UNA REVISIÓN A LOS DISTINTOS USOS DEL CONCEPTO DE INFINITO A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Kelly Alejandra Bejarano Ruiz

Eider Julián Páez Pinzón

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D. C.

2022

UNA REVISIÓN A LOS DISTINTOS USOS DEL CONCEPTO DE INFINITO A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Trabajo presentado como requisito para optar por el título de Licenciado(a) en Matemáticas

Kelly Alejandra Bejarano Ruiz

Código: 201724004

C.C. 1001326621

Eider Julián Páez Pinzón

Código: 2017240054

C.C. 1051184168

Director:

Mg. César Guillermo Rendón Mayorga

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D. C.

2022

Dedico este trabajo a mi abuela Isabel, la cual me ha dado su paciencia y amor y brindado todo su apoyo incondicional a lo largo de todo mi proceso formativo, y en general de mi vida.

Alejandra Bejarano

Dedico este trabajo a YHWH, a mis padres, Yolanda Pinzón y Segundo Páez, y a mi hermana, Natalia Páez quienes me han apoyado a lo largo de mi paso por la Universidad Pedagógica Nacional y especialmente en la elaboración de este documento.

Julián Páez

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer primeramente a **Dios**, por permitirnos esta nueva oportunidad de aprendizaje. Después de más de dos años incertidumbre por la pandemia por Covid-19 se nos fue dada la oportunidad de emprender y culminar este trabajo de grado.

Agradecemos a todos los **profesores y amigos** de la Universidad Pedagógica Nacional con quienes compartimos en el trascurso de nuestra carrera, y lograron dejar su huella en nosotros. Seguramente sin sus conocimientos ni sus sabias palabras no hubiésemos logrado alcanzar esta meta.

Damos gracias, también, a nuestras **familias** porque fueron esos pilares en quienes nos sostuvimos para desarrollar este proyecto, su infinita paciencia, en potencia y en acto, hicieron que nuestro tiempo de desarrollo de esta tesis fuera más agradable. Además, por comprender las largas jornadas de nuestra ausencia para hacer posible la realización de esta tesis.

Por último, pero no por ello menos importante, al **profesor César Rendón** quien fue un excelente asesor y orientador de nuestro trabajo. Así mismo, sus grandes conocimientos en relación al asunto de este trabajo nos permitieron construir muchos de los resultados del mismo y reflexionar sobre estos.

RESUMEN

Este trabajo se centra en describir el desarrollo histórico del concepto de infinito a lo largo de la historia, identificando el tratamiento dado al infinito por diferentes matemáticos o pensadores y la influencia que ha tenido en la construcción y definición de objetos y conceptos de las matemáticas. A partir de este trabajo, se identificaron diferentes usos del concepto de infinito, clasificándolos en una serie de categorías, algunas de las cuales son ramas de la Matemática (como la Aritmética, la Geometría, el Álgebra o la Estadística) o de un área del conocimiento diferente (como la Física, la Paralogística (entendida esta como usos del infinito en paradojas) o la Filosofía).

Palabras clave: Infinito, Historia de las Matemáticas, Historia del infinito, Cantor

ABSTRACT

This paper focuses on describing the historical development of the concept of infinity throughout history, identifying the treatment given to infinity by different mathematicians or thinkers and the influence it has had on the construction and definition of objects and concepts of mathematics. From this work, different uses of the concept of infinity were identified, classifying them in a series of categories, some of which are branches of Mathematics (such as Arithmetic, Geometry, Algebra or Statistics) or from a different area of knowledge (such as Physics, Paralogistics (understood as uses of infinity in paradoxes) or Philosophy).

Keywords: *Infinity, History of Mathematics, History of infinity, Cantor*

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El presente documento consiste, principalmente, en una revisión histórica a los distintos usos que ha tenido el concepto de infinito en las Matemáticas a lo largo de la historia. Por *uso del infinito* se entiende a la acción de servirse de, o tratar por necesidad con, el concepto o noción de infinito para obtener algún resultado o para describir algún ser u objeto. En ese sentido, cuando se alude a un *uso del infinito* también se hace referencia a los posibles tratamientos que ha tenido este concepto a lo largo de la historia.

El concepto de infinito ha intentado ser dilucidado muy posiblemente desde los inicios de la humanidad como contraposición a su condición finita. Así, el infinito, al contrario de muchos conceptos, ha sido algo inherente al pensamiento humano (Gracián, 2010). En otras palabras, aun cuando se sabe que los conceptos que no se usan tienden a ser olvidados, con el infinito pasó todo lo opuesto; los mismos pensadores y matemáticos intentaron expulsarlo de sus campos de estudio, pero por más que lo intentaron no fue posible eludirlo. El infinito siempre apareció como una sombra que atormentó la mente de muchos intelectuales. Dicho esto, se procederá a describir cada uno de los capítulos que conforman este trabajo de grado.

El primer capítulo de este estudio corresponde a los preliminares, los cuales están conformados por los objetivos, la justificación y aspectos metodológicos. En relación con los objetivos se debe señalar que son cinco, uno general y cuatro específicos, que, básicamente, sitúan a este trabajo como una revisión histórica del concepto de infinito y delinean los resultados esperados. La justificación se construye desde cinco ámbitos, a saber: (i) interés académico de los autores, (ii) los beneficios que podría traer su elaboración tanto para los autores como para la comunidad académica, (iii) lo poco intuitivo que es el concepto del infinito, (iv) su presencia en muchos objetos matemáticos que se abordan en la escuela y (v) el carácter innovador que tiene el trabajo para el Departamento de Matemáticas de la UPN.

Los aspectos metodológicos presentan la forma en que se procedió para la elaboración de este trabajo. Así, se especifica que este proyecto es, esencialmente, de corte cualitativo (Quecedo y Castaño, 2002) y en particular, consiste en una revisión documental (Reyes y Carmona, 2020). En ese sentido, se comenta que esta revisión se dividió en cinco fases: la primera denominada *arqueo de fuentes* que, básicamente, estribó en la búsqueda de diversos documentos y materiales relacionados con la historia del infinito matemático; la segunda versó en la *revisión* de tal material y el descarte de documentos que no estuvieran en conexión directa con los propósitos de este trabajo; la tercera etapa refirió al *cotejo* de las fuentes que no fueron descartadas, a la identificación de hitos y el rastreo de usos del infinito en la historia de este objeto; la cuarta residió en la *interpretación* del información obtenida en la fase de cotejo; y la última etapa consistió en elaborar *conclusiones* sobre el trabajo realizado.

El segundo capítulo refiere al Marco Teórico de este trabajo de grado. En este, se hace un breve estudio de la relación de la Historia de las Matemáticas con los conocimientos y la formación del profesor de Matemáticas con base en dos trabajos: Guacaneme (2016) y Rendón (2017). La intención de realizar dicha indagación no es otra que explicar conceptualmente la pertinencia de la elaboración de este trabajo en el marco de un programa de formación de profesores de Matemáticas. Además, en la última subsección de este apartado, se construye una noción de 'indefinido', 'ilimitado' e 'infinito', debido a que son expresiones que suelen tener significados desde la cotidianidad que van en contravía, en cierto sentido, de la forma matemática de entenderlos. Se ubican en este capítulo inicial para evitar confusiones conceptuales entre estos términos a lo largo del trabajo.

El tercer capítulo expone gran parte de los hitos históricos del concepto de infinito hallados en la fase de revisión de literatura desarrollada en este trabajo. Vale la pena mencionar que se enfatizó en los pensadores o matemáticos que emplearon dicho concepto. Para reportar la reconstrucción histórica se clasificaron los distintos hitos en cada una de las edades de desarrollo de la humanidad (*i.e.*, Antigua, Clásica, Media, Moderna y Contemporánea), según correspondiera. Además, se reconstruyen demostraciones clásicas de los teoremas de Cantor sobre la cardinalidad de los conjuntos$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

El cuarto capítulo presenta los resultados de este trabajo. Dicho apartado contiene una descripción de las categorías que se utilizaron en la clasificación de los usos del infinito (Geometría, Aritmética, Álgebra, Cálculo, Estadística, Teoría de conjuntos, Física, Religión, Filosofía y Paralogística). También, incluye una breve pero sustancial caracterización de tales usos según la rama o área del conocimiento al que pertenecían.

En el quinto y último capítulo del documento se exponen las conclusiones de este trabajo de grado, las cuales giran en torno a los objetivos de este, a los aportes que se hace a la comunidad académica y a los mismos autores; además se presentan los asuntos que quedan pendientes después de su realización.

1. PRELIMINARES

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo general

Caracterizar los distintos usos matemáticos que ha tenido el concepto de infinito a través de la historia.

1.1.2. Objetivos específicos

- Consultar diversas fuentes de información de literatura especializada en la historia del infinito matemático.
- Identificar diferentes usos matemáticos que se le han dado a lo largo de las épocas al concepto de infinito.
- Clasificar el uso del infinito tomando como criterio las áreas Matemáticas (Álgebra, Análisis, Aritmética, Geometría, etc.).
- Sistematizar los hallazgos históricos encontrados en relación con los usos matemáticos del infinito.

1.2. JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta de trabajo de grado consiste, fundamentalmente, en una revisión histórica a los distintos usos que ha tenido el concepto de infinito en las Matemáticas a lo largo de la historia.

Se considera pertinente la realización de este trabajo de grado porque, en primer lugar, se tiene un interés académico sobre el uso histórico de este objeto. Dicho interés surge dado que, como futuros docentes, reconocer los usos de esta idea matemática a través de su historia puede proporcionar diversos elementos formativos y saberes propios de un profesor de Matemáticas (Chávez, 2002). Al respecto, Guacaneme (2016) en su tesis doctoral menciona que algunos investigadores ubican el conocimiento histórico matemático como una parte fundamental del conocimiento disciplinar del profesor. El autor también señala que Despina Potari (2001) en su escrito indica que el discurso histórico de los conceptos matemáticos es una manera en que los futuros profesores lograrán desarrollar perspectivas de lo que es la creación y evolución de las ideas matemáticas, así como de lo que es la naturaleza del pensamiento y desarrollo de los niños. Aunque estos investigadores se refieren a la Historia de las Matemáticas en general, se hará uso particular de estas ideas para el caso del infinito matemático.

Del mismo modo, López (2014) expone que para la comprensión del infinito se puede partir desde los aspectos históricos de este. Tal compresión puede tener consecuencias favorables que nutran los conocimientos, instrumentos y perspectivas docentes de los autores de esta propuesta –probablemente sea de igual manera para los lectores de este trabajo– y mejoren la forma como se abordan los procesos de enseñanza-aprendizaje relativos a objetos y conceptos matemáticos escolares en los cuales el infinito está presente, por ejemplo: las sucesiones, la cardinalidad de los conjuntos, los límites, las rectas, etc. Y dado que su conceptualización ha sido un proceso largo con muchas dificultades, es preciso analizar tanto la naturaleza de los conceptos involucrados, como la génesis de su surgimiento.

Así mismo, es sencillo reconocer que el concepto de infinito a lo largo de la historia ha generado múltiples discusiones y controversias entre pensadores de diferentes épocas. Por ejemplo, uno de los motivos es que se aceptó al infinito como concepto matemático, lo cual iba en contravía de las ideas de grandes intelectuales como Kant y Aristóteles, pues ellos aseveraban que el infinito es algo que no se deja de recorrer y carece de límite, por lo que no puede ser determinado y, por ende, no existe en sí mismo (Garelik y Montenegro, 2018). Teniendo en cuenta que la anterior no ha sido la única discusión que se ha tenido sobre este concepto a lo largo de la historia, entonces se identifica, también, una importancia conceptual que motiva a su estudio. No obstante, es importante aclarar que este proyecto no se centrará en la discusión o tratamiento filosófico del infinito sino desde su utilización en Matemáticas, aunque en ocasiones ambos asuntos se solapen.

Por otra parte, se ha encontrado que en algunos textos de matemáticas escolares es frecuente encontrar expresiones como "los naturales comienzan en cero y nunca terminan" o "los reales van desde menos infinito a más infinito", entre otras. Todo ello incidió en los autores para profundizar en qué es el infinito y cómo se ha utilizado en las Matemáticas.

A propósito de lo anterior, otra razón para la realización de esta propuesta es que muy posiblemente –o se espera que– en el futuro sea un insumo para el diseño de tareas para llevar al aula que potencien y den un mayor significado a las frases descritas en el párrafo previo. Además, que promuevan la superación de obstáculos epistemológicos que se presentan en muchos de los conceptos relacionados con el infinito de las diversas ramas de las Matemáticas, pues de cierta forma "comprender el infinito" o conceptos vinculados con el mismo suele ser una tarea poco intuitiva.

Finalmente, se considera que este proyecto sobre el tratamiento histórico del infinito tiene un valor agregado para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad, debido a que a lo largo de la formación de los autores no se ha cursado algún espacio académico en el que se discutiera explícitamente sobre las nociones del infinito y cómo se utilizó a lo largo de la historia. Así mismo, se llevó a cabo una búsqueda en el repositorio institucional de la UPN y no se encontraron trabajos de grado o tesis referentes a los usos matemáticos del infinito, hecho que reafirma la percepción anterior.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En aras de describir la metodología empleada para el desarrollo de este trabajo, se expondrán, en principio, aspectos generales del tipo de investigación que encierra la forma en la que se procedió, y luego se esgrimirán argumentos para justificar tal decisión. Así, debe ser claro que no se pretende ahondar en dicha metodología, sino solo caracterizarla sucintamente en pro de proveer una teoría que soporte los argumentos que se construirán.

1.2.1. La investigación cualitativa

Fernández y Baptista (2014) definen la investigación como: "un conjunto de procesos sistemáticos, críticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno o problema" (p. 4). Los autores mencionan tres enfoques de esta, a saber: el cuantitativo, el cualitativo y el mixto. El enfoque cualitativo se caracteriza por estudiar entidades cualitativas y pretender entenderlas en un contexto particular (Quecedo y Castaño, 2002). En ese sentido, este enfoque de investigación tiene gran sensibilidad al contexto y a la interpretación que le pueda dar el investigador a la información de lo que desea estudiar.

Fernández (2006) menciona que el enfoque cualitativo puede resumirse en las siguientes fases, representadas y descritas en la Figura 1:

1. Obtener información.
2. Capturar, transcribir y ordenar la información.
3. Codificar la información.
4. Integrar la información.

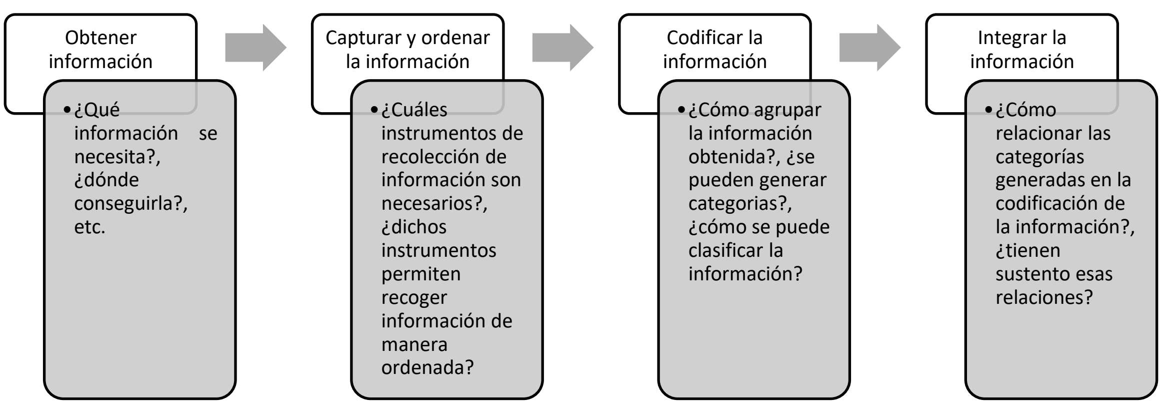

Figura 1. Fases del enfoque cualitativo de investigación

La obtención de información, como su nombre lo indica, refiere a la búsqueda de estrategias o métodos que produzcan información pertinente relacionada con el problema planteado. Según Fernández (2006) lo anterior es un proceso selectivo, pues en la mayoría de las investigaciones cualitativas se cuenta con cantidades enormes de información, la cual hay que entrar a discriminar según su relevancia. Para ello, se debe definir criterios claros y precisos vinculados con la idea de investigación (Quecedo y Castaño, 2002).

La captura de información se hace según el tipo de estrategia (o método) que se haya empleado en la primera fase; si es un documento (libro, artículo, etc.), por ejemplo, se debe acceder al material original. En todo caso, se debe transcribir y organizar la información para garantizar, por un lado, que esta sea perfectamente legible y, por el otro, facilitar su proceso de análisis.

En cuanto a la codificación de la información se debe entender que es un proceso cuyo objetivo es agrupar dicha información en categorías que captan la esencia de esta. Lo anterior es una tarea con mucha complejidad dado que requiere un análisis interpretativo de toda la información recolectada, con el fin de reconocer patrones de esta y, con base en ello, generar sistemas de categorías que sean significativas (Fernández, 2006). La última fase del enfoque cualitativo de investigación es la integración de la información que, *grosso modo*, refiere a relacionar las categorías elaboradas tras el proceso de codificación atendiendo a soportes teóricos.

Reyes y Carmona (2020) señalan que una de las técnicas de la investigación cualitativa es la revisión documental. Esta refiere a la búsqueda, consulta y obtención de referencias y otros materiales que son útiles para los objetivos de la investigación (Fernández y Baptista, 2014) con el fin de extraer y recopilar información o datos cualitativos pertinentes para enmarcar el problema investigativo.

El primer paso de una revisión documental es recolectar fuentes primarias de información[1] que estén relacionadas directamente con la investigación. Reyes y Carmona (2020) denominan a este primer paso como *arqueo de fuentes*. Para ello, si no se es experto en el tema, se debe extraer descriptores[2] del problema o idea de investigación de modo que permita realizar una búsqueda de tal información en diversas bases de datos. Calle (2016) advierte la necesidad de que dichas bases de datos sean confiables, puesto que hay algunas que contienen documentos de manera ilegal, es decir, sin permiso de la editorial o del autor.

Enseguida de haber recolectado las fuentes primarias se debe proceder a la consulta de estas. Dicha consulta se realiza con el fin de descartar documentos que no sean relevantes para

---

[1] Según Fernández y Baptista (2014) las fuentes primarias de información son aquellas que proporcionan datos de primera mano. En ese sentido, los libros, los documentos oficiales, los artículos de revistas, monografías, tesis, etc., son ejemplos de fuentes primarias.

[2] Palabras clave o términos de búsqueda.

el desarrollo de la investigación. Después, se debe hacer un cotejo y organización de la información obtenida con el objetivo de generar citas y referencias que sustenten los planteamientos del investigador. Por último, Reyes y Carmona (2020) mencionan que se debe analizar el material cotejado y establecer conclusiones de todo el proceso de revisión documental. Este procedimiento se ilustra en la Figura 2.

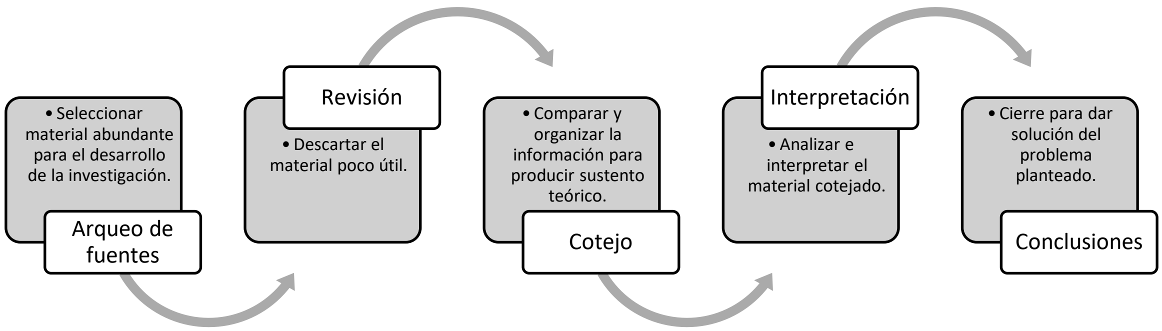

Figura 2. Fases de la revisión documental.

1.2.2. Descripción de los momentos o fases del trabajo

Este trabajo es esencialmente una revisión documental (Reyes y Carmona, 2020) y, por ende, una investigación cualitativa (Quecedo y Castaño, 2002). Ello en tanto que la revisión de literatura y otros materiales tomó un papel protagónico para el cumplimiento de los objetivos (general y específicos) planteados. Además, los momentos de desarrollo de esta monografía se pueden hacer corresponder *biunívocamente* con las fases de una revisión documental expuestas por Reyes y Carmona (2020). Con base en esta decisión sobre el proceder metodológico del trabajo, se detalla a continuación, cómo fue el desarrollo de cada fase.

1.2.2.1. Fase 1: Arqueo de fuentes

En principio se definió que la búsqueda de información primaria debía aludir a la historia del infinito matemático. Para ello, por un lado, se consultaron diversos repositorios de universidades, como la Universidad del Valle, la Universidad Nacional y la Universidad Pedagógica Nacional, y en bases de datos como *Springer*, *Google Scholar*, *Dialnet*, *JStor*, entre otros. Como resultado de esta búsqueda se encontraron 23 artículos de revista, 13 libros o capítulos de libros, cinco tesis (una de doctorado, una de pregrado, tres de maestría) y una videoconferencia.

Un segundo paso fue obtener la información en formatos impreso o electrónico. Se podría decir que este fue un primer filtro pues tal información debía tener la característica de no ser de difícil adquisición.

1.2.2.2. *Fase 2: Revisión*

Una vez obtenida toda la información primaria en formato impreso o electrónico, se procedió a descartar aquellos poco útiles para la elaboración de este trabajo. Para ello, se analizó el índice de contenido o el índice analítico de los libros o tesis adquiridas, los cuales proporcionaron una idea de los temas incluidos en dichas obras. Con respecto a los artículos se les examinó su resumen, las palabras clave y las conclusiones. Los criterios de exclusión que se aplicaron a las fuentes fueron:

i. No debe centrarse en aspectos didácticos sobre el tratamiento del concepto de infinito.

ii. Debe enfatizar en la historia del concepto de infinito o en los usos que ha recibido en las distintas épocas del desarrollo de la humanidad.

iii. No solo debe contener un aspecto puntual de la historia del infinito.

Después de este proceso de selección el número de fuentes se redujo considerablemente; solo quedaron las siguientes referencias:

Tabla 1. Fuentes principales seleccionadas

Tipo de fuente	Autor(es)	Año	Título de la fuente
Artículos	Ortiz	(1994)	El concepto de infinito
	López	(2014)	El infinito en la historia de la Matemática
	Bombal	(2010)	Un paseo por el infinito matemático
Libros	Castro y Pérez	(2007)	Un paseo finito por lo infinito
	Piñeiro	(2013)	Cantor. El infinito en Matemáticas
	Gracián	(2010)	Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático
	Bolzano	(1991)	Las paradojas del infinito
Capítulos de libros	Arrigo, D'Amore y Sbaragli	(2011)	Infinitos infinitos
	Boyer	(1986)	Historia de la Matemática
Video conferencia	Piñero	(2020)	La Teoría de Conjuntos de Georg Cantor
Tesis	Lucero	(2021)	El límite como concepto fundamentador del infinito potencial en Matemáticas: un acercamiento histórico-epistemológico
Memorias de encuentro	Hilbert	(1925)	Acerca del infinito

Dentro de las fuentes depuradas hubo un grupo de documentos que no se relacionaba directamente con la historia del infinito, pero sí con otros conceptos matemáticos vinculados a este objeto, por ejemplo, el límite, la continuidad, los números irracionales, etc. Tales documentos se clasificaron como *lecturas complementarias* y se conservaron para posible consulta ante las dudas que emergieran durante el desarrollo de este trabajo.

1.2.2.3. Fase 3: Cotejo

Las fuentes no depuradas fueron reseñadas con el fin de poder compararlas y contrastarlas. Esto conllevó a identificar, por un lado, siete grandes momentos de la historia del infinito matemático y, por otro lado, distintos usos/tratamientos de este objeto matemático.

Tabla 2. Sucesos identificados después del cotejo de las fuentes

Suceso	Autores
El tratamiento dado por los griegos al concepto de infinito	López (2014), Arrigo *et al.* (2011), Gracián (2010)
Métodos de indivisibles	Arrigo *et al.* (2011), Castro y Pérez (2007), Gracián (2010)
Nacimiento de la Geometría Analítica	Arrigo *et al.* (2011), Castro y Pérez (2007), Gracián (2010), Lucero (2021)
Nacimiento del Cálculo Infinitesimal	López (2014), Arrigo *et al.* (2011), Castro y Pérez (2007), Ortiz (1994), Gracián (2010), Lucero (2021)
El paso de procedimientos infinitesimales por el concepto de límite	López (2014), Arrigo *et al.* (2011), Piñeiro (2013), Lucero (2021)
La formalización del concepto de infinito	Piñeiro (2013), Castro y Pérez (2007), Hilbert (1925), Ortiz (1994), Gracián (2010), Piñeiro (2020)
Problemas sin resolver relacionados con el concepto de infinito	Piñeiro (2013), Ortiz (1994), Gracián (2010), Piñeiro (2020)
Aspecto paralogisticos del infinito	Piñeiro (2013), Castro y Pérez (2007), Ortiz (1994), Bolzano (1990)

La comparación elaborada también permitió establecer aspectos por indagar respecto a los usos del concepto de infinito a través de la Historia de las Matemáticas. Por ejemplo, se observó que hay una cantidad considerable de información del empleo del infinito en la Geometría Euclídea, pero la situación cambia cuando se pregunta por la Geometría Esférica, Riemaniana, Fractal, etc. De manera similar acontece cuando se cuestiona por ramas de las Matemáticas como la Estadística y el Álgebra.

1.2.2.4. Fase 4: Interpretación

Una vez identificados los distintos usos del infinito en la HM, se procedió a clasificarlos según la rama de las Matemáticas (Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Estadística, etc.) a la que pertenecían o según el área de conocimiento a la que correspondían (Física, Filosofía, etc.). Hay que aclarar que el primer grupo de categorías, correspondiente a las ramas clásicas de las Matemáticas, fue preestablecido desde la formulación del anteproyecto de grado, mientras que el segundo grupo fue surgiendo de forma natural a medida que se hacía la revisión de fuentes. Para la clasificación se construyó una tabla de doble entrada que, por una parte, reportará los diversos documentos analizados y, por otra parte, las diferentes categorías mencionadas, como se ilustra a continuación (la tabla efectivamente construida se mostrará más adelante, en la sección correspondiente del siguiente capítulo).

Tabla 3. Forma de la tabla diseñada para la clasificación de los usos del infinito.

Fuente	Aritmética	Álgebra	…
López (2014)			
Piñeiro (2013)			
…			

Luego, se observó que hubo matemáticos o pensadores detrás de cada uno de los usos identificados. De esta forma, se pensó que una manera más organizada de realizar dicha clasificación era atender a los nombres de los personajes responsables de tales usos. Por ejemplo, Leibniz utiliza lo infinitamente pequeño para obtener algunas fórmulas de derivación, entonces, en lugar de darle un código a este uso y catalogarlo en la categoría “Análisis”, lo que se hizo fue colocar allí el nombre de este matemático. En ese sentido, un personaje puede aparecer en más de una categoría, pues esto depende de los usos que haya hecho del infinito.

1.2.2.5. Fase 5: Conclusiones

La última fase del estudio fue la elaboración de las conclusiones en las que se expusieron algunas reflexiones generales en cuanto a la información de las fuentes revisadas, se analizó el cumplimiento de los objetivos (generales y específicos) y se explicitaron los aportes que dejó este trabajo. Además, se mencionaron algunos aspectos interesantes en los cuales se puede profundizar y realizar otros estudios de este mismo tipo.

2. MARCO TEÓRICO

Una de las líneas argumentativas que se mencionó para justificar la elaboración de este trabajo versa sobre la relación de la Historia de las Matemáticas (HM) con los conocimientos del profesor de Matemáticas (CPM). Es así, que en este apartado se pretende especialmente profundizar en esa y otras ideas con el fin de dar un soporte teórico a lo mencionado en la justificación. Para ello, se estudiaron dos tesis, una elaborada por Guacaneme (2016) y otra por Rendón (2017). Como producto de dicho estudio, se reseñarán aquí aquellas secciones que tienen vínculo directo con los propósitos de este capítulo y, en general, del trabajo. Por otra parte, se hablará de tres términos que se suelen utilizar para aludir al infinito en miras de establecer similitudes y diferencias entre ellos.

2.1.1. La relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática

Guacaneme (2016) en su tesis doctoral pretende responder la pregunta: ¿cuál es el potencial formativo de la historia de la razón y la proporción, contenida en el Libro V de *Elementos*, en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas? Para ello, según el autor, le surge la necesidad de realizar una aproximación al *estado del arte* de las investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática (EM) que aluden a la relación HM-EM.

De esta manera, advierte que hay una inmensidad de documentos y publicaciones acerca de la relación HM-EM y, por ende, no es sencilla la tarea de clasificar y organizar tal información. No obstante, el catálogo revisado por el autor le permite, entre otras cosas, sugerir tres generalidades de la relación HM-EM, a saber: (i) la existencia de cuatro ámbitos desde los cuales interpretar la relación HM-EM, (ii) la Didáctica de la HM como un escenario para el estudio de la relación HM-EM y (iii) la poca atención a los vínculos de la Filosofía de las Matemáticas con la relación HM-EM[3].

En relación con (i), se reconocen **cuatro ámbitos de interpretación de la relación HM-EM**[4], los cuales son: la HM en la enseñanza de las Matemáticas, la HM en las investigaciones del campo EM, la HM en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas. Para el primer ámbito de interpretación, naturalmente, hay diversas posturas con respecto al papel de la HM en la enseñanza de las Matemáticas; así, algunos investigadores conciben que la HM tiene un papel secundario en la enseñanza de tal disciplina (*i.e.,* como algo ornamental, adicional o como parte de una lección), otros aseveran que la HM es coprotagonista junto con las Matemáticas en la enseñanza de las mismas (*i.e.*, es una manera

[3] Conviene aclarar que esta forma de numeración corresponde al mismo orden en que aparecen reportados dichos aspectos en Guacaneme (2016).
[4] Las generalidades (ii) y (iii) de la relación HM-EM no se estudiarán puesto que no tienen relación directa con los fines de este aparte.

efectiva para enseñar las Matemáticas y la HM a través de esta última). El segundo marco interpretativo refiere a diversas formas de intervención de la HM en las investigaciones del campo de Educación Matemática, por citar un ejemplo: el uso sustancial de la HM a fin de interpretar las principales dificultades y obstáculos que se presentan en la construcción de un objeto matemático. La tercera esfera de interpretación alude a la intervención de la HM en la formación de profesores de Matemáticas, sin embargo, de esta se hablará más adelante. Por último, el cuarto ámbito refiere a la Historia de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, que trata asuntos como la trayectoria de la Educación Matemática y su metodología como campo de investigación, las diversas épocas y lugares donde se ha desarrollado, etc.

2.1.2. La relación Historia de las Matemáticas – Conocimiento del profesor de Matemáticas

Con base en dicho *estado del arte*, Guacaneme (2016) explora la relación entre HM-CPM (ligado directamente con la tercera esfera interpretativa reseñada en la anterior sección). Para ello, resume las ideas principales de más de seis docenas de artículos y capítulos con la intención de responder cuatro cuestionamientos, a saber: por qué, para qué, qué y cómo de la HM en el CPM. No obstante, aquí solo se estudiarán las dos primeras preguntas señaladas puesto que, de un lado, se relacionan más con los propósitos de esta sección y, de otra parte, dichos interrogantes están estrechamente vinculados entre sí.

¿Por qué de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento del profesor de matemáticas?

Guacaneme (2016) identificó, en la literatura revisada para su investigación, cuatro clases de argumentos del por qué se integra la HM en el CPM, estos son: (i) hay personas que están interesadas en hacerlo; (ii) la valoración social de la HM; (iii) la HM proporciona diversas visiones de la actividad matemática, las Matemáticas, el conocimiento matemático y los objetos matemáticos; y, por último, (iv) la HM configura una fuente de artefactos[5] que pueden ser utilizados en la práctica docente[6]. Sin embargo, para los propósitos de este capítulo solo se reseñarán los argumentos (iii) y (iv).

La HM proporciona diversas **visiones de la actividad matemática** que por lo general no concuerdan o complementan a aquellas que surgen cuando se estudia desde los resultados matemáticos (*e.g.*, definiciones, teoremas, algoritmos, etc.). Según Guacaneme (2016), en particular se hace referencia, de una parte, al proceso de creación/descubrimiento de dichos resultados que, en la mayoría de las ocasiones, se encuentra a la sombra de la presentación formal de los mismos y, de otra parte, se refleja la importancia del proceso de comunicación de tales resultados. En ese sentido, se reconoce que la actividad matemática está permeada por

[5] Guacaneme (2016) utiliza este término en el mismo sentido que Verillon y Rabardel (1995), quienes advierten que un artefacto puede llegar a ser una herramienta, si los usuarios son capaces de usarlos para sus propósitos.
[6] Esta forma de numeración obedece al mismo orden como Guacaneme (2016) menciona los argumentos.

errores, conjeturas, ideas intuitivas, creencias, paradojas, aspectos sociales y culturales, entre otras.

En cuanto a la **visión de las Matemáticas** que suministra la HM, se hace especialmente énfasis en la estrecha relación de las Matemáticas con otras ciencias (*e.g.,* la Astronomía, la Física, la Química, la Biología, etc.) y demás producciones culturales de la humanidad.

La HM proporciona una **visión del conocimiento matemático** puesto que conforma un laboratorio epistemológico para explorar el desarrollo y la construcción del conocimiento matemático. Esta visión, en cierto sentido, permite ver al conocimiento matemático como un saber activo que cambia a través el tiempo y es traspasado por la creatividad humana. Así mismo, la HM posibilita distintas **visiones de los objetos matemáticos** pues deja en evidencia variopintas representaciones, notaciones, definiciones, usos, tratamientos, problemas, retos, etc., de los objetos matemáticos.

El cuarto argumento refiere a que **la HM configura una fuente de potenciales herramientas** para diseñar tareas que propicien la actividad matemática en el aula, para reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos, para elaborar currículos matemáticos y para generar competencias profesionales de un profesor Matemáticas en varios ámbitos (*e.g.*, en el saber matemático, la lectura, la escritura, en actitudes y heurísticos hacia la resolución de problemas, en la valoración del esfuerzo y persistencia en el trabajo matemático, entre otros).

¿Para qué la HM en el CPM?

La HM se incluye en el CPM básicamente para dotar al profesor de visiones y de artefactos en tanto que, de una parte, promueve la construcción de una postura del carácter de la actividad matemática, del conocimiento matemático, de los objetos matemáticos y de las Matemáticas mismas. De otra parte, cuando se alude a que la HM dota al profesor herramientas (o mejor, de potenciales herramientas) que pueden orientar o facilitar su práctica profesional, principalmente, se apela a:

- Una **herramienta conceptual sobre el conocimiento y el pensamiento matemático** que promociona la toma de decisiones educativas con mayor fundamento.
- **Maneras de enseñar** que, de alguna manera, distan del enfoque tradicional de enseñanza de las Matemáticas.
- **Una fuente de insumos para el aula** que, entre otras cosas, favorecen el diseño de tareas y la forma de presentación de tópicos matemáticos.
- Y, por último, **bases para orientar el currículo** que, en especial, permiten comprender algunos asuntos que condicionan un currículo de Matemáticas, por ejemplo, el nivel de relevancia de los temas, los énfasis que se hacen, etc.

Por último, se enfatizará un poco más en la relación Historia de las Matemáticas-Formación de profesores de Matemáticas. Ante esto, Rendón (2017) en su tesis de maestría diseña un conjunto de tareas, mediadas por la HM, dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas con el fin de ampliar su horizonte de conocimientos sobre el concepto de límite funcional. Lo anterior, conduce a que el autor estudie la relación HM-FPM (formación de profesores de Matemáticas), relación que está directamente vinculada con lo expuesto en la sección 2.1.2 (y, en consecuencia, con el tercer ámbito interpretativo de la relación HM-EM).

Lo primero que menciona Rendón (2017) sobre la relación HM-FPM es que esta puede estudiarse a partir de diversas perspectivas como: (a) la visión del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, (b) los lineamientos, normativas, formaciones curriculares, etc., que versan sobre formación de profesores de Matemáticas y (c) la educación del formador de profesores. No obstante, el autor solo estudia la perspectiva del literal (a).

En ese sentido, Rendón (2017) advierte que, de una parte, la cantidad de publicaciones sobre la relación HM-FPM es poca en comparación a las divulgaciones de la relación HM-EM y, de otra parte, asevera que en muchas de tales publicaciones la relación en cuestión no tiene un papel protagónico o, mejor dicho, la HM no posee mayor trascendencia en las discusiones sobre la FPM estudiada desde conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.

Pese a esa escasa literatura mencionada, el autor reporta cuatro asuntos que proveen un panorama de relación HM-FPM, a saber: (i) la FPM se ve beneficiada al hacer un uso de la HM con fines educativos en tanto que, entre otras cosas, transforma las concepciones que el profesor tiene sobre los objetos matemáticos; (ii) la relación HM – FPM se constituye como un campo fértil de investigación con miras a impactar provechosamente la FPM; (iii) se señala algunos aportes de Guacaneme (2011), los cuales se recogen en lo expuesto en la sección 2.1.1 y por tanto, aquí no se ahondara en ellos; y (iv) se especifica un deber que tienen los profesores con respecto al uso de HM en su práctica profesional –obsérvese que esto implica aceptar el uso de la HM en la FPM– y es emplear la HM no como un ornamento informativo que sirve para introducir o finalizar un tema matemático sino como una herramienta formativa y transversal en la actividad docente.

Todo lo anterior deja en evidencia que la HM es –o puede llegar a ser– una herramienta de mucho provecho en la Educación Matemática, en el conocimiento del profesor de Matemáticas y en la formación de profesores de Matemáticas. En el mismo sentido, se asumirá que la historia del infinito matemático nutre los conocimientos, la formación de los autores de este trabajo y proveerá diversas visiones o concepciones de tal objeto matemático, y que esto redundará en el quehacer docente de los autores.

2.1.3. Indefinido, Ilimitado e infinito

En esta sección se precisarán tres conceptos que usualmente se emplean tanto en la cotidianidad como en las Matemáticas, teniendo diferentes acepciones en cada caso y, por tanto, siendo conveniente su especificación para evitar confusiones a lo largo del documento.

Los términos "infinito", "ilimitado" e "indefinido" suelen utilizarse coloquialmente de manera indistinta, incluso en ciertos ámbitos de las Matemáticas. No obstante, dichas palabras poseen significados distintos que se procederán a esclarecer, pues se considera necesario que el lector los diferencie.

En primer lugar, la palabra "**indefinido**" refiere, aunque suene redundante, a algo que no está definido. Así, por ejemplo, la división por cero es algo que no está definido dentro de las matemáticas usuales de los números reales, puesto que no hay una única regla lógica que permita definirla o, por el contrario, si se define lo más posible es que se generen varias paradojas como la que se presenta a continuación:

Supóngase que existe un número $a \neq 0$ y que dividido por 0 es igual x, de este modo se tiene:

$$\frac{a}{0} = x$$

Expresión que se podría transformar en la siguiente haciendo uso de los axiomas de campo,

$$a = 0 \cdot x$$

Entonces,

$$a = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x$$

que se puede reescribir, haciendo uso de la distributividad de la suma respecto al producto, como:

$$a = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

Restando $0 \cdot x$ a ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$a - 0x = 0x + 0x - 0x$$

Y gracias a las propiedades del campo de los números reales entonces:

$$a = 0x = 0$$

Pero desde un inicio se había tomado un $a \neq 0$, lo cual, es una contradicción. Por tanto, no existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a}{0} = x$.

Otros ejemplos de formas indefinidas son $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$, etc.

Sin embargo, el término 'indefinido' se utiliza coloquial o intuitivamente para procesos que no tienen o parecen no tener fin; por ejemplo: cuando Aristóteles se percató de que cualquier intervalo o espacio puede dividirse eternamente (Bombal, 2010). También, se usa en la secuencia $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ para indicar que crece de manera indefinida puesto que dado cualquier número n perteneciente a dicha secuencia, se puede encontrar su sucesor.

Por otro lado, el concepto de "**ilimitado"** se refiere a algo que carece de límites. Así, por ejemplo, el Universo puede verse como ilimitado pero finito bajo la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein (Hilbert, 1925; Ortiz , 1994). Para ello basta considerar que el Universo tiene un volumen finito y sin límites, lo cual según Hilbert (1925) se consigue haciendo uso de la geometría elíptica. Para explayar un poco esta idea se debe pensar en la superficie de una esfera, pues provee el modelo finito-ilimitado para un "universo" de dos dimensiones; ello en tanto que, se puede recorrer en un intervalo de tiempo finito, pero no tiene límites. Análogamente, para un universo de tres dimensiones, se podría considerar una hiperesfera[7]. Esto quiere decir, entre otras cosas, que no todo objeto ilimitado es infinito. De forma similar, se puede pensar en crear un ejemplo de que no todo infinito es ilimitado.

Para terminar, en este trabajo el **infinito** se entenderá y asumirá desde una perspectiva conjuntista derivada de la teoría cantoriana. Dicha definición alude a que un conjunto X es infinito si y solo si existe un subconjunto propio Y de X tal que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de X y Y, es decir, existe una función $f: X \to Y$ que es biyectiva. Además, desde esta perspectiva no solo hay un tipo de infinito, es decir, lo más correcto sería decir "los infinitos" (plural) y no "el infinito" (singular); sin embargo, esta idea se profundizará más adelante.

[7] Dado un espacio euclídeo E de dimensión $n+1$, A un punto de E, y un número real $r > 0$, se le llama hiperesfera de centro A y radio r al conjunto de puntos M tal que $d(A, M) = r$.

3. REVISIÓN DOCUMENTAL DEL CONCEPTO DE INFINITO

En este capítulo se presenta una reconstrucción histórica del concepto de infinito, tomando como referencia a los matemáticos o pensadores que en algún momento aludieron o trataron este concepto según lo reportado e identificado en las fuentes estudiadas para la elaboración de este proyecto, enfatizando solamente en los aspectos matemáticos.

3.1. La Edad Antigua: El infinito en la civilización griega

La Civilización Griega inició aproximadamente en el año 1200 a. C., con la Invasión dórica, y culminó en el año 146 a. C., con la conquista romana a Grecia. En esta se fundaron varias escuelas de pensamiento, entre ellas: la de Mileto (Tales, Anaximandro y Anaxímenes), la Eleática (sobresalen Parménides y Zenón), la Pitagórica (fundada por Pitágoras), el Liceo (fundado por Aristóteles), etc. En seguida se procederá a resaltar hechos, pensamientos e ideas relacionados con el infinito que tuvieron lugar en algunas de estas escuelas o por discípulos de estas.

3.1.1. El nacimiento del concepto infinito

Las primeras alusiones, menciones o reflexiones sobre el infinito se encuentran en los fundamentos filosóficos de los antiguos griegos (Gracián, 2010; López, 2014). En principio, ellos se preguntaron sobre el origen y la existencia del universo, y con el objetivo de dar respuesta a estas cuestiones surgieron dos posturas. La primera[8] consistía en que si algo existía lo hacía porque tenía límites (*e.g.,* la tierra existe en función de los límites que la definen y la separan del resto del universo). Por consiguiente, según estos filósofos, debe haber algo sin límites de donde proceda todo lo vigente; a esto denominaron el *ápeiron,* palabra que procede y es antónima de *pérata* (limitado o finito). Es decir, lo que no tiene *pérata* es *ápeiron* (ilimitado o infinito[9]). Gracián (2010) comenta que de dicho supuesto subyace una ambivalencia y es que si del *ápeiron*, y por tanto del infinito, proviene todo lo existente, entonces también de este deben proceder el mal. En ese sentido, del infinito emergen tanto las fuerzas del bien como las fuerzas del mal.

La segunda postura, perteneciente a la escuela eleática, difería de lo expuesto en cuanto que profesaba la no existencia de un algo originario para todo lo demás. De este modo, para los eleáticos el universo no puede tener un inicio ni un fin (*i.e.*, es infinito en temporalidad).

Como se observa, estos acercamientos a la noción de infinito son derivados de la necesidad de explicar cuestiones relacionadas con el mundo físico. No obstante, con el nacimiento de la Geometría y la Aritmética griega, la noción de infinito empieza a tomar tintes matemáticos y, por ende, brota el germen del infinito como objeto matemático. Por ejemplo,

---

[8] Quizá perteneciente a la escuela de Mileto.

[9] Entonces, se podría afirmar que para los griegos el infinito y lo ilimitado eran palabras indistintas.

los pitagóricos con su Aritmética creían que todo estaba compuesto por números naturales, lo cual les trajo problemas como el que se expone a continuación.

3.1.2. Los inconmensurables y la existencia de los números irracionales

Con los números naturales y racionales (vistos como razones entre números naturales) hubo la sensación entre los griegos de poder resolver cualquier problema que implicara contar y medir. Gracián (2010) menciona que los pitagóricos postulaban que todos los segmentos eran conmensurables. Sin embargo, esta idea iba en contravía con algunos resultados obtenidos del Teorema de Pitágoras. Por ejemplo, para un triángulo rectángulo e isósceles cuya medida de un cateto es una unidad, se cumple que la medida de su hipotenusa h es:

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$

En consecuencia,

$$h = \sqrt{2}$$

Sin embargo, se tiene que dos magnitudes son inconmensurables si no existe una magnitud contenida un número natural de veces en una y otra (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 19) Así que las magnitudes[10] 1 y $\sqrt{2}$ son inconmensurables, lo que implícitamente significa que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como el cociente de dos enteros. Según Gracián (2010) a estos números no racionales se les empezó a conocer como irracionales y su aparición empezó a generar descontento entre los discípulos de dicha escuela, porque recurrentemente aparecían en las diagonales de un cuadrado, las medidas de las alturas y lados de un triángulo equilátero, entre las medidas de la diagonal y del lado de un pentágono regular, etc. Este descubrimiento junto con su demostración (que se reconstruirá más adelante) fue uno de los secretos mejor guardados por la secta de los pitagóricos para evitar la caída de su escuela, lo cual finalmente terminó por ocurrir.

En la literatura revisada se encontraron dos "demostraciones" para relacionadas con la proposición: la diagonal y el lado del cuadrado no son conmensurables. Una alude a las medidas del lado y de la diagonal, mientras que la otra está ligada directamente con dichos objetos geométricos. A continuación, se hace un esbozo de esta última atendiendo a una notación contemporánea.

Reformulación: Sea $\boxdot\, ABCD$[11] un cuadrado, entonces $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ son no conmensurables.

---

[10] Aunque resulta evidente que 1 y $\sqrt{2}$ son números, se mencionan aquí como magnitudes debido a que ese era uno de los tratamientos que les daban en ese momento de la historia.
[11] Cuadrilátero determinado por los puntos A, B, C y D.

Supóngase que $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ son conmensurables, entonces, existe otro segmento j tal que $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ pueden medirse de forma exacta utilizando a j como unidad. En otras palabras, existe un segmento j de modo que j "cabe" un número exacto de veces tanto en $\overline{AD}$ como en $\overline{AC}$. De esta manera, $AD = nj$ y $AC = mj$, con n y m números enteros positivos (Ver Figura 3).

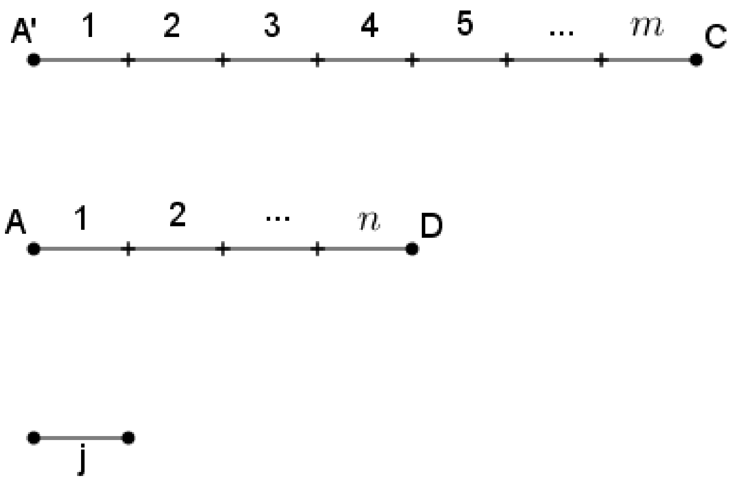

Figura 3. Suponiendo conmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado.

Una vez supuesta la conmensurabilidad de lado y la diagonal del cuadrado en cuestión, se deben construir los siguientes objetos: $\odot A_{\overline{AD}}$, $\overline{AC} \cap \odot A_{\overline{AD}} = \{E\}$ y m una recta, tal que $m \perp \overline{AC}$ por el punto E. Luego, se tendrá que trazar el punto F de manera que $m \cap \overline{DC} = \{F\}$ (Ver Figura 4).

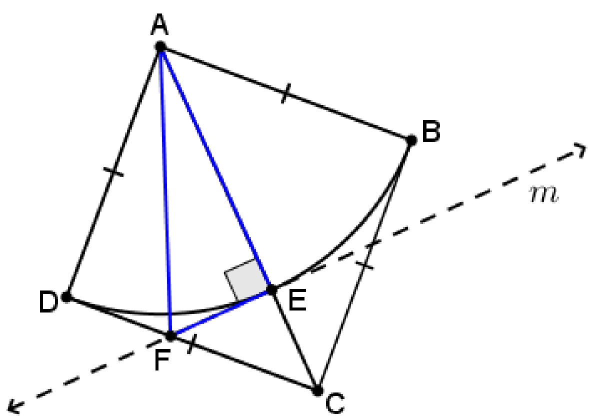

Figura 4. Cuadrado $ABCD$

Así pues, utilizando el criterio de congruencia hipotenusa-cateto, se concluye que $\triangle ADF \cong \triangle AEF$. Aplicando la definición de congruencia de triángulos a lo anterior, se deduce que $\overline{DF} \cong \overline{EF}$. Por otra parte, es fácil probar que $\Delta CEF \sim \Delta CDA$ dado que $\angle ACD \cong \angle ECF$ y $\angle CEF \cong \angle CDA$ (criterio ángulo-ángulo de semejanza de triángulos). De esta última premisa se infiere que $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DA}$, es decir, $CE = EF$ por cuanto $CD = DA$ (son lados del cuadrado $ABCD$). Como $DF = EF = CE$ se llega a que $FC = DC - CE$ es equivalente a decir $FC = nj - EC$, o sea, $FC = nj - (AC - AE)$. Además, se sabe que $AC = mj$ y $AE = AD = nj$, por tanto, $FC = nj - mj + nj$, lo cual equivale a escribir $FC = j(2n - m)$. En adición, $FC = j(2n - m)$ y $EC = j(m - n)$ son múltiplos del segmento unidad j.

En seguida, se procede a trazar un punto G que corresponda a la intersección entre la recta perpendicular a $\overline{EF}$ por F y la recta perpendicular a $\overline{EC}$ por C (Ver Figura 5). En ese sentido, el ⊡ $EFGC$ es un cuadrado, puesto que $\overline{FE} \parallel \overline{GC}$ y $\overline{FG} \parallel \overline{EC}$, es decir, ⊡ $EFGC$ es un paralelogramo y, por tanto, $\overline{FE} \cong \overline{GC}$ y $\overline{FG} \cong \overline{EC}$ (sus lados opuestos son congruentes).

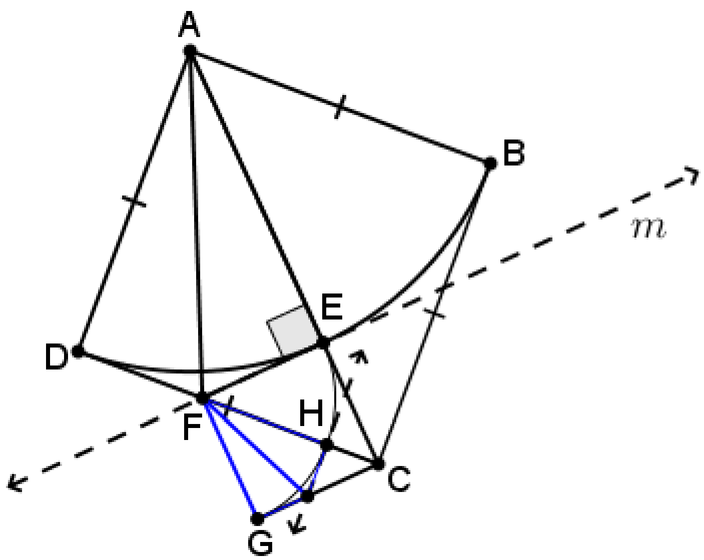

Figura 5. Cuadrado $EFGC$

En síntesis, casi todo lo realizado hasta este momento se hizo con el fin de justificar que diagonal y el lado del cuadrado $EFGC$, también, son múltiplos de j (*i.e.,* son conmensurables). Este proceso, se podrá continuar realizando de forma análoga y comprobarse que todos los nuevos cuadrados que se construyan tendrán la propiedad de que su lado y su diagonal son múltiplos de j.

En ese orden de ideas, en cada "iteración" del proceso antes descrito la diagonal y lado del cuadrado construido se van haciendo más pequeños, pero aun así continúan siendo múltiplos de j. Quizás, en el lenguaje algebraico este argumento sea mucho más entendido:

Denótense a d_k y l_k como la diagonal y el lado de un cuadrado en la k-esima repetición del proceso. Se sabe que a medida que k aumenta, d_k y l_k se hacen más pequeños. Como $d_k =$

$m_k j$ y $l_k = n_k j$, es decir, son múltiplos de j y se concluye que m_k y n_k, que son números naturales, se hacen más pequeños cada vez que se reitera el proceso. Sin embargo, esto no es posible porque cada m_k y n_k estarían formado una sucesión infinita y decreciente de números naturales.

La otra demostración es reportada por Boyer (1986), quien hace mención a la inconmensurabilidad de la medida de diagonal de un cuadrado con respecto a la medida de sus lados (Ver Figura 6). Esta fue conocida por los pitagóricos y se fundamentaba en el principio de reducción a lo absurdo del siguiente modo:

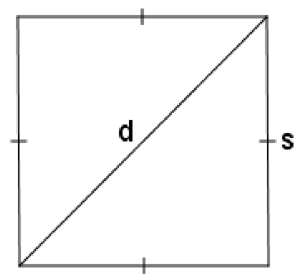

Figura 6. Cuadrado de lado s y diagonal d

1. Se supone que d y s corresponden a la medida de la diagonal y del lado de un cuadrado.
2. Se supone que d y s son dos magnitudes conmensurables.
3. Haciendo operativa la definición de conmensurabilidad se concluye que existen p y q, que son primos entre sí, de tal modo que $\frac{d}{s} = \frac{p}{q}$.
4. Utilizando el Teorema de Pitágoras se llega a que $d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2$. Es decir, $\frac{d^2}{s^2} = 2$.
5. Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad del paso 3, $\left(\frac{d}{s}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$.
6. Utilizando la propiedad transitiva de la igualdad y propiedades de la potenciación en los pasos 4 y 5 se tiene que $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Es decir, $p^2 = 2q^2$.
7. Así, p es par en tanto que p^2 tiene la forma de un par.
8. Como p es par y, p y q son primos entre sí entonces q es impar.
9. Sea $p = 2r$, con r un natural, entonces la última igualdad del paso 6 queda: $4r^2 = 2q^2$. Es decir, $2r^2 = q^2$.

10. Razonando de forma análoga al paso 7, se concluye que q es par.

11. Las afirmaciones de los pasos 8 y 10 se constituyen en una contradicción.

En conclusión, la hipótesis que d y s son siempre conmensurables es falsa debido a que el suponerla verdadera conlleva a absurdos. Una consecuencia de todo lo anterior expuesta por López (2014), citando a García y García (2005), fue la reconstrucción que hicieron los pitagóricos a su teoría de proporciones para convertirla en una transformación de áreas; de esta manera, ellos evitaron encontrarse con el problema de los inconmensurables. Babini (1967) denomina a este proceso como la *geometrización de las Matemáticas griegas* pues todos los hechos aritméticos fueron reconstruidos desde una perspectiva geométrica.

Volviendo al caso de $\sqrt{2}$, se sabe que este representa una expresión decimal infinita en la que las cifras decimales aparecen sin ningún patrón u orden aparente. Por tanto, para $\sqrt{2}$ solo se conocen aproximaciones que pueden ser tan buenas como se desee y en ese sentido, negar la existencia de los irracionales implica negar la existencia del infinito actual.

Por otro lado, Stewart (2008) presenta un ejemplo, relacionado con los inicios de la Geometría, el cual es una evidencia para aseverar que antes de los pitagóricos ya se conocía la existencia de los irracionales, o por lo menos, de números muy extraños que aparecían al intentar calcular la medida de algún segmento. Este ejemplo está dibujado en una tablilla de arcilla babilónica (Ver Figura 7). En la tableta está representado un cuadrado junto con sus diagonales. Un lado del cuadrado está etiquetado con caracteres coniformes para el número 30 en el sistema sexagesimal. La diagonal tiene dos inscripciones, a saber, $(1;\ 24,51,10)_{60}$ y $(42;\ 35,25)_{60}$. Este último corresponde al producto entre $(1;\ 24,51,10)_{60}$ y 30_{60} mientras que el primero es una buena aproximación para $\sqrt{2}$ (esta aproximación difiere en menos de $0{,}000008$ respecto a las estimaciones actuales), que representa la medida de la diagonal de un cuadrado cuya medida de un lado es una unidad.

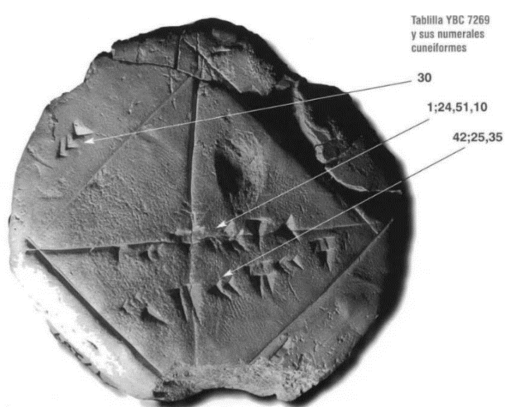

Figura 7. Tablilla YBC 7279 y sus numerales cuneiformes, tomada de Stewart (2008, p. 23)

Otro importante hecho aritmético descubierto por los griegos fue que: dado a un número entero, no existe un entero c tal que $a < c < a + 1$; pero sí existe un racional, como $c = \frac{a+(a+1)}{2}$, que cumple tal condición. E incluso, como lo comenta Gracián (2010), los griegos concluyeron que no solo existía un racional entre otros dos, sino tantos como se quiera.

3.1.3. Las paradojas de Zenón de Elea

Zenón (490-430 a. C.), discípulo de Parménides, propuso un conjunto de razones con el objetivo de dejar en evidencia la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y divisibilidad profesados por los pitagóricos, cuya doctrina se fundamentaba en que los números naturales eran el *arjé*[12] del universo, pues como lo reporta López (2014) en aquella época había dos concepciones opuestas del espacio y el tiempo. La primera fue que el espacio y el tiempo eran infinitamente divisibles (lo que está directamente relacionado con la idea de continuidad) y la otra consideraba que el espacio y el tiempo estaban conformados por pequeños intervalos no divisibles (esto supone que el movimiento se realiza de manera discreta).

Boyer (1986) escribe que el modelo de razonamiento empleado por Zenón se basaba en tomar como verdaderas las premisas del oponente y a través de una serie de deducciones lógicas llegar a concluir un absurdo. Sin embargo, dicho modelo de argumentación dio origen a las conocidas paradojas de Zenón, de las cuales algunas refieren a la imposibilidad del movimiento[13] y de la continuidad. Algunas de ellas son:

3.1.3.1. La paradoja de la dicotomía

Esta paradoja asevera que antes que un objeto pueda recorrer una distancia x, debe recorrer primero la mitad de esa distancia ($x/2$), luego, la mitad de la mitad de dicha distancia ($x/4$) y así sucesivamente a través de una cantidad infinita de subdivisiones (Ver Figura 8). De este modo, no es posible recorrer en tiempo finito tal infinidad de distancias y, por consiguiente, el movimiento no es posible.

[12] *Arjé* significa principio, este se define como el ser o sustancia de la cual está hechas todas las cosas.
[13] El movimiento es entendido como el cambio de posición de un objeto en el espacio.

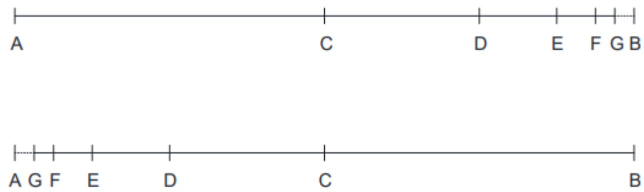

Figura 8. Representación paradoja de la Dicotomía, tomada de Guerrón (2015, p. 41).

3.1.3.2. Aquiles y la tortuga

Aquiles, un corredor con pies ligeros, se enfrenta a una tortuga en una carrera. Ellos parten al mismo tiempo, pero la tortuga tendrá una ventaja de distancia. Así, Aquiles llegará al punto de donde partió la tortuga. Cuando eso suceda, la tortuga habrá avanzado a otro lugar, no importa lo poco que sea. En consecuencia, Aquiles deberá recorrer la distancia que lo separa del nuevo punto donde está la tortuga. Pero cuando él llegue a ese lugar, la tortuga se habrá desplazado otro poco y Aquiles no la alcanzará. Dado que la tortuga siempre tendrá una ventaja, en consecuencia, Aquiles nunca la alcanzará.

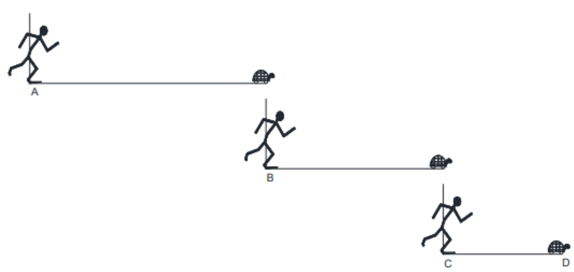

Figura 9. Representación paradoja Aquiles y la tortuga, tomada de Guerrón (2015, p.42).

El trasfondo de esta paradoja es que si el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles, luego, el movimiento no existe pues una distancia cualquiera puede ser "siempre" divida en dos partes iguales y, de manera similar, habrá tiempo suficiente para recorrer la primera parte de dicha división (*i.e.*, las magnitudes son infinitamente divisibles). Este hecho, según Zenón, es lo que ocasiona que no haya movimiento.

3.1.3.3. La flecha

Una flecha moviéndose en el aire siempre ocupa un espacio igual a sí misma y, por consiguiente, no puede estar en movimiento dado que si un objeto ocupa un lugar a sí mismo es porque está en reposo (Ver Figura 10).

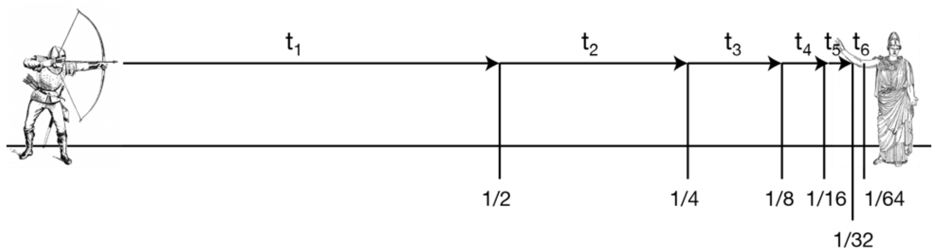

Figura 10. Representación paradoja la flecha, tomada de Meza (2019, p.1).

Esta aporía asume que: el tiempo está compuesto por instantes y la flecha está inmóvil en cada instante, con tales premisas se llega a la conclusión que el movimiento no existe. A modo de ilustración, piénsese en un conjunto de imágenes dibujadas en los bordes cuaderno (*i.e.,* un folioscopio), ahí las imágenes están en reposo, pero sí se pasa rápidamente por cada una de las hojas del cuaderno, se produce la sensación de movimiento. Esa es exactamente la idea de la paradoja de la flecha, sin embargo, es como si las hojas del folioscopio representaran los instantes de tiempo y la flecha fuera el dibujo que aparece en ellas.

Resulta cautivador analizar que, al hablar de instantes, implícitamente se está aceptando que el tiempo es infinitamente divisible, pero cuando se expresa que la flecha está en reposo parece que se alude, principalmente, a que el espacio es finitamente divisible. En ese sentido, el enunciado generador de la paradoja es: el espacio es finitamente divisible y el tiempo es infinitamente divisible. Idea con cual concuerdan Castro y Pérez (2007).

3.1.3.4. El estadio

Zenón de Elea, plantea que, en un estadio, hay tres filas, como lo muestra la Figura 11, de tal manera que la primera fila permanece en reposo, mientras que la segunda y tercera fila se mueven a una misma velocidad en magnitud, pero en direcciones opuestas (*i.e.,* se mueven con la misma rapidez).

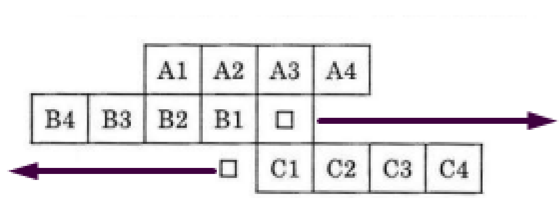

Figura 11. Filas del Estadio- Inicial adaptado de Medina (2006, p. 14).

Estos movimientos se realizan hasta alinear los cuerpos de la segunda y tercera fila con la primera, como se muestra en la Figura 12.

	A1	A2	A3	A4	
	B4	B3	B2	B1	□
□	C1	C2	C3	C4	

Figura 12. Filas del Estadio- Posición Final adaptado de Medina (2006, p. 14).

Sin embargo, el aspecto paradójico según Medina (2006), surge debido a que, aunque la longitud de los cuerpos de las tres filas es la misma, se puede inferir que la velocidad de la tercera columna es el doble que la segunda. Esto por cuanto al extremo $C1$ le tomó cuatro cuerpos estar alineado con $B4$, como se observa en la Figura 11, mientras que al $B1$ solo le toma dos estar alineado con $A4$ (*i.e.*, a $C1$ recorre el doble cuerpos que $B1$; luego $C1$ se mueve al doble de rapidez que $B1$). Lo anterior es contradictorio ya que en un inicio se había supuesto que estos se movían con la misma rapidez.

3.1.4. Aristóteles de Estagira

Aristóteles (384-322 a. C.) se percató de que cualquier intervalo o espacio continuo puede dividirse indefinidamente y que hay procesos matemáticos que parecen no tener fin (Bombal, 2010). Con base en ello, distinguió dos naturalezas del infinito, a saber, el infinito en acto y el infinito en potencia (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011). Por ejemplo, la sucesión $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ tiene infinitos términos debido a que dado un número n siempre se puede hallar su sucesor o el $n + 1$; sin embargo, una cosa es poder hacerlo y otra es, tenerlo ya hecho. Ahí, radica la diferencia entre el infinito en potencia (o potencial) y el infinito en acto (o actual). Mientras que este último refiere a un infinito acabado, el primero alude al infinito que no es un hecho, pero que tiene la posibilidad de llegar a serlo. En la opinión de Gracián (2010) hubiese sido mejor denominar al infinito actual como "infinito real" y al infinito potencial como "infinito teórico" en tanto que estos nombres captan más la esencia de ambos conceptos.

Por su parte, López (2014) es un poco más técnica en su lenguaje al "definir" las dos formas de infinito; la autora explica que el infinito visto como un proceso de crecimiento o subdivisión que nunca termina es el infinito potencial y el infinito como una totalidad completa que existe en cierto instante es el infinito actual (p. 282).

Hay que señalar que, pese a que Aristóteles hizo este significativo aporte, no reconoció la existencia del infinito actual y escribió que era imposible que el infinito existiera como ser en acto (Gracián, 2010; Bombal, 2010 y Piñeiro, 2013). Él justifica que no hay magnitudes infinitas en acto y, por tanto, no existe esta clase de infinito. Otro argumento que utiliza el estagirita para negar la existencia del infinito en acto es que, si un segmento fuera una colección colineal de puntos, entonces, carecería de longitud; ello en tanto que un punto tiene longitud cero y cualquier objeto conformado por estos tendría una longitud dada por suma de tantos ceros como puntos tenga tal objeto. Aristóteles dice que aun cuando la cantidad de ceros que se sume sea infinita, el resultado siempre es cero, pero se sabe que todo segmento tiene longitud mayor a cero. Esto es una contradicción a la que Piñeiro (2013) denomina la paradoja de Aristóteles, de la cual se hablará más adelante.

En el tercer libro de *Physica*, Aristóteles realizó críticas a la paradoja de la dicotomía y según muchos autores, estas conforman una de las contribuciones más importantes al concepto de infinito (Gracián, 2010). Aristóteles menciona que la palabra infinito admite dos acepciones: el ser infinito en extensión y el ser infinito en divisibilidad, y que en tal paradoja se confunden ambas acepciones, esto porque al ser aplicados al tiempo y al espacio hacen que un espacio ilimitado pueda ser recorrido en un tiempo finito. Aristóteles declara que en el espacio continuo donde se desplaza el móvil hay un número infinito de mitades, pero solo en potencia, no en acto.

3.1.5. Anaxágoras de Clazomene

Arrigo *et al.* (2011) aseveran que Anaxágoras (500-428 a. C.) dedicó su vida a reflexionar sobre la materia y sus componentes y así surgió el término *homeomorias*, utilizado por él para aludir a elementos infinitamente pequeños. Anaxágoras dijo que (i) en lo muy pequeño no hay mínimo, dado que siempre hay una parte más pequeña y (ii) en lo muy grande no hay un máximo, porque siempre hay una parte más grande. Ambas aserciones de este matemático se relacionan directamente con lo que Aristóteles denominó el infinito potencial; pero -para fines de este apartado- se debe explicitar que la primera se aproxima demasiado al problema de divisibilidad. Así, con dichas afirmaciones, Anaxágoras, refutó las paradojas propuestas por Zenón y las conclusiones de Parménides (maestro de Zenón) por cuanto tales aporías se basaban en la divisibilidad finita o infinita para argumentar la no existencia del movimiento.

3.1.6. Demócrito de Abdera y el átomo

Demócrito (460-370 a. C), alumno de Leucipo (*siglo V* a. C.), afirmó la existencia del vacío y el movimiento de los átomos dentro del mismo (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011). Esta aserción va en contravía con lo dicho por Parménides (530-515 a. C.) cuando afirmaba que el Todo es uno, inmóvil e infinito, ya que, si tuviera límite, este sería el vacío. Tal concepción del Todo (o mejor dicho del universo) como infinito excluye la existencia del vacío; es más, Parménides reduce este hecho (la existencia del vacío) a un absurdo al suponer que el universo es finito.

Por otro lado, Demócrito sugirió que las circunferencias y los círculos son, en realidad, polígonos regulares con infinitos lados infinitamente pequeños[14] (Castro y Pérez, 2007). Ello permite vislumbrar que, al menos desde la perspectiva de Parménides, el infinito en acto existe,

[14] Posiblemente esta tesis fue retomada por Arquímedes en su obra “Sobre el círculo” para demostrar que el área de este es igual a πr^2.

pues menciona que cuando se habla de una circunferencia (o un círculo) se habla de un proceso infinito terminado (*i.e.*, dado un polígono regular con n lados, cuando n tiende a infinito, el resultado es una circunferencia). Además, identificó los dos problemas de indivisibilidad infinita, a saber:

I. Desde la perspectiva teórico-matemática cada cuerpo es infinitamente divisible en partes.

II. Desde la perspectiva física concluyó que todo cuerpo tiene un límite al momento de dividirlo en partes, a dicho límite le llamó átomo (sin división).

3.1.7. Euclides de Alejandría

La obra *Elementos* se caracteriza por ser fiel, o por lo menos intentar al máximo, a la condición de Aristóteles de no reconocer la existencia del infinito actual. Euclides (325-265 a. C.) a todo costo evitó hacer mención explícita a este concepto: lo evadió. De este modo, por ejemplo, Euclides en el segundo postulado expresa, según la traducción reportada por Hernández (2017): “Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado” (p. 5); ello con el fin de no utilizar el término *recta* que tácitamente alude al infinito en acto (es un conjunto con infinitos puntos) y hacer una evidente referencia al infinito potencial.

Resulta interesante observar que Euclides no considera a un segmento como un conjunto de puntos colineales sino como un todo. Lo anterior es consecuencia de la fidelidad profesada por Euclides a la hipótesis de la no aceptación del infinito actual. Además, el célebre autor en la tercera definición de su libro concibe a los puntos como extremos de una línea, es decir, su función es ser terminaciones de una línea. Lo anterior difiere en gran manera con el sistema teórico (ST) que se maneja en los textos de Geometría. Por ejemplo, la mayoría de ST contemporáneos se caracterizan porque la recta precede al segmento y este se constituye un subconjunto de ella; sin embargo, en *Elementos*, el segmento antecede a la recta y aún más, potencialmente es una recta.

El famoso quinto postulado de Euclides es otro ejemplo, en el cual Euclides evita referirse al infinito en acto. Para ello, Euclides, lo enuncia de una manera especial, similar a la siguiente:

> Si un segmento prolongable continuamente por derecho, al caer sobre los otros dos segmentos prolongables continuamente por derecho, forma ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, los dos segmentos oportunamente prolongables, se encuentran de aquella misma parte en la cual se encuentran los ángulos menores de dos rectos (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 30).

Como se mencionó en un inicio Euclides intentó al máximo ser fiel a lo dicho por Aristóteles, pero en su obra –*Elementos*– hay algunas proposiciones en las que le resultó imposible apartar el concepto de infinito. Este el caso de la proposición XVI del tercer libro, que dice:

> La recta perpendicular al diámetro de un círculo en su extremo cae fuera del círculo: y entre ella y la circunferencia no se puede tirar otra recta; o lo que es lo mismo, la circunferencia del círculo pasa entre la perpendicular, y otra recta, que con el diámetro forman un ángulo agudo, cuan grande se quiera; o la que forma con la perpendicular un ángulo, por pequeño que sea.

Esta proposición se podría interpretar actualmente como: (i) si una recta es perpendicular a un radio de la circunferencia, por el extremo que está contenido en ella, entonces la recta es tangente a la circunferencia por dicho punto; (ii) dado un punto perteneciente a una circunferencia, existe una única recta tangente a la circunferencia por tal punto; y (iii) la medida del ángulo contingente[15] (es el que se forma entre la tangente y la circunferencia) es menor que la medida de cualquier ángulo agudo (Ver Figura 13). Esta última aserción resulta interesante porque habla de un ángulo mixtilíneo cuya magnitud (ε) es mayor que cero, pero menor a la magnitud de cualquier ángulo agudo (δ). Por ejemplo, si $\delta = 0{,}1$ entonces $0 < \varepsilon < 0{,}1$; si $\delta = 0{,}01$ luego $0 < \varepsilon < 0{,}01$; si $\delta = 0{,}001$ por tanto $0 < \varepsilon < 0{,}001$ y este proceso se podría continuar infinitamente. Así, el ángulo de contingencia es un ángulo infinitesimal (infinitamente pequeño).

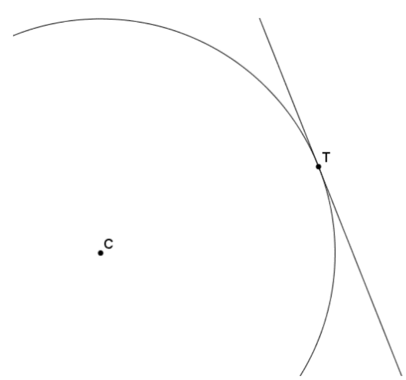

Figura 13. Ángulo de contingencia.

[15] Bajo las definiciones proporcionadas por Euclides, en el Libro I, un ángulo plano es la inclinación de dos líneas otra que se encuentran mutuamente en un plano y no están directamente (Definición I.7). Sin embargo, para este autor una línea es una longitud sin latitud (Definición I.2), lo que quiere decir que una línea puede ser curva o recta. En ese sentido, un ángulo plano podría estar conformado por líneas curvas, rectas o bien, por curvas y rectas.

Esta situación contradice el axioma arquimediano de las magnitudes, que es expresado en la definición cuatro del quinto libro de Euclides como:

> Se dice que dos cantidades tienen razón entre sí, cuando la menor multiplicada puede exceder la mayor.[16]

Esto es, las magnitudes A y B tienen razón, si existen dos números naturales m y n de modo que $mA > B$ y $nB > A$. Sin embargo, como se ha mencionado, para las magnitudes del ángulo contingente y del rectilíneo se cumple siempre que $\varepsilon < \delta$; en consecuencia, no existe ningún número natural cuyo producto con la magnitud ε sea mayor que δ. Así, los ángulos de contingencia no cumplen el axioma de Arquímedes (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011).

Otra proposición que se cree importante resaltar de *Elementos* es la XX del noveno libro. Lo anterior, porque Euclides demuestra que los números primos son potencialmente infinitos y esto refuerza la idea de la profunda influencia aristotélica en el razonamiento hipotético-deductivo que caracteriza dicha obra. La proposición dice: “Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos” (Batista, 2018, p. 42).

3.1.8. Eudoxo de Cnido

Uno de los grandes aportes de Eudoxo (390-337 a. C.) relacionado con el infinito es el axioma de continuidad, el cual dice que dos magnitudes tienen razón solo si se puede encontrar una ellas que exceda a la otra. Ante esto, Babini (1967) subraya que este postulado nace tras el fracaso de los griegos de expresar con números naturales la razón entre cantidades inconmensurables. La importancia de este hecho radica en que permite demostrar indirectamente una conjetura que, según Gracián (2010), es considerada una de las más importantes en la historia de las Matemáticas. Dicha proposición permitió calcular áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. Eudoxo, la construye del siguiente modo:

> Si de cualquier magnitud se sustrae una parte superior o igual a la mitad, y si del resto se sustrae una parte superior o igual a su mitad, y si se continua este proceso de subdivisión quedará una magnitud más pequeña que cualquier magnitud dada de la misma especie (Gracián, 2010, p. 62).

En concordancia con lo anterior, Babini (1967) agrega que el método expresado en esta proposición, conocido como método griego de exhaución, tiene como fin demostrar y no descubrir, en cuanto que su aplicación requiere saber previamente el resultado que se quiere probar. El método consiste en inscribir una región poligonal que se aproxime a la región cuya

[16] Esta proposición también es reportada en el libro de Arquímedes titulado “Sobre la esfera y el cilindro”, pero a diferencia de Euclides, Arquímedes lo enuncia en calidad de axioma (Vera, 1970, pág. 27). De ahí que hoy en día sea conocido como postulado de Arquímedes.

área quiere determinarse, el área de esta región debe ser fácil de calcular; luego, se elige otra región poligonal que de una mejor aproximación y continúa el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, lo anterior en pro de "llenar" la región dada (Apóstol, 1999). Esa descripción solo aplica para el cálculo de áreas. Sin embargo, para el proceso de cálculo de volúmenes es totalmente análoga.

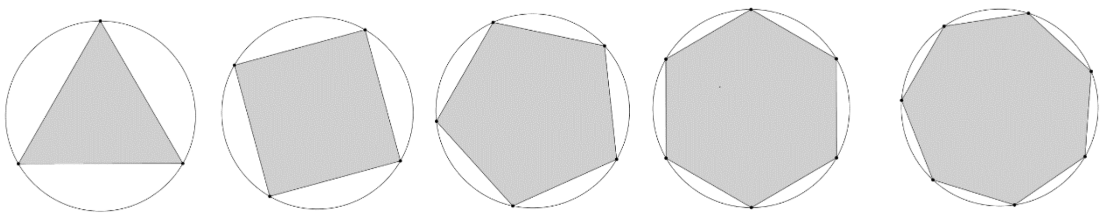

Figura 14. Primeras etapas del método de exhaución para determinar el área de un círculo.

Según López (2014), a Eudoxo también se le debe la noción de "tan pequeño como se quiera", lo cual es un antecedente de lo ella denomina el paso al límite.

3.1.9. Arquímedes de Siracusa

Arquímedes (287-212 a. C.) es el matemático griego que sigue cronológicamente a Euclides (Vera, 1970; Rey Pastor y Babini, 1984). Vera (1970) hace una interesante distinción entre Euclides y Arquímedes y es que mientras Euclides se preocupó por ordenar, sistematizar y completar la labor de los antecesores, Arquímedes planteó problemas nuevos que requerían métodos diferentes a los conocidos para ser solucionados. Actualmente, algunos escritores denominan al método de exhaución como método de Arquímedes, sin embargo, el mismo Arquímedes se lo atribuye a Eudoxo, su maestro. Es evidente que Arquímedes empleó este método para obtener muchos resultados que son conocidos hasta el día de hoy, por lo cual no es raro que al hablar de tal método se haga alusión principalmente a Arquímedes.

Hay que aclarar que, al contrario de lo indicado por el nombre de este método, en el proceso nunca se llega a agotar, con los objetos geométricos inscritos o circunscritos, la figura de la cual se desea estudiar su magnitud. A decir verdad, la exhaución aspira resolver el problema de la no exhaustividad del infinito (González y Vaqué, 1997). De lo anterior, surge una gran pregunta y es ¿cómo demostraba Arquímedes que las áreas o los volúmenes encontrados corresponden a la magnitud de la figura geométrica? Pues, después de la lectura de algunas obras del siracusano se logra inferir que:

i. Se debe conocer la magnitud de la figura.

ii. Después, se utiliza el modelo de razonamiento *Modus Tollendo Ponens* para descartar que el valor encontrado no es mayor ni menor a la magnitud de la figura.

También, se puede describir que el método de exhaución griego fue utilizado por Arquímedes de dos formas: por compresión y por aproximación. La primera es más un esquema de demostración que, en notación actual, consiste en:

Para demostrar que una magnitud geométrica A (longitud, área o volumen) es igual a otra magnitud B. Lo primero es basarse en la geometría de la figura A con el fin de construir dos sucesiones de figuras geométricas, a saber, $\{I_n\}$ monótona creciente (inscritas en A) y $\{C_n\}$ monótona decreciente (circunscritas a A) de tal manera que $I_n < A < C_n$ para todo n, entonces se cumple que:

i. Para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n > N$, $C_n - I_n < \varepsilon$.

ii. Para todo n, $I_n < B < C_n$.

Entonces, para probar que no se cumple que $A \neq B$. Así:

i. Si $A > B$. Sea $\varepsilon = A - B$, entonces existe un n tal que $C_n - I_n < \varepsilon = A - B$. Dado que $A < C_n$, luego, se sigue cumpliendo la desigualdad $A - I_n < A - B$. Ello verifica que $B < I_n$, lo cual contradice $I_n < B$.

ii. Si $A < B$. Sea $\varepsilon = B - A$, entonces existe un n tal que $C_n - I_n < \varepsilon = B - A$. Como $I_n < A$, en consecuencia, $C_n - A < B - A$. Ello permite concluir que $C_n < B$, lo cual contradice que $B < C_n$.

En adición, $A = B$.

Por otro lado, Arquímedes utilizó el método de exhaución por aproximación cuando consideró una magnitud de una figura como el límite[17] al cual se aproximan cada vez más una serie de figuras inscritas y circunscritas en la misma.

López (2014) menciona que Arquímedes, en su obra *El Método*, investigó el número infinito de objetos considerando tres partes de magnitudes infinitas en número y argumentó que dichas eran iguales en número. Lo anterior sugiere, por un lado, una leve alusión al concepto de cardinal de un conjunto que fue introducido hasta el *siglo XIX* y, por otro lado, que no todos los objetos infinitos en número son iguales.

3.2. El infinito en la Edad Media

La Edad Media es un periodo de la historia comprendido entre los años 476 (caída del imperio romano de Occidente) y 1492 (con la invención de la imprenta, con la toma Constantinopla por los turcos y con la llegada los europeos a América).

[17] Esto en el sentido geométrico.

Según López (2014) las ideas Aristotélicas con respecto al infinito duraron vigentes 2000 años aproximadamente puesto que, durante la Edad Media no hubo avances con relación al infinito desde un enfoque matemático; en cambio se presentaron grandes discusiones sobre la naturaleza del infinito, percibiéndolo como propiedad (relacionándolo con cualidades religiosas como la omnipresencia), de tal manera que se hace presente en la idea de la existencia eterna del mundo, en lo infinito e inmutable que es Dios o lo infinito que es el tiempo, en el que ni el mundo, ni el tiempo, ni el mismo Dios, tenían principio ni fin.

Estas ideas fueron expresadas por grandes pensadores cristianos y teólogos de esta época; uno de los pensadores fue Tomás de Aquino (1224-1274) teólogo y filósofo cristiano, quien aceptó la existencia de un Dios y su filosofía era un intento de unir los pensamientos de Aristóteles con el cristianismo, ya que este acepta la infinitud y la eternidad de Dios, pero al mismo tiempo niega cualquier posibilidad de la existencia del infinito actual.

Por lo tanto, Aquino sugiere que:

> Si se pudiesen concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, de manera que formasen una totalidad actualmente definida, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían un número finito y se produciría una contradicción (Zellini, 2003 citado en García, 2014, p. 239).

En otras palabras, Tomás de Aquino no aceptaba que la unidad pudiese estar conformada de infinitos indivisibles, ya que si existiera la posibilidad de que los indivisibles formaran una unidad estos tendrían que poder contarse, sin embargo esto es una contradicción ya que no se podría contar los indivisibles (no tomando en cuenta la existencia del infinito continuo) ya que estos son infinitos; además no se puede decir que la cantidad de indivisible es un número infinito ya que esto es una noción que carece de sentido puesto que este concepto está ligado al infinito actual, el cual se rechazaba completamente.

Además, Santo Tomas postuló la existencia de dos tipos de infinito: un infinito que depende de la forma y otro infinito que depende de la idea de materia, ya que, para él, la esencia y la existencia de las cosas es la separación entre el infinito en acto y el infinito en potencia. Bajó este razonamiento Aquino afirmaba que solamente Dios era esencia, existencia y al mismo tiempo acto.

Según García (2014), uno de los grandes opositores de la idea del fin del mundo fue el teólogo Filipón de Alejandría (490-566) quien basó sus trabajos en las obras de Aristóteles. Además, negó totalmente la idea de que el mundo pueda ser infinito, aunque esto le generó algunas contradicciones, como las siguientes:

> Si el mundo no hubiera tenido principio, se tendría que afirmar que el número de hombres engendrados hasta los tiempos de Sócrates tendría que ser infinito; más al

agregar el número de hombres engendrados 60 desde Sócrates hasta hoy se obtendría algo más grande que el infinito (Filipón, 1990, citado en García, 2014, p. 53).

Ante esto se puede afirmar que Filipón no aceptaba que un infinito puede ser mayor que otro, puesto que como él rechazaba el infinito en acto, no se podía comparar el tamaño de algo que no tiene fin, de manera que estas ideas tenían un claro fundamento aristotélico.

Otra paradoja propuesta por Filipón con la finalidad de demostrar la imposibilidad de que un infinito sea mayor que otro fue la siguiente:

> Cuando el Sol completa una revolución, la Luna ha efectuado 12 revoluciones; suponiendo que el mundo no tuviera principio, es preciso admitir, de una manera u otra, que las revoluciones del Sol son infinitamente numerosas y que, por consiguiente, las revoluciones de la Luna representan un infinito doce veces más grande que otro infinito ¡absurdo! (Filipón, 1990, citado en García, 2014, p. 53).

Las anteriores situaciones son paradójicas, dado que para Filipón no es posible que se pueda comparar diferentes infinitos, ya que para poder hacerlos deben tener el mismo tamaño, y estas magnitudes son infinitamente numerosas, de tal manera que él afirmaba que el infinito solamente existía de manera potencial.

En relación con las Matemáticas, se identificó un uso del infinito reportado por Castro y Pérez (2007), quienes mencionan que Abu Alli al-Hasan (965-1038) quién intento calcular el área bajo la curva de la forma x^n con $0 < x < b$, lo que lo condujo a la siguiente expresión reescrita con simbología moderna:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^k\right)$$

En resumen, se podría explicitar que, en la Edad Media, la noción de infinito tuvo un cambio dado que se trabajó desde una perspectiva religiosa y no plenamente filosófica, como en sus inicios. Evidencia de ello es que el término infinito es reemplazado por otros términos como plenitud y eternidad aludiendo a una deidad. Además, en relación con el infinito matemático se evidenció, en la literatura revisada, que no hubo muchos usos.

3.3. El infinito en la Edad Moderna

La Edad Moderna es el tercer periodo usual de la historia que inició en 1492 (con la caída de Constantinopla) y culminó en 1776 (con el estallido de la Revolución Francesa). En esta época, se volvieron a generar discusiones en torno al infinito que, a diferencia del Medioevo, no estaban relacionadas únicamente con el ámbito religioso. Además, se retomó y se profundizó en muchos trabajos desarrollados por los pensadores de la Civilización Griega, entre ellos, algunos relacionados con el infinito. A continuación, se resaltará hechos, pensamientos e ideas conexos con el concepto de infinito que tuvieron lugar en la Edad Moderna.

3.3.1. Galileo Galilei

Según Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011, p. 55) el infinito en acto tiene gran presencia en Galileo (1564-1642). Los autores mencionan que para él tanto las líneas como los objetos concretos de la naturaleza están formados por un continuo de partes pequeñas y que en su *obra Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, publicada en 1638, reportó gran parte de sus consideraciones acerca de las paradojas del infinito. Una de estas paradojas sembró las semillas de la definición de conjuntos infinitos y le dio a entender que los atributos de mayor, menor e igual no tienen lugar en las cantidades infinitas (Piñeiro G. E., 2013).

En tal "paradoja", Galileo consideró dos colecciones, la primera corresponde a los números naturales $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ y la segunda refiere a los números cuadrados $(0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$, para hacer una correspondencia biunívoca entre cada elemento de las colecciones (0 con 0, 1 con 1, 2 con 4 y así sucesivamente). Ello condujo a que Galileo pensará que las dos colecciones tienen igual cantidad de elementos, lo cual contradecía la idea intuitiva de que los cuadrados son menos que los naturales (el todo es mayor que su parte).

Sin embargo, como se explicará más adelante, esta proposición no es realmente una paradoja ya que tres siglos más tarde, se hallará que la propiedad de que el todo es mayor que su parte no es válida para conjuntos infinitos. Otra paradoja que le surgió a Galileo al utilizar la correspondencia biunívoca fue:

Dados dos segmentos de recta de diferente longitud, se puede hacer una correspondencia biunívoca entre cada uno de ellos, concluyendo que la parte puede ser del mismo tamaño del todo, cuando se habla de magnitudes infinitas (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 56).

La simiente matemática de Galileo dio frutos, también, con los trabajos de sus alumnos más sobresalientes, Cavalieri y Torricelli, de los cuales se hablará posteriormente.

3.3.2. Luca Valerio

Valerio (1553-1618) continuó trabajando con el método de exhaución arquimediano y encontró que este se puede aplicar a cualquier arco de curva creciente o decreciente, ello en cuanto que Arquímedes solo trabajó con arcos de curvas conocidas en su época (arcos de circunferencia, arcos de parábolas, etc.). De manera genérica se puede afirmar que Valerio circunscribe e inscribe n rectángulos en los arcos de curva y cuando n se hace muy grande, la diferencia entre el área de los rectángulos inscritos y circunscritos se hace muy pequeña. De esta manera las sumas de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos tienden al área delimitada por el arco de curva. Por otra parte, se debe mencionar que la condición de monotonía es impuesta por Valerio, según Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), para sortear el problema que se generaba en los puntos de inflexión de una curva. A modo de ilustración (utilizando la notación y conceptos actuales), obsérvese la Figura 15.

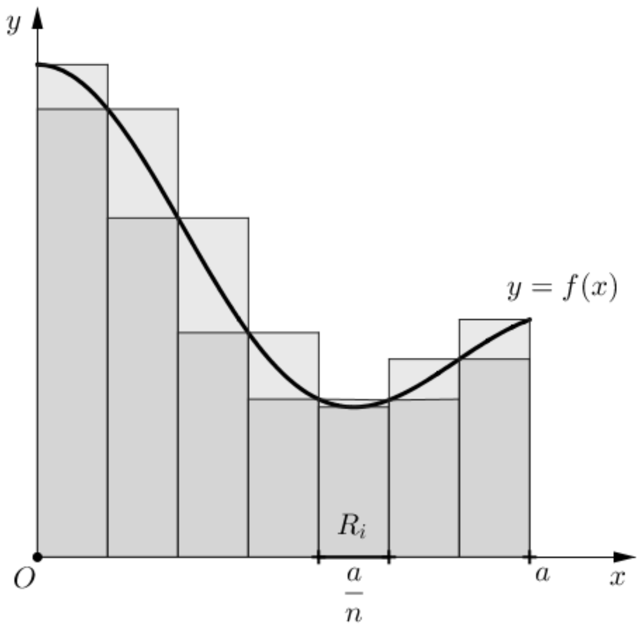

Figura 15. Rectángulos inscritos y circunscritos en una curva f.

En la figura, para el intervalo R_i se cumple que la altura del rectángulo inscrito es el $\min_{x \in R_i} f(x)$ y para el rectángulo circunscrito es el $\max_{x \in R_i} f(x)$. Hay que observar que el x de R_i para el cual la curva alcanza su mínimo, no corresponde al extremo izquierdo de dicho intervalo como sí acontece cuando se trabaja con una curva monótona. Ahí radica la dificultad que intentó solventar Valerio, pero no lo logró, por tal motivo condicionó los arcos de curvas a ser estrictamente crecientes o decrecientes. Tal "fracaso" no se debió a su incapacidad para encontrar una solución, sino que simplemente no contaba con los conceptos matemáticos necesarios para hacerlo.

3.3.3. Johannes Kepler

Rendón (2017) señala que Kepler (1571-1630) se desligó, en cierta manera, de las complicadas demostraciones elaboradas por Arquímedes. Así, Kepler no se interesó por el rigor ofrecido de la doble reducción a lo absurdo de la exhaución, sino por las ideas intuitivas del paso al límite. De este modo, Kepler, en su obra *Stereometria Doliorum Vinariorum,* publicada en 1615, expresó de manera sistemática, pero no rigurosa, el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas (López, 2014). Además, identificó una curva como una suma de rectas infinitamente cortas y un área con la suma de rectángulos infinitamente numerosos e infinitamente pequeños (estos son los elementos indivisibles). El método que empleó para tal fin consiste en imaginar que una figura geométrica dada se puede descomponer en figuras infinitamente pequeñas y con formas convenientes, ello con el objetivo de calcularles fácilmente el área o volumen; después, se calcula la suma de todas las áreas o volúmenes para obtener la magnitud de la figura dada.

3.3.4. Bonaventura Cavalieri

Cavalieri (1598 – 1647) desarrolló un método geométrico para el cálculo de cuadraturas denominado, "el método de los indivisibles", el cual publicó en su obra *Geometría Indivisiblium continourun quadam nova ratione promota* (La geometría indivisible continúa en un nuevo sistema) en el 1635 (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011; López, 2014). La idea central de este método es considerar el área de una figura plana como un conjunto infinito de cuerdas paralelas, las cuales son vistas como un rectángulo de dimensión infinitesimal: el elemento indivisible. En ese sentido, un área es la suma de infinitos segmentos y un volumen es la suma de infinitas superficies planas[18]. Este método, también, fue utilizado por Cavalieri para formular el principio que hoy lleva su nombre. Principio que tiene dos versiones, una para dos dimensiones y otra para tres:

> *Principio de Cavalieri 2D.* Si dos superficies cortadas por un sistema de rectas paralelas generando segmentos correspondientes isométricos, estas tienen una misma área; si los segmentos correspondientes tienen una relación constante, entonces, existe la misma relación entre las áreas (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011, p. 59).
>
> *Principio de Cavalieri 3D.* Si dos sólidos cortados por un sistema de planos paralelos generan secciones correspondientes de la misma área, éstos tienen el mismo volumen. Si las secciones correspondientes tienen una relación constante, entonces, existe la misma relación entre los volúmenes (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011, p. 59).

Sin embargo, aunque Cavalieri en un inicio utiliza el infinito, finalmente lo elimina reemplazándolo por la intuición geométrica (López, 2014, p. 286). Por otra parte, hay que resaltar una idea implícita sobre la cual se sustentan dichos principios y, en general, el método de los indivisibles: el concepto de continuidad[19]. Rendón (2017) comenta que ese fue uno de los problemas al que se tuvo que enfrentar Cavalieri, en cuanto que sus principios presentan inconvenientes puesto que esas adiciones no se pueden evidenciar en la figura geométrica de la cual se desea estudiar su área o volumen, ni tampoco ver cuál es su comportamiento con el todo que conforman. Este hecho, también es resaltado por López (2014), no obstante, la autora añade que este problema decantó en otra complicación y es cómo justificar el paso de

[18] Cavalieri tampoco se interesó por las demostraciones arquimedianas derivadas del uso del método de exhaución, sino que afirmaba que los resultados que obtenía se podrían demostrar haciendo uso de ellas.

[19] Para Cavalieri, una recta está conformada por puntos, un plano por rectas y un sólido por superficies planas (López, 2014).

entidades sin dimensión a entidades unidimensionales, de objetos unidimensionales a bidimensionales y de bidimensionales a tridimensionales.

3.3.5. Evangelista Torricelli

Torricelli (1608- 1647) continuó trabajando sobre el método de indivisibles de Cavalieri y encontró que no necesariamente el elemento indivisible debe ser recto para que el método funcione (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011). Inclusive, el elemento indivisible puede ser mixto (*i.e.,* ser tanto curvo como recto). Así, por ejemplo, un círculo se puede ver como el resultado de la unión de infinitas circunferencias concéntricas, lo que quiere decir que el elemento indivisible es una circunferencia; sin embargo, estas circunferencias poseen una longitud de arco que se puede representar con segmentos que tengan la misma magnitud, como se muestra en la Figura 16.

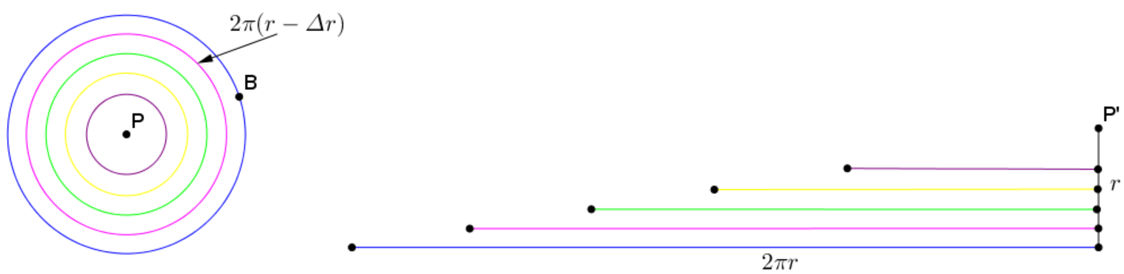

Figura 16. Primeros pasos para hallar el área de un círculo - método de los indivisibles mixtos.

Tales segmentos se pueden unir para generar un triángulo rectángulo (o mejor, una región triangular), en consecuencia, el elemento indivisible para dicho triángulo es un segmento (Ver Figura 17). Ahí, se observa que no solamente se utiliza un elemento indivisible para determinar el área del círculo sino dos, uno curvo y otro recto (*i.e.,* mixto).

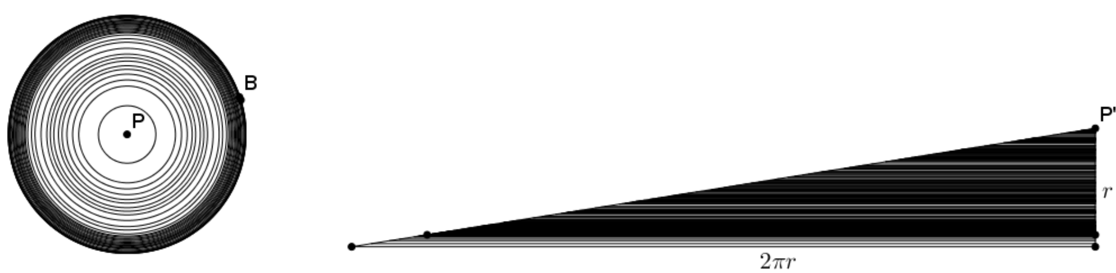

Figura 17. El área de un círculo a través de los métodos indivisibles mixtos

Otro hallazgo de Torricelli relacionado con el infinito fue observar que dos circunferencias concéntricas, no importando la medida del radio, tienen la misma cantidad de puntos. Es decir, dadas $\odot P_n$ y $\odot P_m$, a cada punto $S \in \odot P_n$ le corresponde un punto $S' \in \odot P_m$ y viceversa (Ver Figura 18)

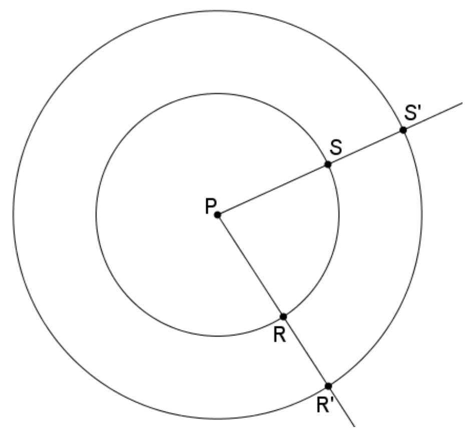

Figura 18. Correspondencia biunívoca entre los puntos de dos circunferencias concéntricas.

Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) mencionan que Torricelli trató al infinito explícitamente en el sentido actual y por ello encontró algunos importantes resultados como los mencionados. Todos estos métodos fueron rechazados por la comunidad matemática lo que ameritó que gran Blase Pascal (1623-1662) interviniera y advirtiera que en dichos métodos estaba presente la idea de lo infinitamente pequeño e introdujo este concepto en las Matemáticas (López, 2014). En ese sentido, se puede considerar que los elementos indivisibles, expuestos con anterioridad, son el germen de los objetos infinitesimales, y Rendón (2017) comenta que, tras su algebrización, estos se trasformaron en un nuevo objeto matemático: los infinitesimales, entendidos como elementos matemáticos infinitamente pequeños.

3.3.6. El nacimiento de la Geometría Analítica

La invención de la simbología algebraica tuvo un papel determinante en la historia de la Geometría Analítica debido a que, gracias a ella, se creó un puente entre la Geometría y el Álgebra, lo que posibilitó, entre otras cosas, que una familia de curvas se pudiera representar en una sola fórmula (Castro y Pérez, 2007; Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011). Este hecho abrió completamente las puertas para la nueva matemática infinitesimal.

Apolonio de Perga es considerado como el precursor de la Geometría Analítica, en la antigua Grecia, ya que estudió las secciones cónicas con métodos que sirvieron como inspiración para crear los sistemas coordenados. El primero en darse cuenta, comenta Castro y Pérez (2007), en que la posición de un punto en el plano es determinada por su distancia a los ejes coordenados fue René Descartes en su obra *Geometría* (p. 53). De esta manera, las curvas geométricas empezaron a verse como colección y, por ende, como un agregado infinito.

Para explanar un poco esta idea, considérese la ecuación del tipo $ax + by + c = 0$, con a, b y c números reales fijos y $a\ , b\ \neq 0$; cada par de números reales (x, y) que satisface dicha ecuación pertenece a una recta y viceversa. Como son infinitas las parejas de números reales que satisfacen esa forma de ecuación entonces, también, deben ser infinitos los puntos de tal recta. En ese sentido, como lo comenta Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) "el método de la geometría analítica obliga a considerar una recta como una infinidad actual de puntos" (p. 65).

Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) señalan que Descartes hace uso del infinitésimo para resolver el problema de la determinación de la recta tangente a una curva por un punto P (Ver Figura 19). Para ello, solo considera curvas algebraicas de segundo grado[20] y una recta secante a estas. Sean P y Q los puntos por donde pasa la recta secante. Cuando Q coincide con P, el resultado será que la recta que en principio era secante, ahora es tangente a la curva por el punto P (que es el mismo que Q).

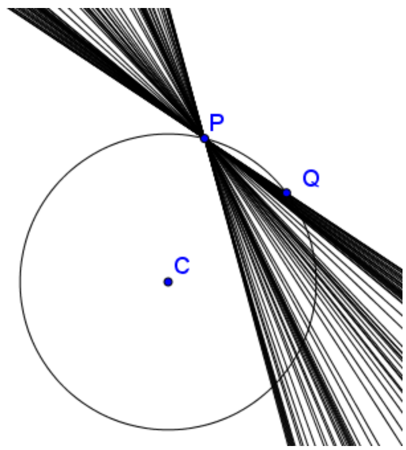

Figura 19. Método de Descartes para hallar la recta tangente a una curva por un punto P.

Por su parte, Pierre de Fermat (1697-1665), otro matemático implicado en el surgimiento de la Geometría Analítica, generó un método para determinar la tangente a una curva en sus puntos máximos o mínimos. No obstante, antes de hacer mención a este algoritmo, resulta necesario explicar su método para encontrar los máximos y mínimos de una curva. Dicho método, a grandes rasgos, se podría traducir en: dada una curva $y = f(x)$, se debe hallar un número x_1 que cumple la condición de ser la abscisa de un punto máximo o mínimo de f (Ver Figura 20). Para ello, Fermat, parte de suponer la existencia de x_1 y considera la abscisa $x_1 + \varepsilon$ con ε una cantidad infinitesimal (o infinitamente pequeña). Luego, intuye $f(x_1) \approx f(x_1 + \varepsilon)$[21] y multiplica ambos lados de la anterior expresión por el inverso multiplicativo de ε; continúa efectuando las operaciones necesarias y elimina todos los términos que contienen ε. Termina obteniendo una ecuación cuyas soluciones son las abscisas de los máximos y mínimos de la curva f (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011).

---

[20] Las curvas algebraicas de segundo grado son las parábolas, las elipses, las circunferencias e hipérbolas.

[21] Aunque, según Arrigo *et al*. (2011), Fermat utiliza el signo igual y escribe que dichas expresiones son *casi iguales* (p. 67).

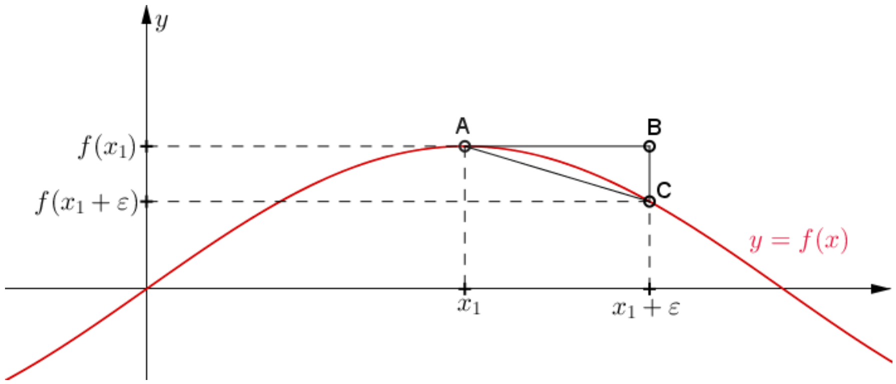

Figura 20. Método para hallar máximos y mínimos de una curva.

Ahora, se procederá a explicar el método de Fermat para determinar la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en sus puntos máximos o mínimos. En principio, el matemático considera el $\varDelta ABC$[22] y observa que si AB tiende a cero[23] (*i.e.,* infinitesimal), también BC tiende a cero, pero de manera más rápida[24]. De este modo, $\overleftrightarrow{AC}$ tiende a coincidir con $\overleftrightarrow{AB}$ y, por ende, sería la recta tangente a $f(x)$ por A y paralela al eje x por el mismo punto.

Hoy se puede decir que Fermat estuvo muy cerca del concepto contemporáneo de derivada del Análisis Estándar ya que el $\varDelta ABC$ (triángulo infinitesimal) es la idea central, aparte del concepto de límite, para su definición. Todo lo anterior permite vislumbrar la fuerte relación que tuvo la Geometría Analítica con el nacimiento de algunas ideas propias del Cálculo.

3.3.7. El Nacimiento del Cálculo

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) se propuso crear un método general, en el cual todos los hechos relacionados con el concepto de razón se redujeran a una especie de cálculo (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011). En este, los elementos infinitesimales tomaron gran protagonismo y en la opinión de Enriques (1991), citado en Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), parece que Leibniz comprendió que no son necesarios los infinitésimos en acto para la construcción del Cálculo.

El uso dado por Leibniz a tales elementos infinitesimales se caracterizó por ser poco riguroso e intuitivo, puesto que se interesó más por el carácter pragmático de los resultados desprendidos al utilizarlos. Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) mencionan que Leibniz recurre al infinitésimo de manera similar a Fermat, solo que reemplaza la magnitud ε por dx, es decir, considera lo infinitamente pequeño como variación (López, 2014). En ese sentido, no se escribe

[22] Entiéndase: triángulo rectángulo determinado por los puntos A, B y C.
[23] Considérese el caso de que B se acerca a A y no el que A se acerca a B.
[24] Lo que quiere decir que es un infinitesimal de orden superior.

$\frac{dy}{\varepsilon}$, como lo hizo Fermat, sino $\frac{dy}{dx}$, notación conocida como escritura de derivadas en forma de Leibniz.

Leibniz, en su obra "Un nuevo método para máximos y mínimos y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las cantidades irracionales", reportó las fórmulas básicas de derivación. Este trabajo, en la opinión de Boyer (1986), es la primera exposición del Cálculo Infinitesimal que hizo el célebre matemático. Dos años después, Leibniz publicó un nuevo artículo en el que dio a conocer algunos resultados básicos del Cálculo Integral, en especial, que el método para solucionar los problemas de cuadraturas es un caso especial del método inverso de los problemas de las tangentes y, además, formula una primera versión del Teorema Fundamental del Cálculo.

Otro matemático implicado en el nacimiento del Cálculo infinitesimal fue Isaac Newton (1643-1727), quien obtuvo los mismos resultados de Leibniz, pero de manera independiente (Arrigo *et al.,* 2011). Rey Pastor y Babini (1985) mencionan que la contribución más original de Newton fue su *método de fluxiones*, el cual es de naturaleza geométrico-mecánica en cuanto supone que todas las magnitudes geométricas son producidas por movimientos de velocidades diferentes[25]. Newton denomina a las magnitudes engendradas como *fluentes*, a las velocidades de las *fluentes* como *fluxiones* y al producto entre el incremento del tiempo por su respectiva *fluxión* lo designa como *momento*. Este último hace las veces de lo que contemporáneamente se conoce como diferencial, las *fluxiones* representan las derivadas actuales y las *fluentes* se pueden considerar como las primitivas.

López (2014) menciona que otro aporte de Newton reportado en su última obra, *Cuadrature of curves,* es su teoría de las razones primera y última de cantidades evanescentes, con la cual se anticipó al concepto actual de límite que consistía en: las últimas razones con las que las cantidades evanescentes desaparecen son límites que no pueden alcanzarse sin que antes dichas cantidades disminuyan en infinito. Se observa, claramente, una relación entre esta idea y la definición moderna de límite, la cual permite la construcción de los resultados del Cálculo sin recurrir al infinito en acto.

Una vez dado a conocer el Cálculo infinitesimal, varios matemáticos lo utilizaron para producir nuevos hechos matemáticos. Uno de ellos fue Leonard Euler (1707-1783), quien encontró interesantes relaciones entre la Teoría de Números y el Cálculo, como las siguientes series:

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e$$

[25] Obsérvese que el tiempo no aparece explícitamente en el método, sino como argumento de la velocidad.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

Los hermanos Bernoulli, Jakob (1655-1705) y Johann (1667-1748), también usaron el Cálculo (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011) como herramienta para resolver problemas o para caracterizar curvas; incluso Jakob fue quien le sugirió a Leibniz emplear el nombre de "Integral". Entre sus logros se encuentran: Ley de los números grandes[26], la determinación de la ecuación de la espiral logarítmica, caracterización de una curva isócrona, puntualizar que en un punto máximo o mínimo la derivada puede anularse, ser indeterminada o a "tender a infinito", etc. Por su parte, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), el príncipe de las Matemáticas, pensó que el infinito solo es una manera de hablar en Matemáticas (Luque, Mora y Páez, 2013), pese a ello obtuvo resultados que implícitamente utilizaban el infinito como un ente con existencia, por ejemplo, la función de densidad probabilística en una distribución normal[27].

Muchos otros matemáticos se sumaron a la tarea de ampliación del Cálculo y de sus relaciones con otras ramas de las Matemáticas; por ejemplo, Barrow (1630-1677) hizo la primera enunciación del Teorema Fundamental del Cálculo[28]. Sin embargo, tales producciones se sustentaban en los números reales, los cuales no estaban formalizados. Este hecho condujo a que el obispo George Berkeley (1685-1753) criticara duramente el Cálculo Infinitesimal, en cuanto no había fundamento lógico que le proveyera de soporte y veracidad. Por otra parte, Berkeley advirtió que los elementos infinitesimales no cumplen el axioma de Arquímedes y que no había coherencia cuando se operaba con ellos, pues al principio se usaban como denominadores por ser distintos de cero y luego, cuando aparecían como sumandos eran depreciados (López, 2014). Arrigo, D'Amore, y Sbaragli (2011) dicen que el Cálculo Infinitesimal se convirtió en un gigante con los pies de barro, puesto que su utilitarismo en el ámbito matemático y físico fue enorme, no obstante, el peso de este no logró ser soportado por sus pies.

3.4. El infinito en la Edad Contemporánea

La Edad Contemporánea es el periodo de la Historia comprendido entre 1789 (con el estallido de la Revolución Francesa, aproximadamente) y la actualidad (2022). En este el

[26] La Ley de los grandes números es un teorema de la probabilidad, el cual consiste en que si se repite muchas veces (tendiendo al infinito) un mismo experimento, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante.

[27] Esta es dada por: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

[28] Establece una manera de calcular el área bajo una curva en un intervalo cerrado por medio de la integral indefinida.

concepto de infinito empezó a tomar gran relevancia puesto que, por un lado, era el causante de muchas paradojas y ambigüedades en las Matemáticas y, por otro lado, era imposible de evadir para cualquier persona que quisiera darle un soporte sólido y resistente al Cálculo Infinitesimal. En seguida se resaltarán algunos matemáticos, hechos, pensamientos e ideas relacionados con el concepto de infinito que tuvieron lugar en la Edad Contemporánea.

3.4.1. Agustín Louis Cauchy

López (2014) menciona que Cauchy (1789- 1857) es quien da los primeros avances para solucionar el problema de la crisis en los fundamentos del Cálculo Infinitesimal. En una serie de cuatro obras publicadas entre 1821 y 1829 da un cambio al tratamiento del Cálculo Infinitesimal. Castro y Pérez (2007) reportan que Cauchy definió el concepto de continuidad[29] que, como se mencionó, era una noción ambigua, y eliminó el Álgebra como fundamento para la deducción de principales hechos del Cálculo. Para ello, basó las ideas del Cálculo Infinitesimal en el concepto de límite y lo definió como:

> Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo hasta acabar diferenciándose muy poco de él, haciéndose tan pequeña (la diferencia) como uno desee, este último (valor fijo) es llamado límite de todos los otros (Castro y Pérez, 2007, p. 73).

Lo anterior, le permitió precisar rigurosamente qué es un infinitesimal: una cantidad variable cuyo límite es cero. Además, menciona que las cantidades infinitas son aquellas en las cuales los valores numéricos de sucesiones, de una variable, siempre cuando esta sea positiva, aumentan cada vez más de tal manera que se elevan por encima de cualquier número, de tal manera que el límite tiende al infinito positivo (∞)[30], mientras si fuera negativa el límite tiende al infinito negativo $(-\infty)$ (Lucero, 2021, p. 85).

De esta manera, es evidente la relación entre las nociones de límite e infinito presentando una definición para cantidades infinitas utilizando la definición de límites. No obstante, la definición de límite de Cauchy presenta varias inconsistencias, por ejemplo, la ambigüedad del lenguaje empleado y que no se considera más de una variable, lo cual genera un problema porque en una función son al menos dos variables que entran en juego (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011).

3.4.2. Bernard Bolzano

Bernard Bolzano (1781-1848) fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo. Una de sus obras más famosas es "*Paradoxien des Unendlichen*" (que traducido es, *Un estudio sobre las*

[29] El cambio de perspectiva que emplea Cauchy para definir el concepto de continuidad de una curva fue en pensarla como una propiedad local de las curvas y no como algo global.
[30] Empleando la notación propuesta por primera vez por John Wallis.

paradojas del infinito). Dicha publicación presenta varias discusiones acerca de las nociones que se habían gestado en el seno de la historia del infinito, como la de Cauchy o los ejemplos de correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto infinito y sus subconjuntos (*e.g.,* los estudios de Galileo).

Por lo tanto, en primer lugar, se presentarán algunas inconsistencias descritas por Bolzano en la obra mencionada, las cuales se relacionan con las concepciones otorgadas por algunos matemáticos al infinito. Así, por ejemplo, Cauchy y Grunert conciben al infinito de la siguiente manera:

> Cantidad variable cuyo valor se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada, independiente de la magnitud de esta. El límite de ese crecimiento ilimitado sería una cantidad de magnitud infinita (Bolzano, 1991, p.47).

Aunque se entiende la idea de Cauchy y Grunert, Bolzano realizó fuertes críticas puesto que, según él, el término "cantidad" no es apropiado en cuanto que refiere a la noción de cantidad. Sin embargo, si se quiere validar esta "definición", se debe aceptar que existe un conjunto infinito de cantidades, las cuales difieren en su magnitud y no se puede pensar en infinito en acto. Además, el matemático encontró una contradicción ya que, si el límite de un crecimiento ilimitado es lo infinitamente grande, se podría considerar que el límite de decrecimiento ilimitado es cero, pero eso a su vez es infinitamente pequeño.

Por otra parte, Bolzano advirtió una inconsistencia en la concepción del infinito propuesta por Spinoza (1932-1977), quien lo concibe como algo que no tiene incremento adicional, es decir, no se le puede añadir algo nada más (Bolzano, 1991). Bolzano, utiliza la siguiente situación como contraejemplo para la afirmación anterior:

> Toma como elemento a una semirrecta (ya de longitud infinita), y a su extensión infinita para convertirla en una recta (Bolzano, 1991).

Por lo tanto, queda claro, que algo infinito puede incrementarse, aumentando en extensión o agregando más elementos a un conjunto que ya es infinito, lo que es una clara contradicción a lo mencionado por Spinoza.

Otro aspecto que llama la atención del trabajo de Bolzano es que estableció la diferencia entre lo infinito y lo finito, introduciendo las relaciones de orden e igualdad entre multitudes de una cierta especie. De tal manera que el también teólogo se empezó a preguntar: ¿cómo se pueden comparar conjuntos infinitos? Teniendo en cuenta esto, mencionó dos aproximaciones hacia la determinación del tamaño de un conjunto, a saber: la magnitud[31] y multiplicidad de un

[31] Magnitud: Amplitud de la extensión de un conjunto (por extensión), a partir de la medida.

conjunto. Esta última se refiere a la multitud de elementos de un conjunto, lo cual años más tarde evolucionó y actualmente se conoce como el concepto de cardinal.

En relación con el Cálculo, Bolzano hizo dos aportaciones a este que empleaban implícitamente el infinito, a saber: los teoremas del valor medio y el denominado hecho de Bolzano-Weierstrass. El primero establece que, si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces, la función está definida para todos los valores que están comprendidos entre los extremos del intervalo. El segundo teorema alude a que cada sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.

Hay que mencionar que Bolzano también señaló paradojas relacionadas con el estudio de las series (o sumas potencialmente infinitas)[32]. Entre ellas se tienen las siguientes:

Sea $S = a - a + a - a + a - \cdots$, para la cual hay tres formas de hallar su valor, a saber:

- Forma 1: $S = (a - a) + (a - a) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$
- Forma 2: $S = a - (a - a) - (a - a) - \cdots = a - 0 - 0 - \cdots = a$
- Forma 3: $S = a - (a - a + a - \cdots) = a - S$

Por lo tanto, $2S = a$, es decir, $S = \frac{a}{2}$.

Solo por mencionar otra paradoja descrita por Bolzano, considérese a $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots = 1 - 2(1 - 4 + 8 - \cdots) = 1 - 2S$. Luego, $S = 1 - 2S$, es decir $3S = 1$ y, por ende, $S = \frac{1}{3}$. Si se hace otro reordenamiento de los términos de la sumatoria $S = 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + \cdots = 1 + 2 + 8 + \cdots$, por ende, S tiende a $+\infty$. En ese sentido, se podría decir que S tiene tanto a un número finito como a infinito.

Hasta este momento de la historia, el infinito fue un ente que causó grandes problemas y muchas paradojas que atormentaron la mente de matemáticos y pensadores. El siguiente gran paso que debió dar la humanidad en aras de dilucidar el concepto del infinito fue formalizar las sumas potencialmente infinitas o al menos remediar las paradojas tan monstruosas que acontecían al reordenar sus términos.

3.4.3. Georg Riemann

Georg Riemann (1826-1886) se encargó de estudiar las series y de resolver muchas de las paradojas expuestas por Bolzano mediante el concepto de convergencia (Castro y Pérez, 2007). Además, descubrió que el problema común que generaba las paradojas de las series radicaba en que con un reordenamiento adecuado de los sumandos de dichas series se puede

[32] Un aspecto que llamó la atención es estas paradojas expuestas por Bolzano se construían únicamente a partir de lo que actualmente se conocen como series alternantes. De ahora en adelante se denominarán a esta clase de paradojas como las “paradojas de las series alternantes”.

obtener cualquier valor deseado. En otras palabras, las paradojas de las series alternantes se debieron a que se intentó aplicar propiedades de sumas finitas a sumas infinitas. Ante ello Riemann probó que si $\sum a_n$ es una serie condicionalmente convergente[33] y $r \in \mathbb{R}$, entonces hay un reordenamiento de los términos de $\sum a_n$que tiene una suma igual a r. Pero, también, se puede demostrar que si $\sum a_n$ es una serie absolutamente convergente con suma a, luego, para todo reordenamiento de los términos de $\sum a_n$ tienen la misma suma a.

Otros trabajos de Riemann que vinculan implícitamente al infinito fueron lo que modernamente se conoce como sumas de Riemann, que a grandes rasgos refiere a aproximar el valor de una mediante una serie. No obstante, no se ahondará mucho en este asunto por no hacer parte de los propósitos del trabajo.

3.4.4. Karl Weierstrass

Karl Weierstrass (1815-1897) fue quien solucionó las inconsistencias de la definición de Cauchy reportando su moderna definición de límite en términos de ε y δ. La definición de Weierstrass fue expresada más o menos del siguiente modo: "si dado cualquier ε, existe un δ_0 tal que para $0 < \delta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \delta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$" (Boyer, 1986, p. 696).

Piñeiro (2013) reporta que esta definición, por un lado, eliminó definitivamente a los infinitesimales y, por otro lado, refleja las últimas instancias de un largo proceso que atravesó el Cálculo y fue su desligamiento con la Geometría (período conocido como la "aritmetización del análisis"[34]). Otra idea interesante, sugerida por Lucero (2021), es que dicha definición ayuda a formalizar al infinito potencial puesto que al precisar qué son las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas se le dota un nombre, un símbolo y una definición.

Pese a que la definición de límite fue un gran avance para la aritmetización del análisis, aún quedaba otro problema en la fundamentación del Cálculo y era precisar qué son los números reales. Por esa época, la principal característica que se conocía de los números reales es que completan la recta y se requería una definición de estos que no apelara a características geométricas[35]. Lo anterior condujo a que Weierstrass propusiera una construcción para tal conjunto numérico. Esta se sustentó en la idea de agregados finitos que, como lo mencionan Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), son sumas de unidades fraccionarias. Tales agregados finitos que corresponden a un mismo número racional conforman una clase de equivalencia. De este

[33] Una serie $\sum a_n$ es *condicionalmente convergente* si es convergente, pero no *absolutamente convergente*. Una serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si los valores absolutos $\sum |a_n|$ es convergente.
[34] Consistió en reemplazar del Análisis los argumentos de corte geométrico por razonamientos que se basaban en fórmulas y el conjunto de los números reales.
[35] Según Piñeiro (2013) a este fenómeno se le denomina, desde la Historia de las Matemáticas, como el problema del continuo, pues la palabra 'continuo' era empleada para referirse a la recta numérica.

modo, se define un racional mediante una clase de infinitos agregados finitos equivalentes entre sí. No obstante, Weierstrass, no tardó en darse cuenta de que la construcción que propuso era incompleta, pues no agotaba toda la recta. Para llenarla toda, Weierstrass planteó la creación de otros números, los irracionales, a partir de las clases de agregados infinitos. Lo anterior implica aceptar la existencia del infinito actual, puesto que un número finito es resultado de una suma infinita de fracciones.

Antes de finalizar este apartado, se debe señalar que a mediados del siglo XX surgió otra manera de formalizar el Cálculo por medio de los infinitesimales, hoy conocido como Análisis no estándar. Dicha forma de darle rigor al Cálculo fue propuesta por Abraham Robinson (1918-1974), quien principalmente retomó los trabajos de Leibniz y los reivindicó con un "sistema de números" diseñados especialmente para tratar "cantidades" infinitas e infinitesimales.

3.4.5. Richard Dedekind

Dedekind (1831-1916) es uno de los personajes más importantes en la historia del infinito, puesto que apoyó la existencia del infinito como un objeto matemático (Ortiz, 1994; Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011; Piñeiro, 2013; Castro y Pérez, 2007). Su gran fama y prestigio dentro de la comunidad matemática hizo que se equilibrara un poco la balanza a favor del infinito, pues si un matemático tan prominente creía en ese absurdo (así era considerado este ente en ese periodo) es porque tenía algo de veracidad. Uno de sus más importantes aportes relacionado con el infinito fue su construcción de los números irracionales a partir de los racionales. Se cree que Dedekind generó esta nueva propuesta porque tuvo inconvenientes para realizar demostraciones relacionadas con el estudio de series infinitas (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011). La mencionada propuesta se deriva de las tan famosas cortaduras que salieron a la luz pública en su obra *Stetigkeit und Irrationale Zahlen,* traducido del alemán como *Continuidad y números irracionales* (Rey Pastor y Babini, 1986). Con dicha construcción, Dedekind demostró, por un lado, que los números reales son un cuerpo completo y ordenado y, por otro lado, que los racionales son densos, pero no continuos como sí lo son los reales.

Dedekind fue uno de los primeros matemáticos en definir un conjunto infinito estableciendo que un conjunto es infinito si solo si no cumplía la idea intuitiva del todo es mayor que su parte, es decir, en un conjunto infinito puede tener un subconjunto propio con igual cantidad de elementos. Inclusive, ahí encuentra la principal diferencia entre un conjunto infinito y uno finito que tiempo después fue un importante punto de partida para Cantor.

3.4.6. Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) se conoce como el formalizador de noción de infinito matemático. Sus grandes aportes en torno a este objeto permitieron su compresión, su conceptualización y la formulación rigurosa de una teoría matemática: la Teoría de Conjuntos. De ahí que autores, como Piñeiro (2013), defiendan la idea que la Teoría del Infinito Matemático y la Teoría de Conjuntos son esencialmente la misma.

Una de las cualidades de Cantor es que era un librepensador, lo cual se ve reflejado en muchas de producciones académicas y no académicas. Él creyó fervientemente que se podía hacer Matemáticas que no estuvieran ligadas a la realidad y que ello era precisamente la singularidad de las Matemáticas. Cantor escribió:

> Debido a esta posición destacada, que la distingue de todas las demás ciencias y proporciona una explicación del carácter relativamente fácil y desenvuelto que el ocuparse de ella tiene, merece especialmente el nombre de matemática libre, una denominación a la que, si fuese mía la elección, daría preferencia sobre la de matemática «pura», que ha llegado a ser usual (Piñeiro, 2013, p. 16).

Por ello, pensaba que:

> (…) el temor por el infinito es una forma de miopía que destruye la posibilidad de ver el infinito actual que, aunque si en sus formas más elevadas nos ha creado y nos mantiene, y en sus formas secundarias de transfinitos está presente en nuestro alrededor y ocupa nuestras mentes (Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011, p. 98).

Lo anterior permite observar un punto en común entre los griegos y Cantor, y es que, así como los griegos con su idea del *ápeiron,* Cantor asocia el infinito con el Creador e inclusive, lo denomina *Infinito Absoluto*. En estos dos casos el infinito no es una cualidad sino un sujeto con características que va más allá del entendimiento humano. Otra noción latente en el fragmento de Cantor es la de diversos infinitos, el primero, como ya se mencionó, lo asoció con Dios y los otros con lo transfinito (más allá de lo finito).

A continuación, la siguiente tabla contiene una breve descripción de las obras más relevantes de Cantor relacionadas con el infinito.

Tabla 4. Descripción de algunas publicaciones académicas de Cantor con base en Piñeiro (2013)

Año	Obra	Descripción
1869	Dos teoremas sobre la descomposición de ciertos números en productos infinitos	Cantor reporta dos teoremas versados en la posibilidad de pensar en determinados números como el resultado de una cantidad infinita de multiplicaciones. Este es uno de los primeros acercamientos de Cantor a cuestiones del infinito y que se caracteriza por no salirse del mandato aristotélico.

1872	Sobre la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas	En este trabajo define a los números reales basado en el concepto de sucesión fundamental[36] y resuelve el problema que le propuso Heine, en 1869, el cual consistía en determinar si la descomposición de un gráfico periódico como serie de Fourier siempre es única. Cantor conjeturó que: si P es el conjunto de las abscisas de los puntos de discontinuidad de un gráfico periódico, para que su descomposición en serie trigonométrica sea única basta con que el proceso[37] $P', P'', P(3), P(4) \ldots$, acabe por anularse en algún momento.
1874	Sobre una propiedad característica de la totalidad de los números reales algebraicos[38]	Este tratado contiene algunas de las ideas básicas que darían luz a la teoría del infinito de Cantor. Por consejo de Weierstrass, "maquilla" sus resultados y no habla en profundidad de los que se relacionan directamente con el infinito. Cantor, reporta que la variedad de los números reales no puede organizarse en una sucesión. De esta forma, tácitamente, está advirtiendo que los reales son más que los naturales dado que no existe una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea biyectiva[39] (recuérdese que esa es la idea de sucesión matemática). Y, por otro lado, demostró implícitamente que cualquier segmento de la recta numérica tiene una infinidad de números trascendentes, puesto que no proveyó ni un ejemplo de estos.
1877	Una contribución a la teoría de las variedades[40]	Este artículo generó mucha incomodidad entre varios matemáticos contemporáneos a Cantor dado que era muy contraintuitivo; por ejemplo, él demuestra que un segmento es coordinable[41] con un cuadrado y que este último tiene exactamente el mismo nivel de infinitud que todo el espacio tridimensional. Cerró este trabajo enunciado por primera vez la hipótesis del continuo, la cual asegura que no existe ningún conjunto tal que su cardinal este entre el cardinal de los reales y el cardinal de los naturales. Estos resultados permitieron, entre otras cosas, resolver la paradoja de Aristóteles argumentando que el cardinal de los ceros que se está sumando (correspondientes a la dimensión de un punto) es numerable; no obstante, en una suma de una cantidad no numerable de ceros puede dar como resultado un número mayor que cero (considérese

[36] Para Cantor una sucesión fundamental es aquella que está formada por números racionales y a medida que esta avanza, la diferencia entre dos términos cualesquiera se tan pequeña como se desee.

[37] Si *P* es un conjunto cualquiera de números, Cantor llamó conjunto derivado de *P* a la colección de todos los números que pueden aproximarse mediante sucesiones formadas por elementos de *P*; al conjunto derivado de *P* lo indicó como *P'* (Piñeiro, 2013, p. 99).

[38] Se dice que un número es algebraico si es solución de alguna ecuación del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq i \leq n$.

[39] Lo cual se puede resumir diciendo que R no es numerable.

[40] Variedad, para Cantor era un sinónimo de Colección.

[41] Es decir, que se puede establecer una correspondencia una a uno entre el segmento y el cuadrado.

		que un segmento es no numerable).
1883	Fundamentos para una teoría general de variedades	En este trabajo, Cantor, demostró la conjetura que había elaborado en 1872 relacionada con el problema propuesto por Heinen sobre las series trigonométricas. Él se dio cuenta que el proceso P', P'', $P(3), P(4)$ …, podría acabar de anularse en cantidad infinita de pasos, e inclusive en cantidad infinita de pasos no numerable. En ese sentido, necesitaba números que le permitiera contar más allá de los naturales. A estos los llamo números ordinales, los cuales se generarán a partir de dos principios: (i) todo ordinal tiene un sucesor, es decir, un ordinal que es el inmediatamente siguiente a él y (ii) dada cualquier sucesión de ordinales, siempre hay un ordinal que es el inmediatamente siguiente a todos ellos.
1892	Sobre una cuestión elemental de la teoría de las variedades	En este artículo, Cantor, pública por primera vez la famosa demostración de la diagonal y halla que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (conjunto de partes de los naturales) es no numerable. Ello, lo conduce a intuir y, luego, a demostrar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{R}$ son coordinables (tienen la misma potencia o cardinalidad).
1895 y 1897	Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos	Este artículo tiene dos partes, una publicada en 1895 y otra en 1897. Cantor, retoma todos sus conceptos básicos de su teoría del infinito, demuestra que la unión de dos conjuntos numerables es numerable y, además, introduce su famosa notación de los álefs ($\aleph$) para designar los cardinales de conjuntos infinitos. Llamó $\aleph_0$ al cardinal de los números naturales, $\aleph_1$ al segundo cardinal infinito, $\aleph_2$ al tercer cardinal infinito y así sucesivamente. Lo anterior le permitió desarrollar su aritmética transfinita.

La Tabla 4 recoge muy sucintamente los aportes de Cantor reportados en las obras mencionadas. A continuación, se presentarán otros resultados más concretos aportados por Cantor:

1. Dados los conjuntos A y B. $|A| > |B|$[42] se cumple si:
   i. B es coordinable a un subconjunto propio de A.
   ii. A y B no son coordinables.
2. Dado un conjunto X, entonces, $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.[43]
3. Dado un conjunto X, entonces, $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

[42]La notación $|X|$ significa el cardinal o potencia del conjunto X.
[43] Este hecho es comúnmente conocido como *Teorema de Cantor.*

4. Los conjuntos $|\mathbb{Z}|$ y $|\mathbb{Q}|$ son numerables.

5. El conjunto de los números algebraicos es numerable.

6. El conjunto de los números trascendentes es no numerable.

Para probar que el conjunto $|\mathbb{Z}|$ es numerable deben tomarse dos subconjuntos propios de los números naturales, a saber, los números pares y los impares de tal manera que se cumpla la biyección que se muestra en la Figura 21.

$\mathbb{Z} =$	$\{\ldots,$	$-3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$\ldots\}$
		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\mathbb{N} =$	$\{\ldots,$	$5,$	$3,$	$1,$	0	$2,$	$4,$	$6,$	$\ldots\}$

Figura 21. Correspondencia biunívoca entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.

De lo cual se infiere que $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ está dada por:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\dfrac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Y $f^{-1}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ está dada por:

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2n, & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Lo cual demuestra que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ son coordinables.

Para probar que el conjunto $|\mathbb{Q}|$ es numerable se debe tomar un número $n \in \mathbb{Z}^{+}$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, n se puede escribir de una única manera como:

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Tomando los p_i son números primos y los $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Recuérdese que este teorema se puede extrapolar a los $\mathbb{Q}^{+}$ solo ampliando la condición que los α_i sean enteros. Así, para establecer la correspondencia biunívoca entre los naturales y los racionales, basta con hallar una función biyectiva que relacione a los exponentes naturales de la descomposición factorial de n con los exponentes enteros de la descomposición factorial de un número racional. Dicha función es f (la función que se utilizó para la anterior demostración). De este modo:

$$g\colon \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{Q}^{+}$$

$$n \longmapsto \prod_{i=1}^{k} p_i^{f(\alpha_i)}$$

Por consiguiente, $g^{-1}: \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ es:

$$g^{-1}(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{f^{-1}(\alpha_i)}$$

Entonces, $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{Z}^+$ son coordinables. Hecho que se puede generalizar con $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ tomando la función $r: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ como:

$$r(n) = \begin{cases} g(n), & \text{si } n > 0 \\ 0, & \text{si } n = 0 \\ -g(-n), & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

De este modo $r^{-1}: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ es:

$$r^{-1}(n) = \begin{cases} g^{-1}(n), & \text{si } n > 0 \\ 0, & \text{si } n = 0 \\ -g^{-1}(-n), & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Lo que permite concluir que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son coordinables.

En resumen, se tiene que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son coordinables y que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son coordinables, por consiguiente $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son coordinables y, por ende, tienen el mismo cardinal.

Para demostrar que $\mathbb{R}$ es no numerable, Cantor, probó que un subconjunto propio de $\mathbb{R}$ no es numerable. Dicho subconjunto corresponde a los reales contenidos en el intervalo $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Para ello empleó, un método conocido como "el método o argumento de la diagonal" que consiste:

Supóngase que $(0,1)$ es numerable y sea $(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots\}$ con $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$. Dado $x \in (0,1)$, luego, x es de la forma $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ con $a_k \in \{z \in \mathbb{N} \mid 0 \leq z \leq 9\}$.

Sea $\varphi = 0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_n \dots$, en el cual

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{si el decimal } a_i \text{ de cualquier } x_i \text{ es 0 o 9.} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se cumple que $0 < \varphi < 1$ y que $\varphi \neq x$. En consecuencia, $(0,1)$ es no numerable.

Estas tres demostraciones son ejemplos de la originalidad y formalismo matemático empleado por Cantor en sus trabajos. Pese a que sus argumentos son convincentes, muchos matemáticos, contemporáneos a él, se rehusaron a aceptarlos como verdaderos ya que después de todo ¿qué les garantizaba que tales resultados no eran paradojas como aquellas que encontraban al intentar dilucidar el concepto de infinito? En ese sentido, no se puede culpar a tales matemáticos por querer no referirse a este objeto. Inclusive, el mismo Cantor ante algunos de sus resultados expresó: “lo veo, pero no lo creo” (Piñeiro, 2013, p. 57).

3.4.7. Paradojas de la Teoría cantoriana del infinito

La fama de la Teoría cantoriana del infinito fue mancillada tras encontrarse varias paradojas que sacudían los cimientos de esta. La formulación de una de dichas aporías se le atribuye a Bulari-Forti (1861-1931) y comienza considerando la secuencia de todos los ordinales; de esta manera cualquier secuencia de números ordinales estará contenida en ella. Sin embargo, el segundo principio de generación de una secuencia de ordinales (ver la Tabla 4) sugiere que existe otro ordinal inmediatamente siguiente a todos ellos (*i.e.,* no está contenido en la secuencia en cuestión) entonces, hay una contradicción.

Otra paradoja fue hallada por el mismo Cantor y se produce al considerar el conjunto de todos los conjuntos (U) y su conjunto de partes ($\mathcal{P}(U)$); se supone que cualquier conjunto dado debe estar contenido en U y tener un cardinal menor o igual que U; a pesar de ello, por el Teorema de Cantor, se sabe que $|\mathcal{P}(U)| > |U|$, lo cual es otra contradicción lógica.

Por otra parte, el matemático Gottlob Frege (1848-1925) observó que la Teoría de Conjuntos carecía de un sistema teórico riguroso que permitiera demostrar las proposiciones construidas en dicha de manera formal. Por ello, Frege consideró que la correcta formulación de axiomas erradicaría definitivamente las paradojas de la Teoría cantoriana. Uno de tales axiomas enunciaba que a toda propiedad le corresponde un conjunto conformado por todos los elementos que cumplen esa propiedad (Piñeiro, 2013, p. 146). Este principio llevó al matemático Bertrand Russell (1872-1970) a observar una aporía cuando se piensa en la propiedad de ser un conjunto que no es miembro de sí mismo, entonces, según el axioma, existe un conjunto de elementos definidos por dicha propiedad[44] (nómbrese como $\mathcal{N}$). Por tanto, solo se pueden cumplir algunas de las siguientes afirmaciones: $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ o $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$[45]. Por un lado, si $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ entonces $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ puesto que esa es la propiedad que definen a los elementos de $\mathcal{N}$. Por otro lado, si $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ entonces $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ en tanto que todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos pertenecen a $\mathcal{N}$. En síntesis, $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ si y solo si $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$, lo cual es una falacia lógica[46].

Esta última paradoja sacudió los pilares de la entonces reciente Teoría de Conjuntos y, por ende, de las mismas Matemáticas dado que muchos matemáticos (Cantor, Dedekind, Frege,

[44] En términos actuales, se podría decir que Russell consideró el conjunto de todos los conjuntos normales.
[45] Lo quiere decir que solo hay dos posibilidades para $\mathcal{N}$, o bien es un conjunto normal (no es elemento de sí mismo) o un conjunto singular (sí es elemento de sí mismo).
[46] Obsérvese que es una proposición de la forma $p \leftrightarrow \neg p$.

etc.) de esa época consideraron que las Matemáticas se podían construir desde una perspectiva conjuntista. Piñeiro (2013) menciona que esta paradoja ocasionó acaloradas discusiones entre la comunidad matemática a lo largo de casi 30 años, periodo que hoy en día se conoce como la *crisis de los fundamentos*.

Ante el problema, varios matemáticos creyeron que la solución consistía en la correcta formulación de postulados y en esa vía centraron sus esfuerzos. Una primera propuesta de sistema axiomático se les debe a Ernest Zermelo (1871-1953) y Abraham Fraenklen (1891-1965), quienes formularon los siguientes axiomas:

1. Dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos miembros.
2. Existe el conjunto vacío.
3. Dados los objetos x e y, existe siempre el par formado por ambos.
4. La unión de dos o más conjuntos también es un conjunto.
5. Existe al menos un conjunto infinito.
6. Solo las propiedades restantes a partir de los restantes axiomas pueden ser usadas para definir un conjunto.
7. Dada un conjunto cualquiera, existe siempre su conjunto de partes.
8. Dada una familia, finita o infinita de conjuntos no vacíos, existe siempre un nuevo conjunto que contiene exactamente un miembro de cada conjunto de familia.
9. Ningún conjunto es miembro de sí mismo.

Se observa claramente que con el noveno axioma se solucionan las tres paradojas mencionadas, por cuanto no se admite la existencia de conjuntos que sean miembros de sí mismos. Ello implica que el conjunto de todos los conjuntos no exista, ni tampoco la secuencia de todos los ordinales infinitos, puesto que estas dos colecciones son elementos de sí mismas.

Durante el *siglo xx* emergieron otras propuestas de sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos, por ejemplo, el sistema de John Von Neunmann (1903-1957), Paul Bernays y Kurt Gödel (NBG) o el sistema de Robert Lee Morse y John L. Kelley (MK). Lo curioso es que el conjunto de axiomas de cada uno de los sistemas no es equivalente entre sí. Sin embargo, vale la pena resaltar que Kurt Gödel (1906-1978) demostró que con ninguno de los sistemas axiomáticos mencionados puede determinarse si la hipótesis del continuo es falsa. De manera similar, Paul Cohen (1934-2007) probó que tampoco puede afirmarse que dicha hipótesis es verdadera en los diversos sistemas de axiomas.

3.4.8. El infinito en la Estadística Inferencial, la Probabilidad y el azar

La palabra "estadística" se puede referir a la ciencia que estudia los datos y también para designar a los datos. Sin embargo, la Estadística Inferencial es la que se ataña a obtener conocimiento de la población a partir de observaciones relativas a solo una parte de ella, lo que se conoce como una muestra de esta.

En tal contexto, Arias (2006) citado en Carroz, Márquez, y Moucharrafic (2012) define los conceptos de población y de muestra, de la siguiente manera:

> **La población:** Es el conjunto de todos los individuos, los cuales son objetos de estudio.
>
> **La muestra:** Es una parte de la población en la que se miden las características objeto de estudio.

De tal forma que un uso a la Estadística Inferencial es la reunión, clasificación y recuento de los distintos hechos comunes a una población, con el fin de lograr una traducción a datos numéricos, que permitan y faciliten la obtención de probabilidades, con la finalidad de medir diferentes aspectos (comportamentales, económicos, etc.) de una población además de tratar de predecirlos. Sin embargo, el concepto de población y muestra fue evolucionando gracias a diferentes matemáticos, originando diferentes definiciones como las siguientes:

> La población es un conjunto finito o infinito de elementos con características comunes para los cuales serán extensivas las conclusiones de la investigación. Esta queda delimitada por el problema y por los objetos del estudio (Arias, 2006, p. 6 citado en Carroz, Márquez, y Moucharrafic, 2012).
>
> De la misma forma definió: "La muestra es un subconjunto representativo y finito que se extrae de la población accesible" (Arias, 2006, p. 6 citado en Carroz, Márquez, y Moucharrafic, 2012).

Ante lo anterior, es evidente que se conceptualizan dos tipos de poblaciones la finita y la infinita; en consecuencia, según Moguel (2005), una población es infinita, cuando no se conoce el tamaño de esta y no es posible contarlos o construir un marco muestral[47] , siguiendo con el mismo razonamiento "una población es finita cuando se conoce el tamaño y existe un marco muestral. Sin embargo, cabe señalar que algunas poblaciones finitas en algunas ocasiones el número del tamaño es tan grande y desconocido que estadísticamente se asume como infinito".

Por ejemplo, los investigadores en ciencias sociales o naturales utilizan frecuentemente poblaciones, las cuales consideran infinitas. En tal caso, lo que ocurre es que la población

[47] Listado de elementos.

cuenta con un tamaño de elementos tal que la diferencia entre los resultados que generan las expresiones para situaciones de finitud o infinitud sea despreciable (por ejemplo, cuando se estudian poblaciones de bacterias en un ecosistema, estas suelen ser de varios miles o millones. En estos casos se le da un tratamiento de infinitud a la población).

Ante esto, se puede concluir que, aunque no se está aceptando el concepto infinito como tal, sí se tiene alguna relación con el infinito potencial.

De la misma forma, es aplicable al concepto de muestra, de tal manera que se determinó una fórmula para muestras infinitas, en las cuales intervienen tres factores que determinan el tamaño muestral.

- La probabilidad (z), asociada a una distribución específica, usualmente la normal.
- Dispersión de la población (pq), que usualmente se desconoce y se debe estimar.
- El nivel de error (e) dispuesto a aceptar en la investigación.

La fórmula en cuestión es la siguiente:

$$n = \frac{z^2 pq}{e^2}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, en el ámbito de la probabilidad, un espacio muestral puede ser finito o infinito, y este último puede ser numerable o no numerable.

Un ejemplo de un espacio infinito numerable es el siguiente:

Experimento: Lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez
Espacio muestral= $\{C, SC, SSC, SSSC, SSSSC, \dots., SSSSSSS \dots SC, \dots\}$

Notando S: $Sello$ y C: $Cara$

Este espacio es infinito numerable debido a que este tipo de experimento puede dar lugar a un conjunto infinito de eventualidades, es decir el experimento se puede repetir muchas veces y estas se pueden contar, siempre y cuando cada vez al realizar un lanzamiento el resultado sea sello y se tenga que repetir el lanzamiento.

Mientras que un ejemplo de un espacio infinito no numerable es el siguiente:

Experimento: Elegir al azar un número real entre el 0 y 1.

Espacio muestral = $\{x \in \mathbb{R} | \ 0 \leq x \leq 1\}$

El intervalo $[0,1]$ es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1, y por propiedades de números reales este es infinito y continuo, por lo tanto, el espacio muestral $\{x \in \mathbb{R} | \, 0 \leq x \leq 1\}$ se considera como infinito no numerable (Bianco y Martínez, 2004).

Otra clasificación relacionada con el infinito (o más bien con espacio muestral numerable o no numerable) es la definición de los dos tipos de variable aleatoria:

Variable discreta: esta se define sobre un espacio muestral numerable, finito o infinito.

Variable continua: Es aquella que se define sobre un espacio asimilable al conjunto de los números reales, es decir, un espacio no numerable (Fernández , 2004).

Como se ha descrito, el infinito se puede aplicar a varios conceptos de la Estadística, también se puede identificar en el concepto de valor esperado o esperanza matemática (que en el caso de las variables continuas precisa en su definición de integrales indefinidas y, por tanto, hace uso del infinito; mientras que, de forma análoga, para el caso de distribuciones discretas, requiere de forma general del uso de series) el cual se debe al astrónomo, físico, matemático Christian Huygens (1629-1695) que calcula el valor justo de un experimento a partir de una respuesta obvia en ciertas situaciones simétricas, y generalizando el valor esperado obtenido a cualquier situación.

En este sentido, Jacob Bernoulli (1713) para indicar el valor esperado o esperanza matemática utiliza la noción de frecuencia en vez de la de simetría, sentando las bases para la aplicación del enfoque frecuentista de la probabilidad al definir una expresión matemática para indicar el valor esperado de un experimento realizado un número indefinido de veces, la cual es la siguiente:

$$\sum_i x_i P(X = x_i)$$

Es decir, la relación entre el número de casos favorables a un suceso sobre el número total de sucesos (frecuencia) tiende hacia la probabilidad laplaceana cuando el número de sucesos tiende al infinito (Franco, Olmedo y Valderas, 2016).

Por el lado de la probabilidad, la cual está definida como método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. Por lo tanto, está muy relacionado con el concepto del azar y este con el infinito, ya que se define como:

> La característica de un experimento que produce resultados diversos, impredecibles en cada situación concreta, pero cuyas frecuencias, a la larga, tiende a estabilizarse hacia un valor "límite" en el infinito. (Batanero y Godino, 2001, p. 9)

Para terminar, una de las distribuciones de la Estadística y la Probabilidad es la distribución normal, la cual se empezó a desarrollar cuando el matemático Abraham De Moivre (1667-1754) se dio cuenta de la normalidad de los resultados al realizar un experimento con una moneda. Luego, Pierre Simón Laplace (1749-1827) retomó los trabajos de Moivre y demostró que la distribución normal es una aproximación eficaz de la distribución binomial, cuando el número de experimentos es muy grande.

Esta afirmación se convertiría en el Teorema del Límite Central, el cual fue formulado por Laplace; sin embargo, solo hasta el *siglo XX* fue sistematizado por el matemático Aleksandr Lyapunov (1857-1918) dándole una demostración matemática rigorosa y unas determinadas condiciones:

- La media de la distribución muestral es igual a la media de la población, e igual a la media de una muestra cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito.
- La varianza de la distribución muestral es menor que la de la población (cuando $n > 1$).
- La forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada a medida que se incrementa el tamaño muestral, y aproximadamente normal, independientemente de la forma de la distribución en la población.
- La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión a medida que el tamaño muestral crece.

En conclusión, cuando el tamaño de la muestra tiende al **infinito** podemos usar el Teorema del Límite Central para mostrar que la media de la distribución muestral es igual a la de la población (Alvarado y Batanero, 2008).

Para finalizar el capítulo, una idea que se puede extraer de todo el recuento histórico del infinito es que no ha sido un concepto fácil de tratar, ni de elucidar en Matemáticas; no obstante, tiene gran importancia en muchas ramas de la misma, como el Cálculo, que en la opinión de Hilbert (1862-1943) no es más que una sinfonía del infinito, e inclusive, Ortiz (1994) señala que este objeto (el infinito) en la actualidad continúa generando problemas sin resolver, por ejemplo, la hipótesis del continuo. Entonces, cuando se habla del infinito no se hace referencia a un asunto acabado sino a un ente que tiene aún mucho que trabajar, investigar y dilucidar; como se dice coloquialmente, “la historia de objeto se continúa escribiendo”.

4. RESULTADOS

Este capítulo presenta una descripción de las categorías utilizadas en la clasificación de los usos del infinito, usos que se identificaron en la revisión documental, así como una breve caracterización de estos. Ante ello, vale la pena destacar que desde el anteproyecto de Trabajo de Grado se plantearon, de forma intuitiva y sin ninguna pretensión particular, cinco categorías pertenecientes al área de Matemáticas, a saber: Aritmética, Geometría, Álgebra, Cálculo y Estadística. Sin embargo, en el trascurso de la revisión histórica del infinito hubo la necesidad de agregar otras categorías atendiendo a que un conjunto de usos registrados no se podía incluir en alguna de las categorías preestablecidas. En ese sentido, las nuevas categorías que se debieron añadir fueron: Teoría de Conjuntos, Física, Filosofía, Religión y Paralogística. Al respecto, hay que explicitar que no se ahondará mucho en Física, Filosofía y Religión debido a que el objetivo general de este trabajo alude a caracterizar los usos que se le ha dado al infinito en algunas ramas de las Matemáticas.

Por último, es importante destacar que se encontraron usos que pertenecen a más de una categoría, lo cual permite concluir que estas no son disyuntas y que las distintas ramas de las Matemáticas se complementan entre sí. De hecho, en muchas ocasiones se necesitan unas de las otras para poder subsistir. Sin más preámbulo, ahora se procederá a exponer la forma en que se organizó la información recopilada.

4.1. Organización de la información

La información obtenida mediante la revisión documental se organizó haciendo uso de una tabla de doble entrada, con la finalidad de presentar dichos datos de una manera sucinta y sistemática, de tal manera que en la primera columna de dicha tabla se reportaron las fuentes bibliográficas principales y en la primera fila las categorías anteriormente mencionadas (ver Tabla 5). En las celdas de la tabla se ubicaron los nombres de los matemáticos que se reportan en la fuente de la fila respectiva y cuyos aportes fueron mayoritarios en la categoría de la columna respectiva.

Como se mencionó en la subsección 1.2.2.3, no fueron muchos los usos del infinito que se hallaron en Estadística, por ello fue necesario buscar fuentes bibliográficas específicas que centraran su atención en la historia de la Estadística y desde ahí, indagar otros usos del infinito en esta categoría. A razón de lo anterior, en la última fila de la *Tabla 5* fue necesario incluir a "Varios" como una fuente primaria que hiciera referencia a todos los autores que se consultaron para completar dicha categoría. Un trabajo similar al que se hizo con Estadística se realizó con la categoría Álgebra, de la cual no se había encontrado ningún uso del infinito desde las fuentes empleadas para la revisión documental. Sin embargo, no fue posible rastrear usos del infinito en esta categoría en documentos que aludieran a la Historia del Álgebra, pero de este hallazgo se hablará en la subsección 4.2.4. Así, a continuación, se presenta la tabla que relaciona los autores con las categorías como una presentación inicial del trabajo hecho; más adelante se describirá con detalle cómo se entendieron cada una de las categorías empleadas.

Tabla 5. Clasificación de matemáticos o pensadores según categorías

Núm.	FUENTES	USOS EN									
		Geometría	**Aritmética**	**Cálculo**	**Álgebra**	**Teoría de Conjuntos**	**Estadística**	**Paralógistica**	**Física**	**Religión**	**Filosofía**
1	Castro y Pérez (2007)	Demócrito, Arquimedes, Cavalieri, Kepler, Viète, Fermat, Descartes		Cavalieri Newton Leibniz Jacob Bernoulli L'Hopital Cauchy Bolzano Riemann Lagrange Weierstrass Abu Ali al-Hassam, Dirichlet, Maclaurin Abel				Jhon Douss Scoto			
2	Hilbert (1925)			Weierstrass		Cantor					

3	López (2014)	Teeteto, Euclides, Arquímedes, Eudoxo, Galileo, Kepler, Cavalieri	Teeteto Euclides Pitágoras	Galileo, Kepler, Pascal Fermat, Newton, Leibniz, Barrow, L'Hôpital, Euler, Cauchy, Weierstrass, Bolzano, Saint Vincent, Robinson	Cantor		Zenón, Aristóteles Newton		Anaximand ro Pitágoras Aristóteles
4	Gracián (2010)	Pitágoras, Euclides, Desargues, Eudoxo		Newton Leibniz Bolzano	Galileo Cantor		Copérnico, Kepler		Platón Aristóteles Zenón Pitágoras
5	Bombal (2010)	Kepler Cavalieri Kronecker		Kepler, Cavalieri, Newton, Leibniz, Cauchy	David Hilbert Galileo Bolzano Dedekind Cantor Zermelo, Fraekel, Robinson		Aristóteles , Copérnico Kepler, Galileo, Newton Isodoro, Zenón	Filipón, San Agustín, Tomas de Aquino, Pascal	Aristóteles , Galileo, Newton, Zenón, Gauss

6	Arrigo et al. (2011)	Euclides, Arquímedes, Descartes	Peano, Euler, Galileo Pitágoras, Cantor Dedekind, Meray	Cavalieri, Torricelli Fermat, Pascal, Leibniz, Newton Euler Los Bernoulli	Frege, Peano, Newman, Cantor, Dedekind	Gauss, Jakob Bernoulli	Zenón	Zenón Demócrito Aristóteles Newton		Kant
7	Piñeiro (2013)	Galileo	Peano	Newton, Leibniz, Cantor, Weierstrass	Dedekind, Bolzano, Cantor, Galileo, Frege, Zermelo, Fraenkel, Newman, Bernays, Morse, Kelley		Bulari, Forti Cantor, Rusell, Bolzano, Aristóteles	Aristóteles	Agustín de Hipona	Aristóteles
8	Ortiz (1994)	Galileo		Cauchy	Cantor, Gödel, Cohen		Zermelo, Fraenklen, Bolzano		Agustín de Hipona, Tomas de Aquino, Kant, Cantor	
9	Bolzano (1991)	J.K Fisher	Johann Schulz	Cauchy, Gauss, Euler	Bolzano, Galileo		Bolzano, Galileo, Johann Schulz	Newton, Kant, Johann Schulz		Hegel, Spinoza

10	Varios (Estadística): Arias (2006) (Bianco y Martínez, 2004)	Moguel Pierre Simón, Laplace, Jacob Bernoulli, Moivre, Aleksandr Lyapunov

A partir de la tabla anterior se construyeron dos tablas más, naturalmente, con finalidades diferentes. La primera de estas (*Tabla 6*) tiene como objetivo relacionar la existencia de usos del infinito en cada categoría con las fuentes bibliográficas que se utilizaron para realizar esta revisión documental, prescindiendo del nombre de los matemáticos que hayan aportado en cada caso.

Tabla 6. Contenido de las fuentes en relación con las categorías definidas para este trabajo.

Fuente	**Usos en**									
	Geo [1]	**Arit.**	**Cál.**	**Álg.**	**T. Conj.**	**Esta.**	**Para.**	**Física**	**Reli.**	**Filo.**
Castro y Pérez (2007)	X		X		X		X			
Hilbert (1925)			X		X					
López (2014)	X	X	X		X			X		X
Gracián (2010)	X		X		X			X		X
Bombal. (2010)	X		X		X			X	X	X
Arrigo et al. (2011)	X	X	X		X	X	X	X		X
Piñeiro (2013)	X	X	X		X		X	X	X	X
Ortiz (1994)	X		X		X		X		X	
Bolzano (1991)	X	X	X		X		X	X	X	X
Varios						X				

Esta tabla permite observar claramente, quizás por ser más resumida, que para la categoría de Álgebra no se encontraron usos del infinito en ninguna de las fuentes. Esto posibilita una vez más preguntarse por la importancia del concepto del infinito en el desarrollo histórico del Álgebra[48], asunto en el que, como se mencionó, se profundizará más adelante (ver sección 4.2.4).

La tercera y última tabla (*Tabla 7*) relaciona, por una parte, las diez categorías definidas junto con las fuentes bibliográficas en las que se encontraron usos de alguna categoría y, por

[48] Cuando se habla de Álgebra se refiere aquí al Álgebra Clásica que va hasta el *siglo XVI O XVII*.

otra parte, las fuentes bibliográficas con los pensadores o matemáticos los cuales usaron el infinito en la Historia de las Matemáticas.

Tabla 7. Categorías versus fuentes versus pensadores

Usos en	Fuentes	Matemáticos/Pensadores
Geometría	Castro (2007); López (2014); Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); (Ortiz 1994); Bolzano (1991); Gracián (2010); Bombal (2010)	Demócrito, Arquímedes, Cavalieri, Kepler, Viète, Fermat, Descartes, Teeteto, Euclides, Eudoxo, Galileo, Cavalieri, Pascal, Saint Vincent, Pitágoras, Euclides, Desargues, Eudoxo, Galileo; J.K Fisher, Kronecker
Aritmética	López (2014); Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); Bolzano (1991)	Teeteto, Euclides, Pitágoras; Peano, Euler, Galileo, Johann Schulz
Cálculo	Castro 2007; Hilbert (1925); López (2014); Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); (Ortiz 1994); Bolzano (1991); Gracián (2010); Bombal (2010)	Cavalieri, Newton, Leibniz, L'Hôpital, Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Abu Ali al-Hassam, Saint Vicent, Galileo, Kepler, Pascal, Fermat, Barrow, Berkeley, Euler, Torricelli, Los Bernoulli, Lagrange, Abraham Robinson, Dirichlet, Maclaurin, Abel
Álgebra		
Teoría de Conjuntos	Hilbert (1925); López (2014); Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); Bolzano (1991); Gracián (2010); Bombal (2010)	Cantor, Frege, Peano, Newman, Dedekind, Bolzano, Cantor, Galileo, Frege, Zermelo, Fraenkel, Newman, Bernays, Morse, Kelley Gödel, Cohen, Hilbert, Robinson
Estadística	Arrigo *et al* (2011); Varios	Gauss, Jakob Bernoulli, Moguel Pierre, Simón Laplace, Jacob Bernoulli, Abraham De Moivre, Aleksandr Lyapunov
Paralogística	Castro (2014); Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); Ortiz (1994) ;); Bolzano (1991)	Jhon Douss Scoto, Zenón, Galileo, Bulari-Forti, Cantor, Rusell, Bolzano, Johann Schulz
Física	López (2014); Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); Bolzano (1991); Gracián (2010); Hilbert (1925); Ortiz (1994); Bombal (2010)	Zenón, Aristóteles, Newton, Demócrito, Kant, Johann Schulz, Einstein, Copérnico, Kepler, Galileo, Isodoro de Sevilla, Zenón
Religión	Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); (Ortiz 1994);	Agustín de Hipona; Cantor; Tomas de Aquino; Kant;

Filosofía	López (2014); Arrigo *et al* (2011); Piñeiro (2013); Bolzano (1991); Gracián (2010); Bombal (2010)	Anaximandro, Pitágoras, Aristóteles; Kant, Hegel, Spinoza, Platón, Gauss

Hasta el momento se ha presentado la forma en que se organizó la información recopilada, pero aún falta describir tanto qué se entiende por cada categoría y los usos del infinito que se encontraron en cada una de ellas.

4.2. Descripción de categorías

En la presente subsección se describirán las categorías que se utilizaron para clasificar el uso del infinito según la rama de las Matemáticas (Aritmética, Geometría, Álgebra, Estadística, etc.) o el área del conocimiento al que corresponde (Física, Filosofía, etc.), además de los usos reportados en cada una de ellas.

4.2.1. Geometría

En esta categoría se debe aclarar que según la revisión documental solo se encontraron resultados relativos a las Geometrías Euclidiana, Analítica y Proyectiva.

En la Geometría Euclidiana se encontraron gran cantidad de usos del infinito; en principio relacionados como *ser* en potencia y luego, como *ser* en acto. La mayoría de estos usos se desprendieron de propiedades de las figuras geométricas (*e.g.,* continuidad, metricidad, etc.) y de verlas como una colección de puntos infinitos en sentido actual. Por ejemplo, los griegos se caracterizaron por soslayar el infinito actual en Geometría siguiendo el mando aristotélico. Sin embargo, no siempre lograron eludir al infinito; en particular, Euclides hace un uso del infinito en acto (aunque implícito) al demostrar que la medida de un ángulo de contingencia (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011) es menor que la medida de cualquier ángulo rectilíneo.

Luego, nace otro tipo de Geometría que vinculó al infinito de manera distinta a la utilizada por los antiguos helenos, a saber: la Geometría Proyectiva[49]. Esta geometría postula que dos rectas paralelas se intersecan en el infinito[50], lo que implica que, todo par de rectas en el plano se intersecan, o lo hacen en lo finito o lo infinito. De esta manera, en la Geometría Proyectiva hay un uso del infinito actual y no en potencia, como venía aconteciendo hasta ese momento desde la perspectiva aristotélica.

[49] Se encarga de estudiar la representación de figuras de tres dimensiones sobre un plano.

[50] Lo que se podría decir que es una ampliación al teorema de Pappus, el cual dice: “Dadas dos ternas de puntos tal que $A - B - C$ y $H - I - J$. Si $\{D\} = \overleftrightarrow{AI} \cap \overleftrightarrow{HB}$, $\{E\} = \overleftrightarrow{HC} \cap \overleftrightarrow{AJ}$ y $\{F\} = \overleftrightarrow{BJ} \cap \overleftrightarrow{CI}$, entonces D, E y F son colineales”.

Casi un siglo después surge la Geometría Analítica[51], la cual obliga a considerar las figuras geométricas como un todo, es decir, como un conjunto con infinitos puntos en el sentido actual, dado que a cada figura geométrica le corresponde una ecuación, y en cada una de estas hay infinitas parejas ordenadas de números reales que las satisfacen. Desde esta óptica, se continúa con el rompimiento del mandato aristotélico de solo emplear el infinito potencial.

Otro uso del infinito en la Geometría (situado entre los *siglos XVII* y *XVIII*), que se identificó desde la revisión documental, estuvo relacionado con la recta real. Dicho uso aludió, principalmente, a que los números reales completaban la recta, es decir, se puede establecer una biyección entre todos los puntos de una recta y cada número real. Hoy en día este hecho se suele conocer en los sistemas teóricos de Geometría Analítica gracias al *axioma del supremo*. Una consecuencia implícita de lo anterior es que una recta y los números reales son conjuntos *equipotentes* (*i.e.*, tienen la misma potencia o cardinal).

Para el *siglo XIX*, Cantor también utiliza el infinito en Geometría, hecho que le permite deducir que la potencia de un segmento, de una recta, de un plano y del espacio tridimensional son iguales entre sí. Un resultado que, como se advirtió, generó mucha controversia en su tiempo (ver subsección 3.4.6).

En resumen, se observó que los tres tipos de Geometría mencionados necesitaron del infinito en acto para poder evolucionar y madurar muchas ideas de los antiguos griegos. Hay que señalar también que el uso del infinito en la Geometría es constante, puesto que la mayoría de objetos geométricos pueden ser estudiados actualmente como conjuntos con infinitos puntos (*e.g.,* los segmentos, los polígonos, las circunferencias, las rectas, los planos, el espacio, etc.).

4.2.2. Aritmética

A partir de la clasificación mencionada y de la revisión documental se localizaron cuatro asuntos en los cuales el infinito ha tenido alguna participación o se ha empleado en la Aritmética, los cuales son: (i) sistemas de numeración, (ii) la teoría de números y (iii) el concepto de número. A su vez se identificó un uso particular del infinito potencial, ya que a partir de un conjunto de símbolos y reglas finitas se pueden generar infinitos números. Por ejemplo, en el sistema de numeración decimal hay diez cifras que combinadas bajo ciertas reglas finitas pueden crear representaciones para infinitos números.

[51] La Geometría Analítica es entendida, desde la revisión documental, como la conjunción entre el Álgebra Clásica y la Geometría griega en un sistema coordenado (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011; Castro & Pérez, 2007; Rey Pastor & Babini, 1985).

En relación a (i), se hallaron diversos usos del concepto de infinito relativos a lo que hoy se conoce como conjuntos numéricos. Los griegos, por ejemplo, sabían que los números naturales eran infinitos en potencia y con base en este hecho, Euclides justificó que hay más números primos que cualquier cantidad propuesta. Por otra parte, para hacer alusión al infinito actual en los antiguos helenos, se debe mencionar a Pitágoras –y desde luego a su escuela– por su descubrimiento de ternas pitagóricas[52] que no siempre eran racionales (*i.e.,* irracionales), suceso que lo llevó a *geometrizar* su aritmética y a *soslayar* el infinito en acto.

Después de casi dos milenios del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y, por ende, se empezó a centrar la atención en la formalización de un nuevo conjunto numérico conformado por la unión disyunta entre los racionales y los irracionales, es decir, los reales, y se propusieron diversas construcciones de estos –o de subconjuntos de estos–. Entre ellos se encuentran Weierstrass, Dedekind, Meray, Cantor, Peano y Von Neumann. Lo común es que en todas las construcciones hay usos del infinito (ya sea en acto o en potencia), como los que se analizan a continuación:

Tabla 8. Breve descripción de los usos del infinito en las construcciones para $\mathbb{R}$

Núm.	Matemático	Descripción del uso del infinito
1.	Weierstrass	Para la construcción de los números irracionales utiliza la idea de agregados infinitos.
2.	Dedekind	Un uso del infinito en la construcción de Dedekind tiene que ver con el postulado de continuidad de la recta, que dejaba en evidencia que, sin los números irracionales, la recta numérica tendría infinitas "lagunas".
3.	Meray	Utiliza hechos sobre convergencia de sucesiones que se vinculan con la idea de límite e infinito potencial.
4.	Cantor	De manera muy similar a la construcción de Meray de los números reales, Cantor provee una definición basada en la idea de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.

En la construcción de los números naturales presentada por Peano (1858-1932) y Neumann (1903-1957), también, hay uso del infinito actual.

[52] Entiéndase como cualquier trio de números a, b y c ¿enteros? ¿naturales? ¿racionales? que satisfacen la expresión $a^2 + b^2 = c^2$.

Tabla 9. Construcciones de los números naturales rastreadas en la revisión documental

Matemático	Descripción del uso del infinito
Peano	De los axiomas propuestos por Peano para la definición de números naturales, se identifican dos que hacen empleo del infinito, a saber: 1. La totalidad de los números naturales es una clase indicada con $\mathbb{N}$. Aquí se vislumbra un uso del infinito actual, al considerar los naturales como una totalidad. 2. Axioma de inducción: si una clase C contiene a 0 y si para cada a de C, también se tiene a^+, entonces C incluye a $\mathbb{N}$. Aquí se entrevé un uso del infinito potencial.
Von Neumann	Desde un enfoque conjuntista, von Neumann define los números naturales a partir del cardinal de un conjunto. Se observa un uso del infinito potencial.

En cuanto al segundo asunto en el que el infinito ha tenido presencia, estos resultados se encuentran en la línea de la Teoría de Números, a saber, el método de descenso al infinito introducido por Pierre Fermat, en el cual se utiliza al infinito como un argumento de contradicción puesto que: si para cada número $n \in \mathbb{N}$, el suponer que la propiedad p implica que existe $m < n$ que también satisface p entonces es una falacia en cuanto que conduce a una sucesión decreciente e infinita de números naturales. Además, hay varios teoremas de subconjuntos de números enteros que son infinitos en potencia (*e.g.,* Euclides y el Teorema de infinidad de números primos).

Con respecto a la tercera línea, la noción de número también ha sido influenciada por la idea de infinito. Aquí, se observó una polisemia entre algunos matemáticos a través de la historia. Por ejemplo, Euler entendía el número como algo finito, pero Cantor difería y defendía la idea de que los ordinales y cardinales transfinitos también eran números[53]. Lo anterior, sugiere una ampliación del concepto de número. Sin embargo, hoy hay consenso en las Matemáticas que el infinito no es un número y, por tanto, los transfinitos requieren de una aritmética distinta a la usual.

[53] Razón que lo conllevó a crear una aritmética para estos "números".

4.2.3. Cálculo

Esta fue una de las categorías en la cual más se encontraron usos del concepto de infinito. Desde la indagación histórica que se realizó, se identificaron por lo menos cuatro formas de interpretar el Cálculo, a saber: (i) los antecedentes del Cálculo, (ii) el Cálculo newtoniano y leibniciano, (iii) la formalización del Cálculo y (iv) el Cálculo no estándar (ver sección 3.4.4), de tal manera que en cada una de estas interpretaciones hay usos/tratamientos del infinito con matices distintos, que a continuación se procederá a dilucidar.

En cuanto a los antecedentes del Cálculo se refieren, principalmente, a las ideas que dieron origen a varios conceptos propios del Cálculo moderno y que se produjeron antes del *siglo XVII* (*i.e.,* previas a Newton y Leibniz). Se coincide con la postura de Arrigo, D'Amore, y Sbaragli (2011), quienes reseñan que tal conjunto de ideas primitivas conformaba un Cálculo distinto al actual y que, por lo general, se vinculaba directamente con la Geometría en cuanto que se generó, básicamente, para resolver varios problemas geométricos.

Ahora, los usos del infinito en este "pre-Cálculo" se caracterizaron por ser flexibles, intuitivos y muy relacionados con los conceptos de área y volumen de figuras geométricas y de continuidad –por ende, con el infinito por divisibilidad–. Aquí, los ejemplos de utilización del infinito aluden, *grosso modo*, a las diversas variaciones del método de exhaución de Eudoxo-Arquímedes, las cuales son: el método de Valerio, la regla de *aproximación* de Kepler, los *indivisibles* de Cavalieri, y las mejoras de Torricelli a este último. También, se debe mencionar otro uso del infinito relacionado con las series infinitas; en tal labor sobresalen nombres como el de Abu Ali al-Hassam, Pascal, Wallis, entre otros.

Acerca de la interpretación del Cálculo, es necesario aclarar que con el Cálculo newtoniano y leibniciano se quiere hacer principalmente referencia al Cálculo creado/descubierto por Newton y Leibniz. En este momento histórico, el Cálculo utiliza de forma intensiva un nuevo concepto, a saber: los *infinitesimales*. Los infinitesimales fueron entendidos de diversas maneras a través de la HM, asunto que no será ahondado en esta subsección por cuanto no tiene relación directa con el objetivo de este trabajo. No obstante, a continuación, se presentan diversas nociones del concepto de infinitesimal que se rastrearon en la revisión literaria.

Tabla 10. Nociones de infinitesimal encontradas en algunas fuentes de la revisión documental

Fuente	¿Qué es un infinitesimal?
Piñeiro (2013)	Un infinitésimo sería un segmento «infinitamente pequeño», un objeto matemático a medio camino entre un punto de longitud cero y un segmento pequeñísimo. En otras palabras, sería una línea más pequeña que cualquier otra (p. 77)
Gracián (2010)	(…) magnitudes asociadas a elementos geométricos, son susceptibles de dividirse tantas veces como se quiera para utilizarlos luego como elementos indivisibles,

	constituyentes de un todo (p. 73).
Castro y Pérez (2007)	Según Leibniz, son números mayores que 0, pero menores que todos los reales positivos (p. 62).
López (2014)	Objetos matemáticos cuyo germen son los indivisibles y se refiere esencialmente a cantidades infinitamente pequeñas.

La tabla anterior permite identificar otro uso del infinito asociado a la noción/definición de un infinitesimal. Lo curioso es que unas fuentes se refieren a los infinitesimales como un objeto geométrico infinitamente pequeño, mientras que otras como números o cantidades infinitamente pequeñas. En ese sentido, casi todos los resultados –por no decir, todos– del Cálculo newtoniano y leibniciano son, como lo decía Hilbert (1925), una sinfonía del infinito puesto que el concepto generador de tales resultados se relaciona con el infinito.

Lo anterior faculta para inferir que los usos del infinito en el Cálculo son prácticamente "innumerables" por cuanto el concepto de base (*i.e.*, los infinitesimales) está relacionado con el infinito. Por tal motivo, se presentará una lista de los problemas en los que el Cálculo ha sido una herramienta de solución y, en consecuencia, el infinito ha sido empleado de alguna forma:

- Estudiar la determinación de rectas tangentes a una curva.
- Problemas de curvatura.
- Problemas de máximos y mínimos de una curva.
- Determinación de cuadraturas y cubaturas (*i.e.*, de áreas y volúmenes).
- Centros de gravedad.
- Algoritmos infinitos (series, productos infinitos, fracciones continuas infinitas, etc.)

Hay que aclarar que esta lista de problemas no es exhaustiva en cuanto que es producto de la revisión documental desarrollado en el marco de este trabajo.

De igual modo, en el asunto (iii), la formalización del Cálculo, un segundo momento del Cálculo newtoniano y leibniciano fue su proceso de formalización a través del concepto de límite funcional (principalmente se resalta a Weierstrass y Cauchy). Gracias a este nuevo concepto los infinitesimales fueron desterrados del Cálculo y formalizado el infinito potencial. Sin embargo, aún faltaba otro paso para la formalización del Cálculo y consistió en la construcción rigurosa de los números reales. En este último paso también hubo presencia del concepto de infinito, como se exhibió en la Tabla 8 y la Tabla 9.

Por último, la última interpretación del Cálculo que se presenta es el Cálculo no estándar, el cual surge tras una propuesta de Abraham Robinson (1918-1974) para sistematizar el Cálculo haciendo uso de los infinitésimos y, por ende, del infinito. Al igual que el Cálculo ordinario, en esta perspectiva hay innumerables usos del infinito, puesto que todos los resultados se construyen a partir del infinitésimo. El Cálculo no estándar considera infinitesimales vistos como una cantidad positiva (*i.e.,* mayor que cero) menor que cualquier otra dada.

4.2.4. Álgebra

Esta categoría hace referencia únicamente al Álgebra Clásica (la cual se desarrolló aproximadamente hasta el *siglo XVI*), que por lo general engloba, por una parte, el descubrimiento de algoritmos y fórmulas para resolver ecuaciones y, por otra parte, la utilización de un lenguaje simbólico para reportar dichos métodos y fórmulas. Ahora, desde la revisión documental realizada no se encontraron usos explícitos del infinito en Álgebra. Sin embargo, la situación parece no terminar ahí, pues con base en la definición que se ha propuesto para esta categoría es razonable pensar que no hay usos del infinito en ella. Esta es una hipótesis que se propone en este trabajo. Para argumentar esta idea, se esgrimirán tres justificaciones que apoyan dicha hipótesis, estas son: la diferencia entre el Álgebra y el Cálculo, el papel del Álgebra en la historia del infinito, y la nula relación entre los objetos algebraicos clásicos y el infinito.

El primer argumento versa sobre la diferencia entre el Álgebra y el Cálculo, pues al parecer para los creadores de este último la discrepancia entre estas ramas de las Matemáticas se debe principalmente al concepto del infinito. Por ejemplo, Newton en su obra *De analysi per aequations numero terminorum infinitas*, denomina al Álgebra como el análisis ordinario y afirma:

> Y todo el análisis ordinario (es decir, el álgebra) se lleva a cabo por medio de ecuaciones con un número finito de términos, este nuevo método puede conseguir siempre lo mismo con ecuaciones infinitas. Así que no he tenido ningún inconveniente en darle, por analogía, el mismo nombre de Análisis… con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geométricamente las áreas, longitudes, etc., de las curvas (Boyer, 1986, p. 497).

Boyer (1986) sugiere que Newton con la frase *el nuevo método* se refiere al Cálculo en tanto que la obra *De analysi* contiene varios resultados de este. En ese sentido, se puede inferir que para Newton el Álgebra Clásica trabaja con objetos matemáticos relacionados con lo finito y el Cálculo con objetos vinculados con el infinito, o al menos es lo que se puede entrever del fragmento tomado de su obra. Esta última idea también es apoyada por González (2003).

Una segunda línea argumentativa para defender la hipótesis propuesta es que desde la revisión documental llevada a cabo se explicita que el Álgebra jugó un papel importante para el desarrollo del infinito en acto, pero no en el sentido contrario, en tanto que motivó la creación de una nueva geometría separada, en cierto sentido, de la Geometría griega -que como se sabe, se construyó utilizando el infinito en potencia- (Castro y Pérez, 2007; Arrigo, D'Amore, y Sbaragli, 2011); esta nueva geometría requería que se aceptara la existencia del infinito en acto, pues concebía a los objetos geométricos como un todo y, por ende, como una colección infinita. En síntesis, se encontró que el Álgebra favoreció el surgimiento de la Geometría Analítica, la cual, sí tiene relación directa con el infinito, pero no se halló que el infinito hubiese tenido presencia en el desarrollo del Álgebra.

Finalmente, otro trazo para justificar la hipótesis en cuestión refiere a que los objetos de estudio en Álgebra Clásica (*e.g.,* los polinomios, los sistemas de ecuaciones, las desigualdades, las operaciones entre polinomios, las incógnitas, etc.) no tienen relación directa con el infinito. Siempre estos objetos se definen de manera finita (*e.g.,* los polinomios de n términos, las ecuaciones con n incógnitas, el sistema de n ecuaciones, el Teorema Fundamental del Álgebra, etc.). En ese sentido, parece razonable pensar que, en el Álgebra clásica, el infinito no ha tenido intervención, al menos directa.

4.2.5. Teoría de Conjuntos

La Teoría de Conjuntos estudia las propiedades y relaciones entre conjuntos. Al respecto, se encontraron usos del infinito desde la Edad Moderna[54]; aunque en principio todavía prevalecía la concepción aristotélica, gracias a los estudios realizados por matemáticos como Galileo, Dedekind, Bolzano y Cantor, quienes se dieron cuenta que tenía sentido hablar de conjuntos con infinito número de elementos, identificando así ciertas propiedades o relaciones de estos, lo cual desembocó en la aceptación y formalización/sistematización del infinito actual.

A continuación, se presentan algunos usos del infinito, en los cuales el infinito se utilizó para sustentar o contradecir diferentes teoremas, incorporar términos y definir propiedades de objetos matemáticos, entre otros, además los pensadores que influyeron en estos:

En primer lugar, se puede identificar el uso paradójico que le dio Galileo Galilei (Ver 3.3.1) a los conjuntos infinitos resultó en un contraejemplo para el axioma: “El todo es mayor que la parte” y así mismo, identificar una noción, caracterizar esta propiedad y definir un conjunto infinito con base en ella. A pesar de que el infinito se puede utilizar como contraejemplo, como en la situación anterior, este lo usó Dedekind y Cantor, debido a que

[54] Debido que la fundación y sistematización de la Teoría de Conjuntos fue en 1784 con George Cantor.

gracias a sus propios trabajos empleando series infinitas demostraron la densidad y no continuidad de los números reales.

En la misma línea, de usar el infinito como prueba se encuentran diversos trabajos de Cantor, el cual usó el infinito en diversos momentos como: (i) Demostración de teoremas de Geometría, (ii) Extender la noción de cardinalidad y a su vez el concepto de número y (iii) El Teorema de Cantor y la Hipótesis del continuo. En cuanto a (i), Cantor realizó diversas demostraciones alrededor de los conjuntos infinitos como: los naturales, los reales, los racionales, entre otros. Pero, también, utilizó objetos geométricos comparando la cantidad de elementos de estos, por ejemplo, hay la misma cantidad de puntos en un segmento como en toda la recta real y que hay tantos puntos en el plano como en una recta.

El segundo momento Cantor extiende la noción de cardinalidad, debido a que al descubrir que el infinito de los reales era superior al de los naturales –lo que implica que los números reales no son numerables– y esto lo condujo a extender la noción de cardinal para que esta se aplique a conjuntos infinitos no numerables, debido a que una de las maneras para definir la cardinalidad era mediante la una correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos, la cual hasta ese entonces se había aplicado solamente en el infinito numerable y debió ampliarse a conjuntos que no cumplieran tal propiedad. Considerando lo anterior, Cantor quería denotar cantidades que reflejaran cuantías que no fueran finitas, por lo tanto, utilizó la letra hebrea álef ($\aleph$), para identificar los cardinales transfinitos, de tal manera que el cardinal de los números naturales lo llamó $\aleph_0$. De este modo, orgánicamente le surgió la siguiente pregunta a Cantor: ¿qué conjuntos tiene igual y mayor cardinalidad que $\aleph_0$?, lo cual permitió, entre otras cosas, llegar a conclusiones como que el cardinal de los enteros es el mismo que los racionales y los naturales.

Por último, en relación con el numeral (iii) el Teorema de Cantor y la Hipótesis del continuo, se reconoce que el Teorema de Cantor es un teorema aplicable para cualquier conjunto A, ya sea finito o infinito; este consiste en que el conjunto partes de cualquier conjunto A tiene una cardinalidad estrictamente mayor que la cardinalidad de A. Este teorema se usó para los números transfinitos debido a que si tenía un conjunto infinito y aplicaba el teorema repetitivamente se obtenía una jerarquía infinita de cardinales infinitos, de modo que cada uno era mayor que otro, por ejemplo, si $A = \mathbb{N}$, entonces $\aleph_0 < |P(\mathbb{N})|$, por lo tanto, se podía definir $\aleph_1$ como el menor número ordinal mayor que $\aleph_0$ y siguiendo el razonamiento se llega a $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$. De allí la Hipótesis del continuo, puesto que se tenía que el infinito de los reales era mayor que el de los naturales, sin embargo, nada garantizaba que **no** existía un infinito que estuviera entre el infinito de los naturales y el de los reales.

Por otro lado, debido a las nociones de conjunto infinito, el axioma de existencia de conjunto infinito y el uso explicito que hacen estos del infinito actual en los conjuntos infinitos, se termina por aceptar el infinito actual y se formaliza, lo cual genera nuevas y diferentes opiniones como la de Cantor, al afirmar que el infinito potencial solo era una premisa del actual.

En síntesis, en Teoría de Conjuntos el infinito se utiliza de manera distinta al Cálculo y a la Geometría ya que se introduce una nueva idea que se denominará infinito por multiplicidad, la cual sintetiza que un conjunto es infinito si no cumple con el axioma del todo es mayor que su parte. Idea que se puede generalizar del siguiente modo: Sea Ψ una estructura matemática[55]; Ψ es infinita si y solo si existe una subestructura ψ de Ψ tal que ψ y Ψ son isomorfas. Por otra parte, en la Teoría de Conjuntos se admiten argumentos globales sobre dichas estructuras, por ejemplo, la correspondencia biunívoca que se realiza para demostrar que dos conjuntos son equipotentes se piensa de manera terminada, es decir, sobre todos los elementos de los conjuntos y no como un razonamiento que siempre se podrá continuar construyendo, como sí se hace en el Cálculo.

4.2.6. Estadística

La Estadística que presenta presencia del infinito, según la revisión documental, es la Estadística Inferencial, puesto que según Levine, Timothy y Berenson, (2006), esta consiste en métodos y procedimientos con la finalidad de inferir determinadas propiedades de una población, analizando una muestra. A su vez, esta población a estudiar puede ser finita o infinita[56], de tal manera que al considerarse como infinita es relevante establecer su comportamiento y adecuar las definiciones y teoremas de lo finito. De allí, se empieza a estudiar el comportamiento de estas población infinitas, de tal manera que en el *siglo XVIII*, varios matemáticos como Aleksandr Lyapunov, Pierre Simón Laplace y Moivre realizaron diferentes aportes sobre las distribuciones muéstrales, puesto que al momento de estudiar el comportamiento de una distribución bajo un espacio muestral infinito, se llega a conclusiones como la del matemático Pierre Simón Laplace, el cual demostró que la distribución normal es una aproximación de una binomial cuando el espacio muestral es muy grande; esto le dio lugar a Laplace para reformular la anterior afirmación, con el fin de poder plantear el Teorema de Límite Central, el cual consiste en establecer que dada una muestra aleatoria lo suficientemente grande, las distribución de las medias muestrales seguirá una distribución normal, y posteriormente su demostración por parte de Aleksandr Lyapunov.

Por otro lado, la incorporación de poblaciones infinitas y en general del infinito abre el campo probabilístico a espacio muestrales, los cuales pueden ser finitos o infinitos. Sin

[55] Una estructura matemática es un conjunto $\delta = \{\rho, R_1, R_2, R_3, \dots R_n\}$ tal que $\rho = \{x, y, z, \dots\}$ es el conjunto de elementos principales y R_i, con $1 < i < n$, es una relación entre esos elementos.

[56] Infinito, desde un enfoque potencial, ya que reconoce muchas poblaciones infinitas cuando esta es lo "suficientemente" grande y no se conoce el tamaño de esta.

embargo, en un espacio muestral infinito, a pesar de que este puede tener una cantidad de elementos "infinita" de muestras, estas tienden a estabilizarle a una probabilidad laplaceana, debido a que Jacob Bernoulli estableció que la relación entre el número de casos favorables a un suceso sobre el número total de sucesos sirve para indicar el valor esperado de un experimento (Franco, Olmedo y Valderas, 2016).

Esto se asocia con la relación entre el azar y el infinito, de tal manera que sin importar si los resultados de un experimento son imprescindibles, que no correspondan a una distribución normal, en el infinito estos resultados se estabilizarán hacia un valor determinado.

4.2.7. Paralogística

Esta categoría es una creación propia, en la cual se clasificaron todas las paradojas que se encontraron en la revisión histórica que se realizó del infinito. Por paradoja se entiende a un enunciado[57] p tal que se tiene p y *no* p. En seguida se mencionarán las paradojas encontradas y se argumentará el por qué realmente son paradojas bajo la definición expuesta y de qué manera se utiliza al infinito en cada una de ellas.

Las tres aporías de Zenón, reportadas en la sección 3.1.3, toman como supuesto que el movimiento es posible (presumen que un enunciado p es verdadero), pero a través de una serie de razonamientos, en los que se vincula al infinito, llegan a que el movimiento no es posible (*i.e.*, no se cumple p). En consecuencia, la posibilidad del movimiento es una paradoja porque toma dos valores de verdad.

La paradoja de Aristóteles parte asumiendo que segmento de longitud $l > 0$ es una colección infinita de puntos. Como cada punto tiene dimensión[58] cero, entonces la longitud del segmento estará dada por $\sum_{n=1}^{\infty} 0$. Así, $l = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ y, en consecuencia, se tiene que $l = 0$ y $l > 0$, lo cual es una paradoja. Hay que señalar que esta paradoja fue resuelta por Cantor diciendo que la cantidad de ceros que se está sumando (correspondientes a la dimensión de cada punto) es numerable; no obstante, en una suma de una cantidad no numerable de ceros puede dar como resultado un número mayor que cero y considerando que un segmento es un conjunto no numerable, entonces no habría lugar a la paradoja de Aristóteles.

La paradoja de Galileo parte asumiendo que los números cuadrados son menores en cantidad que los números naturales. No obstante, al hacer una correspondencia biunívoca entre cada elemento de los números cuadrados y de los números naturales –hecho que implica hacer la biyección infinitamente–, se concluye que dichos conjuntos son *equipotentes*. En ese

[57] Observe que se concibe como un 'enunciado' y no como una 'proposición' puesto que una proposición solo puede tomar un valor de verdad, siguiendo la lógica aristotélica usual, mientras que un enunciado puede ser calificado como verdadero y falso al mismo tiempo.
[58] Desde la Geometría Euclidiana significa que el punto no tiene ni largo, ni ancho, ni alto.

sentido, se consideró en su momento que, el determinar relaciones de orden entre los cardinales de conjuntos infinitos era otra paradoja.

La paradoja de Bulari-Forti, como se reseñó en la sección 3.4.7, comienza considerando la secuencia de todos los ordinales $\mathfrak{O}$, entonces cualquier ordinal dado pertenece a $\mathfrak{O}$. No obstante, el segundo principio de generación de los números ordinales permite concluir que hay otro ordinal que es el inmediatamente siguiente a todos ellos y, por ende, dicho ordinal no está en $\mathfrak{O}$. En resumen, $\mathfrak{O}$ no es la secuencia de todos los ordinales porque hay por lo menos un ordinal que no pertenece a ella. De este modo, se ha comprobado que la existencia del conjunto de todos los ordinales es enunciado bivalente (*i.e.*, una paradoja).

La paradoja de Russell define a un conjunto $\mathcal{N}$ mediante la propiedad de ser un conjunto que no es miembro de sí mismo. Por tanto, solo se puede cumplir algunas de las siguientes afirmaciones: $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ o $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$. Por un lado, si $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ entonces $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ puesto que esa es la propiedad que define a los elementos de $\mathcal{N}$. Por otro lado, si $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ entonces $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ en cuanto que todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos pertenecen a $\mathcal{N}$. En síntesis, $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ si y solo si $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$. Esta expresión es la forma $p \leftrightarrow \neg p$, la cual se puede reescribir como p y $\neg p$ empleando la equivalencia $(p \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$. Lo anterior permite afirmar que efectivamente la construcción del conjunto $\mathcal{N}$ es paradójica.

Y, por último, la paradoja de Cantor comienza admitiendo la existencia del conjunto de todos los conjuntos (nombre $\mathcal{U}$), entonces el cardinal de este conjunto debe ser mayor o igual a cualquier otro conjunto dado. No obstante, se sabe que el conjunto potencia de $\mathcal{U}$, ($\mathcal{P}(\mathcal{U})$), tiene un cardinal mayor que $\mathcal{U}$. En ese sentido, la condición impuesta para definir al conjunto de todos los conjuntos es otra paradoja.

Un hecho que llamó la atención sobre esta categoría fue que las paradojas de Aristóteles y Galileo dejaron de ser contradicciones después de la formalización del concepto de infinito. Por otra parte, las paradojas de Zenón dejaron de serlo gracias al uso de series, objeto matemático en el cual interviene de forma directa el infinito. Es decir, en conclusión, el sentido de estas cinco paradojas (las tres de Zenón, la de Aristóteles y la de Galileo) fue aclarado cuando se institucionalizó el infinito como concepto matemático.

4.2.8. Física

En un primer momento, el campo de la Física se ceñía bajo un razonamiento aristotélico, de tal manera que algunas de las magnitudes físicas como el espacio, tiempo y fenómenos como el movimiento se concebían meramente en sentido infinitamente potencial. De allí que el uso principal que se le da al infinito en Física está vinculado a problemas con la continuidad del espacio, tiempo y movimiento, ya que esto posibilita su infinita divisibilidad y extensión.

En seguida se mencionarán, dos usos del infinito referente a las magnitudes físicas anteriormente mencionadas.

El primero de estos se refiere a la continuidad de magnitudes físicas, puesto que Aristóteles menciona que el infinito por extensión en la Física se aplica cuando se tiene una cantidad dada y a esta se le puede agregar siempre otra cantidad dada. Mientras que el infinito por división es cuando se puede dividir una magnitud, pero no se le encuentra un fin a esta, identificando una relación entre la noción de infinito con la continuidad. Sin embargo, esto generó diversas contradicciones debido a que si se considera que las magnitudes están constituidas por "átomos"[59] no existiría una división infinita; lo que no sucede con el tiempo ya que este se considera como infinito por extensión, debido a que se pueden agregar instantes, y es infinito por división ya que al ser continuo puede ser indefinidamente divido en instantes.

El segundo uso del infinito en la Física es para descartar resultados, ya que como se mencionó anteriormente, lo infinitamente pequeño, en particular los infinitesimales, se usaron para el desarrollo del Cálculo, y esto a su vez sirvió como herramienta para los físicos, con el fin de descartar resultados debido a que, si un resultado obtenido era infinito, inmediatamente se rechazaba puesto que inicialmente no se creía que nada en el universo podía ser infinito. Vale la pena destacar, que si un resultado en Física era infinito no necesariamente significaba que no fuera real, o que los cálculos estuvieran erróneos, sino que también podía suceder que el modelo matemático no era apropiado para la situación.

4.2.9. Religión

El pensamiento cristiano (religioso) estuvo relacionado con el infinito, en particular en la Edad Media, en la que a pesar de no usar el infinito explícitamente, desde un enfoque matemático sí se presentaron distintas discusiones sobre el infinito, su uso y cómo tratarlo. Así mismo, se usó el infinito como sinónimo de cualidades religiosas de Dios como su infinitud, su omnipresencia, su amor infinito y su conocimiento, el cual, a diferencia del hombre, es absoluto e infinito. Esto dio herramientas suficientes para identificar que diversos pensadores utilizaron el infinito para contradecir o admitir la postura Aristotélica; un ejemplo de esto, es el filósofo y teólogo San Agustín, el cual uso a Dios y su omnipresencia, para poder realizar una analogía con los números y así debatir sobre el rechazo del infinito actual. Mientras que otros pensadores como Tomás de Aquino usaron a Dios como argumento del rechazo del infinito actual, ya que este, de acuerdo con las ideas de Aristóteles, afirmó que Dios es lo único infinito, puesto que sus cualidades también son infinitas. Además, Tomás realiza la misma analogía que San Agustín, pero al contrario de él concluye que los números son solamente potencialmente infinitos,

[59] Entendida como la unidad más pequeña de la materia.

debido a que siempre podemos añadir nuevos números al conjunto (Zellini, 2003 citado en García, 2014, p. 239).

4.2.10. Filosofía

Un objeto de estudio de la Filosofía es estudiar la esencia, propiedades y causas del universo (Castillo, 2013). En esta categoría la mayoría de los usos del infinito que se encontraron fueron en la civilización griega, en la cual se preguntaron sobre el origen y la existencia del universo, lo que llevó a los griegos a pensar el infinito, debido a que pretendían usarlo para explicar el mundo físico. A su vez, en ese periodo de tiempo la noción del infinito no fue unánime, de tal manera que se destacan dos posturas importantes: la eleática y la pitagórica, las cuales tuvieron gran influencia en sus seguidores y en los aportes matemáticos que realizaron.

En síntesis, se identificaron dos usos del infinito, el primero relacionado a la existencia, el límite y el origen de la realidad, del universo, puesto que el infinito actúa como ser. A causa de que el ser humano se ha cuestionado sobre el origen de las cosas, la existencia y los límites del universo, bajo esta necesidad Parménides define el *ser,* como algo infinito, indefinido, de tal manera que este abarca todo el universo, así pues, si hay algo que no pertenece al ser, ese algo no existe; ello genera distintas contradicciones ya que el *ser* debe ser inmutable, para que este exista. Esto significa que los cambios de movimiento y tiempo realmente no existen (*e.g.*, un cuerpo en un primer momento estaba en la posición A, se movió a la posición B; bajo esta concepción, la posición A nunca hubiera existido). Estas discusiones sirvieron como base de las paradojas de Zenón y sus trabajos.

Por el otro lado, el infinito sirvió para explicar cuál es el origen de las cosas, de tal manera que diversos pensadores de la Edad Antigua (como Tales, Anaximandro, entre otros) se dedicaron a buscar cuál es la materia prima, es decir de la que está hecho todas las cosas (*arjé*). De este modo, muchos pensadores escogieron uno de los cuatro elementos[60] fundamentales como *arjé.* Por ejemplo, Tales afirmó que todas las cosas estaban hechas de agua. Sin embargo, se demostró que eso no podía ser posible ya que los restantes tres elementos no estaban constituidos por este. Lo anterior condujo a los griegos a no pensar en un elemento de la naturaleza como un candidato para *arjé*, sino un objeto más abstracto, el ápeiron o infinito, definiéndolo como el *arjé* del universo, ya que este tiene que ser indefinido e infinito, debido a que debe ser algo de lo cual provengan todas las cosas que fueron, están o estarán hechas.

4.3. Usos del infinito según las categorías

A continuación, a modo de cierre y de resumen, se procederán a listar los usos que se encontraron para cada categoría.

[60] Agua, Aire, Tierra y Fuego

Geometría
• El infinito para definir propiedades de objetos geométricos (*e.g.*, se identifican relaciones de equipotencia, inconmensurabilidad entre algunos objetos geométricos) • El uso de un número infinito de etapas para la construcción de objetos geométricos (*e.g.*, la circunferencia vista como un polígono de cantidad de lados infinitos) • El empleo infinito, en particular lo infinitamente pequeño en procedimientos geométricos. Por ejemplo, el método de exhaución el cual es un procedimiento geométrico que permite aproximar el área de una figura gracias a inscribir un polígono en el que a medida que aumenta el número de lados de esta, la diferencia entre las dos áreas tiende a 0. • El uso del infinito en el desarrollo de la Geometría Proyectiva, al incorporar el objeto de punto del infinito o punto impropio, punto donde se cortan dos rectas paralelas; este fue de mucha utilidad en la aplicación principal de la Geometría Proyectiva: el Arte. • El uso del infinito en el desarrollo de la Geometría Analítica, puesto que gracias al infinito se progresó en algunos teoremas como el método para determinar la tangente a una curva en sus puntos máximos o mínimos, etc.
Aritmética
• El infinito para describir características, propiedades numéricas asociadas a objetos u conceptos matemáticos como las magnitudes inconmensurables, los números naturales, reales, etc. • El infinito para construir objetos matemáticos: Por ejemplo, se usa el infinito para construir los números irracionales, como los números π y e . • La construcción de la Aritmética de cardinales transfinitos, puesto que debido a la incorporación del conjunto de los números transfinitos fue necesario definir las operaciones básicas ente ellos (la suma, multiplicación y potenciación) a partir del cardinal de la unión y el producto cartesiano.
Cálculo
• El infinito es utilizado en dos sentidos, como una cantidad infinitamente grande y como una cantidad infinitamente pequeña en diversos algoritmos propios de esta rama de las Matemáticas. Por ejemplo, en el método de los indivisibles se consideran infinitos segmentos de tamaño infinitamente pequeño para determinar el área de una superficie, de manera análoga sucede para hallar el volumen de un sólido. • El infinito empleado como una cantidad infinitamente pequeña que en el marco de cálculos numéricos podría ser depreciada. • El infinito como herramienta que posibilita el estudio de series potencialmente infinitas (*e.g.,* su convergencia o divergencia, su radio de convergencia, etc.). • El infinito se emplea como una cualidad de lo continuo.

Teoría de Conjuntos
• El infinito como una herramienta que permite llegar a algún absurdo para refutar o condicionar axiomas o afirmaciones. Por ejemplo: El empleo de conjuntos infinitos para contradecir "El todo es mayor que la parte". • El infinito como herramienta para demostrar propiedades. Por ejemplo, la densidad y no continuidad de los números racionales se demostró gracias al trabajo realizado años atrás con respecto a las series infinitas. Además, distintas pruebas en cuanto a la cardinalidad o equipotencia de conjuntos numéricos infinitos como los naturales, reales, racionales y también de ámbito geométrico como el conjunto de puntos de la recta, el segmento, entre otros. • El infinito para definir objetos/conceptos matemáticos. Por ejemplo, con los trabajos de Cantor surgió la necesidad de reflejar cantidades, que no fueran finitas, empleando una nueva notación $\aleph$ para cardinales transfinitos. • El uso del infinito actual se formaliza y acepta.
Estadística
• El infinito como término el cual se usa para definir una población con características determinadas. Incorporando la expresión "población infinita" para referirse a una población, la cual se sabe que es lo suficientemente grande, pero no se conoce su tamaño, por lo tanto, no existe la posibilidad de contarla o de construir un marco muestral. • El uso del infinito en la adaptación de definiciones, teoremas y procedimientos de la Estadística. • La incorporación de la expresión y concepto de "población infinita"; en el caso de la Estadística Inferencial se estudió sobre su comportamiento y distribución, entre otras, estableciendo teoremas como el del Límite Central. • El empleo de experimentos infinitos en la Probabilidad, ampliando el campo de estudio para población infinita e incorporando este término a distintos ámbitos, como el azar.
Paralogistica
• El infinito en las paradojas de Zenón como una herramienta que le permite llegar a algún absurdo para refutar las ideas de movimiento y continuidad. • El infinito se usa para generar paradojas con las series alternantes (Bolzano) que obliguen a la comunidad matemática a desterrar este objeto de su campo de estudio (Paradojas de las series alternantes). • El infinito para demostrar que el conjunto de los números cuadrados es equipotente con el conjunto de números naturales (Paradoja de Galileo). • El uso de conjuntos infinitos en acto para generar paradojas en la Teoría de Conjuntos (paradojas de Cantor, Bulari-Forti y Rusell).
Fisica
• El uso del infinito como un recurso para demostrar la imposibilidad del movimiento.

• El uso del infinito para describir la “geometría” del Universo (extensión y forma). • El empleo de los infinitesimales para justificar procedimientos y construir expresiones Matemáticas que predigan fenómenos de la naturaleza (*e.g.,* movimiento, fuerzas, magnetismo, etc.).
Religión
• El uso del infinito como descriptor de propiedades, características, atributos religiosos (al usar el infinito para referirse a la deidad y definir propiedades como plenitud, eternidad, omnipresencia, divinidad). • El uso de razonamientos religiosos para argumentar propiedades de objetos. Por ejemplo, como el infinito en acto solo podía referirse a la deidad, esto sirvió para afirmar que la unidad no podría estar conformada por infinitos indivisibles.
Filosofía
• El infinito es tratado como un ser en potencia y no en acto. • El infinito se emplea como el ser originario de todas las cosas (*ápeiron*). • El infinito es tratado como algo que no puede ser concebido por el finitimo humano.

5. CONCLUSIONES

Este capítulo presenta algunas conclusiones que se establecieron durante y después de realizar la revisión histórica del concepto de infinito. Para ello se ha pensado en exponer dichas conclusiones en el siguiente orden: primero, aquellas que están relacionadas con el trabajo hecho, en particular, se hará énfasis en cumplimiento de los objetivos (específicos y general) planteados; así mismo se esbozarán asuntos y preguntas que quedaron sin resolver en las distintas fases de este proyecto, las cuales, posiblemente, sirvan para desarrollar otros trabajos; en tercera instancia, se exteriorizarán limitaciones e impactos que emergieron en y sobre la realización de este estudio.

En cuanto a los objetivos específicos, se iniciará comentando cada uno de estos y la forma en que se refleja o no su respectivo cumplimiento.

Inicialmente, la consulta de diversas fuentes de información de literatura especializada en la historia del infinito matemático posibilitó concluir que hay un amplio conglomerado de información sobre este. Sin embargo, como era de esperarse, la presentación de hitos históricos varía según la fuente y, además, en algunas ocasiones los puntos de vista de los autores frente a un mismo acontecimiento no concuerdan. Los resultados que dejan en evidencia el cumplimiento de este primer objetivo específico corresponden al capítulo tres de este trabajo. Dicho capítulo, básicamente, condensa una breve reconstrucción histórica del concepto de infinito elaborada con base en las fuentes consultadas.

Una vez que se realizó la consulta bibliográfica, se procedió a la identificación de los diferentes usos matemáticos que se le han dado a lo largo de las épocas al concepto de infinito –hecho que está relacionado con el segundo objetivo específico de esta monografía–, lo cual conllevó a ratificar una aserción que se había formulado desde el anteproyecto de este trabajo y es que el infinito matemático ha sido –y es– un concepto que ha intervenido en el desarrollo de muchas teorías matemáticas, bien sea para eludirlo o para dilucidarlo. Este objetivo se cumplió puesto que el espectro documental recopilado posibilitó rastrear gran cantidad de usos del infinito en la historia, tanto en Matemáticas como otras ramas de conocimiento.

Relacionado con la clasificación que se realizó sobre los usos del infinito tomando como criterio las áreas Matemáticas (Álgebra, Análisis, Aritmética, Geometría, etc.), se logró establecer que las nociones e ideas que se tuvieron de ese concepto dependen mucho del área de las Matemáticas en la cual se trabaje. Así, por ejemplo, en Geometría –en particular con la Geometría Proyectiva– se incluye una noción de infinito como el lugar donde se intersecan dos rectas paralelas, mientras que en el Cálculo –al menos en el estándar– el infinito se relaciona más con una cantidad “indefinidamente” grande o pequeña. Por otro lado, también, se descubrió que en el Álgebra Clásica no hay usos explícitos de infinito. El cumplimiento de este objetivo se evidencia en el capítulo 4 de este documento, pues en este se presentan las tablas que se construyeron para realizar tal clasificación y se hacen reflexiones sobre dicha actividad.

En referencia con la elaboración del documento escrito, se considera que este sistematiza los hallazgos históricos encontrados en relación con los usos matemáticos del infinito, lo cual permitió encontrar relaciones entre las diversas fuentes literarias consultadas.

Todo lo anterior, posibilita establecer que el objetivo general se cumplió. Además, se esgrimirán otros argumentos, que vale la pena mencionar y que se relacionan con el cumplimiento de los objetivos del proyecto: (i) la consulta bibliografía proveyó las bases para realizar una adecuada clasificación de los usos del infinito que se identificaron a lo largo de la historia, tal y como se evidencia en el capítulo de resultados. Por otra parte, vale la pena señalar, que en ese capítulo se encuentran usos del infinito referentes a campos de estudio diferente al matemático, como el filosófico, físico y religioso. Sin embargo, no se profundizó en estos, debido a que se enfatizó en el uso matemático que ha tenido el concepto del infinito a través de la historia, tal como se planteó en el objetivo general de este trabajo.

Pese a que los objetivos de este trabajo se cumplieron, hay varios asuntos que emergieron durante su desarrollo, que quedaron sin resolver y que se procederán a comentar:

- En la revisión documental hubo la necesidad de incluir la categoría de Filosofía para clasificar los usos del infinito que se encontraron relacionados con la misma. Aunque en este trabajo no se profundizó en tal categoría se tiene la firme creencia que vale la pena ser estudiada con mayor detenimiento e inclusive, se podría particularizar mucho más esta categoría, haciendo alusión principalmente a los usos del infinito en la Filosofía de las Matemáticas.

- Otro aspecto para resolver alude, principalmente, a realizar un rastreo histórico del uso del concepto de infinito en la construcción de la Geometrías Hiperbólica y Esférica, pues desde la revisión documental elaborada no se encontró ni una sola palabra que dar cuenta y razón de este asunto. De manera similar acontece cuando se indaga por los usos del infinito en la Geometría Fractal y, a sabiendas que el mismo protocolo de construcción de un fractal demanda infinitas iteraciones, valdría la pena preguntarse por: ¿cuál ha sido el papel del infinito en el nacimiento y desarrollo de la Geometría Fractal?, ¿qué noción del infinito se tiene desde la Geometría Fractal?, etc.

- Naturalmente, también, un asunto interesante que amerita ser estudiado y que, valga la pena mencionarlo, ha sido poco explorado según la revisión hecha, es el papel del infinito en el Análisis no estándar. En ese sentido, cabría investigar por cómo se han sistematizado los infinitesimales para generar un "cálculo formal" y de qué forma se ha tratado el infinito, es decir, si de manera actual o potencial.

- Desde la clasificación de los usos del infinito que se realizó tomando como categorías algunas ramas de las Matemáticas, se pesquisaron algunos obstáculos epistemológicos propios de cada categoría. En ese sentido, se podría hacer una clasificación de los diversos obstáculos encontrados en la historia del infinito que estén vinculados con los diversos objetos aritméticos, geométricos, analíticos, de teoría de conjuntos, etc.

- Por último, pero no menos importante que los anteriores aspectos a resolver, se podría estudiar el tratamiento que se le ha hecho al infinito desde la Didáctica de las Matemáticas y, en particular, la forma en que este objeto se incluye, sí es que se hace, en el currículo escolar colombiano. Además, es válido preguntarse por las concepciones y creencias que tienen los profesores de Matemáticas, los maestros de Matemáticas en formación y los estudiantes respecto a este concepto.

Otro punto alrededor de las conclusiones es explicitar las contribuciones, en cuanto a los aportes teóricos que deja el trabajo a la comunidad educativa y en particular a los futuros educadores matemáticos que lo realizaron.

En el caso de los aportes netamente académicos se destacan los dos siguientes: (i) la reconstrucción y rastreo de gran parte del desarrollo que tuvo el infinito matemático a lo largo de las distintas épocas de la historia; y (ii) la clasificación y caracterización de los diversos usos del infinito en algunas ramas de las Matemáticas que puede ser de provecho no solo para el diseño de tareas, sino para que el lector haga un acercamiento a las diversas concepciones del infinito según cada categoría. Ahora, si se considera el caso particular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, probablemente este sea un trabajo totalmente innovador dado que en el repositorio institucional no se encontró un trabajo con características similares o que traten el objeto de estudio.

Referente a los aportes formativos que dejó este trabajo a los autores, *grosso modo*, consisten en: (i) desarrollo de algunas actitudes investigas a través del acercamiento metodológico que empleó; (ii) producción de estrategias para presentar la información de manera organizada y priorizada debido a que, aunque se encontraba demasiada información interesante en las distintas fuentes bibliográficas, esta tuvo que ser sintetizada o descartada con base en los objetivos de este trabajo; (iii) ampliación de competencias comunicativas gramaticales, sociolingüísticas y discursivas en cada uno de los autores de este trabajo. Por otra parte, en las secciones 2.1.1 y 2.1.2 se mencionaron dos tesis que reportaban un conjunto de categorías, las cuales sintetizaban los aportes formativos de la HM a los profesores de

Matemáticas; con miras a retomar dichas investigaciones, en seguida se presentará una tabla que relaciona algunas de dichas categorías con las aportaciones concretas en cada una de ellas a los autores de este trabajo de grado.

Tabla 11. Contribuciones formativas de este trabajo de grado a los autores

Categorías	Aportes Formativos
Visiones de la actividad matemática	Este trabajo permitió que los autores reflexionarán sobre la actividad matemática, es decir, qué el quehacer matemático. Se logró identificar que dicha está directamente relacionada con el resolver problemas, que es dinámica y reside en un contexto sociocultural. Así pues, en el caso del infinito, se observó que generó muchos problemas a los matemáticos de diversas épocas, los cuales debieron ser solventados para decantar en la formalización del objeto en cuestión. Con lo anterior, se desea subrayar que la labor de formalizar el infinito no fue una tarea sencilla, sino que estuvo permeada por errores, dificultades, creencias, acuerdos, suposiciones, paradojas, etc. Se considera que lo mencionado con anterioridad no atañe únicamente al concepto de infinito sino que, muy posiblemente, se extienda a toda la actividad matemática.
Visiones de las Matemáticas	La realización de este proyecto proveyó a los autores de por lo menos dos visiones de las Matemáticas, a saber: (i) las Matemáticas no necesariamente se construyen a partir de la realidad y (ii) Toda teoría matemática es producción humana y, por ende, no está exenta de presentar errores o posibles falacias en sus hechos. La primera visión se desprende de la perspectiva Cantoriana de las Matemáticas, la cual lo llevó estudiar el infinito pese a la oposición de sus pares. La segunda visión se deriva de las paradojas relacionadas con el concepto de infinito y en especial, la paradoja de Rusell que sacudió todo el edificio de las Matemáticas.
Visión del conocimiento matemático	El estudio de la evolución histórica del concepto de infinito posibilitó complementar la noción de **conocimiento matemático** que tenían los autores de este trabajo, en tanto que se logró reconocer que dicho no es meramente *deductivo* –como se suele presentar en algunos cursos de Matemáticas universitarias o escolares- sino que, también, se ve fuertemente influenciado por la *inducción* y la *percepción*. Por ejemplo, del infinito, en principio, se *percibieron* varias de sus propiedades y se usaron de manera intuitiva, hasta que siglos después se formalizó este objeto y se comenzó a utilizar de modo *deductivo*.
Visiones de los objetos matemáticos	Esta revisión histórica facultó a los autores obtener varias visiones del infinito dependiendo la rama de las Matemáticas desde la cual se analice, como, por ejemplo: • Desde la geometría proyectiva, el infinito se asemeja más a un lugar, específicamente hablando un lugar donde se intersecan dos rectas paralelas. • Desde la teoría de conjuntos, el infinito como un conjunto que no

	cumple la propiedad de que el todo es mayor que su parte. • Desde la Filosofía, el infinito como un ser sin límites (*ápeiron*). • El infinito como ser indefinido. • El infinito como un resultado de divisibilidad reiterada. • El infinito por extensión. • El infinito visto como ser en acto. • El infinito como ser en potencia.
Serie de potenciales herramientas	Algunas potenciales herramientas para utilizar en el aula y propiciar la actividad matemática en la misma que proveyó este trabajo fueron: • Las paradojas de Zenón para abordar series infinitas o propiedades de conjuntos numéricos como los racionales. • Las paradojas de las series alternantes para hacer percibir a los estudiantes la necesidad de no tratar las series como sumas finitas. • Las paradojas de Rusell, Bulari-Forti y Cantor permiten justificar porqué construir ciertos postulados en el marco de un sistema teórico para la Teoría de Conjuntos. • La idea de correspondencia biunívoca para demostrar *equipotencias* entre conjuntos, permite estudiar la función biyectiva de una manera aplicativa y establecer una relación entre este tipo de función con función inversa. • La idea de infinito potencial para introducir el concepto de límite. Entre otras.
Bases para orientar el currículo	Otro aporte formativo que dejó este proyecto tiene que ver con la decisión del porqué no trabajar en profundidad el concepto de infinito en la escuela. Esto en tanto que se identificó que es un concepto complejo en sí mismo y que puede llegar a ser complejo en comprenderlo. Por ello, se cree que es un acierto del currículo comenzar por aproximaciones a procesos infinitos, los límites infinitos, etc.

Otro aporte formativo para los autores fue reflexionar sobre el tratamiento que se le da al concepto de infinito en la escuela, el cual, según la experiencia personal de los autores, se concibe de manera intuitiva y coloquial, sin diferenciar la evolución del concepto y el empleo del término en diferentes conceptos de la historia. Por ejemplo, no se diferencia el infinito de la recta real, el cual según Euclides es un infinito en potencia, mientras que el infinito en conjuntos se fundamenta en un infinito actual, lo cual puede generar ambigüedad en lo referente a los términos “infinito”, “ilimitado”, “indefinido” o “indefinidamente”.

Finalmente, se invita a continuar trabajando sobre asuntos relacionados con el infinito tanto desde las Matemáticas como desde la Didáctica de las Matemáticas pues, de una parte, es un objeto que ha sido –y quizá lo siga siendo– el causante de las mayores revoluciones en las Matemáticas y, de otra parte, muchos objetos escolares se relacionan con este ente como, por ejemplo, los conjuntos numéricos, las rectas, el límite, la derivada, etc.

6. REFERENCIAS

Alvarado, H., y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del limite en textos universitarios de probabilidad y estadistica. *Estudios Pedagógicos*, 7-28.

Apóstol, T. (1999). *Calculus, Cálculo con función de una variable, con una introducción al Álgebra lineal.* (F. Vélez, Trad.) Barcelona, España: Revertè Ediciones.

Aristóteles. (siglo I d.C). Metafisica- Libro primero. En *La Filosofía se ocupa sobre todo* (págs. 980a-993a).

Arrigo, G., D'Amore, B., y Sbaragli, S. (2011). I*nfinitos Infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático.* (A. Jiménez, Trad.) Bogotá D. C.: Magisterio.

Arteaga, J. R. (2012). Una relación entre la goemetría y el álgebra (programa de Erlangen). *Tecné, Episteme y Didaxis*(32), 143-148.

Babini, J. (1967). *Historia de las Matemáticas Modernas.* Washington D. C.: Organización de los Estados Américanos.

Batanero, C., y Godino, J. (2001). *ANÁLISIS DE DATOS Y SU DIDÁCTICA.* Granada.

Batista, S. G. (2018). *Euclides: Libros VII – VIII – IX.* [tesis de fin de grado, Universidad de La Laguna]: Repositorio Institucional Universidad de La Laguna.

Bianco, A. M., y Martínez, E. J. (2004). *Probabilidades y Estadística.* Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito.* MATHEMA.

Bombal, F. (2010). Un paseo por el infinito. *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales., 104*(2), 427-444.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática.* (M. Martínez, Trad.) Madrid, España: Alianza Universidad Textos.

Calle, L. (2016). *Metodologías para hacer una revisión de literatura de investigación.* Santiago de Guayaquil: Universidad Católica de Santiago de Guayaquil.

Carroz, Márquez, y Moucharrafic. (2012). Metodologia de investigación. En *Capitulo 3* (pág. 83). URBE.

Castillo, G. (2013). *Introducción a la filosofía (Introducción al pensamiento clásico).* Piura: UDEP.

Castro, I., y Pérez, J. (2007). *Un paseo finito por lo infinito. El infinito de Matemáticas.* Bogotá D. C.: Pontificia Universidad Javeriana.

Chávez, E. (2002). El seminario “Historia de la matemática” y su papel en la formación de docentes. *Uniciencias*(22), 11-18.

Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Métodología de la investigación.* México D. F.: Mc Graw Hill.

Fernández, J. M. (2004). Grado en Información y Documentación. Estadistica. En *Tema 5. Variables aleatorias discretas.* Open Courseware.Universidad de Murcia.

Fernández, L. (2006). *¿Cómo analizar datos cualitativos?* Barcelona, España: Universitat de Barcelona.

Franco, L., Olmedo, E., y Valderas, J. (2016). *Introducción al concepto de valor esperado.* España: Universidad de Sevilla. Dpto. Economía Aplicada I.

Garcia, J. J. (2014). *Del "Horror al infinito" de los antiguos griegos a la nocion de limite moderno.* Santiago de Chile.

Garelik, M., y Montenegro , F. (2018). Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(5), 120-137.

González, K. G. (2003). Origen y destierro de los infinitesimales. *Educación y pedagogía, 15*(35), 29-36.

González, P., y Vaqué, J. (1997). *Mêtode: mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes.* España: Fundació Bernat Metge.

Gracián, E. (2010). *Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático.* Villatuerta, España: RBA Coleccionables S. A.

Guacaneme, É. A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclideana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas.* Repositorio Institucional Universidad del Valle.

Guerrón, M. J. (2015). *Consideraciones para el analisis lógico de tres paradojas filosoficas*. Obtenido de http://repositorio.puce.edu.ec/bitstream/handle/22000/10157/Consideraciones%20para%20el%20an%C3%A1lisis%20l%C3%B3gico%20de%20tres%20paradojas%20filos%C3%B3ficas.pdf?sequence=1

Hernández, M. (2017). *Elementos de Euclides. Libros V-VI.* [Tesis de fin de grado, Universidad de La Laguna]: Respositorio Institucional universidad de La Laguna.

Hilbert, D. (1925). Sobre el Infinito. *Sociedad Matemática de Westfalia*, 83-125.

Levine, D. M., Timothy C, K., y Berenson, M. L. (2006). *Estadística para administración.* México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología*(12), 277-294.

Lucero, J. E. (2021). *El límite como concepto fundamentador del infintio potencial en Matemáticas: un acercamiento histórico-epistemológico.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Luque, C. J., Mora, L. C., y Páez, J. É. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos los lógicos: contar e inducir* (2 ed.). Bogotá D. C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Medina, L. C. (2006). *La Mecánica Newtoniana en Contra de Zenón (y de Glazebrook)*. Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/3442/344234309008.pdf

Meza, K. A. (2019). *La paradoja griega que trascendió a la física cuántica*. Obtenido de https://avanceyperspectiva.cinvestav.mx/la-paradoja-griega-que-trascendio-a-la-fisica-cuantica/

Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana, 1*(2), 59-81.

Otero, L. (2005). Einstein y la revolución científica del siglo XX. *Cuadernos de Historia Contemporánea*, 135-177.

Piñeiro, G. (18 de julio de 2020). [Matemática santimental]. *La Teoría de Conjuntos de Georg Cantor [vídeo]*. Youtube. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=YLiS_flCFt4

Piñeiro, G. E. (2013). *Cantor, el infinito en matemáticas: lo incontable es lo que cuenta.* Villatuerta, España: RBA Coleccionables S. A.

Quecedo, R., y Castaño, C. (2002). Introducción a la Metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*(14), 5-40.

Rendón, C. G. (2017). *Diseño de Tareas Mediadas por la Historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas [tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional].* Repositorio Institucional Universidad Pedágogica Nacional.

Rey Pastor, J., y Babini, J. (1984). *Historia de la matemática. De la antigüedad a la baja edad media* (1 ed., Vol. 1). Barcelona, España: Gedisa.

Rey Pastor, J., y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática. Del renacimiento a la actualidad* (1 ed., Vol. 2). Barcelona, España: Gedisa.

Reyes, L., y Carmona, F. (2020). *La investigación documental para la compresión ontológica de objeto de estudio.* Universidad Simón Bolívar.

Ruiz, J. J. (s.f). *Teoría de vectores y campos.*

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* (J. Gracía, Trad.) Crítica S. L.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos.* Madrid, España: Aguilar S. A. de Ediciones.