

**Una mirada matemática al fútbol:  
la relación entre el desempeño de un equipo y su red de centralidad**

**Castañeda Ladino Tirsa Vivian**

**Niño Garzón Fabian Camilo**

**Universidad Pedagógica Nacional**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

**Departamento de Matemáticas**

**Licenciatura en Matemáticas**

**Bogotá, D. C.**

**2021**

**Una mirada matemática al fútbol:  
la relación entre el desempeño de un equipo y su red de centralidad**

**Castañeda Ladino Tirsia Vivian**

**2017240013**

**C.C. 1026299758**

**Niño Garzón Fabian Camilo**

**2016140059**

**C.C. 1010064261**

**Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado(a) en Matemáticas**

**Dirigido por: William Alfredo Jiménez Gómez**

**Universidad Pedagógica Nacional**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

**Departamento de Matemáticas**

**Licenciatura en Matemáticas**

**Bogotá, D. C.**

**2021**

*A mis amigos y amigas, mi segunda familia.*

*-Vivian*

## **AGRADECIMIENTOS**

*A nuestras familias que siempre nos han apoyado, a la Universidad Pedagógica Nacional que nos regaló los mejores años de nuestras vidas, a nuestros compañeros y compañeras, amigos y amigas por acompañarnos en este camino. Finalmente, al profesor William Jiménez por aceptar asesorar este trabajo y al profesor Santiago Cardozo por tomarse el tiempo de resolver nuestras dudas. Gracias.*

*- Camilo y Vivian*

## Contenido

RESUMEN .....	1
INTRODUCCIÓN.....	1
APROXIMACIÓN A LAS APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS .....	3
APLICACIONES CLÁSICAS DE LA MATEMÁTICA .....	3
La matemática y la Economía .....	3
La matemática y la Ingeniería .....	4
La matemática y la Física .....	6
APLICACIONES MODERNAS DE LA MATEMÁTICA .....	7
Matemáticas y Biología .....	7
Matemáticas y riesgo .....	8
Matemáticas y redes de interacción.....	8
Matemáticas, redes de interacción y fútbol .....	9
OBJETIVOS.....	11
OBJETIVO GENERAL .....	11
OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	11
APROXIMACIÓN CONCEPTUAL.....	12
MARCO DE REFERENCIA DESDE LO FUTBOLÍSTICO .....	12
El impacto del fútbol inglés en la investigación de Linder .....	13
<i>Estilos de juego distintos: Del estilo europeo al estilo latinoamericano</i> .....	13
Selección de la muestra: equipos constantes .....	14
MARCO TEÓRICO MATEMÁTICO .....	17
Teoría de Grafos .....	17
Cadenas de Markov .....	23
Probabilidades de transición.....	24
Vector propio y vector estacionario.....	26

Métodos para hallar un vector estacionario .....	27
Medida de centralidad .....	29
Prueba U de Mann-Whitney .....	29
Coefficiente de correlación .....	31
ANÁLISIS Y TRATAMIENTO DE DATOS .....	32
METODOLOGÍA.....	32
RECOLECCIÓN DE DATOS .....	32
ANÁLISIS DE DATOS .....	39
Grafos, nivel de participación y elección de jugadores .....	39
Cadenas de Markov y centralidad de un equipo.....	54
Prueba U de Mann-Whitney, coeficiente de correlación y prueba de centralización...	59
CONCLUSIONES.....	63
CONCLUSIONES GENERALES .....	63
ACERCA DEL OBJETIVO GENERAL .....	63
ACERCA DE LOS APORTES AL FÚTBOL .....	64
RESPECTO A LOS APORTES MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS .....	64
REFERENCIAS .....	66
ANEXO .....	69

### **Índice de imágenes**

Imagen 1: Grafo simple .....	18
Imagen 2: Grafo Orientado.....	19
Imagen 3: Grafo ponderado, tomado de (Barriola & Dotta, 2016, p. 15) .....	20
Imagen 4: Grafo conectado, tomado de (Barriola & Dotta, 2016, p. 16) .....	22
Imagen 5: Grafo fuertemente conectado (Barriola & Dotta, 2016, p. 17).....	22

Imagen 6: Tabla de valores críticos 0.05, tomada de La Cruz (2016).....	31
Imagen 7: Participación de los jugadores de River Plate. Independiente – River Plate. ....	46
Imagen 8: Participación de los jugadores de River Plate. River Plate - Independiente. ....	46
Imagen 9: Participación de los jugadores de River Plate. River Plate - Gremio.....	47
Imagen 10: Participación de los jugadores de River Plate. Gremio - River Plate.....	47
Imagen 11: Participación de los jugadores de River Plate. Boca - River Plate.....	48
Imagen 12: Participación de los jugadores de River Plate. River Plate - Boca.....	48
Imagen 13: Participación de los jugadores de Liverpool. Liverpool - Porto.....	49
Imagen 14: Participación de los jugadores de Liverpool. Porto - Liverpool.....	49
Imagen 15: Participación de los jugadores de Liverpool. Barcelona - Liverpool. ....	50
Imagen 16: Participación de los jugadores de Liverpool. Liverpool - Barcelona. ....	50
Imagen 17: Participación de los jugadores de Liverpool. Barcelona - Liverpool. ....	51
Imagen 18: Resultado de la Prueba U de Mann-Whitney sobre centralidad-resultados River Plate .....	60
Imagen 19: Resultado de la Prueba U de Mann-Whitney sobre centralidad-resultados Liverpool .....	60

### Índice de tablas

Tabla 1: Estilo de juego de River Plate vs. Liverpool.....	15
Tabla 2: Títulos del River Plate 2014-2018, tomado de: <a href="https://www.cariverplate.com.ar/titulos">https://www.cariverplate.com.ar/titulos</a> .....	16
Tabla 3: Títulos del Liverpool 2015-2019, tomado de: <a href="https://www.liverpoolfc.com/history/timeline">https://www.liverpoolfc.com/history/timeline</a> .....	16
Tabla 4: Registro de pases de River Plate en el partido Independiente vs. River Plate .....	34
Tabla 5: Registro de pases de River Plate en el partido River Plate vs. Independiente .....	34
Tabla 6: Registro de pases de River Plate en el partido River Plate vs. Gremio.....	35
Tabla 7: Registro de pases de River Plate en el partido Gremio vs. River Plate.....	35
Tabla 8: Registro de pases de River Plate en el partido Boca Juniors vs. River Plate .....	36
Tabla 9: Registro de pases de River Plate en el partido River Plate vs. Boca Juniors .....	36
Tabla 10: Registro de pases de Liverpool en el partido Liverpool vs. Porto .....	37
Tabla 11: Registro de pases de Liverpool en el partido Porto vs. Liverpool .....	37

Tabla 12: Registro de pases de Liverpool en el partido Barcelona vs. Liverpool.....	38
Tabla 13: Registro de pases de Liverpool en el partido Liverpool vs. Barcelona.....	38
Tabla 14: Registro de pases de Liverpool en el partido Tottenham vs. Liverpool.....	39
Tabla 15: Ponderación de River Plate en el partido Independiente vs River Plate. ....	41
Tabla 16: Ponderación de River Plate en el partido River Plate vs Independiente. ....	41
Tabla 17: Ponderación de River Plate en el partido River Plate vs Gremio.....	42
Tabla 18: Ponderación de River Plate en el partido Gremio vs River Plate.....	42
Tabla 19: Ponderación de River Plate en el partido Boca vs River Plate.....	42
Tabla 20: Ponderación de River Plate en el partido River Plate vs Boca.....	43
Tabla 21: Ponderación de Liverpool en el partido Liverpool vs Porto. ....	43
Tabla 22: Ponderación de Liverpool en el partido Porto vs Liverpool. ....	44
Tabla 23: Ponderación de Liverpool en el partido Barcelona vs Liverpool.....	44
Tabla 24: Ponderación de Liverpool en el partido Liverpool vs Barcelona.....	44
Tabla 25: Ponderación de Liverpool en el partido Tottenham vs Liverpool.....	45
Tabla 26: Jugadores más participativos - River Plate.....	52
Tabla 27: Jugadores más participativos - Liverpool F. C.....	53
Tabla 28: Tabla registro de pases de jugadores más participativos LIV-BAR. ....	54
Tabla 29: Relación matriz de transición-vector estacionario-medida de centralidad para cada partido.....	58
Tabla 30: Jugador más central por partido .....	59
Tabla 31: Medida de centralidad vs. resultado River Plate .....	61
Tabla 32: Valores p asociados a la prueba de correlación r. ....	61

## Índice de matrices

Matriz 1: Matriz de adyacencia .....	21
Matriz 2: Matriz de adyacencia .....	23
Matriz 3: Matriz de transición, tomada de (Rincón, 2012, p. 29) .....	25
Matriz 4: Matriz de transición (Poole, 2011, p. 237) .....	28
Matriz 5: Matriz de adyacencia LIV-BAR.....	55

## **RESUMEN**

Thomas Grund (2012) realizó una investigación en la que analizaba las estructuras de pases de los 20 equipos que compiten en la primera división de Inglaterra (Premier League) para las temporadas 2006-2007 y 2007-2008. Llegando a la conclusión de que existía una relación entre una estructura de pases descentralizada y un resultado favorable en el partido. Por otro lado, Monika Linder (2017), siguiendo una ruta de estudio similar a la que utilizó Grund, analizó la estructura de pases de tres equipos que compiten en la primera división de Inglaterra (Premier League) para la temporada 2015-2016. Además de analizar una posible relación entre la estructura de pases y el resultado del partido, también ahondó en encontrar una relación entre la estructura de pases y el número de goles recibidos y el número de goles realizados. Los resultados del estudio hecho por Linder no arrojaron evidencia estadística que permitiera afirmar que existe alguna de las relaciones anteriormente mencionadas. El objetivo de este trabajo es el de, utilizando los mismos métodos expuestos por Linder, indagar sobre una posible relación entre la red de pases de un equipo y los resultados obtenidos, así como, de los goles realizados y recibidos, tomando como muestra dos equipos de diferentes contextos sociales y futbolísticos como lo son el argentino y el inglés. Sin embargo, no se logró encontrar alguna relación fuerte a partir de las pruebas estadísticas.

## **INTRODUCCIÓN**

Dentro del mundo académico se menciona reiterativamente que las matemáticas son la base de todo y que pueden ser parte de cualquier contexto; sin embargo, esta afirmación siempre converge a indicar los mismos ámbitos de aplicación ya conocidos: Ingeniería, Física Economía, y alguna otra ciencia formal. Este trabajo surgió a partir de la búsqueda de las aplicaciones menos convencionales de las matemáticas, por ejemplo, a contextos más cotidianos como lo es el fútbol, en el cuál, no se creería existe una aplicación directa y profunda de las matemáticas. A través de este trabajo se realiza un barrido histórico y bibliográfico que presenta las diversas aplicaciones, tanto clásicas como modernas, de la matemática, permitiendo así reconocerla como un eje transversal en el diario vivir. De igual manera, este trabajo permite abrir el panorama de las aplicaciones matemáticas, lo cual facilita en cierta medida la propuesta de actividades para un entorno escolar, entendiendo el fútbol como un pasatiempo usual en el ámbito escolar.



Este documento presenta entonces una indagación basada en las investigaciones de Thomas Grund (2012) y Monika Linder (2017), a través de una recolección y análisis de datos correspondientes a los pases realizados por dos equipos de fútbol de entornos contrarios (es decir, estilos de juego distintos), a saber: River Plate (estilo de juego argentino) y Liverpool F. C. (estilo de juego inglés). Se analizaron los pases realizados desde cuartos de final hasta la final de la Copa Libertadores y la *UEFA Champions League*, respectivamente. Luego, se hizo uso de Teoría de grafos para elaborar las redes de pases correspondientes a cada partido, cadenas de Markov para determinar al jugador más central y el valor de centralidad del equipo, y, finalmente, pruebas de correlación, para determinar si existe alguna relación entre el valor de centralidad y los resultados obtenidos por equipo. Concretamente, la matemática nos permitió realizar un análisis minucioso al fútbol, estudiando sus redes de pases y la relación entre la centralidad de estas y los resultados favorables o desfavorables de un equipo.

La estructura de este documento se divide inicialmente en una aproximación a las aplicaciones de las matemáticas donde se realiza un recorrido por el estudio de redes hasta llegar al vínculo del estudio de redes con el fútbol. Luego se mencionan los objetivos del trabajo. A continuación, se presenta un marco de referencia en donde se contextualiza acerca de las diferencias futbolísticas que existen entre el juego inglés y el argentino, así como también un marco de referencia matemático que presenta los conceptos que se abordarán para el análisis de los datos. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y los anexos.

## **APROXIMACIÓN A LAS APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS**

Es bien conocido que las matemáticas se han visto inmersas en la historia de la humanidad a través de diferentes aplicaciones tanto en aspectos de la cotidianidad como de las ciencias. Vázquez (2013, p. 1) indica que “La transición entre ambos aspectos es a veces sutil, pero quien vive la profesión cultivando ambas facetas no tiene ninguna duda de cuál es cuál y de que la ciencia que hay detrás es la misma, aunque una charla en un congreso de matemáticas puede parecerse poco o nada a un informe sobre el proyecto de aplicación de un modelo matemático a una rama de la ciencia, la ingeniería o la economía”. A continuación, se presentarán algunas de las aplicaciones más usuales y clásicas de la matemática, tales como aplicaciones a la Economía, Ingeniería y Física, así como las que se conocen como aplicaciones modernas de la matemática, las cuales son a la Biología, el riesgo, redes de interacción y, finalmente, parte de su aplicación al fútbol.

### **APLICACIONES CLÁSICAS DE LA MATEMÁTICA**

#### **La matemática y la Economía**

Se podría mencionar que la Economía se considera una de las primeras aplicaciones de la matemática. Se entiende la matemática como herramienta que responde a las necesidades de condensar las actividades económicas. De igual manera facilita a los economistas simplificar y aclarar procesos o modelos que les permiten llegar a diferentes conclusiones. Como menciona González (2004, p. 6) “muchos economistas han comprobado que las matemáticas les permiten mejorar su productividad y, a su vez, muchos matemáticos han descubierto que la Economía proporciona áreas de interés para la aplicación de sus conocimientos, haciendo surgir incluso nuevos problemas matemáticos”.

Teniendo en cuenta que las matemáticas avanzan conforme a las necesidades que van surgiendo en su campo de aplicación, en este caso la Economía, González (2004, p. 3) enfatiza que “nuevos desarrollos matemáticos se han visto complementados en los últimos cincuenta años con los avances informáticos que permiten ‘largos’ cálculos en ‘poco’ tiempo, dando paso a todo tipo de simulaciones y contrastación de teorías económicas complejas que de otro modo hubiera sido imposible”.

A continuación, González (2004) desarrolla tres fases de matematización en un contexto económico, entiéndase matematización como la aplicación de matemática en una situación.

Esto es: **La primera fase** hace referencia a los propios datos y su visualización directa que presentan ayudados por las gráficas de Excel 2003; **la segunda fase** se refiere al estudio estadístico y modelos de regresión para los datos, cuyos cálculos se realizan con el programa estadístico SCA; y, en **la tercera fase** se asocian modelos analíticos para los datos haciendo los cálculos con DERIVE. De la misma manera, González (2004, p. 7) indica que “Es nuestro interés observar el “valor añadido” de cada una de las fases que, a medida que avanzamos en la modelización, nos aporta más información de interés sobre los datos”. Finalmente, concluyó que a partir de lo anterior se puede reconocer “el valor añadido que tiene el razonamiento frente a la intuición y la observación puramente numérica de datos, y el uso de modelos analíticos procedentes de las matemáticas como recurso para la Economía” (p. 1).

### **La matemática y la Ingeniería**

Durante la Segunda Revolución Industrial se registraron avances en la ciencia y la tecnología. A partir de este desarrollo se generaron nuevas aplicaciones de la matemática al campo industrial, natural y tecnológico; es aquí donde surge la Ingeniería. Las aplicaciones matemáticas en la Ingeniería deben ser bastante sólidas. Por ejemplo, cuando se trabaja con materiales que implican procesos naturales con difícil predicción y control, se ve necesario el uso de modelos matemáticos que faciliten el planteamiento y análisis de dichas situaciones.

Se entiende la matemática como una ciencia transversal a lo largo de la historia, sirviendo como herramienta en la convergencia entre diferentes contextos y ciencias. Melo De Alonso (2003, p. 60) sostiene que “A través de la historia, la matemática ha jugado un papel importante en todos los descubrimientos hechos por el hombre y en la última tecnología está a través de los ingenieros, cuyas bases matemáticas han sido sólidas y se han sabido utilizar en ella. De esta forma la interdisciplinariedad nos dará muchos y grandes avances. Nos hemos venido navegando a través del tiempo desde la prehistoria; ha habido creaciones, inventos hasta la última tecnología hecha por el hombre, donde la matemática siempre se ha hecho presente y seguirá estando ahí, en todo lo que el hombre se imagine construir o hacer para su beneficio”.

Con el paso del tiempo se han desplegado diferentes ramas de la Ingeniería, enfocadas a sus diferentes campos de aplicación. Es decir, si se habla del estudio y aplicación en los procesos naturales, tendremos la Ingeniería Ambiental, Forestal, Catastral, entre otras. Por otro lado,

si se habla del estudio y aplicación en procesos industriales, se tiene la Ingeniería Industrial. Finalmente, para el estudio y aplicación en el ámbito tecnológico, se extiende de igual manera una amplia gama de la Ingeniería, como la Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Electrónica, Ingeniería de Software, entre otras. Esto respondiendo a la gran variedad de aplicaciones y avances de la tecnología.

Contrario a lo que se piensa sobre el surgimiento de la tecnología como algo nuevo, las herramientas tecnológicas que conocemos hoy en día germinaron de las invenciones gestadas muchos años atrás. Por mencionar algunos autores y sus aportes, tenemos a Alan Turing quien, en 1936 precisó la noción de calculabilidad y adoptó la noción de algoritmo al cálculo de ciertas expresiones; esto para generar un modelo computacional que permitiera decodificar mensajes. De igual manera lo hace notar Melo De Alonso (2003, p. 58) “A mediados de los años cuarenta, John Von Neuman, destacado matemático y miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, New Jersey, en colaboración con H. H. Goldstine y A. W. Bruks, escribió una ponencia en la que sugirió que: 1) Los sistemas de numeración binaria fueran usados en la construcción de computadores, y 2) que las instrucciones de computadores, así como los datos procesados, fueran almacenados en una máquina. Estas ideas llegaron a ser parte básica del principio funcional de los computadores. Como el sistema binario de dos dígitos y los componentes electrónicos está en una de dos condiciones (encendido o apagado)”. Poco después, a comienzos de los años cincuenta, de acuerdo con Melo De Alonso (2003, p. 58) “dos importantes descubrimientos en Ingeniería cambiaron la imagen de los computadores electrónicos; de una máquina rápida con un hardware poco confiable se pasó a un computador de relativamente alta confiabilidad y aún mayor capacidad. Esos descubrimientos fueron la memoria de núcleo magnético y los circuitos de transistores”. Igualmente, Melo De Alonso (2003, p. 59) enfatiza que “todo el campo de los computadores continúa siendo una grande y tremenda experiencia de adelanto y desarrollo; como la tecnología computacional y la de las comunicaciones continúan integrándose las redes de computadores, el correo electrónico y las publicaciones electrónicas sólo son el abrebocas de posteriores aplicaciones”. En definitiva, todos estos avances que se han logrado y los que vienen no serían posibles sin la constante presencia de la matemática.

## **La matemática y la Física**

La Física y la matemática han mantenido una estrecha relación, ya que se entiende la Física como la manera de explicar los fenómenos naturales y la matemática el medio por el cual se realiza dicha explicación. La búsqueda constante de explicar los fenómenos naturales se vio permeada por la carencia del desarrollo teórico de la matemática. A pesar de esto, algunas civilizaciones, como los babilonios y los egipcios entre los años 3.000 y 2.500 A.C., realizaron grandes aportes tanto en la Astronomía como en la Geometría.

A finales del siglo XVII surge el nuevo auge de las matemáticas en Occidente, a partir de los desarrollos en el Cálculo por Isaac Newton y Gottfried Leibniz. De la mano de estos avances en el cálculo de derivadas, integrales, series infinitas y ecuaciones diferenciales, dicho con palabras de Vázquez (2013, p. 2), “Newton escribe la ecuación diferencial que codifica la ley universal de atracción de los cuerpos, que en su enorme sencillez dice que todos los cuerpos dotados de masa se atraen con una fuerza que es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia”. Con este nuevo avance, Newton explicó el movimiento de los cuerpos celestes mediante un modelo matemático; a este modelo se le conoce como “La ley de gravitación universal”.

La electricidad, el magnetismo, la teoría del calor y ondas y la transformada de Fourier deslumbraron el siglo XIX según Vázquez (2013, p. 3) “La comunidad matemática se multiplica con la expansión de las universidades y la modernización de sus enseñanzas, y una nueva cosecha de héroes garantiza la excelencia de los nuevos saberes y la feliz unión de las teorías más atrevidas intelectualmente con los problemas de las ciencias aplicadas: Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, James Clerk Maxwell, Henri Poincaré”.

En la década de 1870, James Clerk Maxwell planteó las ecuaciones que explican los fenómenos electromagnéticos a partir de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para el campo eléctrico y campo magnético. Finalmente, Maxwell demostró matemáticamente que la luz es una onda electromagnética. Como afirma Vázquez (2013, p. 3) “Planteada la existencia de ondas de todas las frecuencias como una consecuencia natural de las matemáticas, pronto se generan tales nuevas frecuencias en el laboratorio y en unas décadas aparece la radio, ventana que se abre a un nuevo mundo de las comunicaciones en que ahora vivimos”.

En el siglo XX se dieron dos grandes avances en la Física guiados por la matemática. Uno fue la teoría de la relatividad de Albert Einstein quien propuso dos versiones de esta: la especial y la general. Como expresa Vázquez (2013, p. 4) “La Relatividad Especial tiene como precursores a Lorentz, Poincaré y Minkowski, que estudian el grupo de invariancia que corresponde a la nueva geometría del espacio-tiempo. La Relatividad General usa los conceptos geométricos que Riemann dejó listos medio siglo antes como ejercicio de especulación sobre ‘los fundamentos que sirven de base a la geometría’, y que fueron desarrollados por la escuela italiana de geometría diferencial de Ricci, Levi-Civita y Bianchi”.

El otro gran avance que se da en este siglo es la mecánica cuántica. Autores como Max Planck, Schrödinger, De Broglie, Heisenberg y Dirac, no escatimaron esfuerzos para poder dar una explicación matemática al mundo subatómico. Este avance se considera una de las grandes revoluciones de la Física de este siglo.

## **APLICACIONES MODERNAS DE LA MATEMÁTICA**

Al pensar en matemáticas siempre nos dirigimos a su aplicación en ciencias como la Física, la Economía o la Ingeniería. Sin embargo, con la entrada del siglo XXI y a medida que la sociedad avanza surgen nuevas necesidades y aplicaciones, por lo cual no es de asombrarse que la matemática resulte siendo un pilar importante, por ejemplo, en el estudio de la Medicina, el análisis de riesgos, la Biología e incluso en ámbitos tan cotidianos como las relaciones personales o el fútbol. A continuación, se presentarán algunas de estas nuevas y modernas aplicaciones de la matemática.

### **Matemáticas y Biología**

En Biología cada problema es abordado desde una perspectiva única y diferente, por lo cual los conceptos aplicados de la matemática deben responder a dichas variadas perspectivas. Como sintetizan de León & Gómez (2012, p. 11) “el uso de redes complejas en epidemiología requiere ideas de la Teoría de grafos; el Álgebra Combinatoria se aplica en el control de sistemas en Ecología; la rama topológica de la Teoría de nudos describe la manera de anudarse de una molécula de ADN; la investigación en genética molecular necesita de ciertos procesos estocásticos (cadenas y procesos de Markov, procesos *branching* o de ramificación, movimiento browniano, procesos de difusión); las técnicas de Monte Carlo (Monte Carlo y

cadena de Markov) y los métodos numéricos basados en la Teoría de grandes desviaciones, están presentes en la simulación de eventos raros en modelos biológicos; los modelos lineales y no lineales en Neurobiología emplean ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, deterministas y estocásticas; y, además, los datos medidos o muestreados conducen a los procedimientos de ajuste y estimación estadísticos”.

### **Matemáticas y riesgo**

Gran cantidad de situaciones tanto cotidianas como empresariales contienen un margen de incertidumbre o riesgo. Para el ámbito empresarial las aplicaciones matemáticas ayudan a estudiar y modelar dichas situaciones, brindando un soporte teórico que permita a las empresas reducir este margen. Guerra & Mata (2017) definen la administración de riesgos como un proceso destinado a identificar los eventos potenciales que pueden afectar a las organizaciones y manejar estos imprevistos para proveer una seguridad razonable en el logro de sus objetivos.

La aplicación de nuevas tecnologías, el aumento de procesos productivos y tecnológicos, mercados más competitivos y exigentes, la volubilidad de la naturaleza, entre otros; son factores que dan mayor importancia al estudio de los riesgos empresariales. De igual manera estos hacen primordial y necesaria una actitud proactiva fundamentada en lo teórico, que brinde una seguridad razonable para la empresa y sus objetivos. (Watson, 2006, citados en Guerra & Mata, 2017)

### **Matemáticas y redes de interacción**

Si bien, en un contexto empresarial se han mencionado las aplicaciones matemáticas en la Economía y en el riesgo, estos no son los únicos estudios de interés en las cuales éstas han jugado un papel importante. Con la entrada del siglo XXI, inicio la caracterización de las redes de interacción entre los grupos de trabajo, ya sea de manera laboral o personal. Como mencionan Katz et al. (2004, p. 311) “el análisis de redes ofrece técnicas para identificar y explorar características importantes de la interacción en grupos pequeños”. De la misma manera, Borgatti & Foster (2003) se encargaron del estudio en las redes organizativas en un grupo de trabajo, así como clasificar y caracterizar los estudios realizados.

Es importante conocer la clasificación y caracterización de las redes de interacción entre los grupos de trabajo; sin embargo, se entiende que es de mayor relevancia para una empresa

conocer el beneficio que se puede obtener de dichas redes de interacción, es decir, un rendimiento óptimo por parte de los grupos de trabajo. Katz et al. (2004) consideran que existen diferentes características que se pueden explorar en el análisis de las redes de interacción aplicadas a un grupo de trabajo; una de estas es la centralización. Se entiende la centralización como una interacción no equitativa en un grupo de trabajo, es decir, cuando un integrante de este tiene mayor protagonismo que los demás sobre el desarrollo de una actividad o tarea.

Esta característica es clave en las investigaciones de Balkundi & Harrison (2006), Carson et al. (2007) y Gloor et al. (2008), quienes se encargaron de analizar la centralidad *versus* el rendimiento en un grupo de trabajo.

Sin embargo, surge la pregunta: ¿Se puede realizar este análisis de centralidad *vs.* rendimiento a equipos de trabajo grupal externos, por ejemplo, en el fútbol?

### **Matemáticas, redes de interacción y fútbol**

Los estudios anteriormente mencionados fueron realizados para analizar grupos de trabajo en empresas y oficinas. Fuera de este entorno Grund (2012) realizó un estudio de redes de grupo, basado en el análisis del desempeño de los equipos de la Liga Inglesa en dos temporadas 2006-2007 y 2007-2008. En ese estudio desarrolló diferentes métodos matemáticos para examinar la relación entre la centralidad de pases y los resultados del partido. El estudio que realizó Grund aplica el modelo de efectos mixtos a 76 observaciones repetidas de las redes de interacción y rendimiento de 23 equipos de fútbol. Grund (2012, p. 682) concluyó que “las redes caracterizadas por la alta intensidad (control de las oportunidades de interacción) y la baja centralización están asociadas con un mejor rendimiento del equipo”, entiéndase que un mejor rendimiento del equipo, en un equipo de fútbol, está asociado a un resultado favorable o victoria de dicho equipo.

Así mismo, años después Linder (2017) realizó una investigación basada en el trabajo de Grund (2012) pero aplicando métodos distintos. Dicho con palabras de Linder (2017, p. 2) los métodos utilizados “son cadenas de Markov y la centralidad de los vectores propios para identificar una posible relación entre la estructura de los pases y los resultados del juego, así como entre la estructura y el número de goles marcados y encajados para los tres equipos elegidos”. Para dicha investigación se evaluaron tres equipos de la Liga Inglesa, los cuales



fueron: *Arsenal*, *Sunderland* y *Manchester United*. Para cada equipo el análisis se realizó a partir de la comparación frente al equipo de fútbol *Leicester*, es decir, se recolectaron los datos de los partidos entre los tres equipos base vs. *Leicester*. El trabajo realizado a los datos recolectados consistió en: construir la matriz de transición y hallar los vectores propios de esta matriz; encontrando la centralidad de dichos vectores se tiene la centralidad del equipo. Si bien Linder no logró encontrar relación entre la centralidad o descentralidad de un equipo y los resultados obtenidos, no especificó la existencia o no de esta. Se entiende la descentralidad como una interacción equitativa entre los integrantes de un equipo, dicho de otra forma, cuando los integrantes participan por igual en el desarrollo de una jugada. Desde la posición de Linder (2017, p. 26) “es importante recordar que sólo porque no se pueda encontrar ninguna relación utilizando estas técnicas en estos datos, no significa que no exista ninguna relación”.

Para este trabajo se consideran los siguientes factores que se justificarán más adelante por los cuales se cree Linder no encontró una relación: Realizó el análisis únicamente a equipos de la Liga Inglesa y no se realizó el debido seguimiento a los equipos, ya que se tomaron datos provenientes únicamente de un partido.

## OBJETIVOS

### OBJETIVO GENERAL

Indagar si existe un vínculo entre la relación centralidad-resultados de un equipo y el contexto en el que se encuentra, a través de herramientas matemáticas.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Consolidar un marco de referencia, que consiste en un *marco teórico matemático*, que se aplicará en el trabajo, y un *marco referencia futbolístico*, que permitirá sustentar la comparación de los contextos de los equipos a analizar.
2. Recolectar datos de cinco partidos de cada equipo propuesto para el estudio. Estos serán los cuartos de final (ida y vuelta), las semifinales (ida y vuelta) y la final (ida y vuelta), tanto de la Copa Libertadores 2018, cuyo campeón fue River Plate, y la Liga de Campeones 2018-2019, cuyo campeón fue Liverpool.
3. Tratar los datos recolectados utilizando los conceptos matemáticos expuestos en el marco teórico matemático.
4. Analizar los datos procesados en búsqueda de conclusiones respecto al objetivo general planteado.

## **APROXIMACIÓN CONCEPTUAL**

En este apartado se presenta la justificación de este trabajo a partir de dos marcos de referencias: futbolístico y matemático. Para el marco de referencia futbolístico se tuvieron en cuenta los referentes teóricos que permitían remarcar las diferencias históricas y técnicas entre el estilo de juego inglés y argentino. Por otro lado, para el marco teórico matemático se tuvieron en cuenta conceptos que permitieran analizar los datos recolectados y facilitar las posibles conclusiones.

### **MARCO DE REFERENCIA DESDE LO FUTBOLÍSTICO**

Como lo hacen notar Miller et al. (2001), los inicios del fútbol datan del siglo XIX cuando comenzó como actividad exclusiva de los altos estratos de la sociedad británica. Después de popularizarse en la alta sociedad, el fútbol inició su expansión a los demás estratos sociales, aspectos como su accesibilidad, dado que no necesita muchos recursos físicos y económicos para practicarse, además de sus normas y estrategias simples de juego hicieron de este un deporte popular en poco tiempo.

Conforme avanzaba la popularidad y expansión del fútbol, este excedió los límites de las islas británicas, así que, entre los años 1840 y 1890 este deporte se extendió hasta Países Bajos, Dinamarca, Nueva Zelanda, Argentina, Suiza, Bélgica, Italia, Alemania, Uruguay, Hungría, Noruega, Suecia y España. Fue tal su notoriedad que, para inicios del siglo XX, concretamente en 1904, se fundó la *Fédération Internationale de Football Association* (FIFA), organismo que se encargaría de regular el ya reconocido deporte.

Estos fueron solo los inicios del que se conoce como “el deporte más popular del mundo”, claramente; al ser tan constante su popularidad, para muchas personas el fútbol es una forma de vida. Al ser un producto social, se convierte en una herramienta de análisis no solamente para asuntos técnicos relacionados a los procesos tácticos propios del deporte, sino también para procesos históricos y culturales, como sus simbolismos, rituales, racismo o su impacto en las narrativas propias de cada cultura y nación. Es por esto por lo que no es de extrañar que tanto Monika Linder (2017), como Thomas Grund (2012) decidieran realizar su investigación sobre fútbol y matemáticas, mostrando así que el análisis que se le realiza a este deporte no solo puede ser desde sus aspectos sociales o técnicos.

## **El impacto del fútbol inglés en la investigación de Linder**

Como se mencionó anteriormente Linder no logró encontrar relación entre la centralidad o descentralidad de un equipo y sus resultados obtenidos, sin embargo, no especificó la existencia o no de esta. A partir de lo anterior, se pretende ahondar en por qué Linder no encontró dicha relación. Una de las razones ya mencionadas es que, se realizó el análisis únicamente a equipos de la Liga Inglesa; es decir, no se realizó una correcta selección de la muestra, entendiendo que para esto se deben seleccionar datos que evidencien las características generales del objeto de estudio, reconociendo el lugar y el contexto de este, ya que como mencionan Martín-Crespo & Salamanca (2007, p. 3) “debemos identificar los contextos en función de cómo los individuos actúan en ellos, reconociendo que son construcciones sociales y no localizaciones físicas e intentar asegurarnos que tomamos muestras de todos los que son relevantes”.

Teniendo en cuenta que el objeto de estudio en este caso es el fútbol, se considera necesaria la presencia de datos que evidencien los diferentes contextos, en este caso tipos de juego distintos. En otras palabras, el fútbol inglés solo representa un estilo de juego futbolístico, como lo hace notar Cabado (2017) cuando menciona que, a pesar del paso del tiempo, el estilo de fútbol inglés sigue siendo el mismo, caracterizado por su juego directo, físico y vibrante.

Es por esto por lo que se considera esencial realizar el análisis en conjunto tanto a un equipo característico del estilo de juego inglés, como a un equipo que se caracterice por un estilo de juego distinto y opuesto.

### ***Estilos de juego distintos: Del estilo europeo al estilo latinoamericano***

Se reconoce que al surgir el fútbol en Europa el estilo de juego europeo fue el pionero, pero no el único. La rápida expansión de este deporte contribuyó también a la mutación de este. Como afirma Ustáriz (2020, p. 1) “el viaje del fútbol desde los salones de tazas y té, primero a los barrios y sus callejuelas, y luego en barco a Europa y América y el resto del mundo, fue un proceso de varias décadas que lo cambió todo a punta de sincretismo, arrebatándole el fútbol a los ingleses para que fuese de todos”. Igualmente, son reconocidas las características atribuidas al estilo de juego europeo y su contrario en el estilo de juego sudamericano; Ustáriz (2020, p. 1) enfatiza que “existe una asociación inmediata de que lo europeo se refiere a un fútbol rápido y directo, con énfasis en el apartado atlético y la sistematización, y lo

sudamericano a uno que es técnico y pausado, con pases cortos y confianza en la expresión individual”.

Por otro lado, caracterizando de manera más específica esta rivalidad entre el estilo de juego europeo y latinoamericano, se tiene el caso del estilo de juego inglés vs. El estilo de juego argentino. En palabras de Freddi (2008, p. 12) “mientras los británicos promulgaban el fútbol científico, físico, controlado, y previsible; en la Argentina se hacía gala de la improvisación y de factores aparentemente innatos como el talento. Las antinomias se tornan evidentes”. De la misma manera para el surgimiento del fútbol argentino se tienen en cuenta dos factores importantes; el que le compete a este trabajo lo menciona Archetti (2003, citado en Garay, 2012, p. 3) cuando relaciona que el club argentino Racing “rompe la hegemonía de Alumni, el club ganador de la era inglesa, transformando simbólicamente al argentino de aprendiz en amo de su fútbol. Desde aquella segunda fundación se ha desarrollado la oposición entre fútbol local y fútbol extranjero, primero basado puramente en lo étnico como explicación de las diferencias (del modo de ser argentino, la picardía, la inferioridad física y formativa, deviene el estilo criollo, contrapuesto al estilo industrial y mecánico del inglés)”. En otras palabras, la contraposición que le hace el fútbol argentino al fútbol inglés está estrictamente relacionada con los matices culturales que hacen al estilo argentino, un fútbol criollo y creativo, contrario al estilo mecanizado del fútbol inglés.

Ahora, teniendo en cuenta lo planteado anteriormente, y la estricta relación y contraposición existente entre los estilos de juego inglés y argentino, tiene sentido que la selección de la muestra se enfoque en tomar dos equipos pertenecientes a cada estilo de juego, para así establecer unos criterios de selección óptimos para la investigación, ya que como mencionan Arias-Gómez et al. (2016, p. 201) “el investigador debe especificar los criterios que deben cumplir los participantes. Los criterios que especifican las características que la población debe tener se denominan criterios de elegibilidad o criterios de selección”. Así mismo, definen como criterios de selección a las características que debe tener un sujeto u objeto de estudio, para ser parte de la investigación.

### **Selección de la muestra: equipos constantes**

Además de pertenecer a cada estilo de juego planteado en el apartado anterior, se toma como un criterio de selección clave, elegir dos equipos constantes, entendiendo su constancia como

la medida de los buenos resultados obtenidos (títulos, o disputas de finales) con un mismo director técnico.

El porqué de hacer énfasis a que dichos buenos resultados obtenidos sean bajo el mando de un mismo director técnico, tiene su razón de ser ya que, realizando el barrido histórico de nominaciones a mejores técnicos, era reiterativa la aparición de dos nombres: Jürgen Klopp y Marcelo Gallardo, quienes a su vez entre 2014 – 2015 dirigen dos equipos pertenecientes al estilo de juego inglés (Liverpool) y al estilo de juego argentino (River Plate), respectivamente.

A continuación, se presenta un cuadro comparativo en el cual se evidencian las diferencias entre los estilos de juego del River Plate, bajo el mando de Marcelo Gallardo, y del Liverpool, a cargo de Jürgen Klopp.

<b>El River Plate de Gallardo</b>	<b>El Liverpool de Klopp</b>
<p>Según la revista <i>The Coaches'Voice</i> (noviembre de 2021) en su artículo: “<i>Marcelo Gallardo: Variables tácticas</i>”; Gallardo prioriza la posesión del balón y la construcción de juego desde atrás con toques cortos saliendo por medio de los carriles laterales. Si el rival presiona la salida de balón, busca el pase a segunda línea. River Plate es un equipo que a través de los años que ha sido dirigido por Marcelo Gallardo, si bien cambia su esquema de juego o los jugadores que lo conforman, ha mantenido la misma forma de llegar al arco rival y buscar dominar los partidos mediante la posesión del balón y la participación de todos los jugadores buscando un juego asociado.</p>	<p>Según la revista <i>The Coaches'Voice</i> (noviembre de 2021) en su artículo: “<i>Análisis: El Liverpool de Jürgen Klopp</i>”, Klopp prioriza la presión tras la pérdida del balón, aplicando agresividad y, por ende, una mayor amenaza en las transiciones, es decir, es un juego de contragolpes, velocidad y físico, que en pocas palabras resume el estilo característico del fútbol inglés. A pesar de que el estilo de juego del Liverpool ha apropiado características de un juego de posesión, su forma de afrontar los partidos no deja de ser de transiciones, entendiéndolo como un juego sin tanta elaboración, de velocidad, basado en la capacidad física de sus jugadores.</p>

*Tabla 1: Estilo de juego de River Plate vs. Liverpool*

Ahora, como ya se evidenció que las características generales para cada estilo de juego, tanto del Liverpool como para el River Plate, pertenecen respectivamente a las características ya presentadas del estilo de juego inglés y argentino, es necesario realizar una revisión respecto a la constancia en sus buenos resultados obtenidos, tanto en torneos locales como internacionales; esto claro está, desde la llegada de los directores técnicos anteriormente mencionados y durante sus primeros 5 años de gestión. A continuación, se presentan dos tablas (Tabla 2 y Tabla 3) que permiten corroborar la constancia de los equipos en cuestión.

### Constancia River Plate

<b>AÑO</b>	<b><i>Títulos obtenidos y finales disputadas</i></b>
<b>2014</b>	2° en primera división. // 1° Copa Sudamericana
<b>2015</b>	2° Supercopa de Argentina // 1° Copa Libertadores // 1° Recopa Sudamericana // 1° Copa Suruga Bank // 2° Mundial de Clubes
<b>2016</b>	1° Copa Argentina // 1° Recopa Sudamericana
<b>2017</b>	2° Primera división // 1° Copa Argentina // 2° Supercopa de Argentina
<b>2018</b>	1° Supercopa de Argentina // 1° Copa Libertadores

Tabla 2: *Títulos del River Plate 2014-2018, tomado de: <https://www.cariverplate.com.ar/titulos>*

### Constancia Liverpool

<b>AÑO</b>	<b><i>Títulos obtenidos y finales disputadas</i></b>
<b>2015</b>	--
<b>2016</b>	2° Copa de la liga de Inglaterra // 2° Liga UEFA
<b>2017</b>	--
<b>2018</b>	2° <i>Champions League</i>
<b>2019</b>	2° <i>Premier League</i> // 1° <i>Champions League</i> // 1° Supercopa de Europa // 1° Mundial de Clubes

Tabla 3: *Títulos del Liverpool 2015-2019, tomado de: <https://www.liverpoolfc.com/history/timeline>*

Finalmente, teniendo en cuenta la trayectoria de ambos equipos, la cual evidencia su constancia tanto en estilo de juego, como en resultados obtenidos, para esta investigación se decide analizar los partidos correspondientes a su último año mencionado anteriormente, es decir, 2018 para River Plate y 2019 para Liverpool. De la misma manera, se tomarán únicamente los partidos correspondientes a los cuartos de final (ida y vuelta), semifinal (ida y vuelta) y la final (ida y vuelta) de la Copa Libertadores, en la cual quedó campeón River

Plate, así como los partidos correspondientes a cuartos de final (ida y vuelta), semifinal (ida y vuelta) y la final de la *UEFA Champions League*, cuyo campeón fue Liverpool.

Ahora, según lo planteado anteriormente queda claro que el estilo de juego inglés y el estilo de juego argentino son contrarios, lo cual brindó fundamentos históricos y tácticos para realizar la elección de los dos equipos pertenecientes a estos contextos opuestos: Liverpool F. C. y River Plate, respectivamente. De la misma manera su trayectoria y constancia, rectifica la elección de equipos constantes bajo el mando de un director técnico que represente el estilo de juego característico del país de origen de los equipos elegidos. Con esto claro, basta ahora con presentar los conceptos matemáticos que permitirán analizar los datos correspondientes a los dos equipos ya mencionados.

## **MARCO TEÓRICO MATEMÁTICO**

Para el desarrollo de este trabajo se tomarán como base conceptos relacionados a la rama del Álgebra, los cuales son Teoría de Grafos, espacios propios y cadenas de Markov, así como de la rama de la Estadística y Probabilidad, la prueba de Man Whitney y coeficientes de correlación, los cuales servirán de herramienta teórica para procesar y analizar los datos recolectados. Algunos son tomados de la investigación de Monika Linder (2017) y otros referentes teóricos cuyas referencias se encontrarán a lo largo del cuerpo de este apartado.

### **Teoría de Grafos**

Para hablar de Teoría de Grafos se ve necesario partir desde la definición básica de grafo, así como de sus componentes más específicos, es decir sus tipos y características, los cuales serán primordiales para este trabajo.

**Definición de Grafo:** Un grafo  $G$  es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito (vértices, nodos) y  $E$  es un multiconjunto de pares no ordenados de vértices, denotados por  $\{x, y\}$ , que se denominan lados, aristas, etc. En este caso decimos que  $x$  y  $y$  son extremos de  $\{x, y\}$ . Denotamos  $V(G)$  por el conjunto de vértices del grafo  $G$  y por  $E(G)$  el conjunto de lados del grafo  $G$ . Además,  $v(G)$  y  $\varepsilon(G)$  denotan el número de vértices y el número de aristas de  $G$  respectivamente. (Chacón, 2005, p. 1)

**Definición de grafo dirigido:** Un grafo dirigido o digrafo  $G = (V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices, un conjunto  $E$  de aristas, que son pares ordenados de elementos de  $V$ . (Rosen, 2004, citado en Chacón, 2005, p. 2)



**Definición de camino de un grafo:** Un camino  $C$  en un grafo es una secuencia que alterna nodos y vínculos de la siguiente manera:

$$x_0, v_1, x_1, v_2, \dots, v_l, x_l \quad \text{con} \quad v_i = x_{i-1}x_i \quad 0 < i \leq l$$

La longitud del camino se define a partir de  $l$ . No se impone ninguna restricción sobre cuáles son los nodos que conforman un camino, permitiendo que se repitan nodos en un mismo camino. (Beineke, Wilson & Cameron, 2005 citados en Barriola & Dotta, 2016, p. 12)

Los caminos deben realizarse de acuerdo con la dirección de los lados. Si no existen lados múltiples podemos denotar sin ambigüedad la cadena como una sucesión de vértices (vértices consecutivos adyacentes). (Chacón, 2005, p. 3). A continuación, se muestra la representación de un grafo simple (Imagen 1: Grafo simple ).

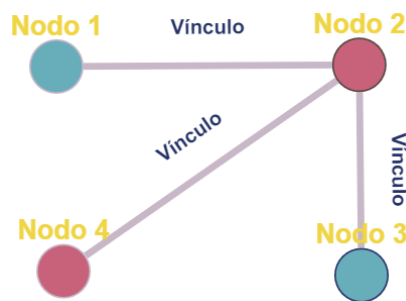
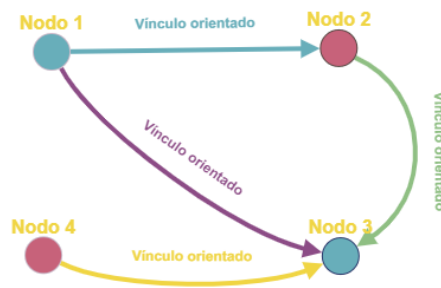


Imagen 1: Grafo simple

En palabras de Barriola & Dotta (2016) la representación gráfica de los grafos surge naturalmente dadas las definiciones anteriormente presentadas, ya que estas proveen una descripción clara y sencilla de lo que es un grafo en su forma general. Sin embargo, se considera necesario caracterizar las relaciones presentes entre los nodos para así describir un tipo de grafo más específico y restringido. Dicha caracterización se realiza a partir de las siguientes definiciones, también propuestas por Barriola & Dotta (2016, p. 13):

**Definición de un vínculo dirigido:** se define como aquel que brinda una relación de dirección entre los nodos. Considerando un vínculo que surge desde  $x$  hacia  $y$ , se suele denotar como  $\overrightarrow{xy}$ . De esta manera, el nodo desde el cual parte el vínculo se denomina nodo de salida y hacia dónde llega se llama nodo de llegada. Dos nodos conectados por un vínculo se nombran nodos adyacentes.

**Definición de grafo orientado:** Se define como aquel en el que todos los vínculos que lo componen tienen una orientación definida. Teniendo dos nodos  $x, y$  cualesquiera, debe verificarse que existe como mínimo un vínculo dirigido entre ellos, es decir, se cumpla al menos que  $\overrightarrow{xy}$  o  $\overrightarrow{yx}$  (Bollobas, 1995, citado en Barriola & Dotta, 2016, p. 13). Lo anterior se puede verificar en la Imagen 2.



*Imagen 2: Grafo Orientado*

El concepto de camino, anteriormente definido, se aplica para un grafo orientado. Es decir, en un grafo orientado, los caminos de dicho grafo son igualmente orientados y el conjunto de vínculos que los componen respetan la orientación que ya poseen, permitiendo así definir el sentido en el que se produce un movimiento de un nodo a otro. Sin embargo, dicha definición no brinda herramientas suficientes para caracterizar las transiciones entre los nodos, por lo cual se ve necesario abordar las siguientes definiciones propuestas por Barriola & Dotta (2016, p. 14):

**Definición de grafo ponderado:** Un grafo ponderado es un grafo orientado en el que a cada vínculo se le asigna un valor no negativo denominado ponderación. Sea  $v_i$  un vínculo,  $p(v_i)$  es su ponderación. Lo anterior se puede verificar en la Imagen 3: Grafo ponderado, tomado de (Barriola & Dotta, 2016, p. 15)

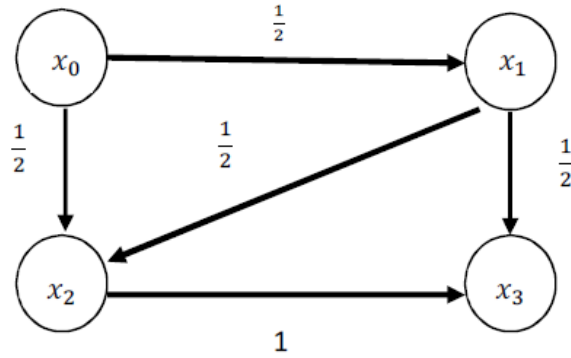


Imagen 3: Grafo ponderado, tomado de (Barriola & Dotta, 2016, p. 15)

Aunque la definición no provee una restricción para las ponderaciones de un grafo, Barriola & Dotta (2016) presentan algunas medidas normalizadas, se indica que para el caso en el que solo exista un vínculo entre los nodos, su ponderación será igual a uno. Es decir:

$$0 < p(v_i) \leq 1 \quad \forall v_i \in V(G)$$

Por tanto, para  $x$  un nodo de salida,  $v_i$  los vínculos que surgen desde  $x$  y  $p(v_i)$  las ponderaciones asociadas, debe cumplirse que:

$$\sum_{i=1}^l p(v_i) = 1$$

Existen dos formas de considerar las ponderaciones asociadas a los vínculos:

**Forma equitativa:** Las ponderaciones de los vínculos dirigidos desde el nodo  $x$  a cualquier nodo (incluido sí mismo) son idénticas. Por lo tanto, si existen  $i$  vínculos saliendo de  $x$  entonces  $p(v_i) = \frac{1}{i}$ .

**Forma arbitraria:** Las ponderaciones de los vínculos son diferentes. En este sentido, se considera que cuanto mayor sea la ponderación de un vínculo respecto a los restantes, mayor será su importancia. (Barriola & Dotta, 2016, p. 15)

Al tomar las ponderaciones  $p(v_i)$  de los vínculos en un grafo, se puede construir su matriz de adyacencia, la cual se define como:

**Definición de matriz de adyacencia:** Sea  $G$  un grafo ponderado con  $n$  nodos, la matriz de adyacencia ( $A$ ) asociada al grafo es una matriz de orden  $n \times n$  cuyos elementos se construyen de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{x_1x_1} & \cdots & a_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{x_nx_1} & \cdots & a_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

$$a_{xy} = \begin{cases} p(v_i), & \text{si } x \text{ e } y \text{ son adyacentes} \\ 0, & \text{si } x \text{ e } y \text{ no son adyacentes} \end{cases}$$

Por ejemplo, la matriz de adyacencia asociada al grafo ponderado (Imagen 3), estaría dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Matriz 1: Matriz de adyacencia*

Finalmente, Barriola & Dotta (2016) indican dos definiciones más que permiten caracterizar las relaciones presentes entre los nodos de un grafo, las cuales son:

**Definición de un grafo conectado:** Se dice que un grafo orientado está conectado si para todo par de nodos  $\{x, z\}$  existe un camino dirigido desde  $x$  hasta  $z$ , o desde  $z$  hasta  $x$ . (Bollobás, 1995, citado en Barriola & Dotta, 2016, p. 16).

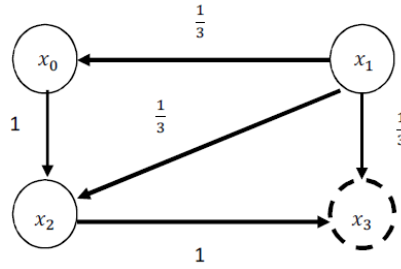


Imagen 4: Grafo conectado, tomado de (Barriola & Dotta, 2016, p. 16)

Para el anterior grafo conectado, se puede observar que existen caminos dirigidos entre todos los nodos ( $x_0, x_1, x_2, x_3$ ). Sin embargo, si se parte del nodo  $x_3$  no existe ningún camino que permita llegar a cualquier otro nodo del grafo. Contrario a lo anterior, otro tipo de grafo es el grafo fuertemente conectado.

**Definición de grafo fuertemente conectado:** Se dice que un grafo orientado está fuertemente conectado si para todo par de nodos  $\{x, z\}$  existe un camino dirigido desde  $x$  hasta  $z$  y desde  $z$  hasta  $x$ . (Beineke, Wilson & Cameron, 2005, citados en Barriola & Dotta, 2016, p. 16)

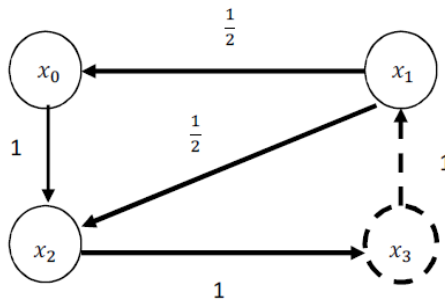


Imagen 5: Grafo fuertemente conectado (Barriola & Dotta, 2016, p. 17)

En comparación al grafo anteriormente presentado (Imagen 4), donde partiendo del nodo  $x_3$  era imposible llegar a cualquiera de los nodos restantes, para este grafo fuertemente conectado (Imagen 5) si se parte del nodo  $x_3$ , siguiendo el sentido de los vínculos, se puede llegar a cualquier nudo, trazando los caminos correspondientes. Lo anterior afecta directamente a la matriz de adyacencia correspondiente a dicho grafo fuertemente conectado, puesto que la sumatoria de los elementos de cualquier fila es 1. Esto es:

$$\sum_{i=1}^n a_{x_j x_i} = 1 \quad \forall j \mid j \in [1, n]$$

Para este caso, en la matriz de adyacencia, que se presenta a continuación, asociada al grafo fuertemente conectado (Imagen 5) se puede verificar que la sumatoria de los elementos de cualquier fila es 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Matriz 2: Matriz de adyacencia*

## Cadenas de Markov

Para lograr una mejor comprensión acerca de la definición de cadenas de Markov, se ve necesario introducir inicialmente el siguiente concepto:

**Definición de proceso estocástico:** Es aquel fenómeno aleatorio que se desarrolla en el tiempo obedeciendo a leyes probabilísticas. Se puede pensar también un proceso estocástico como una sucesión de variables aleatorias que brindan una descripción de un determinado fenómeno a través del tiempo. En otros términos, podemos escribirlo así: (Barriola & Dotta, 2016, p. 18)

$$\{X(t); t \in T\} \quad X(t): \text{estado del proceso en } t \quad T: \text{conjunto temporal}$$

Como lo hace notar Rincón (2012) en aras de practicidad para definir la propiedad de Markov se considera necesario que a la probabilidad  $P(X_n = x_n)$  se le escriba como  $p(x_n)$  en la que el subíndice indica la variable a la que se hace referencia. Por tanto, si se habla de la probabilidad condicional  $p(x_{n+1} \mid x_n)$ , su significado es análogo.

**Definición de cadena de Markov:** Según (Rincón, 2012) una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ , con espacio de estados

discreto, y que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier entero  $n \geq 0$ , y para cualesquiera estados  $x_0, \dots, x_{n+1}$ , se cumple

$$p(x_{n+1} | x_0, \dots, x_n) = p(x_{n+1} | x_n).$$

Considerando a  $n$  como el tiempo presente,  $n + 1$  como el tiempo futuro y a los tiempos  $0, 1, \dots, n - 1$  como el pasado. La definición anteriormente presentada indica que la probabilidad de que se realice un suceso en determinado momento solo depende de lo que sucede en el periodo inmediatamente anterior.

A continuación, se presenta un ejemplo propuesto por Linder (2017, p. 7) que ilustra los conceptos presentados anteriormente y los que se presentarán a continuación.

***Ejemplo 1:** Una cabra se mueve en un prado dividido en tres zonas, denominadas zona 1, 2 y 3 respectivamente. Al salir de una zona, la cabra puede tener como próximo destino una de las otras dos zonas. A continuación, se presenta una matriz que muestra las veces que la cabra se desplaza a otra zona en una hora. Por ejemplo, los números cero, doce y ocho de la primera fila indican que de las veinte veces que la cabra sale de la zona 1 se desplaza a la zona 2 doce veces y a la zona 3 ocho veces.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 8 \\ 11 & 0 & 11 \\ 9 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Para este ejemplo, las probabilidades de que la cabra pase de la zona 1 a la zona 2, están dadas por 12 sobre 20, que sería la cantidad de veces que se desplazó la cabra a dicha zona sobre la cantidad total de desplazamientos desde la zona 1. Lo anterior es lo que se conoce como probabilidades de transición.

### **Probabilidades de transición**

Si tomamos dos estados  $(i, j)$  de una cadena de Markov, a la probabilidad de transición de pasar del estado  $i$  en el tiempo  $n$ , al estado  $j$  en el tiempo  $n + 1$ , es decir,  $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$  o  $p_{ij}(n, n + 1)$ , se le conoce como probabilidad de transición en un paso. Asumiendo que

los valores  $p_{ij}(n, n + 1)$  no dependen de  $n$ , es decir, que la cadena de Markov es estacionaria u homogénea en el tiempo, los valores se escriben entonces como  $p_{ij}$ . Tomando luego los índices  $i, j$  y realizando la variación sobre el conjunto de estados  $\{0,1,2,3, \dots\}$  se obtiene entonces la matriz de probabilidades de transición en un paso, la entrada  $(i, j)$  es la probabilidad de pasar del estado  $i$  al estado  $j$  en una unidad de tiempo. (Rincón, 2012)

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

*Matriz 3: Matriz de transición, tomada de (Rincón, 2012, p. 29)*

Al representar estas matrices de transición, se debe tener en cuenta el espacio de estados del proceso, es decir, el índice  $i$  que se refiere al estado de salida o inicial corresponde al renglón de la matriz, y el índice  $j$  que se refiere al estado de llegada o final corresponde a la columna. Luego, Rincón (2012) define matriz de probabilidades de transición así:

**Definición de matriz de transición:** La matriz de probabilidades de transición  $P = (p_{ij})$  cumple las siguientes dos propiedades:

- i)  $p_{ij} \geq 0$
- ii)  $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$

Continuando con el *Ejemplo 1* propuesto por Linder (2017) y presentado en el apartado anterior, los desplazamientos de la cabra modelado por una cadena de Markov con una matriz de transición  $P$  se representan de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{20} & \frac{8}{20} \\ \frac{11}{22} & 0 & \frac{11}{22} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & 0 \end{bmatrix}$$



Como se puede observar, los valores de la matriz corresponden a la probabilidad de desplazamiento de la cabra de una zona a otra; de la misma manera, la sumatoria de los valores de cada fila es igual a 1.

Por otro lado, Barriola & Dotta (2016) abordan el concepto de matriz de transición a partir de los vectores de probabilidad, definiendo estos de la siguiente manera:

**Definición de vector de probabilidad:** se denomina vector de probabilidad a aquel vector fila  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  cuyos componentes son no negativos y la sumatoria de las mismas es igual a uno. Es decir, aquel vector que cumple con las siguientes condiciones:

- i)  $p_j \geq 0 \forall j$
- ii)  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$  (*Ley de cierre*)

Luego, según (Barriola & Dotta, 2016) una matriz estocástica o de probabilidad es aquella matriz cuadrada en la que cada una de sus filas es un vector de probabilidad.

A partir de las definiciones presentadas de matriz de transición como de vector de probabilidad, se puede observar que las condiciones propuestas para cada una son las mismas, esto indica que, al hablar de matriz de transición, así como de matriz estocástica o de probabilidad se está haciendo referencia al mismo concepto.

Es preciso mencionar que esta matriz de transición comparte las mismas características de la matriz de adyacencia asociada a un grafo, la cual fue presentada y definida en el apartado de Teoría de Grafos.

### **Vector propio y vector estacionario**

Según el apartado anterior, un vector de probabilidad  $p$  es aquel en el que todas sus entradas son mayores o iguales que 0, y la suma de estas es 1. Ahora, para que un vector de probabilidad se convierta en un vector estacionario basta con que la multiplicación de ese vector  $p$  por la matriz de transición dé como resultado el mismo vector de probabilidad  $p$ . Es decir:

**Definición de vector estacionario:** Dada una matriz de transición  $P$  asociada a una cadena de Markov, se dice que  $x$  es un vector estacionario si  $x$  es un vector de probabilidad y cumple que  $Px = x$ . Poole (2011, p. 239)

Por otro lado, se toma la definición de vector propio que es:

**Definición de vector propio:** Un vector propio de una matriz  $A$ , es cualquier vector  $x$  tal que  $Ax = \lambda x$ , para algún escalar  $\lambda$ . El escalar es el valor propio de  $A$ . Linder (2017, p. 8)

A partir de esto se puede observar que un vector estacionario, es un vector propio para el cual el valor propio es  $\lambda = 1$ . Lo anterior indica que, para conocer el vector estacionario de una matriz  $P$ , basta con hallar su vector propio, asociado al valor propio  $\lambda = 1$ .

## Métodos para hallar un vector estacionario

### Método 1: Iteraciones – vector estacionario

Barriola & Dotta (2016) indican que para calcular cómo se comportará una variable en un periodo  $t$  cualquiera se utiliza la fórmula  $S(t) = S(0) \cdot P^t$  para este caso,  $P$  es la matriz de transición,  $S(0)$  es el vector de estado inicial y  $S(t)$  el vector de estado en el período  $t$ . Ahora, el vector estacionario será el resultado de las iteraciones del proceso de cálculo del comportamiento de las variables. Es decir, cuando  $t$  tiende a infinito, la fórmula  $S(t) = S(0) \cdot P^t$  converge al vector estacionario, entendiendo este como el vector que indica que para cualquier transición en la matriz  $P$ , no tiene efecto sobre sus probabilidades, es decir que  $Pv = v$ .

### Método 2: Espacio propio de una matriz

Por otro lado, Poole (2011) presenta un procedimiento para hallar los valores y vectores propios, es decir los espacios propios de una matriz cuadrada  $A$ . En el procedimiento hay que tener en cuenta que:

**Definición de valor propio (*eigenvalor*):** Los eigenvalores de una matriz cuadrada  $A$  son precisamente las soluciones  $\lambda$  de la ecuación  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

**Definición de espacio propio (*eigenespacio*):** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  y sea  $\lambda$  un eigenvalor de  $A$ . La colección de todos los vectores propios (eigenvectores) correspondientes a  $\lambda$ , junto con el vector cero, se llama eigenespacio de  $\lambda$  y se denota  $E_\lambda$ .

Con esto claro, el procedimiento a seguir para hallar los espacios propios de una matriz  $A$  de  $n \times n$ , es el siguiente:

1. Calcule el polinomio característico  $\det(A - \lambda I)$  de  $A$ .
2. Encuentre los eigenvalores de  $A$  al resolver la ecuación característica  $\det(A - \lambda I) = 0$  para  $\lambda$ .
3. Para cada eigenvalor  $\lambda$ , encuentre el espacio nulo de la matriz  $A - \lambda I$ . Este es el espacio  $E_\lambda$ , compuesto por los vectores distintos de cero de los cuales surgen los eigenvectores de  $A$  correspondientes a  $\lambda$ .
4. Encuentre una base para cada eigenespacio.

Cabe aclarar que el anterior procedimiento se da para cualquier escalar  $\lambda$ ; sin embargo, como se mencionó anteriormente, el vector estacionario no es más que un vector propio (eigenvector) donde  $\lambda = 1$ . Es decir, para hallar el vector estacionario a partir de este método, se debe asumir  $\lambda = 1$  y finalmente seguir el paso a paso del procedimiento ya presentado.

Se ve necesario precisar que según Poole (2011) la organización de las probabilidades de transición dentro de una matriz de transición se da de la siguiente manera: Se consideran las columnas como los “estados de salida o estados presentes” y las filas como “estados de llegada o estados siguientes”.

		<i>Presente</i>	
		A	B
<i>Siguiente</i>	A	0.70	0.20
	B	0.30	0.80

*Matriz 4: Matriz de transición (Poole, 2011, p. 237)*

## Medida de centralidad

Como lo hace notar Linder (2017) la medida de centralidad<sup>1</sup> permite encontrar la variación de un conjunto de datos. Muestra cuánto varían los valores con respecto a la media del conjunto. Está dada por la siguiente fórmula, en la cual se toman  $x_i$  como los valores del vector estacionario.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

## Prueba U de Mann-Whitney

Como lo hace notar Linder (2017) esta es una prueba no paramétrica que se utiliza para determinar las diferencias existentes entre las variables de dos grupos de prueba. Tomando dos grupos de datos (A, B), formados por  $n_1$  y  $n_2$  variables respectivamente, el número total de variables es  $n_1 + n_2$ . La **hipótesis nula** indica que las distribuciones de ambos grupos son idénticas, de modo que una puntuación tomada al azar de un grupo tiene la misma probabilidad de ser menor o de ser mayor que un valor tomado al azar del otro grupo. La prueba compara las puntuaciones medias de los dos grupos para decidir si la hipótesis nula es cierta o puede rechazarse. Inicialmente se organizan las variables de ambos grupos de datos de menor a mayor, independiente del grupo de datos al que pertenezcan. Luego, a cada variable se le agrega un valor entre 1 y  $n_1 + n_2$ , correspondiente a su lugar en la organización de datos. Posterior a esto los valores de rango de cada grupo se suman por separado, teniendo así los valores  $R_1$  y  $R_2$ , los cuales, junto con los valores  $n_1$  y  $n_2$  son reemplazados en las siguientes fórmulas para calcular los valores  $U_1$  y  $U_2$  respectivamente.

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} - R_1 \quad U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2} - R_2$$

---

<sup>1</sup> Aunque en términos estadísticos las medidas de centralidad poseen un significado diferente al dado a la desviación estándar, es necesario precisar qué, según los autores consultados para este trabajo, se entiende la medida de centralidad como aquel valor que indica la interacción (equitativa o no) entre los integrantes del equipo de fútbol, y está mediada por la desviación estándar.

De la misma manera, Linder (2017) indica que el valor más bajo entre  $U_1$  y  $U_2$  es el que se utilizará para controlar la hipótesis nula planteada, a partir de la comparación de estos valores y su relación en la tabla de valores críticos para varios números de variables con un nivel de significación del 5%. Es decir, si el valor de  $U$  es menor o igual que el valor crítico hallado en la tabla, se puede rechazar la hipótesis nula.

***Ejemplo 2 propuesto por La Cruz (2016)***

*Se llevó a cabo un experimento con dos grupos, al primer grupo se le presentó un corto de 11 minutos sobre discapacidad; un segundo grupo, no presencié el corto. Para medir sus actitudes se les aplicó un diferencial semántico. Los datos son:*

<i>Grupo 1</i>	4	10	6	1	5	3	6	7	17	-
<i>Grupo 2</i>	9	11	7	2	13	12	16	15	19	18

*Para este caso, la hipótesis nula es: No existen diferencias significativas entre las actitudes del grupo 1 y del grupo2.*

*Para hallar los valores  $R_1$  y  $R_2$  correspondientes se realiza la siguiente tabla.*

<i>Grupo 1</i>	<i>Posición</i>	<i>Grupo 2</i>	<i>Posición</i>
4	4	9	10
10	11	11	12
6	6,5	7	8,5
1	1	2	2
5	5	13	14
3	3	12	13
6	6,5	16	16
7	8,5	15	15
17	17	19	19
		18	18

*A partir de estos datos, se obtienen los valores  $n_1 = 9$  y  $n_2 = 10$ ,  $R_1 = 62,5$  y  $R_2 = 127,5$ . Luego, reemplazando para hallar los valores  $U$ , se obtienen  $U_1 = 72,5$  y  $U_2 = 17,5$ . Como se indicó anteriormente se toma el valor de  $U$  más bajo, que para este caso es  $U_2 = 17,5$  y se compara con el valor correspondiente a  $n_1 = 9$  y  $n_2 = 10$  en*

la tabla de valores críticos, para una prueba de dos colas con valor de significación 0,05.

$n_1 \backslash n_2$	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0		0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2		3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4		6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7		9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10		13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12		16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15		19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	18		23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20		26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23		30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26		33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28		37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31		40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34		44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37		47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39		51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42		55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45		58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48		62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

Imagen 6: Tabla de valores críticos 0.05, tomada de La Cruz (2016)

El valor que presenta la tabla al relacionar  $n_1$  y  $n_2$  es 20, recordando que la hipótesis nula se rechaza si el valor  $U$  tomado, es menor o igual al presentado en la tabla, es decir si es menor o igual a 20. Como se tiene  $U_2 = 17,5$  entonces la hipótesis nula se rechaza.

### Coefficiente de correlación

En palabras de Linder (2017) el coeficiente  $r$  presenta la correlación entre dos grupos de datos diferentes, a partir de los cuales se registran dos cualidades diferentes para cada unidad en pares. El coeficiente de correlación para  $n$  pares  $(s_1, y_1), \dots, (s_n, y_n)$  se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Para  $-1 \leq r \leq 1$ . Si  $r$  está cerca de cero, se asume que hay poca correlación entre los datos, denominada correlación débil cuando  $-0,8 \leq r \leq -0,5$  o  $0,8 \geq r \geq 0,5$ , y correlación fuerte si  $-0,8 \geq r \geq -1$  o  $1 \geq r \geq 0,8$ , es decir, cuando  $r$  se acerca a los valores exteriores. Para poder utilizar este coeficiente de correlación se utilizará la prueba normal bivariada para

afirmar que los datos tienen una distribución normal. En este caso la hipótesis nula consiste en afirmar que los conjuntos de datos no tienen una distribución normal, luego se debe rechazar la hipótesis nula obteniendo un valor  $p$  más grande que el valor de significancia del 5%.

## **ANÁLISIS Y TRATAMIENTO DE DATOS**

### **METODOLOGÍA**

Para este trabajo inicialmente se observaron los partidos de la fase de cuartos de final, hasta la final, tanto de la Copa Conmebol Libertadores en su edición 2018 y de la *UEFA Champions League* en su edición 2018/2019, los cuales se tomaron de la página FOOTBALLIA.NET. De estos partidos se recolectaron datos correspondientes a los pases realizados entre los jugadores del River Plate y los jugadores del Liverpool F. C., respectivamente.

En este apartado se presentará el paso a paso de la recolección de datos, así como el análisis respectivo a partir de Teoría de Grafos para elegir los jugadores más participativos, y cadenas de Markov para hallar el vector de centralidad, que determina el jugador más influyente en un partido.

### **RECOLECCIÓN DE DATOS**

Los datos recolectados corresponden a la cantidad de pases realizados entre los jugadores de River Plate en las fases de cuartos de final, semifinal y final de la Copa Conmebol Libertadores en su edición 2018, así como los pases que se realizaron entre los jugadores del Liverpool F. C. en las fases de cuartos de final, semifinal y final de la *UEFA Champions League* en su edición 2018/2019. Los pases que se tuvieron en cuenta para este trabajo fueron los pases completos (pase que tiene un emisor y receptor del mismo equipo) efectuados con el pie.

Se contaron los pases de los partidos que enfrentaron a River Plate vs. Independiente (ida y vuelta) correspondientes a los cuartos de final, River Plate vs. Gremio (ida y vuelta) correspondientes a las semifinales y River Plate vs. Boca Juniors (ida y vuelta) correspondientes a la final de la Copa Conmebol Libertadores 2018. De la misma manera se

contaron los pases de los partidos que enfrentaron a Liverpool vs. Porto (ida y vuelta) correspondientes a los cuartos de final, Liverpool vs. Barcelona (ida y vuelta) correspondientes a las semifinales y Liverpool vs. Tottenham (partido único) correspondiente a la final de la *UEFA Champions League* 2018/2019. Cabe aclarar que, para efectos de tener una fiabilidad en el conteo, cada partido fue visto dos veces, llegando a tener diferencias entre cada conteo de máximo 5 pases.

Los pases fueron consignados en una matriz de doble entrada, en la primera columna se ubicaron los 13 o 14 jugadores emisores de pases y en la primera fila se ubicaron los 13 o 14 jugadores receptores de los pases, la celda que cruza tanto los pases hechos como los pases recibidos (celda resaltada en verde en la Tabla 4) corresponde al total de pases realizados en el partido. Cabe aclarar que para la recolección de datos se tuvo en cuenta la participación de los futbolistas titulares y suplentes, independiente de la cantidad de minutos que participaron del juego.

A continuación, se presentan las matrices de recolección de pases para cada uno de los partidos.



### Registro de pases River Plate

	(1)Armani	(20)Casco	(22)Pinola	(2)Maidana	(29)Montiel	(23)Ponzio	(15)E.Palacios	(8)Juanfer	(10)Pity Martinez	(27)Pratto	(19)Borré	(18)Mayada	(7)Mora	(30)Scocco	Pases hechos (H)
(1)Armani	0	0	4	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	7
(20)Casco	0	0	1	0	0	2	4	1	5	2	2	0	1	0	18
(22)Pinola	2	2	0	3	0	2	0	0	3	2	2	0	0	0	16
(2)Maidana	1	0	1	0	2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	8
(29)Montiel	0	0	0	0	0	3	4	2	2	1	2	1	1	1	17
(23)Ponzio	0	3	2	1	1	0	3	2	2	3	1	1	0	0	19
(15)E.Palacios	0	4	0	1	4	0	0	3	4	1	2	1	1	1	22
(8)Juanfer	0	2	0	0	3	3	3	0	1	5	1	0	0	0	18
(10)Pity Martinez	0	5	1	0	0	0	1	3	0	3	2	1	1	0	17
(27)Pratto	0	0	0	0	2	0	1	4	1	0	3	0	0	0	11
(19)Borré	0	1	0	0	0	3	3	4	3	0	0	1	2	0	17
(18)Mayada	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
(7)Mora	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	1	1	0	0	5
(30)Scocco	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>3</b>	<b>17</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	<b>14</b>	<b>16</b>	<b>20</b>	<b>19</b>	<b>21</b>	<b>20</b>	<b>17</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>2</b>	<b>178</b>

Tabla 4: Registro de pases de River Plate en el partido Independiente vs. River Plate

	(1)Armani	(2)Maidana	(22)Pinola	(20)Casco	(29)Montiel	(26)Nacho F	(23)Ponzio	(15)E.Palacios	(30)Scocco	(19)Borré	(27)Pratto	(8)Juanfer	(5)Zuculini	(11)De La Cruz	Pases hechos (H)
(1)Armani	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6
(2)Maidana	0	0	3	2	1	1	3	0	0	3	2	0	0	0	15
(22)Pinola	0	4	0	0	0	0	0	4	3	0	1	0	0	0	12
(20)Casco	1	2	3	0	0	1	3	7	4	6	1	1	0	0	29
(29)Montiel	1	3	0	0	0	5	3	0	2	4	3	0	0	3	24
(26)Nacho F	0	0	1	0	6	0	1	2	3	3	1	0	0	0	17
(23)Ponzio	1	2	2	3	2	5	0	3	1	1	1	1	1	0	23
(15)E.Palacios	0	0	1	9	0	4	0	0	3	4	1	2	0	1	25
(30)Scocco	0	0	1	1	0	3	2	3	0	6	0	0	0	0	16
(19)Borré	0	0	0	5	3	3	1	7	5	0	2	2	0	1	29
(27)Pratto	0	0	0	1	1	2	1	1	4	2	0	0	0	0	12
(8)Juanfer	0	0	0	1	1	1	0	0	1	2	0	0	2	0	8
(5)Zuculini	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
(11)De La Cruz	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2	0	1	1	0	6
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>3</b>	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>22</b>	<b>15</b>	<b>25</b>	<b>15</b>	<b>27</b>	<b>26</b>	<b>34</b>	<b>13</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>224</b>

Tabla 5: Registro de pases de River Plate en el partido River Plate vs. Independiente

	(1)Armani	(2)Maidana	(22)Pinola	(20)Casco	(29)Montiel	(23)Ponzio	(15)E.Palacios	(8)Juanfer	(10) Pity Martinez	(19)Borré	(30)Scocco	(27)Pratto	(26)Nacho F	(24)Enzo Pérez	Pases hechos (H)
(1)Armani	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5
(2)Maidana	2	0	3	0	4	7	1	6	0	2	0	0	2	1	28
(22)Pinola	2	5	0	10	0	6	5	1	5	2	0	0	1	3	40
(20)Casco	0	1	4	0	0	3	5	4	8	1	1	1	2	0	30
(29)Montiel	2	1	1	0	0	1	2	7	0	1	1	0	2	2	20
(23)Ponzio	2	1	9	3	3	0	7	12	2	1	1	1	3	0	45
(15)E.Palacios	0	2	2	3	1	6	0	6	5	2	1	1	0	0	29
(8)Juanfer	0	3	0	5	5	6	5	0	5	4	3	2	4	3	45
(10) Pity Martinez	0	0	2	6	1	3	1	3	0	3	0	1	1	1	22
(19)Borré	0	0	0	1	0	0	1	2	2	0	2	0	1	0	9
(30)Scocco	0	0	0	2	1	1	0	1	0	2	0	0	0	0	7
(27)Pratto	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	5
(26)Nacho F	0	1	0	3	3	3	0	4	2	0	0	1	0	1	18
(24)Enzo Pérez	0	2	0	2	0	0	0	2	1	0	0	0	6	0	13
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>8</b>	<b>17</b>	<b>26</b>	<b>35</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>27</b>	<b>49</b>	<b>31</b>	<b>18</b>	<b>10</b>	<b>7</b>	<b>23</b>	<b>11</b>	<b>316</b>

Tabla 6: Registro de pases de River Plate en el partido River Plate vs. Gremio

	(1)Armani	(2)Maidana	(22)Pinola	(20)Casco	(29)Montiel	(23)Ponzio	(15)E.Palacios	(26)Nacho F	(8)Juanfer	(19)Borré	(27)Pratto	(24)Enzo Pérez	(10) Pity Martinez	(30)Scocco	pases Hechos (H)
(1)Armani	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
(2)Maidana	0	0	6	1	2	2	6	2	7	0	1	5	0	0	32
(22)Pinola	3	6	0	5	0	2	10	4	2	1	0	7	1	1	42
(20)Casco	0	1	4	0	0	3	3	1	0	1	0	4	1	0	18
(29)Montiel	0	0	0	1	0	1	0	3	1	2	1	0	0	0	9
(23)Ponzio	1	2	2	3	1	0	2	2	3	1	0	0	0	0	17
(15)E.Palacios	0	2	2	7	4	2	0	7	6	3	5	5	3	1	47
(26)Nacho F	0	1	3	0	5	1	0	0	7	5	3	1	0	0	26
(8)Juanfer	0	2	4	0	6	0	6	8	0	5	1	5	0	0	37
(19)Borré	0	0	1	0	1	1	4	2	2	0	2	1	0	0	14
(27)Pratto	0	0	2	2	1	1	3	3	2	0	0	0	1	0	15
(24)Enzo Pérez	0	6	4	0	0	0	7	5	6	0	1	0	2	1	32
(10) Pity Martinez	0	0	0	2	0	0	2	0	0	1	1	1	0	2	9
(30)Scocco	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>4</b>	<b>22</b>	<b>30</b>	<b>21</b>	<b>20</b>	<b>13</b>	<b>44</b>	<b>37</b>	<b>36</b>	<b>19</b>	<b>15</b>	<b>29</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	<b>304</b>

Tabla 7: Registro de pases de River Plate en el partido Gremio vs. River Plate

	(1)Armani	(2)Maidana	(28)Martinez Q	(22)Pinola	(24)Enzo Pérez	(15)E.Palacios	(29)Montiel	(20)Casco	(10) Pity Martinez	(19)Borré	(27)Pratto	(26)Nacho F	(5)Zuculini	(8)Juanfer	Pases hechos (H)
(1)Armani	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	4
(2)Maidana	0	0	5	5	1	0	0	0	1	2	1	1	0	0	16
(28)Martinez Q	0	4	0	3	1	8	4	2	0	1	1	0	0	0	24
(22)Pinola	0	3	2	0	3	4	1	5	3	1	3	1	1	0	27
(24)Enzo Pérez	0	0	1	4	0	5	1	1	5	1	1	1	0	0	20
(15)E.Palacios	0	0	3	1	5	0	5	7	3	6	1	0	0	0	31
(29)Montiel	0	0	3	0	0	2	0	1	2	4	1	1	0	0	14
(20)Casco	0	0	0	2	0	1	0	0	1	1	4	0	1	1	11
(10) Pity Martinez	0	0	3	1	2	1	1	1	0	3	3	0	0	0	15
(19)Borré	0	0	0	0	1	5	2	2	3	0	2	2	1	0	18
(27)Pratto	0	0	0	0	0	1	2	1	1	4	0	1	0	0	10
(26)Nacho F	1	0	0	0	0	1	3	0	1	0	1	0	0	1	8
(5)Zuculini	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
(8)Juanfer	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	2		0	5
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>17</b>	<b>17</b>	<b>13</b>	<b>30</b>	<b>20</b>	<b>20</b>	<b>20</b>	<b>24</b>	<b>20</b>	<b>9</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>204</b>

Tabla 8: Registro de pases de River Plate en el partido Boca Juniors vs. River Plate

	(1)Armani	(2)Maidana	(22)Pinola	(20)Casco	(29)Montiel	(23)Ponzio	(24)Enzo Pérez	(15)E.Palacios	(26)Nacho F	(10) Pity Martinez	(27)Pratto	(8)Juanfer	(18)Mayada	Pases hechos (H)
(1)Armani	0	2	3	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	8
(2)Maidana	2	0	11	0	1	2	13	1	6	2	1	1	0	40
(22)Pinola	1	7	0	8	0	12	18	8	0	4	2	2	0	62
(20)Casco	0	2	9	0	0	3	2	6	0	11	0	1	0	34
(29)Montiel	1	1	0	0	0	3	4	1	4	1	1	6	0	22
(23)Ponzio	1	3	2	6	1	0	8	4	3	2	1	0	0	31
(24)Enzo Pérez	1	10	13	6	6	1	0	8	12	5	1	5	2	70
(15)E.Palacios	0	3	4	8	4	3	8	0	8	3	1	2	0	44
(26)Nacho F	0	2	1	1	5	1	7	4	0	2	5	5	1	34
(10) Pity Martinez	0	1	2	3	1	0	1	5	8	0	0	0	0	21
(27)Pratto	0	0	0	0	2	0	2	1	4	0	0	0	0	9
(8)Juanfer	1	0	0	2	2	0	6	1	5	0	1	0	3	21
(18)Mayada	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	3
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>7</b>	<b>31</b>	<b>45</b>	<b>34</b>	<b>23</b>	<b>26</b>	<b>69</b>	<b>39</b>	<b>51</b>	<b>30</b>	<b>14</b>	<b>24</b>	<b>6</b>	<b>399</b>

Tabla 9: Registro de pases de River Plate en el partido River Plate vs. Boca Juniors

## Registro de Pases Liverpool

	(13)Becker	(6)Lovren	(4)Van Dijk	(7)Milner	(66)Arnold	(3)Fabinho	(8)Keita	(14)Henderson	(10)Mané	(9)Firmino	(11)Salah	(15)Sturridge	(27)Origi	Pases hechos (H)
(13)Becker	0	8	6	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	18
(6)Lovren	3	0	18	2	20	10	3	8	0	1	4	0	0	69
(4)Van Dijk	3	23	0	20	5	17	13	8	0	0	2	0	1	92
(7)Milner	0	0	14	0	2	9	13	0	7	5	1	0	5	56
(66)Arnold	3	15	3	4	0	2	2	9	1	1	9	0	0	49
(3)Fabinho	3	11	13	10	7	0	11	4	1	4	9	1	0	74
(8)Keita	0	3	12	12	1	8	0	9	5	3	3	0	0	56
(14)Henderson	0	5	3	3	12	7	2	0	1	6	7	0	0	46
(10)Mané	0	0	0	1	0	0	5	1	0	3	1	0	0	11
(9)Firmino	0	0	2	1	1	1	4	2	2	0	4	0	0	17
(11)Salah	0	0	0	0	7	2	0	12	2	2	0	0	0	25
(15)Sturridge	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
(27)Origi	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>12</b>	<b>65</b>	<b>71</b>	<b>57</b>	<b>58</b>	<b>56</b>	<b>53</b>	<b>54</b>	<b>19</b>	<b>25</b>	<b>40</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>517</b>

Tabla 10: Registro de pases de Liverpool en el partido Liverpool vs. Porto

	(13)Becker	(32)Matip	(4)Van Dijk	(26)Robertson	(66)Arnold	(3)Fabinho	(5)Wijnaldum	(7)Milner	(27)Origi	(10)Mané	(11)Salah	(9)Firmino	(12)Gomez	(14)Henderson	Pases hechos (H)
(13)Becker	0	5	3	2	2	3	4	2	1	0	0	0	2	0	24
(32)Matip	6	0	6	0	5	2	1	1	0	1	1	1	7	0	31
(4)Van Dijk	5	4	0	4	1	3	3	3	1	3	1	2	0	0	30
(26)Robertson	2	1	3	0	1	1	2	6	5	4	4	1	0	0	30
(66)Arnold	0	3	0	2	0	1	3	3	0	1	3	0	0	0	16
(3)Fabinho	2	1	1	4	1	0	1	1	2	0	1	0	1	2	17
(5)Wijnaldum	4	4	2	0	4	1	0	1	0	1	8	2	2	2	31
(7)Milner	1	2	2	5	4	2	2	0	0	1	1	8	0	1	29
(27)Origi	0	0	0	3	0	2	1	3	0	0	0	0	0	0	9
(10)Mané	0	0	1	2	1	2	2	3	1	0	1	1	0	1	15
(11)Salah	0	0	2	1	0	0	5	2		1	0	2	3	2	18
(9)Firmino	0	0	2	1	1	0	2	4	1	4	3	0	0	2	20
(12)Gomez	2	2	0	0	0	2	5	0	0	2	1	1	0	5	20
(14)Henderson	0	0	1	0	0	0	1	3	0	2	5	2	2	0	16
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>22</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>20</b>	<b>19</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>11</b>	<b>20</b>	<b>29</b>	<b>20</b>	<b>17</b>	<b>15</b>	<b>291</b>

Tabla 11: Registro de pases de Liverpool en el partido Porto vs. Liverpool

	(13)Becker	(26)Robertson	(4)Van Dijk	(32)Matip	(12)Gomez	(8)Keita	(3)Fabinho	(7)Milner	(5)Wijnaldum	(10)Mané	(11)Salah	(9)Firmino	(14)Henderson	(27)Origi	Pases hechos (H)
(13)Becker	0	4	9	8	4	2	2	3	0	0	0	0	0	0	32
(26)Robertson	3	0	7	1	1	3	5	14	4	7	1	0	4	2	52
(4)Van Dijk	4	9	0	5	4	3	5	4	0	1	2	0	1	2	40
(32)Matip	8	1	5	0	8	3	7	6	2	2	2	0	7	0	51
(12)Gomez	2	0	1	6	0	1	10	3	1	5	7	1	8	0	45
(8)Keita	1	5	1	1	0	0	2	3	3	0	1	0	0	0	17
(3)Fabinho	1	7	5	4	14	1	0	7	2	2	6	1	1	0	51
(7)Milner	1	16	3	6	5	0	2	0	5	5	5	0	2	0	50
(5)Wijnaldum	0	2	0	0	1	0	3	3	0	5	4	0	2	0	20
(10)Mané	0	4	0	0	1	1	3	4	0	0	1	0	1	0	15
(11)Salah	0	2	0	0	4	1	5	2	4	2	0	0	2	0	22
(9)Firmino	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
(14)Henderson	0	2	0	2	5	0	2	3	2	3	8	0	0	0	27
(27)Origi	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
<b>Pases recibidos (R)</b>	<b>20</b>	<b>56</b>	<b>31</b>	<b>35</b>	<b>47</b>	<b>15</b>	<b>47</b>	<b>52</b>	<b>23</b>	<b>32</b>	<b>37</b>	<b>3</b>	<b>28</b>	<b>4</b>	<b>430</b>

Tabla 12: Registro de pases de Liverpool en el partido Barcelona vs. Liverpool

	(13)Becker	(26)Robertson	(4)Van Dijk	(32)Matip	(66)Arnold	(7)Milner	(3)Fabinho	(14)Henderson	(27)Origi	(10)Mané	(23)Shaqiri	(5)Wijnaldum	(12)Gomez	(15)Sturridge	Pases hechos (H)
(13)Becker	0	2	4	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	12
(26)Robertson	0	0	3	1	0	10	1	1	1	2	2	0	0	0	21
(4)Van Dijk	2	6	0	7	2	6	4	3	1	3	1	1	0	0	36
(32)Matip	1	0	5	0	12	3	4	8	1	1	2	0	0	0	37
(66)Arnold	0	0	1	1	0	3	6	7	3	1	8	2	0	0	32
(7)Milner	3	5	3	0	1	0	7	0	4	8	4	8	0	0	43
(3)Fabinho	1	6	7	1	4	7	0	3	2	5	5	2	0	0	43
(14)Henderson	2	1	0	5	4	2	3	0	4	4	5	0	0	0	30
(27)Origi	0	0	1	0	1	0	0	3	0	1	4	1	0	0	11
(10)Mané	1	1	0	0	2	5	3	2	1	0	2	0	0	0	17
(23)Shaqiri	0	2	0	4	11	1	4	5	1	1	0	2	0	0	31
(5)Wijnaldum	0	0	3	0	0	3	2	1	2	5	1	0	0	0	17
(12)Gomez	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(15)Sturridge	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>pases realizados (R)</b>	<b>10</b>	<b>23</b>	<b>27</b>	<b>23</b>	<b>38</b>	<b>41</b>	<b>34</b>	<b>33</b>	<b>20</b>	<b>31</b>	<b>34</b>	<b>16</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>330</b>

Tabla 13: Registro de pases de Liverpool en el partido Liverpool vs. Barcelona

	(13)Becker	(26)Robertson	(04)Van Dijk	(32)Matip	(66)Arnold	(5)Wijnaldum	(3)Fabinho	(14)Henderson	(10)Mané	(9)Firmino	(11)Salah	(7)Milner	(12)Gomez	(27)Origi	Pases hechos(H)
(13)Becker	0	1	6	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	12
(26)Robertson	2	0	2	0	1	2	4	1	6	2	1	1	0	1	23
(04)Van Dijk	6	5	0	5	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	23
(32)Matip	1	1	4	0	1	0	1	0	2	1	0	0	0	2	13
(66)Arnold	1	0	0	1	0	1	1	3	2	1	0	0	0	1	11
(5)Wijnaldum	0	2	0	0	1	0	1	1	2	1	3	0	0	0	11
(3)Fabinho	1	5	2	1	1	0	0	2	2	1	1	1	0	1	18
(14)Henderson	0	2	1	2	4	0	2	0	3	0	1	0	0	2	17
(10)Mané	0	8	0	0	2	4	0	1	0	1	2	0	0	0	18
(9)Firmino	0	2	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0	0	7
(11)Salah	0	0	0	0	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	8
(7)Milner	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6
(12)Gomez	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(27)Origi	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	3
Pases recibidos(R)	11	27	17	12	12	9	14	11	22	10	11	4	0	10	170

*Tabla 14: Registro de pases de Liverpool en el partido Tottenham vs. Liverpool*

## ANÁLISIS DE DATOS

A continuación, se expondrá la aplicación de los conceptos matemáticos anteriormente presentados, para el análisis y procesamiento de los datos recolectados. Análisis que permitirá generar las futuras conclusiones de este trabajo.

### Grafos, nivel de participación y elección de jugadores

Para cada partido se programaron, a través de Python (ver código en ANEXO), grafos orientados, para los cuales se tomaron como nodos a los jugadores titulares y suplentes de los equipos (River Plate y Liverpool F. C.); de la misma forma se establecieron los vínculos dirigidos, como los pases realizados entre estos jugadores.

Estos grafos se consideran grafos ponderados de forma equitativa, de tal manera que cada pase realizado tiene la misma importancia independientemente del receptor de dicho pase; la ponderación de cada pase realizado está dada por el cociente entre 1 y la cantidad de pases (vínculos) que realiza el jugador (nodo de salida) correspondiente.

De la misma manera, a partir de las matrices de pases realizados y recibidos por cada jugador para cada partido (Tabla 4 a Tabla 14), en el software GeoGebra se realizaron diferentes representaciones (Imagen 7 a Imagen 17) donde se presenta de manera más clara la participación de los jugadores en los partidos. Para esto, se estableció una ponderación,

teniendo en cuenta la cantidad de pases realizados y recibidos por jugador y su relación respecto a la totalidad de pases realizados a lo largo del juego (Tabla 4 a Tabla 14), determinando así una serie de circunferencias cuyo radio es proporcional a la ponderación ya mencionada. A continuación, se presentarán las ponderaciones que determinaron el radio de cada una de las circunferencias, los jugadores resaltados en rojo fueron los que se descartaron para continuar con el análisis. Los datos correspondientes a la columna llamada “R+H” es la suma de los pases realizados con los pases recibidos por cada jugador, los datos correspondientes a la columna “(R+H)/T” es el dato anterior dividido entre la sumatoria de pases que se realizaron durante el partido por todo el equipo.

### Registro de pases River Plate

Jugador	R+H	(R+H) / T
(1)Armani	10	0.08
(20)Casco	35	0.2
(22)Pinola	25	0.14
(2)Maidana	14	0.08
(29)Montiel	31	0.17
(23)Ponzio	35	0.2
(15)E.Palacios	42	0.24
(8)Juanfer	37	0.21
(10)Pity Marti...	38	0.21
(27)Pratto	31	0.17
(19)Borré	34	0.19
(18)Mayada	7	0.04
(7)Mora	13	0.07
(30)Scocco	4	0.02

Tabla 15: Ponderación de River Plate en el partido Independiente vs River Plate.

Jugador	R+H	(R+H) / T
(1)Armani	9	0.04
(2)Maidana	29	0.13
(22)Pinola	25	0.11
(20)Casco	51	0.23
(29)Montiel	39	0.17
(26)Nacho F	42	0.19
(23)Ponzio	38	0.17
(15)E.Palacios	52	0.23
(30)Scocco	42	0.19
(19)Borré	63	0.28
(27)Pratto	25	0.11
(8)Juanfer	16	0.07
(5)Zucullini	6	0.03
(11)De La Cruz	11	0.05

Tabla 16: Ponderación de River Plate en el partido River Plate vs Independiente.



Jugador	R+H	(R+H) / T
(1)Armani	13	0.04
(2)Maidana	45	0.14
(22)Pinola	66	0.21
(20)Casco	65	0.21
(29)Montiel	38	0.12
(23)Ponzio	81	0.26
(15)E.Palacios	56	0.18
(8)Juanfer	94	0.3
(10) Pity Marti...	53	0.17
(19)Borré	27	0.09
(30)Scocco	17	0.05
(27)Pratto	12	0.04
(26)Nacho F	41	0.13
(24)Enzo Pérez	24	0.08

Tabla 17: Ponderación de River Plate en el partido River Plate vs Gremio.

Jugador	R+H	(R+H) / T
(1)Armani	8	0.03
(2)Maidana	54	0.18
(22)Pinola	72	0.24
(20)Casco	39	0.13
(29)Montiel	29	0.1
(23)Ponzio	30	0.1
(15)E.Palacios	91	0.3
(26)Nacho F	63	0.21
(8)Juanfer	73	0.24
(19)Borré	33	0.11
(27)Pratto	30	0.1
(24)Enzo Pérez	61	0.2
(10) Pity Martinez	18	0.06
(30)Scocco	7	0.02

Tabla 18: Ponderación de River Plate en el partido Gremio vs River Plate.

Jugador	R+H	(R+H) / T
(1)Armani	5	0.02
(2)Maidana	24	0.12
(28)Martinez Q	41	0.2
(22)Pinola	44	0.22
(24)Enzo Pérez	33	0.16
(15)E.Palacios	61	0.3
(29)Montiel	34	0.17
(20)Casco	31	0.15
(10) Pity Marti...	35	0.17
(19)Borré	42	0.21
(27)Pratto	30	0.15
(26)Nacho F	17	0.08
(5)Zuculini	4	0.02
(8)Juanfer	7	0.03

Tabla 19: Ponderación de River Plate en el partido Boca vs River Plate.

Jugador	R+H	(R+H) / T
(1)Armani	15	0.04
(2)Maidana	71	0.18
(22)Pinola	107	0.27
(20)Casco	68	0.17
(29)Montiel	45	0.11
(23)Ponzio	57	0.14
(24)Enzo Pérez	139	0.35
(15)E.Palacios	83	0.21
(26)Nacho F	85	0.21
(10)Pity Marti...	51	0.13
(27)Pratto	23	0.06
(8)Juanfer	45	0.11
(18)Mayada	9	0.02

Tabla 20: Ponderación de River Plate en el partido River Plate vs Boca.

### Registro de pases Liverpool

Jugador	R+H	(R+H) / T
(13)Becker	30	0.06
(6)Lovren	134	0.26
(4)Van Dijk	163	0.32
(7)Milner	113	0.22
(66)Arnold	107	0.21
(3)Fabinho	130	0.25
(8)Keita	109	0.21
(14)Henderson	100	0.19
(10)Mané	30	0.06
(9)Firmino	42	0.08
(11)Salah	65	0.13
(15)Sturridge	2	0
(27)Origi	9	0.02

Tabla 21: Ponderación de Liverpool en el partido Liverpool vs Porto.

Jugador	R+H	(R+H) / T
(13)Becker	46	0.16
(32)Matip	53	0.18
(4)Van dijk	53	0.18
(26)Robertson	54	0.19
(66)Arnold	36	0.12
(3)Fabinho	36	0.12
(5)Wijnaldum	63	0.22
(7)Milner	61	0.21
(27)Origi	20	0.07
(10)Mané	35	0.12
(11)Salah	47	0.16
(9)Firmino	40	0.14
(12)Gomez	37	0.13
(14)Henderson	31	0.11

Tabla 22: Ponderación de Liverpool en el partido Porto vs Liverpool.

Jugador	R+H	(R+H) / T
(13)Becker	72	0.17
(26)Robertson	96	0.22
(4)Van Dijk	82	0.19
(32)Matip	80	0.19
(12)Gomez	64	0.15
(8)Keita	66	0.15
(3)Fabinho	97	0.23
(7)Milner	72	0.17
(5)Wijnaldum	38	0.09
(10)Mané	54	0.13
(11)Salah	40	0.09
(9)Firmino	30	0.07
(14)Henderson	33	0.08
(27)Origi	9	0.02

Tabla 23: Ponderación de Liverpool en el partido Barcelona vs Liverpool.

Jugador	R+H	(R+H) / T
(13)Becker	31	0.09
(26)Robertson	59	0.18
(4)Van Dijk	37	0.11
(32)Matip	55	0.17
(66)Arnold	81	0.25
(7)Milner	84	0.25
(3)Fabinho	64	0.19
(14)Henderson	44	0.13
(27)Origi	37	0.11
(10)Mané	62	0.19
(23)Shaqiri	51	0.15
(5)Wijnaldum	16	0.05
(12)Gomez	0	0
(15)Sturridge	0	0

Tabla 24: Ponderación de Liverpool en el partido Liverpool vs Barcelona.

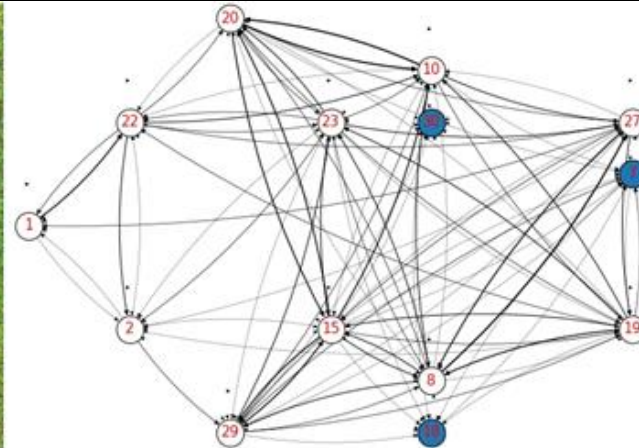
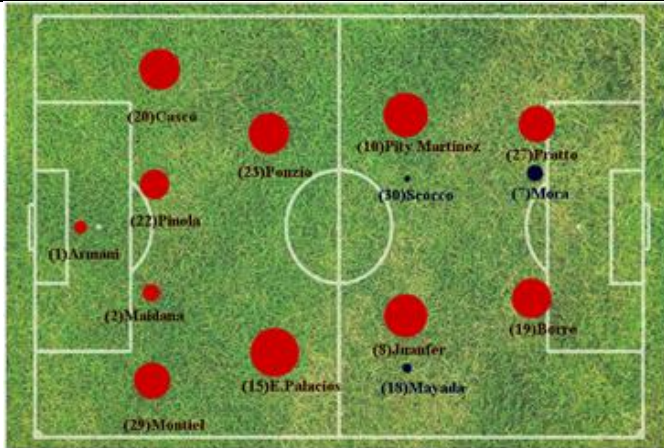
Jugador	R+H	(R+H) / T
(13)Becker	34	0.2
(26)Robertson	50	0.29
(04)Van Dijk	30	0.18
(32)Matip	23	0.14
(66)Arnold	23	0.14
(5)Wijnaldum	27	0.16
(3)Fabinho	31	0.18
(14)Henderson	29	0.17
(10)Mané	29	0.17
(9)Firmino	18	0.11
(11)Salah	17	0.1
(7)Milner	4	0.02
(12)Gomez	3	0.02
(27)Origi	13	0.08

*Tabla 25: Ponderación de Liverpool en el partido Tottenham vs Liverpool.*

La realización de estas representaciones y de los grafos, permite identificar la participación de cada jugador dentro del partido, lo cual posibilita la depuración de aquellos jugadores que no fueron tan influyentes a lo largo del juego, ya que, como afirma Linder (2017, p. 14), “esto hace que los datos sean más fiables, ya que elimina a los jugadores que contribuyen poco al juego”.

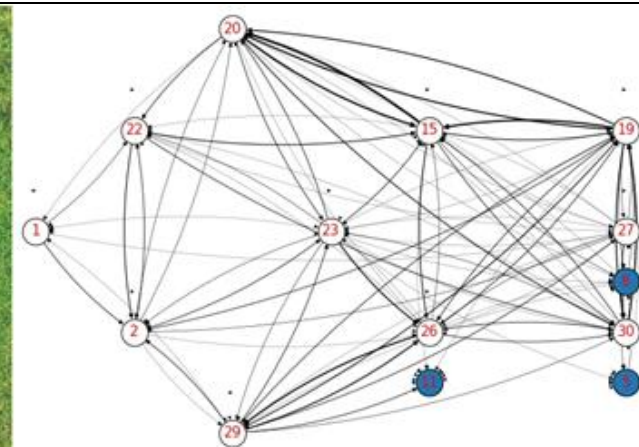
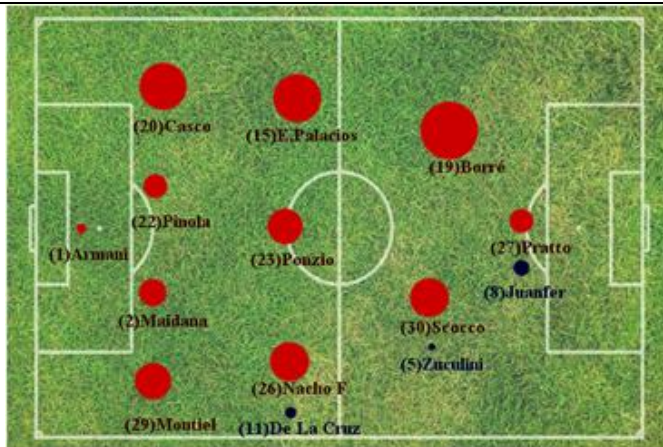
A continuación, se presenta el paralelo entre la participación de los jugadores y la concentración de dicha participación (Imagen 7 a Imagen 17). Es decir, para las representaciones de participación se entiende que, entre mayor impacto de un jugador en el juego, mayor radio tendrá la circunferencia. Así mismo, los grafos muestran la concentración de dicha participación a través de la intensidad de su vínculo, es decir entre más oscuro sea hay mayor flujo de pases. Cabe recalcar, que la posición de los nodos y de las circunferencias están dadas por las alineaciones oficiales de cada partido, partiendo de izquierda a derecha con la ubicación del arquero; igualmente, los nodos y circunferencias azules representan los jugadores suplentes y se ubican justo debajo del jugador por el cual se realizó el cambio. Para el caso de los grafos, el número del nodo corresponde al número asignado a cada jugador que se puede verificar en las gráficas de participación.

**INDEPENDIENTE – RIVER PLATE (0-0)**



*Imagen 7: Participación de los jugadores de River Plate. Independiente – River Plate.*

**RIVER PLATE – INDEPENDIENTE (3-1)**



*Imagen 8: Participación de los jugadores de River Plate. River Plate - Independiente.*

### RIVER PLATE – GREMIO (0-1)

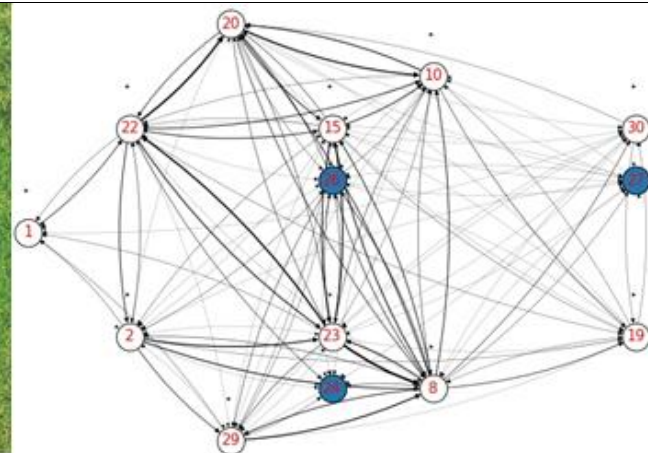
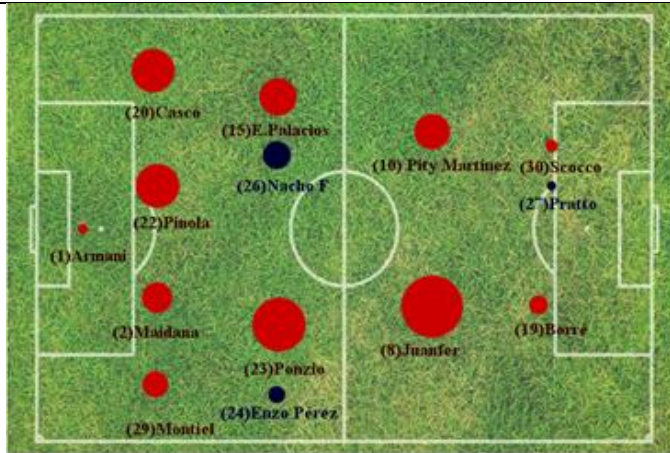


Imagen 9: Participación de los jugadores de River Plate. River Plate - Gremio.

### GREMIO – RIVER PLATE (1-2)

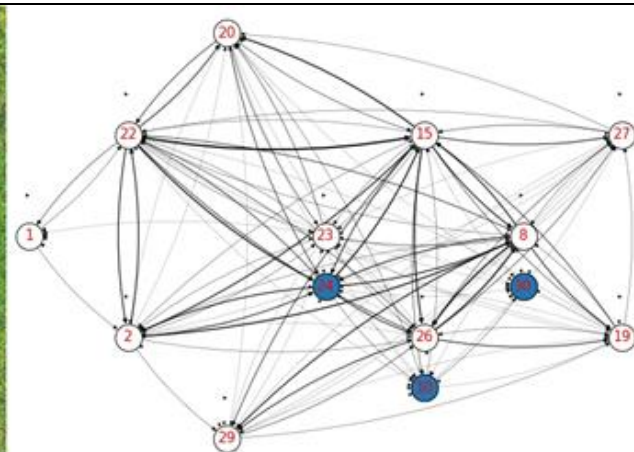


Imagen 10: Participación de los jugadores de River Plate. Gremio - River Plate.

## BOCA – RIVER PLATE (2-2)

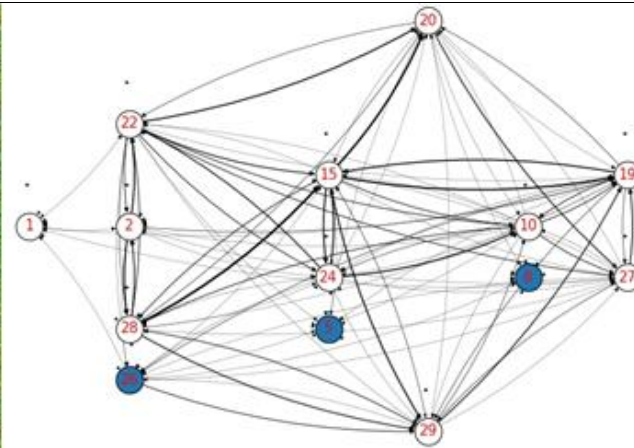
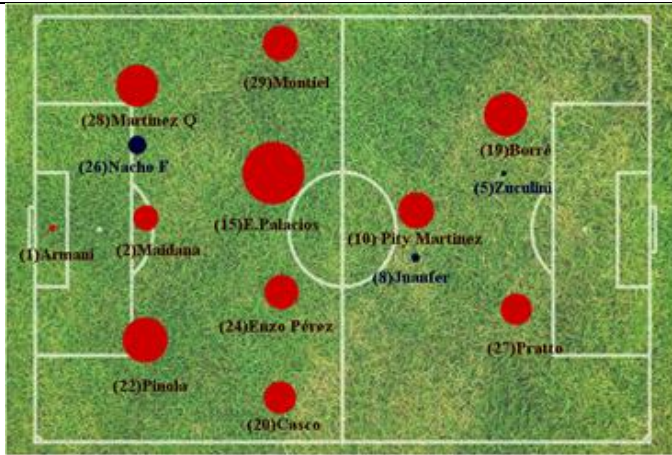


Imagen 11: Participación de los jugadores de River Plate. Boca - River Plate.

## RIVER PLATE – BOCA (1-1) 90'

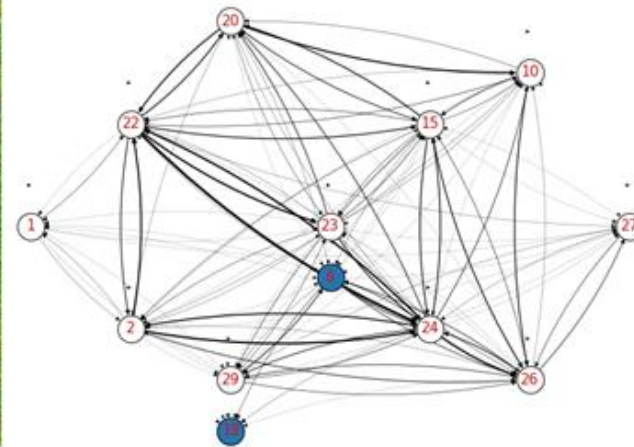
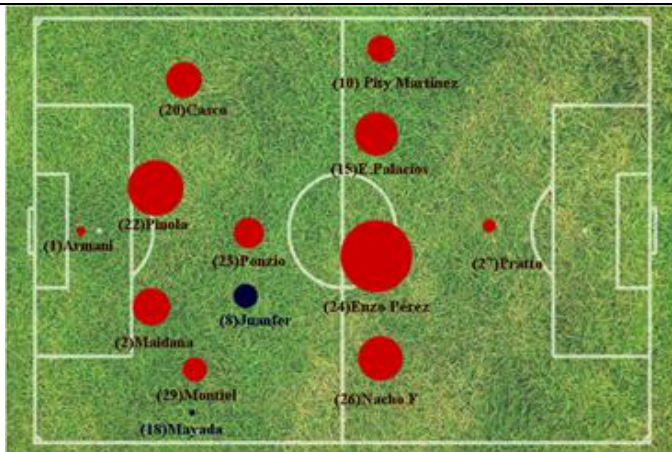


Imagen 12: Participación de los jugadores de River Plate. River Plate - Boca.

### LIVERPOOL – PORTO (2-0)

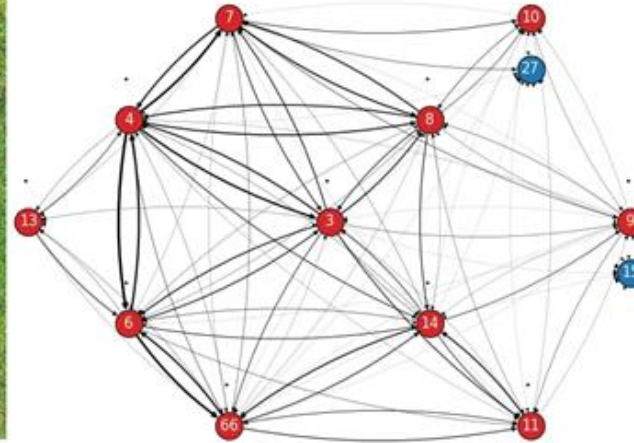
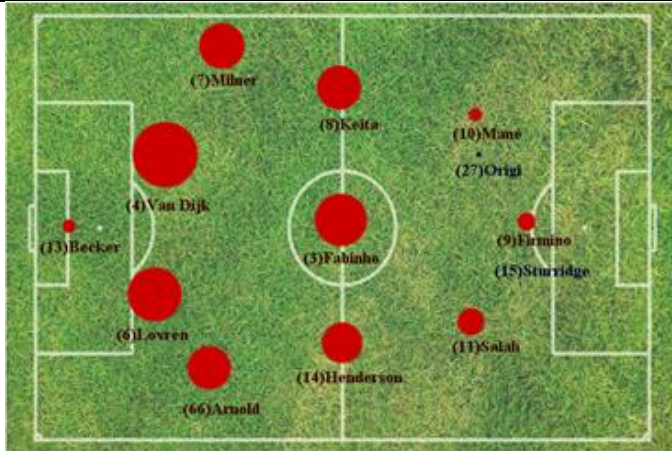


Imagen 13: Participación de los jugadores de Liverpool. Liverpool - Porto.

### PORTO – LIVERPOOL (1-4)

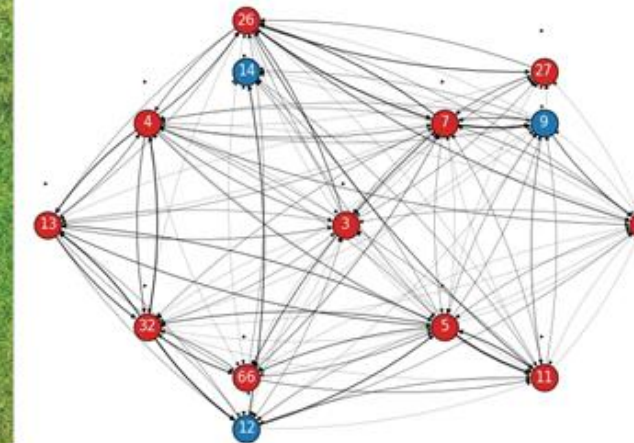


Imagen 14: Participación de los jugadores de Liverpool. Porto - Liverpool.



### BARCELONA – LIVERPOOL (3-0)

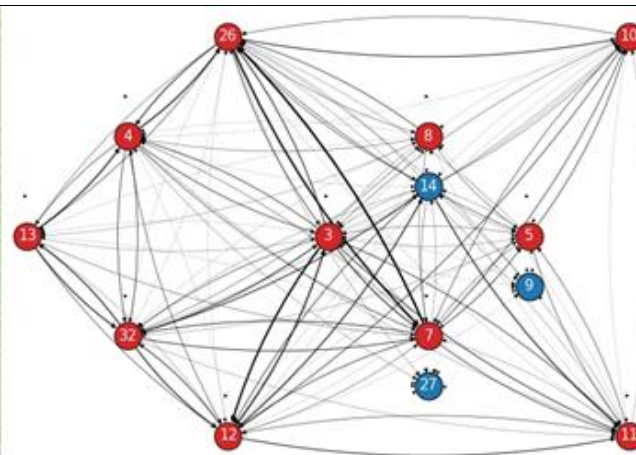
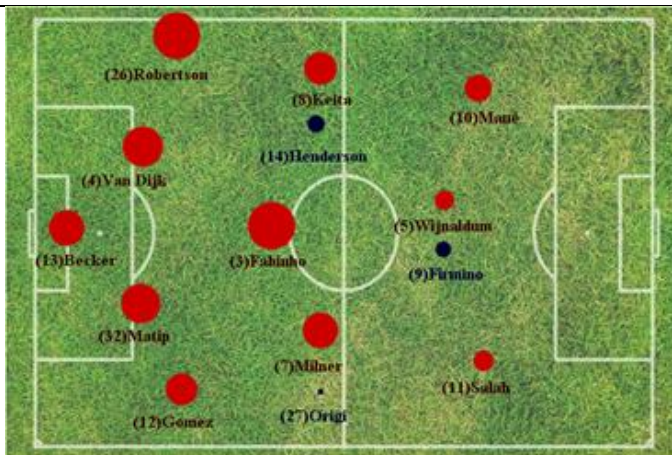


Imagen 15: Participación de los jugadores de Liverpool. Barcelona - Liverpool.

### LIVERPOOL – BARCELONA (4-0)

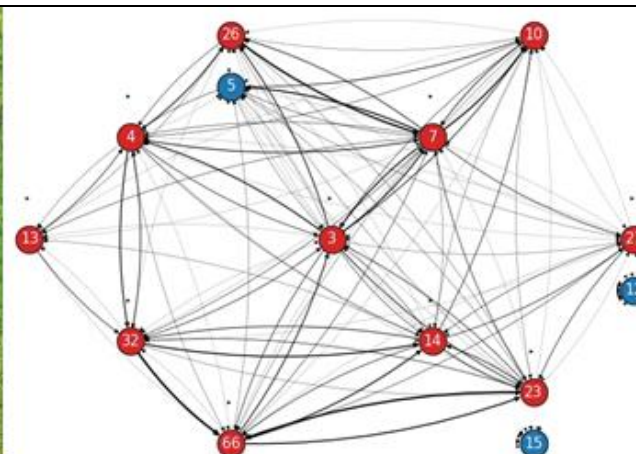
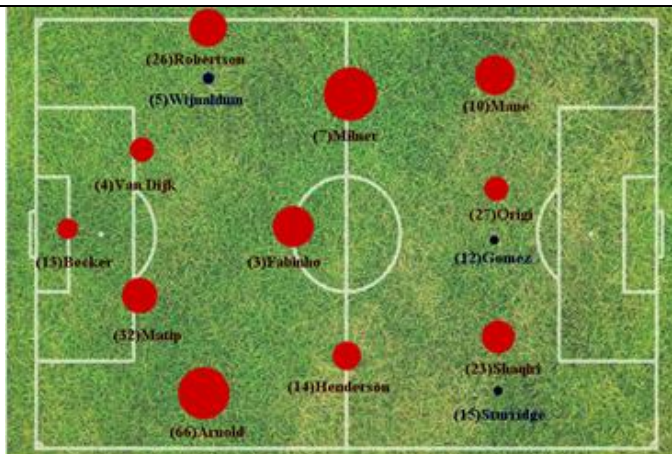
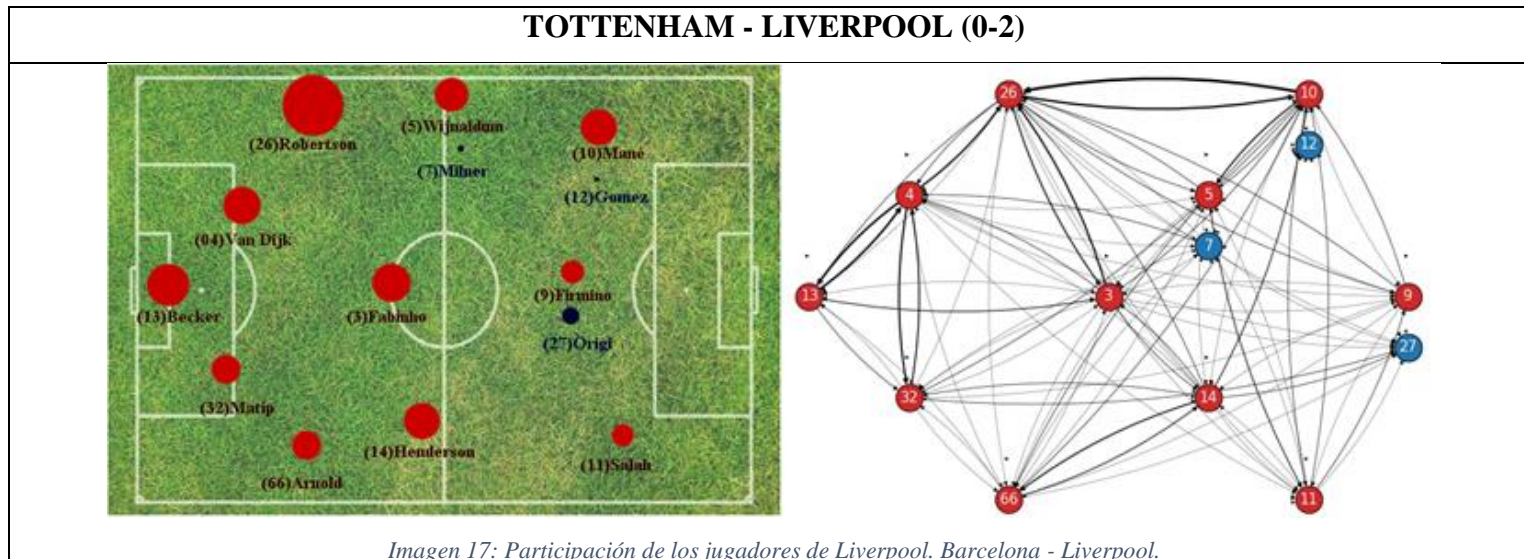


Imagen 16: Participación de los jugadores de Liverpool. Liverpool - Barcelona.



Por ejemplo, para el caso puntual del partido River Plate – Independiente, en la matriz de recolección de pases (Tabla 5) se puede observar que para el jugador (19) Borré, la cantidad de pases recibidos fue 34 y de pases realizados fue 29. Ahora, para realizar la ponderación para la gráfica de participación se tomó la suma de pases recibidos y realizados, en este caso 63 y se dividió entre la cantidad total de pases realizados en el partido, cuyo valor fue 224. El cociente de esta división es 0,28 (se puede verificar en la Tabla 16) el cual se tomó como ponderación para establecer el radio de la circunferencia correspondiente al jugador (19) Borré que se puede verificar en la Imagen 8.

Ahora, para establecer una comparación, en la Imagen 8 se puede observar la circunferencia asociada a (1) Armani cuya ponderación está dada por 0,04 (esto se puede verificar en la Tabla 16) fue el jugador que tuvo menor cantidad de pases recibidos y realizados, por ende, su circunferencia es de menor tamaño respecto a la de (19) Borré. Si bien, la gráfica de participación permite verificar que (19) Borré fue el jugador más participativo durante el juego. A partir, del grafo de la Imagen 8 se puede observar que hubo un mayor flujo de

pases entre los jugadores (20) Casco y (15) E. Palacios, dado que los vínculos que hay entre estos dos nodos, son más oscuros que los otros. Este análisis se puede realizar para cada una de las gráficas y grafos.

Finalmente, después de realizar el análisis de participación de los jugadores se redujo la matriz de pases de 14×14 a una 9×9, eliminando así a los jugadores menos influyentes en cada partido, es decir, los de menor ponderación. Cabe aclarar que el hecho de que un jugador tenga una alta participación en un juego no garantiza una alta participación en el juego siguiente; por esta razón se podrán presentar casos en los cuales un jugador haga parte de una matriz de pases, pero no de otras. A continuación, en la Tabla 26, se presentan los jugadores seleccionados para cada equipo y partido disputado.

<b>IND - RIV.</b>	<b>RIV - IND.</b>	<b>RIV - GRE.</b>	<b>GRE - RIV.</b>	<b>BOC - RIV.</b>	<b>RIV - BOC.</b>
(20) Casco	(2) Maidana	(2) Maidana	(2) Maidana	(28) Martínez	(2) Maidana
(22) Pinola	(20) Casco	(22) Pinola	(22) Pinola	(22) Pinola	(22) Pinola
(29) Montiel	(29) Montiel	(20) Casco	(20) Casco	(24) Pérez	(20) Casco
(23) Ponzio	(26) Nacho	(29) Montiel	(15) Palacios	(15) Palacios	(23) Ponzio
(15) Palacios	(23) Ponzio	(23) Ponzio	(26) Nacho	(29) Montiel	(24) Pérez
(8) Juanfer	(15) Palacios	(15) Palacios	(8) Juanfer	(20) Casco	(15) Palacios
(10) Martínez	(30) Scocco	(8) Juanfer	(19) Borré	(10) Martínez	(26) Nacho
(27) Pratto	(19) Borré	(10) Martínez	(27) Pratto	(19) Borré	(10) Martínez
(19) Borré	(27) Pratto	(26) Nacho	(24) Pérez	(27) Pratto	(8) Juanfer

*Tabla 26: Jugadores más participativos - River Plate*

<b>LIV - POR.</b>	<b>POR - LIV.</b>	<b>BAR - LIV.</b>	<b>LIV - BAR.</b>	<b>TOT - LIV.</b>
(6) Lovren	(13) Becker	(13) Becker	(26) Robertson	(13) Becker
(4) Van Dijk	(32) Matip	(26) Robertson	(32) Matip	(26) Robertson
(7) Milner	(4) Van Dijk	(4) Van Dijk	(66) Arnold	(4) Van Dijk
(66) Arnold	(26) Robertson	(32) Matip	(7) Milner	(32) Matip
(3) Fabinho	(5) Wijnaldum	(12) Gómez	(3) Fabinho	(66) Arnold
(8) Keita	(7) Milner	(8) Keita	(14) Henderson	(5) Wijnaldum
(14) Henderson	(11) Salah	(3) Fabinho	(27) Origi	(3) Fabinho
(9) Firmino	(9) Firmino	(7) Milner	(10) Mané	(14) Henderson
(11) Salah	(12) Gómez	(10) Mané	(23) Shaquiri	(10) Mané

*Tabla 27: Jugadores más participativos - Liverpool F. C.*

### Cadenas de Markov y centralidad de un equipo

Luego de identificar los jugadores más participativos de cada equipo en cada partido y generar la matriz de pases respectiva a cada partido, se generó la matriz de adyacencia a partir de las ponderaciones asignadas a cada vínculo de los grafos presentados en el apartado anterior, recordando que dicha ponderación está dada por el cociente entre 1 y la cantidad de vínculos que salen del nodo de salida, es decir, la cantidad de pases que realiza un jugador.

Por ejemplo, según la Tabla 27 la matriz de recolección de pases asociada a los jugadores más participativos del partido LIV-BAR es la siguiente:

	(26)Robertson	(32)Matip	(66)Arnold	(7)Milner	(3)Fabinho	(14)Henderson	(27)Origi	(10)Mané	(23)Shaquiri	Total
(26)Robertson	0	1	0	10	1	1	1	2	2	18
(32)Matip	0	0	12	3	4	8	1	1	2	31
(66)Arnold	0	1	0	3	6	7	3	1	8	29
(7)Milner	5	0	1	0	7	0	4	8	4	29
(3)Fabinho	6	1	4	7	0	3	2	5	5	33
(14)Henderson	1	5	4	2	3	0	4	4	5	28
(27)Origi	0	0	1	0	0	3	0	1	4	9
(10)Mané	1	0	2	5	3	2	1	0	2	16
(23)Shaquiri	2	4	11	1	4	5	1	1	0	29

Tabla 28: Tabla registro de pases de jugadores más participativos LIV-BAR.

Ahora, para expresar la matriz de adyacencia asociada a este partido, si se toma al jugador (26) Robertson como referencia, la cantidad total de pases que realizó fueron 18, y la ponderación equitativa de cada vinculo (pase) es  $\frac{1}{18}$ . Si se toma como referencia la interacción entre (26) Robertson y (7) Milner, se tendría una ponderación de  $10 \times \frac{1}{18} = \frac{10}{18}$ , donde el 10 representa la cantidad de pases que realizó (26) Robertson a (7) Milner. Este procedimiento se realiza para los nueve jugadores, teniendo entonces la siguiente matriz de adyacencia.

$$L_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{18} & 0 & \frac{10}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{2}{18} & \frac{2}{18} \\ 0 & 0 & \frac{12}{31} & \frac{3}{31} & \frac{4}{31} & \frac{8}{31} & \frac{1}{31} & \frac{1}{31} & \frac{2}{31} \\ 0 & \frac{1}{29} & 0 & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} & \frac{7}{29} & \frac{3}{29} & \frac{1}{29} & \frac{8}{29} \\ \frac{5}{29} & 0 & \frac{1}{29} & 0 & \frac{7}{29} & 0 & \frac{4}{29} & \frac{8}{29} & \frac{4}{29} \\ \frac{6}{33} & \frac{1}{33} & \frac{4}{33} & \frac{7}{33} & 0 & \frac{3}{33} & \frac{2}{33} & \frac{5}{33} & \frac{5}{33} \\ \frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{4}{28} & \frac{2}{28} & \frac{3}{28} & 0 & \frac{4}{28} & \frac{4}{28} & \frac{5}{28} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{3}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{2}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{2}{16} \\ \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & \frac{11}{29} & \frac{1}{29} & \frac{4}{29} & \frac{5}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz 5: Matriz de adyacencia LIV-BAR

Con base en lo mencionado en el apartado de “Marco Teórico Matemático”, donde se indica la directa relación entre las condiciones dadas para una matriz de adyacencia y una matriz de transición, se puede afirmar entonces que la matriz de adyacencia ya generada para cada partido jugado pasa a ser una matriz de transición en la cual se pueden aplicar las cadenas de Markov. Ahora, partiendo de cualquiera de los dos métodos expuestos se halla el vector estacionario para esta matriz de transición, el cual en términos generales indicará cuál es el jugador más central por partido, es decir, el jugador con el mayor valor en el vector estacionario es el de mayor influencia en el juego.

Acto seguido, se encuentra la medida de centralidad  $s$ , valor que indica la variación de los valores del vector estacionario respecto a la media. Es decir, entre más se acerque  $s$  a cero, el juego es menos central, esto es que los pases se distribuyen de manera equitativa; ello permitiría concluir que hay una participación homogénea por parte de los jugadores, llegando así a que el equipo en este partido tuvo un juego “descentral”. Ahora, si por el contrario  $s$  se aleja de cero el juego se considera “central”.

A continuación, se presenta en la siguiente tabla (Tabla 29: Relación matriz de transición-vector estacionario-medida de centralidad para cada partido) el partido, su matriz de transición en la que se toman sólo los jugadores mencionados en la Tabla 26 y la Tabla 27, el vector estacionario correspondiente a dicha matriz y la medida de centralidad correspondiente a dicho vector.

	Matriz de transición	Vector estacionario	Medida de centralidad
<b>I N D - R I V</b>	$R_{IV} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{17} & 0 & \frac{2}{17} & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} & \frac{5}{17} & \frac{2}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{17} & \frac{2}{17} & \frac{1}{17} & 0 & \frac{3}{17} & \frac{2}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ \frac{1}{14} & 0 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_{IV} = \begin{bmatrix} 0,1247 \\ 0,0272 \\ 0,0848 \\ 0,0884 \\ 0,1402 \\ 0,1581 \\ 0,1419 \\ 0,1235 \\ 0,1133 \end{bmatrix}$	$s = 0,0396$
<b>R I V - I N D</b>	$R_I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{7}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ \frac{3}{20} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{5}{18} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ 0 & \frac{9}{21} & 0 & \frac{4}{21} & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \\ 0 & \frac{1}{15} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} & \frac{7}{26} & \frac{5}{26} & 0 & \frac{1}{13} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$	$R_I = \begin{bmatrix} 0,0330 \\ 0,1320 \\ 0,0894 \\ 0,1390 \\ 0,0771 \\ 0,1504 \\ 0,1375 \\ 0,1830 \\ 0,0586 \end{bmatrix}$	$s = 0,0488$
<b>R I V - G R E</b>	$R_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{23} & 0 & \frac{4}{23} & \frac{7}{23} & \frac{1}{23} & \frac{6}{23} & 0 & \frac{2}{23} \\ \frac{5}{33} & 0 & \frac{10}{33} & 0 & \frac{2}{11} & \frac{5}{33} & \frac{1}{33} & \frac{5}{33} & \frac{1}{33} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{27} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} & \frac{2}{27} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{40} & \frac{9}{40} & \frac{3}{40} & \frac{3}{40} & 0 & \frac{7}{40} & \frac{3}{10} & \frac{1}{20} & \frac{3}{40} \\ \frac{2}{25} & \frac{2}{25} & \frac{3}{25} & \frac{1}{25} & \frac{6}{25} & 0 & \frac{6}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{5}{33} & \frac{5}{33} & \frac{2}{11} & \frac{5}{33} & 0 & \frac{5}{33} & \frac{4}{33} \\ 0 & \frac{2}{17} & \frac{6}{17} & \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & 0 & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$	$R_G = \begin{bmatrix} 0,0582 \\ 0,0902 \\ 0,1363 \\ 0,0743 \\ 0,1502 \\ 0,1137 \\ 0,1863 \\ 0,1212 \\ 0,0695 \end{bmatrix}$	$s = 0,0422$
<b>G R E - R I V</b>	$R_{Gv} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{28} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{28} & \frac{5}{28} \\ \frac{6}{35} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{35} & \frac{2}{35} & \frac{1}{35} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{14} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{37} & \frac{2}{37} & \frac{7}{37} & 0 & \frac{7}{37} & \frac{6}{37} & \frac{3}{37} & \frac{5}{37} & \frac{5}{37} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{20} & \frac{1}{4} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{31} & \frac{4}{31} & 0 & \frac{6}{31} & \frac{8}{31} & 0 & \frac{5}{31} & \frac{1}{31} & \frac{5}{31} \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{29} & \frac{4}{29} & 0 & \frac{7}{29} & \frac{5}{29} & \frac{6}{29} & 0 & \frac{1}{29} & 0 \end{pmatrix}$	$R_{Gv} = \begin{bmatrix} 0,0840 \\ 0,1331 \\ 0,0701 \\ 0,1856 \\ 0,1626 \\ 0,1475 \\ 0,0092 \\ 0,0778 \\ 0,1301 \end{bmatrix}$	$s = 0,0551$

<b>B O C - R I V</b>	$R_{Bv} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{22} & \frac{2}{11} & \frac{1}{22} & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & \frac{1}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{1}{19} & \frac{4}{19} & 0 & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & \frac{1}{19} & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{3}{31} & \frac{1}{31} & \frac{5}{31} & 0 & \frac{5}{31} & \frac{7}{31} & \frac{3}{31} & \frac{6}{31} & \frac{1}{31} \\ \frac{3}{13} & 0 & 0 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 0 \end{pmatrix}$	$R_{Bv} = \begin{bmatrix} 0,0733 \\ 0,0636 \\ 0,0658 \\ 0,1649 \\ 0,1058 \\ 0,1148 \\ 0,1184 \\ 0,1670 \\ 0,1262 \end{bmatrix}$	$s = 0,0388$
<b>R I V - B O C</b>	$R_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{11}{36} & 0 & \frac{1}{18} & \frac{13}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{7}{59} & 0 & \frac{8}{59} & \frac{12}{59} & \frac{18}{59} & \frac{8}{59} & 0 & \frac{4}{59} & \frac{2}{59} \\ \frac{1}{17} & \frac{9}{34} & 0 & \frac{3}{34} & \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & 0 & \frac{11}{34} & \frac{1}{34} \\ \frac{3}{28} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{28} & \frac{1}{14} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{60} & \frac{1}{10} & \frac{1}{60} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{13} & \frac{4}{39} & \frac{8}{39} & \frac{1}{13} & \frac{8}{39} & 0 & \frac{8}{39} & \frac{1}{13} & \frac{2}{39} \\ \frac{2}{23} & \frac{1}{23} & \frac{1}{23} & \frac{1}{23} & \frac{7}{23} & \frac{4}{23} & 0 & \frac{2}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_B = \begin{bmatrix} 0,0872 \\ 0,1291 \\ 0,1045 \\ 0,0595 \\ 0,1957 \\ 0,1252 \\ 0,1446 \\ 0,0902 \\ 0,0640 \end{bmatrix}$	$s = 0,0429$
<b>L I V - P O R</b>	$L_P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{11} & \frac{1}{33} & \frac{10}{33} & \frac{5}{33} & \frac{1}{22} & \frac{4}{33} & \frac{1}{66} & \frac{2}{33} \\ \frac{23}{88} & 0 & \frac{5}{22} & \frac{5}{88} & \frac{17}{88} & \frac{13}{88} & \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{44} \\ 0 & \frac{7}{22} & 0 & \frac{1}{22} & \frac{9}{44} & \frac{13}{44} & 0 & \frac{5}{44} & \frac{1}{44} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{4}{45} & 0 & \frac{2}{45} & \frac{2}{45} & \frac{1}{5} & \frac{1}{45} & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{69} & \frac{13}{69} & \frac{10}{69} & \frac{7}{69} & 0 & \frac{11}{69} & \frac{4}{69} & \frac{4}{69} & \frac{3}{23} \\ \frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{4}{17} & \frac{1}{51} & \frac{8}{51} & 0 & \frac{3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{7}{45} & \frac{2}{45} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{7}{45} \\ 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & 0 & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{23} & \frac{2}{23} & 0 & \frac{12}{23} & \frac{2}{23} & 0 \end{pmatrix}$	$L_P = \begin{bmatrix} 0,1201 \\ 0,1365 \\ 0,1005 \\ 0,1324 \\ 0,1202 \\ 0,1012 \\ 0,1363 \\ 0,0557 \\ 0,0968 \end{bmatrix}$	$s = 0,0259$
<b>P O R - L I V</b>	$L_{Pv} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{6}{23} & 0 & \frac{6}{23} & 0 & \frac{1}{23} & \frac{1}{23} & \frac{1}{23} & \frac{1}{23} & \frac{7}{23} \\ \frac{5}{22} & \frac{2}{11} & 0 & \frac{2}{11} & \frac{3}{22} & \frac{3}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} & 0 \\ \frac{2}{19} & \frac{1}{19} & \frac{3}{19} & 0 & \frac{2}{19} & \frac{6}{19} & \frac{4}{19} & \frac{1}{19} & 0 \\ \frac{4}{23} & \frac{4}{23} & \frac{2}{23} & 0 & 0 & \frac{1}{23} & \frac{8}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & \frac{5}{21} & \frac{2}{21} & 0 & \frac{1}{21} & \frac{8}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{5}{11} & 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & 0 \end{pmatrix}$	$L_{Pv} = \begin{bmatrix} 0,1126 \\ 0,1109 \\ 0,1177 \\ 0,0776 \\ 0,1604 \\ 0,1146 \\ 0,1206 \\ 0,1010 \\ 0,0843 \end{bmatrix}$	$s = 0,0237$



<b>B A R - L I V</b>	$L_{Bv} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{9}{32} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & 0 \\ \frac{3}{41} & 0 & \frac{7}{41} & \frac{1}{41} & \frac{1}{41} & \frac{3}{41} & \frac{5}{41} & \frac{14}{41} & \frac{7}{41} \\ \frac{4}{35} & \frac{9}{35} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{4}{35} & \frac{3}{35} & \frac{1}{7} & \frac{4}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{40} & \frac{7}{40} & \frac{6}{40} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{28} & \frac{3}{14} & 0 & \frac{1}{28} & \frac{5}{14} & \frac{3}{28} & \frac{5}{28} \\ \frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ \frac{1}{41} & \frac{7}{41} & \frac{5}{41} & \frac{4}{41} & \frac{14}{41} & \frac{1}{41} & 0 & \frac{7}{41} & \frac{2}{41} \\ \frac{1}{38} & \frac{8}{19} & \frac{3}{38} & \frac{3}{19} & \frac{5}{38} & 0 & \frac{1}{19} & 0 & \frac{5}{38} \\ 0 & \frac{4}{13} & 0 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & 0 \end{pmatrix}$	$L_{Bv} = \begin{bmatrix} 0,0647 \\ 0,1748 \\ 0,0987 \\ 0,1034 \\ 0,1197 \\ 0,0474 \\ 0,1366 \\ 0,1666 \\ 0,0878 \end{bmatrix}$	$s = 0,0431$
<b>L I V - B A R</b>	$L_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{18} & 0 & \frac{5}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{12}{31} & \frac{3}{31} & \frac{4}{31} & \frac{8}{31} & \frac{1}{31} & \frac{1}{31} & \frac{2}{31} \\ 0 & \frac{1}{29} & 0 & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} & \frac{7}{29} & \frac{3}{29} & \frac{1}{29} & \frac{8}{29} \\ \frac{5}{29} & 0 & \frac{1}{29} & 0 & \frac{7}{29} & 0 & \frac{4}{29} & \frac{8}{29} & \frac{4}{29} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{33} & \frac{4}{33} & \frac{7}{33} & 0 & \frac{1}{11} & \frac{2}{33} & \frac{5}{33} & \frac{5}{33} \\ \frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{3}{28} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{28} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & \frac{11}{29} & \frac{1}{29} & \frac{4}{29} & \frac{5}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & 0 \end{pmatrix}$	$L_B = \begin{bmatrix} 0,0682 \\ 0,0579 \\ 0,1429 \\ 0,1325 \\ 0,1281 \\ 0,1309 \\ 0,0771 \\ 0,1031 \\ 0,1590 \end{bmatrix}$	$s = 0,0359$
<b>T O T - L I V</b>	$L_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{3} \\ \frac{6}{19} & \frac{5}{19} & 0 & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & \frac{1}{19} & \frac{1}{19} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{14} \\ 0 & \frac{8}{15} & 0 & 0 & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & 0 & \frac{1}{15} & 0 \end{pmatrix}$	$L_T = \begin{bmatrix} 0,0847 \\ 0,2046 \\ 0,1164 \\ 0,0739 \\ 0,0883 \\ 0,0810 \\ 0,1128 \\ 0,0790 \\ 0,1588 \end{bmatrix}$	$s = 0,0441$

Tabla 29: Relación matriz de transición-vector estacionario-medida de centralidad para cada partido

Finalmente, de acuerdo con la tabla anterior se concluye que los jugadores tanto de River Plate como de Liverpool F. C. con mayor centralidad, es decir mayor influencia en el juego por partido son:

River Plate		
Partido disputado	Jugador	Centralidad en el vector estacionario
Independiente – River Plate	Juan Fernando Quintero	0,1581
River Plate – Independiente	Rafael Santos Borré	0,1830
River Plate – Gremio	Juan Fernando Quintero	0,1863
Gremio – River Plate	Exequiel Palacios	0,1856
Boca – River Plate	Exequiel Palacios	0,1649
River Plate – Boca	Enzo Pérez	0,1957
Liverpool F. C.		
Partido disputado	Jugador	Centralidad en el vector estacionario
Liverpool - Porto	Jordan Henderson	0,1363
Porto - Liverpool	Georginio Wijnaldum	0,1604
Barcelona - Liverpool	Andrew Robertson	0,1748
Liverpool – Barcelona	James Milner	0,1325
Tottenham – Liverpool	Andrew Robertson	0,2046

Tabla 30: Jugador más central por partido

### Prueba U de Mann-Whitney, coeficiente de correlación y prueba de centralización

Como afirma Linder (2017) la medida de centralidad de cada equipo calculada para cada partido permite concluir sobre la importancia de la centralización o descentralización. Haciendo uso de la prueba U de Mann-Whitney se busca conocer si existe alguna diferencia entre las medidas de centralidad cuando se gana y las medidas de centralidad cuando no se gana. Se toma como grupos de prueba los partidos ganados y no ganados (derrotas y empates) y como **hipótesis nula** que las medianas de los dos grupos (partidos ganados y no ganados) son similares, esto nos llevará a que tanto los partidos ganados como los ganados tienen medidas de centralidad s similares, es decir, que no existe relación alguna entre ganar o no y tener una medida de centralidad s baja o alta. Para lograr concluir que existe una relación entre el valor de centralidad y el resultado del juego, es necesario rechazar la hipótesis nula.

Ahora, en el software IBM-SPSS se ubican en dos columnas los datos correspondientes al **valor de centralidad** (Tabla 29) y el **resultado de juego**, respectivamente, este proceso se hace para cada equipo, es decir, en una prueba se realiza la comparación centralidad-resultados de River Plate y en la otra se realiza la comparación centralidad-Liverpool; posterior a esto el software arrojó los siguientes resultados necesarios para rechazar la hipótesis nula planteada.

Resumen de contrastes de hipótesis				
	Hipótesis nula	Prueba	Sig. <sup>a,b</sup>	Decisión
1	La distribución de Centralidadriver es la misma entre categorías de Resultadoriv.	Prueba U de Mann-Whitney para muestras independientes	,133 <sup>c</sup>	Conserve la hipótesis nula.
a. El nivel de significación es de ,050. b. Se muestra la significancia asintótica. c. Se muestra la significación exacta para esta prueba.				

*Imagen 18: Resultado de la Prueba U de Mann-Whitney sobre centralidad-resultados River Plate*

Resumen de contrastes de hipótesis				
	Hipótesis nula	Prueba	Sig. <sup>a,b</sup>	Decisión
1	La distribución de Centralidadliv es la misma entre categorías de Resultadoliv.	Prueba U de Mann-Whitney para muestras independientes	1,000 <sup>c</sup>	Conserve la hipótesis nula.
a. El nivel de significación es de ,050. b. Se muestra la significancia asintótica. c. Se muestra la significación exacta para esta prueba.				

*Imagen 19: Resultado de la Prueba U de Mann-Whitney sobre centralidad-resultados Liverpool*

Como se puede observar en las tablas anteriormente presentadas, el valor de significación para el River Plate es de 0,133 y para el Liverpool de 1,0; estos valores no permiten rechazar la hipótesis nula ya que son mayores que el nivel de significación dado del 0,05. Con ello se concluye que la medida de centralidad *s* es similar tanto cuando se gana como cuando no se gana, esto permite afirmar que no hay ninguna relación entre un valor de centralidad alto o bajo y perder o ganar.

A pesar de no encontrar una relación con base en la Prueba U de Mann-Whitney, en las medidas de centralidad halladas para los partidos del River Plate, de manera intuitiva se puede observar que al organizar las medidas de centralidad de la menos central a la más central (es decir, desde la medida más cercana a cero hasta la más alejada) los valores menos centrales coinciden con los resultados menos favorables del equipo. Es decir, que es posible

que exista una relación entre la medida de centralidad y los resultados obtenidos para River Plate. A continuación, se presenta una tabla en la que se puede observar dicha relación.

Medida de centralidad	Resultado obtenido
0,0551	Gremio 1 – 2 River Plate
0,0488	River Plate 3 – 1 Independiente
0,0429	River Plate 1 – 1 Boca
0,0422	River Plate 0 – 1 Gremio
0,0396	Independiente 0 – 0 River Plate
0,0388	Boca 2 – 2 River Plate

Tabla 31: Medida de centralidad vs. resultado River Plate

Por otro lado, haciendo uso del coeficiente de correlación  $r$  se intenta hallar una correlación entre los goles realizados o recibidos y la medida de centralidad; ello se logra al realizar dos pruebas asignadas tanto para Centralidad vs. Goles realizados y Centralidad vs. Goles recibidos. Recordando lo expuesto en el apartado “Marco Teórico Matemático” si el valor  $p$  se encuentra por debajo del valor de significancia del 5%, no es posible rechazar la hipótesis nula, es decir, no se puede tener en cuenta la prueba de  $r$  para analizar una posible correlación entre los datos. Los valores  $p$  hallados fueron los siguientes:

Goles a favor de River Plate – Medida de centralidad.	Valor p: 0,2649
Goles en contra de River Plate – Medida de centralidad.	Valor p: 0,9393
Goles a favor de Liverpool – Medida de centralidad.	Valor p: 0,2126
Goles en contra de Liverpool – Medida de centralidad.	Valor p: 0,6232

Tabla 32: Valores  $p$  asociados a la prueba de correlación  $r$ .

Como podemos verificar en la Tabla 32, los valores  $p$  asociados a la prueba normal bivariada, nos indican que la hipótesis nula puede rechazarse (los datos tienen una distribución normal), por lo tanto, podemos utilizar la prueba de correlación  $r$  para analizar si existe alguna relación entre la medida de centralidad  $s$  y los goles a favor o en contra.

Realizando el análisis de los datos, se obtuvo que el coeficiente de correlación  $r$  para la medida de centralidad vs. los goles a favor, tanto para River Plate como para Liverpool, fue:  $r_r = 0,55$  y  $r_l = -0,57$ , respectivamente. Si bien no hay una correlación fuerte, sí existe una correlación débil ya que los valores encontrados se encuentran entre 0,5 y 0,8 para el

caso de River Plate y entre -0,8 y -0,5 para el caso de Liverpool. Para el caso de River podemos afirmar que la relación entre los goles a favor y medida de centralidad es directa (correlación  $r$  positiva), esto significa que cuando la medida de centralidad es alta hay más probabilidades de que los goles a favor aumenten. Por otro lado, para el caso de Liverpool tenemos una relación inversa (correlación  $r$  negativa), esto significa que cuando la medida de centralidad es baja, hay más probabilidad de anotar un gol.

Ahora, para centralidad vs. goles en contra los coeficientes de correlación  $r$  obtenidos para River Plate y Liverpool, fueron de  $r_r = -0,04$  y  $r_l = 0,3$  respectivamente; valores que no son significativos para afirmar que existe alguna relación.

Finalmente, se puede indicar que bajo estas pruebas de utilizadas (U de Mann-Whitney y coeficiente de correlación  $r$ ) no se logró hallar una correlación fuerte entre la medida de centralidad y los resultados obtenidos o los goles a favor/en contra. Sin embargo, en este trabajo se permitió establecer una mayor aproximación a hacia el objetivo de encontrar una relación, respecto a la investigación propuesta de Linder (2017) quién no logró encontrar ningún tipo de relación.

## **CONCLUSIONES**

A continuación, se presentarán algunas conclusiones generales que surgieron durante el desarrollo de este trabajo, así como conclusiones específicas respecto a asuntos puntuales como el objetivo general y las áreas de referencia de este trabajo: fútbol y matemáticas.

### **CONCLUSIONES GENERALES**

- La aproximación histórica presentada al inicio de este trabajo brinda una carta abierta para las diferentes aplicaciones que pueda tener la matemática a otras áreas, ya que presenta un exhaustivo barrido bibliográfico e histórico de estas. Así mismo el estudio de redes, puede ser aplicado a otros ámbitos de interés general; para mencionar un ejemplo, a través del estudio de redes se puede indagar acerca del personaje principal de una serie o película, a partir de la interacción de este con otros personajes.
- La leve relación entre las medidas de centralidad para los partidos ganados por el River Plate (Tabla 31) y, en contraposición, la nula relación entre las medidas de centralidad para los partidos del Liverpool F. C., puede responder a lo mencionado en el apartado “Marco de referencia futbolístico”, en el cual se expone que los estilos del fútbol argentino y el fútbol inglés son opuestos históricos.
- En la recolección de datos se apreció que Liverpool F.C. presenta una reiteración en la elaboración de jugadas, sin embargo, River Plate no presenta patrones de juego tan predecibles, es decir las asociaciones se presentan entre diferentes jugadores según el partido. Aunque en este trabajo no se estudiaron a fondo patrones de juego, desde un punto de vista matemático, se sugiere el estudio de patrones de juego como un posible enfoque para futuras investigaciones. Ya que esto fundamenta lo mencionado en el apartado “estilos de juego distintos” donde se caracteriza al estilo de juego inglés como mecánico y al estilo de juego argentino como creativo.

### **ACERCA DEL OBJETIVO GENERAL**

Si bien, a partir de la prueba U de Mann-Whitney no se logró encontrar alguna diferencia entre los datos de medida de centralidad y los resultados de un equipo, cabe la posibilidad que, analizando más partidos, es decir, tomando una muestra más grande se pueda concluir la existencia de alguna relación.. Teniendo esto en cuenta, se recomienda analizar equipos

que se encuentren en un contexto latinoamericano y bajo un estilo de juego similar al argentino, esto es, por ejemplo, el estilo de juego brasileño o uruguayo.

Por otro lado, tomando la prueba de correlación se encontraron valores  $r$  que, aunque no fueron significativamente altos, permiten concluir que hay una relación entre la centralidad y los goles realizados. Como ya se mencionó, se sugiere realizar este análisis a una muestra con más partidos, ya que es posible que esto genere un coeficiente de correlación  $r$  más alto, o se propone explorar otro tipo de pruebas de correlación.

### **ACERCA DE LOS APORTES AL FÚTBOL**

Aunque el objetivo de este trabajo era indagar acerca de la relación matemática entre la centralidad y los resultados obtenidos, durante el desarrollo de este se obtuvieron herramientas que pueden aportar al análisis de un equipo. Por ejemplo, las gráficas de participación junto con los grafos expuestos permiten analizar el estilo táctico de juego no solo de los equipos abordados en este trabajo sino de cualquier otro equipo, permitiendo así reconocer al jugador más participativo (que realiza y recibe más pases) o las sociedades más recurrentes en un partido, lo cual permite al equipo rival reconocer los jugadores a los cuales se les debe mantener la marca. Igualmente, a partir de los grafos se puede identificar el sector de la cancha en donde hay mayor concentración de pases, lo que permite identificar al equipo rival los lugares idóneos para robar el balón. Del mismo modo, el vector estacionario permite identificar al jugador más central, es decir, quien tiene más probabilidad de recibir un pase, lo que brinda una herramienta de análisis para los equipos.

### **RESPECTO A LOS APORTES MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS**

Aunque este trabajo no está enfocado hacia un área didáctica o pedagógica, se reconoce que brinda herramientas para abordar temas como las cadenas de Markov, Teoría de Grafos y Estadística, a partir de la aplicación a un contexto cotidiano y cercano a los estudiantes, como lo es el fútbol. En este orden de ideas, se recomienda realizar una unidad didáctica o planeación tomando lo expuesto en este trabajo como marco teórico.

Ahora, haciendo referencia a la parte matemática se reconoce que este trabajo, a pesar de abordar temas ya estudiados y conocidos, brinda la posibilidad de ahondar en estos de una manera más accesible, ya que se puede acceder al código realizado para la graficación de la red de pases, como a la gráfica de participación realizada en GeoGebra.





## REFERENCIAS

- Arias-Gómez, J. Villasís-Keever, M. Á., & Miranda-Navales M. G. (2016). El protocolo de investigación III: la población de estudio. *Revista Alergia México*, 63(2), 201-206.
- Balkundi, P. & Harrison, D., (2006). Ties, leaders, and time in teams: strong inference about network structure's effects on team viability and performance. *Academy of Management Journal* 49(1), 49–68. <https://doi.org/10.5465/AMJ.2006.20785500>
- Barriola, J. & Dotta, M. (2016). ¿Cómo funciona Google? El algoritmo Pagerank, diagramas de grafos y cadenas de Markov. *Revista de investigación en modelos matemáticos aplicados a la gestión y la Economía*, (3), 9-30.
- Borgatti, S. P. & Foster, P. C., (2003). The network paradigm in organizational research: a review and typology. *Journal of Management*, 29(6), 991-1013. doi:10.1016/S0149-2063\_03\_00087-4
- Cabado, A. (2017). *La esencia del fútbol británico y el fútbol de posesión. La media inglesa*. Recuperado el 10 octubre 2020, de <http://lamediainglesa.com/articulo/la-esencia-del-futbol-britanico-y-el-futbol-de-posesion>.
- Carson, J. B., Tesluk, P. E. & Marrone, J. A. (2007). Shared leadership in teams: an investigation of antecedent conditions and performance. *Academy of Management Journal*, 50(5), 1217–1234. <https://doi.org/10.2307/20159921>
- Chacón, J. (2005). *Introducción a la teoría de grafos*. Universidad de los Andes.
- Coaches' Voice. (noviembre de 2021). Análisis: El Liverpool de Jürgen Klopp. Obtenido de Coaches' Voice: <https://es.coachesvoice.com/analisis-el-liverpool-de-jurgen-klopp/>
- Coaches' Voice. (noviembre de 2021). Marcelo Gallardo: Variables tácticas. Obtenido de Coaches' Voice: <https://es.coachesvoice.com/cv/variables-tacticas-marcelo-gallardo-river-plate-argentina-copa-libertadores/>
- de León, M., & Gómez, A. (2018). Breve historia de la llamada biología matemática. En M. de León, & A. Gómez, *Las matemáticas de la biología: De las celdas de las abejas a las asimetrías de los virus*. (págs. 11-18). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

- Freddi, E. (2008). *El estilo del fútbol argentino: ¿Qué es “la nuestra”?* Grupo Interamericano de reflexión científica, N° 6. [http://www.reflexioncientifica.com.ar/08\\_GIRC\\_006.pdf](http://www.reflexioncientifica.com.ar/08_GIRC_006.pdf)
- Garay, P. (2012). *“La nuestra”: El sentido social del gusto por el espectáculo*. La Plata: Facultad de Periodismo y Comunicación Social - UNLP.
- Gloor, P. A., Paasivaara, M., Schoder, D. & Willems, P. (2008). Finding collaborative innovation networks through correlating performance with social network structure. *International Journal of Production Research* 46(5), 1357–1371. <https://doi.org/10.1080/00207540701224582>
- González, C. (2004). *Matemáticas como recurso para la economía*. San Cristóbal de La Laguna: Universidad de La Laguna.
- Grund, T. (2012). *Network structure and team performance: The case of English Premier League soccer teams*. Oxford: Oxford University.
- Guerra, M., & Mata, M. (2017). Los modelos matemáticos en la identificación de riesgos para evaluación de inversiones en el sector cooperativo. *Cooperativismo y desarrollo: COODES*, 5(2), 197-209.
- Katz, N., Lazer, D., Arrow, H., & Contractor, N., (2004). Network theory and small groups. *Small Group Research*, 35(3), 307-332. doi:10.1177/1046496404264941
- La Cruz, A. J. (26 de febrero de 2016). Alexis Junior La Cruz. Obtenido de Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=eV0uejd2Sm0&t=616s>
- Linder, M. (2017). *Football and Mathematics: a search for a relation between passing structure and successful results*. Uppsala: Uppsala University.
- Martín-Crespo, M. C., & Salamanca, A. B. (2007). El muestreo en la investigación cualitativa. *Nure Investigación*, (27). <https://www.nureinvestigacion.es/OJS/index.php/nure/article/view/340/330>
- Melo De Alonso, M. (2003). Las matemáticas en la ingeniería a través de la historia. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, (13), 53-60.

- Miller, B., Pelling, H., Pleic, D., & Wood, H. (Dirección). (2002). *A history of football: The beautiful game* [Película].
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal, una introducción moderna*. Tercera edición. México, D. F.: Cengage Learning Editores S.A.
- Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*. México, D. F.: Facultad de ciencias UNAM.
- Ustáriz, E. (5 de Diciembre de 2020). *Carlos Queiroz, Colombia y el estilo europeo*. Obtenido de El Espectador: <https://www.elespectador.com/deportes/futbol-mundial/carlos-queiroz-colombia-y-el-estilo-europeo-article/>
- Vázquez, J. (2013). *Las matemáticas y sus aplicaciones. Ayer y hoy. Retos del futuro*. Madrid: Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid.

## ANEXO

```

In [1]: ###Acá se importan Las librerías para poder graficar Los nodos.
import csv
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
import numpy as np
import pandas as pd

In [3]: file = '.\River-Independiente.csv' ###Se carga el documento con Los datos de Los 9 jugadores más influyentes del partido
AjusteGrosor = 60 ###Se crea una variable que permita ajustar el grosor de Los vínculos en el grafo
TamañoNodo = 800 ###Se crea una variable que permita ajustar el tamaño del nodo en el grafo
TamañoFuente = 15 ###Se configura el tamaño de la fuente mediante la creación de una variable

In [4]: data = pd.read_csv(file, delimiter=',') ###A partir del documento cargado se indica que Los datos estarán delimitados por ','
jugadores = list(data.columns.values)[3:] ###Se indica cuáles serán Los jugadores para realizar el grafo.

In [8]: #Se crea el grafo
G = nx.MultiDiGraph()
###Se crean Los vínculos, tomando como nodo Los jugadores. El grosor del vínculo estará delimitado por La cantidad de pases
###realizados entre un jugador y otro tomado del archivo que ya se cargó.
for jugador in jugadores:
    for k in range(0, len(jugadores) - 1):
        G.add_weighted_edges_from([(jugadores[k], jugador, data[jugador][k])]) # El punto de inicio, punto final, peso del bord

In [9]: posiciones = {} ###En el documento que se carga existe unas coordenadas X e Y que indican La posición en el grafo.
for jugador in jugadores:
    posiciones[jugador] = [(data['X'][jugadores.index(jugador)]),(data['Y'][jugadores.index(jugador)])]

In [10]:
plt.figure(1,figsize=(14,10)) #Se configura el tamaño del Lienzo en donde se va a dibujar el grafo

opciones_titulares = {'node_color': 'FFFFFF','edgecolors': [0,0,0], "node_size": TamañoNodo} ### Color de nodo: Titulares
opciones_suplentes = {'node_color': 'tab:blue','edgecolors': [0,0,0], "node_size": TamañoNodo} ### Color de nodo: Suplentes

#Se dibuja el grafo indicando el tamaño del nodo, el texto que tendrá el nodo, Los colores y el grosor del vínculo
nx.draw_networkx_nodes(G, pos=posiciones, **opciones_titulares)
nx.draw(G, font_size=TamañoFuente, font_color="red", pos=posiciones, connectionstyle="arc3,rad=0.1", with_labels=True, width=[f]
plt.show()

```

*Ilustración 1: Código del grafo,*

	X	Y	Nombre	1	2	22	20	29	26	23	15	30	19	27	8	5	11
0	0	4	1	0.000000	0.013393	0.008929	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.004464	0.000000	0.000000	0.000000
1	1	2	2	0.000000	0.000000	0.013393	0.008929	0.004464	0.004464	0.013393	0.000000	0.000000	0.013393	0.008929	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	6	22	0.000000	0.017857	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.017857	0.013393	0.000000	0.004464	0.000000	0.000000	0.000000
3	2	8	20	0.004464	0.008929	0.013393	0.000000	0.000000	0.004464	0.013393	0.031250	0.017857	0.026786	0.004464	0.004464	0.000000	0.000000
4	2	0	29	0.004464	0.013393	0.000000	0.000000	0.000000	0.022321	0.013393	0.000000	0.008929	0.017857	0.013393	0.000000	0.000000	0.013393
5	4	2	26	0.000000	0.000000	0.004464	0.000000	0.026786	0.000000	0.004464	0.008929	0.013393	0.013393	0.004464	0.000000	0.000000	0.000000
6	3	4	23	0.004464	0.008929	0.008929	0.013393	0.008929	0.022321	0.000000	0.013393	0.004464	0.004464	0.004464	0.004464	0.004464	0.000000
7	4	6	15	0.000000	0.000000	0.004464	0.040179	0.000000	0.017857	0.000000	0.000000	0.013393	0.017857	0.004464	0.008929	0.000000	0.004464
8	6	2	30	0.000000	0.000000	0.004464	0.004464	0.000000	0.013393	0.008929	0.013393	0.000000	0.026786	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
9	6	6	19	0.000000	0.000000	0.000000	0.022321	0.013393	0.013393	0.004464	0.031250	0.022321	0.000000	0.008929	0.008929	0.000000	0.004464
10	6	4	27	0.000000	0.000000	0.000000	0.004464	0.004464	0.008929	0.004464	0.004464	0.017857	0.008929	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
11	6	3	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.004464	0.004464	0.004464	0.000000	0.000000	0.004464	0.008929	0.000000	0.000000	0.008929	0.000000
12	6	1	5	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.004464	0.000000	0.004464	0.000000	0.000000
13	4	1	11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.004464	0.000000	0.004464	0.000000	0.000000	0.008929	0.000000	0.004464	0.004464	0.000000

*Ilustración 2: Ejemplo de archivo cargado. (River - Independiente).*