DE LA VISUALIZACIÓN A LA CONJETURACIÓN A TRAVÉS DEL ARRASTRE MANTENIDO

WILMAR CAMILO CUARTAS GIL

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTA D. C

2021

DE LA VISUALIZACIÓN A LA CONJETURACIÓN A TRAVÉS DEL ARRASTRE MANTENIDO

WILMAR CAMILO CUARTAS GIL

Trabajo de grado para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

PROFESORA:

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTA D. C.

2021

Aceptación

Firma del Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá. D.C. 2021

Dedicatoria:

Dedico con todo mi corazón este trabajo de grado a mis padres, Martha y Guillermo quienes me han apoyado para poder llegar hasta esta instancia en mis estudios, ya que ellos siempre han estado presentes para apoyarme moral, emocional, económica y psicológicamente en todo este proceso. También quiero dedicar este trabajo de grado a mis hermanos, Maritza y Guillermo, porque siempre motivaron este proceso para nunca rendirme en mis estudios y poder alcanzar este logro.

Agradecimientos

Agradezco este trabajo de grado a la profesora Leonor Camargo Uribe por guiarme en este proceso desde el primer momento que acudí a ella. También quiero agradecer a mis compañeros que aportaron en este trabajo de grado con sus conocimientos y habilidades. Y en general a los profesores del departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que me formaron y ayudaron a cumplir este sueño.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Bogotá D.C.

2021

Contenido

Índice de Tablas

Introducción

En las últimas cuatro décadas, se ha investigado acerca del uso de programas de geometría dinámica para el aprendizaje de la geometría. Esto porque se ha visto el gran potencial que tienen las representaciones dinámicas en la resolución de problemas (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2009; Olivero, 1999). Un foco de interés de las investigaciones es el empleo de estos programas para el desarrollo de situaciones donde se requiere visualizar y formular conjeturas.

Algunos de los estudios sobre los procesos visualización y conjeturación, que se movilizan en la resolución de problemas, cuando median programas de geometría dinámica, se centran en las herramientas que ofrecen dichos programas. En particular, ha habido especial interés en la herramienta de arrastre de elementos de una construcción (Olivero, 1999). Como pretendemos mostrar en este trabajo de grado, esta herramienta es crucial para movilizar los procesos mencionados, en la resolución de problemas abiertos (los cuales conceptualizaremos más adelante). Cuando los estudiantes interactúan directamente con representaciones geométricas establecen relaciones entre lo que ven y las propiedades que determinan a los objetos, posibilitando la formulación de conjeturas.

En el presente documento, damos a conocer un estudio que hicimos como trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Este tenía como objetivo caracterizar la función que tiene un tipo particular de arrastre, el arrastre mantenido, en los procesos cognitivos de visualización y conjeturación. El interés por este tipo de arrastre surgió porque en algunos documentos (Baccaglini-Frank, Mariotti y Antonini, 2009; Samper y Molina 2013; Laborde, 2000) se mencionan el potencial que tiene este tipo de arrastre en la solución de problemas abiertos, pero durante la carrera no se estudia dicho potencial. Consideramos que trabajos como este pueden contribuir a incentivar el uso del arrastre mantenido en los cursos de geometría que ofrece el programa de licenciatura.

Para cumplir el objetivo comenzamos por hacer una revisión de antecedentes sobre el arrastre mantenido e identificar cuál es su impacto en la solución de problemas abiertos. En seguida, construimos un marco de referencia donde conceptualizamos y ejemplificamos el arrastre mantenido. Después hicimos un estudio empírico con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas a los que les propusimos problemas, donde esperábamos que ellos usarán el arrastre mantenido, con la orientación del autor de este trabajo de grado que actuó como instructor. A partir de los resultados, cotejamos los hallazgos con lo mencionado por los autores en la revisión de la literatura y obtuvimos las conclusiones del estudio.

El trabajo está dividido en 6 capítulos. En el Capítulo 1, describimos la delimitación del estudio donde nos referimos al interés por el tema, presentamos la justificación del estudio y puntualizamos los objetivos.

En el Capítulo 2, presentamos la revisión de estudios previos que, según nuestro criterio, abren el camino a los estudios sobre el arrastre mantenido. También sintetizamos información sobre investigaciones en donde se introduce el arrastre mantenido, como opción de arrastre y de los cuales tomamos elementos conceptuales para construir el marco de referencia.

En el Capítulo 3, presentamos el marco de referencia. En ese sentido: describimos diferentes tipos de arrastre; conceptualizamos el arrastre mantenido y lo relacionamos con otros tipos de arrastre; ejemplificamos el arrastre mantenido; y proponemos una conceptualización de problema abierto y de los procesos de visualización y conjeturación.

En el Capítulo 4 describimos la estrategia investigativa que empleamos para estudiar el papel del arrastre mantenido en el paso de la visualización a la conjeturación. Presentamos el escenario que usamos para la interacción con los estudiantes que nos sirvieron como participantes informantes. También incluimos la experiencia académica de los estudiantes. Enseguida, enunciamos los problemas que propusimos a los participantes informantes. Luego, relatamos cómo se hizo la preparación de una entrevista que acompañó el proceso de resolución. A continuación, decimos como hicimos el registro de información. Finalmente, presentamos la rejilla que diseñamos para el análisis de la información.

En el Capítulo 5, describimos el proceso de resolución de los problemas por cada uno de los estudiantes. Al finalizar, resumimos la información en una rejilla analítica. En ella nos referimos a los arrastres que emplearon los estudiantes, los invariantes inducidos y observados, las relaciones descubiertas y finalmente la conjetura formulada, como producto de la exploración.

En el Capítulo 6 generamos el espacio de discusión de los hallazgos obtenidos en el estudio. El capítulo se encuentra dividido en 4 secciones. En la primera sección, hacemos un planteamiento sobre los problemas propuestos a los estudiantes y su pertinencia para favorecer el arrastre mantenido. En la segunda sección, hablamos sobre la complejidad del arrastre mantenido como herramienta útil en la resolución de problemas. En la tercera sección, destacamos las relaciones entre los diferentes arrastres y el arrastre mantenido. Y por último, expresamos nuestra postura sobre la manera como el arrastre mantenido favorece los procesos de visualización y conjeturación.

Al final del documento presentamos un apartado de conclusiones, en donde contrastamos los objetivos que nos propusimos con el trabajo investigativo realizado. Relatamos los logros del presente trabajo de grado y las dificultades que atravesamos. Y presentamos las proyecciones y los alcances que esta investigación puede tener en la comunidad de educadores matemáticos.

Capítulo 1 Delimitación del estudio

1.1 Descripción de la temática a abordar

El arrastre mantenido es un tipo de movimiento que se puede realizar con objetos representados en un programa de geometría dinámica, como GeoGebra. Fue definido por Bacagglini-Frank en su investigación doctoral, presentada en 2010.

En un acercamiento inicial a la literatura sobre este tipo de arrastre, divisamos su potencial para el aprendizaje de la geometría (Baccaglini-Frank et al. 2009; Baccaglini-Frank y Mariotti, 2009; Baccaglini-Frank y Mariotti 2010; Baccaglini y Antonini, 2016; Baccaglini, 2019). Sin embargo, vemos, a través de un breve sondeo, que este no se ha aprovechado lo suficiente n los cursos de geometría de la Licenciatura en Matemáticas ni se ha promovido en las prácticas iniciales con estudiantes de educación básica. En el sondeo, con estudiantes de la licenciatura, realizado en junio de 2021, determinamos que de 37 estudiantes a quienes preguntamos, solo 5 tenían alguna noción vaga del arrastre mantenido. Adicionalmente, al hacer una revisión de trabajos de grado de la Licenciatura en Matemáticas y Maestría en Docencia de la Matemática, que se encuentran en el repositorio de la Biblioteca de la Universidad Pedagógica Nacional, vimos que de 20 trabajos de grado realizados entre 2015 y 2020, solo 5 hablan del uso de los programas de geometría dinámica pero no hacen énfasis en los arrastres empleados por los estudiantes en dichos programas.

En esta investigación estudiamos a fondo este tipo de arrastre para identificar el papel que juega en la articulación de los procesos de visualización y conjeturación, en la resolución de problemas de geometría. Con ello queremos difundir esta importante herramienta de apoyo a la resolución de problemas, entre profesores en formación, profesores en ejercicio, y aportar al aprendizaje de la resolución de problemas abiertos.

1.2 Justificación

En las últimas décadas, las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) han impactado de manera vertiginosa la sociedad, de tal modo que han cambiado la forma en que viven, conviven, aprenden y se comunican las personas. Esto se hizo más evidente en 2020, con la pandemia generada por el COVID-19, pues a partir de entonces el vínculo principal entre muchas personas está mediado principalmente por dichas tecnologías. La Educación Matemática no es ajena a esta influencia. Las TIC, especialmente los programas de geometría dinámica han sido fundamentales para promover la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Actualmente son objeto de investigación para establecer, entre otras cosas, su papel en el aprendizaje, la naturaleza de la exploración empírica que promueven y cómo contribuyen a la resolución de problemas.

En particular en Didáctica de la geometría, que es una de las ramas de la Educación Matemática, se ha investigado el uso de los programas de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría euclidiana (Baccaglini, Mariotti y Antonini 2009). Un foco de interés es el empleo de programas como GeoGebra para el desarrollo de los procesos cognitivos que se promueven mediante la exploración empírica: la visualización y la conjeturación.

Como lo señalan Gómez (1997) y Laborde (1993; citado por Baccaglini. et al. 2009) aunque los programas de geometría dinámica no resuelven todos los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, sirven como herramientas que abren espacios para que los estudiantes puedan vivir experiencias matemáticas diferentes a las tradicionales. Esto debido a la posibilidad de manipular dinámicamente las representaciones de los objetos geométricos en sistemas articulados e interactivos.

Los estudios acerca de la manipulación dinámica de los objetos geométricos han llevado a los investigadores a caracterizar diferentes maneras de hacer "arrastres" de estos objetos, con el fin de establecer el papel que desempeñan en la resolución de problemas (Arzarello et al, 2002; Olivero, 2002; Laborde, 2000). El interés se ha enfocado principalmente en las relaciones entre el arrastre y los procesos mentales que favorece. Estos son entendidos, por los autores referenciados en este párrafo, como procesos de recibir, manipular y obtener información vía la visualización y la conjeturación.

Por el potencial que se entrevimos para el aprendizaje de la geometría, consideramos que podría resultar interesante describir el arrastre mantenido, determinar cuándo se usa y las tareas en las que se promueve su uso. Además, quisimos identificar el papel que juega el arrastre mantenido en los procesos de visualización y de conjeturación en la resolución de problemas abiertos (Mogetta et al. 1999; citado en Baccaglini y Mariotti 2009).

En las experiencias como estudiante de la Licenciatura en Matemáticas (autor del presente trabajo) y como profesora del Departamento de Matemáticas (la directora de este trabajo), no hemos profundizado ni teórica ni prácticamente en el arrastre mantenido. El trabajo de grado estuvo motivado por la intención de profundizar en este tipo de arrastre, caracterizarlo de manera precisa, entender cómo opera en la resolución de problemas y encontrar evidencias para confirmar (o descartar) lo útil que es esta herramienta puede ser para promover la articulación entre los procesos de visualización y conjeturación. Deseamos contribuir a estudiar un asunto que interesa al grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, quien nos sugirió el tema.

1.3 Objetivo General

Caracterizar el papel que desempeña el arrastre mantenido en la resolución de problemas abiertos y determinar su rol en la articulación entre los procesos de visualización y de conjeturación.

1.4 Objetivos Específicos

Los objetivos del trabajo de grado son los siguientes:

Describir y ejemplificar el arrastre mantenido y compararlo con otros tipos de arrastre de objetos de una representación hecha en GeoGebra.

Proponer una fundamentación teórica sobre los procesos de visualización y conjeturación en la que se establezca el papel que estos pueden jugar en la resolución de problemas abiertos.

Sugerir y ejemplificar una caracterización de los problemas abiertos en donde sea posible aprovechar el papel del arrastre mantenido en los procesos de visualización y de conjeturación.

Identificar la influencia del arrastre mantenido en los procesos de visualización y conjeturación, que llevan a cabo algunos estudiantes de Licenciatura en Matemáticas cuando resuelven problemas abiertos en donde sea necesario su uso.

Capítulo 2 Revisión de la literatura

A continuación, presentamos algunos estudios en los que hacemos un seguimiento al trabajo sobre el arrastre mantenido, iniciando por la investigación de Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002) quienes lo insinúan por primera vez. Los documentos siguen el rastro del trabajo de Anna Baccaglini-Frank, quién en su tesis doctoral, dirigida por Alessandra Mariotti, presenta a la comunidad el arrastre mantenido.

2.1 Estudios previos

Hemos decidido comenzar la revisión documental, relacionada con el arrastre mantenido, por el texto de Arzarello et al. (2002) porque se considera que es una investigación que sienta las bases para los estudios sobre el arrastre mantenido. En esta publicación, los autores hacen un estudio de las prácticas de arrastre, desde el punto de vista cognitivo, estableciendo la transición entre la visualización y la generación de hechos geométricos y viceversa.

El objetivo principal que enuncia el artículo es caracterizar y ejemplificar diferentes tipos de arrastre, que realizan estudiantes de secundaria superior en Italia, cuando resuelven problemas abiertos. También se proponen analizar de qué manera estos tipos de arrastre favorecen los procesos cognitivos de visualización y conjeturación en la enseñanza de la geometría. Precisamente, los tipos de arrastre que los autores mencionan son, para nuestra investigación, la base de los estudios posteriores sobre el arrastre mantenido.

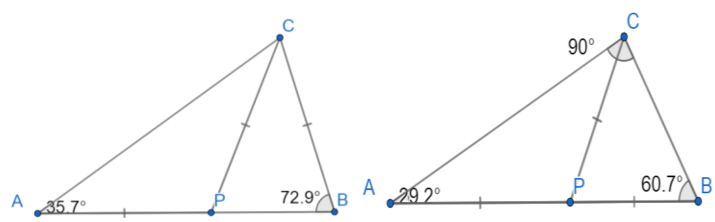
Para atender el objetivo, los autores construyen un marco teórico en el que desarrollan algunas ideas sobre los procesos de visualización y conjeturación y sobre el papel de las representaciones dinámicas en el desarrollo de estos procesos. En primer lugar, mencionan que para favorecer el proceso de conjeturación, la exploración debe permitir al individuo la generación de movimientos en las representaciones, para que pueda percibir cambios que son de interés. De esta manera, encuentran una relación entre lo perceptual y lo teórico; esto último entendido como la generación de conjeturas, de teoremas y de demostraciones. En segundo lugar, se refieren a que los programas de geometría dinámica son importantes en la exploración, porque ofrecen diferentes tipos de arrastre, que contribuyen a la forma de explorar con el movimiento. En este sentido, favorecen la visualización de las formas en las que cambian los objetos y la identificación de propiedades que se pueden encontrar en el momento en que se arrastran dichos objetos. La posibilidad de arrastrar ofrece a los estudiantes una retroalimentación que se convierte en sustento fiable a la formulación de conjeturas mientras ocurre la actividad del arrastre. Por lo tanto, es indispensable clasificar y jerarquizar los diferentes tipos de arrastre.

Según los autores, la visualización es el proceso que permite observar regularidades patrones e invariantes que son interesantes para el proceso de conjeturación. De igual manera, las conjeturas pueden ser validadas, refutadas o verificadas usando como herramienta la exploración; de esta manera la exploración puede aportar a diferencia entre en lo que se considera dado y en lo que se concluye.

Arzarello, et al., (2002) proponen una jerarquía de tipos de arrastre, identificadas en su investigación, que los estudiantes usan cuando buscan dar solución a los problemas abiertos. De estos tipos de arrastre son de nuestro interés, con particular énfasis, el arrastre vinculado, el arrastre guiado y el arrastre de lugar ficticio (cuyas definiciones se encuentran en el Capítulo 3). Estos son los que están asociados al arrastre mantenido, que posteriormente es formulado por Anna Bccaglini Frank.

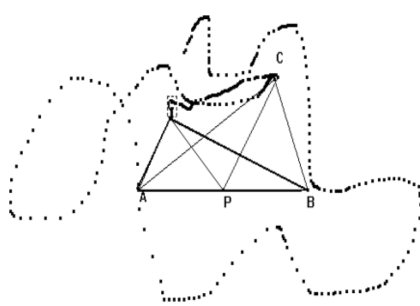
En el estudio, los investigadores propusieron a unos alumnos de secundaria, cuyas edades estaban entre 15 y 17 años, el siguiente problema: “Dado el triángulo ABC consideremos el punto P en $\overline{AB}$ y los triángulos APC, PCB. Proponer una hipótesis acerca de las propiedades del triángulo ABC para que APC y PCB sean triángulos isósceles (Ilustración 2.1).

Ilustración 2.1 Opciones de respuesta puesto a los estudiantes. Fuente Arzarello et al. (2002)



Arzarello et al (2002) anticiparon que al hacer un arrastre libre del punto C a cualquier lugar de la pantalla, cuando P es punto medio del $\overline{AB}$, los estudiantes deberían ver, en algún momento, dos triángulos isósceles (Ilustración 2.2).

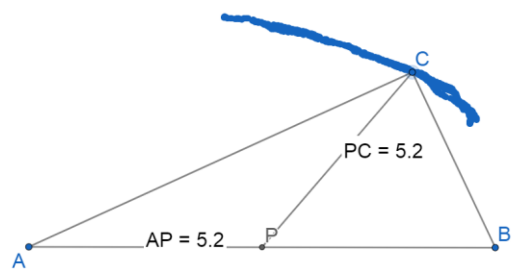
Ilustración 2.2 Arrastre hecha por los estudiantes. Fuente: Arzarello et al. (2002)



Los estudiantes también deberían ver que el triángulo ABC es separable en dos triángulos isósceles cuando $AP = PC$, de tal manera que ellos empezarían a preservar invariante la propiedad, $AP = PC$ mediante el arrastre guiado. En consecuencia, ya el arrastre no sería un arrastre libre por que se buscaría mantener la propiedad general de que los triángulos sean isósceles. Se evidencia que el arrastre se convierte en un arrastre de lugar ficticio. Esto, ya que la ruta seguida por el punto C no se está dibujando y en ese momento la trayectoria de C es ficticia. Para evidenciar la trayectoria, los estudiantes deberían hacer uso de la herramienta *Rastro*, de GeoGebra, aplicada al punto C, de manera que muestre el "camino" que sigue C (a este tipo de arrastre el autor lo denomina *arrastre de línea*) (Ilustración 2.3).

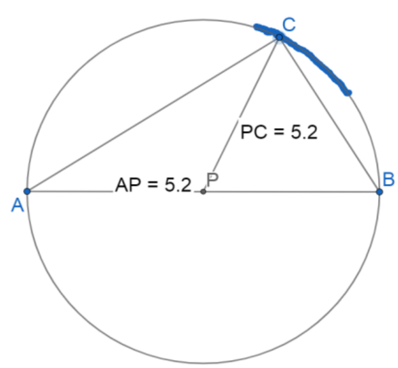
Ilustración 2.3

Trayectoria que describe el punto C. Fuente: Adaptado de Arzarello et al. (2002)



Si los estudiantes hacen el arrastre en guiado, se podrían dar cuenta de que el punto C describe una circunferencia con centro en P y radio AP. Entonces el arrastre de lugar ficticio se vuelve explícito, de manera que se puede promover la construcción de una circunferencia para corroborarlo (ver Ilustración 2.4).

Ilustración 2.4 Construcción de la Circunferencia con centro en *P* y radio *AP* Fuente: Adaptado de Arzarello et al. (2002)



De esta manera, los estudiantes podrían conjeturar que los triángulos son isósceles si el punto C pertenece a una circunferencia con centro P y radio AP. En otras palabras, dado el triángulo ABC con $\angle C$ recto y P punto medio del $\overline{AB}$ entonces el triángulo es separable en dos triángulos isósceles.

Al llevar a cabo la experiencia, los estudiantes efectivamente realizaron el trabajo y transitaron por los tipos de arrastre previstos. Como conclusión de este trabajo, Arzarello et al. (2002) afirman que el uso de los arrastres: guiado, vinculado y de lugar ficticio, admite la visualización de la forma de la circunferencia que permite la formulación de la conjetura.

La reseña de esta investigación nos muestra que Arzarello et al. (2002) abren un camino sobre las variantes que puede tener un arrastre, que inspiró a Baccaglini-Frank para la formulación del arrastre mantenido. De igual manera, confirmamos que los tipos de arrastre son muy potentes en la resolución de problemas en geometría. Sin embargo, hace falta dar el paso hacia el arrastre mantenido, que es objetivo de la presente investigación.

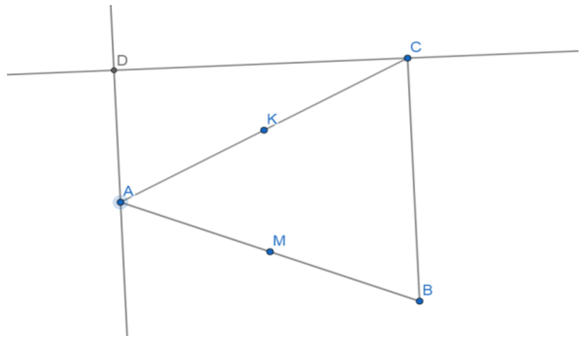
Continuamos la revisión documental por el texto de Baccaglini – Frank, Mariotti y Antonini (2009) en el que se resalta la importancia de la visualización en la actividad matemática. Los autores mencionan que este proceso favorece la comprensión de los conceptos geométricos y facilita el descubrimiento, en el marco de la geometría. Esto se hace más evidente al utilizar programas de geometría dinámica, porque allí se pueden visualizar representaciones de objetos que facilitan el razonamiento y la resolución de problemas.

Los autores tienen como objetivo proponer una clasificación de dos invariantes (inducida y observada) que son potentes para analizar y explicar el proceso de resolución de problemas con apoyo de GeoGebra. Para alcanzar el objetivo, Baccaglini-Frank et al. (2009) parten de definir lo que entienden por punto base (es un punto construido libre o semilibre en la pantalla, del que dependen otros objetos de la construcción). Luego, establecen el concepto de invariante geométrico, como una propiedad que se mantiene cuando se arrastra cualquier punto base de la figura. Después, explican con detalle una experiencia de resolución de un problema de dos estudiantes de secundaria en Italia, en donde se hace evidente el papel que jugaron ambos invariantes.

Baccaglini-Frank et al. (2009) decidieron centrar la atención en el arrastre de puntos, de modo que comenzaron por establecer una distinción entre puntos base y puntos dependientes. A diferencia del punto base, el punto dependiente es un punto que surge al hacer una construcción, como dependiente de relaciones geométricas en ella (por ejemplo, la intersección de dos rectas) y no es posible arrastrarlo de manera directa. Estas definiciones que proponen los autores son elementos claves para la caracterización del arrastre mantenido.

Para explicar sus planteamientos, los autores proponen el siguiente ejemplo. Sean A, M, K tres puntos base no colineales. Se construye B como el punto simétrico de A con respecto a M, y el punto C como el punto simétrico de A con respecto a K. Se construye la recta l paralela al $\overline{BC}$ por A. Y la recta r perpendicular a l por C. Se determina D como el punto de intersección de l y r (Ilustración 2.5). Como los puntos A, M, K son puntos base, se mueven libremente por la pantalla. Se pide formular conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros en los que se pueden convertir el cuadrilátero $ADCB$, describiendo todas las formas en las que es posible obtener un determinado cuadrilátero.

Ilustración 2.5 Construcción del cuadrilátero $ADBC$. Fuente: Adaptado de Baccaglini-Frank et al (2009)



Según los autores, es fácil visualizar y justificar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio recto para cualquier punto A, M, K porque el $\overline{DA} \in l$ y l es paralelo al $\overline{BC}$ y además $\overline{CD} \in r$ y $r \perp l$. En consecuencia $r \perp \overline{BC}$. Este es un ejemplo de una construcción invariante.

El ejemplo anterior se propuso a dos estudiantes de secundaria. Por un lado, ellos comenzaron arrastrando el punto A (ilustración 2.5) de manera libre y se percataron que el cuadrilátero $ABCD$ siempre es un trapecio recto (invariante inducido por construcción). Y observaron que los puntos K, M y el $\overline{BC}$ estaban fijos mientras el proceso de arrastre ocurría (invariante observado durante el arrastre). Por otro lado, los estudiantes decidieron arrastrar el punto M y notaron que los lados del cuadrilátero cambiaban, pero el cuadrilátero $ABCD$ se mantenía como un trapecio recto (invariante inducido por construcción). Y observaron que los puntos A, K y B se mantenían invariantes (invariante observado durante el arrastre). Después de analizar muchas veces la representación geométrica, propusieron una conjetura a la luz de los arrastres empleados durante la exploración: "Para cualquier punto base A, M, K el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio recto" En este caso los estudiantes tuvieron un acercamiento a la percepción de invariantes y lo hicieron evidente en una relación condicional entre los puntos base de la construcción y el resultado de la exploración.

Este artículo resulta importante porque muestra cómo se puede articular el proceso de arrastrar con la percepción de invariantes en las representaciones geométricas. También expone que dichos invariantes pueden generar una relación de dependencia lógica en el mundo teórico de la geometría. Estos elementos, anteriormente mencionados, son claves en el proceso de conjeturación que se apoya en el proceso de visualización cuando se usan programas de geometría dinámica.

Continuamos el rastreo bibliográfico por Baccaglini-Frank y Mariotti (2009). El artículo tiene como objetivo estudiar el papel de los programas de geometría dinámica para favorecer procesos como los de visualización, conjeturación y demostración. Las autoras introducen el lenguaje de movimiento directo y movimiento indirecto de objetos.

Para llegar al objetivo, las autoras proponen que los tipos de arrastre son claves en la generación de conjeturas. El tipo de arrastre puede determinar el movimiento de los objetos geométricos de dos posibles formas: el movimiento directo y el movimiento indirecto. El movimiento directo se refiere al movimiento hecho voluntariamente de un elemento base, por ejemplo, un punto por cualquier lugar de la pantalla. El segundo ocurre cuando el elemento se mueve en la pantalla de manera que depende del movimiento directo. En este sentido Baccaglini-Frank y Mariotti (2009) afirman que: "el uso del arrastre permite sentir una dependencia del movimiento que puede interpretarse en términos de una dependencia lógica dentro del contexto geométrico" (pp. 232). Así, la herramienta de arrastre puede ser útil en la interpretación de una representación geométrica en términos del control lógico;(es decir, en términos de relaciones de dependencia geométrica), los estudiantes pueden trasformar los datos perceptivos, fruto de la visualización, en una relación condicional entre antecedente y consecuente, a manera de conjetura.

De esta manera las autoras hacen explícita la importancia del arrastre en la generación de conjeturas, ya que los estudiantes pueden: observar invariantes en las representaciones geométricas, identificar una dependencia lógica entre lo arrastrado y lo observado y corroborar las conjeturas en el entorno de un programa de geometría dinámica. Baccaglini-Frank y Mariotti (2009) resaltan que es útil para los estudiantes el poder inferir ciertos hechos que expliquen algunos fenómenos con el fin de conseguir organizar, jerarquizar y transformar las acciones en determinado problema.

Baccaglini-Frank y Mariotti (2009) sostienen una hipótesis de lo que podría ocurrir cuando un estudiante ha sido introducido a los tipos de arrastre y la exponen en los siguientes pasos:

Paso uno: Uso consciente de diferentes tipos de arrastre y uso de la herramienta *Rastro* para investigar la situación; por ejemplo, el arrastre libre y el arrastre de lugar ficticio. Con ello logran mantener una propiedad geométrica de la figura, a la que denominan invariante inducido intencionalmente.

Paso dos: Toma de conciencia del lugar que describe un elemento de la construcción, a través del arrastre de lugar ficticio. Con ello reconocen un segundo invariante, que las autoras denominan invariante observado durante el arrastre.

Paso tres: Formulación de hipótesis acerca del vínculo condicional, entre el invariante inducido y el invariante observado durante el arrastre, en sus diferentes tipos (libre, guiado, vinculado, de lugar ficticio) para explicar la situación.

Paso cuatro: Formulación de la conjetura "Si el invariante observado entonces invariante inducido".

Paso cinco: Producción de una verificación matemática de la conjetura o intento de la misma y potencial reformulación de la conjetura.

Hasta aquí las autoras exponen elementos claves que posteriormente usarán para dar paso al arrastre mantenido. Mientras tanto destacan que el proceso de arrastre poco se utiliza pero tiene gran potencial para promover los procesos de visualización y conjeturación.

Para explicar con más detalle cada uno de los tipos de arrastre, en particular el arrastre de lugar ficticio, Baccaglini-Frank y Mariotti (2009) precisan que este consiste en arrastrar un punto con la intención de mantener una determinada propiedad de la figura, es decir, el invariante inducido intencionalmente. De esta manera puede aparecer una regularidad interesante, que lleva al descubrimiento de cierta propiedad de la figura cuando el punto es arrastrado, es decir, el invariante observado durante el arrastre. Sin embargo, para los estudiantes este lugar está oculto y se hace explícito cuando se aplica la herramienta *Rastro* al punto. Durante el arrastre de lugar ficticio, los estudiantes perciben regularidades del movimiento del punto y las traducen en un objeto explícito generando conciencia de la existencia de este con el fin de vincular el punto a tal lugar y corroborar si se mantiene la propiedad deseada. En resumen, las autoras proponen las siguientes explicaciones:

Invariante inducido intencionalmente: los estudiantes intentan mantener una determinada propiedad geométrica.

Invariante observado durante el arrastre: los estudiantes notan que, cuando arrastran un cierto punto base a lo largo del camino, el invariante inducido intencionalmente parece mantenerse.

Producto de los procesos anteriores resulta razonable para los estudiantes suponer que si un punto base se encuentra en una trayectoria particular (descripción del invariante observado), el invariante inducido es verdadero. Si la trayectoria que sigue el punto se encuentra en una figura geométrica particular, la conjetura puede tener la siguiente estructura: si el punto se encuentra en tal figura, el invariante inducido intencionalmente es verdadero.

A continuación, Baccaglini-Frank y Mariotti (2009) proponen el siguiente problema para ejemplificar los procesos mencionados: dibuje tres puntos A, M y K no colineales, luego construya el punto B como la imagen simétrica de A con respecto a M, y el punto C como la imagen simétrica de A con respecto a K. Construya el punto D como la imagen simétrica de B con respecto a K. Arrastre M y haga conjeturas sobre el cuadrilátero $ABCD$.

Al arrastrar el punto M, los estudiantes pueden visualizar distintos paralelogramos, en particular cuando $ABCD$ es un rectángulo. En este caso, ellos pueden elegir el rectángulo como el invariante inducido intencionalmente y buscar mantenerlo durante el arrastre. Para lograr esto, los estudiantes pueden usar la herramienta *Rastro* al punto M para que se vea la trayectoria que sigue y corroborar cuándo esta configuración es cierta (Ilustración 2.6). Esto puede llevar a observar cierta regularidad (el invariante observado durante el arrastre). El movimiento del punto M podría evidenciar la trayectoria de una circunferencia con diámetro AK.

Ilustración 2.6 Arrastre del punto *M* con la herramienta *Rastro*. Fuente: Adaptada de Baccaglini-Frank y Mariotti (2009)

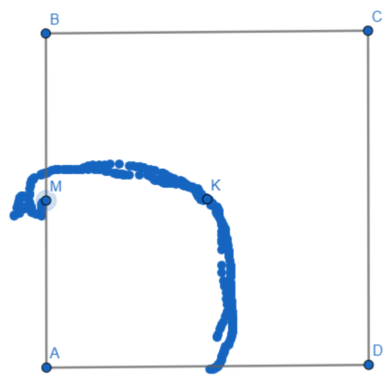
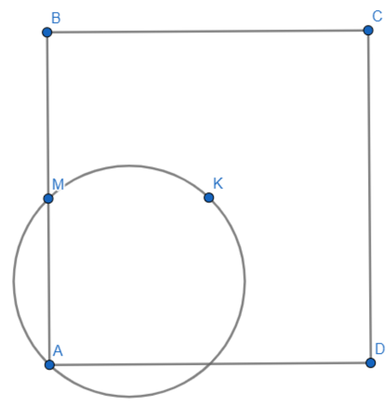


Ilustración 2.7 Construcción de la robusta de la trayectoria descrita por M. Fuente: Adaptada de Baccaglini-Frank y Mariotti (2009)



Es posible que los estudiantes quieran corroborar la trayectoria haciendo una construcción robusta de la circunferencia y vincular el punto M a este objeto (Ilustración 2.7). Ellos pueden plantear un vínculo entre las invariantes reconocidas durante el proceso de arrastre. Esto es, un vínculo condicional entre el invariante inducido intencionalmente y el invariante observado durante el arrastre, de la forma "si el invariante observado ocurre entonces el invariante inducido intencionalmente es verdadero". Lo que lleva a la siguiente conjetura: "Si M está en la circunferencia de diámetro AK, entonces $ABCD$ es un rectángulo".

Este artículo introduce los elementos necesarios para dar paso al arrastre mantenido que presentan más adelante Baccaglini-Frank y Mariotti. Adicionalmente, el texto es motivante porque ejemplifica de manera acertada cómo ocurren algunos procesos cognitivos haciendo uso de los distintos tipos de arrastre, que pueden ayudar en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula.

2.2 Estudio sobre el arrastre mantenido

Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) definen en esta publicación, por primera vez, el arrastre mantenido a partir de investigaciones previas sobre tipos de arrastre. El objetivo principal del artículo es investigar detenidamente los procesos cognitivos que ocurren durante la generación de conjeturas, en la solución de problemas abiertos, y vincularlos con los tipos de arrastre.

Para alcanzar este objetivo, las autoras comienzan por hacer una revisión de antecedentes teóricos. En seguida proponen un trabajo con estudiantes italianos de secundaria y finalmente desarrollan un análisis sobre las producciones de los estudiantes.

En los antecedentes teóricos Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) presentan tres fundamentos conceptuales de la investigación que son: el papel los programas de geometría dinámica, las características de un problema abierto y el arrastre como instrumento. Sobre los programas de geometría dinámica, las autoras señalan que estos son una herramienta muy útil porque son un puente potencial entre el mundo fenomenológico de la experiencia y el mundo matemático de la geometría euclidiana. En cuanto a las características de los problemas abiertos, consideran que los enunciados deben ser declaraciones breves que incluyen una descripción de una configuración, la solicitud de establecer propiedades o relaciones entre los elementos de esta y que no sugieren ningún método de solución particular. Pueden ser de la forma "¿Qué configuración se produce cuando…?", "¿Qué relación puede encontrar entre…?" "¿Qué figura se puede transformar en…?"

Como lo habían mencionado en trabajos previos, las autoras interpretan el movimiento directo e indirecto como una "dependencia lógica" y esto resulta ser clave en el desarrollo de conjeturas. Por lo tanto, el proceso de arrastre sirve como herramienta para revelar una relación entre las propiedades geométricas implícitas en la figura y la forma de visualizar la imagen en la pantalla.

Baccaglini - Frank y Mariotti (2010), proponen dos problemas a los estudiantes, aunque en el artículo solo mencionan las producciones de uno de ellos. Este problema es descrito en el Capítulo 3 (ejemplo 1).

Con relación al arrastre mantenido, las autoras precisan que este consiste en arrastrar un punto o más y mantener invariante alguna propiedad mientras se observa otra propiedad interesante. En este sentido, Baccaglini - Frank y Mariotti (2010), aclaran que el arrastre mantenido implica el reconocimiento de una configuración particular como interesante cuando el usuario intenta inducir otra propiedad particular para que esta se convierta en un invariante durante el arrastre.

Baccaglini y Mariotti (2010) explican que el arrastre de lugar ficticio difiere del arrastre mantenido en que el primero es un arrastre que "ha encontrado su camino", un lugar ficticio que no es visible para el usuario. Mientras que el segundo no tiene como prioridad encontrar el camino que está escondido, sino que tiene la intención específica de mantener una propiedad particular. En ese sentido sirve para identificar por qué el camino que recorre el elemento base mantiene un invariante en la representación que controla dicho elemento.

Consideramos este artículo como referente principal en el presente trabajo de grado porque es donde las autoras proponen por primera vez el arrastre mantenido. A su vez, muestran su utilidad en los proceso de visualización y conjeturación y describen elementos claves en el proceso de visualización que conducen a la conjeturación.

El objetivo de la investigación reportada en el artículo de Mariotti y Baccaglini-Frank (2011) es analizar de qué manera el uso del arrastre fomenta el proceso de visualización y la producción de una declaración condicional a manera de conjetura. Este artículo es pertinente para el presente trabajo de grado porque continúa ampliando información sobre el uso del arrastre mantenido en la solución de problemas abiertos, con foco de los procesos de visualización y conjeturación.

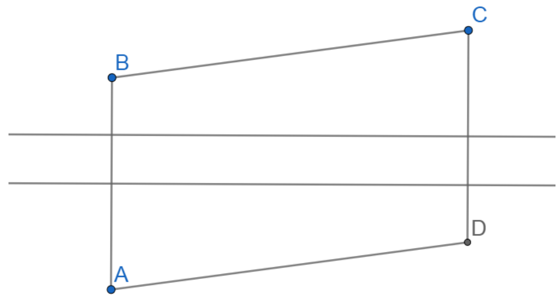
Para lograr el objetivo, las autoras hacen un análisis sobre el arrastre, desde varias perspectivas. Estas son: el arrastre para percibir invariantes, el arrastre para producir una declaración condicional, el arrastre para encontrar una premisa y el arrastre en el análisis de una solución paradigmática.

Las autoras señalan que el arrastre permite la transformacion de los objetos geometricos de tal manera que los estudiantes pueden visualizar invariantes mientras hacen uso de este. Los invariantes están determinados por: las relaciones geométricas que se establecen y que se encuentran asociadas una teoría de la geometría euclidiana.

Mariotti y Baccaglini-Frank (2011) consideran que existe una diferencia entre los invariantes, que es fundamental para identificar la dependencia lógica entre ellos. En este caso, ellas se refieren, nuevamente, al invariante inducido correspondiente a propiedades geometricas establecidas al hacer la construcción, y a otros invariantes que son propiedades geométricas que son consecuencia del inducido.

El arrastre para producir una relación condicional es complejo, porque no basta solamente con observar de manera general el objeto geométrico y reconocer las propiedades. Exige analizar y descomponer los elementos y sus propiedades para visualizar las relaciones que existen entre dichas propiedades. Es decir, que para producir el enunciado de una conjetura los estudiantes se deben basar en la interpretación de los invariantes inducidos y observados, en términos de relaciones entre las propiedades de un objeto geométrico (Mariotti y Baccaglini-Frank, 2011). Las autoras presentan el siguiente ejemplo: $ABCD$ es un cuadrilátero en el que CD es paralelo a AB y se construyen las mediatrices de AB y CD (Ilustración 2.8).

Ilustración 2.8 Cuadrilátero $ABCD$ y mediatrices de los segmentos AB y CD. Fuente: Mariotti y Baccaglini (2011)



La propiedades que se puede visualizar en la figura gracias al uso del arrastre son: el paralelismo de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, la perpendicularidad de las mediatrices y los segmentos correspondientes y el paralelismo entre las dos mediatrices. Según las autoras, la complejidad en la producción de un enunciado condicional se sitúa en hacer conciencia de las jerarquías inducidas entre las propiedades de la contrucción y las correspondientes relaciones lógicas entre las propiedades que se obtienen. A partir de tal identificación, es posible construir la conjetura “sí dos lados de un cuadrilátero (ni rectángulo ni cuadrado) son paralelos, entonces las mediatrices de los lados correspondientes son paralelas”. El arrastre se puede interpretar como un control lógico sobre las relaciones entre las propiedades dadas.

Otro aspecto que tienen en cuenta Mariotti y Baccaglini-Frank (2011) al describir el arrastre y su papel en la generación de conjeturas es que una figura dinámica depende de sus puntos base y también de la construcción realizada que determina ciertas propiedades invariantes. Por esta razón las autoras establecen un aspecto fundamental del “ser dinámico” de una figura en los programas de geometría. Aclaran que los puntos base de un objeto geométrico están determinados por los pasos de la construcción y que depende del resolutor traducir “estos pasos” en propiedades geométricas. De igual manera este debe relacionar las propiedades dadas, por la naturaleza de la contrucción, con otras propiedades a través del razonamiento y descubrir nuevas propiedades que están logicamente asosciadas entre sí. Lo anterior con el fin de que el resolutor le de sentido a lo que experimenta.

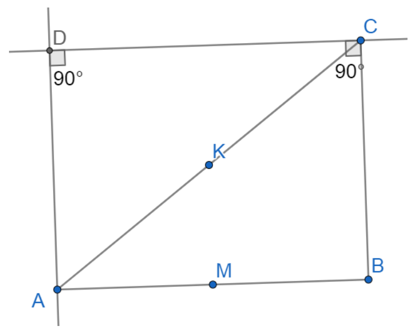
Las conjeturas puede surgir por el vínculo que se establece entre las propiedades que se han construido intencionalmente y las propiedades que se pueden visualizar. Tal vínculo puede interpretarse como una relación condicional.

Para evidenciar de qué manera el arrastre mantenido favorece la producción de conjeturas, Mariotti y Baccaglini-Frank (2011) llevaron acabo una actividad con estudiantes de secundaria de un liceo en Italia. Las personas que participaron de la actividad tenian al menos un año de experiencia previa en el uso del programa de geometría dinámica antes de realizar el estudio.

Concretamente la actividad consistió en dibujar tres puntos A, M, K no colineales. Luego construir el punto B como la imagen simétrica de A respecto M, y el punto C como la imagen simétrica de A con respecto K. En seguida se pedía que arrastrarán diferentes puntos de la construcción y realizarán conjeturas sobre cuadrilátero $ABCD$ (Ilustración 2.9).

Ilustración 2.9

Cuadrilátero $ABCD$ con las condiciones dadas. Fuente: adaptada de Mariotti y Baccaglini-Frank (2011)



Los estudiantes comienzaron a arrastrar el punto M tratando de matener el cuadrilátero $ABCD$ incialmente como un rectángulo. En este caso, ellos estaban induciendo un invarante. Para mostrar la trayectoria que sigue el punto M cuando es arrastrado, activan con la herramienta *Rastro* para determinar el segundo invariante (que M describe una circunferencia). Por lo tanto, los estudaintes hacen una construcción robusta y vincularon el punto M de tal manera que corroboraron la existencia de los dos invariantes. Las autoras sugieren que el control directo del invariante generó el posible antecedente de la conjetura y el control indirecto sobre otro invariante llevó al posible consecuente de la conjetura.

En conclusión, este artículo amplia la información sobre el uso del arrastre mantenido, porque muestra los invariantes que se pueden producir a traves de los movimientos en una representación geométrica. Adicionalmente nos permite entender cómo operan los procesos de visualización y conjeturación, para extraer información visual sobre propiedades de una representación geométrica dinámica y establecer relaciones condicionales.

Baccaglini-Frank y Antonini (2016) proponen, en la investigación reportada en esta publicación, una hipótesis sobre los diferentes tipos de arrastre (en paricular el arrastre mantenido) y de qué manera estos sirven como una herramienta física o psicológica para la generación de conjeturas y demostraciones. Este artículo amplía información acerca del uso del arrastre mantenido en la solución de problemas abiertos y cómo opera en los procesos cognitivos de los estudiantes.

Para alcanzar el objetivo, Baccaglini-Frank y Antonini (2016) retoman la definición del arrastre mantenido, descrita en investigaciones anteriores, explican cómo conciben el proceso de abuducción y finalmente exploran la unidad cognitiva en la generación de conjeturas y demostraciones. Es de resaltar que nuestro interes está enfocado sólo en el proceso de conjeturación que los autores refieren en este documento.

Baccaglini-Frank y Antonini (2016) retoman el arrastre mantenido indicando que lo que se busca es inducir un invariante intencionalmente, arrastrando un punto base, para visualizar otro invariante. El problema correspondiente al ejemplo 1, que explicamos en el Capítulo 3, se propuso a estudiantes de secundaria en Italia con edades entre 15 y 17 años. En el problema mencionado, los autores hacen explícito el papel del arrastre mantenido como herramienta psicológica. Este deja de ser usado de manera física y opera mentalmente en los estudiantes de manera que imaginan trayectorias y establecen relaciones entre los elementos de las figuras.

Esta investigación mostró que los estudiantes decidieron usar el arrastre mantenido porque les ayudó a controlar el invariante inducido y percibir uno nuevo interpretando dicha relación como un vínculo condicional y provocando la formulación de una conjetura en el contexto de la geometría euclidiana (Baccaglini-Frank y Antonini 2016). Adcionalmente esta invaestigación muestra cómo opera el arrastre mantenido como parte del proceso de visualización.

En la investigación reportada en el artículo de Baccaglini-Frank (2019) se propone como objetivo discutir la naturaleza particular del proceso de abducción asociado con el uso del arrastre mantenido. La autora intenta relacionar la evidencia visual con la evidencia teórica y profundizar en cómo el arrastre mantenido lleva a los estudiantes a la generación de conjeturas.

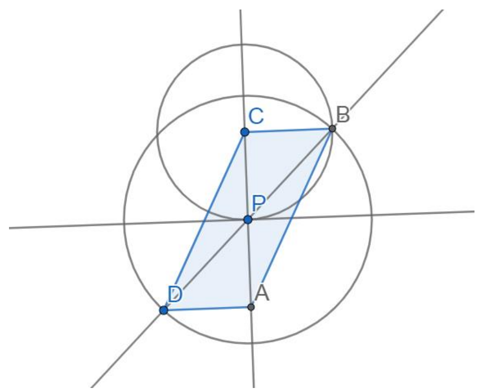
Para alcanzar el objetivo Baccaglini-Frank (2019) fundamenta su investigación en antecedentes teóricos relacionados con el uso del arrastre. A continuación, expone el trabajo adelantado por estudiantes de grado décimo en Italia, donde muestra la relación entre el uso del arrastre mantenido y los procesos de visualización y conjetruación.

Baccaglini-Frank (2019) retoma el arrastre mantenido como un tipo de arrastre en el cual los estudiantes intentan mantener una propiedad que les resulta interesante induciéndola como un invariante. En este sentido este arrastre favorece la transición de la exploración a la producción de conjeturas. Así mismo, la autora aclara que la estructura de la relación condicional entre el invariante inducido y el invariante observado se da de la forma “si el invariante observado ocurre, entonces se tiene el invariante inducido”. También Baccaglini-Frank (2019) resalta que el arrastre mantenido produce una manipulación importante debido al contacto que tienen los estudiantes con las representaciones geométricas durante la exploración.

Cuando se usa el arrastre mantenido para generar conjeturas, Baccaglini-Frank (2019) sostiene que se produce un descubrimiento que ocurre a través de la acción. De hecho, el uso del arrastre mantenido puede generar en los estudiantes la conciencia de la percepción simultánea entre los invariantes, que depende del control sobre ellos. En este caso la autora se refiere al control directo sobre el invariante observado y al control indirecto sobre el invariante inducido.

Para explicar lo anterior Baccaglini-Frank (2019) presenta el trabajo adelantado por dos estudiantes en Italia en donde ellos hicieron uso del arrastre mantenido para resolver el problema "El cuadrilátero especial" explicado en el Capítulo 3. En este caso los estudiantes decidieron mantener el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo centrando su atención en que $\overline{BP} \cong \overline{PD}$. El invariante que los estudiantes observaron deriva de la equidistancia del punto P entre D y B; es decir, que las diagonales se bisecan en el punto P. En consecuencia, los estudiantes deciden construir una $\odot_{P,PD}$de tal manera que el punto $B \in \odot_{P,PD}$ (ver ilustración 2.10).

Ilustración 2.10 Cuadrilátero $ABCD$ y mediatrices de los segmentos AB y CD. Fuente: adaptado de Baccaglini-Frank (2019)



El invariante que los estudiantes observan es que $B \in\odot_{P,PD}$. Ellos usan este invariante como la causa de que el cuadrilátero $ABCD$ sea paralelogramo (invariante inducido intencionalmente). En consecuencia, los estudiantes buscan establecer la relación condicional entre los invariantes generando la siguiente conjetura "Si $B \in\odot_{P,PD}$ entonces $ABCD$ paralelogramo". Sin embargo, Baccaglini-Frank (2019) afirma que los estudiantes buscan establecer una proposición donde el punto D sea involucrado directamente y no el punto B, porque D es manipulado directamente y el punto B no. Visualizan que el punto D describe una $\odot_{A,AP}$ porque intentan mantener $AP = AD$, que corresponde a otro invariante observado durante el arrastre. Por lo tanto, los estudiantes formulan la siguiente cojetura: Si $AP = AD$ entonces $ABCD$ es un paralelogramo. Lo anterior responde al invariante observado durante el arrastre que hace que ocurra el invariante inducido.

Este artículo muestra que el arrastre mantenido favorece la reinterpretación de fenómenos producidos en un programa de geometría dinámica, por parte de los estudiantes, como proposición condicional. Lo que a nuestro juicio representa una transición del mundo de la geometría dinámica al mundo de la geometría euclidiana, gracias a la visualización y a la conjetruación.

Capítulo 3 Marco de referencia

En este capítulo presentamos los diferentes tipos de arrastre que han sido trabajados por distintos investigadores. Conceptualizamos y ejemplificamos el arrastre mantenido. Después, presentamos la postura sobre los problemas abiertos de conjeturación y cómo deberían formularse para desarrollar el arrastre mantenido. Finalmente proponemos una conceptualización de los procesos de visualización y conjeturación.

3.1 Tipos de arrastre

Los estudios acerca de la manipulación dinámica de los objetos geométricos han llevado a los investigadores a caracterizar diferentes maneras de hacer “arrastres”. Arzarello et al. (2002) fueron los pioneros en preocuparse por establecer las diferentes maneras de arrastrar. Entre estas están las siguientes:

Arrastre libre: consiste en mover puntos de una representación por la pantalla de forma aleatoria, para descubrir configuraciones o regularidades interesantes.

Arrastre guiado: consiste en mover puntos de una representación para darle una forma particular a esta, con el fin de lograr identificar alguna propiedad.

Arrastre vinculado: consiste en mover un punto sobre el objeto al que pertenece.

Arrastre de lugar ficticio: consiste en mover un punto de una representación procurando que ésta conserve una propiedad. El punto arrastrado se mueve siguiendo un camino que quizá el usuario no conoce inicialmente, pero que debería descubrir.

Este trabajo se centra en el arrastre mantenido, porque entrevé su potencial para favorecer procesos de visualización y conjeturación. A diferencia de los otros arrastres descritos, este implica la visualización de una configuración particular en la que hay propiedades invariantes que a su vez generan una nueva propiedad que puede ser descubierta y conduce a la formulación de una conjetura.

3.2 Conceptualización del arrastre mantenido

Baccaglini y Mariotti (2010) definen el arrastre mantenido así:

> “es un tipo de arrastre que consiste en mover un punto de una representación para que esta conserve una propiedad interesante. Mientras el arrastre sucede, se reconoce otra configuración particular interesante y el usuario intenta inducir dicha propiedad para que se vuelva un invariante durante el arrastre sin importar el camino que sigue el punto que se arrastra” (pp. 230).

Esta definición de arrastre mantenido es un poco confusa y no establece claramente la diferencia con el arrastre de lugar ficticio. En la primera parte de la definición parecería que las autoras se están refiriendo al arrastre de lugar ficticio. Pero, en la segunda parte de la definición aluden al interés del usuario de inducir un invariante en una representación que depende del movimiento del punto que se arrastra en el lugar ficticio. En ese sentido, el arrastre mantenido se diferencia del arrastre del lugar ficticio, en que con el primero se busca mantener una propiedad de la representación a través de una trayectoria, que el usuario no percibe inicialmente, mientras que con el segundo se busca producir un invariante en una representación, controlada por la ruta que sigue el punto base, es decir, el punto que controla toda la construcción. Para aclarar la definición proponemos los siguientes ejemplos.

3.2.1 Ejemplificación del arrastre mantenido

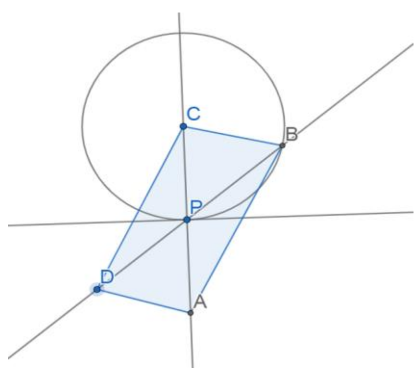
Para entender un poco más el arrastre mantenido presentamos a continuación los siguientes ejemplos.

Ejemplo: "Cuadrilátero especial"

Este ejemplo es sugerido por Baccaglini y Mariotti (2010). Se parte de un cuadrilátero construido de la siguiente manera (Ilustración 3.1):

- P un punto.
- Recta r que pasa por P.
- Recta l perpendicular a r, que pasa por P.
- C un punto en l con $C \notin r$.
- A un punto simétrico de C con respecto a P.
- D un punto en el semiplano determinado por r que contiene A.
- $\overleftrightarrow{DP}$.
- Circunferencia con centro en C y radio CP.
- B segunda intersección de la recta $\overleftrightarrow{DP}$ y la circunferencia.
- Cuadrilátero $ABCD$ o $ADBC$.

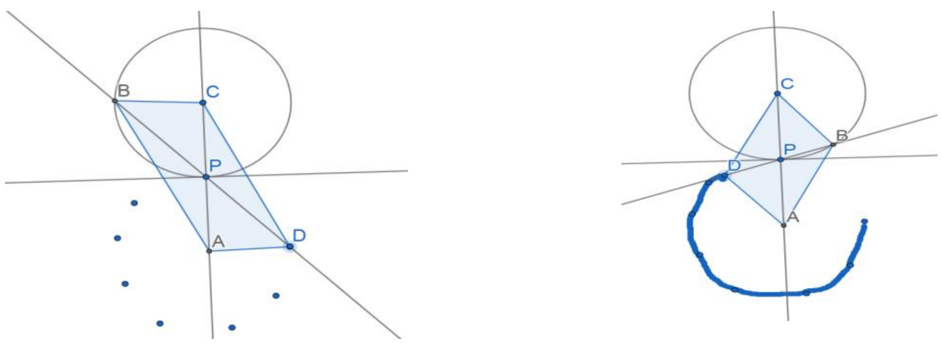
Ilustración 3.1 Cuadrilátero $ABCD$. Fuente: adaptado de Baccaglini-Frank y Mariotti (2010)



Se pide a los estudiantes que elaboren conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que podría producir el movimiento del punto D (punto base). Es decir, los estudiantes deben arrastrar el punto D de forma que el cuadrilátero $ABCD$ o $ADBC$ sea un cuadrilátero especial. A medida que arrastran, deben descubrir una propiedad inducida como invariante y formular una conjetura.

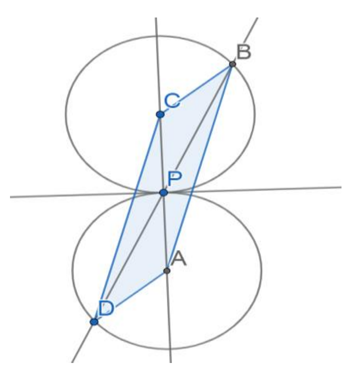
Supongamos que unos estudiantes deciden arrastrar el punto D en el semiplano determinado por r que contiene A, tratando de mantener el cuadrilátero como paralelogramo, para lo cual establecen las medidas de los lados. Al activar la herramienta *Rastro* en el punto D observan que el movimiento de D genera un paralelogramo si el punto describe una trayectoria circular (Ilustración 3.2).

Ilustración 3.2 Arrastre del punto M con la herramienta *Rastro*. Fuente: adaptado de Baccaglini-Frank y Mariotti (2010)



Usando la herramienta *Rastro*, los estudiantes se dan cuenta de que para mantener el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo, invariante inducido intencionalmente, el punto D genera una trayectoria formando una circunferencia con centro en A y radio PA. En busca de una explicación, los estudiantes pueden identificar que cuando $D \in \odot_{A,PA}$ ocurre que $PD = PB$ y que por eso las diagonales del cuadrilátero se bisecan, razón por la cual el cuadrilátero es un paralelogramo (Ilustración 3.3)

Ilustración 3.3 Construcción de la $\odot_{A,AP}$ y vinculo del punto D. Fuente: adaptado de Baccaglini-Frank y Mariotti (2010)



En este punto, se han identificado dos invariantes. El primero es el invariante inducido intencionalmente por el arrastre mantenido, que se refiere a que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo. El segundo es la trayectoria que sigue el punto D generada por un arrastre de lugar ficticio; es decir, la $\odot_{A,PA}$, de tal manera que $PD = PB$. Este es el invariante observado.

Los estudiantes podrían proponer la siguiente conjetura: Si D pertenece a la circunferencia con centro en A y radio PA entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. Con una construcción robusta pueden convencerse de la relación condicional entre el invariante observado durante el arrastre y el invariante inducido intencionalmente. El invariante observado durante el arrastre es el antecedente y el invariante inducido es el consecuente.

Baccagilini y Mariotti (2010) mencionan que el invariante inducido es una propiedad de la figura que solo puede inducirse indirectamente mediante el movimiento de un punto base. Mientras que el invariante observado es un movimiento inducido directamente sobre el punto base. En consecuencia, el invariante inducido es causado por el invariante observado. La relación que se puede establecer entre los dos invariantes, anteriormente mencionados, es una relación condicional.

En síntesis, ilustramos el arrastre mantenido en el esquema 3.1:

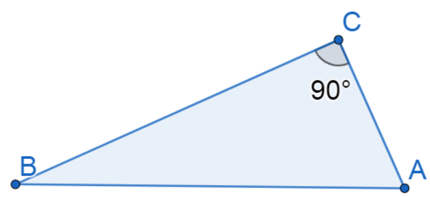
Esquema 3.1 *Relaciones entre los invariantes del problema "El cuadrilátero especial"*

	Invariante inducido		**Invariante observado**
Proceso de exploración	El cuadrilátero Es paralelogramo	$\longrightarrow$	Se visualiza que el punto D sigue una trayectoria circular
Proceso de verificación	El paralelogramo	$\longleftarrow$	Circunferencia con centro en P y radio PA
Conjetura	El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo	$\Longleftarrow$	D pertenece a la circunferencia con centro en A y radio PA

3.2.2 Ejemplo "Triángulo co-recto"

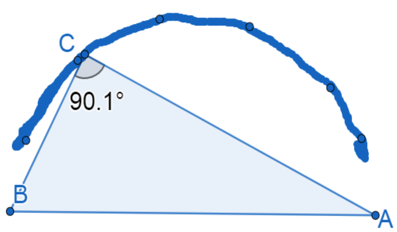
Este ejemplo es sugerido por Sua (en comunicación personal). Se pide a los estudiantes que construyan un triángulo ABC, tomen la medida del ángulo C y arrastren dicho punto hasta que la medida del ángulo C sea 90°. Luego muevan el punto C manteniendo dicha propiedad y encuentran otra (ilustración 3.4).

Ilustración 3.4 Triángulo ABC rectángulo. Fuente: elaboración propia



Los estudiantes resuelven la tarea arrastrando el punto C, en el semiplano determinado por la recta AB. Al activar el rastro del punto C con la ayuda de la herramienta *Rastro*, observan que el movimiento del punto C describe una trayectoria circular (Ilustración 3.5).

Ilustración 3.5 *Rastro* aplicado al punto C del triángulo ABC. Fuente: elaboración propia



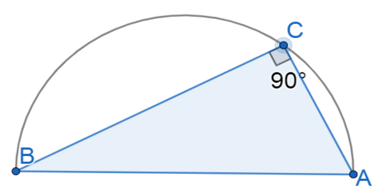
Pueden suceder dos casos:

- Que los estudiantes reconozcan que el punto describe media circunferencia y quieran conservar esta forma circular mientras arrastran el punto C. En este caso, sus acciones van dirigidas a conservar la forma circular que el rastro les muestra, ignorando la medida del ángulo. En este caso estamos ante un ejemplo de arrastre de lugar ficticio.
- Que los estudiantes inicien el arrastre del punto C y vean que se forma un camino, que es una semicircunferencia; ven un patrón y deciden continuar el movimiento con la atención puesta en que el ángulo sea de 90°, para buscar por qué ese invariante inducido produce el camino que se visualiza (invariante observado). En este caso estamos ante un arrastre mantenido.

En el arrastre mantenido, los estudiantes saben que el $\angle ABC$ es de 90°, invariante inducido intencionalmente. Y que produce como invariante observado que el punto C describe la semicircunferencia con diámetro AB. En cuyo caso, podrían proponer la siguiente conjetura: Dado triángulo ACB , si C pertenece a la semicircunferencia o a la circunferencia diámetro AB entonces, triángulo ACB es un triángulo rectángulo.

Como en el ejemplo del cuadrilátero, si los estudiantes deciden hacer una construcción robusta (Ilustración 3.6), pueden convencerse de la relación condicional entre el invariante observado durante el arrastre (antecedente de la conjetura) y el invariante inducido intencionalmente (consecuente de la conjetura).

Ilustración 3.6 Construcción de la semi circunferencia que pasa por los vértices del triángulo. Fuente: elaboración propia



En síntesis, ilustramos el arrastre mantenido en el esquema 3.2

Esquema 3.2 *Relaciones entre los invariantes del problema "El triángulo co-recto"*

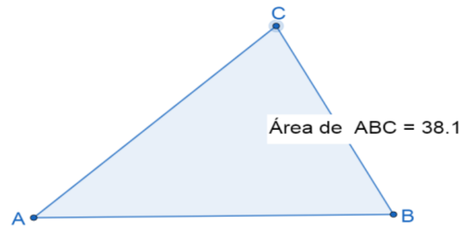
	Invariante inducido		Invariante observado
Proceso de exploración	El ángulo C recto del triángulo ACB	→	Se visualiza que el punto C sigue una trayectoria circular
Proceso de verificación	El triángulo rectángulo	←	La Semicircunferencia con diámetro AB
Conjetura	El triángulo ACB es triángulo rectángulo con $\angle C$ recto	⬅	C pertenece a la semicircunferencia con diámetro AB

3.2.3 Ejemplo: "Área Invariante"

Este ejemplo es sugerido por Sua (en comunicación personal).

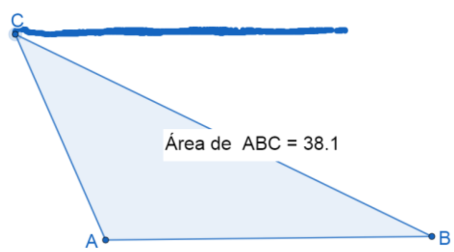
Dado el triángulo ABC, se pide arrastrar cualquiera de los vértices de este de manera que el área del triángulo siempre sea la misma y encontrar otra propiedad (ilustración 3.7).

Ilustración 3.7 Área de triángulo ABC. Fuente: elaboración propia



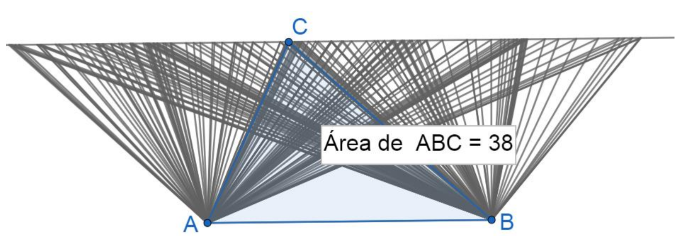
Supongamos que los estudiantes comienzan con el arrastre del punto A de manera que el triángulo tenga siempre el área con la misma medida. Este es el invariante inducido intencionalmente. Al activar el rastro al punto A, visualizan que este describe una recta (este es un caso de arrastre de lugar ficticio). Ven que la recta descrita es paralela al $\overline{BC}$. Este es el invariante observado durante el arrastre que se hace tratando de mantener el área igual. Por este se dice que este es un caso de arrastre mantenido (Ilustración 3.8).

Ilustración 3.8 *Rastro* aplicado al vértice C del triángulo ABC manteniendo el área invariante. Fuente: elaboración propia



Los estudiantes puden generar la siguiente conjetura Dada una familia de triángulos ABC con los puntos B y C fijos, $C \in l$ tal que $l \parallel \overline{BC}$, entonces el interior de los triángulos ABC tienen la misma área. Los estudiantes corroboran la conjetura con la construcción robusta en la que construyen una recta m paralela al $\overline{BC}$ y vinculan el punto A sobre esa recta, de modo que los triángulos ABC tienen la misma área (Ilustración 3.9).

Ilustración 3.9 Familia de triángulos ABC con la misma área. Fuente: elaboración propia



El invariante inducido intencionalmente, es decir, el área constante de la familia de triángulos ABC con B, C puntos fijos es el consecuente de la conjetura. Y A desplazándose por una recta paralela al $\overline{BC}$, es el invariante observado durante el arrastre, es el antecedente de la conjetura.

En síntesis, ilustramos el arrastre mantenido en el esquema 3.3 :

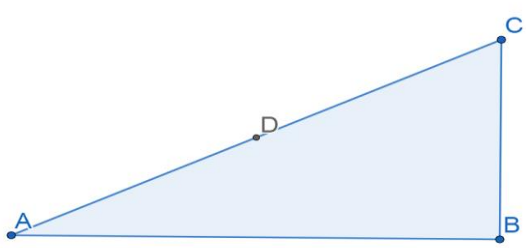
Esquema 3.3 *Relaciones entre invariantes del problema "El área invariante"*

	Invariante inducido	**Invariante observado**
Proceso de exploración	El área del triángulo siempre es la misma →	Se visualiza que el punto C sigue una trayectoria recta y además es paralela al $\overline{AB}$
Proceso de verificación	Familia de Triángulos con ABC tienen la misma área ←	Trazar la recta m tal que $C \in m$ y $m \parallel \overline{AB}$
Conjetura	los triángulos ABC tienen la misma área ⬅	una familia de triángulos ABC con los puntos B y C fijos, $\in l$ tal que $l \parallel \overline{BC}$

Un no ejemplo del arrastre mantenido

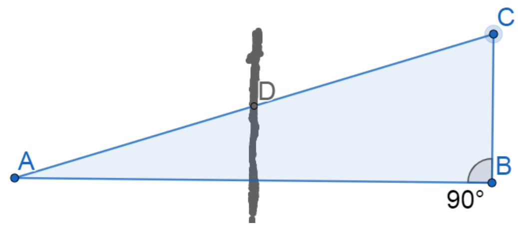
Con el ánimo de aclarar aún más el arrastre mantenido, proponemos un no ejemplo de este. Dado el triángulo ABC con apariencia de triángulo rectángulo, con punto medio D del $\overline{AC}$, se arrastra el punto C de manera que el $\angle ABC$ siempre sea recto (Ilustración 3.10)

Ilustración 3.10 Triángulo ABC con D punto medio del $\overline{AC}$. Fuente: elaboración propia



Los estudiantes mueven el punto C, tratando de que el $\angle ABC$ sea recto (ver ilustración 3.11). Este es un invariante inducido intencionalmente.

Ilustración 3.11 Triángulo ABC con *Rastro* aplicado al punto D. Fuente: elaboración propia



Al hacer el arrastre de modo que $\angle ABC$ sea recto (invariante inducido) se observa que el punto D describe una recta paralela al $\overline{CB}$, que corta al segmento $\overline{AB}$ por el punto medio. Este es el invariante observado durante el arrastre. Sin embargo, este ejemplo no es un caso de arrastre mantenido porque el invariante observado no está causado por un movimiento directo sobre el punto base. Es consecuencia (el invariante observado) de un movimiento indirecto y por eso no cumple con las condiciones.

3.4 El proceso de visualización

De acuerdo con Gutiérrez (1991), asumimos la visualización como un proceso mental que hace “uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, realizado para obtener información, resolver problemas o justificar hechos” (pp. 44). Mediante la visualización, según Samper y Molina. (2013) “se consigue información de una representación geométrica con el fin de encontrar relaciones que no son evidentes de forma inmediata. Esto se logra, por ejemplo, al: identificar los elementos que la componen, percibir sus propiedades, establecer relaciones entre elementos de los objetos, entre objetos o entre el observador y el objeto e interpretar símbolos que representan dichas propiedades, en particular, congruencias “≅”, paralelismo “∥” o perpendicularidad ” (pp. 18)

De acuerdo con lo anterior, el proceso de visualización es importante en la formación conceptual de los objetos geométricos. Desempeña un papel importante en la producción de definiciones, conjeturas y teoremas.

3.5 El proceso de conjeturación

El proceso de conjeturación lo entendemos, de acuerdo con Samper y Molina. (2013),

“Como aquel que tiene por meta formular enunciados hipotéticos de carácter general. Estos enunciados se fundamentan en la visualización o en el análisis de indicios cuyos valores de verdad no están definidos, pero están pendientes de ser sometidos a verificación y tienen un alto grado de certeza sobre su veracidad. En el proceso de conjeturar intervienen las acciones como visualizar, explorar, producir enunciados y verificar propiedades. Estas promueven que los estudiantes reconozcan las representaciones geométricas, invariantes, propiedades y relaciones que existen en dichas representaciones" (pp. 17)

Desde nuestro punto de vista la definición del proceso de conjeturación se ajusta al proceso que ocurre cuando los estudiantes exploran la representación geométrica y a partir de ella logran establecer relaciones de dependencia entre los objetos. En este sentido el proceso de conjeturación lleva a que se formulen dichas dependencias en una estructura lógica s*i… entonces*... Según Baccaglini-Frank y Mariotti (2009) gracias al arrastre mantenido los estudiantes son capaces de transformar lo que visualizan en la relación lógica mencionada. El invariante inducido en el arrastre se convierte en el consecuente y el observado en el antecedente.

3.6 El concepto de problema abierto

Un problema abierto lo entendemos, como lo proponen Baccaglini-Frank y Mariotti (2010), como un enunciado corto que no presenta una ruta específica alguna que muestre una solución particular ni mucho menos la solución en sí. Generalmente consiste en una descripción simple de una configuración dada y una solicitud general sobre las posibles relaciones entre los objetos geométricos o las propiedades de una representación. Las preguntas se presentan de la forma "¿Qué configuración se produce cuando?", "¿Qué relación puede encontrar entre…?" "¿Qué tipo de figura se puede transformar…?" Puede ocurrir que en el problema se pida una conjetura de manera explícita, como en el caso de los problemas que enunciamos previamente (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010)

Para dar solución a un problema abierto, se elabora una relación condicional mediante un enunciado que relacione el antecedente con el consecuente, producto de la exploración. Dicha relación condicional se traduce en una conjetura.

Capítulo 4 Estrategia investigativa

En este capítulo, presentamos las características de la experimentación con la que buscamos evidenciar el potencial que tiene el arrastre mantenido en los procesos de visualización y conjeturación, a favor de la actividad matemática. Describimos el escenario investigativo, los participantes del estudio, los tres problemas propuestos a ellos, la preparación de la entrevista para los participantes sobre cada uno de los problemas, el registro de la información y finalmente cómo hicimos el análisis de la información obtenida en la interacción con los participantes informantes.

4.1 Escenario

El escenario de la experimentación es un intercambio comunicativo entre el autor del trabajo de grado y estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Este se hizo de manera individual mediante la plataforma Microsoft Teams.

Se propusieron a cada estudiante uno o dos problemas abiertos que corresponden a ejemplos explicados en el Capítulo de Marco de referencia (Capítulo 3). Los estudiantes los debían resolver con el apoyo de GeoGebra. A medida que iban resolviendo los problemas, el autor de este trabajo asumió el rol de entrevistador proponiéndoles preguntas con el fin de que explicitaran, de la manera más clara, lo que visualizaban y lo que conjeturaban. Adicionalmente, buscaba que identificaran cuál era el invariante inducido intencionalmente, (consecuente de la conjetura), y cuál era el invariante observado durante el arrastre (antecedente de la conjetura).

4.2 Participantes informantes

A continuación, presentamos una breve descripción de la experiencia académica de los participantes informantes. Ellos fueron escogidos a conveniencia, por la cercanía con el autor y deseo de colaborar. Aludimos a los semestres cursados, a las experiencias con el programa de geometría dinámica y a las prácticas que han tenido con el arrastre. Además, a la respuesta que dieron a la pregunta: ¿para que utiliza el arrastre de GeoGebra?

- *Ronald*: es estudiante de décimo semestre. Ha cursado gran parte del plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas y por lo tanto ha visto todos los cursos de geometría que se proponen en el programa. Cuenta con amplia experiencia en el uso de la herramienta arrastre del programa de geometría dinámica GeoGebra para resolver problemas de geometría. En respuesta a la pregunta dice que utiliza el arrastre para observar si lo que conjetura corresponde a lo que visualiza, tratando de mantener alguna propiedad mientras arrastra y saber si lo que ha concluido se cumple efectivamente.
- *Cecilia*: es estudiante de segundo ingreso a la Licenciatura en Matemáticas y actualmente se encuentra en segundo semestre, pero ya había cursado elementos de Geometría y Geometría Plana en su primer ingreso. Ha tenido la oportunidad de trabajar con el programa de geometría dinámica GeoGebra y ha experimentado el

uso de la herramienta arrastre que ofrece el programa. En respuesta a la pregunta informa que usa el arrastre para observar cómo cambia las representaciones, generar conclusiones, generalizar, proponer conjeturas y hacer demostraciones.

- *Juan Carlos*: Es estudiante de séptimo semestre. Por lo tanto, ha visto todos los cursos de geometría que se proponen en el programa. Ha tenido la oportunidad de trabajar con el programa de geometría dinámica GeoGebra y tiene experiencia con la herramienta arrastre. En respuesta a la pregunta dice que lo utiliza con el fin de encontrar algún atributo particular que permita realizar una conjetura sobre el objeto arrastrado.
- *Jhon*: Es estudiante de noveno semestre. Ha visto todos los cursos de geometría que ofrece el programa. Ha tenido la oportunidad de trabajar en el programa de geometría dinámica GoGebra y ha utilizado la herramienta arrastre para resolver los problemas de geometría que se proponen en los cursos. En respuesta a la pregunta, menciona que hace uso del arrastre para observar las regularidades que se cumplen en una representación geométrica a través de la visualización, y comprobar que las conjeturas que propone están bien planteadas.

4.3 Problemas propuestos a los estudiantes

En la Tabla 4.1 se encuentran los enunciados de los problemas tal como se los propusimos a los estudiantes.

Tabla 4.1. Problemas propuestos a los participantes informantes.

<table>
<tr>
<td>El cuadrilátero especial
1)Realice la siguiente construcción
• P un punto.
• Recta r que pasa por P.
• Recta l perpendicular a r, que pasa por P.
• C un punto en l.
• A un punto simétrico de C con respecto a P.
• D un punto en el semiplano determinado por r que contiene $A, D \notin l$
• $\overleftrightarrow{DP}$.
• Circunferencia con centro en C y radio CP.
• B segunda intersección de la recta $\overleftrightarrow{DP}$ y la circunferencia.
• Construya el cuadrilátero ABCD
2) Realice una conjetura sobre los tipos de cuadriláteros que podría producir el movimiento del punto D.</td>
<td>El triángulo co-recto
1) Construya el triángulo ABC,
2) Tome la medida del $\angle C$ y arrastre dicho vértice hasta que $m\angle C = 90°$, luego mueva el vértice C manteniendo la medida del ángulo.
3) Elabore una conjetura</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">El área invariante
1) Construya el triángulo ABC
2) Arrastre cualquiera de los vértices del triángulo de manera que el área del triángulo sea siempre igual.</td>
</tr>
</table>

3) Elabore una conjetura.

En la Tabla 4.2 presentamos qué problemas propusimos a cada estudiante. La escogencia de los problemas asignados a cada uno se hizo considerando su experiencia académica y el tiempo de instrucción disponible.

Tabla 4.2

Nombre del problema y participante informante.

Problema	**Participante informante**
El cuadrilátero especial- El triángulo co-recto	Ronald
El área invariante	Cecilia
El triángulo co-recto	Juan Carlos
El cuadrilátero especial – El área invariante	Jhon

4.3 Preparación de la entrevista correspondiente a cada problema

Considerando las posibles actuaciones de los estudiantes, previmos una entrevista que intentaba que ellos, durante la resolución de los problemas, hicieran explícitos los procesos de visualización y conjeturación. Con ello buscamos recopilar información que evidenciara el nexo de tales procesos con el arrastre mantenido.

En las Tablas 4.3, 4.4 y 4.5 presentamos la planeación de la entrevista correspondiente a cada uno de los problemas. Aunque previmos las preguntas, decidimos que si veíamos que los estudiantes eran autónomos al ir explicitando: las acciones que pretenden realizar, lo que observan, lo que descubren, etc., el entrevistador intervendría lo mínimo posible.

Tabla 4.3 Planeación entrevista para el problema "El cuadrilátero especial".

Posible situación	**Pregunta o sugerencia**
Si los estudiantes tienen dificultades con la interpretación de los pasos de la construcción	¿Tiene alguna duda sobre alguno de los pasos?
Si los estudiantes no entienden que es un punto simétrico de C con respecto a P	En este caso de debe dar la interestancia $C-P-A$ donde P es punto medio de $\overline{CA}$

Si los estudiantes no entienden la instrucción 2 del enunciado del problema	¿Qué se le ocurre que debe hacer? ¿Puede expresar con sus palabras que le están pidiendo que haga?
Si los estudiantes empiezan a intervenir sobre la representación sin decir nada	¿Qué va a hacer? ¿Va a arrastrar?, ¿Para qué?
Si los estudiantes arrastran, pero no es claro lo que está visualizando	¿Describa cómo está arrastrando? ¿Qué busca? ¿Qué está visualizando o que pretende visualizar?
Si los estudiantes mencionan que visualiza varios cuadriláteros	¿Cuál está observando en estos momentos? Deténgase en uno de ellos y continúe la exploración.
Si los estudiantes no se detienen para mantener el arrastre en un invariante de un cuadrilátero especial.	¿Cuáles cuadriláteros está observando en estos momentos? ¿Por qué no intenta arrastrar tratando de mantener un cuadrilátero que esté visualizando a ver que descubre?
Si los estudiantes no inducen la propiedad invariante	Manteniendo las propiedades invariantes para un cuadrilátero intente descubrir otra propiedad invariante.
Si los estudiantes se centran en el arrastre de lugar ficticio y no da información acerca de nuevos invariantes observados.	¿Qué otro invariante está visualizando? ¿Qué camino sigue el punto D?
Si los estudiantes descubren la propiedad invariante pero no genera la conjetura	¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación que visualiza? Formule una conjetura.
Preguntas finales	¿Qué papel jugó el arrastre en la visualización y en la formulación de la conjetura? ¿Tendría algo más que agregar sobre lo que dijo en la entrevista inicial?

Tabla 4.4 Planeación de la entrevista “El triángulo co-recto”.

Posible situación	Pregunta o sugerencia
Si los estudiantes tienen dificultades con la interpretación del enunciado del problema	¿Tiene alguna duda acerca del enunciado del problema? ¿Hay algo que no esté claro?
Si los estudiantes no entienden la instrucción 2 del enunciado del problema	¿Qué le están pidiendo que haga? ¿Puede expresar con sus palabras que le están pidiendo que haga?
Si los estudiantes empiezan a intervenir sobre la representación sin decir nada	¿Qué va a hacer? ¿Va a arrastrar?, ¿Para qué? ¿Describa cómo está arrastrando?
Si los estudiantes arrastran, pero no es claro lo que está visualizando acerca del comportamiento de triángulo	¿Qué está visualizando? ¿Está centrando la atención en el punto arrastrado?

Si los estudiantes visualizan que al arrastrar el punto C lograr mantener el triángulo rectángulo, pero no se percata de la trayectoria que sigue C	¿Qué camino está siguiendo el punto C?
Si aún no es claro para los estudiantes el camino que sigue el vértice para mantener el triángulo rectángulo	¿Qué haría usted para que el vértice del triángulo muestre el camino que sigue?
Si los estudiantes no identifican que la trayectoria del vértice C forma un camino definido	¿Qué haría usted para identificar cuáles es el lugar geométrico donde C mantiene $m\angle C = 90°$?
Si los estudiantes descubren la propiedad invariante pero no genera la conjetura	¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación que visualiza? Formule una conjetura.
Preguntas finales	¿Qué papel jugó el arrastre en la visualización y en la formulación de la conjetura? ¿Tendría algo más que agregar sobre lo que dijo en la entrevista inicial?

Tabla 4.5 Planeación de la entrevista "El área invariante".

Posible situación	**Pregunta o sugerencia**
Si los estudiantes tienen dificultades con la interpretación del enunciado del problema	¿Tiene alguna duda acerca del enunciado del problema? ¿Qué no es claro?
Si los estudiantes empiezan a intervenir sobre la representación sin decir nada	¿Qué va a hacer? ¿Va a arrastrar?, ¿Para qué? ¿Describa cómo está arrastrando?
Si los estudiantes arrastran alguno de los vértices, pero no es claro lo que está visualizando acerca del comportamiento de triángulo	¿Qué está visualizando? o ¿Qué busca? ¿En qué se está fijando?
Si los estudiantes visualizan que al arrastrar el vértice se mantiene el área, pero no se percatan de la trayectoria que deja el punto arrastrado	¿Qué observa cuando arrastra el punto? ¿Qué hace para que no se pierda la igualdad en el área de la familia de triángulos?
Si aún no es claro para los estudiantes el camino que sigue el punto arrastrado	¿Qué haría usted para que el punto le muestre el camino que sigue?
Una vez muestra el trazo el punto los estudiantes no se convencen qué es una recta	Construya la recta por donde se supone que pasaría el punto.
Si los estudiantes no identifican la invariante que induce, y la invariante observada	¿Qué propiedad se ha mantenido durante el arrastre en la representación? Formule una conjetura.

Si los estudiantes descubren la propiedad invariante pero no genera la conjetura	¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación construida? Formule una conjetura.
Preguntas finales	¿Qué papel jugó el arrastre en la visualización y en la formulación de la conjetura? ¿Tendría algo más que agregar sobre lo que dijo en la entrevista inicial?

4.6 Registro de información

Para tener la información que nos permitiera hacer el análisis sobre el proceso adelantado, grabamos las sesiones de resolución de los problemas en la plataforma Microsoft Teams. Esto nos permitió observar y escuchar, las veces que fuera necesario, tanto las acciones que realizó cada estudiante en GeoGebra como lo que dijo en voz alta y las respuestas a las preguntas que les hizo el entrevistador.

A partir de las grabaciones, realizamos una descripción escrita del proceso de resolución de cada estudiante. En la descripción incluimos información sobre las acciones que realizaba en GeoGebra y sobre las ideas que explicitaba oralmente, con citas textuales en donde mencionaba lo que observó, lo que descubrió, lo que conjeturó y las respuestas a las preguntas que le formuló el entrevistador.

4.7 Análisis de la información

Para adelantar el proceso analítico tomamos la descripción y diligenciamos la Tabla 4.6 para cada proceso de resolución. En ella identificamos los siguientes elementos: los arrastres empleados, las configuraciones que visualiza, los invariantes detectados, la verificación adelantada, las relaciones descubiertas y la conjetura formulada.

Tabla 4.6 Rejilla analítica.

<table>
<tr><td>Estudiante:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Arrastres empleados</td><td>Libre:</td><td></td></tr>
<tr><td>De lugar ficticio:</td><td></td></tr>
<tr><td>Guiado:</td><td></td></tr>
<tr><td>Vinculado:</td><td></td></tr>
<tr><td>Mantenido:</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Configuraciones que visualiza</td><td>Objetos</td><td></td></tr>
<tr><td>Relaciones</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Invariantes detectadas</td><td>Invariante inducido intencionalmente.</td><td></td></tr>
<tr><td>Invariante observado durante el arrastre.</td><td></td></tr>
<tr><td>Verificación adelantada:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Relaciones descubiertas:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Conjetura formulada</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Capítulo 5 Análisis y resultados

Apoyados en el objetivo que nos hemos trazado, en este capítulo nos proponemos presentar los procesos de resolución de los problemas, de cada uno de los participantes informantes. En el análisis nos enfocamos en los resultados que dan cuenta de la mediación del arrastre mantenido en la resolución de problemas y el papel que este jugó en los procesos de visualización y conjeturación involucrados. Presentamos la información inicialmente de manera descriptiva, de acuerdo con el registro de la interacción con cada uno de los participantes, y posteriormente en la rejilla analítica en la que sintetizamos la información más relevante.

5.1 Resolución de los problemas desarrollados por Jhon

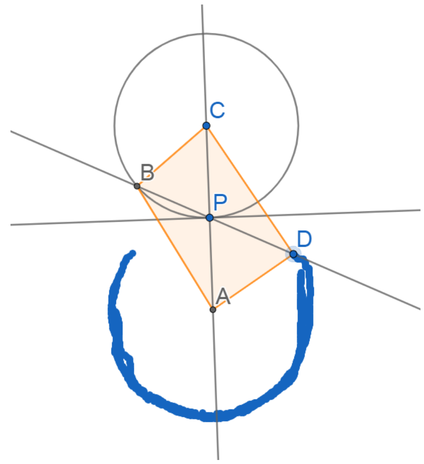
A continuación, describimos el análisis del proceso adelantado por Jhon en la resolución de los problemas "El Cuadrilátero especial" y "El área invariante". Como se verá, su actitud es particularmente interesante porque permanentemente se interroga acerca de lo que visualiza.

"El Cuadrilátero especial"

El estudiante es expresivo y todo el tiempo comunica sus pensamientos. Inicialmente, hace la construcción según las instrucciones del problema. Luego, empieza a arrastrar el punto D de manera libre y visualiza que el cuadrilátero es convexo. Mientras el estudiante arrastra libremente el punto D le preguntamos: "¿Qué tipo de cuadrilátero está observando en este momento?". Jhon responde: "Parecer ser un paralelogramo". En seguida le sugerimos: "Intente arrastrar el punto D tratando de mantener el cuadrilátero que está observando". El estudiante manifiesta que no es fácil arrastrar el punto D manteniendo el cuadrilátero como paralelogramo; es decir, provocando el invariante inducido. Después de varios intentos, sugiere que hay una relación de paralelismo entre $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{PH}$ y alude a que el punto D describe una recta "especial". Pero al seguir arrastrando D se percata de la posibilidad de que D esté en una circunferencia y no en una recta. En este caso estamos presenciando un arrastre de lugar ficticio.

Al observar que el participante no está seguro de la trayectoria que sigue el punto D le preguntamos "¿Qué haría usted para que el punto D le muestre la trayectoria que sigue?" Como el estudiante se queda pensativo, le pedimos que active el *Rastro* al punto D. Jhon activa el rastro del punto D, arrastra dicho punto tratando de mantener el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo (invariante inducido) y visualiza el rastro que deja D (invariante observado) (ver Ilustración 5.1).

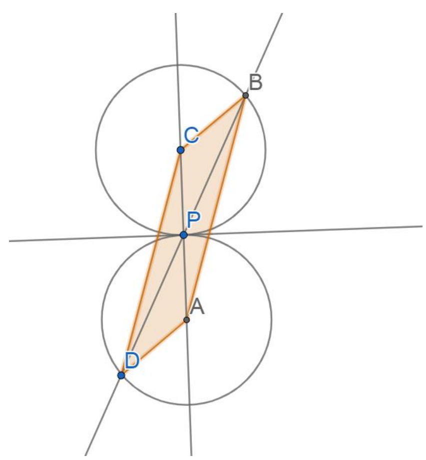
Ilustración 5.1 Jhon arrastra el punto D con la herramienta *Rastro* activa. Fuente: elaboración propia



Le preguntamos a Jhon: "¿Qué invariante intenta mantener?, ¿Qué trayectoria le muestra el punto D?". Jhon afirma: "El paralelogramo y parece que el punto D sigue la trayectoria de una circunferencia o de una elipse". Acto seguido, el participante propone la construcción de una $\odot_{A,AP}$ y arrastra el punto D sobre dicha circunferencia (arrastre vinculado), con el fin de corroborar que D describe una circunferencia (ver Ilustración 5.2).

Después, le formulamos otra pregunta: "¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación que visualiza?". Jhon dice: "que para mantener el paralelogramo la trayectoria que sigue D es una $\odot_{A,AP}$"(invariante inducida intencionalmente e invariante observada durante el arrastre).

Ilustración 5.2 Jhon construye la circunferencia con centro en A y radio AP y vincula al punto D. Fuente: elaboración propia



Le proponemos que formule una conjetura de la forma: *si… entonces…* Jhon piensa en voz alta mientas explora la representación con el ratón: "si es paralelogramo, todos sus lados son congruentes [sic], es decir que $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, porque P es punto medio; entonces tienen la misma medida…Pero, también observo que $\overleftrightarrow{DB}$ y $\overleftrightarrow{CA}$ se intersecan; esto nos debe servir para construir la conjetura”. Regresa a la representación detallando el rastro de la circunferencia y se detiene en el paralelogramo. “La conjetura sería referida a la circunferencia y referida al paralelogramo… ¡Ah sí! ya se cuál sería la conjetura”. Jhon empieza a construir la conjetura tomando como premisa el invariante inducido, pero se detiene a pensar que la circunferencia que sigue el punto D es el causante que el cuadrilátero $ADBC$ se mantenga como un paralelogramo. Hasta que finalmente construye la conjetura quedando así: “*Si $D \in \odot_{P,AP}$ entonces el cuadrilátero $ADCB$ es paralelogramo”*

En la *Tabla 5.1* presentamos la síntesis del desarrollo del problema realizado por Jhon

Tabla 5.1 Rejilla analítica del proceso adelantado por Jhon en el problema “El cuadrilátero especial”

Tabla 5.1 rejilla analítica del proceso adelantado por Jhon en el problema "El cuadrilátero especial"

Estudiante: Jhon	Acciones en GeoGebra y verbalizaciones realizadas por Jhon	
Arrastres empleados	Libre:	Arrastra el punto D de manera libre.
	De lugar ficticio:	Arrastra el punto D y este describe una trayectoria circular.
	Guiado:	Arrastra el punto D al cual le ha activado Mostrar rastro
	Vinculado:	Arrastra el punto D que ha vinculado previamente a la $\odot_{A,AP}$
	Mantenido:	Arrastra el punto D que está vinculado a la $\odot_{A,AP}$ (invariante observado) y mantiene el cuadrilátero con apariencia de paralelogramo (invariante inducido).
Configuraciones que visualiza	Objetos	Un paralelogramo (invariante inducida) La $\odot_{A,AP}$ (invariante observada).
	Relaciones	La relación de dependencia entre el movimiento del punto D y la configuración del cuadrilátero. El paralelismo entre $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{PH}$.
Invariantes detectadas	Invariante inducido intencionalmente.	El cuadrilátero $ABCD$ mantiene la apariencia de paralelogramo
	Invariante observada durante el arrastre.	$D \in \odot_{A,AP}$

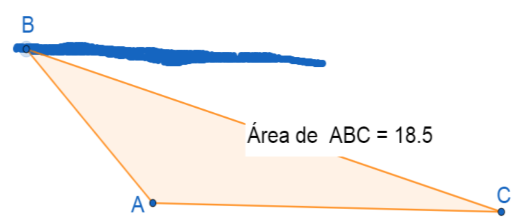
Verificación adelantada:	Construyó la circunferencia con centro en A y radio AP
Relaciones descubiertas:	Cuando arrastra el punto D descubre este que describe la trayectoria circular cuando el cuadrilátero se mantiene como paralelogramo.
Conjetura formulada	Si $D\ \in \odot_{A,AP}$ entonces el cuadrilátero $ADBC$ es paralelogramo.

"El área invariante"

Tal como ya dijimos, Jhon se muestra expresivo y comunica sus pensamientos. Inicialmente construye el triángulo ABC y utiliza la herramienta *Área* de GeoGebra para calcular y mostrar el área del triángulo. En seguida, empieza a mover el punto B de manera libre tratando de mantener el área del triángulo siempre igual. Se percata que la trayectoria que describe B es rectilínea. En este caso presenciamos el arrastre de lugar ficticio.

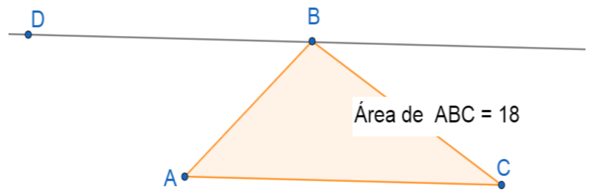
A continuación, Jhon propone aplicar la herramienta *Rastro* al punto B para evidenciar la trayectoria que deja el punto (Ilustración 5.3). En ese momento Jhon arrastra el punto B sobre una posible recta y declara que se mantiene el área triángulo incluso cuando $\angle CAB$ es obtuso. En esta ocasión se evidencia un arrastre de guiado.

Ilustración 5.3 Jhon arrastra el punto C con le herramienta *Rastro*. Fuente: elaboración propia



Posteriormente le preguntamos a Jhon: ¿Es posible que el triángulo siempre sea el mismo; es decir, tenga siempre la misma forma? Jhon responde: "No, no son iguales, eso lo podemos asegurar". En seguida le preguntamos: ¿Qué propiedad se ha mantenido durante el arrastre en la representación?" El participante afirma: "Si muevo el punto así bien rectico creo que se mantiene la misma área" y continúa diciendo: "El segmento del triángulo que nunca se ha movido es el $\overline{AC}$ y la trayectoria que deja B tiene algo en especial". Le preguntamos: "¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación construida? Es decir, esa recta que describe el punto B ¿Qué tiene de especial con respecto al triangulo?" El participante contesta: "La recta (que describe B) es paralela al $\overline{AC}$, parece ser, no sé" (invariante observada). El participante dice querer construir una recta $l \parallel \overline{AC}$ que pase por un punto externo y vincular el punto B a esa recta (arrastre vinculado). Al hacerlo, corrobora que se mantiene el área invariante (ilustración 5.4).

Ilustración 5.4 Jhon arrastra el punto C con le herramienta $Rastro$



Le proponemos que formule una conjetura. El participante revisa una y otra vez la representación y se detiene en la relación entre los puntos fijos A y C del triángulo y la recta paralela al $\overline{AC}$. Tras varios intentos de formular la conjetura, en los que expresa no saber cómo hacerlo, observamos que revisa una y otra vez los invariantes que visualiza. Finalmente decide formular la conjetura: “Dada la familia de triángulos ABC, si $B \in l, l$ es paralela al $\overline{AC}$ entonces la familia de triángulos ABC tienen la misma área”. En la siguiente tabla se presenta la síntesis del desarrollo del segundo problema con Jhon.

Tabla 5.2 Rejilla analítica del proceso adelantado por Jhon en el problema “El área invariante”

Estudiante: Jhon	Acciones en GeoGebra y verbalizaciones realizadas por Jhon	
Arrastres empleados	Libre:	Arrastra el punto B de manera libre.
	De lugar ficticio	Arrastra el punto B en una trayectoria recta.
	Guiado	Arrastra el punto B al cual se le ha activado Mostrar rastro.
	Vinculado	Arrastra el punto B sobre la recta l paralela al $\overline{AC}$.
	Mantenido	Arrastra el punto B sobre la recta l y visualiza que el área de la familia de triángulos se mantiene invariante.
Configuraciones que visualiza	Objetos	La recta l que describe el punto B. $\angle CAB$. Una familia de triángulos que comparten el lado AC.
	Relaciones	Paralelismo entre l y $\overline{AC}$. La igualdad en el valor de igualdad en la familia de triángulos
Invariantes detectadas	Invariante inducida intencionalmente:	Área de la familia de triángulos.

	Invariante observada durante el arrastre.	La recta l paralela al $\overline{AC}$
Proceso de verificación	Construye la recta l paralela al $\overline{AC}$ que pasa por un punto distinto a B y vincula dicho punto a la recta l y arrastra el punto y verifica que el punto B	
Relaciones descubiertas	Cuando arrastra el punto B sobre una recta, el área de la familia de triángulos se mantiene constante.	
Conjetura formulada	Dada la familia de triángulos ABC, si $B \in l$, l es paralela al $\overline{AC}$ entonces la familia de triángulos ABC tienen la misma área.	

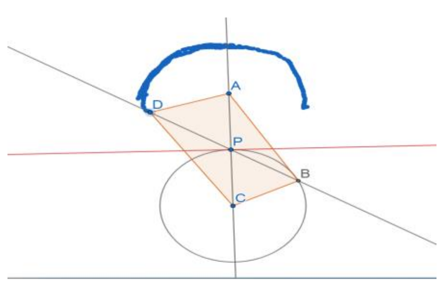
5.2 Resolución de los problemas desarrollados por Ronald

A continuación, presentamos el reporte del proceso adelantado por Ronald en los problemas "El Cuadrilátero especial" y "Triángulo co-recto". Como veremos, Ronald se caracteriza por realizar un análisis minucioso y detallado de todas las configuraciones.

"El Cuadrilátero especial"

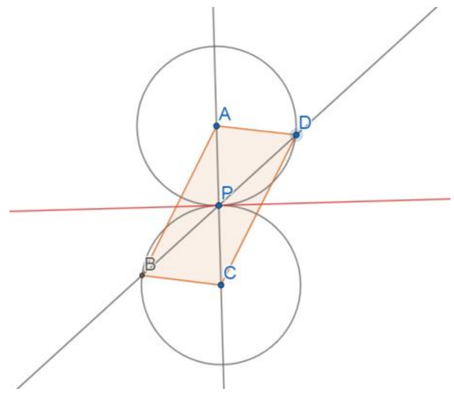
El estudiante es expresivo y todo el tiempo y manifiesta sus pensamientos. Inicialmente procede a realizar la construcción según las instrucciones del problema. Empieza arrastrar el punto D de manera libre. En seguida, le preguntamos: "¿Qué tipo de cuadrilátero está visualizando en estos momentos?" Ronald responde: Al parecer el cuadrilátero es un paralelogramo. Le pedimos: "Arrastre el punto D de tal manera que el cuadrilátero se mantenga como paralelogramo". El estudiante manifiesta que la distancia de $PD = CP$. Inicialmente el estudiante considera que la trayectoria que sigue el punto D es una semicircunferencia, pero, como no está convencido, intenta hacer movimientos bruscos para visualizar el camino que sigue el punto. Le preguntamos: "¿Qué haría usted para que el punto D le muestre el camino que sigue?" Ronald responde: "Creo que se debe activar la herramienta *Rastro* y aplicarlo al punto D" (ilustración 5.5).

Ilustración 5.5 Ronald arrastra el punto D del cuadrilátero $ABCD$ con la herramienta *Rastro*. Fuente: elaboración propia



El estudiante observa el invariante: $D \in \odot_{A,AP}$ (invariante observado) y visualiza que el cuadrilátero permanece como paralelogramo (invariante inducido). Para comprobar que efectivamente $D \in \odot_{A,AP}$ hace la construcción robusta (Ilustración 5.6).

Ilustración 5.6 Ronald construye la circunferencia con centro en A y radio AP y vincula el punto D a la circunferencia. Fuente: elaboración propia



Le preguntamos a Ronald: "¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación que visualiza?". El estudiante dice: Que $D \in \odot_{A,AP}$ y que las diagonales del cuadrilátero son congruentes [sic]. Sin embargo, también afirma que $D \in \odot_{A,AP}$ y que el cuadrilátero es un paralelogramo. Entonces le proponemos que formule la conjetura de la forma si ... $entonces$ ... Al principio, Ronald titubea mucho al formular la conjetura, debido a que busca las relaciones entre los pasos de la construcción y los invariantes observados. Por ejemplo, relaciona las diagonales del cuadrilátero y se detiene en la distancia entre el punto entre el punto P y los vértices del cuadrilátero, pero no tiene en cuenta la trayectoria que sigue el punto D. Le decimos a Ronald que busque la relación entre la trayectoria que sigue D y el cuadrilátero $ABCD$. El participante por fin organiza sus ideas teniendo en cuenta la trayectoria que sigue el punto D y el cuadrilátero. Finalmente, formula la conjetura como sigue: "Dado el cuadrilátero $ABCD$. Si $D \in \odot_{A,AP}$ entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo"

En Tabla 5.3 se presentamos la síntesis del desarrollo de la resolución del problema que hizo Ronald. Se resume cada uno de los arrastres empleados, las invariantes observadas y la relaciones entre las invariantes.

Tabla 5.3 Rejilla analítica del proceso adelantado por Ronald en el problema "El cuadrilátero especial" Tabla 5.3 Rejilla analítica del proceso adelantado por Ronald en el problema "El cuadrilátero especial"

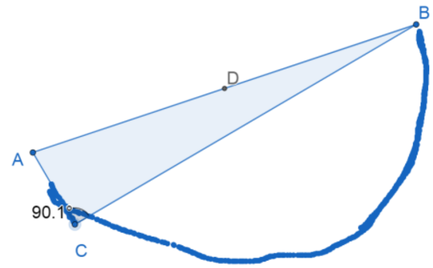
Estudiante:	Acciones en GeoGebra y verbalizaciones realizadas por Ronald	
Arrastres empleados	Libre	Arrastra el punto D de manera libre.

	De lugar ficticio	Arrastra el punto D describiendo una semicircunferencia Arrastra el punto D describiendo una circunferencia
	Guiado	Arrastra el punto D y aplica Mostrar rastro al punto
	Vinculado	Arrastra el punto D que ha vinculado previamente a la $\odot_{A,AP}$
	Mantenido	Arrastra el punto D que está vinculado a la $\odot_{A,AP}$ (invariante observado) y mantiene el cuadrilátero con apariencia de paralelogramo (invariante inducido).
Configuraciones que visualiza	Objetos	Un paralelogramo La $\odot_{A,AP}$ Las diagonales del paralelogramo.
	Relaciones	Las diagonales del cuadrilátero son congruentes [sic] Las diagonales se bisecan
Invariantes detectadas	Invariante inducido intencionalmente.	El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.
	Invariante observado durante el arrastre.	El invariante observado durante el arrastre fue que $D \in \odot_{A,AP}$
Proceso de verificación	Construye la $D \in \odot_{A,AP}$, vincula el punto D a la circunferencia, visualiza que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo	
Relaciones descubiertas	D describe la trayectoria circular, y el cuadrilátero se mantiene como paralelogramo. Las diagonales se bisecan.	
Conjetura formulada	Dado el cuadrilátero $ABCD$. Si $D \in \odot_{A,AP}$ entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo	

“El triángulo Co-recto”.

Como ya dijimos, el estudiante manifiesta sus pensamientos en voz alta durante la exploración. Ronald construye el triángulo ABC luego mide el $\angle C$. Luego arrastra el vértice C de manera libre para determinar las “zonas” en las que el triángulo es rectángulo con ángulo recto en C (invariante inducido). El estudiante afirma conocer el problema en mención. Sin embargo, sigue arrastrando el punto C activando el rastro al punto de manera autónoma y visualiza que C está en una semicircunferencia (invariante observado y arrastre guiado). (Ilustración 5.7)

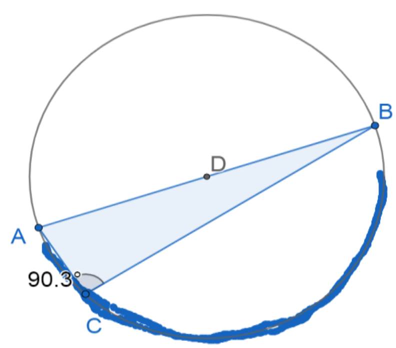
Ilustración 5.7 Ronald arrastra el punto C con la ayuda de la herramienta *Rastro.* Fuente: elaboración propia



Acto seguido, procede a construir la circunferencia con diámetro AB y centro en D y vincula el punto C a la circunferencia (arrastre vinculado, ilustración 5.8).

Ilustración 5.8

Ronald construye la circunferencia con diámetro AB y vincula el punto C a la circunferencia. Fuente: elaboración propia



Le proponemos a Ronald que realice una conjetura con los invariantes percibidos durante el ejercicio. Inicialmente, Ronald relaciona el triángulo rectángulo con la semicircunferencia que describe el punto C afirmando: “si el ángulo del triángulo es recto es porque esta circunferencia…”. En este momento le preguntamos a Ronald: “¿Qué está causando que el triángulo sea un triángulo rectángulo?” El participante responde: “la trayectoria circular que describe el punto D”. Añade que el ángulo recto del triángulo causa la trayectoria de la semicircunferencia. Pese a que le insistimos varias veces en que se fijara qué era lo que causaba que el triángulo fuera rectángulo él establece la siguiente: “Dado el triángulo ABC y el ángulo C recto entonces C pertenece a la semicircunferencia con diámetro AB”. En este caso Ronald no basó la formulación de la conjetura en la verificación para confirmar su hallazgo, sino la dependencia observada mediante el arrastre vinculado.

En la Tabla 5.4 presentamos la síntesis del desarrollo de la resolución del problema de Ronald

Tabla 5.4 Rejilla analítica del proceso adelantado por Ronald en el problema “El triángulo Co-recto”. Fuente: elaboración propia

Tabla 5.4 Rejilla analítica del proceso adelantado por Ronald en el problema "El triángulo co-recto"

Estudiante:	Acciones en GeoGebra y verbalizaciones realizadas por Ronald	
Arrastres empleados	Libre	Arrastra el vértice C de manera libre.
	de lugar ficticio	Arrastra C está en una posible Semicircunferencia
	Guiado	Arrastra el vértice C y aplica mostrar rastro al punto.
	Vinculado	Arrastra el punto C que ha vinculado previamente a la circunferencia con diámetro AB
	Mantenido	Arrastra el punto C del triángulo a través de una trayectoria circular y vincula el punto C a la circunferencia con diámetro AB para mantener el triángulo rectángulo.
Configuraciones que visualiza	Objetos	Triángulo rectángulo (General) el vértice C describe una semicircunferencia con diámetro AB
	Relaciones	El Triángulo ABC es un triángulo rectángulo El diámetro AB se mantiene constante
Invariantes detectadas	Invariante inducido intencionalmente.	El triángulo ABC es rectángulo.
	Invariante observado durante el arrastre.	C pertenece a la semicircunferencia con diámetro AB
Proceso de verificación	Construye la circunferencia con diámetro AB y vincula el punto C a la semicircunferencia	
Relaciones descubiertas	Cuando arrastra el punto C observa que describe la trayectoria circular, y el triángulo se mantiene como triángulo rectángulo.	
Conjetura formulada	Dado el triángulo ABC y el ángulo C recto entonces C pertenece a la semicircunferencia con diámetro AB.	

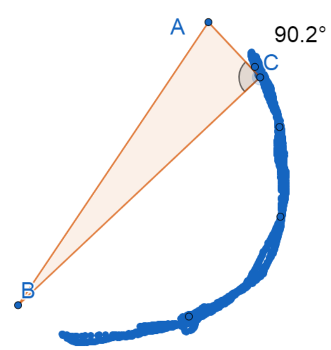
5.3 Resolución del problema desarrollado por Juan Carlos

A continuación, presentamos el reporte del proceso adelantado por Juan Carlos en el problema "El triángulo Co-recto". Como veremos Juan Carlos, se caracteriza por detallar las características de las representaciones geométricas.

El triángulo Co-recto

El estudiante es una persona expresiva y manifiesta todos sus pensamientos durante el desarrollo del problema. Comienza con la construcción del triángulo ABC y afirma que es difícil lograr la igualdad $\angle C = 90°$ a pulso. En seguida, mueve el vértice C del triángulo de manera arbitraria tratando de buscar que lugar geométrico describe C. En seguida le preguntamos: "¿Describa cómo está arrastrando?" Juan Carlos responde que no sabe, pero al parecer está tratando de arrastrar a C sobre una "curva" (arrastre de lugar ficticio). Le preguntamos al estudiante: "¿Qué puede hacer para que el vértice C, muestre el camino que sigue?" Juan Carlos responde: "Activar el rastro al punto C" y empieza a mover dicho punto (arrastre guiado, Ilustración 5.9).

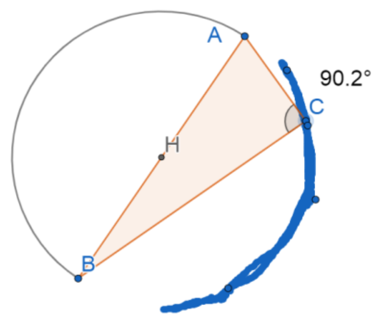
Ilustración 5.9 Juan Carlos arrastra el punto C con ayuda de la herramienta *Rastro*. Fuente: elaboración propia



A continuación, le preguntamos a Juan Carlos: "¿Qué está tratando de mantener invariante?" Juan Carlos responde: "El triángulo rectángulo". Enseguida le realizamos otra pregunta: "¿Cuándo usted arrastra el punto C qué otro invariante observa?" Juan Carlos: manifiesta que trata de percibir muchas invariantes. Entre esas están: el diámetro de la semicircunferencia, la altura del triángulo y la posible bisectriz correspondiente al ángulo C. Sin embargo, le preguntamos: "¿Qué sucede con la trayectoria que sigue el punto C?" El estudiante responde exclamando: "¡Que va describiendo una semicircunferencia!" Entonces parece ser que está es una invariante.

A continuación, le preguntamos a Juan: ¿Cómo corrobora usted que el punto C, describe una semicircunferencia? Juan dice: "construyo una semicircunferencia con la herramienta *Dos puntos semicircunferencia* (arrastre vinculado)". Pero juan no se convence del todo de esa construcción porque el programa le muestra la circunferencia en el semiplano donde no está el rastro dibujado por el punto C (ver Ilustración 5.10).

Ilustración 5.10 Juan Carlos construye la semicircunferencia el determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ donde no está C. Fuente: elaboración propia



Entonces el estudiante opta por construir la circunferencia con diámetro AB y vincula el punto C a la semicircunferencia (Ilustraciones 5.11 a y 5.11 b).

Ilustración 5.11a Juan Carlos construye la circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ y centro H

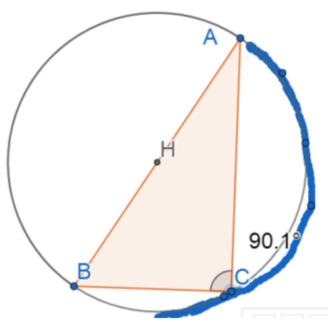
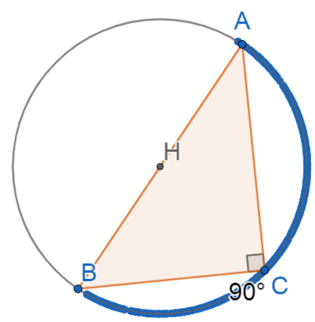


Ilustración 5.11b Juan Carlos vincula el punto C a la circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ y centro H



Le proponemos a Juan Carlos que formule la conjetura. Él titubea bastante para referirse los invariantes que ha observado durante el arrastre. Regresa a la representación y continúa arrastrando a C sobre la semicircunferencia, buscando relacionar la semicircunferencia y el triángulo rectángulo. Le preguntamos: "¿Qué relación encuentra entre la semicircunferencia y el triángulo rectángulo?" Juan Carlos responde: "El vértice C del triángulo describe una circunferencia para que sea recto". Le insistimos a Juan Carlos sobre el invariante que intenta mantener y el invariante que observa. Juan Carlos asevera estar seguro de que, para que el triángulo sea rectángulo con $\angle C$ recto, el punto C describe una circunferencia. Finalmente, termina formulando la siguiente conjetura "Dado el triángulo ABC, si $\angle C$ es recto entonces el lugar geométrico que describe $\angle C$ del triángulo en uno de los semiplanos determinados por el segmento AB es una semicircunferencia". En este caso Juan Carlos no logró la conjetura esperada porque centró su atención en el arrastre vinculado, donde la trayectoria que sigue vértice del punto C causa la semicircunferencia por eso resalta este último como el consecuente de la conjetura. Por eso no operó el arrastre mantenido como estábamos esperando.

En la siguiente Tabla 5.5 presentamos la síntesis del desarrollo de la resolución del problema “El triángulo Co-recto” adelantado por Juan Carlos

Tabla 5.5 Rejilla analítica del proceso adelantado por Juan Carlos en el problema “El triángulo Co-recto”.

Tabla 5.5 Rejilla analítica del proceso adelantado por Juan Carlos en el problema "El triángulo co-recto"

Estudiante: Juan Carlos	Acciones en GeoGebra y verbalizaciones realizadas por Ronald	
Arrastres empleados	Libre	Arrastra el vértice C de manera libre.
	de lugar ficticio	Arrastra C está en una posible Semicircunferencia
	Guiado	Arrastra el vértice C y aplica mostrar rastro al punto.
	Vinculado	Arrastra el punto C que ha vinculado previamente a la circunferencia con diámetro AB
	Mantenido	Arrastra el punto C del triángulo a través de una trayectoria circular y vincula el punto C a la circunferencia con diámetro AB para mantener el triángulo rectángulo.
Configuraciones que visualiza	Objetos	Triángulo rectángulo La altura del triángulo el vértice C describe una semicircunferencia con diámetro AB
	Relaciones	El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en la circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ El diámetro se mantiene constante

Invariantes detectadas	Invariante inducido intencionalmente.	El triángulo rectángulo.
	Invariante observado durante el arrastre.	C pertenece a la semicircunferencia con diámetro AB
Proceso de verificación	Construye la Circunferencia con diámetro AB y vincula el punto C a la semicircunferencia	
Relaciones descubiertas	Cuando arrastra el punto C observa que describe la trayectoria circular, y el triángulo se mantiene como triángulo rectángulo.	
Conjetura formulada	Dado el triángulo ABC, Si $\angle C$ es recto entonces el lugar geométrico que describe $\angle C$ del triángulo en uno de los semiplanos determinados por el segmento AB es una semicircunferencia”.	

5.4 Resolución de los problemas desarrollados por Cecilia

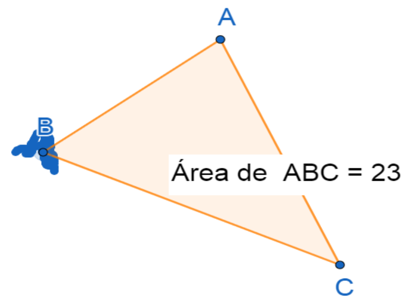
A continuación, presentamos el reporte del proceso adelantado por Cecilia en la resolución del problema “El área invariante”. Cecilia se caracteriza por ser inquieta con lo que observa y es muy activa en la búsqueda de patrones e invariantes.

“El área invariante”

Le solicitamos a la estudiante que comunique sus pensamientos durante el proceso de solución del problema. La estudiante afirma no entender el problema, puesto que no es claro si debe mover cada vértice o si solo basta con mover un solo vértice. Le decimos que solo debe mover un vértice, con el fin del que el área se mantenga invariante. La estudiante afirma no recordar dónde se calcula el área del triángulo. Acto seguido, le sugerimos usar la herramienta *Área*. Cecilia usa la herramienta y comienza a arrastrar el punto B de manera libre (arrastre libre). La estudiante afirma que lo hace con el fin de observar qué regularidades pueden presentar los lados o ángulos del triángulo.

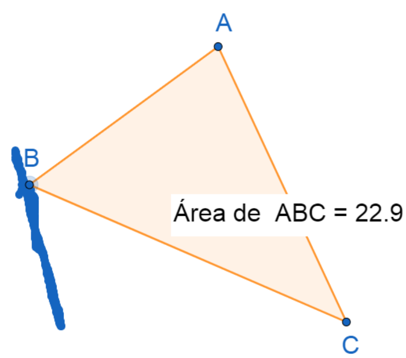
Cecilia arrastra el punto B del triángulo y dice fijarse en el valor que le muestra el área del triángulo. Acto seguido, le preguntamos “¿Qué está haciendo para que no se pierda la igualdad del área del triángulo?” Cecilia dice: “Estoy arrastrando B, fijándome en que la medida del área, los lados y los ángulos del triángulo tienen alguna relación”. Tras muchos intentos, observa que la relación del área, los lados y los ángulos de triángulo no son de gran ayuda. En seguida le preguntamos a Cecilia “¿Qué haría usted para que el punto B le muestre el camino que deja?” Cecilia responde: “Voy a aplicar al punto B *Rastro* (arrastre guiado)”. Continúa arrastrando el punto B de una manera más controlada. En primera medida, empieza arrastrar el punto B en dirección al $\overline{AB}$. En segunda medida, arrastra el punto B en dirección al $\overline{BC}$ pero ninguno de estos le dan información (ilustración 5.12).

Ilustración 5.12 Cecilia arrastra de manera libre del punto B con ayuda de la herramienta *Rastro*. Fuente: elaboración propia



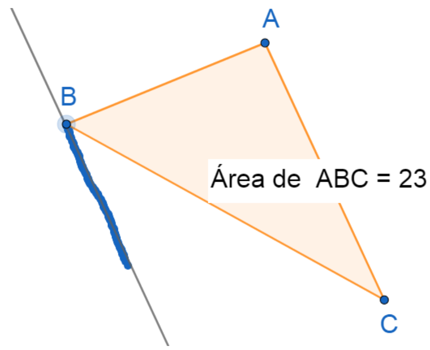
Posteriormente le preguntamos a Cecilia: "¿De qué otra manera se le ocurre arrastrar el punto B?" Cecilia responde: "Se me ocurre arrastrarlo hacia arriba y hacia abajo, pero ¡no encuentro relación!". A continuación, le preguntamos: "¿Qué relación encuentra entre la trayectoria que sigue el punto B y él $\overline{AC}$?" Cecilia dice: "La única que queda es una recta que es paralela al $\overline{AC}$" (Arrastre de lugar ficticio, Ilustración 5.13)

Ilustración 5.13 Cecilia arrastra B de manera rectilínea. Fuente: elaboración propia



Cecilia decide hacer una construcción robusta para corroborar la trayectoria que sigue el punto B. Para ello, construye una recta m paralela al $\overline{AC}$ que pasa por B, pero al arrastrar B se mueve toda la figura junto con la recta. Entonces decide construir una recta paralela m al $\overline{AC}$ por un punto distinto a B y vincula el punto B a dicha recta (arrastre vinculado). Adicionalmente manifiesta que observa que B debe estar en esa recta (invariante observado) para que el triángulo mantenga la misma área (invariante inducido intencionalmente) (Ilustración 5.14)

Ilustración 5.14 Construcción robusta de una recta paralela. Fuente: elaboración propia



Le proponemos a Cecilia que formule una conjetura. Cecilia hace varios intentos de conjeturar, tras revisar una y otra vez los invariantes observados durante el arrastre. Se convence que la trayectoria que sigue el punto B mantiene el área invariante de la familia de triángulos. Finalmente formula la conjetura. "Dado el triángulo ABC y $\overline{AC}$ paralela m. Si $B \in m$, entonces el área de los triángulos ABC es la misma". A continuación, en la Tabla 5.6 presentamos la síntesis del desarrollo de la resolución del problema "El área invariante" adelantado por Cecilia.

Tabla 5.6 Rejilla analítica del proceso adelantado por Cecilia en el problema "El área invariante"

Tabla 5.6 Rejilla analítica del proceso adelantado por Cecilia en el problema "El área invariante"

Estudiante: Cecilia	Acciones en GeoGebra o verbales por Cecilia	
Arrastres empleados	Libres:	Arrastra B de manera libre.
	De lugar ficticio:	Arrastra B sobre una posible recta
	Guiados:	Arrastra el punto B siguiendo una trayectoria recta aplicando la herramienta "Mostrar rastro"
	Vinculados:	Arrastra B sobre la recta m paralela al $\overline{AC}$
	Mantenido:	Arrastra el punto B sobre la recta m paralela al $\overline{AC}$ y visualiza que el área de la familia de triángulos se mantiene invariante.
Configuraciones que visualiza	Objetos:	Familia de triángulos Los ángulos del triángulo Los lados del triángulo
	Relaciones:	El punto $B \in m$; m paralela $\overline{AC}$

Invariantes detectadas	Invariante inducido intencionalmente:	La familia de triángulos con la misma área
	Invariante observado durante el arrastre:	El punto $B \in mm$ paralela $\overline{AC}$
Verificación adelantada:	Construye la recta m paralela al $\overline{AC}$	
Relaciones descubiertas:	m paralela al $\overline{AC}$ Familia de triángulos con la misma área	
Conjetura formulada:	Dado el triángulo ABC y $\overline{AC} \parallel m$. Si $B \in m$, entonces el área de los triángulos ABC es la misma.	

Capítulo 6 Discusión

En este capítulo realizamos la discusión derivada del análisis, que hemos realizado previamente, del proceso de resolución de los problemas por parte de los estudiantes que participaron en la experimentación. Empezamos por mostrar los alcances que puede tener el arrastre mantenido en la solución de problemas abiertos. Luego, aludimos a la complejidad del uso eficiente del arrastre mantenido. A continuación, mencionamos las relaciones entre los diferentes tipos de arrastres. Finalmente, destacamos de qué manera la visualización y la conjeturación son promovidos por el arrastre mantenido.

6.1 Sobre los problemas que favorece el arrastre mantenido

De acuerdo con el análisis realizado previamente, afirmamos que todos los problemas que se presentan en este trabajo de grado favorecen el arrastre mantenido, aun cuando no todos con la misma facilidad. En la resolución, pudimos evidenciar que los cuatro estudiantes hicieron una exploración en la que jugaron con invariantes inducidos en busca de observar regularidades que surgen al mantener dichos invariantes. Adicionalmente, pudimos observar que los estudiantes optaron por valerse de inducir un invariante con el fin de encontrar en la representación otro invariante que les permitiera descubrir la causa del invariante inducido. Y este descubrimiento en algunos casos se corroboró mediante una construcción robusta que les permitió proponer el invariante inducido como consecuencia del invariante observado.

Afirmamos que el problema “El área invariante” propone una buena situación para acercar a los estudiantes al arrastre mantenido. Lo anterior, debido a que este problema parte de una representación que contiene elementos sencillos, en la que los estudiantes reconocen rápidamente cuál es el invariante que se induce, en este caso un número, y al no ser compleja la representación encuentran rápidamente el invariante que se busca. Pero, además, la exploración los induce a realizar una construcción robusta porque si no hacen la recta efectivamente paralela a un lado del triángulo, no es sencillo controlar el invariante inducido. Lo que el problema genera es la dependencia entre el invariante inducido y el invariante observado. Este planteamiento lo hacemos al observar principalmente el trabajo de Jhon y Cecilia. Jhon resolvió el problema rápidamente. Cecilia, con un poco más de dificultad que Jhon, también logró resolverlo.

En cuanto al problema “El triángulo Co-recto” pudimos evidenciar que este también favorece el arrastre mantenido. Como lo señalan Baccaglini y Mariotti (2010)

> “el arrastre mantenido implica el reconocimiento de una configuración particular como interesante en un intento del usuario de inducir la propiedad particular (de manera indirecta) para que ésta se convierta en una invariante durante el arrastre” (pp. 230).

Cabe aclarar, sin embargo, que en el caso de Ronald y Juan Carlos a pesar de que ellos encontraron el invariante inducido y el invariante observado ellos no generaron la relación condicional esperada por nosotros. Usaron el invariante observado como el consecuente y el invariante inducido como el antecedente. Esto pasó porque en el proceso de verificación mantuvieron la relación condicional de manera invertida. La situación que se generó con Ronald y Juan Carlos no es causa del problema, sino probablemente del entrevistador quien debió haber invitado de manera más insistente a hacer la verificación para promover que el proceso se hubiera adelantado como lo señalan Baccaglini y Mariotti (2010).

Para nosotros, el problema “El cuadrilátero especial” también favorece el uso del arrastre mantenido. Sin embargo, es un problema que requiere una mayor experiencia en el trabajo con programas de geometría dinámica. Al ser una construcción relativamente compleja, el arrastre para mantener el invariante inducido no enfoca la atención necesariamente en una sola regularidad. Por ejemplo, Jhon se fijó inicialmente en el paralelismo entre $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{PH}$ y en que el cuadrilátero es convexo, mientras que Ronald se enfocó en las diagonales del cuadrilátero. Fue necesario encaminar la atención hacia la regularidad que queríamos que observaran (en este caso la trayectoria que describe el punto D), para que efectivamente pudieran establecer la relación entre el invariante observado y el invariante inducido. Si bien es cierto que el problema es complejo, afirmamos que favorece el uso del arrastre mantenido si el profesor enfoca a los estudiantes en el invariante que se está buscando. De esa manera, induce a los estudiantes a hacer la construcción robusta de verificación y por eso logran la conjetura esperada.

6.2 La complejidad del arrastre mantenido

En esta sección, vamos a referirnos a la complejidad que demanda el arrastre mantenido. Como lo señalan, Mariotti y Baccaglini-Frank (2011), “aunque percibir e interpretar geométricamente invariantes es difícil, es posible desarrollar esta habilidad.” (pp. 23). En nuestra experimentación corroboramos lo que dicen las investigadoras y concluimos que esta complejidad tiene que ver con tres aspectos:

Uno: El aprender a observar regularidades mientras se mantiene un invariante.
Dos: El aprender a establecer la relación entre los movimientos directo e indirecto y los invariantes que se inducen o se observan, para poder establecer la conjetura de manera tal que la dependencia entre las propiedades quede correcta.
Tres: Las exigencias que demanda la construcción robusta al hacer el proceso de verificación.

Estas complejidades las observamos en la resolución de los problemas por parte de Jhon, Ronald, Juan Carlos y Cecilia, como vamos a presentar a continuación.

El primer aspecto se hizo evidente en el proceso de resolución del problema “El cuadrilátero especial”. Observamos que los estudiantes se tomaron un buen tiempo para realizar la exploración, porque tuvieron que aprender a provocar un invariante (en este caso el cuadriláteroque fuera un paralelogramo) y observar otro invariante (la circunferencia que describe el punto D), asunto que no es sencillo.

El segundo aspecto de la complejidad que se presenta con el arrastre mantenido la pudimos observar en la resolución del problema "El triángulo Co-recto". Aún cuando Ronald y Juan Carlos encontraron el invariante observado, al momento de proponer la conjetura el invariante inducido intencionalmente ofició como antecedente y el invariante observado como el consecuente. Lo anterior porque los estudiantes no lograron relacionar el movimiento indirecto con el invariante inducido y el movimiento directo con el invariante observado. Lo cual es necesario para producir la conjetura correcta, como lo mencionan Baccaglini y Mariotti (2009).

El tercer aspecto de la complejidad que se presenta con el arrastre mantenido la pudimos observar en el problema "El área invariante". Aunque hemos dicho que este problema casi de manera natural induce hacer una construcción robusta para verificar, esta construcción robusta tiene una complejidad derivada de hacer una construcción auxiliar. Jhon y Cecilia lograron identificar los invariantes esperados, pero cuando quisieron construir una recta paralela a uno de los lados del triángulo, que pasara por el vértice opuesto, no usaron una construcción auxiliar apropiada y entonces al arrastrar el vértice toda la construcción se movía conforme se arrastraba dicho punto. Por esta razón los estudiantes se demoraron en la resolución del problema hasta que se les ocurrió construir un punto disinto del vértice del triángulo para trazar la paralela a uno de los lados y luego vincular el vértice a dicha recta para corroborar que el área permanecía invariante.

6.3 Relaciones entre tipos de arrastre

Corroboramos los planteamientos de los autores sobre las relaciones entre el arrastre mantenido y otros arrastres. A continuación, nos referimos a cada tipo de arrastre.

El arrastre mantenido está muy asociado al arrastre libre. Por este tipo de arrastre se comienza el proceso de resolución de los problemas, debido a que permite descubrir configuraciones o regularidades interesantes para los estudiantes (Arzarello et al, 2002). Gracias al arrastre libre, los cuatro estudiantes comenzaron a identificar el invariante observado en todos los problemas propuestos.

El arrastre de lugar ficticio es el que permite a los estudiantes identificar el invariante observado. De hecho, fue el arrastre más utilizado por los cuatro estudiantes. En el problema "El cuadrilátero especial", Jhon dijo inicialmente que el punto D describía una posible elipse o una posible circunferencia. Mientras que en el problema "El área invariante" afirmó que la trayectoria que seguía el punto B era una recta. En el problema "El cuadrilátero especial" Ronald se percató de la posible trayectoria que describe el punto D, en este caso una semicircunferencia o una circunferencia. Y en el problema "El triángulo co-recto" afirmó que el vértice del triángulo está en una posible semicircunferencia.

Juan Carlos y Cecilia encontraron los mismos invariantes, gracias al arrastre de lugar ficticio. En todos los casos el arrastre de lugar ficticio, operó en la resolución de los problemas como un posible lugar en el que se encontraba el punto que se arrastraba mediante un movimiento directo pero que aún debía ser corroborado para determinar el lugar geométrico donde se encontraban. Y esto generó una estrecha relación con el arrastre mantenido porque, gracias al arrastre de lugar ficticio, los estudiantes mantuvieron el invariante que controlaba el punto base (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010).

Los arrastre guiado y vinculado están asociados al arrastre mantenido porque son los que permiten determinar una forma particular en la representación. Gracias al uso de la herramienta *Rastro*, el arrastre guiado permite identificar la trayectoria que sigue el punto base. Y el arrastre vinculado permite (como su nombre lo indica) vincular el punto a la trayectoria que describe. Con esto los estudiantes pueden verificar la conjetura. Este fue el caso de la resolución del problema "El cuadrilátero especial" por parte de Jhon y Ronald. Los estudiantes tuvieron que hacer uso del arrastre guiado con ayuda de la herramienta *Rastro* para identificar la trayectoria de la del punto D. Una vez identificada, los estudiantes pudieron hacer la construcción robusta y vincularon el punto D a dicha construcción. De igual manera sucedió con los problemas "El área invariante" y "El triángulo Co-recto". Jhon, Cecilia y Juan Carlos hicieron uso de los arrastres guiado y vinculado para "garantizar" la relación entre los invariantes inducido y observado.

6.4 El arrastre mantenido en los procesos de visualización y conjeturación

Con la experimentación corroboramos que efectivamente el arrastre mantenido favorece un puente entre la visualización y la conjeturación. Esto se hizo evidente en el proceso de resolución de los problemas con los cuatro estudiantes.

En el caso de Jhon esto se hizo evidente sobre todo porque el estudiante mantuvo un actitud muy observadora. Entonces el arrastre lo impulsaba a encontrar la causa a traves de la visualización y esto lo llevó a establecer la conjetura en los problemas "El cuadrilátero especial"y "El área invariante" . En el primer problema, el proceso de arrastre ayudó a visualizar la congruencia entre los lados del paralelogramo y adicionalmente la relación de paralelismo entre los lados opuestos del paralelogramo. Cuando el estudiante intentó construir la conjetura el proceso de visualización le ayudó a encontrar la causa que mantenía el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo. Por esta razón el invariante inducido fue el consecuente de la conjetura y el invariante observado el antecedente. En cuanto al problema "El área invariante", el proceso de visulización de Jhon se centró en la trayectoria que describe el punto B y la familia de triángulos que se producían cuando arrastraba el vértice del triángulo, intentado mantener los dos invariantes. Adicionalmente la visualización de la relación de paralelismo entre la trayectoria que seguía el vértice del triángulo y uno de los lados de triángulo le ayudó a establer la relación de dependencia entre los invariantes, para generar la conjetura.

Al resolver el problema "El cuadrilátero especial" Ronald aplicó la herramienta *Rastro* al punto D, con el fin de visualizar la ruta que seguía el punto para que el cuadrilátero se mantuviera como paralelogramo. Visualizó que las diagonales del cuadrilátero se bisecan, hecho que le ayudó a establecer la relación entre los invariantes y la propiedad del paralelogramo. Cabe aclarar que el estudiante trató de usar todos los elementos de la construcción para lograr producir la conjetura; sin embargo su atención se centró en las propiedades del cuadrilátero y el invariante observado. Este proceso que desarrolló Ronald le permitió establecer la conjetura en términos del invariante observado y el invariante inducido.

Infortunadamente, en el problema “El triángulo co-recto” Ronald centró toda su antención en el ángulo de triángulo, a pesar de que el camino que le mostraba el punto C se encontraba en el lugar geométrico de la semicircunferencia. Consideramos que el proceso de visualización de Ronald se limitó exclusivamente al invariante inducido. Por eso afirmamos que es importante orientar a los estudiantes en la resolución de problemas, sobre todo para que visualicen todos los elementos de la representación geométrica y durante proceso de arrastre. Es importante mencionar que una actitud interrogativa y reflexiva, posibilita a los estudiantes sacar provecho del uso del arrastre mantenido para favorecer la visualización y la conjeturación en la resolución de problemas abiertos.

En la resolución del problema “El área invariante” desarrollado por Cecilia, pudimos notar que para la estudiante fue de gran importancia poder visualizar de manera simultánea el lugar geométrico que describía el punto que arrastraba y el invariante que deseaba mantener. Sus movimientos estuvieron encaminados hacia la búsqueda de ese lugar geométrico lo que le permitió establer la causa del por qué el área del triángulo era invariante. Una vez logró visualizar el invariante observado, se dió cuenta que este último era la causa del invariante inducido y por esto le resultó natural establecer la relación condicional entre los invariantes, produciendo la conjetura deseada. En este caso el arrastre mantenido jugó un papel importante en los procesos de visualización y conjeturación porque le permitió a Cecilia determinar elementos claves en la solución del problema.

A pesar de lo que hemos dicho queremos mencionar como lo señalan Mariotti y Baccaglini-Frank (2011) que “arrastrar para generar conjeturas presenta claramente una mayor complejidad en comparación con, por ejemplo, arrastrar para probar una construcción.” (pp. 24). Esto se reflejó en que los estudiantes lograron visualizar los invariantes pero no siempre lograron la conjetura como nostros deseabamos. Esto paso específicamente en el caso de la resolución del problema “El triángulo Co-recto” por parte de Juan Carlos. Notamos que él mantuvo el triángulo con el ángulo recto y también centró su atención en el rastro que dejaba el vértice C. El arrastre estuvo apoyado por la construcción robusta que le permitió visualizar las causas para determinar la relación entre el invariante inducido y el invariante observado. Sin embargo, al momento de construir la conjetura, a partir de lo que había observado ignoró las relaciones en las que estaba trabajando y fijo su mirada en otros elementos de la representación y no en la relación entre los invariantes. Por esta razón consideró que el invariante inducido era el que causaba la trayectoria del triángulo y por eso en la conjetura estableció el invariante inducido como antecedente y no como el consecuente.

Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones más relevantes del trabajo de grado. Las organizamos de la siguiente manera: en la primera sección, hablamos sobre el cumplimiento del objetivo general del trabajo de grado. En la segunda sección, nos referimos a los objetivos específicos que nos propusimos en este trabajo. En la tercera sección, describimos los logros y dificultades encontradas en la investigación. En la última sección, presentamos las proyecciones para futuros trabajos de investigación.

Sobre el objetivo general del trabajo

Como objetivo general nos propusimos caracterizar el papel que desempeña el arrastre mantenido en la resolución de problemas abiertos y determinar su rol en el desarrollo de los procesos de visualización y de conjeturación. Afirmamos que en el estudio cumplimos con el objetivo general. A partir de una fundamentación conceptual, propusimos un estudio empírico de resolución de problemas con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Nos dimos cuenta de que, para esos estudiantes, el papel principal del arrastre mantenido es identificar los invariantes que dan lugar a una relación de dependencia que se convierte en una conjetura. Lo que logra el arrastre mantenido es poner en juego la visualización, para lograr detectar los invariantes, establecer la relación de causalidad y por esta vía, lograr generar una expresión condicional.

Adicionalmente nosotros identificamos que el arrastre mantenido establece un puente entre los procesos de visualización y la producción de conjeturas. Esto se puede encontrar tanto en el marco teórico del presente trabajo de grado como en los análisis que hicimos del trabajo que realizaron los estudiantes. Por ejemplo, Jhon y Ronald, en el desarrollo del problema “El cuadrilátero especial” lograron efectivamente mantener el cuadrilátero como paralelogramo y observaron la circunferencia que describe el punto D, resultado que subyace de mantener el invariante inducido. Y por lo tanto los dos estudiantes lograron establecer una relación condicional entre los invariantes detectados. Es aquí donde concluimos que el arrastre mantenido favorece los procesos de visualización y conjeturación.

Comprobamos que la influencia del arrastre mantenido en los procesos de visualización y conjeturación que llevaron a cabo los estudiantes resulta ser interesante en términos del control lógico. Sin embargo, esto no sucedió con igual fuerza en el problema “El triángulo co-recto” porque los estudiantes lograron identificar los invariantes, pero no lograron la conjetura deseada, como es el caso de Ronald y Jhon. Pero sí fue marcadamente importante en los problemas “El cuadrilátero especial” y “El área invariante” donde logramos el producto esperado.

Sobre los objetivos específicos del trabajo

El primer objetivo específico a que nos comprometimos fue describir y ejemplificar el arrastre mantenido y compararlo con otros tipos de arrastre de objetos, en una representación hecha en GeoGebra. Este objetivo específico se cumplió completamente, como se puede apreciar en el capítulo de marco de referencia (Sección 3.1) Allí se encuentra la descripción e ilustración logradas, fruto de la revisión de la literatura que hicimos.

También nos propusimos, como objetivo específico, proponer una fundamentación teórica sobre los procesos de visualización y conjeturación en la que se estableciera el papel que pueden jugar en la resolución de problemas abiertos. Este propósito también se cumplió, como se puede ver en el capítulo marco de referencia y en los análisis. Aun cuando debemos señalar que nosotros hicimos una fundamentación limitada sobre estos procesos, muy cercana al trabajo en resolución de problemas con el arrastre mantenido. No fue un desarrollo amplio sobre cada uno los procesos.

Debemos destacar que mediante el proceso de visualización, como señalan Samper y Molina, (2013) se consigue información de una representación geométrica con el fin de encontrar elementos que la compone, percibir sus propiedades, establecer relaciones entre elementos de los objetos con el fin de interpretar la naturaleza de dicha representación. Estas características de la visualización se pusieron de manifiesto con el uso del arrastre mantenido.

Además, nos propusimos caracterizar y ejemplificar los problemas abiertos, donde se observa el papel del arrastre mantenido en los procesos de visualización y conjeturación. Esto se puede encontrar en la descripción de cada uno de los problemas que se encuentran en el capítulo del marco de referencia y en el estudio empírico. Allí también adoptamos una postura sobre las características que deben tener los problemas abiertos.

Adicionalmente, identificamos el papel que ejerce el arrastre mantenido en los procesos de visualización y conjeturación. Esto se hizo evidente porque los estudiantes pusieron en juego estos procesos cognitivos para dar solución a los problemas propuestos. Por ejemplo, en el caso de Cecilia y Jhon en el problema “El área invariante”, los estudiantes mantuvieron el área del triángulo constante, generando otro invariante. En este caso, pudimos observar que el proceso de visualización operó haciendo uso del arrastre mantenido. Cuando los estudiantes lograron tener conciencia de estos invariantes buscaron la relación lógica entre ellos y obtuvieron la conjetura deseada logrando el segundo proceso cognitivo.

Logros y dificultades

Al terminar este trabajo de grado ofrecemos a la comunidad una explicación detallada sobre el arrastre mantenido y el papel que juega en los procesos de visualización y conjeturación. Esto podrá ser comunicado a partir de las ideas que están consignadas en el marco teórico.

Otro aspecto que ofrecemos es un recorrido bibliográfico por los estudios que se han hecho acerca del arrastre mantenido, para que alguien que siga en esta línea de investigación tenga claridad sobre la ruta que ha llevado este trabajo. Adicionalmente, señalamos los conceptos más importantes para que los lectores ubiquen con facilidad los diversos elementos que intervienen en el arrastre mantenido y su relación con otros arrastres. También proponemos una mirada detallada al trabajo hecho por estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional, para profundizar en cómo opera el arrastre mantenido en la solución de problemas abiertos.

Los ejemplos que sugerimos en este trabajo de grado sirvieron como insumo para determinar el papel que juega el arrastre mantenido. Confirma los planteamientos que Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) proponen en sus investigaciones. Observamos en dos de los problemas, que el uso del arrastre operó adecuadamente en la solución de problemas abiertos cuando los estudiantes dieron solución a dichos problemas propuestos.

A manera de dificultad, comentamos que describir el arrastre mantenido no fue tarea sencilla ya que este tipo de arrastre tiene elementos muy precisos que lo diferencian de otros tipos de arrastre. En particular, establecer la diferencia con el arrastre de lugar ficticio, fue difícil, porque es muy similar al arrastre mantenido. Estos tipos de arrastres tienen elementos en común, lo que hace complejo encontrar características propias de cada uno. Resultó tan complejo el asunto que durante un tiempo no teníamos muy claro qué papel jugaban el invariante inducido y el invariante observado en la formulación de la conjetura. Lo habíamos trastocado porque no habíamos visto con suficiente peso el papel de la verificación a partir de los movimientos directos e indirectos que enuncian Baccaglini y Mariotti (2011).

Proyecciones del trabajo

Lo presentado en este trabajo de grado corresponde a una caracterización y ejemplificación del arrastre mantenido y como este favorece los procesos de visualización y conjeturación. Sin embargo, debemos seguir ahondando en tipos de problemas abiertos en donde se haga uso del arrastre mantenido.

A partir de este estudio reconocemos algunos asuntos que merecen atención en futuras investigaciones. A continuación, presentamos la descripción de dichos asuntos.

Un primer asunto corresponde la manera en cómo los docentes pueden llevar este tipo de arrastre a las aulas para promover procesos de visualización y conjeturación. Pudimos establecer que los problemas abiertos aquí presentados favorecen dichos procesos, siempre y cuando haya una guía adecuada. Adicionalmente. resulta interesante que a partir de esta investigación se promueva una exploración sobre como el arrastre mantenido puede favorecer el proceso de demostración como una “extensión” de los procesos antes mencionados.

Un segundo asunto, que merece ser estudiado, tiene que ver con cómo enseñar a usar este tipo de arrastre para que se superen las complejidades detectadas en este trabajo de grado. Un estudio de esta naturaleza permitiría reconocer de manera más asertiva cómo impulsar el establecimiento de las relaciones de dependencia entre los objetos geométricos presentes en una representación.

Finalmente, tenemos previsto hacer un artículo de divulgación para que profesores en ejercicio y profesores en formación conozcan y aprovechen el arrastre mantenido. Con esta investigación pudimos constatar el potencial que tiene dicho arrastre en favor de la resolución de problemas. Adicionalmente el autor de este trabajo empezará a utilizar este tipo de arrastre en el aula para promover los procesos de resolución con sus estudiantes y espera aportar a la comunidad elementos para comprender la importancia de usar herramientas tecnológicas, como GeoGebra, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2009). Conjecturing and proving in dynamic geometry: the elaboration of some research hypotheses En *6th Conference on European Research in Mathematics Education*. Institut national de Recherche Pédagogique, 231-240

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A, y Antonini, S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. En *proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education vol 2*, 89-96.

Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Baccaglini-Frank, A., y Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. *arXiv preprint arXiv:*. En Csíkos, C., Rausch,A., y Szitányi, J. (Ed.), *vol 2*, 43- 50.

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM*, *51*(5), 779-791.

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, *10*(1), 93-111.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En *Memorias del tercer Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat., Valencia, España* 44-59.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational studies in Mathematics*, *44*(1), 151-161.

Mariotti, M. A., y Baccaglini-Frank, A. (2011). Making Conjectures in Dynamic Geometry: The Potential of a Particular Way of Dragging. *New England Mathematics Journal*, *43*, 22-33.

Olivero, F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. En *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, University of Plymouth, UK.* 2-4

Olivero, F., & Robutti, O. (2002). An exploratory study of students' measurement activity in a dynamic geometry environment. En *Proceedings of CERME2*, 1, 215-226 .

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Fondo editorial. Universidad Pedagógica Nacional.