Hiele de los estudiantes de ambos grados para la clasificación de cuadriláteros cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

El objetivo de este capítulo es realizar la descripción y análisis de las respuestas[6] que dieron los estudiantes a las tareas reto de la etapa I, para así caracterizar según el Modelo de Van Hiele, el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de los grados sexto y once del Colegio San Francisco de Asís de Nemocón sobre la clasificación de cuadriláteros en cóncavos, convexos, regulares e irregulares. Se inicia por una breve descripción de la aplicación de la secuencia de tareas y la manera como se recolectaron las respuestas de los

[6] La transcripción de las respuestas corresponde exactamente a lo que escribió cada uno de los estudiantes. Estás respuestas se escriben entre comillas.

estudiantes. Luego se hace la presentación del análisis para cada grado, primero 6° y luego 11°, que tendrá la siguiente estructura: enunciación de la tarea reto, descripción y análisis de las respuestas de los estudiantes y caracterización del nivel de razonamiento de Van Hiele que tienen los estudiantes del grado.

Aplicación de la Secuencia de Tareas

La secuencia de tareas se aplicó con nueve estudiantes de grado sexto y cinco de grado once del Colegio San Francisco de Asís a finales del año 2021, en tres sesiones con cada curso, a través de *Google Meet*, cada una de cien minutos. Los enlaces de acceso a estos encuentros de educación en línea, los códigos para ingresar a la plataforma *Classcraft* y el enlace del video con la explicación de cómo ingresar a *Classcraft* se compartieron el 18 de noviembre del 2021 con los profesores y estudiantes de la institución, a través del correo electrónico.

Los encuentros sincrónicos con los dos grados se desarrollaron con la misma metodología de trabajo. Es por ello que para la descripción de los encuentros nos referimos a un grupo de estudiantes sin especificar el grado.

El primer encuentro sincrónico se desarrolló en cinco momentos. En primer lugar, se dio a conocer a los estudiantes que el objetivo de la secuencia de tareas consistía en buscar información para caracterizar el nivel de razonamiento geométrico del grupo de estudiantes según el Modelo de Van Hiele. En segundo lugar, a través de la herramienta compartir pantalla en Google *Meet*, presentamos el video tutorial del uso de *Classcraft* y se abrió un espacio para que los estudiantes realizaran preguntas. En tercer lugar, se indicó a los estudiantes que ingresaran a la plataforma de *Classcraft* empleando el código de acceso enviado al correo electrónico de cada uno para crear su usuario y contraseña. Luego, cada estudiante inició la personalización de su avatar eligiendo entre mago, sanador o guardián; aspecto masculino o femenino; primer poder; opciones de emblema y opciones de fondo. En un cuarto momento les dijimos a los estudiantes que al terminar una etapa de la secuencia de tareas debían avisar mediante el chat de la reunión escribiendo T1, T2, T3, T4 y T5 según la etapa finalizada. Luego los estudiantes iniciaron el desarrollo de la secuencia de tareas con la etapa I. Es de resaltar que permanecimos conectados en el encuentro sincrónico con los estudiantes, a fin de acompañarlos y aclararles inquietudes en cuanto al uso de las plataformas empleadas; también, para habilitar las etapas cuando los estudiantes informaran mediante el chat que habían terminado una de ellas. De igual forma estuvimos atentos a los avances de los estudiantes en tiempo real que se mostraban en las lecciones de GeoGebra *Classroom* y en el progreso en la misión de *Classcraft*. Cuando se completaron los cien minutos del encuentro se les indicó a los estudiantes que cerraran la sesión en *Classcraft* y las ventanas de GeoGebra *Classroom*. Seguido a esto se finalizó el encuentro en *meet* con los estudiantes y procedimos a pausar todas las lecciones en GeoGebra *Classroom*, con el fin de evitar alteraciones o desarrollos fuera de los encuentros sincrónicos programados.

En el segundo y tercer encuentro se inició con el saludo y posteriormente se les indicó a los estudiantes que continuaran con el desarrollo de la misión. Para ello, se quitó la pausa a todas las lecciones en GeoGebra *Classroom*. Desde el segundo encuentro algunos estudiantes completaron la misión en *Classcraft*, lo que correspondía a desarrollar completamente la secuencia de tareas. A estos estudiantes se les agradeció por su participación y se permitió que se desconectaran del encuentro en *meet*.

Recolección de Datos

Como explicamos, la recolección de datos se basó en crear una copia de seguridad de las respuestas de los estudiantes a cada tarea por etapa a través de documentos en formato PDF por cada estudiante, con el fin de no perder las producciones de los estudiantes en caso de que GeoGebra *Classroom* las eliminara automáticamente después de un tiempo. Sin embargo, seis meses después de haber aplicado la secuencia de tareas GeoGebra *Classroom* mantiene archivada la información de las respuestas de los estudiantes en cada una de las etapas.

Análisis

Grado 6°

Para el año 2021 el Colegio San Francisco de Asís de Nemocón contaba únicamente con un curso de grado sexto, el cual estaba conformado por nueve estudiantes. Para el análisis ellos fueron codificados de la siguiente manera: A6, B6, C6, D6, E6, F6, G6, H6 e I6.

ETAPA I

Tarea Reto 1: Consistía en observar las once figuras que se encuentran en el anexo 2 y escribir el número de aquellas que consideran como cuadriláteros.

Las respuestas presentadas se organizan en dos grupos. Uno de ocho estudiantes, que escribieron los números del 1 al 6; de ellos C6 y D6 escribieron además 9. El otro grupo, conformado por I6, escribió 6.

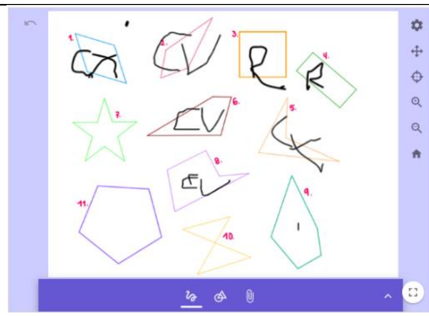
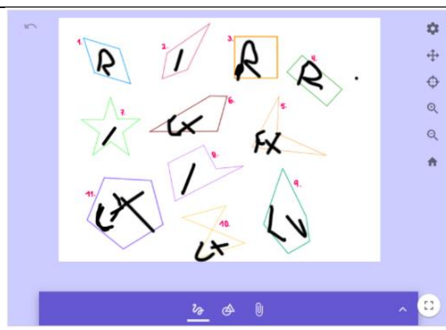
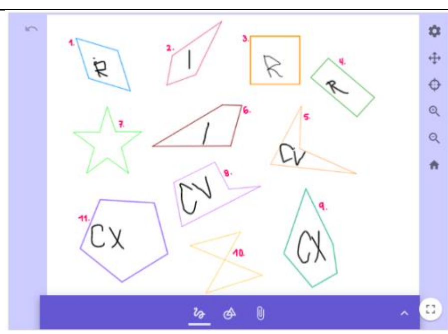
La información que generan estas respuestas no permite evidenciar los descriptores del Modelo de Van hiele ya que se desconocen los motivos de estas, sólo se evidencia un listado numérico.

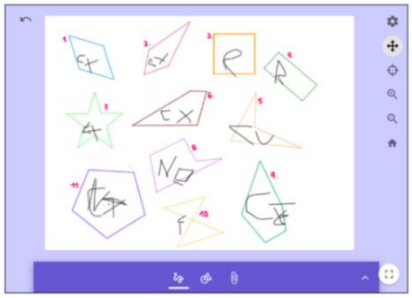
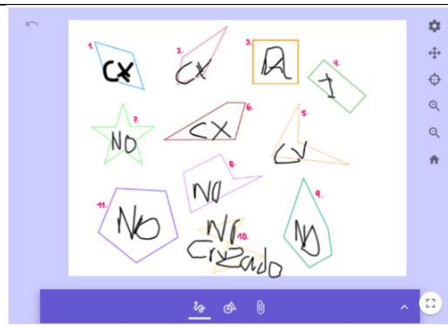
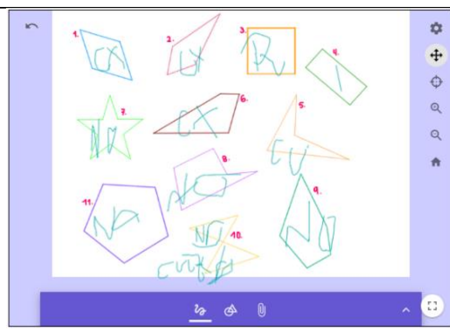
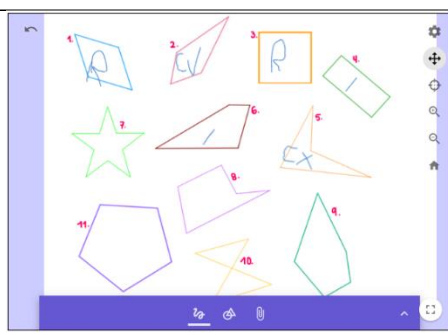
Tarea Reto 2: Se muestran las figuras del anexo 2 y se pide a los estudiantes que indiquen qué figuras consideran como cuadriláteros convexos, cuadriláteros cóncavos, cuadriláteros regulares y cuadriláteros irregulares, a través de escribir dentro de ellas las letras CX, CV, R e I, respectivamente, según corresponda. En las tareas reto 3, 4, 5 ,6 y 7 se preguntó a los estudiantes qué tuvieron en cuenta para escribir las letras dentro de las figuras del reto 2.

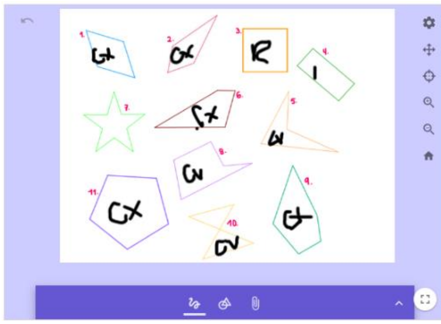
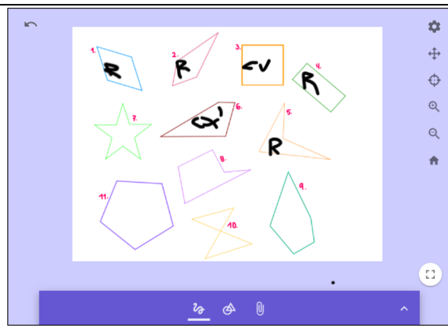
Las respuestas presentadas por los nueve estudiantes en la tarea reto 2 se muestran y organizan en la tabla 3, compuesta por tres columnas. La primera corresponde al código del estudiante, la segunda muestra las respuestas. La tercera tiene la descripción de estas.

Tabla 3

Respuestas de los estudiantes de grado sexto a la tarea reto 2

Código	Respuesta tarea reto 2	Descripción de respuestas	
		Letras	Figuras
A6		CV	2, 6 y 8
		CX	1 y 5
		R	3 y 4
		I	9
		NINGUNA	7, 10 y 11
B6		CV	9
		CX	5, 6, 10 y 11
		R	1, 3 y 4
		I	2, 7 y 8
		NINGUNA	-
C6		CV	5 y 8
		CX	9 y 11
		R	1, 3 y 4
		I	2 y 6
		NINGUNA	7 y 10
D6		CV	5 y 9
		CX	1, 2, 6, 7 y 11

Código	Respuesta tarea reto 2	Descripción de respuestas	
		Letras	Figuras
		R	3 y 4
		I	NINGUNA
		NINGUNA	8 y 10
E6		CV	5
		CX	1, 2 y 6
		R	3
		I	4
		NINGUNA	7, 8, 9 10 y 11
F6		CV	5
		CX	1, 2 y 6
		R	3
		I	4
		NINGUNA	7, 8, 9, 10 y 11
G6		CV	2
		CX	5
		R	1 y 3
		I	4 y 6
		NINGUNA	7, 8, 9, 10 y 11
H6		CV	5, 8 y 10
		CX	1, 2, 6, 9 y 11

Código	Respuesta tarea reto 2	Descripción de respuestas	
		Letras	Figuras
		R I NINGUNA	3 4 7
I6		CV CX R I NINGUNA	3 6 1, 2, 4 y 5 6 7, 8, 9, 10 y 11

La información que generan las respuestas de la tarea reto 2, que son letras escritas dentro de las figuras, no permite evidenciar los descriptores del Modelo de Van hiele ya que los motivos de la elección de estas aparecen en las respuestas de las tareas reto 3, 4, 5 ,6 y 7.

Tarea Reto 3: Se pedía a los estudiantes escribir el número de las figuras que ellos consideraron como cuadriláteros cóncavos (CV) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar el por qué de su elección.

En la respuesta, los estudiantes E6, F6 y H6 hacen referencia a los ángulos interiores de las figuras. Ellos afirman lo siguiente, respectivamente: “porque tiene el ángulo interior mayor de 180°”, “porque los cóncavos tienen su ángulo interior mayor de 180 grados” y “lo que tuve en cuenta fue que los cuadriláteros cóncavos sus ángulos interiores son de 180 grados”.

Los estudiantes C6 y D6 aluden a que las figuras que son cuadriláteros cóncavos tienen una parte en su interior. Las respuestas son respectivamente: “porque tienen una parte de la figura adentro” y “por que tienen las puntas adentro”.

El estudiante A6 escribió “lados”. El estudiante I6 escribió “Es un cuadrilátero normal”. Y las respuestas de los estudiantes G6 y B6 carecen de justificación. Escribieron respectivamente: “9, 8, 5, 1” y “figura 2”. Es importante destacar que al comparar con las respuestas a la tarea reto 2 del estudiante G6, se evidencia que él escribió las letras CV únicamente en la figura 9.

De acuerdo con las respuestas presentadas, podemos decir que tres de los nueve estudiantes (A6, C6 y D6) describen las figuras de manera global y usan un vocabulario básico para referirse a algunas partes de las figuras, “parte de la figura adentro”, “lados” y “puntas adentro”. Los estudiantes (E6, F6 y H6) reconocen algunos elementos que integran una figura, los cuales son “ángulos” y describen propiedades de las figuras como “ángulos internos” y “medidas de ángulos”. El estudiante I6 hace referencia a la orientación de la figura al determinar que un “cuadrado normal” es un cuadrilátero cóncavo. Por último, las respuestas que presentan los estudiantes B6 y G6 no cuentan con información suficiente para evidenciar los descriptores del Modelo de Van Hiele. En este orden de ideas podemos concluir que cuatro estudiantes (A6, C6, D6 e I6) se encuentran en el nivel 1 de visualización o reconocimiento y tres estudiantes (E6, F6 y H6) en el nivel 2 de análisis sobre cuadriláteros cóncavos.

Tarea Reto 4: Se les pedía a los estudiantes que escribieran los números de las figuras que consideraron como cuadriláteros convexos (CX) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar de manera escrita porqué su elección.

Las respuestas de los estudiantes B6, I6 y A6 se refieren a los lados. El estudiante A6 escribe “lados” mientras que los estudiantes B6 e I6 se refieren a la cantidad de lados, afirmando respectivamente: “porque tienen cuatro lados” y “es una figura de cuatro lados”.

Las respuestas de los estudiantes F6 y E6 se refieren a las medidas de los ángulos interiores, escriben respectivamente: “un convexo no tiene ángulos interiores que midan más de 180°” y “porque no tienen ángulos interiores que midan más de 180°”.

Las respuestas de los estudiantes C6 y D6 se refieren a la parte exterior de la figura, escriben respectivamente: “una parte de la figura afuera” y “tienen sus puntas hacia afuera”.

Por último, el estudiante H6 justificó su respuesta diciendo “porque son puntos que se unen” y el estudiante G6 no escribió justificación alguna porque solo escribió “figura 5”.

De acuerdo con las respuestas presentadas, podemos decir que cinco estudiantes (A6, B6, E6, F6 e I6) usan un lenguaje apropiado para referirse a algunas partes de las figuras como “lados” y “ángulos”, a su vez los estudiantes E6 y F6 describen algunas propiedades de las figuras como “ángulos internos” y “medidas de ángulos”. Los estudiantes C6, D6 y H6 describen las figuras de manera global haciendo uso de un lenguaje natural, las afirmaciones son “parte de la figura afuera”, “puntas hacia afuera” y “puntos que se unen”. El estudiante G6 en su respuesta no brinda información suficiente para evidenciar los descriptores del Modelo de Van Hiele. En este orden de ideas, podemos concluir que seis estudiantes (A6, B6, C6, D6, H6 e I6) se encuentran en el nivel 1 de visualización o reconocimiento y dos estudiantes (E6 y F6) en el nivel 2 de análisis sobre cuadriláteros convexos.

Tarea Reto 5: Se les pedía a los estudiantes que escribieran los números de las figuras que consideraron como cuadriláteros regulares (R) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar de manera escrita por qué su elección.

En esta tarea reto para elegir las figuras que corresponden a cuadriláteros regulares los estudiantes C6, D6, E6, F6, G6 y H6 se fijaron en la congruencia de los lados. Los estudiantes C6, E6 y F6 respondieron “porque todos sus lados son iguales”, D6 respondió “por que tienen 4 lados pero no son iguales”, G6 “todos los lados miden lo mismo” y H6 “porque sus lados tienen la misma medida”.

Los estudiantes A6 e I6 para escribir la letra R en los cuadriláteros regulares tienen en cuenta los lados de las figuras sin referirse a algún atributo particular de estos, sus respuestas son respectivamente: "los lados", y "son figuras con cuatro lados".

El estudiante B6 afirma que asignó la letra R a las figuras "por que son cuadriláteros".

Los nueve estudiantes utilizan un vocabulario básico para reconocer y describir algunas partes que componen a las figuras, tales como los "lados". Además, los estudiantes C6, D6, E6, F6, G6 y H6 identifican algunas propiedades que son: la congruencia entre lados y la igualdad de medidas de lados. En cuanto al vocabulario básico podemos encontrar respuestas como: "lados iguales" y "figuras con cuatro lados". En este orden de ideas, podemos concluir que tres estudiantes (A6, B6 e I6) se encuentran en el nivel 1 de visualización o reconocimiento sobre cuadriláteros regulares, ya que reconocen y distinguen figuras teniendo en cuenta semejanzas o diferencias entre ellas. A su vez, seis estudiantes (C6, D6, E6, F6, G6 y H6) se encuentran en el nivel 2 de análisis al reconocer algunas propiedades y elementos que integran una figura.

Tarea Reto 6: Se les pedía a los estudiantes que escribieran los números de las figuras que consideraron como cuadriláteros irregulares (I) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar de manera escrita por qué su elección.

Dentro de las respuestas encontramos las siguientes situaciones:

En primer lugar, los estudiantes E6, G6 y H6 escriben que las figuras que consideran como cuadriláteros irregulares cumplen con: "no tienen sus lados iguales", "sus lados no tienen la misma medida" y "las medidas de sus lados no son iguales", respectivamente.

En segundo lugar, los estudiantes A6 y B6 escribieron las siguientes respuestas, respectivamente, "los lados" y "por que son irregulares". Por otro lado, el estudiante I6 menciona que "son figuras irregulares de cuatro lados".

En tercer lugar, el estudiante D6 en su respuesta tiene en cuenta la cantidad de lados de las figuras al determinar si corresponden a cuadriláteros irregulares, escribiendo que: "por que no tiene 4 lados" y "son figuras irregulares de cuatro lados".

Por último, se presenta la respuesta del estudiante F6 que escribió lo siguiente: "porque dos lados los son iguales pero uno por el otro no son, o sea son dos de cada uno".

De acuerdo con las respuestas encontradas, se puede afirmar que siete estudiantes (A6, D6, E6, F6, G6, H6 e I6) reconocen los "lados" como partes que componen las figuras, asimismo, los estudiantes C6, D6, E6, F6, G6, H6 e I6 reconocen y describen las siguientes propiedades de las figuras: cantidad de lados, al responder "no tiene 4 lados" y "son figuras irregulares de cuatro lados"; la medida de los lados, al responder "no tienen sus lados iguales", "sus lados no tienen la misma medida", "las medidas de sus lados no son iguales" y "porque dos lados los son iguales pero uno por el otro no son, o sea son dos de cada uno". Es de resaltar que ocho estudiantes hacen uso de un lenguaje básico al presentar sus respuestas. Por último, el estudiante B6 en su respuesta no brinda información suficiente para evidenciar los descriptores del Modelo de Van Hiele, ya que responde que para asignar la letra I tuvo en cuenta que "son irregulares". En este sentido, concluimos que el estudiante A6 se encuentra en el nivel 1 de visualización o reconocimiento sobre cuadriláteros, ya que reconoce los lados de las figuras. A su vez, siete estudiantes (C6, D6, E6, F6, G6, H6 e I6) se encuentran en el nivel 2 de análisis al reconocer algunas propiedades y elementos que integran a una figura.

Tarea Reto 7: Se les pedía a los estudiantes que escribieran el número de las figuras a las cuales no les asignaron las letras CV, CX, I ni R en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar de manera escrita porqué su elección.

Los estudiantes E6, F6, G6 e I6 dieron respuesta a este pedido en la tarea reto 2, dejando figuras sin la asignación de letras. Esto, dado que no cumplían con las propiedades enunciadas que son ser cuadrilátero cóncavo, convexo, regular o irregular. Los estudiantes F6 y G6 afirmaron, respectivamente, que no escribieron ninguna letra sobre las figuras porque: "estas figuras no tienen cuatro lados" y "no eran cuadriláteros". Los otros dos estudiantes no escribieron el por qué no asignaron ninguna letra a algunas figuras.

Por otro lado, los estudiantes A6 y H6 no asignaron letras a la figura 7 justificando que "no es cuadrilátero". A6 además no asignó letras en las figuras 10 y 11.

A su vez, el estudiante C6 no asignó ninguna de las letras a las figuras 10 y 7, ya que estas figuras "ni tienen los 4 lados y porque no se ven que fueran cv o cx". Por último, las respuestas de los estudiantes B6 y D6 corresponden respectivamente a "en todas puse letras" y "por que si".

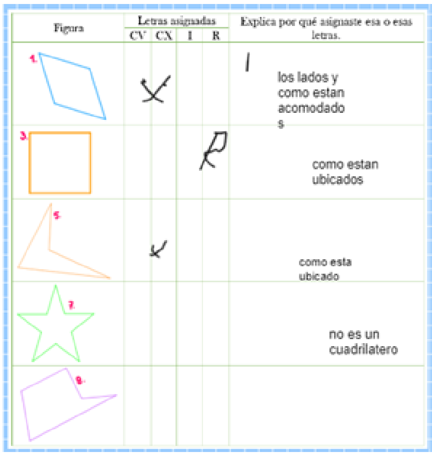
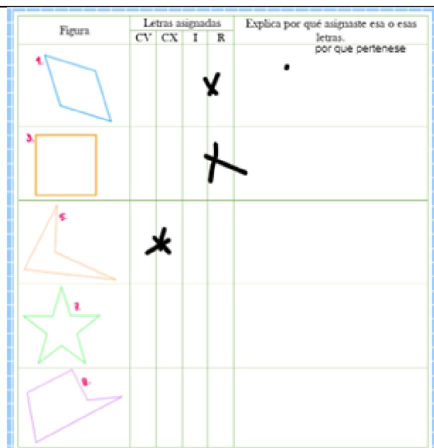
En este orden de ideas, podemos afirmar que los estudiantes A6, C6, F6, G6 y H6 hacen uso de un lenguaje geométrico para argumentar sus respuestas reconociendo y describiendo elementos y propiedades de las figuras. Por otro lado, los estudiantes B6, D6, E6 e I6 con sus respuestas no brindan información suficiente para evidenciar los descriptores del Modelo de Van Hiele ya que las respuestas que presentaron no reflejan características propias de algún nivel, escribieron lo siguiente, respectivamente: "en todas puse letras", "porque si", "11, 8, 9, 7, 10" y "5". Consideramos que los estudiantes A6, C6, F6, G6 y H6 se encuentran en el nivel 2 de análisis del Modelo de Van Hiele.

Tarea Reto 8: Se les pedía a los estudiantes que, para cada una de las figuras puestas en la tabla, anexo 2, marcaran con una X qué letra o letras escribieron dentro de ella. Además, debían explicar el por qué de su elección de manera escrita.

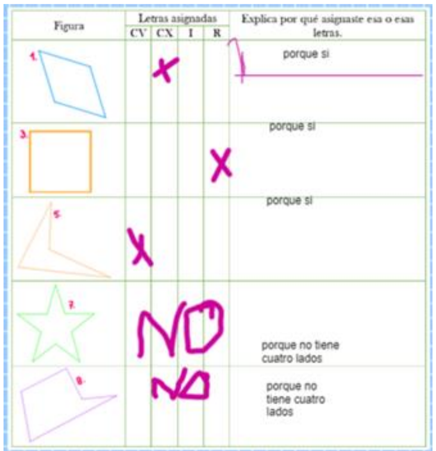
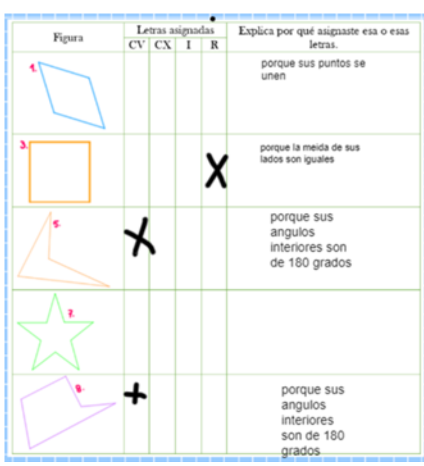
Las respuestas presentadas por los nueve estudiantes en la tarea reto 8 se organizan en la Tabla 4, compuesta por tres columnas en las cuales, la primera corresponde al código de los estudiantes, la segunda muestra una captura de pantalla de las respuestas y en la tercera la descripción de dicha imagen.

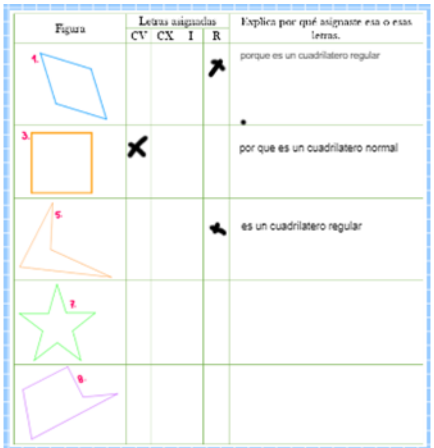
Tabla 4

Respuestas de los estudiantes de grado sexto a la tarea reto 8

Código	Respuestas tarea reto 8	Descripción de las respuestas
A6		En las figuras 1, 3 y 5 asignó respectivamente las letras CX, R y CX. Además, justificó estas asignaciones escribiendo: “los lados y como están acomodados” y “como están ubicados”. Por otro lado, en la figura 7 no eligió ninguna letra justificando que “no es un cuadrilátero”. En la figura 8 no presentó respuesta a la instrucción dada.
B6		Asignó respectivamente las letras R, R y CX en las figuras 1, 3 y 5 sin escribir los aspectos que tuvo en cuenta para estas elecciones. En las figuras 7 y 8 no presentó respuesta a la instrucción dada.
C6		Asignó la letra R en las figuras 1 y 3 justificando que “sus lados tienen la misma medida” y “son iguales todos sus lados”. De otro modo, en la figuras 5, 7 y 8 no asignó X en las letras pero sí escribió los aspectos que tuvo en cuenta para dichas

Código	Respuestas tarea reto 8	Descripción de las respuestas
		elecciones: “porque una parte de la figura está adentro de ella” y “no se”.
D6		Este estudiante no asignó X en ninguna de las figuras presentadas. Sin embargo, al comparar esta respuesta con las respuestas de la tarea reto 2 se evidencia que allí sí asignó letras, aunque es acá donde presenta las justificaciones escritas de sus elecciones. Enunció que: “la medida de todos sus lados son iguales”, “sus lados son iguales”, “una de sus puntas está adentro” y “no es cuadrilátero”.
E6		En las figuras 1, 3 y 5 asignó respectivamente las letras: CX, R y CV escribiendo para cada una de estas asignaciones “No Sé”. En las figuras 7 y 8 no asignó letras pero escribió en estos espacios “NO” justificando que: “NO TIENEN 4 LADOSSS”.

Código	Respuestas tarea reto 8	Descripción de las respuestas
F6		En las figuras 1, 3 y 5 asignó respectivamente las letras: CX, R y CV escribiendo para cada una de estas asignaciones “porque si”. Ahora bien, en las figuras 7 y 8 no asignó letras pero escribió en estos espacios “NO” justificando que: “porque no tiene cuatro lados”.
G6		En las figuras 1, 3 y 5 asignó respectivamente las letras R, R y CX. Es de resaltar que no escribió los aspectos que tuvo en cuenta para estas elecciones. Por otro lado, en las figuras 7 y 8 no asignó ninguna letra y a su vez no escribió el porqué de su decisión.
H6		En las figuras 3, 5 y 8 asignó respectivamente X en las letras R, CV y CV; presentando por escrito las siguientes justificaciones: “porque la medida de sus lados son iguales” y “porque sus angulos interiores son de 180 grados”. En cuanto a las figuras 1 y 7 no presentó respuesta a la instrucción dada.

Código	Respuestas tarea reto 8	Descripción de las respuestas
I6		En las figuras 1, 3 y 5 asignó respectivamente X en las letras R, CV y R. Además, escribió como justificación: “porque es un cuadrilatero regular”, “por que es un cuadrilatero normal” y “es un cuadrilátero regular”. En las figuras 7 y 8 no presentó respuesta a la instrucción dada.

En relación con lo anterior, se puede afirmar que en las respuestas de los estudiantes B6 y G6 no se evidencian características propias de algún nivel del Modelo de Van Hiele ya que no escribieron los aspectos que tuvieron en cuenta para asignar las X en las letras CV, CX, R e I.

El estudiante A6 reconoce y describe las figuras de manera global, enunciando atributos irrelevantes como la ubicación, puesto que en sus justificaciones escribió que “sus lados y como están acomodados” y “como esta ubicado”. Por otro lado, los estudiantes A6, E6, F6 e I6 usan un vocabulario básico para reconocer los lados como partes que componen las figuras, esto evidenciado en: “los lados y como estan acomodados”, “PORQUE NO TIENEN 4 LADOSSS” y “porque no tiene cuatro lados”. Es de resaltar que con las anteriores respuestas mencionadas podemos identificar que estos estudiantes reconocen la cantidad de lados como una propiedad que caracteriza a los cuadriláteros.

Los estudiantes C6, D6 y H6 reconocen y describen de manera informal las propiedades y elementos que integran una figura, haciendo uso de un lenguaje apropiado ya que escriben propiedades teniendo en cuenta la igualdad de medidas entres los lados, la ubicación de los vértices según el interior y exterior de una figura y la medida de los ángulos, esto evidenciado en las siguientes justificaciones: “sus lados tienen la misma medida”, “porque una parte de la figura esta adentro de ella”, “la medida de todos sus lados son iguales”, “una de sus puntas esta adentro” y “porque sus angulos interiores son de 180 grados”. De lo anterior se resaltan los elementos de las figuras que reconocen los estudiantes, los lados, los vértices y el interior de una figura.

En este orden de ideas y considerando la propiedad de continuidad del Modelo de Van Hiele, se puede concluir que los estudiantes A6, E6, F6 e I6 se encuentran en una transición del nivel 1 al nivel 2, ya que, las respuestas de los estudiantes reflejan características propias de ambos niveles. En el nivel 2, análisis, se encuentran los estudiantes C6, D6 y H6.

No se puede afirmar en qué nivel del Modelo de Van Hiele se encuentran los estudiantes B6 y G6 dado que sus respuestas no generan información que reflejen características propias de un nivel.

Grado 11°

Para el año 2021 el Colegio San Francisco de Asís contaba únicamente con un curso de grado once, el cual estaba conformado por cinco estudiantes. Para el análisis, ellos fueron codificados de la siguiente manera: A11, B11, C11, D11 y E11.

ETAPA I

Tarea Reto 1: Consistía en observar las once figuras que se encuentran en el anexo 2 y escribir el número de aquellas que consideran como cuadriláteros.

Dentro de las respuestas presentadas se encuentra que los cinco estudiantes escribieron los números del 1 al 6 y en distinto orden.

La información que generan estas respuestas no permite evidenciar los descriptores del Modelo de Van hiele ya que se desconocen los motivos de haberlas escrito, sólo se evidencia un listado numérico.

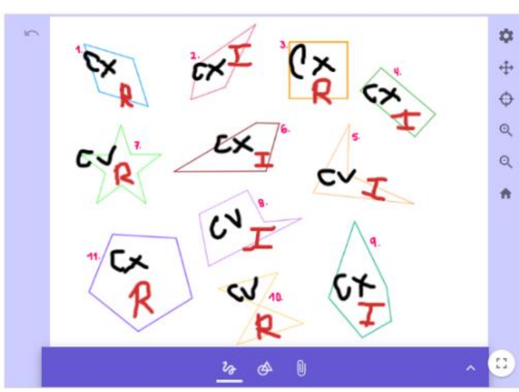
Tarea Reto 2: Se muestran las figuras del anexo 2 y se pide a los estudiantes que indiquen qué figuras consideran como cuadriláteros convexos, cuadriláteros cóncavos, cuadriláteros regulares y cuadriláteros irregulares a través de escribir dentro de ellas las letras CX, CV, R e I, respectivamente, según corresponda. En las tareas reto 3, 4, 5, 6 y 7 se preguntó a los estudiantes qué tuvieron en cuenta para escribir las letras dentro de las figuras de esta tarea reto 2.

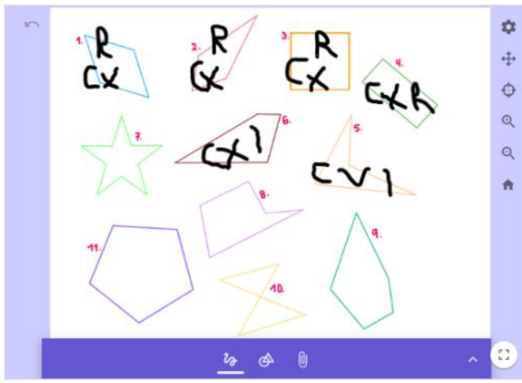
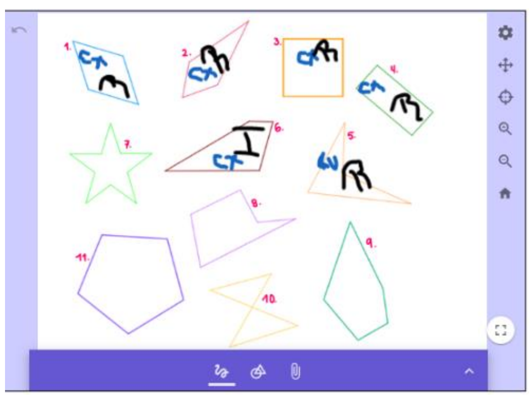
Las respuestas presentadas por los cinco estudiantes en la tarea reto 2 se muestran y organizan en la tabla 5, compuesta por tres columnas en las cuales la primera corresponde al código de los estudiantes, la segunda muestra sus respuestas y en la tercera la descripción de estas.

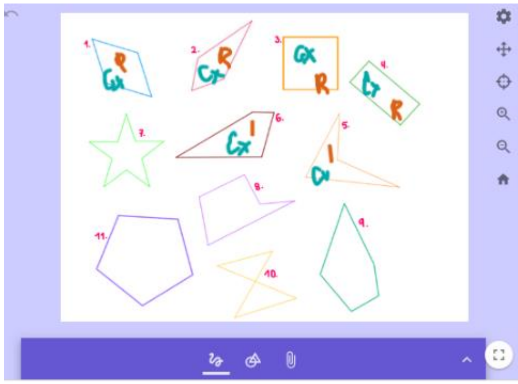
La información que generan las respuestas de la tarea reto 2, letras escritas dentro de las figuras, no permite evidenciar los descriptores del Modelo de Van hiele ya que los motivos de haber elegido estas aparecen en las respuestas de las tareas reto 3, 4, 5, 6 y 7.

Tabla 5

Respuestas de los estudiantes de grado once a la tarea reto 2

Código	Respuesta tarea reto 2	Descripción de respuestas	
		Letras	Figuras
A11		CV	5, 7, 8 y 10
		CX	1, 2, 3, 4, 6, 9 y 11
		R	1, 3, 7, 10 y 11
		I	2, 4, 5, 6, 8 y 9

		NINGUNA	-
B11		CV	5
		CX	1, 2, 3, 4 y 6
		R	1, 2, 3 y 4
		I	5 y 6
		NINGUNA	7, 8, 9, 10 y 11
C11		CV	5
		CX	1, 2, 3, 4 y 6
		R	1, 2, 3, 4 y 5
		I	6
		NINGUNA	7, 8, 9, 10 y 11
D11		CV	5 y 7
		CX	1, 2, 3, 4 y 6
		R	11
		I	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9

		NINGUNA	10
E11		CV	5
		CX	1, 2, 3, 4 y 6
		R	1, 2, 3 y 4
		I	5 y 6
		NINGUNA	7, 8, 9, 10 y 11

Tarea Reto 3: Se pedía a los estudiantes escribir el número de las figuras que ellos consideraron como cuadriláteros cóncavos (CV) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar el porqué de su elección.

En la respuesta los estudiantes A11, B11 y E11 aluden a los vértices de las figuras, ellos afirman lo siguiente, respectivamente: “Se tuvo en cuenta que al menos uno de sus vértices fuera interno”, “que dos de sus vertices están por fuera de la construcción” y “se cumple que al indicar dos puntos de la figura geométrica alguno de estos pueda estar fuera de la misma”.

El estudiante D11 hace referencia a los ángulos interiores de las figuras, escribiendo: “alguno de sus angulos mide mas de 180°”. Por otro lado, el estudiante C11 escribió “Tuve en cuenta el numero de lados y las lineas que se forman con la unión de los vértices de las figuras, y si alguna linea se encuentra por fuera de la figura, se consideran cuadriláteros cóncavos”.

De acuerdo con las respuestas presentadas, podemos decir que los cinco estudiantes reconocen y describen de manera informal algunas propiedades y elementos que integran una figura, haciendo uso de un lenguaje apropiado, ya que en sus respuestas se pueden evidenciar los siguientes elementos: “vértices”, “lados”, “ángulos”, “puntos” y “líneas”. También, se evidencian las siguientes propiedades: “vértices por fuera de la construcción”, “cantidad de lados” y “ángulos miden más de 180°”. Por otro lado, los estudiantes describen de manera informal la diagonal y los vértices de un cuadrilátero, esto se evidencia en las siguientes afirmaciones: “las lineas que se forman con la unión de los vértices de las figuras, y si alguna linea se encuentra por fuera de la figura, se consideran cuadriláteros cóncavos” y “se cumple que al indicar dos puntos de la figura geométrica alguno de estos pueda estar fuera de la misma”.

Adicionalmente, el estudiante C11 reconoce y describe las propiedades necesarias de las figuras para determinar cuándo se trata de un cuadrilátero cóncavo, dado que el estudiante afirma que primero tuvo en cuenta el número de los lados, luego, las líneas (diagonales) que se forman con la unión de los vértices de las figuras y si alguna de estas se encuentra en el exterior de la figura es cuadrilátero cóncavo. La afirmación del estudiante es “Tuve en cuenta el numero de lados y las lineas que se forman con la unión de los vértices de las figuras, y si alguna linea se encuentra por fuera de la figura, se consideran cuadriláteros cóncavos”.

En este orden de ideas, en relación con el nivel del Modelo de Van Hiele en el que se encuentran los estudiantes podemos concluir que los cinco estudiantes (A11, B11, C11, D11 y E11) se encuentran en el nivel 2 de análisis, abordando los cuadriláteros cóncavos.

Tarea Reto 4: Se les pedía a los estudiantes que escribieran los números de las figuras que consideraron como cuadriláteros convexos (CX) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar de manera escrita porqué su elección.

Las respuestas de los estudiantes A11 y B11 se refieren a los vértices de las figuras. Ellos escribieron “Se tuvo en cuenta que todos sus vértices fueran externos” y “que todo vértice esta dentro dela figura”, respectivamente.

Las respuestas de los estudiantes C11 y E11 aluden a la ubicación de segmentos, escriben respectivamente: “Tuve en cuenta el numero de lados y las lineas que se forman con la unión de los vértices de las figuras, y si todas las lineas se encuentra por dentro de la figura, se consideran cuadriláteros convexos" y "ya que si se traza un segmento dentro de una de esta figura, no habrán puntos que se encuentren fuera de la misma."

Por último, el estudiante D11 se refiere a la cantidad de lados y a la medida de los ángulos de las figuras, escribe "tienen 4 lados y angulos de 90°".

En relación con las respuestas presentadas en esta tarea reto, podemos decir que los cinco estudiantes reconocen y describen algunas propiedades y elementos que integran una figura haciendo uso de un lenguaje apropiado, ya que en las respuestas se evidencian los siguientes elementos: "vértices", "lados", "ángulos", "puntos", "segmento", "líneas" y "líneas que se forman con la unión de los vértices". También, mencionan las propiedades "cantidad de lados", "medida de los ángulos", "vértices externos", "vértice está dentro de la figura" y "ángulos de 90°".

El estudiante C11 reconoce y describe las propiedades necesarias de las figuras para determinar cuándo se trata de un cuadrilátero convexo, escribiendo: "Tuve en cuenta el numero de lados y las lineas que se forman con la unión de los vértices de las figuras, y si todas las lineas se encuentra por dentro de la figura, se consideran cuadriláteros convexos". El estudiante inicialmente tiene en cuenta la cantidad de los lados de cada una de las figuras, esta acción es necesaria ya que los cuadriláteros se distinguen de las otras figuras presentadas por la cantidad de lados, luego reconoce que es necesario considerar las diagonales de los cuadriláteros y menciona la condición necesaria para que los cuadriláteros sean convexos según sus diagonales, escribe "si todas las lineas se encuentra por dentro de la figura, se consideran cuadriláteros convexos".

En ese sentido podemos concluir que los cinco estudiantes (A11, B11, C11, D11 y E11) se encuentran en el nivel 2 correspondiente a análisis sobre cuadriláteros convexos.

Tarea Reto 5: Se les pedía a los estudiantes que escribieran los números de las figuras que consideraron como cuadriláteros regulares (R) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar de manera escrita porqué su elección.

Los estudiantes A11 y D11 aluden a los lados y ángulos de las figuras, las respuestas que ellos escribieron corresponden respectivamente a: "Se tuvo en cuenta que todos sus lados y ángulos tengan la misma medida" y "sus 4 lados son iguales y sus 4 angulos son iguales". El estudiante E11 como respuesta escribió "cuentan con lados congruentes".

Los estudiantes B11 y C11 en sus respuestas se refieren a la correspondencia de los lados, mencionando respectivamente lo siguiente: "cuando sus lados son 2 para 2" y "Tuve en cuenta el numero de lados, con su medida, y sí 2 pares de lados son iguales o los 4 lados de dicha figura son iguales, se considera un cuadrilátero regular".

Los cinco estudiantes utilizan un lenguaje apropiado para reconocer y describir los elementos que integran una figura. Enuncian los elementos "lados" y "ángulos". En referencia a las propiedades, los estudiantes presentaron: igualdad de medidas de lados, cantidad de lados e igualdad de medidas de ángulos. Es de mencionar que los estudiantes B11, C11 y D11 describen de manera informal algunas propiedades debido a que hacen referencia a la congruencia entre pares de lados escribiendo "cuando sus lados son 2 para 2, como un cuadrado", "si 2 pares de lados son iguales" y la congruencia entre lados y entre ángulos como "los 4 lados de dicha figura son iguales", "sus 4 lados son iguales y sus 4 ángulos son iguales".

De acuerdo con este análisis, concluimos que los cinco estudiantes (A11, B11, C11, D11 y E11) se encuentran en el nivel 2 del Modelo de Van Hiele sobre cuadriláteros regulares.

Tarea Reto 6: Se les pedía a los estudiantes que escribieran los números de las figuras que consideraron como cuadriláteros irregulares (I) en la respuesta a la tarea reto 2, y justificar de manera escrita porqué su elección.

Dentro de las respuestas encontramos las siguientes situaciones:

En primer lugar, los estudiantes A11 y B11 hacen referencia a los lados de las figuras escribiendo: "Se tuvo en cuenta que sus lados no tengan la misma medida o no sean congruentes" y "cuando sus lados no son iguales".

En segundo lugar, el estudiante C11 considera la igualdad de medidas entre pares de lados, escribió "Tuve en cuenta el numero de lados, con sus medidas, y sí no se forma ningún par de lados iguales o directamente ninguno de los lados son iguales, se considera un cuadrilátero irregular".

En tercer lugar, el estudiante D11 brinda como respuesta "todos sus lados y angulos no tiene similitud"; y el estudiante E11 alude a la congruencia de ángulos, al responder "no cuentan con ángulos congruentes".

En relación con las respuestas, se afirma que los cinco estudiantes (A11, B11, C11, D11 y E11) reconocen y describen de manera informal las propiedades ("lados no tengan la misma medida o no sean congruentes", "cuando sus lados no son iguales", "todos sus lados y angulos no tiene similitud" y "ángulos congruentes") y elementos (lados y ángulos) que integran una figura, haciendo uso de un lenguaje apropiado. Además, el estudiante A11 argumenta su respuesta conociendo y reconociendo propiedades de las figuras de manera independiente, ya que presenta como propiedades disyuntas las siguientes: "sus lados no tienen la misma medida" o "lados no congruentes".

En este sentido, concluimos que los cinco estudiantes se encuentran en el nivel 2 de análisis sobre cuadriláteros irregulares.

Tarea Reto 7: Se les pedía a los estudiantes que escribieran el número de las figuras a las cuales no les asignaron las letras CV, CX, I ni R en la respuesta a la tarea reto 2 y explicar de manera escrita el porqué.

Los estudiantes B11, C11 y E11 coincidieron en responder que no les asignaron letras a las figuras 7, 8, 9, 10 y 11, explicando respectivamente que: "NO SON CUADRILATEROS", “Ninguna de estas figuras cumple con la definición de cuadrilátero” y “no son cuadriláteros y por lo tanto no deben clasificarse”.

El estudiante D11 no le asigna ninguna de las letras a la figura 10 y como respuesta escribe “no cumplen ninguna de las caracteristicas pedidas por los 4 terminos o estan agrupados en otros grupos que no son los cuadriláteros”.

Por otro lado, el estudiante A11 escribió sobre todas las figuras, y su respuesta es “0”.

En relación con las respuestas, se afirma que los estudiantes B11, C11 y E11 reconocen y describen las propiedades necesarias y suficientes de las figuras, ya que por medio de sus respuestas se evidencia que para ellos es necesario, en primer lugar, que las figuras sean cuadriláteros, antes que ser cóncavas, convexas, regulares o irregulares.

El estudiante D11 argumenta su respuesta reconociendo propiedades de figuras de manera independiente, ya que por medio de su repuesta se evidencia que la figura 10 para él no cumple con los “términos” ser cóncavo, convexo, regular o irregular, o está en el grupo de las figuras que no son cuadriláteros. Este estudiante toma de forma independiente el ser cuadrilátero y cóncavo, cuadrilátero y regular, y cuadrilátero e irregular.

El estudiante A11 como respuesta brinda “0”, es decir, escribió letras en todas las figuras.

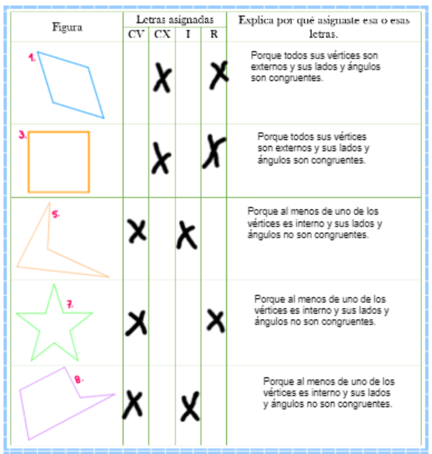
En este orden de ideas, podemos concluir que tres estudiantes (B11, C11 y E11) se encuentran en el nivel 3 de ordenación o clasificación y dos estudiantes (D11 y A11) se encuentran en el nivel 2 de análisis sobre cuadriláteros convexos, cóncavos, regulares e irregulares.

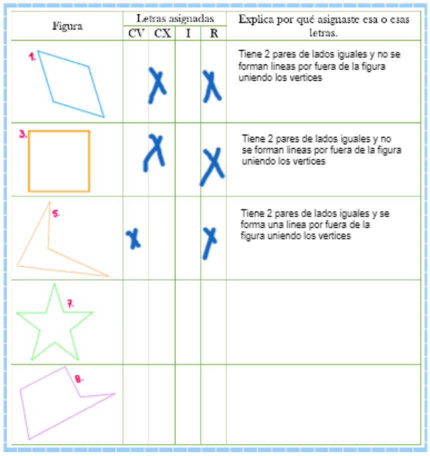
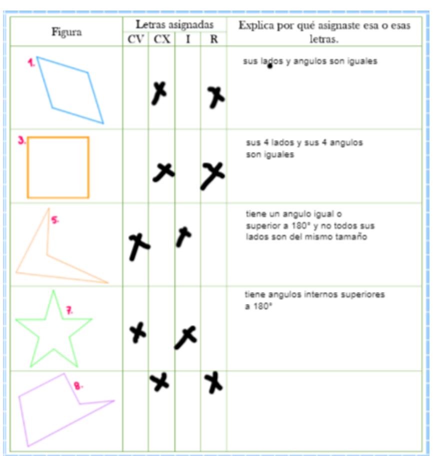
Tarea Reto 8: Se les pedía a los estudiantes que, para cada una de las figuras puestas en la tabla, anexo 2, marcaran con una X qué letra o letras escribieron dentro de ella. Además, debían explicar el porqué de su elección de manera escrita.

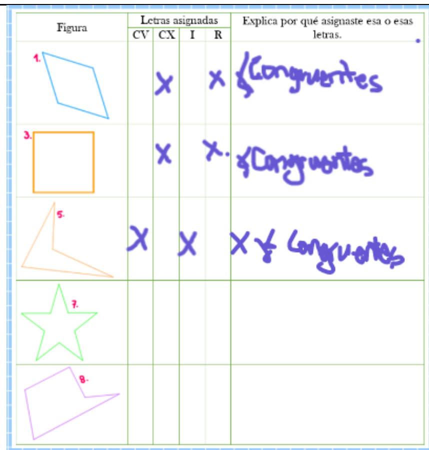
Las respuestas presentadas por los cinco estudiantes se organizan en la tabla 6, compuesta por tres columnas en las cuales, la primera corresponde al código de los estudiantes, la segunda muestra una captura de pantalla de sus respuestas y en la tercera la descripción de dicha imagen.

Tabla 6

Respuestas de los estudiantes de grado once a la tarea reto 8

Código	Respuestas tarea reto 8	Descripción de las respuestas
A11		A las figuras 1 y 3 les asignó las letras CX y R, y explicó que “todos sus vértices son externos y sus lados y ángulos son congruentes”. A las figuras 5 y 8 les asignó las letras CV e I, porque: “al menos de uno de los vértices es interno y sus lados y ángulos no son congruentes”. En cuanto a la figura 7 le asignó las letras CV y R, y escribió que “al menos de uno de los vértices es interno y sus lados y ángulos no son congruentes”.
B11		A las figuras 1 y 3 les asignó las letras CX y R, a la figura 5 las letras CV e I, sin embargo, no explicó el porqué les asignó esas letras a las figuras. Con relación a las figuras 7 y 8, no les asignó ninguna de las letras y escribió “NO C.” como explicación.

Código	Respuestas tarea reto 8	Descripción de las respuestas
C11		Asignó las letras CX y R a las figuras 1 y 3, explicando que “Tiene 2 pares de lados iguales y no se forman lineas por fuera de la figura uniendo los vertices”. A la figura 5 le asignó las letras CV y R, como respuesta mencionó: “Tiene 2 pares de lados iguales y se forma una linea por fuera de la figura uniendo los vértices”. Por otro lado, a las figuras 7 y 8 no les asignó ninguna letra.
D11		Asignó las letras CX y R a las figuras 1, 3 y 8, sin embargo, explicó únicamente el porqué de su elección para las figuras 1 y 3, escribió “sus lados y angulos son iguales” y “sus 4 lados y sus 4 angulos son iguales”, respectivamente. A las figuras 5 y 7 les asignó las letras CV e I, escribiendo como respuestas “tiene un angulo igual o superior a 180° y no todos sus lados son del mismo tamaño” y “tiene angulos interiores superiores a 180°”.

Código	Respuestas tarea reto 8	Descripción de las respuestas
E11		Le asignó las letras CX y R a las figuras 1 y 3, escribiendo como respuesta para ambas figuras “∡ congruentes”. A la figura 5 le asigna las letras CV e I, y escribió “x ∡ congruentes”. A las figuras 7 y 8 el estudiante E11 no le asignó ninguna de las letras.

Según las respuestas de los estudiantes A11, D11 y E11 se puede afirmar que hacen uso de lenguaje geométrico para describir de manera informal los elementos y las propiedades que integran una figura, ya que, en primer lugar, reconocieron y describieron con lenguaje geométrico los siguientes elementos de las figuras presentadas: “vértices”, “lados” y “ángulos”. De igual manera A11 hizo referencia al exterior e interior de la figura geométrica con las afirmaciones “todos sus vértices son externos” y “al menos de uno de los vértices es interno”. En segundo lugar, los tres estudiantes escribieron propiedades con relación a la cantidad de los lados, medida de los ángulos, congruencia o igualdad de medidas entre los lados y entre los ángulos de las figuras, escribiendo “sus 4 lados y sus 4 angulos son iguales”, “sus lados y ángulos son congruentes”, “sus lados y ángulos no son congruentes”, “tiene un angulo igual o superior a 180°”, “tiene angulos interiores superiores a 180°”, “∡ congruentes”, sin embargo, describen de manera informal la igualdad entre las medidas de los lados y de los ángulos, afirmando “sus lados y angulos son iguales”.

En relación con las respuestas que presenta el estudiante B11, estas no cuentan con información suficiente para evidenciar los descriptores del Modelo de Van Hiele, ya que no explica el por qué asignó las letras CV, CX, I o R a las figuras 1, 3 y 5. Asimismo en las respuestas que brindó para las figuras 7 y 8 al parecer afirma no saber.

El estudiante C11 en sus respuestas hace uso de lenguaje geométrico para describir las propiedades y elementos que integran una figura, ya que reconoce y describe los elementos “lados”, “vértices” y “lineas”. Es de resaltar que el estudiante describe de manera informal la diagonal de un cuadrilátero, puesto que se refiere a esta como línea. Por medio de la descripción que el estudiante hace “unir dos vértices” se reconoce que habla de la diagonal. Además, se basa en la ubicación de las diagonales y la igualdad de medidas entre pares de lados para describir las propiedades que tuvo en cuenta al asignar las letras CV, CX, R o I a las figuras presentadas.

Los estudiantes A11, C11 y D11 realizan clasificaciones inclusivas al reconocer que una figura geométrica puede ser cóncava y a la vez irregular, mencionando “al menos de uno de los vértices es interno y sus lados y ángulos no son congruentes”, “Tiene 2 pares de lados iguales y se forma una linea por fuera de la figura uniendo los vértices” y “tiene un angulo igual o superior a 180° y no todos sus lados son del mismo tamaño”. Como se muestra, los estudiantes mencionan las propiedades necesarias que caracterizan a las figuras cóncavas y luego las propiedades necesarias que caracterizan a las figuras irregulares.

En este orden de ideas, podemos concluir que un estudiante (E11) se encuentran en el nivel 2 de análisis y tres estudiantes (A11, C11 y D11) en el nivel 3 de ordenación o clasificación sobre cuadriláteros convexos, cóncavos, regulares e irregulares.

No se puede afirmar en qué nivel del Modelo de Van Hiele se encuentra el estudiante B11, dado que las respuestas no cuentan con información suficiente para evidenciar los descriptores del Modelo de Van Hiele.

Capítulo 5. Conclusiones

Este trabajo de grado partió de la intención de diseñar una secuencia de tareas a implementar en entornos de educación en línea, que permitiera caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de estudiantes de grado sexto y once sobre la clasificación de cuadriláteros según el Modelo de Van Hiele. En virtud de esto, se hizo una indagación bibliográfica acerca de aspectos relevantes del Modelo de Van Hiele como su origen, los niveles de razonamiento, sus propiedades y su evaluación. También se indagó sobre el objeto geométrico cuadriláteros, la educación en línea y la gamificación, con el fin de contar con insumos teóricos indispensables para el diseño de la secuencia de tareas.

Para el diseño de la secuencia de tareas se utilizaron los siguientes elementos de la teoría del análisis de instrucción: los tipos de tareas, los elementos de una tarea y la eficiencia y eficacia de los materiales y recursos. El diseño se realizó en la aplicación web *Classcraft* con la que se buscaba promover el interés de los estudiantes a través de un contexto de gamificación, también se usó la plataforma virtual GeoGebra *Classroom* que permitió la creación en tiempo real de una base de datos de las respuestas de los estudiantes al desarrollar las diferentes tareas de reto. Con estas plataformas se logró favorecer la implementación de la secuencia mediante entornos de educación en línea.

La secuencia de tareas estuvo organizada en cinco etapas, cada una abarca contenidos referentes a los cuadriláteros, así:

- Etapa I: Cuadriláteros cóncavos, convexos, regulares e irregulares. (anexo 2)
- Etapa II: Paralelogramos y trapecios. (anexo 3)
- Etapa III: Paralelogramos (cuadrado, rombo, romboide, rectángulo). (anexo 4)
- Etapa IV: Trapecios (Trapecio rectángulo, isósceles, escaleno). (anexo 5)
- Etapa Final: Paralelogramos (cuadrado, rombo, rectángulo). (anexo 6)

El análisis de las respuestas de los estudiantes de ambos grados para la determinación de la tendencia del nivel de razonamiento según el Modelo de Van Hiele, presentado en el capítulo anterior, se realizó para la etapa I de la secuencia.

Lo expuesto a lo largo de este documento nos permite arribar a las conclusiones que enseguida se exponen.

En relación con el primer objetivo específico planteado, hemos diseñado en *Classcraft* y GeoGebra *Classroom* una secuencia de tareas para la evaluación del Modelo de Van Hiele, que incluye algunos tipos de clasificación de cuadriláteros, como se evidencia en la lista de contenidos que abarca cada una de las etapas que conforman la secuencia. Esto es, tuvimos en cuenta que pueden ser paralelogramos, trapecios o trapezoides según la propiedad de paralelismo, convexos o cóncavos según sus diagonales y regulares o irregulares según la congruencia entre lados y entre ángulos. Así, la secuencia de tareas abarca de manera global la clasificación de cuadriláteros para grados sexto y once. El diseño de esta secuencia de tareas se basó en el aspecto descriptivo del Modelo de Van Hiele ya que no se genera una propuesta de enseñanza, sino que buscó caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes como sujetos de acción al desarrollar un test de respuesta libre.

En cuanto al segundo objetivo planteado, aplicamos la secuencia de tareas a finales del año 2021 con los estudiantes de los grados sexto y once del Colegio San Francisco de Asís, a través de tres encuentros sincrónicos en línea con cada grado mediados por la plataforma *Google Meet.* Estos encuentros sincrónicos se llevaron a cabo en horarios programados por los profesores del Colegio para la asignatura geometría. Es de resaltar que los estudiantes resolvieron completamente las cinco etapas de la secuencia de tareas mediante la plataforma *GeoGebra Classroom*, lo que permitió recolectar en tiempo real el total de las producciones de los estudiantes dado que esta plataforma guarda en la nube la información que se ingrese a las clases creadas desde la cuenta del usuario del profesor.

Vale la pena destacar que el uso de *Classcraft* generó que los estudiantes se divirtieran y aprendieran en un entorno atractivo de educación en línea con gamificación, combinando la motivación y la cognición. Evidencia de ello fueron las intervenciones de los estudiantes a través de *Google Meet*, en las cuales se notaron animados e interesados en la personalización de los avatares; la selección de poderes, insignias y fondos; y la narrativa de la secuencia de tareas presentada como AVENTURA GEOMÉTRICA que desarrolló los contenidos de clasificación de cuadriláteros.

Vale la pena resaltar dos de las ventajas de haber utilizado GeoGebra *Classroom*. Una fue ver en tiempo real el progreso de los estudiantes en la resolución de las tareas de la secuencia mientras lo hacían, porque permitió pensar el diseño de modo que el tránsito de los estudiantes por las etapas de la secuencia fuera regulado por el profesor a partir de activar la siguiente etapa en *Classcraft* cuando era necesario y sin demoras, y no automáticamente por la aplicación dado que se corre el riesgo que los estudiantes puedan pasar a una etapa siguiente sin haber respondido alguna de las preguntas de la etapa anterior. La otra ventaja fue que los estudiantes pudieron trabajar de forma libre porque contaban con una variedad de herramientas para dar solución a una misma tarea, tales como: dibujo a mano alzada con lápiz o resaltador, inserción de texto, diseño de tablas, transportador, regla, líneas, entre otros; también pudieron trabajar de forma amena porque desarrollaron las tareas a su propio ritmo y contaron con escenarios que permitían el ensayo y el error.

En cuanto al tiempo para llevar a cabo la aplicación de la secuencia de tareas, consideramos que las tres sesiones establecidas, cada una de cien minutos, fue suficiente para que los estudiantes desarrollaran la secuencia completamente. Incluso, al finalizar el segundo encuentro sincrónico, se presentaron casos de estudiantes que afirmaron haber completado la misión (secuencia de tareas) y otros en los que a la mitad del tercer encuentro la finalizaron. Ningún estudiante manifestó la necesidad de tiempo adicional para terminar la misión.

En relación con el tercer objetivo específico planteado, en el capítulo anterior presentamos el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes de los grados sexto y once a la etapa I de la secuencia de tareas, y la caracterización de su nivel de razonamiento geométrico según el Modelo de Van Hiele para la clasificación de cuadriláteros en cóncavos (CV), convexos (CX), regulares (R) e irregulares (I).

Concebimos adecuado haber diseñado la secuencia de tareas como un test de respuesta libre, dado que se brindaron espacios de respuesta abierta a una instrucción dada. Esto permitió variedad en las respuestas presentadas por los estudiantes en una misma tarea de reto, y a su vez generar más insumos para la determinación del nivel según el Modelo de Van Hiele. Ello permitió darnos cuenta que las instrucciones dadas en cada una de las tareas de reto de las cinco etapas fueron claras y brindaban suficiente información, ya que la mayoría de las respuestas generadas por los estudiantes respondían de manera adecuada a la instrucción dada.

El nivel de Van Hiele asignado a las respuestas presentadas por los estudiantes de los grados sexto y once a las tareas de reto en la etapa I se muestran y organizan en las Tablas 7 y 8, respectivamente. Estas tablas están compuestas por seis columnas en las cuales la primera corresponde al número de las tareas de reto de la etapa I, la segunda muestra el contenido geométrico abordado en cada una de ellas, la tercera muestra cuántos y cuáles estudiantes generaron respuestas que no reflejaron las características propias de algún nivel del Modelo de Van Hiele y en las siguientes tres columnas se muestra cuántos y cuáles estudiantes se encuentran en los tres primeros niveles del Modelo de Van Hiele.

Tabla 7

Resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes de grado sexto

Grado sexto									
Tareas de retos	Contenido	NIVELES DE VAN HIELE							
		Ninguno		1		2		3	
		Cuántos	Quiénes	Cuántos	Quiénes	Cuántos	Quiénes	Cuántos	Quiénes
3	CV	2	B6 y G6	4	A6, C6, D6 e I6	3	E6, F6 y H6	-	-
4	CX	1	G6	6	A6, B6, C6, D6, H6 e I6	2	E6 e F6	-	-
5	R	-	-	3	A6, B6 e I6	6	C6, D6, E6, F6, G6 y H6	-	-
6	I	1	B6	1	A6	7	C6, D6, E6, F6, G6, H6 e I6	-	-
7	CV, CX, R e I	4	B6, D6, E6 e I6	-	-	5	A6, C6, F6, G6 y H6	-	-
8		2	B6 y G6	4	A6, E6, F6 e I6	3	A6, E6, F6 e I6 C6, D6 y H6	-	-

Tabla 8

Resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes de grado once

Grado Once									
Tareas de retos	Contenido	NIVELES DE VAN HIELE							
		Ninguno		1		2		3	
		Cuántos	Quiénes	Cuántos	Quiénes	Cuántos	Quiénes	Cuántos	Quiénes
3	CV	-	-	-	-	5	A11, B11, C11, D11 y E11	-	-
4	CX	-	-	-	-	5	A11, B11, C11, D11 y E11	-	-
5	R	-	-	-	-	5	A11, B11, C11, D11 y E11	-	-
6	I	-	-	-	-	5	A11, B11, C11, D11 y E11	-	-
7	CV, CX, R e I	-	-	-	-	2	A11 y D11	3	B11, C11 y E11
8		1	B11	-	-	3	A11, D11 y E11	1	C11

Con base en la información presentada en las Tablas 7 y 8 podemos afirmar que el nivel 1 de visualización o reconocimiento predominó en las respuestas de los estudiantes de grado sexto. En efecto, en la mayoría de las respuestas se observa cómo los estudiantes se apoyan en la percepción global de las figuras para reconocerlas o describirlas. Asimismo, utilizan un lenguaje poco preciso empleando las siguientes afirmaciones: “porque tienen una parte de la figura adentro”, “por que tienen las puntas adentro”, “una parte de la figura afuera”, “tienen sus puntas hacia afuera” y “estrella porque no es un cuadrilátero”.

En cuanto al nivel 2, la mayoría de los estudiantes de grado sexto y once reconocen de manera informal las propiedades que integran una figura y las utilizan para definirla, usan un lenguaje apropiado para referirse a las partes y propiedades que caracterizan a una figura. Lo anterior se concluye después de encontrar las siguientes respuestas: “porque tiene el ángulo interior mayor de 180°”, “porque tienen cuatro lados”, “por que tienen 4 lados pero no son iguales”, “porque dos lados los son iguales pero uno por el otro no son, osea son dos de cada uno”, “porque ni tienen los 4 lados y porque no se ven que fueran cv o cx”, “Se tuvo en cuenta que al menos uno de sus vértices fuera interno”, “que dos de sus vertices están por fuera de la construcción” y “se tuvo en cuenta que sus lados no tengan la misma medida o no sean congruentes”.

En la tarea reto siete, tres estudiantes de grado once se encuentran en el nivel 3 de ordenación o clasificación, ya que reconocen y describen las propiedades necesarias y suficientes de las figuras para definirlas, esto se afirma teniendo en cuenta sus respuestas: “ya que NO SON CUADRILATEROS”, “Ninguna de estas figuras cumple con la definición de cuadrilátero” y “que no son cuadriláteros y por lo tanto no deben clasificarse”.

Con relación al objetivo general, logramos diseñar una secuencia de tareas que implementamos en un entorno de educación en línea que vincula la gamificación a través de *Classcraft*, que nos permitió caracterizar el nivel de razonamiento geométrico según el Modelo de Van Hiele de los estudiantes de grado sexto y once del Colegio San Francisco de Asís sobre la clasificación de cuadriláteros en cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

Consideramos que esta secuencia de tareas le serviría a un profesor en ejercicio como material para conocer el nivel de razonamiento geométrico, según el Modelo de Van Hiele, que tienen sus estudiantes sobre la clasificación de cuadriláteros en contextos de educación en línea. También se podría emplear como prueba diagnóstica para que los profesores reconozcan los conocimientos que tienen sus estudiantes sobre la clasificación de los cuadriláteros.

En el desarrollo del trabajo de grado evidenciamos algunas oportunidades de mejora o ajustes a la secuencia de tareas. Se recomienda mejorar en los siguientes aspectos:

- En la tarea reto 1 de la etapa I se sugiere indicar en la instrucción que se mencione aquello que se tuvo en cuenta a la hora de escribir los números que corresponden a cuadriláteros, ya que en la aplicación obtuvimos respuestas en las que no se evidencian características de algún nivel del Modelo de Van Hiele, lo que dificultó conocer los aspectos que tuvieron en cuenta para presentar dichas respuestas.
- En la tarea reto 1 de la etapa III se sugiere tener en cuenta incluir en la instrucción la posibilidad de reteñir el contorno de los cuadriláteros con más de un color. Lo anterior se sugiere ya que en la aplicación de esta tarea de reto en particular, los estudiantes no retiñeron los contornos de las figuras con más de un color. No conocemos los motivos de estas respuestas, es decir, si influenció la instrucción dada o si los estudiantes sólo reconocieron las figuras de forma individual.
- La secuencia de tareas fue muy extensa, sugerimos que se omitan algunas tareas de reto según las necesidades y criterios del profesor. Sin embargo, desde nuestro punto de vista sugerimos que se fusionen las etapas III y V ya que en la primera se plantean tareas de reto que buscan conocer los aspectos que tienen en cuenta los estudiantes al indicar las figuras geométricas cuadrado, rombo, romboide y rectángulo y en la segunda se buscaba reconocer si los estudiantes relacionan estas figuras o las diferencian según sus características, propiedades, elementos o apariencia global.
- Luego de analizar las respuestas de los estudiantes con los descriptores, resultaría muy conveniente una entrevista con ellos acerca de sus respuestas

para conocer con mayor claridad los aspectos que tuvieron en cuenta a la hora de responder y no quedaron claros o evidenciados en las respuestas escritas.

- Con el fin de lograr que los estudiantes afiancen el manejo de las plataformas GeoGebra *Classroom* y *Classcraft*, se debería asignar encuentros previos a la aplicación de la secuencia de tareas en los que se les enseñe a utilizarlas.

Dada la situación particular de la baja cantidad de estudiantes en cada uno de los dos grados del Colegio en el que se aplicó la secuencia de tareas, de este trabajo se desprende una pregunta que se puede abordar en un trabajo futuro y es ¿Cómo realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas de la secuencia cuando la población de estudiantes es mayor a 10? Por ejemplo, en otras instituciones, la cantidad promedio de estudiantes por curso es de 30 o más. La pregunta surge en consideración de los momentos que se requieren para llevar a cabo el análisis y la determinación de los niveles de razonamiento según el Modelo de Van Hiele, tales como: la lectura y descripción de las respuestas de los estudiantes ya sea en grupo o individual, la comparación entre las respuestas y los descriptores para evidenciar qué características de los niveles del Modelo de Van Hiele se reflejan en ellas y la determinación del nivel de razonamiento geométrico. Si para ese grupo de estudiantes de 30 o más, el análisis se hiciera como se mostró en el capítulo anterior, el volumen de información y trabajo sería muy alto y haría que la tarea fuera engorrosa y dificultosa.

Como una proyección para dar continuidad a este trabajo en el corto plazo, planeamos seguir con el análisis de las respuestas que los estudiantes dieron a las demás etapas de la secuencia, y así determinar en qué nivel de Van Hiele se encuentran los estudiantes de sexto y once del Colegio San Francisco de Asís con respecto a cada tipo de clasificación de cuadriláteros: paralelogramos (etapas II, III y V) y trapecios según la propiedad de paralelismo (etapas II y IV).

Referencias

Adrián, J. (2012). *El desarrollo cognitivo del adolescente.* Sítio web de Fernando Doménech Betoret. Consultado el 11 de abril de 2022. https://www3.uji.es/~betoret/Instruccion/instruccion.html

Baldor, J. A. (2004). *Geometría Plana y del Espacio con una introducción a la trigonometría.* México. Publicaciones Cultural.

Caballero, B., Martínez, M. y Santos, J. (2019). La gamificación en la educación superior. aspectos a considerar para una buena aplicación. En P. Rivera (Ed.), *Pedagogías emergentes en la sociedad digital* (págs. 22-23). Editorial Liberlibro.

Cáceres-Bautista, G. (2017). Aprendizaje de traslaciones en el plano fundamentado en el odelo de Van Hiele, mediado por Geogebra. *Paideia,* (22), 78-96. https://doi.org/10.25054/01240307.1325

Colegio San Francisco de Asís de Nemocón. (2017). *Colegio San Francisco de Asís de Nemocón.* Consultado el 4 de mayo de 2021. http://colsanfrancisconemocon.edu.co/filosofia.html

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y Evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van hiele.* Madrid: Secretaría General Técnica. https://www.researchgate.net/publication/319144045_Diseno_y_evaluacion_de_una_propuesta_curricular_de_aprendizaje_de_la_Geometria_en_Ensenanza_Secundaria_basada_en_el_Modelo_de_Razonamiento_de_Van_Hiele

Expósito, C. D. y Marsollier, R. G. (2020). Virtualidad y educación en tiempos de COVI-19. Un estudio empírico en Argentina. *Educación y humanismo, 22*(39), 1-22. https://doi.org/10.17081/eduhum.22.39.4214

Fernández, K. y Vallejo, A. (2014). La educación en línea: una perspectiva basada en la experiencia de los países. *Revista de Educación y Desarrollo,* (29), 29-39. https://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/29/029_Fernandez.pdf

Fouz, F. y De Donosti, B. (2005). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría* [sesión de conferencia]. Un paseo por la Geometría. http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10884&directory=67&showall=1

Gómez, P., Mora, M. F. & Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En Gómez, P. (Ed.) *formación de profesores de matemáticas y práctica de aula* (pp. 197-268). Universidad de los Andes

Goncalves-Tavares, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?. *Revista Ciencias de la Educación, 1*(27), 83-98. http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf

Healthwise. (2021, 20 de septiembre). *Etapas del desarrollo para niños de 10 años*. Cigna. Consultado el 11 de abril de 2022. Etapas del desarrollo para niños de 10 años | Cigna

Healthwise. (2021, 20 de septiembre). *Etapas del desarrollo de los 15 a los 18 años de edad*. Cigna. Consultado el 11 de abril de 2022. Etapas del desarrollo de los 15 a los 18 años de edad | Cigna

Hernández-Rojas, L. L., Suárez-Castrillón, A. y Rico-Bautista, D. (2017). La gamificación y arquitectura funcional: estrategia práctica en el proceso de enseñanza/aprendizaje usando la tecnología. *Revista Ingenio*, *14*(1), 123-136.

Herrera-Ordoñez, A. y Herrera-López, L. (2013). La educación en línea. *Hospitalidad-Esdai,* (23), 65-82. https://revistas.up.edu.mx/ESDAI/article/view/1544/1273

Ibañez, F. (2020, 20 de noviembre). *Educación en línea, Virtual, a Distancia y Remota de Emergencia, ¿Cuáles son sus características y diferencias?.* Observatorio del Instituto para el Futuro de la Educación. https://observatorio.tec.mx/edu-news/diferencias-educacion-online-virtual-a-distancia-remota

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En Llinares, S. y Sánchez, M.V. (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (colección "Ciencias de la Educación" n° 4) (pp. 298-384). Sevilla: Alfar. https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* [Tesis de Doctorado, Universidad de Valencia]. https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2017*). Educación virtual o educación en línea.* Ministerio de Educación Nacional. Consultado el 1 de abril de 2021. https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-196492.html?_noredirect=1

Moise, E. y Downs, F. (1972). *Serie matemática moderna* (M. García, Trad.). Norma. (Obra original publicada en 1964)

Oriol, J. y Bernadet. (1846). *ELEMENTOS DE GEOMETRIS Y DIBUJO LINEAL*. https://books.google.com.co/books?id=rxMAp2EnJ9kC&pg=PA30&dq=definici%C3%B3n+de+trapecio+escaleno&hl=es-

419&sa=X&ved=2ahUKEwjUqf2lpNrzAhUZITQIHZlnBmYQ6AF6BAgEEAI#v=onepage&q=definici%C3%B3n%20de%20trapecio%20escaleno&f=false

Pérez, D. L. (2020). *Gamificación en la enseñanza de la separación en la fuente de residuos sólidos para incrementar el grado de aprendizaje de esta temática en el sector agroindustrial del centro Lope, Sena regional Nariño.* [tesis de especialización, Fundación Universitaria Los Libertadores]. Repositorio Institucional. http://hdl.handle.net/11371/3518

Pestana, M., Gutiérrez I. y Arámbula, V. (2015, 5 de noviembre). *Características del desarrollo cognitivo del adolescente.* https://desarrolloadolescenteyadulto.weebly.com/desarrollo-cognitivo1/caracteristicas-del-desarrollo-cognitivo-del-adolescente

Samper, C. (2008). *Geometría.* Norma.

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27*(1), 74-94. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944

Anexos

Classcraft
Convierte la aventura en un aprendizaje

IMAGENES ANEXOS
Clase: AVENTURA GEOMÉTRICA

Código de clase: **dsigxlsw**
Código parental: **wjpmpjno**

Estimados alumnos y padres:

Usamos Classcraft en nuestra aula para divertirnos, fomentar el trabajo en equipo y ser mejores estudiantes. Siguen las siguientes instrucciones para crear una cuenta gratis y estar informado de los anuncios de las clases, las tareas y mucho más.

IMAGENES ANEXOS

Guardián

CÓDIGO DE CLASE : dsigxlsw

Usar cuenta existente

1. Inicia sesión y ve a **game.classcraft.com/profile.**
2. Si jugaste el año pasado, **archiva** el personaje que ya no usas.
3. Cuando no tengas personajes activos, introduce tu código de clase para unirte a tu nueva clase.

CÓDIGO PARENTAL : wjpmpjno

Crear una nueva cuenta

1. Ve a **game.classcraft.com/parent.**
2. Cuando se te pida, introduce tu código de padre.

Usar cuenta existente

1. Inicia sesión y ve a **game.classcraft.com/profile.**
2. En la sección **"Añadir niño"**, introduce tu código de padre.

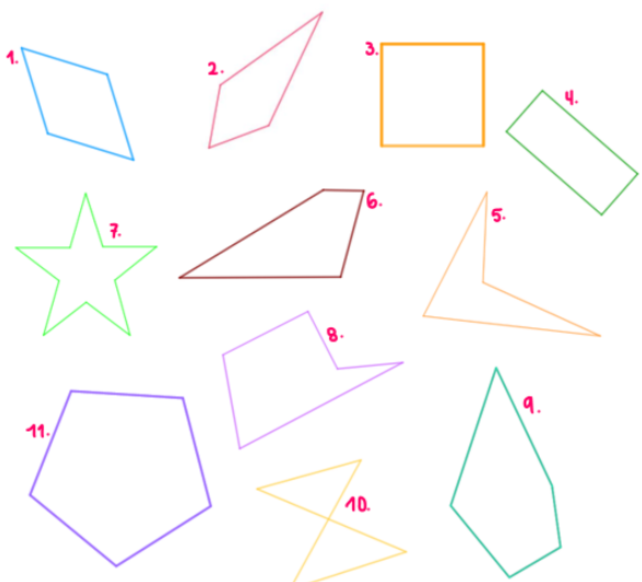
Los retos de la etapa I

Para superar esta primera etapa debes pasar por ocho tareas de reto y luego contarnos qué hiciste.

Debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T1 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón “TAREA COMPLETADA”.

¡Sabemos que lo lograrás, ánimo!

Observa las siguientes figuras y debajo escribe el número de las que son cuadriláteros.



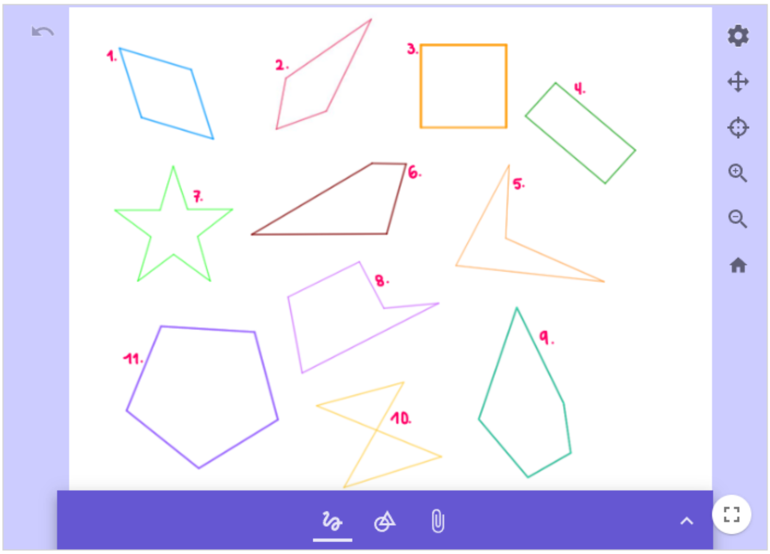
Tarea 1

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe *CX* dentro de las figuras que son cuadriláteros convexos, *CV* dentro de las figuras que son cuadriláteros cóncavos, *I* dentro de las figuras que son cuadriláteros irregulares y *R* dentro de las figuras que son cuadriláteros regulares. (Nota: puedes escribir varias letras dentro de una figura)

- Para saber cómo escribir dentro de las figuras mira el siguiente video: **Ver video**

Tarea 2



Tarea 3

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *CV*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *CV* en estos cuadriláteros?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 4

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *CX*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *CX* en estos cuadriláteros?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 5

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *R*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *R* en estos cuadriláteros?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 6

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *I*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *I* en estos cuadriláteros?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 7

Enuncia el número de las figuras en las cuales no escribiste *CV*, *CX*, *I* ni *R*. Para cada figura explica el por qué no escribiste ninguna de las letras.

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Para cada una de las figuras puestas en la tabla marca con una X qué letra o letras escribiste dentro de ella y explica por qué elegiste esa o esas letras.

- Para saber cómo escribir en la tabla mira el siguiente video: **Ver video**

Tarea 8

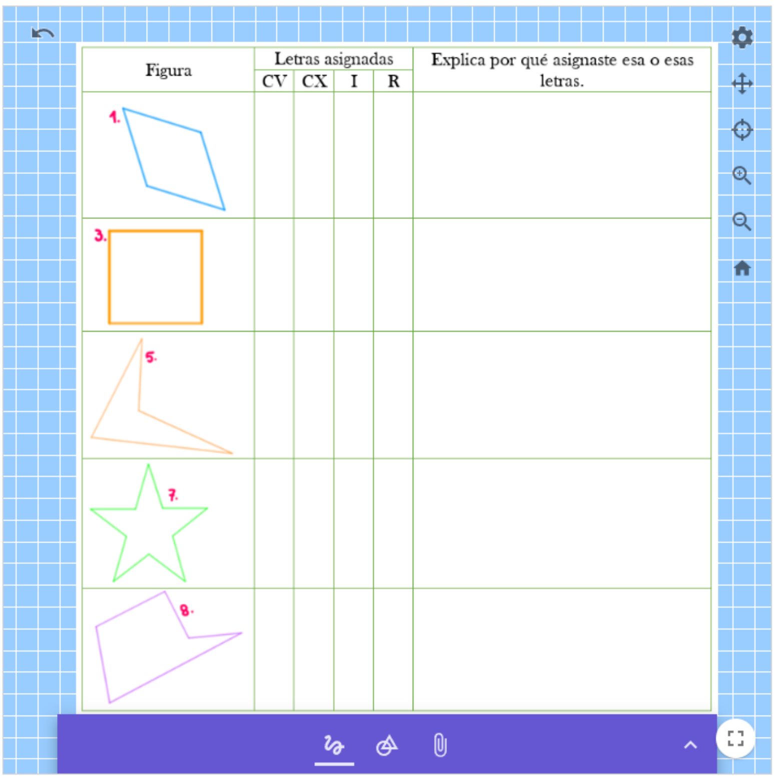


Figura	Letras asignadas				Explica por qué asignaste esa o esas letras.
	CV	CX	I	R	
1.					
3.					
5.					
7.					
8.					

Recuerda que debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T1 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA" .

Los retos de la etapa II

Para superar esta segunda etapa debes pasar por seis tareas de reto y luego contarnos qué hiciste.

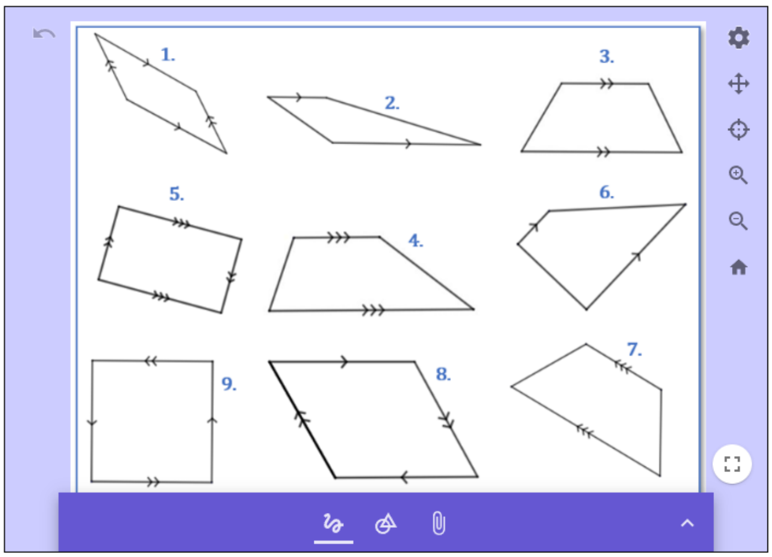
Debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T2 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA".

¡Muchos éxitos!

Analiza las siguientes figuras y realiza una propuesta de cómo clasificarlas en grupos de figuras. Elige un color para cada grupo de figuras y retiñe del mismo color las figuras que corresponden a cada grupo.

- Para saber cómo reteñir las figuras mira el siguiente video: **Ver video**

Tarea 1



Tarea 2

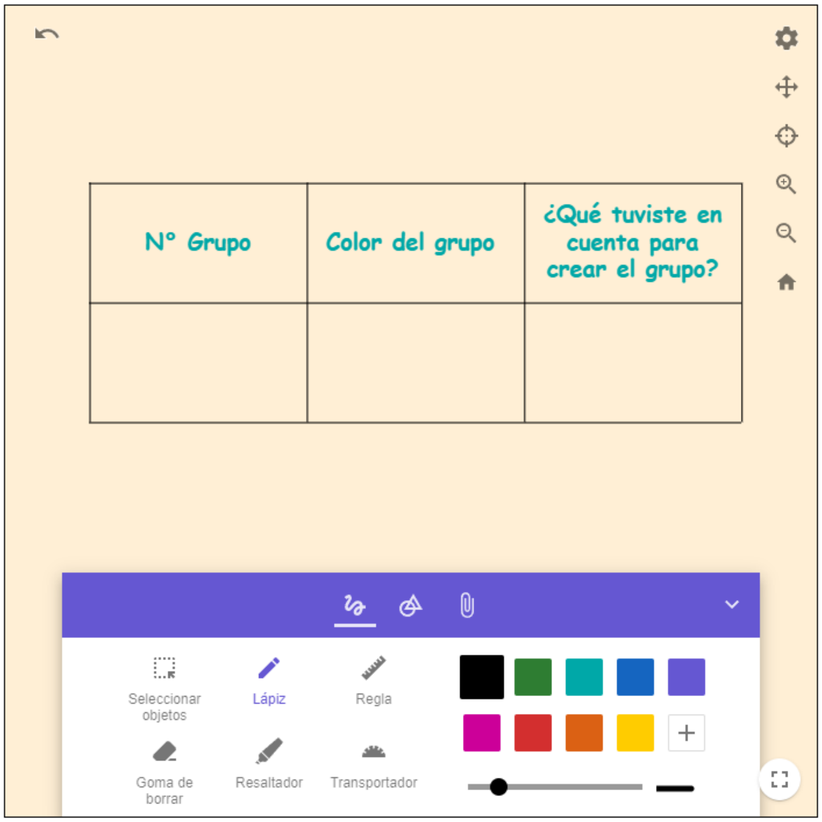
¿Cuántos grupos de figuras obtuviste?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

¿Qué tuviste en cuenta para crear cada grupo?
Organiza tus respuestas en una tabla como la que encuentras a continuación, añade las filas necesarias según la cantidad de grupos que hayas creado.

- Para saber cómo escribir en la tabla mira el siguiente video: **Ver video**

Tarea 3



N° Grupo	Color del grupo	¿Qué tuviste en cuenta para crear el grupo?

Tarea 4

¿Qué tuviste en cuenta para clasificar las figuras?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 5

¿Qué nombre le asignarías a cada uno de los grupos que obtuviste en la clasificación? ¿Por qué escogiste esos nombres?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 6

Una figura del conjunto ¿Puede estar a la vez en dos o más grupos de los que propusiste? Explica tu respuesta:

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Recuerda que debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T2 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA".

Los retos de la etapa III

¡Fantástico, ya has superado dos etapas!

Para superar esta tercer etapa debes pasar por cinco tareas de reto y luego contarnos qué hiciste.

Debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T3 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón “TAREA COMPLETADA”.

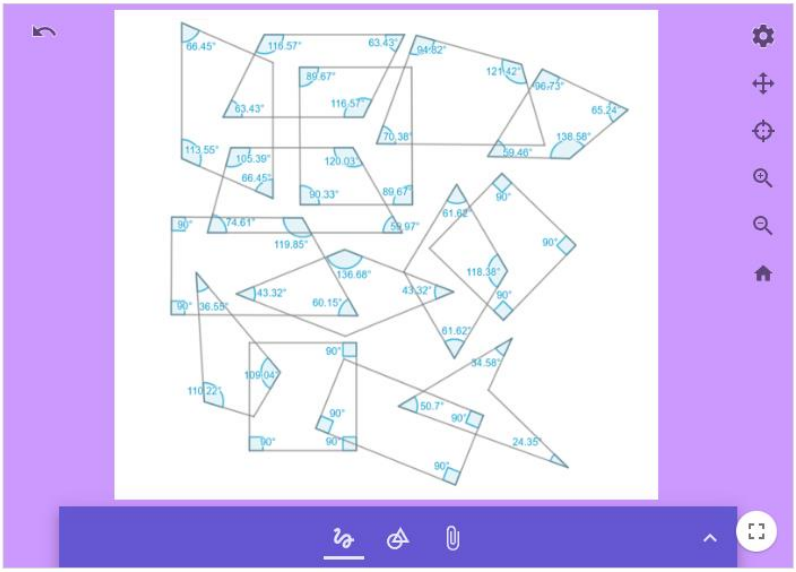
¡Mucha suerte!

Teniendo en cuenta la información de la siguiente tabla, retiñe el contorno de los cuadriláteros que aparecen debajo de ella.

Nota: Para reteñir las figuras ten presente la herramienta resaltador que usaste en la etapa anterior.

Figura	Color
Cuadrado	Rojo
Rombo	Amarillo
Rectángulo	Naranja
Romboide	Verde

Tarea 1



Tarea 2

¿Qué tuviste en cuenta para elegir los cuadriláteros que reteñirías de rojo?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 3

¿Cómo identificaste los rombos para reteñirlos de amarillo?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 4

¿Qué características tuviste en cuenta para elegir los rectángulos y reteñirlos de naranja?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 5

¿Qué tuviste en cuenta para encontrar los romboides y reteñirlos de color verde?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Recuerda que debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T3 en el chat de la reunión general, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA".

Los retos de la etapa IV

Para superar esta cuarta etapa debes pasar por nueve tareas de reto y luego contarnos qué hiciste.

Debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T4 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA".

¡Éxitos!

Lee las siguientes definiciones:

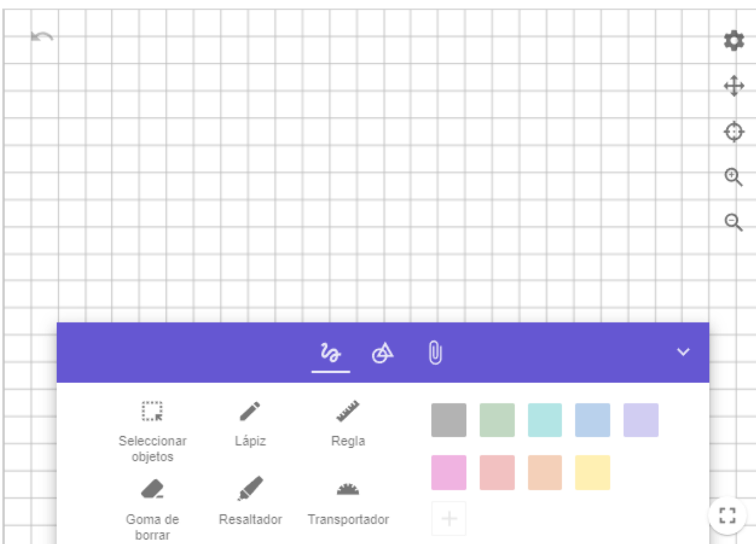
Figura A: Cuadrilátero que cuenta con un sólo par de lados paralelos y un ángulo recto.
Figura B: Es un trapecio con un par de lados opuestos congruentes.
Figura C: Es un trapecio que tiene desiguales los lados opuestos no paralelos.

De acuerdo a las definiciones dadas, dibuja las figuras **A**, **B** y **C** y escribe debajo de cada una su nombre y sus características.

- Para saber cómo dibujar las figuras mira el siguiente video: **Ver video**

Dibuja la figura A

Tarea 1



Tarea 2

Nombre de la figura A

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

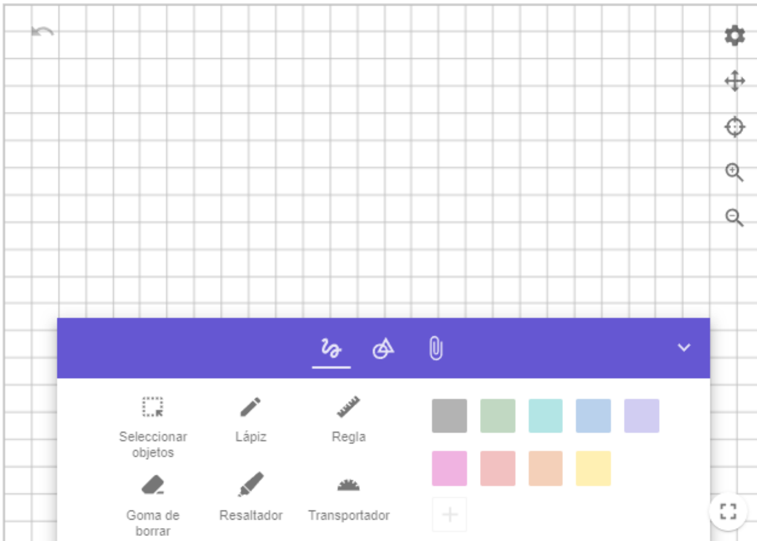
Tarea 3

Características de la figura A

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Dibuja la figura B

Tarea 4



Tarea 5

Nombre de la figura B

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

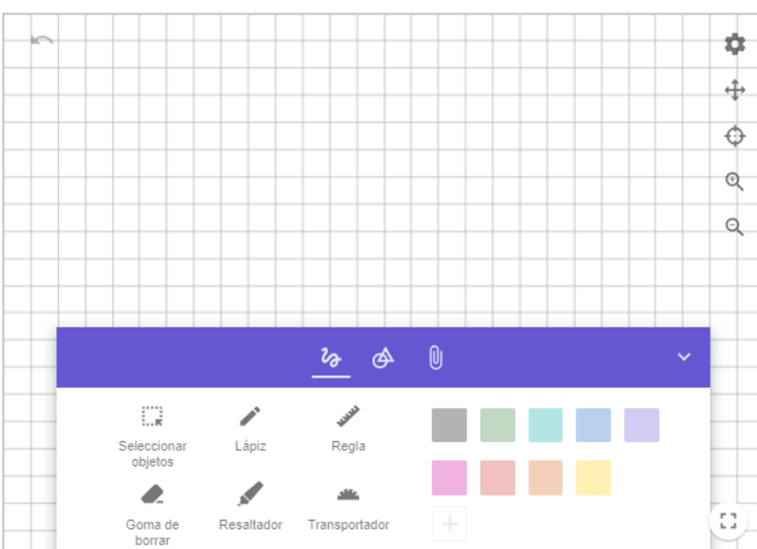
Tarea 6

Características de la figura B

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Dibuja la figura C

Tarea 7



Tarea 8

Nombre de la figura C

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 9

Características de la figura C

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Recuerda que debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T4 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA".

Los retos de la etapa final

¡Maravilloso, has alcanzado la etapa final!

La solución de las tareas de reto que hay en esta etapa final te llevará a completar satisfactoriamente la misión y recibir tu diploma con los puntos de experiencia que has ganado.

Debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T5 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "MISIÓN COMPLETA".

¡Suerte, eres el mejor!

En la clase de Geometría de Emanuel y María se genera una socialización acerca del tema de cuadriláteros para cuadrado, rectángulo y rombo. Emanuel inicia la socialización diciéndole a sus compañeros y profesora que un rombo siempre es un cuadrado.

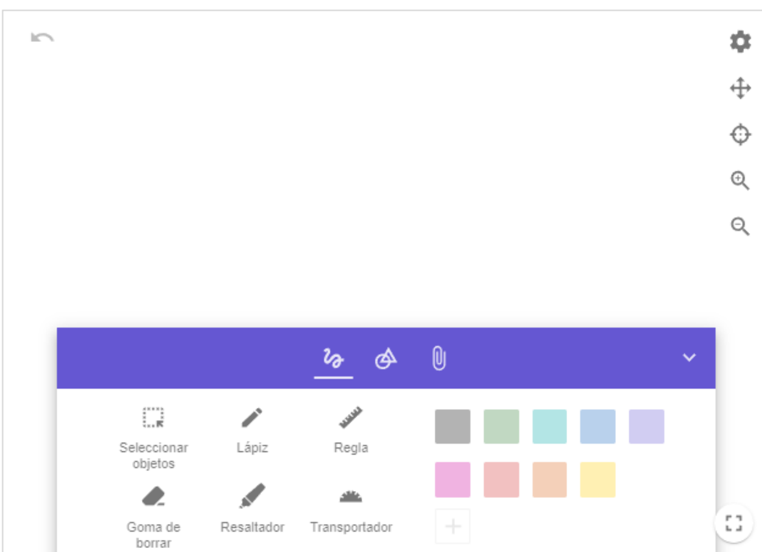
Tarea 1

Si fueras compañero de Emanuel
¿estarías de acuerdo con lo que él dice?
¿Qué tienes en cuenta para estar de acuerdo o en desacuerdo con él?

En caso de ser necesario realiza un dibujo.

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 2



Tarea 3

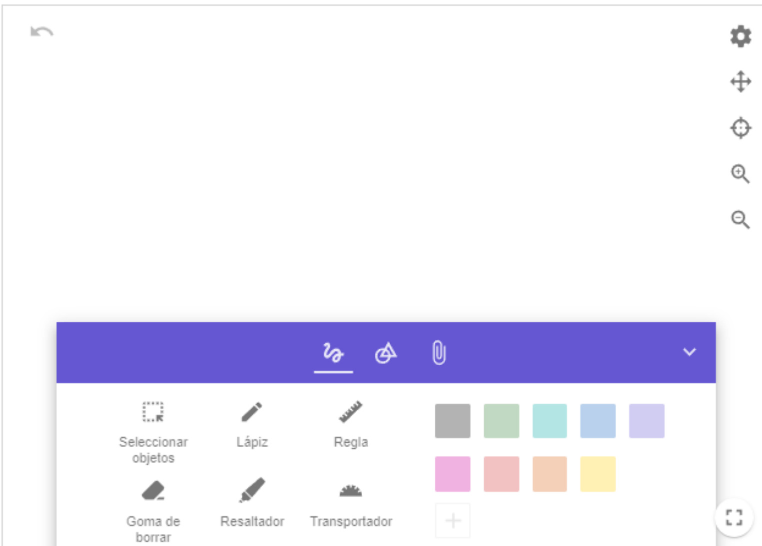
María dijo que un cuadrado es siempre un rectángulo.

Si la profesora te pidiera que relates lo qué piensas acerca de la afirmación de María. **¿Qué dirías?**

En caso de ser necesario realiza un dibujo.

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 4



La profesora decide pegar en el tablero los siguientes carteles con el fin de que los estudiantes participen más en la actividad de socialización.

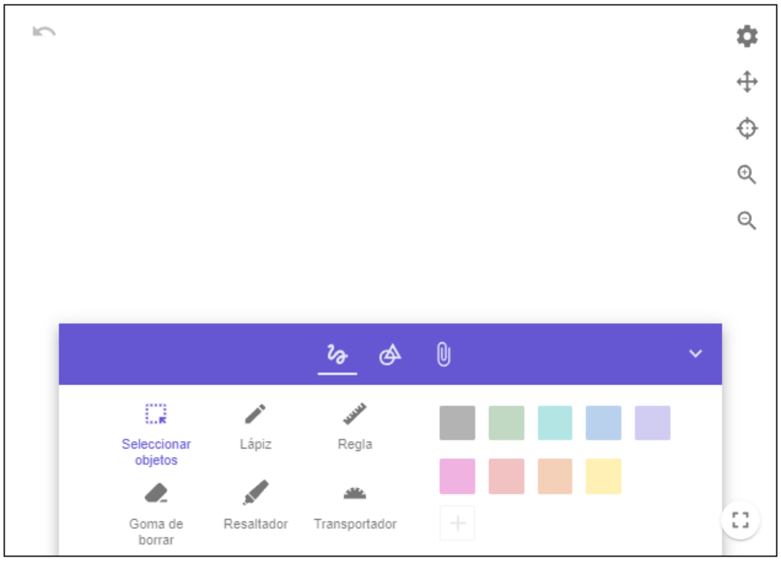
Tarea 5

Escribe lo que piensas acerca del enunciado que se encuentra en el cartel número **uno**.

Realiza un dibujo en caso de ser necesario

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 6



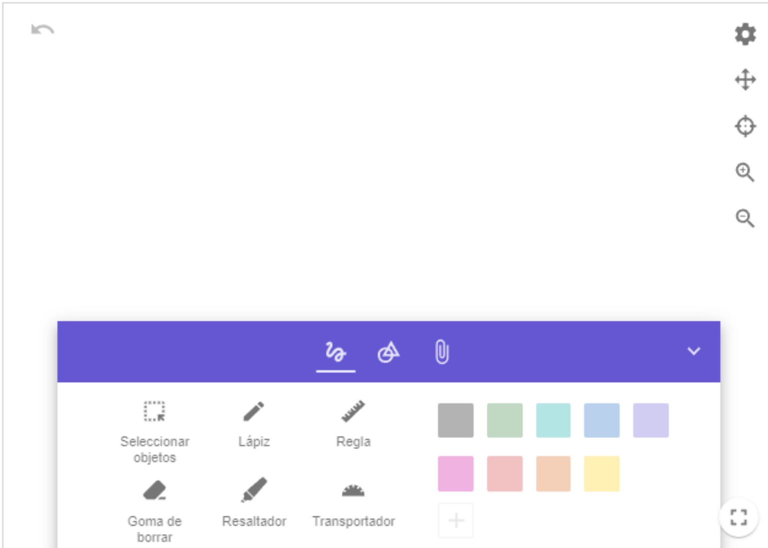
Tarea 7

Escribe lo que piensas acerca del enunciado que se encuentra en el cartel número **dos**.

Realiza un dibujo en caso de ser necesario

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 8



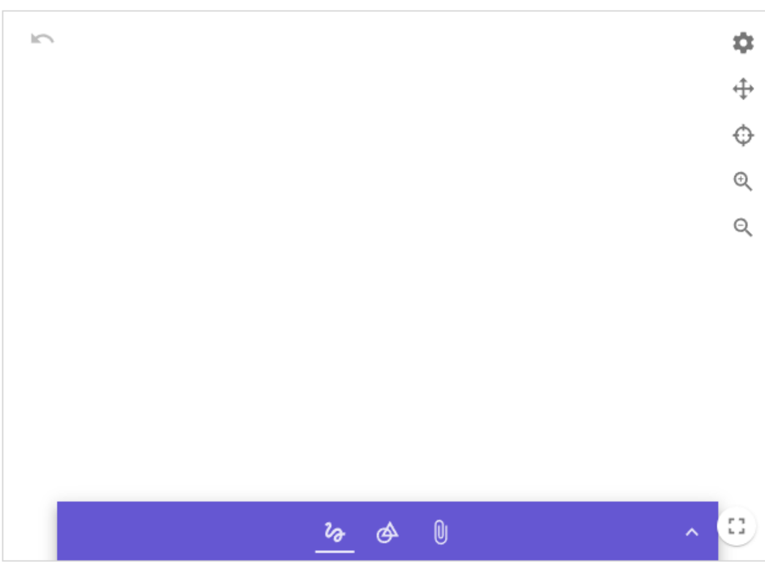
Tarea 9

Escribe lo que piensas acerca del enunciado que se encuentra en el cartel número **tres**.

Realiza un dibujo en caso de ser necesario

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 10



Recuerda que debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T5 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "MISIÓN COMPLETA".

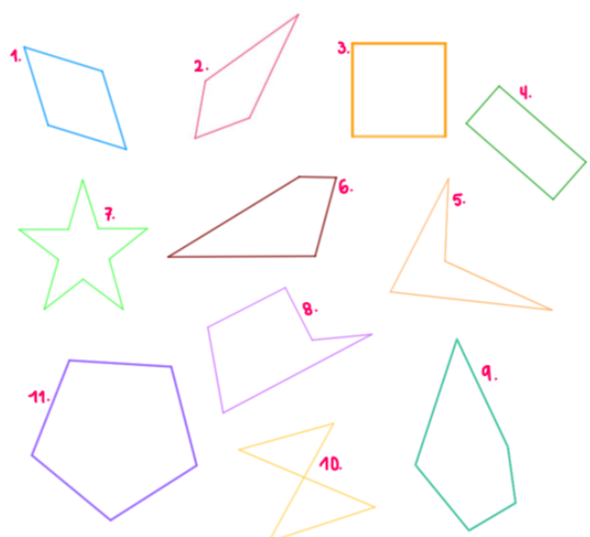
Los retos de la etapa I

Para superar esta primera etapa debes pasar por ocho tareas de reto y luego contarnos qué hiciste.

Debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T1 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA".

¡Sabemos que lo lograrás, ánimo!

Observa las siguientes figuras y debajo escribe el número de las que son cuadriláteros.



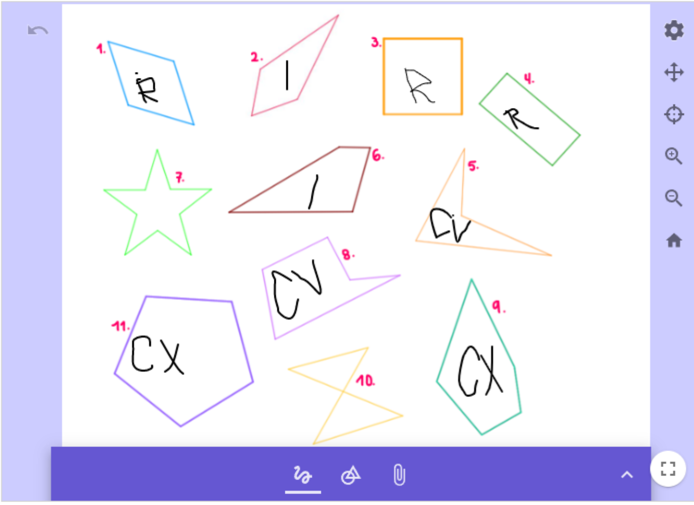
Tarea 1

Aa π 1,2,3,4,5,6,9

Escribe *CX* dentro de las figuras que son cuadriláteros convexos, *CV* dentro de las figuras que son cuadriláteros cóncavos, *I* dentro de las figuras que son cuadriláteros irregulares y *R* dentro de las figuras que son cuadriláteros regulares. (Nota: puedes escribir varias letras dentro de una figura)

- Para saber cómo escribir dentro de las figuras mira el siguiente video: **Ver video**

Tarea 2



Tarea 3

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *CV*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *CV* en estos cuadriláteros?

Aa π 2 porque tienen una parte de la figura adentro

Tarea 4

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *CX*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *CX* en estos cuadriláteros?

Aa π 2 porque tienen una parte de la figura afuera

Tarea 5

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *R*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *R* en estos cuadriláteros?

Aa π 3 porque todos sus lados son iguales

Tarea 6

Escribe el número de las figuras en las cuales escribiste *I*. ¿Qué tuviste en cuenta para escribir *I* en estos cuadriláteros?

Aa π 2 no tienen la misma medida

Tarea 7

Enuncia el número de las figuras en las cuales no escribiste *CV*, *CX*, *I* ni *R*. Para cada figura explica el por qué no escribiste ninguna de las letras.

Aa π 10 y 7 porque ni tienen los 4 lados y porque no se ven que fueran cv o cx

Para cada una de las figuras puestas en la tabla marca con una X qué letra o letras escribiste dentro de ella y explica por qué elegiste esa o esas letras.

- Para saber cómo escribir en la tabla mira el siguiente video: **Ver video**

Tarea 8

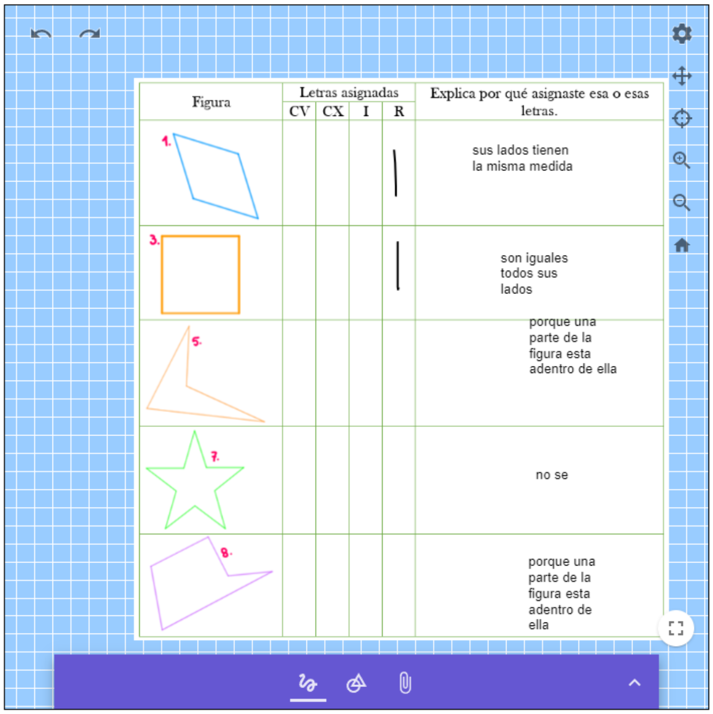


Figura	Letras asignadas				Explica por qué asignaste esa o esas letras.
	CV	CX	I	R	
1.					sus lados tienen la misma medida
3.					son iguales todos sus lados
5.					porque una parte de la figura esta adentro de ella
7.					no se
8.					porque una parte de la figura esta adentro de ella

Recuerda que debes responder completamente a las tareas de reto. Cuando hayas terminado avísale al profesor escribiendo T1 en el chat general de la reunión, luego vuelve a la pestaña de Classcraft y da clic sobre el botón "TAREA COMPLETADA" .