ESTUDIO GRÁFICO Y ALGEBRAICO DE ALGUNAS CURVAS EN LA GEOMETRÍA TROPICAL

Jeimmy Andrea Amado Sanabria

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2021

ESTUDIO GRÁFICO Y ALGEBRAICO DE ALGUNAS CURVAS EN LA GEOMETRÍA TROPICAL

Jeimmy Andrea Amado Sanabria

Cédula de ciudadanía: 1018501811

Código estudiantil: 2017140004

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el Título de Licenciado en Matemáticas

Director

JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2021

AGRADECIMIENTOS

Inicialmente agradezco a Dios por darme la fuerza y guiarme para no desistir en este proceso de formación como futura Licenciada en Matemáticas que me permitió llegar hasta este punto, el cual es producto de todos esos pequeños y grandes esfuerzos.

A mi familia por apoyarme incondicionalmente y brindarme su amor en cada etapa de mi vida y especialmente en mi formación como profesional, fundamentalmente quiero agradecer a mi madre por acompañarme en momentos difíciles en los cuales me motivó, me acompaño y me ayudó a crecer como persona.

A mi querida Universidad Pedagógica Nacional, por darme la oportunidad de conocer gente maravillosa que apoyaron y aportaron a mi formación personal y como futura Licenciada, ya que, con su motivación, enseñanzas y dedicación, me orientaron en el camino.

A mi asesor el profesor Jorge Edgar Páez ya que fue y es una parte muy importante en la construcción y corrección de este trabajo, el cual, con su motivación, orientación hicieron posible este trabajo de grado.

A Jhon Mina por ser mi compañero de vida que con su actuar me alegró y motivó cada día a lograr los objetivos y superar los obstáculos presentados.

¡A todos muchas gracias!

RESUMEN

Este trabajo surge inicialmente por el interés personal de estudiar la Matemática Tropical centrando la atención en la Geometría Tropical y cómo se construyen las curvas y al mismo tiempo como herramienta bibliográfica orientada a estudiantes de secundaria y de la Licenciatura en Matemáticas [LM] de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN] con el fin de mostrar y explicar los elementos principales que configuran la Geometría Tropical, siendo así se hace estudian los principales objetos que la componen.

Inicialmente se evidenció que existe poca información en el idioma español a la cual un estudiante puede acceder para conocer y estudiar de manera detallada los aspectos que se asocian con la Matemática Tropical y en especial la Geometría Tropical. Los objetivos centran su intención en caracterizar los elementos teóricos necesarios para la construcción y análisis de algunos elementos principales de la Geometría Tropical con ayuda de *software* como GeoGebra y Maple.

Entre las conclusiones se establece que, las curvas estudiadas desde la Geometría Tropical se convierten en la unión de segmentos y semirrectas donde son conformadas por el mínimo en determinado intervalo según la expresión algebraica. Por otra parte, se resalta la importancia que tuvieron los *softwares* como GeoGebra y Maple debido a que permitieron explorar, visualizar y conjeturar acerca del comportamiento de las curvas. Por último, se puede decir que el trabajo deja como reflexión lo importante que es motivar a los estudiantes (a nivel escolar y universitario) a la investigación de aquellas disciplinas con desarrollos teóricos recientes.

Palabras clave: Geometría Tropical, Amebas, Maple, Tropical, Polinomios, Maestros de Matemáticas, GeoGebra.

CONTENIDO

TABLAS

FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consiste en el estudio y análisis desde la Geometría Tropical de algunas curvas que se estudian en la geometría analítica tradicional, partiendo de un conjunto extendido que es $\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty+\}$, donde la suma se define $\forall\, x, y \in \mathcal{H}, x \oplus y = mín\{x, y\}$ y el producto $\forall\, x, y \in \mathcal{H}, x \odot y = x + y$. Las curvas construidas y analizadas se caracterizan por ser la unión de segmentos y semirrectas donde se establece el mínimo en cada parte la expresión.

El documento se estructura en cinco capítulos, los cuales se abordan y denominan de la siguiente manera: el primer capítulo nombrado como Aspectos Importantes de la Geometría Analítica Usual, aborda algunas definiciones de estructuras algebraicas, objetos geométricos y propiedades a tener en cuenta para ser analizadas y utilizadas desde la mirada de la Geometría Tropical en capítulos posteriores.

En el segundo capítulo titulado Construcción de la Matemática Tropical, se presenta un apartado inicial donde se exponen algunas notas históricas sobre la Geometría tropical y el surgimiento a lo largo de la historia, en el segundo apartado se realiza la construcción de las definiciones preliminares que se abordan en la Aritmética tropical, se define el conjunto $\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como un semianillo tropical con la definición de suma "$\oplus$"como el mínimo de dos elementos $x, y \in \mathcal{H}$ y el producto "$\odot$"como la suma usual de $x, y \in \mathcal{H}$ donde se mantiene que para todos los elementos del conjunto con las operaciones establecidas se cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y existencia del elemento neutro; gracias a su estructura surgen algunas conjeturas que toman validez, una de ellas es la siguiente igualdad $(a \oplus b)^2 = a^2 \oplus b^2$ y de manera más general se cumple $(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n$.

En el tercer capítulo que lleva por nombre Geometría Tropical, se establece una división entre polinomios tropicales de una variable y polinomios de dos variables. En primera instancia, se define un polinomio tropical como una combinación finita de monomios donde sus coeficientes están en $\mathbb{R}$ y la variable $x \in \mathcal{H}$, de allí se establece una definición para los raíces de un polinomio tropical en una variable tomada como los puntos donde se intersecan los segmentos o semirrectas que conforman el polinomio, se establece dicha definición debido a que trasladando la definición de raíces de la geometría analítica usual son aquellos puntos donde la curva interseca en el eje x donde la expresión se iguala a 0 y se encuentran los valores para x, pero en la geometría tropical no es posible tener la igualdad $a \odot x \oplus b = 0_{\mathcal{H}}$; luego, se establecen algunas observaciones que relacionan la forma gráfica y algebraica de los polinomios tropicales, por ejemplo cualquier polinomio $a \odot x^n \oplus b$ tiene la forma gráfica de un polinomio de grado 1. En segundo lugar, se construyen a los polinomios tropicales en dos variables de grado 1 los cuales conforman las rectas tropicales, donde aparecen particularidades como: a partir del vértice y algún valor de $a, b,$ ó, c se obtiene la expresión algebraica de la recta tropical; en la geometría tropical no existen rectas paralelas debido a que dos rectas tropicales siempre se van a intersecar, es decir, se intersecan en un único punto o en infinitos puntos sin ser la misma recta tropical. En tercer lugar se realiza un estudio de los polinomios tropicales de segundo grado en dos variables, tomando como punto inicial la ecuación general de segundo grado adaptada con las sumas y productos tropicales, se concluye que los polinomios tropicales son conformados por la proyección inferior de los seis planos que forman la expresión algebraica, se da continuidad estableciendo diferentes casos de intersección entre la recta tropical y el polinomio de segundo grado en dos variables, los cuales se dan entre 2, 4, o infinitos puntos, para cerrar el capítulo se analiza la intersección entre polinomios de segundo grado en dos variable donde se presentan casos de 4, 5, 6, o infinitos puntos de intersección.

En el capítulo cuarto llamado Amebas y Uso de Maple, se define de forma general una ameba, que gracias al uso de Maple se pueden graficar e identificar sus partes, se establece la relación con los polinomios en dos variables, es decir una ameba cuenta con tentáculos y una espina la cual define una curva tropical, en casos puntuales, rectas y polinomios.

Finalmente, en el capítulo 5 se encuentran las conclusiones, las cuales se dividen en tres partes que giran en torno a los elementos teóricos que se establecen para el análisis de las curvas y la formación docente. De esto último, se reflexiona sobre la importancia del uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra y Maple ya que fueron de utilidad para la construcción, exploración y formulación de conjeturas; además de ser una herramienta para potenciar el actuar como docente en ejercicio.

JUSTIFICACIÓN

Durante los últimos años ha venido creciendo la importancia por el estudio de la Geometría tropical, rama reciente de las matemáticas, la cual permite que elementos de la geometría analítica sean más fáciles de analizar y graficar ya se resalta una construcción con segmentos y semirrectas, es por ello por lo que este trabajo surge en el marco de abordar el estudio de las principales curvas (rectas, polinomios) con geometría tropical. Al realizar una revisión bibliográfica de distintos artículos en buscadores académicos como Google Academic, revistas de matemáticas y libros digitales, se evidencia poca bibliografía en español para la consulta de teoría básica sobre el tema en cuestión, en algunos casos se tiene los planteamiento de Sánchez (2010), Czubara (2011) y Garay (2018) en los cuales se exponen algunos aspectos teóricos de las curvas tropicales.

Es necesario saber de dónde proviene la matemática tropical, existen estudios que abordan el tema, inicialmente Garay (2018) afirma que desde 1934 Vandiver introdujo el concepto de Semianillo el cual intento unificarlo al álgebra moderna, también se usó el término tropicalizar un objeto que hace referencia a transponer lo clásico a lo tropical, por otra parte, dirigiendo la mirada a los aspectos matemáticos en Maclagan y Sturmfels (2009). Se define el Semianillo tropical, entendido como un conjunto (los números reales extendidos) que cuenta con la suma ($\oplus$) y del producto ($\odot$).

El presente trabajo se propuso con el fin de ser un punto de partida para el estudio de las curvas en la geometría tropical, dando un recorrido desde los principales objetos que se involucran o se trasladan de la geometría analítica usual, con el ánimo de motivar y ampliar aquellos ejemplos y aspectos importantes que presentan las curvas tropicales.

Es importante reconocer que el tema es muy amplio y por eso el presente trabajo se centra en el estudio de la forma algebraica y gráfica de algunas curvas clásicas en la geometría analítica tradicional (polinomios en una variable y polinomios en dos variables de grado 1 y 2) desde la mirada de una construcción de trozos de recta (segmentos y semirrectas). Por último, la propuesta pretende dejar una reflexión de lo valioso que es, que un futuro docente de matemáticas pueda relacionarse y animarse al estudio de nuevas teorías del conocimiento matemático de su interés.

OBJETIVOS

Objetivo General

Construir, analizar y mostrar la forma algebraica y gráfica de algunas curvas en la Geometría tropical.

Objetivos Específicos

- Caracterizar elementos teóricos que se involucran en la forma algebraica y gráfica de las curvas tropicales.
- Diseñar estrategias para construir curvas tropicales con *software matemático* como GeoGebra y Maple.
- Identificar la relación de las curvas tropicales con otras ramas de las ciencias.

1. ASPECTOS IMPORTANTES DE LA GEOMETRIA ANALÍTICA USUAL

En este capítulo se presentan inicialmente algunas definiciones que giran en torno a polinomios estudiados desde la geometría analítica, seguido a ellos se caracteriza una sección con los conceptos adicionales que se deben tener en cuenta para la construcción y análisis de curvas tropicales.

1.1.Polinomios

Para estudiar las curvas desde la Geometría analítica se establecen las siguientes definiciones:

Definición de monomio: Es una expresión algebraica conformada por un solo término que consta de incógnitas y un coeficiente, definición tomada y adaptada de Ortiz (2008).

Definición de polinomio: Un polinomio es una expresión algebraica de dos o más monomios, definición tomada y adaptada de Ortiz (2008).

Definición de función: Una función es una relación de correspondencia donde:

$(\forall x, y, z \in R)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \longrightarrow y = z)$. (Muñoz, 2002, p. 78).

Raíces de un polinomio: Las raíces de un polinomio son los puntos donde la curva se interseca con el eje x, para conocer dichos puntos hay que igualar la expresión a 0 y hallar los valores para x que hagan que la ecuación sea verdadera.

Ortiz (2008) dice que el concepto de **raíz de un polinomio** o solución de una ecuación algebraica son equivalentes, es decir que en caso general el polinomio de grado n es una ecuación de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde $a_1 x = a_1 x^1$, y $a_0 = a_0 x^0$, recordando que $x^0 = 1$.

Un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, donde se clasifican en: raíces reales, las cuales pueden ser números racionales o irracionales iguales o diferentes, y, raíces complejas, las

Por otra parte, tendremos en cuenta los polinomios en dos variables de grado 1 y grado 2, para ello se tiene:

Ecuación de la recta: La ecuación de la recta está dada por la ecuación:

$ax + by = c$. Información tomada y adaptada de Lehmann (1989).

Postulado 4 de la unicidad de la recta: Dados dos puntos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene. Moise (1966).

Intersección de rectas: En la intersección de dos rectas se presentan tres posibles casos:

Caso 1: Que la intersección de dos rectas sea vacía, conocidas como **rectas paralelas** donde dichas rectas tienen la misma pendiente.

Caso 2: Sean dos rectas l y m se intersecan en un único punto, el cual se obtiene de solucionar el sistema de ecuaciones que forman las dos ecuaciones de las rectas.

Caso 3: Sean dos rectas l y m se intersecan en todos sus puntos.

Definición de polinomio de grado dos en dos variables: El polinomio de grado dos en dos variables está definido como:

$$ax^2 + byx + cy^2 + dy + ex + f$$

A partir de dicha expresión, dando condiciones especiales para los coeficientes, se construyen las cónicas; tales como: la parábola, la elipse, la hipérbola y la circunferencia.

1.2. Conceptos adicionales

<u>Definición de anillo:</u> Un anillo es un tripla $\langle C, +, * \rangle$ donde $+$ y $*$ son operaciones binarias internas en C tal que se cumplen los siguientes axiomas:

1. $\forall\, x, y \in C$, se cumple que $x + y = y + x$.
2. $\forall\, x, y, z \in C$, se cumple que $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\forall\, x \in C$, existe el $0 \in C$ tal que se cumpla que $x + 0 = x$.
4. $\forall\, x \in C$, existe $-x \in C$ tal que se cumple que $x + (-x) = 0$
5. $\forall\, x, y, z \in C$ se cumple que $(x * y) * z = x * (y * z)$.
6. $\forall\, x, y, z \in C$ se cumple que $x * (y + z) = x * y + x * z$.
7. $\forall\, x, y, z \in C$ se cumple que $(x + y) * z = x * z + y * z$. (Campos, Garzón, Mora, Pérez y Villamarín, 2004, p. 12-13).

<u>Definición de Semianillo:</u> Un semianillo es una tripla $\langle C, +, * \rangle$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para $\langle C, + \rangle$ se cumple que es un monoide conmutativo con el 0 como elemento neutro donde se satisface las siguientes condiciones:
   a. Asociatividad en relación con la suma: $\forall\, a, b, c \in C$ se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   b. Conmutatividad para la suma: $\forall\, x, y \in C$ se tiene que $x + y = y + x$
   c. Elemento neutro para la suma: $\forall\, x \in C$, existe un $p \in C$ que cumple que $p + x = x + p = x$, el cual es denominado como $p = 0$.
2. Para $\langle C, + \rangle$ se cumple que es un monoide con el $n \in C$ como elemento neutro tal que satisfagan las siguientes condiciones:

a. Asociatividad en relación con la multiplicación: $\forall\ x, y, z\ \in C$, se cumple que $(a * b) * c = a * (b * c)$.

b. Elemento neutro: $\forall\ x \in C$, Si $n = 1$ que $x * 1 = x = 1 * x$.

3. Para $\langle C, +, * \rangle$ se cumple que la multiplicación es distributiva en relación con la suma, lo que significa lo siguiente:

a. Distributiva a derecha: $\forall\ x, y, z\ \in C$ se cumple que

$$x * (y + z) = x * y + x * z$$

b. Distributiva a izquierda: $\forall\ x, y, z\ \in C$ se cumple que

$$(x + y) * z = x * z + y * z$$

4. En $\langle C, +, * \rangle$ se cumple que el 0 es el elemento absorbente con respecto a la multiplicación, lo cual significa que para todo $x \in C$ se tiene que $x * 0 = 0 = 0 * x$. (Revilla, 2015).

Intervalos: Un intervalo es un subconjunto de un conjunto, donde se establece la siguiente notación:

a. Abierto

$$(a, b) = \{x \in C | a < x < b\}$$

b. Cerrado

$$(a, b) = \{x \in C | a \leq x \leq b\}$$

c. Semiabierto

$$(a, b] = \{x \in c | a < x \leq b\}$$

d. Semicerrado

$$[a, b) = \{x \in c | a \leq x < b\}$$

<u>Ecuación de la recta de forma vectorial:</u> Sea la recta L y $t\vec{v} = t\langle a, b, c\rangle$ vector director de L y un punto en la recta $\overrightarrow{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ la ecuación vectorial de la recta se convierte en:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle$$

Ecuación del plano de forma vectorial: Sea un punto en el espacio $\overrightarrow{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y el vector $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ perpendicular al plano, la ecuación del plano es:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sistemas de ecuaciones lineales: Un sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

1. Sustitución: para llevar a cabo este método se tiene las siguientes instrucciones:
   a. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones (ecuación inicial).
   b. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación (segunda ecuación), obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
   c. Se resuelve la ecuación (segunda ecuación que resulto en términos de una sola variable).
   d. El valor obtenido se sustituye en la ecuación inicial donde se despejo la incógnita.
   e. Los dos valores obtenidos respectivamente constituyen la solución del sistema.

Sea $\mathcal{M}_L^n = L^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) | x_i \in L\}$ el espacio afín de dimensión n sobre una extensión L del campo K, es este espacio de define:

Definición de Variedad Algebraica (Conjunto algebraico afín): Un subconjunto $V \subset \mathcal{M}_L^n$ se llama K-variedad algebraica si existe un sistema de ecuaciones algebraicas (1) para el cual el conjunto V es el conjunto de soluciones de dicho sistema. Se dice que V esta definido sobre K y se llama a (1) el sistema de definición para V. El campo K es el campo de definición y L el campo coordenado para V. A los puntos $V \cap \mathcal{M}_L^n$ se caracterizan como los K-reacionales de V.

2. CONSTRUCCIÓN DE LA MATEMÁTICA TROPICAL

En este capítulo se muestran inicialmente algunas notas históricas relevantes sobre la geometría tropical, se aborda la influencia que ha tenido en diferentes áreas, luego se presentan las definiciones que componen la aritmética tropical y se presentan conjeturas que se trasladan y unas nuevas que surgen a partir de la estructura algebraica.

2.1. Notas Históricas de la Geometría Tropical

La Geometría Tropical se establece como una rama de la matemática que ha tenido evolución en el siglo XX y XXI, donde se estudia la forma gráfica y algebraica de las curvas y superficies que se construyen a partir de nuevas definiciones iniciales. El nombre “tropical” se le asigna debido al brasileño Imre Simon (1943-2009) que fue uno de los primeros en presentar y formalizar la teoría de forma explícita.

A lo largo de los años esta rama ha cobrado gran importancia por ello autores como Seco (2017), Maclagan y Sturmfels (2009), Sánchez (2010), entre otros autores que afirman que la geometría tropical es una versión lineal por partes de la geometría algebraica, debido a que los objetos geométricos se construyen a partir de segmentos y semirrectas definidos por funciones lineales y afín, donde se asume el mínimo de la expresión algebraica.

En la comunidad matemática se ha generado gran interés por el estudio ya que este se realiza estableciendo una definición para la suma y producto en un conjunto que tiene la estructura de un semianillo, gracias a esto se han diseñado diferentes conferencias, seminarios con el fin de analizar aquellas aplicaciones y conexiones con otras ramas de la matemática.

2.2.Aritmética Tropical

La aritmética tropical se establece en los cimientos de un semi anillo tropical, esta definición se establece en la sección 1.2. del capítulo 1, la cual surge de la abstracción de la estructura de un conjunto específico como los reales, con las operaciones suma y producto. De acuerdo con ello se establecen las siguientes definiciones:

El semi anillo tropical: Sea el conjunto $\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ lo que quiere decir que en la tripla $\langle \mathcal{H},\ \oplus,\ \odot \rangle$ la suma y el producto se definen de la siguiente manera:

Definición de suma tropical: Para todo $x, y\ \in \mathcal{H}$ se define la suma tropical como

$$x \oplus y = mín\{x, y\}$$

Además, se tiene $\forall\ x \in \mathcal{H}$ se cumple que[1]

$$x \oplus \infty = x$$

Donde el $mín$ de un conjunto es el menor valor de dicho conjunto[2].

Definición de producto tropical: Para todo $x, y\ \in \mathcal{H}$ se define producto tropical como

$$x \odot y = x + y$$

Donde $+$ representa la suma usual en los números reales.

Además, se tiene $\forall\ x \in \mathcal{H}$ se cumple que[3]

$$x \odot \infty = \infty$$

(Sánchez, 2010, p. 10- 11).

Si se cumple que el conjunto con las dos operaciones definidas anteriormente conforma en semianillo tropical deben satisfacerse las siguientes propiedades:

1. Para $< \mathcal{H},\ \oplus >$ es un monoide conmutativo con el elemento neutro ∞.

---

[1] Algunos aspectos importantes de la aritmética del infinito se pueden ver en el Anexo B.
[2] Algunas características interesantes que tiene el mínimo en el conjunto se pueden ver en el Anexo A.
[3] Algunos aspectos importantes de la aritmética del infinito se pueden ver en el Anexo B.

a. Para todo $x, y, z \in \mathcal{H}$ se cumple que $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$. En la Tabla 1 se presenta la demostración:

Tabla 1. Demostración semi anillo tropical 1.a.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x, y, z \in \mathcal{H}$ $(x \oplus y) \oplus z$	Dado
2	Caso 1: $x \neq \infty, y \neq \infty, z \neq \infty$	Hipotesis
3	$mín\{(x \oplus y), z\}$	Definición de suma tropical (1)
4	$mín\{mín\{x, y\}, z\}$	Definición de suma tropical (2)
5	$mín\{x, y, z\}$	Propiedades de orden en $\mathcal{H}$ (3)
6	$mín\{x, mín\{y, z\}\}$	Propiedades de orden en $\mathcal{H}$ (4)
7	$mín\{x, (y \oplus z\}$	Definición de suma tropical (5)
8	$x \oplus (y \oplus z)$	Definición de suma tropical (6)
9	Caso 2: Uno de los tres sea ∞ Sin perder generalidad, se toma $x = \infty$	Hipotesis
10	$(\infty \oplus y) \oplus z$	Sustituyendo (9) en (1)
11	$y \oplus z$	Definición de suma tropical (10)
12	$y \oplus z \in \mathcal{H}$	Propiedades de $\mathcal{H}$ (11)
13	$\infty \oplus (y \oplus z)$	Definición de suma tropical (11,12)
14	Caso 3: Que dos sean ∞ Sin perder generalidad, se toma $x = \infty, y = \infty, z \neq \infty$	Hipotesis
15	$(\infty \oplus \infty) \oplus z$	Sustituyendo (14) en (1)
16	$\infty \oplus z$	Definición de suma tropical (15)
17	$\infty \oplus z \in \mathcal{H}$	Propiedades de $\mathcal{H}$ (16)
18	$\infty \oplus (\infty \oplus z)$	Definición de suma tropical (17)
19	Caso 4: $x = \infty, y = \infty, z = \infty$	Hipotesis
20	$(\infty \oplus \infty) \oplus \infty$	Sustituyendo (19) en (1)
21	$\infty \oplus \infty$	Definición de suma tropical (20)
22	$\infty \oplus \infty \in \mathcal{H}$	Propiedades de $\mathcal{H}$ (21)

23	$\infty \oplus (\infty \oplus \infty)$	Definición de suma tropical (22)

b. Para todo $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple que $x \oplus y = y \oplus x$. En la Tabla 2 se presenta la demostración:

Tabla 2. Demostración semi anillo tropical 1.b.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x, y \in \mathcal{H}$ $x \oplus y$	Dado
2	$mín\{x, y\}$	Definición de suma tropical (1)
3	$mín\{y, x\}$	Propiedad de orden en $\mathcal{H}$ (2)
4	$y \oplus x$	Definición de suma tropical (3)

c. Para todo $x \in \mathcal{H}$ se cumple que $x \oplus \infty = \infty \oplus x = x$. En la Tabla 3 se presenta la demostración:

Tabla 3. Demostración semi anillo tropical 1.c.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x \in \mathcal{H}$ $x \oplus \infty$	Dado
2	$x \oplus \infty = x$	Propiedad de mínimo (1)
3	$mín\{x, \infty\} = x$	Definición de suma tropical (2)
4	$mín\{\infty, x\} = x$	Propiedad de mínimo (3)
5	$\infty \oplus x = x$	Definición de suma tropical (4)

2. Para $< \mathcal{H}, \odot >$ es un monoide donde el elemento neutro es 0.

a. Para todo $x, y, z \in \mathcal{H}$ se cumple que $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$. En la Tabla 4 se presenta la demostración:

Tabla 4. Demostración semi anillo tropical 2.a.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x, y, z \in \mathcal{H}$ $(x \odot y) \odot z$	Dado
2	Caso 1: $x \neq \infty, y \neq \infty, z \neq \infty$	Hipotesis
3	$(x \odot y) + z$	Definición del producto tropical (1)
4	$(x + y) + z$	Definición del producto tropical (2)

5	$x + (y + z)$	Propiedad conmutativa de la suma en la suma usual (3)
6	$x \odot (y + z)$	Definición del producto tropical (4)
7	$x \odot (y \odot z)$	Definición del producto tropical (5)
8	Caso 2: Uno de los tres sea ∞ Sin perder generalidad, se toma $x = \infty$	Hipotesis
9	$(\infty \odot y) \odot z$	Sustituyendo (8) en (1)
10	$(\infty \odot y) + z$	Definición del producto tropical (9)
11	$(\infty + y) + z$	Definición del producto tropical (10)
12	$\infty + z$	Propiedad conmutativa de la suma en la suma usual (11)
13	$\infty + z \in \mathcal{H}$	Propiedades de $\mathcal{H}$ (12)
14	$\infty \odot (y + z)$	Definición del producto tropical (14)
15	$\infty \odot (y \odot z)$	Definición del producto tropical (15)
16	Caso 3: Que dos sean ∞ Sin perder generalidad, se toma $x = \infty, y = \infty, z \neq \infty$	Hipotesis
17	$(\infty \odot \infty) \odot z$	Sustituyendo (16) en (1)
18	$(\infty \odot \infty) + z$	Definición del producto tropical (9)
19	$(\infty + \infty) + z$	Definición del producto tropical (10)
20	$\infty + z$	Propiedad conmutativa de la suma en la suma usual (11)
21	$\infty + z \in \mathcal{H}$	Propiedades de $\mathcal{H}$ (12)
22	$\infty \odot (\infty + z)$	Definición del producto tropical (14)
23	$\infty \odot (\infty \odot z)$	Definición del producto tropical (15)
24	Caso 4: $x = \infty, y = \infty, z = \infty$	Hipotesis
25	$(\infty \odot \infty) \odot \infty$	Sustituyendo (24) en (1)
26	$(\infty \odot \infty) + \infty$	Definición del producto tropical (25)
27	$(\infty + \infty) + \infty$	Definición del producto tropical (26)
28	$\infty + \infty = \infty$	Propiedad conmutativa de la suma en la suma usual (27)
29	$\infty + z \in \mathcal{H}$	Propiedades de $\mathcal{H}$ (28)
30	$\infty \odot (\infty + \infty)$	Definición del producto tropical (29)

31	$\infty \odot (\infty \odot \infty)$	Definición del producto tropical (30)

b. Para todo $x, \in \mathcal{H}$ se cumple que $x \odot 0 = 0 \odot x = x$ (Elemento neutro de la multiplicación).

En la Tabla 5 se presenta la demostración:

Tabla 5. Demostración semi anillo tropical 2.b.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x, 0 \in \mathcal{H}$ $x \odot 0$	Dado
2	$x + 0$	Definición del producto tropical (1)
3	x	Propiedades de los números reales (2)
4	$x = 0 + x$	Propiedades de los números reales (3)
5	$0 \odot x$	Definición del producto tropical (4)
6	$x \odot 0 = 0 \odot x = 0$	Conjunción (1,5)

3. En $< \mathcal{H}, \oplus, \odot >$ la multiplicación se distribuye con respecto a la suma de la siguiente manera:

b. Para todo $x, y, z \in \mathcal{H}$ se cumple que $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$. En la Tabla 6 se presenta la demostración:

Tabla 6. Demostración semi anillo tropical 3.a.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x, y, z \in \mathcal{H}$ $x \odot (y \oplus z)$	Dado
2	$x \odot mín\{y, z\}$	Definición de suma tropical (1)
3	$x + mín\{y, z\}$	Definición de producto tropical (2)
4	$mín\{x + y, x + z\}$	Propiedades del mínimo (2)
5	$mín\{x \odot y, x \odot z\}$	Definición de producto tropical (4)
6	$(x \odot y) \oplus (x \odot z)$	Definición de suma tropical (5)

c. Para todo $x, y, z \in \mathcal{H}$ se cumple que $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$. En la Tabla 7 se presenta la demostración:

Tabla 7. Demostración semi anillo tropical 3.b.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x, y, z \in \mathcal{H}$ $(x \oplus y) \odot z$	Dado
2	$mín\{x, y\} \odot z$	Definición de suma tropical (1)

3	$mín\{x, y\} + z$	Definición del producto tropical (2)
4	$mín\{x + z, y + z\}$	Propiedad del mínimo (3)
5	$mín\{x⨀z, y⨀z\}$	Definición del producto tropical (4)
4	$(x⨀z) \oplus (y⨀z)$	Definición de suma tropical (5)

4. Para todo $x \in \mathcal{H}$, existe un $0_{\mathcal{H}}$ tal que se cumple que $x⨀0_{\mathcal{H}} = 0_{\mathcal{H}}⨀x = 0_{\mathcal{H}}$. En la Tabla 8 se presenta la demostración:

Tabla 8. Demostración semi anillo tropical 4.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $x \in \mathcal{H}$	Dado
2	$x⨀\infty = \infty$	Definición de $\mathcal{H}(1)$ Aritmética del infinito
3	$x + \infty = \infty$	Definición de producto tropical (2)
4	$\infty + x = \infty$	Propiedad conmutativa de la suma (3)
5	$x + \infty = \infty + x = \infty$	Conjunción (3,4)
6	$x⨀\infty = \infty⨀x = \infty$	Definición del producto tropical (5)

De acuerdo con lo anterior se puede decir que efectivamente el conjunto $\mathcal{H}$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ conforman el semianillo tropical.

Para ilustrar se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Se tiene a $4, 7 \in \mathcal{H}$ donde la suma y producto tropical se ve de la siguiente forma:

La suma: $4\oplus 7 = mín\{4,7\} = 4$

El producto: $4\odot 7 = 4 + 7 = 11$

Ejemplo 2: Se tiene a $8, \infty \in \mathcal{H}$ donde la suma y producto tropical se ve de la siguiente forma:

La suma: $8\oplus\infty = mín\{8, \infty\} = 8$

$$\infty\oplus 8 = mín\{\infty, 8\} = 8$$

El producto: $8\odot\infty = 8 + \infty = \infty$

$$\infty\odot 8 = \infty + 8 = \infty$$

Ejemplo 3: Se tiene a $\infty \in \mathcal{H}$ donde la suma y producto tropical se ve de la siguiente forma:

La suma: $\infty \oplus \infty = mín\{\infty, \infty\} = \infty$

El producto: $\infty \odot \infty = \infty + \infty = \infty$

Recordemos que en los números reales se define la sustracción, por lo que se traslada la noción a la matemática tropical y se va a verificar si es posible definir la resta tropical de dos números del conjunto $\mathcal{H}$, si nos referimos a dicha operación en los números reales se puede pensar que la resta es la operación inversa de la suma, por lo tanto, la resta se puede definir como una suma y podríamos trasladarla a la resta tropical de la siguiente manera: Para $8, 13 \in \mathcal{H}$ se tiene

$$8 \ominus 13 = 8 \oplus (-13)$$
$$= mín\{8, -13\}$$
$$= -13$$

Recordando que en los reales que establece igualdad que hace el papel de prueba, para ello se tiene qué; en la suma usual si $a - b = c$ entonces $b + c = a$, de acuerdo con ello veamos lo que pasa con la resta tropical: Partiendo de que se cumple que

$$8 \ominus 13 = -13$$

Veamos si también se cumple la igualdad de la prueba, es decir que debe cumplirse $13 \oplus (-13) = 8$.

$$13 \oplus (-13) = mín\{13, -13\}$$
$$= -13$$

Observando que el resultado es -13 y no 8 como sugiere la igualdad, podemos concluir que la resta no se puede definir de esta forma, en general no se puede definir la resta porque la propiedad no se cumple para todos los elementos de $\mathcal{H}$.

Definición de división tropical: $\forall\ x, y \in \mathcal{H}$ se define la división tropical como

$$x \oslash y = x - y$$

Donde $-$ representa la resta usual.

En los siguientes ejemplos se muestra la división tropical.

Ejemplo 4: Los números $10, 6 \in \mathcal{H}$, donde la división tropical se establece de la siguiente manera:

Caso 1 $\quad 10 \oslash 6 = 10 - 6 = 4$

Caso 1 $\quad 6 \oslash 10 = 6 - 10 = -4$

Ejemplo 5: Se tiene que $3, \infty \in \mathcal{H}$ donde la división tropical logra observar de la siguiente manera:

Caso 1 $\quad 3 \oslash \infty = 3 - \infty$

Esta operación no se puede dar ya que el resultado generalmente es: $-\infty$ y dicho elemento no está en $\mathcal{H}$.

Caso 2 $\quad \infty \oslash 3 = \infty - 3 = \infty$

Un aspecto interesante para resaltar es que en la división tropical se puede dar el caso donde el denominador es cero, lo que se observa en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6: Los números $15, 0 \in \mathcal{H}$ donde se pueden establecer las siguientes divisiones tropicales.

Caso 1 $\quad 15 \oslash 0 = 15 - 0 = 15$

Caso 2 $\quad 0 \oslash 15 = 0 - 15 = -15$

Nota: En la aritmética tropical los cálculos se convierten en más sencillos ya que se remontan a comparaciones, sumas y restas úsales.

Definición de una potencia: Sea $a \in \mathcal{H}$ y $x \in \mathbb{Z}^+$ se define una potencia como:

$$a^x = \underbrace{a \odot a \odot \ldots \odot a}_{x\ veces}$$

Donde $0^x = \underbrace{0\odot 0\odot \dots \odot 0}_{x\ veces} = 0$, y, $\infty^x = \underbrace{\infty\odot\infty\odot \dots \odot\infty}_{x\ veces} = \infty$.

Se dan el **orden jerárquico** de las operaciones:

1. Potencias tropicales.
2. Productos y divisiones tropicales.
3. Operaciones con los reales.
4. Sumas tropicales.

Los siguientes ejemplos muestran cómo se aplica la definición:

Ejemplo 8: Dados $7 \in \mathcal{H}$ y $5 \in \mathbb{Z}^+$ se tiene:

$$7^5 = 7\odot 7\odot 7\odot 7\odot 7$$

$$= 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

$$= 35$$

Ejemplo 8: Dados $\infty \in \mathcal{H}$ y $2 \in \mathbb{Z}^+$

$$\infty^2 = \infty\odot\infty = \infty + \infty = \infty$$

<u>**Teorema 1:**</u> Si $a \in \mathcal{H}$ y $x, y \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que:

a. $a^{x\oplus y} = a^x \oplus a^y$

b. $a^{x\odot y} = a^x \odot a^y$

En la Tabla 9 y 10 se presenta la demostración de cada ítem para el teorema 1:

Tabla 9. Demostración teorema 1.a. Sección 2.2.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $a \in \mathcal{H}\ y\ x, y \in \mathbb{Z}^+$ $a^x \oplus a^y$	Dado
3	$mín\{a^x, a^y\}$	Definición de suma tropical (2)
4	a. $x = y$ b. $x < y$ c. $x > y$	Casos de tricotomía en los $\mathbb{Z}^+$ (3)

5	$x = y$	Caso a (4)
6	$mín\{a^x, a^y\} = a^x$	Propiedades del mínimo (3,5)
7	$a^x = a^{x \oplus x}$	Propiedades de $\mathcal{H}$ (6)
9	$a^x = a^{x \oplus y}$	Sustitución (5,7)
10	$a^x \oplus a^y = a^{x \oplus y}$	Sustitución (2,6,9)
11	$x < y$	Caso b (4)
12	$mín\{a^x, a^y\} = a^x$	Propiedades del mínimo (3,11)
13	$a^x = a^{x \oplus y}$	Definición de suma tropical (12, 11)
14	$a^x \oplus a^y = a^{x \oplus y}$	Sustitución (2,12, 13)
15	$x > y$	Caso c (4)
16	$mín\{a^x, a^y\} = a^y$	Propiedades del mínimo (3, 15)
17	$a^y = a^{y \oplus x}$	Definición de suma tropical (16)
18	$a^x \oplus a^y = a^{x \oplus y}$	Sustitución (2,17)

Ahora para el ítem b, se tiene:

Tabla 10. Demostración Teorema 1.b. Sección 2.2.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $a \in \mathcal{H}$ y $x, y \in \mathbb{Z}^+$ $a^{x \odot y}$	Dado
2	$a^{x \odot y} = a^{x+y}$	Definición de producto tropical (1)
3	$a^{x+y} = a^x + a^y$	Propiedades de los exponentes para los reales extendidos (2)
4	$a^{x \odot y} = a^x \odot a^y$	Definición de producto tropical (3)

Los siguientes ejemplos se ilustran el teorema 1:

Ejemplo 9: Dados $4 \in \mathcal{H}$ y x, y $5, 6 \in \mathbb{Z}^+$ entonces se cumple:

a. $4^{5 \oplus 6} = 4^5 \oplus 4^6$.

Tabla 11. Ejemplo 9.a. Sección 2.2.

$$
\begin{aligned}
4^{5 \oplus 6} &= 4^{mín\{5,6\}} \\
&= 4^5 \\
&= 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \\
&= (4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot 4 \\
&= (4 + 4) \odot (4 + 4) \odot 4 \\
&= ((4 + 4) \odot (4 + 4)) \odot 4
\end{aligned}
$$

$= (8 \odot 8) \odot 4$ $= (8 + 8) \odot 4$ $= 16 \odot 4$ $= 16 + 4$ $= 20$
$4^5 \oplus 4^6 = (4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4) \oplus (4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4)$ $= ((4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot 4) \oplus ((4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot (4 \odot 4))$ $= ((4 + 4) \odot (4 + 4) \odot 4) \oplus ((4 + 4) \odot (4 + 4) \odot (4 + 4))$ $= (8 \odot 8 \odot 4) \oplus (8 \odot 8 \odot 8)$ $= ((8 \odot 8) \odot 4) \oplus ((8 \odot 8) \odot 8)$ $= ((8 + 8) \odot 4) \oplus ((8 + 8) \odot 8)$ $= (16 \odot 4) \oplus (16 \odot 8)$ $= (16 + 4) \oplus (16 + 8)$ $= 20 \oplus 24$ $= mín\{20,24\}$ $= 20$
De donde se concluye que se cumple que: $4^{5 \oplus 6} = 4^5 \oplus 4^6$.

b. $4^{5 \odot 6} = 4^5 \odot 4^6$

Tabla 12. Ejemplo 9.b. Sección 2.2

$4^{5 \odot 6} = 4^{5+6}$ $= 4^{11}$ $= 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4$ $= (4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot 4$ $= (4 + 4) \odot (4 + 4) \odot (4 + 4) \odot (4 + 4) \odot (4 + 4) \odot 4$ $= 8 \odot 8 \odot 8 \odot 8 \odot 8 \odot 4$ $= (8 \odot 8) \odot (8 \odot 8) \odot (8 \odot 4)$ $= (8 + 8) \odot (8 + 8) \odot (8 + 4)$ $= 16 \odot 16 \odot 12$ $= (16 \odot 16) \odot 12$ $= (16 + 16) \odot 12$ $= 32 \odot 12$ $= 32 + 12$ $= 44$
$4^5 \odot 4^6 = (4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4) \odot (4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4 \odot 4)$ $= ((4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot 4) \odot ((4 \odot 4) \odot (4 \odot 4) \odot (4 \odot 4))$ $= ((4 + 4) \odot (4 + 4) \odot 4) \odot ((4 + 4) \odot (4 + 4) \odot (4 + 4))$ $= (8 \odot 8 \odot 4) \odot (8 \odot 8 \odot 8)$

$= ((8 \odot 8) \odot 4) \odot ((8 \odot 8) \odot 8)$ $= ((8+8) \odot 4) \odot ((8+8) \odot 8)$ $= (16 \odot 4) \odot (16 \odot 8)$ $= (16+4) \odot (16+8)$ $= (20) \odot (24)$ $= 20 + 24$ $= 44$
De donde se concluye que se cumple que: $4^{5 \odot 6} = 4^5 \odot 4^6$.

Ejemplo 10: Dados $\infty \in \mathcal{H}$ y $4, 3 \in \mathbb{Z}^+$entonces que se cumple: $\infty^{3 \oplus 4} = \infty^3 \oplus \infty^4$.

Tabla 13. Ejemplo 10. Sección 2.2.

$\infty^{3 \oplus 4} = \infty^{mín\{3,4\}}$	$\infty^3 \oplus \infty^4 = (\infty \odot \infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty \odot \infty \odot \infty)$
$= \infty^3$	$= ((\infty \odot \infty) \odot \infty) \oplus ((\infty \odot \infty) \odot (\infty \odot \infty))$
$= \infty \odot \infty \odot \infty$	$= ((\infty + \infty) \odot \infty) \oplus ((\infty + \infty) \odot (\infty + \infty))$
$= (\infty \odot \infty) \odot \infty$	$= (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty)$
$= (\infty + \infty) \odot \infty$	$= (\infty + \infty) \oplus (\infty + \infty)$
$= \infty \odot \infty$	$= (\infty) \oplus (\infty)$
$= (\infty + \infty)$	$= mín\{\infty, \infty\}$
$= \infty$	$= \infty$
De donde se concluye que se cumple que: $\infty^{3 \oplus 4} = \infty^3 \oplus \infty^4$.	

Por qué ahora pone los ejemplos en tablas, y antes no…

Siguiendo la idea de la definición de los exponentes se observa la existencia de **la idempotencia tropical,**

Definición de idempotencia: $\forall\, x \in \mathcal{H}$ se satisface:

$$x \oplus x = x$$

En el estudio de las potencias es posible trasladar la idea de binomios elevados a potencias enteras positivas que se establecen en la geometría y álgebra usual, por ello se da el siguiente teorema:

<u>Teorema 2</u>: Si $x, y \in \mathcal{H}$ y $n \in \mathbb{Z}^{+}$ se cumple que $(x \oplus y)^{n} = x^{n} \oplus y^{n}$

Demostración: Para realizar la demostración; vemos que se involucran a los números naturales, generalmente estas demostraciones se desarrollan por inducción, así que haciendo inducción sobre n tenemos:

1. Supongamos que $n = 1$

$$(x \oplus y)^{1} = x \oplus y$$

$$= x^{1} \oplus y^{1}$$

2. $(x \oplus y)^{n} = x^{n} \oplus y^{n}$ Hipótesis de inducción
3. Ahora para $n + 1$

$$(x \oplus y)^{n+1} = (x \oplus y) \odot (x \oplus y)^{n+1-1}$$

$$= (x \oplus y) \odot (x \oplus y)^{n}$$

$$= (x \oplus y) \odot (x^{n} \oplus y^{n}) \; Aplicando \; HI$$

$$= ((x \oplus y) \odot x^{n}) \oplus ((x \oplus y) \odot y^{n})$$

$$= (x \odot x^{n} \oplus y \odot x^{n}) \oplus (x \odot y^{n} \oplus y \odot y^{n})$$

$$= (x \odot x^{n}) \oplus (y \odot x^{n}) \oplus (x \odot y^{n}) \oplus (y \odot y^{n})$$

$$= x^{n+1} \oplus (y \odot x^{n}) \oplus (x \odot y^{n}) \oplus y^{n+1}$$

$$= mín\{x^{n+1}, (y \odot x^{n}), (x \odot y^{n}), y^{n+1}\}$$

Acá la demostración se divide en tres partes ya que por hablar del mínimo de un conjunto se pueden tener los siguientes casos por la tricotomía:

Caso 1: $x = y$

$$x^{n+1} = (x + y^n) = (y + x^n) = y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} \oplus y^{n+1}$$

Caso 2: $x > y$

$$x^{n+1} > y^{n+1}$$

$$(x + y^n) > y^{n+1}$$

Lo que quiere decir que: $mín\{x^{n+1}, (x + y^n), (y + x^n), y^{n+1}\} = y^{n+1}$

Caso 3: $x < y$

$$x^{n+1} < y^{n+1}$$

$$(x + y^n) > x^{n+1}$$

Lo que quiere decir que: $mín\{x^{n+1}, (x + y^n), (y + x^n), y^{n+1}\} = x^{n+1}$

De manera general el mínimo se encuentra siempre en alguna de las potencias, entonces se cumple que:

$$mín\{x^{n+1}, (x + y^n), (y + x^n), y^{n+1}\} = x^{n+1} \oplus y^{n+1}$$

Ejemplo 11: Dados $5,3,\infty \in \mathcal{H}$ y $2 \in \mathbb{Z}^+$ se mostrará que se cumplen las siguientes igualdades:

a. $(5 \oplus 3)^2 = 5^2 \oplus 3^2$

$$(5 \oplus 3)^2 = (5 \oplus 3) \odot (5 \oplus 3)$$

$$= (5 \odot 5) \oplus (5 \odot 3) \oplus (3 \odot 5) \oplus (3 \odot 3)$$

$$= (5 + 5) \oplus (5 + 3) \oplus (3 + 5) \oplus (3 + 3)$$

$$= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 6$$

$$= mín\{10,8,8,3\}$$

$$= mín\{10,6\}$$

$$= 10 \oplus 6$$

$$= (5 \odot 5) \oplus (3 \odot 3)$$

$$= 5^2 \oplus 3^3$$

b. $(5 \oplus \infty)^2 = 5^2 \oplus \infty^2$

$$(5 \oplus \infty)^2 = (5 \oplus \infty) \odot (5 \oplus \infty)$$

$$= (5 \odot 5) \oplus (5 \odot \infty) \oplus (\infty \odot 5) \oplus (\infty \odot \infty)$$

$$= (5 + 5) \oplus (5 + \infty) \oplus (\infty + 5) \oplus (\infty + \infty)$$

$$= 10 \oplus \infty \oplus \infty \oplus \infty$$

$$= mín\{10, \infty, \infty, \infty\}$$

$$= mín\{10, \infty\}$$

$$= 10 \oplus \infty$$

$$= (5 \odot 5) \oplus (\infty \odot \infty)$$

$$= 5^2 \oplus \infty^2$$

c. $(\infty \oplus \infty)^2 = \infty^2 \oplus \infty^2$

$$(\infty \oplus \infty)^2 = (\infty \oplus \infty) \odot (\infty \oplus \infty)$$

$$= (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty)$$

$$= (\infty + \infty) \oplus (\infty + \infty) \oplus (\infty + \infty) \oplus (\infty + \infty)$$

$$= \infty \oplus \infty \oplus \infty \oplus \infty$$

$$= mín\{\infty, \infty, \infty, \infty\}$$

$$= mín\{\infty, \infty\}$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty)$$

$$= \infty^2 \oplus \infty^2$$

De las propiedades conocidas en el estudio de estructuras algebraicas tenemos las siguientes que se cumplen en el semi anillo tropical:

Teorema 3[4]: Para $< \mathcal{H}, \oplus >$ y $x, y, z, u, v \in \mathcal{H}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

b. Identidad I de Stein: $x \oplus (x \oplus y) = y \oplus x$.

c. Identidad II de Stein: $(x \oplus y) = (y \oplus x) \oplus y$.

d. Identidad I de Schröder: $x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus y) \oplus y$.

e. Elasticidad: $x \oplus (y \oplus x) = (x \oplus y) \oplus x$.

f. Asociativa cíclica I: $x \oplus (y \oplus z) = z \oplus (x \oplus y)$.

g. Asociativa cíclica II: $x \oplus (y \oplus z) = (z \oplus x) \oplus y$.

h. Identidad de Abel Graβmann I: $x \oplus (y \oplus z) = z \oplus (y \oplus x)$.

i. Identidad de Abel Graβmann II: $x \oplus (y \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z$.

j. Permutabilidad a izquierda: $x \oplus (y \oplus z) = y \oplus (x \oplus z)$.

k. Permutabilidad a derecha: $(x \oplus y) \oplus z = (x \oplus z) \oplus y$.

l. Propiedad del producto reducido: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (z \oplus y)$.

m. Autodistributividad a izquierda: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus (x \oplus z)$.

n. Autodistributividad a derecha: $(x \oplus y) \oplus z = (x \oplus z) \oplus (y \oplus z)$.

o. Autodistributividad a izquierda abeliana: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus (z \oplus x)$.

p. Autodistributividad a derecha abeliana: $(x \oplus y) \oplus z = (z \oplus x) \oplus (y \oplus z)$.

q. Bisimetría: $(x \oplus y) \oplus (u \oplus v) = (x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$.

Teorema 4: Para $< \mathcal{H}, \odot >$ y $x, y, z, u, v \in \mathcal{H}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

a. Elasticidad: $x \odot (y \odot x) = (x \odot y) \odot x$.

---

[4] Las demostraciones de los Teoremas 3 y 4 se encuentran en el Anexo C.

b. Asociativa cíclica I: $x \odot (y \odot z) = z \odot (x \odot y)$.

c. Asociativa cíclica II: $x \odot (y \odot z) = (z \odot x) \odot y$.

d. Identidad de Abel Graβmann I: $x \odot (y \odot z) = z \odot (y \odot x)$.

e. Identidad de Abel Graβmann II: $x \odot (y \odot z) = (y \odot x) \odot z$.

f. Identidad de Abel Graβmann II: $x \odot (y \odot z) = (y \odot x) \odot z$.

g. Permutabilidad a derecha: $(x \odot y) \odot z$.

h. Propiedad del producto reducido: $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y)$.

i. Bisimetría: $(x \odot y) \odot (u \odot v) = (x \odot u) \odot (y \odot v)$.

Nota: Las propiedades enunciadas en el Teorema 3 y 4 son formuladas de forma general en Luque, Jiménez y Ángel (2013).

3. GEOMETRÍA TROPICAL

En este capítulo se aborda el estudio de algunas curvas que se trabajan habitualmente desde la geometría analítica (Polinomios en una variable y en dos variables de grado uno y dos) para ello se dividen en tres secciones; primero, se presenta la forma gráfica y algebraica de un polinomio tropical en una variable, para luego establecer algunas propiedades de acuerdo con su construcción y análisis, segundo, se introducen los polinomios de dos variables, donde se encuentra la recta, se establece una definición y se conjetura aquellas particularidades como intersección y formas de encontrar su expresión algebraica, y en la tercera se hace una introducción a los polinomios tropicales de segundo grado en dos variables, donde se estudia la forma algebraica y gráfica, allí se resalta casos de intersección entre las rectas tropicales y los polinomios tropicales de segundo grado en dos variables.

3.1.Polinomios Tropicales en una Variable

<u>Definición de monomio tropical:</u> Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ variables que representan elementos en el semianillo tropical $< \mathcal{H}, \oplus, \odot >$ un monomio es un producto cualquiera de estas variables, donde las repeticiones están permitidas. Por la conmutatividad podemos ordenar el producto y escribir los monomios con la notación usual:

$$\begin{gathered} x_2 \odot x_1 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_4 \odot x_2 \odot x_3 \odot x_2 \\ = x_1 \odot x_1 \odot x_2 \odot x_2 \odot x_3 \odot x_3 \odot x_4 \\ = (x_1 \odot x_1) \odot (x_2 \odot x_2) \odot (x_3 \odot x_3) \odot x_4 \\ = {x_1}^2 \odot {x_2}^2 \odot {x_3}^2 \odot x_4 \end{gathered}$$

De donde se puede definir un polinomio tropical como:

<u>Definición de polinomio tropical:</u> Un polinomio tropical es una combinación finita de monomios tropicales:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^+} a_i \odot {x_i}^i$$

Donde las variables $x_i \in \mathcal{H}$, los coeficientes $a_i \in \mathcal{H}$ y los exponentes $i_n \in \mathbb{Z}^+$, un conjunto finito.

Estableciendo la definición general para un polinomio de n variables, tenemos que un polinomio tropical de una variable se puede definir como:

Definición de polinomio tropical en una variable: Un polinomio tropical en una variable es una combinación finita de monomios tropicales:

$$P(x) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^+} a_i \odot x^i$$

Donde la variable $x \in \mathcal{H}$, los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$ y los exponentes $i \in \mathbb{Z}^+$, un conjunto finito.

Intuitivamente nos lleva a pensar sobre el grado de un polinomio tropical en una variable, de aquí surge la siguiente definición:

Grado de un polinomio tropical: El grado de un polinomio tropical P, denotado por $degP$, es el máximo grado o el mayor exponente entre sus monomios, donde $a_i \odot x^i$ tiene grado i siempre y cuando $a_i \neq 0$. (Sánchez, 2010).

Definición de igualdad de polinomios tropicales: Dos polinomios tropicales son iguales si y solo si son iguales componente a componente, tomada de (Maclagan y Sturmfels, 2009).

Corolario 1: Sean dos polinomios tropicales P y Q … tal que se cumple la siguiente igualdad $P(x) = Q(x)$, es decir que los polinomios son iguales en todas $x \in \mathcal{H}$, entonces se cumple que $degP = degQ$.

La Demostración del corolario 1 se muestra en la Tabla 13.

Tabla 14. Demostración Corolario 1. Sección 3.1.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sean P y Q polinomios tropicales tal que $P(x) = Q(x)$	Dado
2	$degP = i$ donde i es el mayor exponente de los monomios de la forma de $a_i \odot x^i$ $degQ = k$ donde k es el mayor exponente de los monomios de la forma de $b_i \odot x^i$	Definición del grado de un polinomio tropical (1)
3	$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^+} a_i \odot x^i \ y \ \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^+} b_k \odot x^k$	Definición de polinomio tropical (1,2)
4	$a_i \odot x^i = b_k \odot x^k$	Definición de Igualdad de polinomios tropicales (1,2)
5	$a_i + x^i = b_k + x^k$	Definición de producto tropical (4)
4	$x^i = x^k \wedge a_i = b_k$	Definición de igualdad de polinomios en los reales (3)
5	$i = k$	Teorema 1 de 1.2. (4)
6	$degP = k$ $degQ = i$	Sustitución (2,5)
6	$degP = degQ$	Sustitución (6)

En el estudio de los polinomios en la geometría analítica se da vital importancia a la búsqueda de las raíces de un polinomio[5], al analizar la idea que se trae desde la geometría analítica sobre el tema:

Sea un polinomio tropical de la forma:

$$P(x) = a \odot x \oplus b$$

Desde la geometría analítica se propone la igualdad: $a \odot x \oplus b = 0_{\mathcal{H}}$, analicemos que únicamente es verdadera cuando $b = 0_{\mathcal{H}}$, recordemos que se definió que para un polinomio tropical en una variable los coeficientes pertenecen al conjunto de los números reales por ello no

[5] Raíces del polinomio definidos como aquellos valores de x donde el polinomio se anula.

es posible que se cumpla la igualdad y se debe establecer una nueva definición para las raíces de un polinomio tropical.

Ahora, si se rescribe el polinomio, de tal forma que se tenga la igualdad:

$$a \odot x \oplus b = a \odot (x \oplus (b - a))$$

Lo que nos permite definir el cero del polinomio P como $b - a$.

De acuerdo con lo anterior podemos entonces establecer la siguiente definición.

Definición de las raíces de un polinomio tropical en una variable[6]: El conjunto de las raíces de un polinomio tropical

$$P(x) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^+} a_i \odot x^i$$

está constituido por todos los puntos $x \in \mathcal{H}$, donde el valor $P(x) = mín_{i \in \mathbb{Z}^+}\{a_i \odot (x * i)\}$ se alcanza para al menos dos índices distintos $i, j \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 1: (Polinomio de grado 1) Dado el polinomio $P = 4 \odot x \oplus (-3)$ vamos a encontrar los ceros del polinomio y graficarlo.

$$P = 4 + x \oplus (-3)$$

$$P = mín\{4 + x, -3\}$$

Ahora, veamos que funciones se definen para ello se tiene:

$$y = 4 + x \qquad\qquad y = -3$$

Encontrando el punto donde se intersecan las dos rectas definidas:

$$-3 = 4 + x$$

$$-3 - 4 = x$$

$$-7 = x$$

[6] Definición tomada y adaptada de Czubara, (2011).

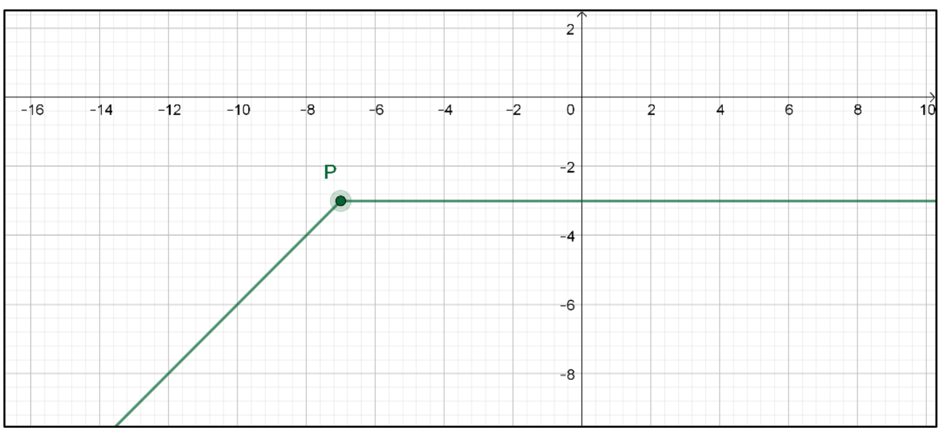
Luego, para conocer los puntos que son raíces del polinomio, hay que evaluar las rectas en los siguientes intervalos de acuerdo con los puntos de intersección, esto con el fin de encontrar los valores mínimos del polinomio.

Tabla 15. Intervalos del Ejemplo 1. Sección 3.1.

Intervalo $(-\infty,-7)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x=-8$ Recta 1: $y=4+x$ $y=4+(-8)$ $y=-4$ Recta 2: $y=-3$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y=4+x$ cuando $x<-7$	Intervalo $[-7,\infty)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x=0$ Recta 1: $y=4+x$ $y=4+(0)$ $y=4$ Recta 2: $y=-3$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y=-3$ cuando $-7\leq x$.

De donde podemos decir que existe una raíz del polinomio es el punto $P(-7,-3)$ y la gráfica se muestra a continuación.

Figura 1. Gráfica del Ejemplo 1. Sección 3.1.



Observación 1: Note que las gráficas de los polinomios de grado 1 se encuentran conformadas por dos semirrectas y solo tiene una raíz que es el punto de intersección de las semirrectas, esto debido a que la expresión polinómica define dos rectas.

Nota: En el ejemplo anterior es importante aclarar que los intervalos son tomados de la siguiente manera: uno abierto y el otro cerrado únicamente para que el punto P no se incluya dos veces en la gráfica del polinomio tropical, es decir que se asume como convención para próximos ejemplos.

Ejemplo 2: (Polinomio de grado 2) Dado el polinomio $P = 5 \odot x^2 \oplus 7 \odot x \oplus 11$ vamos a encontrar los ceros del polinomio y graficarlo.

$$P = 5 \odot (x \odot x) \oplus 7 \odot x \oplus 11$$

$$P = 5 \odot (x + x) \oplus 7 \odot x \oplus 11$$

$$P = 5 \odot (2x) \oplus 7 \odot x \oplus 11$$

$$P = 5 + 2x \oplus 7 + x \oplus 11$$

$$P = mín\{5 + 2x, 7 + x, 11\}$$

Ahora, veamos que funciones se definen para ello se tiene:

$$y = 5 + 2x \qquad\qquad y = 7 + x \qquad\qquad y = 11$$

Utilizando el método de sustitución se tienen los puntos donde se intersecan las rectas dos a dos:

Tabla 16. Puntos de intersección en el polinomio tropical del Ejemplo 2. Sección 3.1.

$5 + 2x = 7 + x$ $x = 2$ Reemplazando se tiene que $y = 7 + 2$ $y = 2$ El punto de intersección de las rectas es $A(2,9)$	$7 + x = 11$ $x = 4$ El punto de intersección de las rectas es $B(4,11)$	$11 = 5 + 2x$ $2x = 6$ $x = 3$ El punto de intersección de las rectas es $C(3,11)$

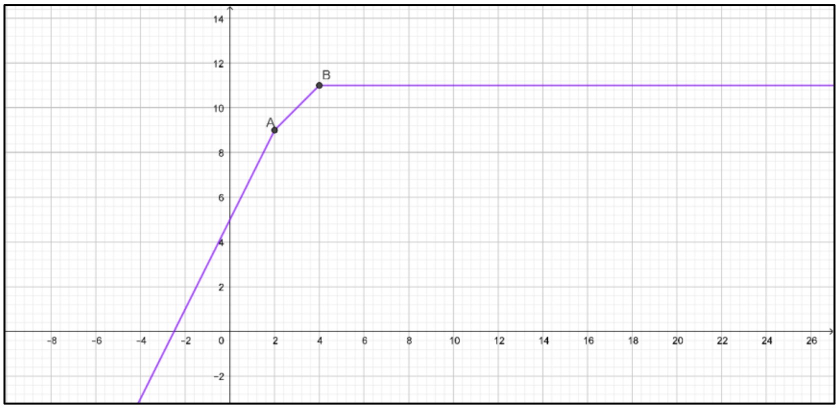
Es preciso evaluar las rectas en los siguientes intervalos de acuerdo con los puntos de intersección, esto con el fin de encontrar los valores mínimos del polinomio y por consiguiente las raíces.

Tabla 17. Intervalos del Ejemplo 2. Sección 3.1.

Intervalo $(-\infty, 2]$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = 1$ Recta 1: $y = 5 + 2x$ $y = 5 + 2(1)$ $y = 7$ Recta 2: $y = 7 + x$ $y = 7 + 1$ $y = 8$ Recta 3: $y = 11$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 5 + 2x$ cuando $x \leq 2$.	Intervalo $(2,3)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = 2.5$ Recta 1: $y = 5 + 2(2.5)$ $y = 5 + 5$ $y = 10$ Recta 2: $y = 7 + x$ $y = 7 + 2.5$ $y = 9.5$ Recta 3: $y = 11$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 7 + x$ cuando $2 < x < 3$.
Intervalo $[3, 4]$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = 3$ Recta 1: $y = 5 + 2(3)$ $y = 5 + 6$ $y = 11$ Recta 2: $y = 7 + x$ $y = 7 + 3$ $y = 10$ Recta 3: $y = 11$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 7 + x$ cuando $3 \leq x \leq 4$.	Intervalo $(4, \infty)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = 5$ Recta 1: $y = 5 + 2(5)$ $y = 5 + 10$ $y = 15$ Recta 2: $y = 7 + x$ $y = 7 + 5$ $y = 12$ Recta 3: $y = 11$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 11$ cuando $x > 4$.

De acuerdo con lo establecido anteriormente se concluye que las raíces del polinomio son: $x = 2$ el cual define al punto $A(2,9)$ y x =4 que define al punto $B(4,11)$, a continuación, se ve la gráfica.

Figura 2. Gráfica del Ejemplo 2. Sección 3.1.



Ejemplo 3: (Polinomio de grado 2) Dado el polinomio $P = 7 \odot x^2 \oplus (-2)$ vamos a encontrar las raíces del polinomio y graficarlo.

$$P = 7 \odot x^2 \oplus (-2)$$

$$P = 7 \odot (2x) \oplus (-2)$$

$$P = 7 + 2x \oplus (-2)$$

$$P = mín\{7 + 2x, -2\}$$

Ahora, veamos que funciones se definen para ello se tiene:

$$y = 7 + 2x \qquad\qquad y = -2$$

Teniendo en cuenta que las raíces son la intersección de las dos rectas construidas anteriormente, se tiene que.

Tabla 18. Puntos de intersección del polinomio de ejemplo 3. Sección 3.1.

$7 + 2x = -2$ $x = -\frac{9}{2}$ El punto de intersección de las rectas es $A(-\frac{9}{2}, -2)$

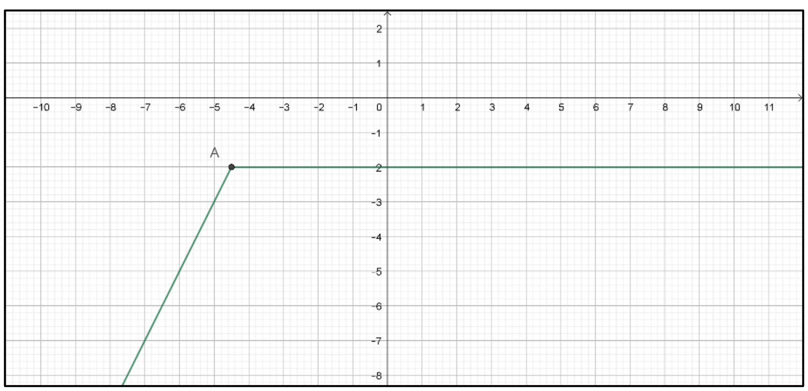
Ahora, se realiza una evaluación de las secciones que divide el punto A, para conocer los puntos que son raíces del polinomio.

Tabla 19. Intervalos del Ejemplo 3. Sección 3.1.

Intervalo $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = -5$ Recta 1: $y = 7 + 2x$ $y = 7 + 2(-5)$ $y = -3$ Recta 2: $y = -2$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 7 + 2x$ cuando $x < -\frac{2}{9}$.	Intervalo $\left[-\frac{9}{2}, \infty\right)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = 0$ Recta 1: $y = 7 + 2(0)$ $y = 7 + 0$ $y = 7$ Recta 2: $y = -2$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = -2$ cuando $-\frac{9}{2} \leq x$.

De donde podemos decir que la raíz del polinomio es el punto $A(-\frac{9}{2}, -2)$, la gráfica la vemos a continuación.

Figura 3. Gráfica del Ejemplo 3. Sección 3.1.



Ejemplo 4: (Polinomio de grado 3) Dado el polinomio $P = 4\odot x^3 \oplus 3$ vamos a encontrar los ceros del polinomio y graficarlo.

$$P = 4\odot x^3 \oplus 3$$

$$P = mín\{4 + 3x, 3\}$$

Ahora, veamos que funciones se definen para ello se tiene:

$$y = 4 + 3x \qquad\qquad y = 3$$

Lo siguiente es encontrar el punto donde se intersecan las rectas dos a dos,

Tabla 20. Puntos de intersección en el polinomio del Ejemplo 4. Sección 3.1.

$4+3x=3$ $x=-\frac{1}{3}$ El punto de intersección de las rectas es $A\left(-\frac{1}{3},3\right)$

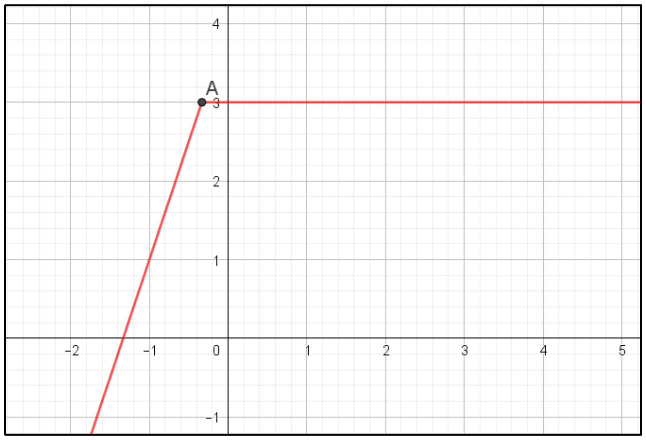
Luego, para conocer los puntos que son raíces del polinomio, hay que evaluar las rectas en los siguientes intervalos de acuerdo con los puntos de intersección, esto con el fin de encontrar los valores mínimos del polinomio.

Tabla 21. Intervalos del Ejemplo 4. Sección 3.1.

Intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x=-1$ Recta 1: $y=4+3x$ $y=4+3(-1)$ $y=1$ Recta 2: $y=3$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y=4+3x$ cuando $x<-\frac{1}{3}$	Intervalo $\left[-\frac{1}{3},\infty\right)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x=0$ Recta 1: $y=4+3(0)$ $y=4+0$ $y=4$ Recta 3: $y=3$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y=3$ cuando $\frac{1}{3}\leq x\leq\infty$.

De donde podemos decir que la raíz del polinomio es el punto $A\left(-\frac{1}{3},3\right)$ y la gráfica se presenta a continuación.

Figura 4. Gráfica del Ejemplo 4. Sección 3.1.



Observación 2: Note que los polinomios en el ejemplo 2 y 3 son de grado 2 y en el ejemplo 4 es de grado 3, pero la gráfica de la función que define el polinomio del ejemplo 3 y 4 tiene el mismo aspecto gráfico que un polinomio de grado 1, esto debido a que dicho polinomio está definido a partir de dos términos, entonces se puede deducir que:

Teorema 2: Si un polinomio tropical es de la forma $a\odot x^n \oplus b$ su gráfica está compuesta por dos semirrectas.

Tabla 22. Demostración Teorema 2. Sección 3.1.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $a\odot x^n \oplus b$ polinomio tropical	Dado
2	$a\odot\left(\underbrace{x\odot x\odot x\odot \ldots \odot x}_{n\ veces}\right)\oplus b$	Potenciación tropical (1)
3	$a\odot\left(\underbrace{x + x + x + \cdots + x}_{n\ veces}\right)\oplus b$	Producto tropical (2)
4	$a\odot nx \oplus b$	Suma en los reales (3)
5	$a + nx \oplus b$	Producto tropical (4)
6	$mín\{a + nx, b\}$	Suma tropical (5)
7	$y = a + nx$ $y = b$	Asociación de la función (6)

8	El cero del polinomio es el punto $$A = \left(\frac{b-a}{n}, b\right)$$	Definición de los ceros del polinomio tropical (1,7)
9	Intervalo $\left(-\infty, \frac{b-a}{n}\right)$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = a + nx$ cuando $$x < \frac{b-a}{n}$$ Intervalo $\left[\frac{b-a}{n}, \infty\right)$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = b$ cuando $$x \geq \frac{b-a}{n}$$	Evaluación de intervalos (7,8)

Ejemplo 5: (Polinomio de grado 3) Dado el polinomio $P = 2 \odot x^3 \oplus 7 \odot x^2 \oplus 3$ vamos a encontrar las raíces del polinomio y graficarlo.

$$P = 2 \odot x^3 \oplus 7 \odot x^2 \oplus 3$$

$$P = mín\{2 + 3x, 7 + 2x, 3\}$$

Ahora, veamos que funciones se definen para ello se tiene:

$$y = 2 + 3x \qquad y = 7 + 2x \qquad y = 3$$

Lo siguiente es encontrar el punto donde se intersecan las rectas dos a dos,

Tabla 23. Puntos de intersección en el polinomio del Ejemplo 5. Sección 3.1.

$2 + 3x = 7 + 2x$ $x = 5$ Reemplazando se tiene que $y = 7 + 2(5)$ $y = 17$ El punto de intersección de las rectas es $A(5,17)$	$7 + 2x = 3$ $x = -2$ El punto de intersección de las rectas es $B(-2,3)$	$3 = 2 + 3x$ $1 = 3x$ $x = \frac{1}{3}$ El punto de intersección de las rectas es $C\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

Luego, para conocer los puntos que son raíces del polinomio, hay que evaluar las rectas en los siguientes intervalos de acuerdo con los puntos de intersección, esto con el fin de encontrar los valores mínimos del polinomio.

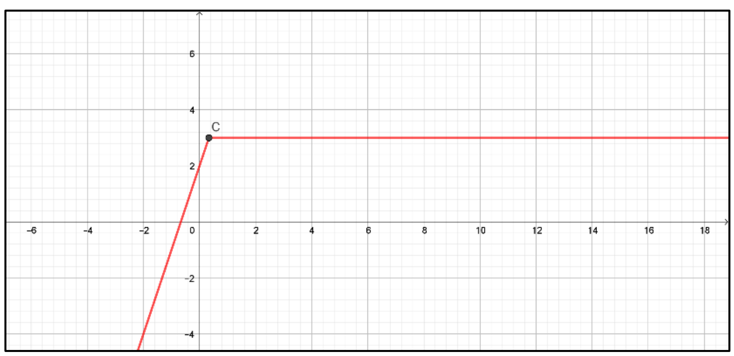
Tabla 24. Intervalos del Ejemplo 5. Sección 3.1.

Intervalo $(-\infty, -2)$	Intervalo $\left[-2, \frac{1}{3}\right)$	Intervalo $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

Vamos a evaluar a las rectas en $x = -3$ Recta 1: $y = 2 + 3x$ $y = 2 + 3(-3)$ $y = -7$ Recta 2: $y = 7 + 2x$ $y = 7 + 2(-3)$ $y = 1$ Recta 3: $y = 3$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 2 + 3x$ cuando $x < -2.$	Vamos a evaluar a las rectas en $x = 0$ Recta 1: $y = 2 + 3(0)$ $y = 2 + 0$ $y = 2$ Recta 2: $y = 7 + x$ $y = 7 + 0$ $y = 7$ Recta 3: $y = 3$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 2 + 3x$ cuando $2 \leq x < \frac{1}{3}.$	Vamos a evaluar a las rectas en $x = 2$ Recta 1: $y = 2 + 3(2)$ $y = 2 + 6$ $y = 8$ Recta 2: $y = 7 + x$ $y = 7 + 2$ $y = 9$ Recta 3: $y = 3$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 3$ cuando $\frac{1}{3} \leq x \leq \infty.$

De donde podemos decir que la raíz del polinomio es el punto $C\left(\frac{1}{3}, 3\right)$y la gráfica del polinomio con sus respectivos puntos la vemos a continuación.

Figura 5. Gráfica del Ejemplo 5. Sección 3.1.



Ejemplo 6: (Polinomio de grado 3) Dado el polinomio $P = 3 \odot x^3 \oplus 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 6$ encontrar los ceros del polinomio y graficar la función que define.

$$P = 3 \odot x^3 \oplus 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 6$$

$$P = mín\{3 + 3x, 2 + 2x, 3 + x, 6\}$$

Ahora, veamos que funciones se definen para ello se tiene:

$y = 3 + 3x$ $\quad$ $y = 2 + 2x$ $\quad$ $y = 3 + x$ $\quad$ $y = 6$

Gracias a los diferentes métodos podemos solucionar el sistema de ecuaciones y encontramos los puntos de intersección.

Tabla 25. Ceros del polinomio del Ejemplo 6. Sección 3.1.

$3 + 3x = 2 + 2x$ $x = -1$ Reemplazando se tiene que $y = 2 + 2(-1)$ $y = 0$ El punto de intersección de las rectas es $A(-1,0)$	$3 + 3x = 3 + x$ $x = 0$ Reemplazando se tiene que $y = 3 + 0$ $y = 3$ El punto de intersección de las rectas es $B(0,3)$	$2 + 2x = 3 + x$ $x = 1$ Reemplazando se tiene que $y = 2 + 2(1)$ $y = 2$ El punto de intersección de las rectas es $C(1,4)$
$3 + 3x = 6$ $x = 1$ El punto de intersección de las rectas es $D(1,6)$	$2 + 2x = 6$ $x = 2$ El punto de intersección de las rectas es $E(2,6)$	$3 + x = 6$ $x = 3$ El punto de intersección de las rectas es $F(3,6)$

Ahora, hay que evaluar las rectas en los siguientes intervalos de acuerdo con los puntos de intersección, para identificar los mínimos.

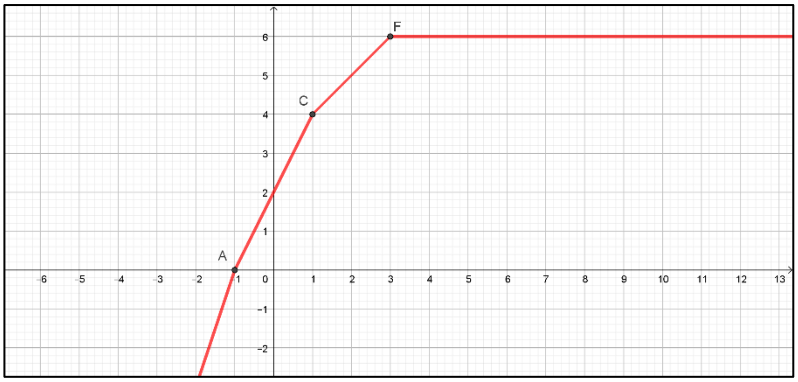
Tabla 26. Intervalos del Ejemplo 6. Sección 3.1.

Intervalo $(-\infty, -1)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = -2$ Recta 1: $y = 3 + 3x$ $y = 3 + 3(-2)$ $y = -3$ Recta 2: $y = 2 + 2x$ $y = 2 + 2(-2)$ $y = -2$ Recta 3: $y = 3 + x$ $y = 3 + (-2)$ $y = 1$ Recta 4: $y = 6$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función	Intervalo $[-1,0)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = -\frac{1}{2}$ Recta 1: $y = 3 + 3x$ $y = 3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)$ $y = \frac{1}{2}$ Recta 2: $y = 2 + 2x$ $y = 2 + 2(-\frac{1}{2})$ $y = 1$ Recta 3: $y = 3 + x$ $y = 3 + (-\frac{1}{2})$	Intervalo $[0,1)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = \frac{1}{2}$ Recta 1: $y = 3 + 3x$ $y = 3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)$ $y = \frac{9}{2}$ Recta 2: $y = 2 + 2x$ $y = 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)$ $y = 3$ Recta 3: $y = 3 + x$ $y = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)$

corresponde a $y = 3 + x$ cuando $$x < -1.$$	$$y = \frac{5}{2}$$ Recta 4: $y = 6$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 3 + 3x$ cuando $$-1 \leq x < 0.$$	$$y = \frac{7}{2}$$ Recta 4: $y = 6$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 2 + 2x$ cuando $$0 \leq x < 1.$$
Intervalo $[1,2)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = \frac{3}{2}$ Recta 1: $y = 3 + 3x$ $$y = 3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)$$ $$y = \frac{15}{2}$$ Recta 2: $y = 2 + 2x$ $$y = 2 + 2\left(\frac{3}{2}\right)$$ $$y = 5$$ Recta 3: $y = 3 + x$ $$y = 3 + \left(\frac{3}{2}\right)$$ $$y = \frac{9}{2}$$ Recta 4: $y = 6$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 3 + x$ cuando $$1 \leq x < 2.$$	Intervalo $[2,3)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = \frac{5}{2}$ Recta 1: $y = 3 + 3x$ $$y = 3 + 3\left(\frac{5}{2}\right)$$ $$y = \frac{21}{2}$$ Recta 2: $y = 2 + 2x$ $$y = 2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)$$ $$y = 7$$ Recta 3: $y = 3 + x$ $$y = 3 + \left(\frac{5}{2}\right)$$ $$y = \frac{11}{2}$$ Recta 4: $y = 6$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 3 + x$ cuando $$2 \leq x < 3.$$	Intervalo $[3,\infty)$ Vamos a evaluar a las rectas en $x = 4$ Recta 1: $y = 3 + 3x$ $$y = 3 + 3(4)$$ $$y = 15$$ Recta 2: $y = 2 + 2x$ $$y = 2 + 2(4)$$ $$y = 10$$ Recta 3: $y = 3 + x$ $$y = 3 + (4)$$ $$y = 7$$ Recta 4: $y = 6$ Lo que quiere decir que la gráfica de la función corresponde a $y = 6$ cuando $$3 \leq x < \infty.$$

Se concluye que los puntos $A(-1,0), B(1,4) y\ F(3,6)$ son las raíces del polinomio, en la imagen que sigue se presenta la gráfica.

Figura 6. Gráfica del Ejemplo 6. Sección 3.1.



Observación 3: Notemos que la gráfica del polinomio sin importar el grado depende de cuántos términos tenga la expresión, ya que son el número de rectas que se analiza para encontrar el mínimo en cada intervalo.

Observación 4**:** Debido a la forma de analizar los polinomios, se cumple que existen dos o más polinomios que representan la misma función, estos visto en los anteriores ejemplos presentados.

3.2.Polinomio de grado uno en dos Variables. (Rectas Tropicales).

Definición de recta tropical[7]: Una recta tropical son los puntos $(x, y) \in \mathcal{H}^2$, donde se tiene

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

donde el mínimo es asumido por lo menos dos veces uno entre a, b es distinto de $0_{\mathcal{H}}$.

Ejemplo 1: Dada la recta tropical $a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$

$$mín\{a \odot x, b \odot y, c\}$$

$$mín\{a + x, b + y, c\}$$

De acuerdo con la definición de la recta tropical, el mínimo debe asumirse al menos dos veces, se obtiene que:

[7] La definición de recta tropical fue consultada en (Diana, 2010).

$$a + x = b + y \leq c$$

$$a + x = c \leq b + y$$

$$b + y = c \leq a + x$$

De donde la recta tropical es formada a partir de la unión de tres semirrectas que cumplen las tres desigualdades.

Teorema 1: La recta tropical que está dada por la siguiente expresión:

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

Es la unión de tres semirrectas donde el punto de origen de dichas semirrectas es el punto $P(x, y) = (c - a, c - b)$. La demostración se ve en la tabla 26.

Tabla 27. Demostración Teorema 1. Sección 3.2.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea la recta tropical de expresión $a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$	Dado
2	$mín\{a \odot x, b \odot y, c\}$	Definición de suma tropical (1)
3	$mín\{a + x, b + y, c\}$	Definición de producto tropical (2)
4	$a + x = b + y \leq c$ $a + x = c \leq b + y$ $b + y = c \leq a + x$	Definición de recta tropical (1,3)
5	$a + x = b + y$ $a + x = c$ $b + y = c$	Rectas (4)
6	$a + x = b + y$ $a + x + y + b = 2c$	Suma de ecuaciones (5)
7	$x - y = b - a$ $x + y = 2c - a - b$	Organización de términos (6)
8	$x = c - a$ $y = c - b$	Solución por medio del método de Gauss Jordan (7)
9	$P(c - a, c - b)$ intersección de las rectas $a + x = b + y$ $a + x = c$ $b + y = c$	Intersección de rectas usuales (5,8)

10	$P(c-a, c-b)$ origen de las semirrectas dadas por $a+x=b+y \leq c$ $a+x=c \leq b+y$ $b+y=c \leq a+x$	Definición de semirrecta (9)

Observación 1: Note que la construcción de las semirrectas está dada así:

a. Si $x \leq c-a$ entonces la gráfica toma la función $a+x=b+y$.

b. Si $x > c-a$ entonces la gráfica toma la función $a+x=c$ y $b+y=c$

Ejemplo 2: Dada la expresión de la recta tropical $5 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 8$ se pretende encontrar las ecuaciones que definen las semirrectas y su representación en el plano.

La ecuación de la recta es equivalente a

$$5 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 8 = mín\{5 \odot x, 3 \odot y, 8\}$$

$$= mín\{5+x, 3+y, 8\}$$

Según la definición de recta tropical al asumir el mínimo dos veces se tienen las siguientes desigualdades:

$5+x=3+y \leq 8$	$5+x=8 \leq 3+y$	$3+y=8 \leq 5+x$
$x=3+y-5 \leq 8$	$x=8-5 \leq 3+y$	$y=8-3 \leq 5+x$
$x=y-2 \leq 8$	$x=3 \leq 3+y$	$y=5 \leq 5+x$

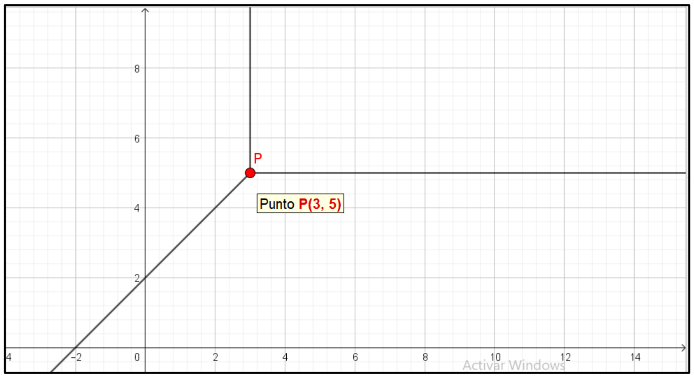
Para encontrar el punto de origen de las semirrectas tenemos que por el **Teorema 1** de la sección 3.2. dicho punto es:

$$P(8-5, 8-3)$$

$$P(3,5)$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P(3,5)$, de acuerdo con la observación 1, la gráfica en los valores para $x < 3$ toma la recta $x = y-2$, para $x \geq 3$ toma las rectas $x=3$ e $y=5$, a continuación, se ve la gráfica.

Figura 7. Gráfica del Ejemplo 2. Sección 3.2.



Nota: En el ejemplo anterior es importante aclarar que los intervalos son tomados de la siguiente forma: uno abierto y el otro cerrado únicamente para que el punto P no se incluya dos veces en la gráfica de la recta tropical, es decir que se asume como convención para próximos ejemplos.

Recordando el capítulo 1 se establecen aquellas propiedades en la geometría analítica y surgen los siguientes cuestionamientos a analizar:

- ¿A partir de cuántos puntos se puede encontrar la ecuación de la recta tropical? Para dar respuesta a la pregunta se debe analizar los elementos que se involucra en la ecuación de la recta tropical.
- Se puede encontrar la ecuación de la recta si se tiene el punto P que es el origen de las semirrectas y el valor de a, b ó c, veamos un ejemplo para ilustrar lo anterior.

Ejemplo 3: La recta cuyo punto P que es origen de las tres semirrectas tiene coordenadas $(2, -1)$ y el valor de $c = 5$, vamos a construir la expresión de la recta y graficarla en el plano cartesiano.

Recordemos que la ecuación de la recta tropical tiene la siguiente forma:

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

En el ejemplo se tiene el valor de c entonces sustituyendo tenemos que:

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus 5$$

Pero también tenemos el punto origen de las semirrectas que según la definición tiene las siguientes coordenadas:

$$P(c-a, c-b) = (2, -1)$$

Con esta información obtenemos las siguientes igualdades

$$c - a = 2 \ \wedge c - b = -1$$

Recordemos que el valor de $c = 5$ entonces despejando a a y b respectivamente tenemos que:

$$a = 3 \ \wedge b = 6$$

Ahora, la expresión de la recta tropical es:

$$3 \odot x \oplus 6 \odot y \oplus 5$$

De donde podemos encontrar las siguientes desigualdades:

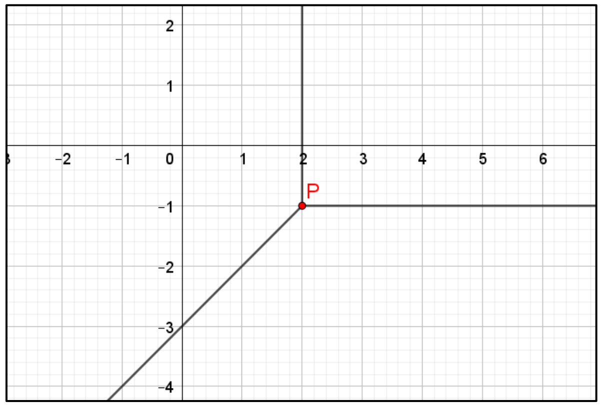
$$3 + x = 6 + y \ \leq 5 \qquad 3 + x = 5 \leq 6 + y \qquad 6 + y = 5 \leq 3 + x$$

$$x - y = 6 - 3 \ \leq 5 \qquad x = 5 - 3 \leq 6 + y \qquad y = 5 - 6 \leq 3 + x$$

$$x - y = 3 \ \leq 5 \qquad x = 2 \leq 6 + y \qquad y = -1 \leq 3 + x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P(2, -1)$, de acuerdo con la observación 1, la gráfica en los valores para $x < 2$ toma la recta $x = y + 3$, para $x \geq 2$ toma las rectas $x = 2$ e $y = -1$, a continuación, se ve la gráfica.

Figura 8. Gráfica del Ejemplo 3. Sección 3.2.



Ejemplo 4: La recta cuyo punto P que es origen de las tres semirrectas tiene coordenadas $(-3, \pi)$ y el valor de $b = 8$, encuentre la expresión de la recta y grafíquela en el plano cartesiano.

Recordemos que la ecuación de la recta tropical tiene la siguiente forma:

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

En el ejemplo se tiene el valor de b, remplazando en la expresión se tiene que:

$$a \odot x \oplus 8 \odot y \oplus c$$

Pero también tenemos el punto origen de las semirrectas que según la definición tiene las siguientes coordenadas:

$$P(c - a, c - b) = (-3, \pi)$$

Con esta información obtenemos las siguientes igualdades

$$c - a = -3 \ \wedge c - b = \pi$$

Recordemos que el valor de $b = 8$ entonces despejando a a y c respectivamente tenemos que:

$$a = \ \pi + 11 \ \wedge c = \pi + 8$$

Ahora, la expresión de la recta tropical es:

$$(\pi + 11) \odot x \oplus 8 \odot y \oplus (\pi + 8)$$

$$= ((\pi \odot 11) \odot x) \oplus \ 8 \odot y \oplus (\pi \odot 8)$$

$$= (\pi \odot 11 \odot x) \oplus\ 8 \odot y \oplus (\pi \odot 8)$$

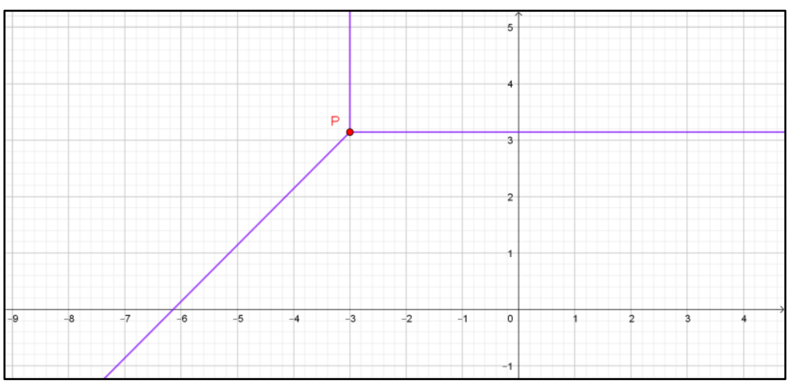
De donde podemos encontrar las siguientes desigualdades:

Tabla 28. Desigualdades del Ejemplo 4. Sección 3.2.

$\pi + 11 + x = 8 + y\ \leq \pi + 8$ $x + \pi + 11 - 8 = y \leq \pi + 8$ $x + \pi + 3 = y\ \leq \pi + 8$
$\pi + 11 + x = \pi + 8 \leq 8 + y$ $x = \pi - \pi + 8 - 11 \leq 8 + y$ $x = -3 \leq 8 + y$
$8 + y = \pi + 8 \leq \pi + 11 + x$ $y = \pi + 8 - 8 \leq \pi + 11 + x$ $y = \pi \leq \pi + 11 + x$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P(-3, \pi)$, de acuerdo con la observación 1, la gráfica en los valores donde $x < -3$ toma la recta $x + \pi + 3 = y$, para los $x \geq -3$ toma las rectas $x = -3$ e $y = \pi$, veamos la siguiente gráfica.

Figura 9. Gráfica del Ejemplo 4. Sección 3.2.



Ejemplo 5: Dada la recta tropical donde se tiene el punto P origen de las tres semirrectas tiene coordenadas $(0, -1)$, además se tiene el valor de $a = 5$, veamos la expresión de la recta y su gráfica en el plano cartesiano.

Se parte inicialmente de la ecuación general de la recta:

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

Recodemos que se tiene el valor de a, sustituyendo tenemos que:

$$5 \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

De acuerdo con el punto P que es el origen que se definen con las siguientes igualdades:

$$P(c - a, c - b) = (0, -1)$$

$$c - a = 0 \ \wedge c - b = -1$$

Como $a = 5$, se remplaza gracias a los métodos de sustitución se encuentra el valor de b y c respectivamente tenemos que:

$$c = \ 5 \ \wedge \ b = 6$$

Teniendo en cuenta esto valores se concluye que la expresión de la recta tropical es:

$$5 \odot x \oplus 6 \odot y \oplus 5$$

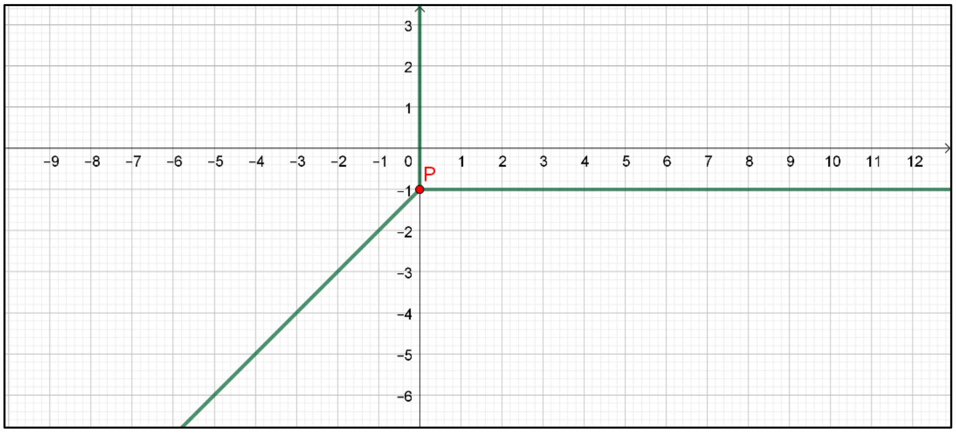
De donde podemos encontrar las siguientes desigualdades:

Tabla 29. Desigualdades del Ejemplo 5. Sección 3.1.

$5 + x = 6 + y \ \leq 5$ $x + 5 - 6 = y \ \leq 5$ $x - 1 = y \ \leq 5$
$5 + x = 5 \leq 6 + y$ $x = 5 - 5 \leq 6 + y$ $x = 0 \leq 6 + y$
$6 + y = 5 \leq 5 + x$ $y = 5 - 6 \leq 5 + x$ $y = -1 \leq 5 + x$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P(0, -1)$, de acuerdo con la observación 1, la gráfica en los valores $x < 0$ toma la recta ecuaciones $x - 1 = y$, $x \geq 0$ toma las rectas $x = 0$ e $y = -1$, a continuación, se ve la gráfica.

Figura 10. Gráfica del Ejemplo 5. Sección 3.2.



Teorema 2: Sea el punto $P(x, y)$ origen de las semirrectas que conforman la recta tropical y se cumple alguna única de las siguientes condiciones:

- Se conoce el valor de a.
- Se conoce el valor de b.
- Se conoce el valor de c.

Entonces se puede obtener los coeficientes restantes para la expresión de la recta tropical. La demostración se encuentra en la siguiente Tabla 29.

Tabla 30. Demostración Teorema 2. Sección 3.2.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sea $P(x_1, y_1)$ y $n \in \mathcal{H}$	Dado
2	1. $a = n$ 2. $b = n$ 3. $c = n$	Casos (1)
3	$a = n$	Caso 1 (2)
4	$P(x_1, y_1) = (c - a, c - b)$	Teorema 1 (1,3)
5	$c - a = x_1$ $c - b = y_1$	Igualdad (4)
6	$c - n = x_1$	Sustitución (3,5)
7	$c = x_1 + n$	Propiedad de los reales (6)

8	$x_1 + n - b = y_1$	Sustitución (5,7)
9	$x_1 + n - y_1 = b$	Propiedad de los reales (8)
10	$n \odot x \oplus (x_1 + n - y_1) \odot y \oplus (x_1 + n)$	Definición de recta tropical (9)
11	$b = n$	Caso 2 (2)
12	$P(x_1, y_1) = (c - a, c - b)$	Teorema 1 (1,11)
13	$c - a = x_1$ $c - b = y_1$	Propiedad de los reales (12)
14	$c - n = y_1$	Sustitución (11,13)
15	$c = y_1 + n$	Propiedad de los reales (14)
16	$y_1 + n - a = x_1$	Sustitución (13,15)
17	$y_1 + n - x_1 = a$	Propiedad de los reales (16)
18	$(y_1 + n - x_1) \odot x \oplus n \odot y \oplus (y_1 + n)$	Definición de recta tropical (17)
19	$c = n$	Caso 3 (2)
20	$P(x_1, y_1) = (c - a, c - b)$	Teorema 1 (1,19)
21	$c - a = x_1$ $c - b = y_1$	Propiedad de los reales (19)
22	$n - a = x_1$ $n - b = y_1$	Sustitución (19,21)
23	$n - x_1 = a$ $n - y_1 = b$	Propiedad de los reales (22)
24	$(n - x_1) \odot x \oplus (n - y_1) \odot y \oplus n$	Definición de recta tropical (23)

Otro punto a analizar la unicidad de las rectas tropicales entonces se tiene la siguiente pregunta ¿Se mantiene el postulado de la recta[8]?

Debido al estudio realizado no se puede afirmar que el postulado de la unicidad de la recta sea válido para las rectas tropicales, ya que la ecuación de una recta tropical se puede determinar teniendo el punto origen de las semirrectas y un valor bien sea a, b o c, donde será analizado más adelante en el desarrollo de la sección.

Si observamos la forma gráfica de una recta tropical que está compuesta por tres semirrectas, se genera el siguiente cuestionamiento ¿Cómo se da la intersección de dos rectas tropicales?, es claro

[8] El postulado de la recta entendido como: Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene. (Moise, 1966).

que no se puede definir las rectas tropicales paralelas con la noción de no intersección ya que intuitivamente sabemos que dos rectas siempre se van a intersecar, esto es:

Postulado 1: Dos rectas tropicales se pueden intersecar en:

- Un único punto.
- Infinitos puntos.

Teorema 3: Dadas l y m dos rectas tropicales definidas como: $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ y $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. Si $c_1 - a_1 = c_2 - a_2$ o $c_1 - b_1 = c_2 - b_2$ entonces l y m se intersecan en infinitos puntos. En la Tabla 30 vemos la demostración del teorema.

Tabla 31. Demostración Teorema 3. Sección 3.2.

#	Afirmación	Garantía
1	Sean $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. Si $c_1 - a_1 = c_2 - a_2$ o $c_1 - b_1 = c_2 - b_2$	Dado
2	1. $c_1 - a_1 = c_2 - a_2$	Caso 1 (1)
3	$mín\{a_1 \odot x, b_1 \odot y, c_1\}$ $mín\{a_2 \odot x, b_2 \odot y, c_2\}$	Definición de suma tropical (2)
4	$mín\{a_1 + x, b_1 + y, c_1\}$ $mín\{a_2 + x, b_2 + y, c_2\}$	Definición de producto tropical (3)
5	De l $a_1 + x = b_1 + y \leq c_1$ $a_1 + x = c_1 \leq b_1 + y$ $b_1 + y = c_1 \leq a_1 + x$ De m $a_2 + x = b_2 + y \leq c_2$ $a_2 + x = c_2 \leq b_2 + y$ $b_2 + y = c_2 \leq a_2 + x$	Definición de recta tropical (1,4)
6	De l $a_1 - b_1 + x = y \leq c_1$ $x = c_1 - a_1 \leq b_1 + y$ $y = c_1 - b_1 \leq a_1 + x$ De m $a_2 - b_2 + x = y \leq c_2$	Propiedades los reales (5)

	$x = c_2 - a_2 \leq b_2 + y$ $y = c_2 - b_2 \leq a_2 + x$	
7	$x = c_1 - a_1$ $x = c_2 - a_2$ Son iguales	Igualdad de rectas (6,2)
8	La intersección de las rectas $x = c_1 - a_1$ $x = c_2 - a_2$ Son todos sus puntos	Intersección de rectas (7)
9	Las semirrectas contenidas en las rectas $x = c_1 - a_1$ $x = c_2 - a_2$ Se intersecan en infinitos puntos	Subconjunto de la recta (8)
10	Las rectas $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. Se intersecan en infinitos puntos	Teorema 1 (9,5)
11	2. $c_1 - b_1 = c_2 - b_2$	Casos 2 (1)
12	Las rectas $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. Se intersecan en infinitos puntos	Análogo (2-11)

Teorema 4: Dadas l y m dos rectas tropicales definidas como: $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ y $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. Si $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$ entonces l y m se intersecan en infinitos puntos.

Nota: La demostración del teorema 4 es análoga a la del teorema 3.

Teorema 5: Dadas l y m dos rectas tropicales definidas como: $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ y $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. Si $c_1 - a_1 \neq c_2 - a_2$, $c_1 - b_1 \neq c_2 - b_2$ y $a_1 - b_1 \neq a_2 - b_2$ entonces l y m se intersecan en único punto.

La demostración del teorema 5 se presenta en la tabla 31.

Tabla 32. Demostración Teorema 5. Sección 3.2.

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	Sean $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$	Dado

	$m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$ Si $c_1 - a_1 \neq c_2 - a_2$, $c_1 - b_1 \neq c_2 - b_2$ y $a_1 - b_1 \neq a_2 - b_2$	
2	$mín\{a_1 \odot x, b_1 \odot y, c_1\}$ $mín\{a_2 \odot x, b_2 \odot y, c_2\}$	Definición de suma tropical (1)
3	$mín\{a_1 + x, b_1 + y, c_1\}$ $mín\{a_2 + x, b_2 + y, c_2\}$	Definición de producto tropical (2)
4	De l $a_1 + x = b_1 + y \leq c_1$ $a_1 + x = c_1 \leq b_1 + y$ $b_1 + y = c_1 \leq a_1 + x$ De m $a_2 + x = b_2 + y \leq c_2$ $a_2 + x = c_2 \leq b_2 + y$ $b_2 + y = c_2 \leq a_2 + x$	Definición de recta tropical (1,3)
5	De l $a_1 - b_1 + x = +y \leq c_1$ $x = c_1 - a_1 \leq b_1 + y$ $y = c_1 - b_1 \leq a_1 + x$ De m $a_2 - b_2 + x = +y \leq c_2$ $x = c_2 - a_2 \leq b_2 + y$ $y = c_2 - b_2 \leq a_2 + x$	Propiedades los reales (5)
6	Las rectas $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. No se intersecan en infinitos puntos	Teorema 3 y 4 (1,5)
7	Las rectas $l: a_1 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus c_1$ $m: a_2 \odot x \oplus b_2 \odot y \oplus c_2$. Se intersecan en único punto.	Postulado 1 (1, 6)

Ejemplo 6: Dadas las rectas tropicales $l: 6 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 9$ y $m: 8 \odot x \oplus 4 \odot y \oplus 2$, determinaremos si se intersecan en un único punto o en infinitos puntos.

Tenemos la recta $6 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 9$ calculando el punto origen de las semirrectas $P_1(3,6)$, podemos encontrar las siguientes desigualdades:

$$6 + x = 3 + y \ \leq 9 \qquad 6 + x = 9 \leq 3 + y \qquad 3 + y = 9 \leq 6 + x$$

$$x - y = 3 - 6 \ \leq 5 \qquad x = 9 - 6 \leq 3 + y \qquad y = 9 - 3 \leq 6 + x$$

$$x - y = -3 \ \leq 5 \qquad x = 3 \leq 6 + y \qquad y = 6 \leq 3 + x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P_1(3,6)$ y tienen ecuaciones $x = y - 3$, $x = 3$ e $y = 6$.

Para la recta $8 \odot x \oplus 4 \odot y \oplus 2$ donde su punto origen de las semirrectas es: $P_2(-6,-2)$, podemos encontrar las siguientes desigualdades:

$$8 + x = 4 + y \ \leq 2 \qquad 8 + x = 2 \leq 4 + y \qquad 4 + y = 2 \leq 8 + x$$

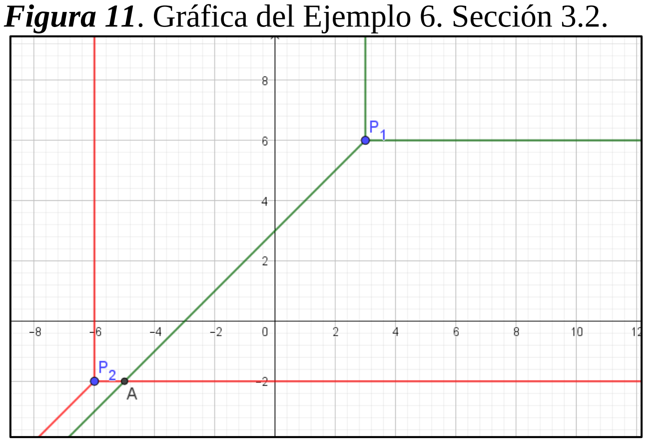
$$x - y = 4 - 8 \ \leq 2 \qquad x = 2 - 8 \leq 4 + y \qquad y = 2 - 4 \leq 8 + x$$

$$x - y = -4 \ \leq 2 \qquad x = -6 \leq 4 + y \qquad y = -2 \leq 8 + x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P_2(-6,-2)$ y tienen ecuaciones $x = y - 4$, $x = -6$ e $y = -2$.

Notemos que las rectas no se intersecan en infinitos puntos, ya que $6 - 3 \neq 8 - 4, 9 - 3 \neq 2 - 4$ y $9 - 6 \neq 2 - 8$, entonces estas dos rectas se intersecan en un único punto que trazando las rectas tenemos:

Figura 11. Gráfica del Ejemplo 6. Sección 3.2.



Las rectas se intersecan en un único punto A, para encontrar dicho punto vamos a comparar las semirrectas entre sí, es importante reconocer que se debe analizar las expresiones de las rectas que contienen a las semirrectas para evaluar si los puntos encontrados están en la semirrecta correspondiente, para ello haremos lo siguiente: Vamos a tomar la recta tropical m que en la gráfica corresponde a la roja que está compuesta por las siguientes semirrectas:

La semirrecta contenida en la recta $x = -6$ que tiene origen en el punto $P_2(-6, -2)$, será a comparada con $x = y - 3$, $x = 3$ e $y = 6$.

Primer caso: $x = -6$ y $x = 3$ son rectas paralelas ya que ambas son perpendiculares al eje y.

Segundo caso: $x = -6$ y $y = 6$ son rectas perpendiculares y se intersecan en el punto $(-6{,}6)$, pero este punto no está en las dos semirrectas así que no puede ser la intersección de las rectas tropicales.

Tercer caso: $x = -6$ y $x = y - 3$ estas dos rectas se intersecan en el punto $(-6{,}3)$, pero este punto no pertenece a las dos semirrectas entonces no puede ser el punto de intersección de las dos rectas tropicales dadas.

La semirrecta contenida en la recta $y = -2$ que tiene origen en el punto $P_2(-6, -2)$, vamos a compararla con $x = y - 3$, $x = 3$ e $y = 6$.

Primer caso: $y = -2$ y $x = 3$ son rectas perpendiculares y se intersecan en el punto $(3, -2)$ pero este punto no está en las dos semirrectas así que no puede ser la intersección de las rectas tropicales.

Segundo caso: $y = -2$ e $y = 6$ son rectas paralelas, ya que ambas son perpendiculares al eje x, pero diferentes.

Tercer caso: $y = -2$ y $x = y - 3$ estas dos rectas se intersecan en el punto $(-5, -2)$, este punto pertenece a las dos semirrectas es el punto de intersección de las dos rectas tropicales dadas.

La semirrecta contenida en la recta $x - y = -4$ que tiene origen en el punto $P_2(-6, -2)$, será comparada con $x = y - 3$, $x = 3$ e $y = 6$.

Esta situación no será analizada ya que se dijo que las rectas tropicales se intersecan en un único punto A donde dicho punto ya fue encontrado.

Ejemplo 7: Dadas las rectas tropicales $l: 3 \odot x \oplus (-5) \odot y \oplus 9$ y $m: (-2) \odot x \oplus (-3) \odot y \oplus (-1)$, determine si se intersecan en un único punto y cuál es o en infinitos puntos.

Tenemos la recta $3 \odot x \oplus (-5) \odot y \oplus 9$ calculando el punto origen de las semirrectas $P_1(6, 14)$, luego podemos encontrar las siguientes desigualdades:

$$3 + x = y - 5 \ \leq 9 \qquad 3 + x = 9 \leq y - 5 \qquad y - 5 = 9 \leq 3 + x$$

$$x - y = -3 - 5 \leq 9 \qquad x = 9 - 3 \leq y - 5 \qquad y = 9 + 5 \leq 3 + x$$

$$x - y = -8 \ \leq 9 \qquad x = 6 \leq y - 5 \qquad y = 14 \leq 3 + x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P_1(3,6)$ y tienen ecuaciones $x = y - 8$, $x = 6$ e $y = 14$.

Para la recta: $(-2) \odot x \oplus (-3) \odot y \oplus (-1)$, donde su punto origen de las semirrectas es: $P_2(1,2)$, de donde podemos encontrar las siguientes desigualdades:

$$-2 + x = -3 + y \ \leq -1 \qquad -2 + x = -1 \leq -3 + y \qquad -3 + y = -1 \leq -2 + x$$

$$x - y = -3 + 2 \ \leq -1 \qquad x = 2 - 1 \leq -3 + y \qquad y = -1 + 3 \leq -2 + x$$

$$x - y = -1 \ \leq -1 \qquad x = 1 \leq -3 + y \qquad y = 2 \leq -2 + x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P_2(1,2)$ y tienen ecuaciones $x = y - 1$, $x = 1$ e $y = 2$.

Notemos que las rectas no se intersecan en infinitos puntos, ya que $9-3 \neq -1+2, 9+5 \neq -1+3$ y $3+5 \neq -2+3$, entonces estas dos rectas se intersecan en un único punto que trazando las rectas tenemos:

Las rectas se intersecan en un único punto A, para encontrar dicho punto vamos a comparar las semirrectas entre sí, es importante reconocer que debemos analizar las ecuaciones de las rectas que contienen a las semirrectas para evaluar si los puntos encontrados están en la semirrecta correspondiente, para ello haremos lo siguiente: Vamos a tomar la recta tropical l que en la gráfica corresponde a la roja que está compuesta por las siguientes semirrectas:

La semirrecta contenida en la recta $x = 6$ que tiene origen en el punto $P_1(6,14)$, será a comparada con $x = y - 5$, $x = 1$ e $y = 2$.

Primer caso: $x = 6$ y $x = 1$ son rectas paralelas ya que ambas son perpendiculares al eje y.

Segundo caso: $x = 6$ y $y = 2$ son rectas perpendiculares y se intersecan en el punto $(6,2)$, pero este punto no está en las dos semirrectas así que no puede ser la intersección de las rectas tropicales.

Tercer caso: $x = 6$ y $x = y - 5$ estas dos rectas se intersecan en el punto $(6,11)$, pero este punto no pertenece a las dos semirrectas entonces no puede ser el punto de intersección de las dos rectas tropicales dadas.

La semirrecta contenida en la recta $y = 14$ que tiene origen en el punto $P_1(6,14)$, vamos a compararla con $x = y - 5$, $x = 1$ e $y = 2$.

Primer caso: $y = 14$ y $x = 1$ son rectas perpendiculares y se intersecan en el punto $(1,14)$ pero este punto no está en las dos semirrectas así que no puede ser la intersección de las rectas tropicales.

Segundo caso: $y = 14$ e $y = 2$ son rectas paralelas, ya que ambas son perpendiculares al eje x, pero diferentes.

Tercer caso: $y = 14$ y $x = y - 5$ estas dos rectas se intersecan en el punto $(9,14)$, este punto no pertenece a las dos semirrectas es el punto de intersección de las dos rectas tropicales dadas. así que no puede ser la intersección de las rectas tropicales.

La semirrecta contenida en la recta $x - y = -8$ que tiene origen en el punto $P_1(6,14)$, será comparada con $x = y - 5$, $x = 1$ e $y = 2$.

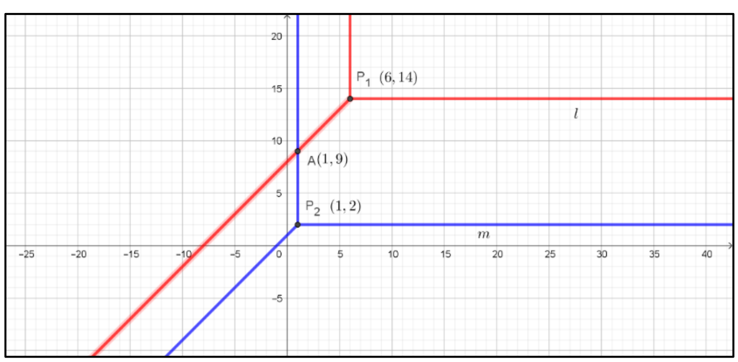
Primer caso: $x - y = -8$ y $x = 1$ son rectas perpendiculares y se intersecan en el punto $(1,9)$ donde analizando las gráficas el punto es la intersección de las rectas tropicales.

El segundo caso y tercer caso no serán evaluados porque el punto de intersección de las rectas tropicales ya fue encontrado,

$y = 14$ e $y = 2$ son rectas paralelas, ya que ambas son perpendiculares al eje x, pero diferentes.

El punto de intersección lo vemos a continuación en la gráfica de las rectas.

Figura 12. Gráfica del Ejemplo 7. Sección 3.2.



Nota: En el Teorema 3 hace referencia a la intersección de dos rectas, estos casos son: en un único punto o en infinitos, pero analizando diferentes situaciones es posible el caso donde se intersecan en infinitos puntos y las rectas tropicales son diferentes.

3.3.Polinomios Tropicales de Segundo Grado en dos Variables

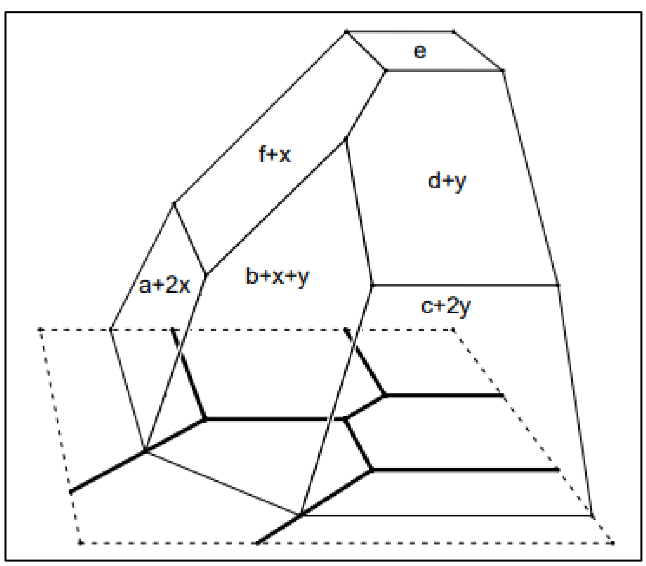
Definición de polinomio tropical de segundo grado en dos variables: Un polinomio de segundo grado esta dado por la siguiente expresión:

$$P(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot y \odot x \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot y \oplus e \odot x \oplus f$$

Donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del polinomio P y x, y las variables que se encuentra en $\mathcal{H}$, por otra parte, esta curva se puede conformar con la unión de cuatro vértices, tres aristas delimitadas y seis medios rayos que se define con la proyección de la intersección de los 6 planos en $P * \mathcal{H}$.

A continuación, se muestran la gráfica genérica de un polinomio cuadrático.

Figura 13. Ejemplo de un polinomio de segundo grado.



Richter–Gebert, Sturmfels.y Theobald. (2009). Sección 3.3

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Dado el polinomio $P(x,y) = 1 \odot x^2 \oplus x \odot y \oplus 1 \odot y^2 \oplus y \oplus x \oplus 2$ veamos sus vértices y su forma gráfica.

Inicialmente se tiene que:

$$P(x,y) = 1 \odot x^2 \oplus x \odot y \oplus 1 \odot y^2 \oplus y \oplus x \oplus 2$$

$$P(x,y) = 1 \odot 2x \oplus x \odot y \oplus 1 \odot 2y \oplus y \oplus x \oplus 2$$

$$P(x,y) = 1 + 2x \oplus x + y \oplus 1 + 2y \oplus y \oplus x \oplus 2$$

$$P(x,y) = mín\{1 + 2x, x + y, 1 + 2y, y, x, 2\}$$

Debido a la definición de polinomio tropical de segundo grado en dos variables tenemos los seis planos:

Tabla 33. Planos definidos por el Ejemplo 1. Sección 3.3.

P1	$1 + 2x = z$	P2	$x + y = z$	P3	$1 + 2y = z$
P4	$y = z$	P5	$x = z$	P6	$2 = z$

Ahora, como la definición nos dice que la gráfica del polinomio es conformada por la proyección inferior de los seis planos, para ello vamos a encontrar la intersección de los planos dos a dos como sugiere la imagen de polinomio general:

Tabla 34. Rectas de intersección de los planos en el espacio por el Ejemplo 1. Sección 3.3

P6 y P5	Se tiene los planos P6: $2 = z$ y P5: $x = z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1 \rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1 \rangle \times \langle 1,0,-1 \rangle = \langle 0,-1,0 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 1 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (2,0,2)$	P6 y P4	Se tiene los planos P6: $2 = z$ y P4: $y = z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1 \rangle$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1 \rangle \times \langle 0,1,-1 \rangle = \langle -1,0,0 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 2 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (0,2,2)$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>La recta 1 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -t, 2\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 1 es:
$$y = 2$$</td>
<td></td>
<td>La recta 2 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -t, 2,2\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 2 es:
$$x = 2$$</td>
</tr>
<tr>
<td>P5
y
P4</td>
<td colspan="3">Se tiene los planos
P4: $y = z$ y P5: $x = z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1, -1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0, -1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 0,1, -1\rangle \times \langle 1,0, -1\rangle = \langle -1, -1, -1\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 3 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (0,0,0)$$
La recta 3 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -t, -t, -t\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 3 es:
$$y = x$$</td>
</tr>
<tr>
<td>P5
y
P1</td>
<td>Se tiene los planos
P1: $1 + 2x = z$ y P5: $x = z$
Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0, -1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0, -1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 2,0, -1\rangle \times \langle 1,0, -1\rangle = \langle 0,1,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 4 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (0, -1,0)$$
La recta 4 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, t - 1,0\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 4 es:
$$y = -1$$</td>
<td>P4
y
P3</td>
<td>Se tiene los planos
P4:$y = z$ y P3: $1 + 2y = z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1, -1\rangle$
Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2, -1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 0,2, -1\rangle \times \langle 0,1, -1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 5 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (1,0,0)$$
La recta 5 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -t + 1,0,0\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 5 es:
$$x = -1$$</td>
</tr>
</table>

P2 y P5	Se tiene los planos P2:$x + y = z$ y P5: $x = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1 \rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1 \rangle \times \langle 1,0,-1 \rangle = \langle -1,0,-1 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 6 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (0,0,0)$ La recta 6 de intersección es: $\langle x, y, z \rangle = \langle -t, 0, -t \rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 6 es: $x = 0$	P2 y P4	Se tiene los planos P2:$x + y = z$ y P4: $y = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1 \rangle$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1 \rangle \times \langle 0,1,-1 \rangle = \langle 0,1,1 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 7 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (0,0,0)$ La recta 7 de intersección es: $\langle x, y, z \rangle = \langle -t, 0, -t \rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 7 es: $y = 0$
P2 y P1	Se tiene los planos P2:$x + y = z$ y P1: $1 + 2x = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1 \rangle$ Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1 \rangle \times \langle 2,0,-1 \rangle = \langle -1,-1,-2 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 8 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ La recta 8 de intersección es: $\langle x, y, z \rangle = \langle \frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t, -2t \rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 8 es: $y = x + 1$	P2 y P3	Se tiene los planos P2:$x + y = z$ y P1: $1 + 2y = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1 \rangle$ Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1 \rangle \times \langle 0,2,-1 \rangle = \langle 1,1,2 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 9 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ La recta 9 de intersección es: $\langle x, y, z \rangle = \langle \frac{1}{2} + t, -\frac{1}{2} + t, 2t \rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 9 es: $y = x - 1$

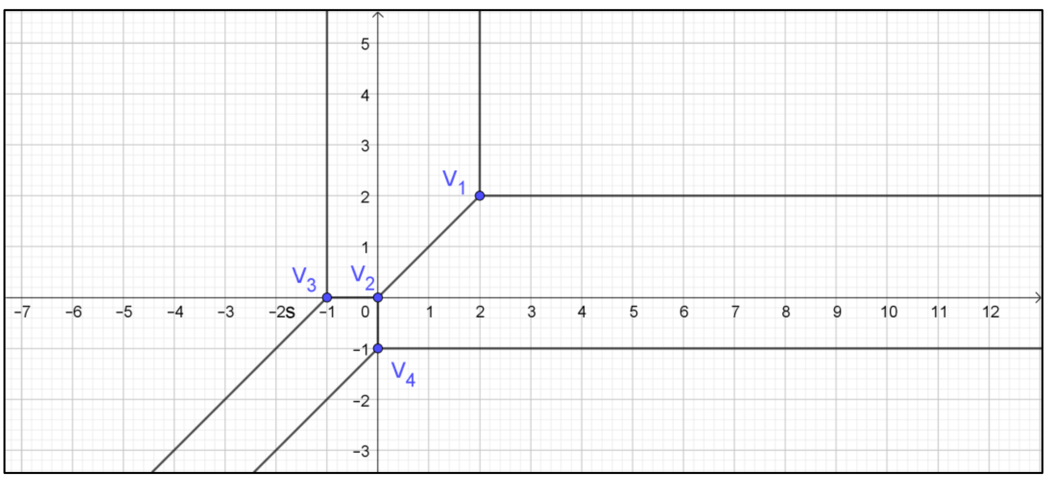
Para encontrar los vértices del polinomio analizaremos los puntos de intersección de las siguientes rectas:

Tabla 35. Vértices del Polinomio del Ejemplo 1. Sección 3.3.

Recta 1 y 2	$V_1 = (2,2)$
Recta 4 y 5	$V_2 = (0,0)$
Recta 6 y 8	$x = -1$ y $x = y - 1$ $-1 = y - 1$ $y = 0$ Entonces $V_3 = (-1,0)$
Recta 7 y 9	$y = -1$ y $y = x - 1$ $-1 = x - 1$ $x = 0$ Entonces $V_4 = (0,-1)$

Ahora, veamos la gráfica

Figura 14. Gráfica del Ejemplo 1. Sección 3.3.



Ejemplo 2: Dado el polinomio $P(x,y) = 3\odot x^2 \oplus 2\odot x\odot y \oplus 4\odot y^2 \oplus 5\odot y \oplus 8\odot x \oplus 1$, vamos a determinar los vértices y su forma gráfica.

Como primera parte tenemos que:

$$P(x,y) = 3\odot x^2 \oplus 2\odot x\odot y \oplus 4\odot y^2 \oplus 5\odot y \oplus 8\odot x \oplus 1$$

$$P(x,y) = 3\odot 2x \oplus 2\odot x\odot y \oplus 4\odot 2y \oplus 5\odot y \oplus 8\odot x \oplus 1$$

$$P(x,y) = 3 + 2x \oplus 2 + x + y \oplus 4 + 2y \oplus 5 + y \oplus 8 + x \oplus 1$$

$$P(x,y) = mín\{3 + 2x, 2 + x + y, 4 + 2y, 5 + y, 8 + x, 1\}$$

Debido a la definición de polinomio tropical de segundo grado en dos variables tenemos los seis planos:

Tabla 36. Plano definidos por el Ejemplo 2. Sección 3.3.

P1	$3 + 2x = z$	P2	$2 + x + y = z$	P3	$4 + 2y = z$
P4	$5 + y = z$	P5	$8 + x = z$	P6	$1 = z$

Ahora, como la definición nos dice que la gráfica del polinomio es conformada por la proyección inferior de los seis planos, para ello vamos a encontrar la intersección de los planos dos a dos como sugiere la imagen de polinomio general:

Tabla 37. Rectas de intersección de los planos en el espacio por el Ejemplo 2. Sección 3.3

P6 y P5	Se tiene los planos P6: 1= z y P5: $x + 8 = z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle 0,-1,0\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 1 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-7,0,1)$ La recta 1 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -7,-t,1\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 1 es: $y = -4$	P6 y P4	Se tiene los planos P6: 1= z y P4: $5 + y = z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 2 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (0,-4,1)$ La recta 2 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t,-4,1\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 2 es: $x = -7$
P5 y P4	Se tiene los planos P4: $5 + y = z$ y P5: $8 + x = z$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$		

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 0,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-1\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 3 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-8,-5,0)$$
La recta 3 de intersección es:
$$\langle x,y,z\rangle = \langle -8-t,-5-t,-t\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 3 es:
$$y = x+3$$</td></tr>
<tr><td>P5
y
P1</td><td>Se tiene los planos
P1: 3+2$x = z$ y P5: $8 + x = z$
Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 2,0,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle 0,1,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 4 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-\frac{3}{2},-8,0)$$
La recta 4 de intersección es:
$$\langle x,y,z\rangle = \langle -\frac{3}{2},t-8,0\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 4 es:
$$y = 6$$</td><td>P4
y
P3</td><td>Se tiene los planos
P4:$5 + y = z$ y P3: 4+2$y = z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 0,2,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 5 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-6,-5,0)$$
La recta 5 de intersección es:
$$\langle x,y,z\rangle = \langle -t-6,-5,0\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 5 es:
$$x = 3$$</td></tr>
<tr><td>P2
y
P5</td><td>Se tiene los planos
P2:$2 + x + y = z$ y P5: $8 + x = z$
Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,0,-1\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 6 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:</td><td>P2
y
P4</td><td>Se tiene los planos
P2:$2 + x + y = z$ y P4: $5 + y = z$
Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle 0,1,1\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 7 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:</td></tr>
</table>

	$P = (-8,6,0)$ La recta 6 de intersección es: $\langle x, y, z\rangle = \langle -t-8,4,-t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 6 es: $x = 5$		$P = (3,-5,0)$ La recta 7 de intersección es: $\langle x, y, z\rangle = \langle 3,-5+t,t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 7 es: $y = 1$
P2 y P1	Se tiene los planos P2:$2 + x + y = z$ y P1: 3+$2x = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 2,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 8 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-5,3,0)$ La recta 8 de intersección es: $\langle x, y, z\rangle = \langle -5-t,3+t,-2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 8 es: $y = x + 1$	P2 y P3	Se tiene los planos P2: $2 + x + y = z$ y P1: 4+$2y = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,2,-1\rangle = \langle 1,1,2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 9 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (0,-2,0)$ La recta 9 de intersección es: $\langle x, y, z\rangle = \langle t,-2+t,2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 9 es: $y = x - 2$

Para conocer los vértices del polinomio vamos a encontrar los puntos de intersección de las siguientes rectas:

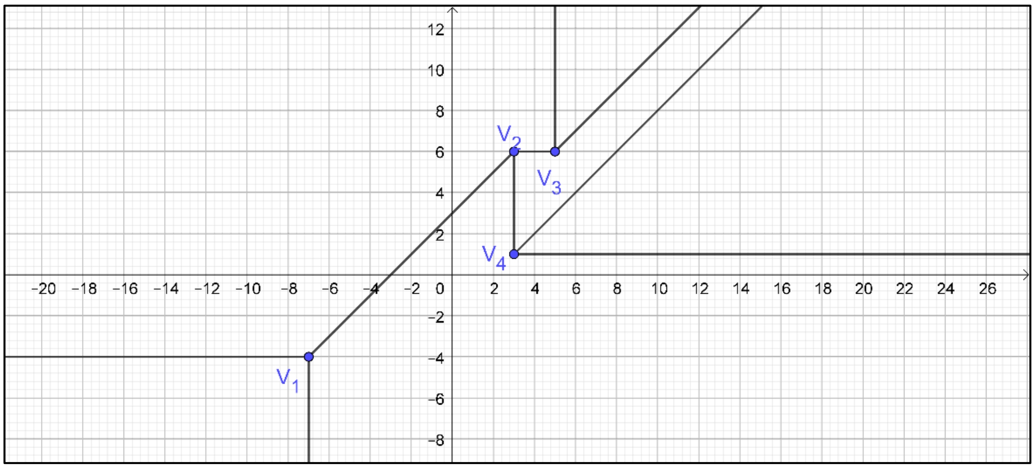
Tabla 38. Vértices del Polinomio del Ejemplo 2. Sección 3.3

Recta 1 y 2	$V_1 = (-7,-4)$
Recta 4 y 5	$V_2 = (3,6)$
Recta 6 y 8	$x = 5$ y $x = y - 1$ $5 + 1 = y$ $y = 6$ Entonces $V_3 = (5,6)$
Recta 7 y 9	$y = 1$ y $2 + y = x$

	$2+1=x$ $x=3$ Entonces $V_4=(3,1)$

Ahora, vemos la gráfica

Figura 15. Gráfica del Ejemplo 2. Sección 3.3.



Ejemplo 3: Dado el polinomio $P(x,y) = x^2 \oplus 3 \odot x \odot y \oplus y^2 \oplus 2 \odot y \oplus 2 \odot x \oplus 3$, veamos los vértices y su forma gráfica.

Inicialmente se tiene que:

$$P(x,y) = x^2 \oplus 3 \odot x \odot y \oplus y^2 \oplus 2 \odot y \oplus 2 \odot x \oplus 3$$

$$P(x,y) = 2x \oplus 3 \odot x \odot y \oplus 2y \oplus 2 \odot y \oplus 2 \odot x \oplus 3$$

$$P(x,y) = 2x \oplus 3 + x + y \oplus 2y \oplus 2 + y \oplus 2 + x \oplus 3$$

$$P(x,y) = mín\{2x, 3 + x + y, 2y, 2 + y, 2 + x, 3\}$$

Debido a la definición de polinomio tropical de segundo grado en dos variables tenemos los seis planos:

Tabla 39. Planos definidos por el Ejemplo 3. Sección 3.3.

P1	$2x = z$	P2	$3 + x + y = z$	P3	$2y = z$
P4	$2 + y = z$	P5	$2 + x = z$	P6	$3 = z$

Recordando que la gráfica del polinomio es conformada por la proyección inferior de los seis planos, para ello se encuentra la intersección de los planos dos a dos como sugiere la imagen de polinomio general:

Tabla 40. Rectas de intersección de los planos en el espacio por el Ejemplo 3. Sección 3.3

<table>
<tr>
<td>P6
y
P5</td>
<td>Se tiene los planos
P6: $3 = z$ y P5: $x + 2 = z$
Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,0,1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle 0,-1,0\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 1 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P = (1,0,3)$
La recta 1 de intersección es:
$\langle x, y, z\rangle = \langle 1, -t, 3\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 1 es:
$y = 1$</td>
<td>P6
y
P4</td>
<td>Se tiene los planos
P6: $3 = z$ y P4: $2{+}y = z$
Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,0,1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 2 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P = (0,-4,1)$
La recta 2 de intersección es:
$\langle x, y, z\rangle = \langle -t, -4,1\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 2 es:
$x = 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>P5
y
P4</td>
<td colspan="3">Se tiene los planos
P4: $2{+}y = z$ y P5: $2{+}x = z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-1\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 3 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P = (-2,-2,0)$
La recta 3 de intersección es:
$\langle x, y, z\rangle = \langle -2 - t, -2 - t, -t\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 3 es:
$y = x$</td>
</tr>
</table>

P5 y P1	Se tiene los planos P1: $2+2x=z$ y P5: $2+x=z$ Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0,-1\rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 2,0,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle 0,1,0\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 4 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(-1,4,0)$ La recta 4 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -1,t+4,0\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 4 es: $y=-1$	P4 y P3	Se tiene los planos P4:$5+y=z$ y P3: $4+2y=z$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$ Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2,-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,2,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 5 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(-6,-5,0)$ La recta 5 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t-6,-5,0\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 5 es: $x=-1$
P2 y P5	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P5: $2+x=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,0,-1\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 6 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(-2,-1,0)$ La recta 6 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t-2,-1,-t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 6 es: $x=6$	P2 y P4	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P4: $2+y=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle 0,1,1\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 7 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(-1,-2,0)$ La recta 7 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle 1,-2+t,t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 7 es: $y=2$
P2 y P1	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P1: $2x=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$	P2 y P3	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P1: $2y=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$

	Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 2,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 8 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(0,-3,0)$ La recta 8 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t,-3-t,-2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 8 es: $y=x+3$		Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,2,-1\rangle = \langle 1,1,2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 9 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(-3,0,0)$ La recta 9 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -3+t,t,2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 9 es: $y=x-3$

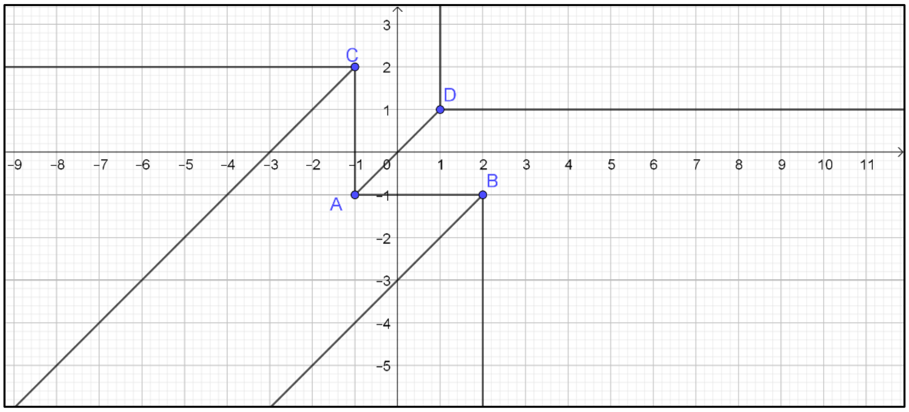
Analicemos los puntos de intersección de las siguientes rectas:

Tabla 41. Vértices del Polinomio del Ejemplo 3. Sección 3.3

Recta 1 y 2	$D=(1,1)$
Recta 4 y 5	$A=(-1,-1)$
Recta 7 y 9	$x=2$ y $x-3=y$ $2-3=y$ $y=-1$ Entonces $B=(2,-1)$
Recta 6 y 8	$y=2$ y $y=3+x$ $-3+2=x$ $x=-1$ Entonces $C=(-1,2)$

Ahora, vemos la gráfica

Figura 16. Gráfica del Ejemplo 3. Sección 3.3.



Recordemos que en la sección 3.2. vimos el comportamiento de una recta tropical y los posibles casos de intersección entre ellas, ahora, ya constituidos los polinomios tropicales de segundo grado en dos variables, podemos analizar algunos casos que se pueden presentar cuando hablamos intersección entre la representación gráfica de polinomio tropical de segundo grado en dos variables y una recta tropical, o dos polinomios tropicales de segundo grado en dos variables, para ello tenemos los siguientes casos:

1. Polinomio tropical de segundo grado en dos variables y una recta tropical.
2. Dos polinomios tropicales de segundo grado en dos variables.

Para el primer caso veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4: Sea la recta tropical $3\odot x \oplus 3\odot y \oplus 5$ y el polinomio tropical de segundo grado en dos variables $4\odot x^2 \oplus 3\odot x\odot y \oplus 5\odot y^2 \oplus 3\odot y \oplus 2\odot x \oplus 3$. Veamos que sucede en este caso.

Partiendo de la recta tropical, tenemos:

$$3\odot x \oplus 3\odot y \oplus 5$$

$$= 3 + x \oplus 3 + y \oplus 5$$

$$= mín\{3 + x, 3 + y, 5\}$$

El punto origen de las semirrectas $P_1(3,6)$, podemos encontrar las siguientes desigualdades:

$$3+x=3+y \leq 5 \qquad 3+x=5\leq 3+y \qquad 3+y=5\leq 3+x$$

$$x-y=3-3 \leq 5 \qquad x=5-3\leq 3+y \qquad y=5-3\leq 3+x$$

$$x-y=0 \leq 5 \qquad x=2\leq 3+y \qquad y=2\leq 3+x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P_1(2,2)$ y tienen ecuaciones $x=y$, $x=2$ e $y=2$.

Ahora, tomando el polinomio se tiene que:

$$P(x,y)=4\odot x^2\oplus 3\odot x\odot y\oplus 5\odot y^2\oplus 3\odot y\oplus 2\odot x\oplus 3$$

$$P(x,y)=4\odot 2x\oplus 3\odot x\odot y\oplus 5\odot 2y\oplus 3\odot y\oplus 2\odot x\oplus 3$$

$$P(x,y)=4+2x\oplus 3+x+y\oplus 5+2y\oplus 3+y\oplus 2+x\oplus 3$$

$$P(x,y)=mín\{4+2x,3+x+y,5+2y,3+y,2+x,3\}$$

Debido a la definición de polinomio tropical de segundo grado en dos variables tenemos los seis planos:

Tabla 42. Plano definidos por el Ejemplo 4. Sección 3.3.

P1	$4+2x=z$	P2	$3+x+y=z$	P3	$5+2y=z$
P4	$3+y=z$	P5	$2+x=z$	P6	$3=z$

Ahora, como la definición nos dice que la gráfica del polinomio es conformada por la proyección inferior de los seis planos, para ello vamos a encontrar la intersección de los planos dos a dos como sugiere la imagen de polinomio general:

Tabla 43. Rectas de intersección de los planos en el espacio por el Ejemplo 4. Sección 3.3

P6 y P5	Se tiene los planos P6: $3=z$ y P5: $x+2=z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1\rangle\times\langle 1,0,-1\rangle=\langle 0,-1,0\rangle$	P6 y P4	Se tiene los planos P6: $3=z$ y P4: $3+y=z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1\rangle\times\langle 0,1,-1\rangle=\langle -1,0,0\rangle$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Ahora, para encontrar un punto en la recta 1 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (1,0,3)$$
La recta 1 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle 1, -t, 3\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 1 es:
$$y = 0$$</td>
<td></td>
<td>Ahora, para encontrar un punto en la recta 2 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (0,0,1)$$
La recta 2 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -t, 0,1\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 2 es:
$$x = 1$$</td>
</tr>
<tr>
<td>P5
y
P4</td>
<td colspan="3">Se tiene los planos
$$\text{P4: } 3+y = z \text{ y P5: } 2+x = z$$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1, -1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0, -1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 0,1, -1\rangle \times \langle 1,0, -1\rangle = \langle -1, -1, -1\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 3 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-2, -3,0)$$
La recta 3 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -2 - t, -3 - t, -t\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 3 es:
$$y = x - 1$$</td>
</tr>
<tr>
<td>P5
y
P1</td>
<td>Se tiene los planos
$$\text{P1: } 4+2x = z \text{ y P5: } 2+x = z$$
Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0, -1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0, -1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 2,0, -1\rangle \times \langle 1,0, -1\rangle = \langle 0,1,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 4 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-1,2,0)$$
La recta 4 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -1, t + 2,0\rangle$$</td>
<td>P4
y
P3</td>
<td>Se tiene los planos
$$\text{P4: } 3+y = z \text{ y P3: } 5 + 2y = z$$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1, -1\rangle$
Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2, -1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 0,2, -1\rangle \times \langle 0,1, -1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 5 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-1, -3,0)$$
La recta 5 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -t - 1, -3,0\rangle$$</td>
</tr>
</table>

	Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 4 es: $y = -1$		Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 5 es: $x = 0$
P2 y P5	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P5: $2+x=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,0,-1\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 6 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-2,-1,0)$ La recta 6 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t-2,-1,-t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 6 es: $x = -2$	P2 y P4	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P4: $3+y=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle 0,1,1\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 7 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (0,-3,0)$ La recta 7 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle 0,-3+t,t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 7 es: $y = -2$
P2 y P1	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P1: $4+2x=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 2,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 8 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-2,-1,0)$ La recta 8 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t-2,-1-t,-2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 8 es:	P2 y P3	Se tiene los planos P2: $3+x+y=z$ y P1: $5+2y=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,2,-1\rangle = \langle 1,1,2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 9 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-\frac{11}{2},-\frac{5}{2},0)$ La recta 9 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -\frac{11}{2}+t,t-\frac{5}{2},2t\rangle$

	$y = x + 1$		Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 9 es: $y = x - 2$

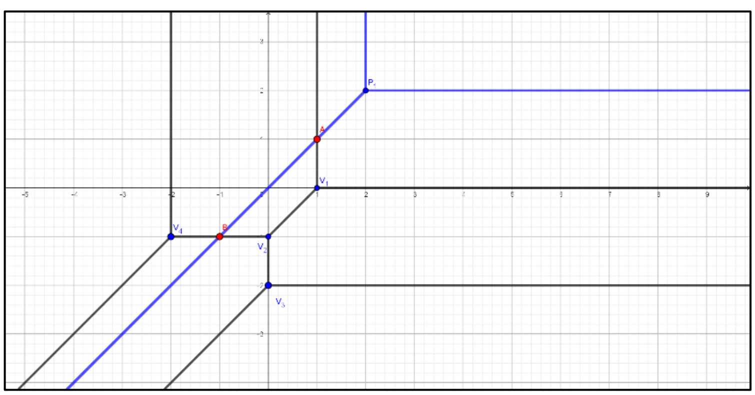
Ahora, para conocer los vértices tenemos:

Tabla 44. Vértices del Ejemplo 4. Sección 3.3.

Recta 1 y 2	$V_1 = (1,0)$
Recta 4 y 6	$V_2 = (0,-1)$
Recta 7 y 9	$y = -2$ y $x - 2 = y$ $x - 2 = -2$ $x = 0$ Entonces $V_3 = (0,-2)$
Recta 5 y 8	$x = -2$ y $y = 1 + x$ $1 - 2 = y$ $x = -1$ Entonces $V_3 = (-2,-1)$

Veamos las gráficas

Figura 17. Gráficas del Ejemplo 4. Sección 3.3.



Vemos que en la forma gráfica del polinomio de grado dos y la recta, se intersecan en dos puntos, para conocer las coordenadas de esos dos puntos identificamos que la semirrecta

$x = y$ que compone la recta tropical es aquella que se interseca con la semirrecta $x = 1$ y el segmento $y = -1$ que forman el polinomio, es decir que vamos a resolver las ecuaciones que definen:

Tabla 45. Intersección del Ejemplo 4. Sección 3.3.

Tenemos la semirrecta $x = y$ con la semirrecta $x = 1$, eso quiere decir que $y = 1$ y el punto de intersección es $A(1,1)$.	Tenemos la semirrecta $x = y$ con la semirrecta $y = -1$, eso quiere decir que $x = -1$ y el punto de intersección es $B(-1,-1)$.

Ejemplo 5: Sea la recta tropical $2\odot x \oplus 2\odot y \oplus 3$ y el polinomio tropical de segundo grado en dos variables $5\odot x^2 \oplus 2\odot x\odot y\oplus 5\odot y^2\oplus 2\odot y\oplus 2\odot x\oplus 1$. Veamos que sucede en este caso.

Partiendo de la recta tropical, tenemos:

$$2\odot x \oplus 2\odot y \oplus 3$$

$$= 2 + x \oplus 2 + y \oplus 3$$

$$= mín\{2 + x, 2 + y, 3\}$$

El punto origen de las semirrectas $P_1(1,1)$, podemos encontrar las siguientes desigualdades:

$$2 + x = 2 + y \leq 3 \qquad 2 + x = 3 \leq 2 + y \qquad 2 + y = 3 \leq 2 + x$$

$$x - y = 2 - 2 \leq 3 \qquad x = 3 - 2 \leq 2 + y \qquad y = 3 - 2 \leq 2 + x$$

$$x - y = 0 \leq 3 \qquad x = 1 \leq 2 + y \qquad y = 1 \leq 2 + x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P_1(1,1)$ y tienen ecuaciones $x = y$, $x = 1$ e $y = 1$.

Ahora, tomando el polinomio se tiene que:

$$P(x, y) = 5\odot x^2 \oplus 2\odot x\odot y \oplus 5\odot y^2 \oplus 2\odot y \oplus 2\odot x \oplus 1$$

$$P(x, y) = 5\odot 2x \oplus 2\odot x\odot y \oplus 5\odot 2y \oplus 2\odot y \oplus 2\odot x \oplus 1$$

$$P(x, y) = 5 + 2x \oplus 2 + x + y \oplus 5 + 2y \oplus 2 + y \oplus 2 + x \oplus 1$$

$$P(x, y) = mín\{5 + 2x, 2 + x + y, 5 + 2y, 2 + y, 2 + x, 1\}$$

Debido a la definición de polinomio tropical de segundo grado en dos variables tenemos los seis planos:

Tabla 46. Plano definidos por el Ejemplo 5. Sección 3.3.

P1	$5+2x=z$	P2	$2+x+y=z$	P3	$5+2y=z$
P4	$2+y=z$	P5	$2+x=z$	P6	$1=z$

La gráfica del polinomio es proyección inferior de los seis planos, para ello vamos a encontrar la intersección de los planos dos a dos y luego se proyecta la recta en el plano xy.

Tabla 47. Rectas de intersección de los planos en el espacio por el Ejemplo 5. Sección 3.3

<table>
<tr>
<td>P6
y
P5</td>
<td>Se tiene los planos
P6: 1= z y P5: $x+2=z$
Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,0,1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle 0,-1,0\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 1 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P=(-1,0,1)$
La recta 1 de intersección es:
$\langle x,y,z\rangle = \langle -1,-t,1\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 1 es:
$y=-1$</td>
<td>P6
y
P4</td>
<td>Se tiene los planos
P6: 1= z y P4: 2+$y=z$
Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1\rangle$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,0,1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 2 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P=(0,-1,1)$
La recta 2 de intersección es:
$\langle x,y,z\rangle = \langle -t,-1,1\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 2 es:
$x=-1$</td>
</tr>
<tr>
<td>P5
y
P4</td>
<td colspan="3">Se tiene los planos
P4: 2+$y=z$ y P5: 2+$x=z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-1\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 3 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P=(-2,-2,0)$
La recta 3 de intersección es:</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$$\langle x, y, z\rangle = \langle -2 - t, -2 - t, -t\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 3 es:
$$y = x$$</td></tr>
<tr><td>P5
y
P1</td><td>Se tiene los planos
P1: $5+2x = z$ y P5: $2+x = z$
Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 2,0,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle 0,1,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 4 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-2,-9,0)$$
La recta 4 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -2, t + 9,0\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 4 es:
$$y = 0$$</td><td>P4
y
P3</td><td>Se tiene los planos
P4: $2+y = z$ y P3: $5 + 2y = z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 0,2,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 5 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-9,-2,0)$$
La recta 5 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -t - 9,-2,0\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 5 es:
$$x = 0$$</td></tr>
<tr><td>P2
y
P5</td><td>Se tiene los planos
P2: $2+x + y = z$ y P5: $2+x = z$
Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0 - 1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,0,-1\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 6 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-2,-1,0)$$
La recta 6 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -t - 2,-1,-t\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 6 es:
$$x = -3$$</td><td>P2
y
P4</td><td>Se tiene los planos
P2: $2+x + y = z$ y P4: $2+y = z$
Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1 - 1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$$\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle 0,1,1\rangle$$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 7 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$$P = (-1,-2,0)$$
La recta 7 de intersección es:
$$\langle x, y, z\rangle = \langle -1,-3 + t, t\rangle$$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 7 es:
$$y = -3$$</td></tr>
</table>

P2 y P1	Se tiene los planos P2: $2+x+y=z$ y P1: $5+2x=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 2,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 8 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},0)$ La recta 8 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t-\frac{5}{2},\frac{1}{2}-t,-2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 8 es: $y=x+3$	P2 y P3	Se tiene los planos P2: $2+x+y=z$ y P1: $5+2y=z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,2,-1\rangle = \langle 1,1,2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 9 vamos a hacer que $z=0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P=(\frac{1}{2},-\frac{5}{2},0)$ La recta 9 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle \frac{1}{2}+t,t-\frac{5}{2},2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 9 es: $y=x-3$

Veamos cuales son los vértices del polinomio

Tabla 48. Vértices del Ejemplo 5. Sección 3.3.

Recta 1 y 2	$V_1=(-1,-1)$
Recta 4 y 5	$V_2=(0,0)$
Recta 6 y 8	$x=-3$ y $x+3=y$ $-3+3=y$ $y=0$ Entonces $V_3=(-3,0)$
Recta 7 y 9	$y=-3$ y $y=x-3$ $x-3=-3$ $x=0$ Entonces $V_3=(0,-3)$

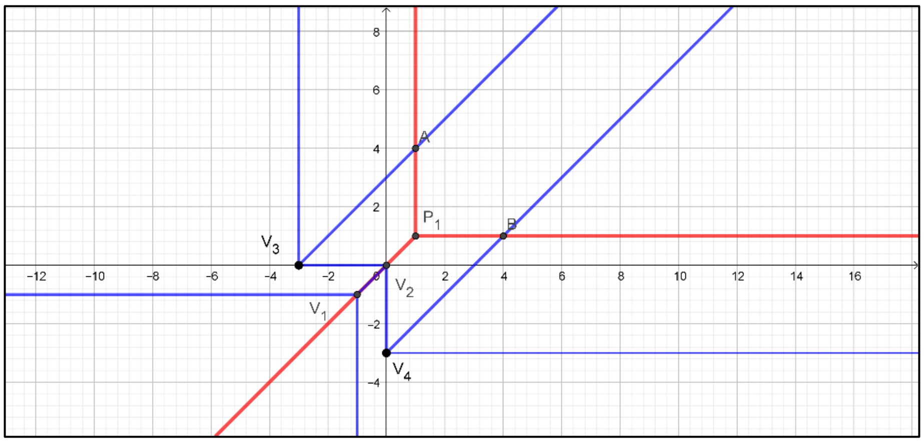
Para encontrar los puntos donde se intersecan vamos a realizar las siguientes comparaciones entre las rectas que definen las semirrectas y segmentos de cada

Tabla 49. Intersección del Ejemplo 5. Sección 3.3.

Tomemos a las semirrectas $x = y$ con $x = -1$ Podemos decir que se intersecan en $(-1, -1)$ que recordando es un vértice del polinomio.	Tomemos a las semirrectas $x = y$ con $y = -1$ Podemos decir que se intersecan en $(-1, -1)$ que recordando es un vértice del polinomio.	Tomemos a las semirrectas $x = y$ con $x = y$ Podemos decir que se intersecan en un segmento que compone una arista del polinomio.

Eso quiere decir que la recta y polinomio de segundo grado en dos variables se intersecan en infinitos puntos, veamos la gráfica.

Figura 18. Gráfica del Ejemplo 5. Sección 3.4.



Ejemplo 6: Sea la recta tropical $3 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 3$ y el polinomio tropical de segundo grado en dos variables $7 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 7 \odot y^2 \oplus 4 \odot y \oplus 4 \odot x \oplus 6$. Veamos que sucede en este caso. Partiendo de la recta tropical, tenemos:

$$3 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 3$$

$$= 3 + x \oplus 3 + y \oplus 3$$

$$= mín\{3 + x, 3 + y, 3\}$$

El punto origen de las semirrectas $P_1(0,0)$, podemos encontrar las siguientes desigualdades:

$$3 + x = 3 + y \ \leq 3 \qquad 3 + x = 3 \leq 3 + y \qquad 3 + y = 3 \leq 3 + x$$

$$x - y = 3 - 3 \ \leq 3 \qquad x = 3 - 3 \leq 3 + y \qquad y = 3 - 3 \leq 3 + x$$

$$x = y \leq 3 \qquad x = 0 \leq 3 + y \qquad y = 0 \leq 3 + x$$

Se puede concluir que las tres semirrectas tienen origen en el punto $P_1(0,0)$ y tienen ecuaciones $x = y$, $x = 0$ e $y = 0$.

Ahora, tomando el polinomio se tiene que:

$$P(x,y) = 7 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 7 \odot y^2 \oplus 4 \odot y \oplus 4 \odot x \oplus 6$$

$$P(x,y) = 7 \odot 2x \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 7 \odot 2y \oplus 4 \odot y \oplus 4 \odot x \oplus 6$$

$$P(x,y) = 7 + 2x \oplus 4 + x + y \oplus 7 + 2y \oplus 4 + y \oplus 4 + x \oplus 6$$

$$P(x,y) = mín\{2 + 2x, 5 + x + y, 2 + 2y, 2 + y, 2 + x, 4\}$$

Debido a la definición de polinomio tropical de segundo grado en dos variables tenemos los seis planos:

Tabla 50. Plano definidos por el Ejemplo 5. Sección 3.3.

P1	$2 + 2x = z$	P2	$5 + x + y = z$	P3	$2 + 2y = z$
P4	$2 + y = z$	P5	$2 + x = z$	P6	$4 = z$

La gráfica del polinomio es conformada por la proyección inferior de los seis planos, para ello tenemos:

Tabla 51. Rectas de intersección de los planos en el espacio por el Ejemplo 5. Sección 3.3

P6 y P5	Se tiene los planos P6: 4= z y P5: $x + 2 = z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1 \rangle$ Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1 \rangle \times \langle 1,0,-1 \rangle = \langle 0,-1,0 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 1 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-2,0,1)$ La recta 1 de intersección es: $\langle x,y,z \rangle = \langle -2,-t,1 \rangle$	P6 y P4	Se tiene los planos P6: 4= z y P4: 2+$y = z$ Para P6 el vector normal es: $\langle 0,0,-1 \rangle$ Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1 \rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 0,0,1 \rangle \times \langle 0,1,-1 \rangle = \langle -1,0,0 \rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 2 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (0,-2,1)$ La recta 2 de intersección es: $\langle x,y,z \rangle = \langle -t,-2,1 \rangle$

<table>
<tr><td></td><td>Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 1 es:
$y = 2$</td><td></td><td>Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 2 es:
$x = 2$</td></tr>
<tr><td>P5
y
P4</td><td colspan="3">Se tiene los planos
P4: $2{+}y = z$ y P5: $2{+}x = z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-1\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 3 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P = (-2,-2,0)$
La recta 3 de intersección es:
$\langle x,y,z\rangle = \langle -2-t,-2-t,-t\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 3 es:
$y = x$</td></tr>
<tr><td>P5
y
P1</td><td>Se tiene los planos
P1: $2 + 2x = z$ y P5: $2{+}x = z$
Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 2,0,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle 0,1,0\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 4 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P = (-2,0,0)$
La recta 4 de intersección es:
$\langle x,y,z\rangle = \langle -2,t+0,0\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 4 es:
$y = 0$</td><td>P4
y
P3</td><td>Se tiene los planos
P4: $2{+}y = z$ y P3: $2{+}2y = z$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1,-1\rangle$
Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2,-1\rangle$
Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que:
$\langle 0,2,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle -1,0,0\rangle$
Ahora, para encontrar un punto en la recta 5 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto:
$P = (0,-2,0)$
La recta 5 de intersección es:
$\langle x,y,z\rangle = \langle -t,-2,0\rangle$
Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 5 es:
$x = 0$</td></tr>
<tr><td>P2
y
P5</td><td>Se tiene los planos
P2: $5 + x + y = z$ y P5: $2{+}x = z$
Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$
Para P5 el vector normal es: $\langle 1,0-1\rangle$</td><td>P2
y
P4</td><td>Se tiene los planos
P2: $5 + x + y = z$ y P4: $2{+}y = z$
Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$
Para P4 el vector normal es: $\langle 0,1-1\rangle$</td></tr>
</table>

	Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 1,0,-1\rangle = \langle -1,0,-1\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 6 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-2,-3,0)$ La recta 6 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t-2,-3,-t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 6 es: $x = -3$		Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,1,-1\rangle = \langle 0,1,1\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 7 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-3,-2,0)$ La recta 7 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -3,-2+t,t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 7 es: $y = -3$
P2 y P1	Se tiene los planos P2: $5 + x + y = z$ y P1: $2 + 2x = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P1 el vector normal es: $\langle 2,0-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 2,0,-1\rangle = \langle -1,-1,-2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 8 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-1,-4,0)$ La recta 8 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -t-1,-4-t,-2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 8 es: $y = x + 3$	P2 y P3	Se tiene los planos P2: $5 + x + y = z$ y P1: $2{+}2y = z$ Para P2 el vector normal es: $\langle 1,1,-1\rangle$ Para P3 el vector normal es: $\langle 0,2-1\rangle$ Para la intersección realizamos en producto cartesiano de los vectores y se tiene que: $\langle 1,1,-1\rangle \times \langle 0,2,-1\rangle = \langle 1,1,2\rangle$ Ahora, para encontrar un punto en la recta 9 vamos a hacer que $z = 0$ en las dos ecuaciones y se tiene el punto: $P = (-4,-1,0)$ La recta 9 de intersección es: $\langle x,y,z\rangle = \langle -4+t,t-1,2t\rangle$ Para proyectarla en el plano xy eliminamos el término en z y tenemos la recta 9 es: $y = x - 3$

Veamos cuales son los vértices del polinomio

Tabla 52. Vértices del Ejemplo 6. Sección 3.3.

Recta 1 y 2	$V_1 = (2,2)$
Recta 4 y 5	$V_2 = (0,0)$
Recta 6 y 8	$x = -3$ y $x + 3 = y$ $-3 + 3 = y$

	$y = 0$ Entonces $V_3 = (-3{,}0)$
Recta 7 y 9	$y = -3$ y $y = x - 3$ $x - 3 = -3$ $x = 0$ Entonces $V_4 = (0, -3)$

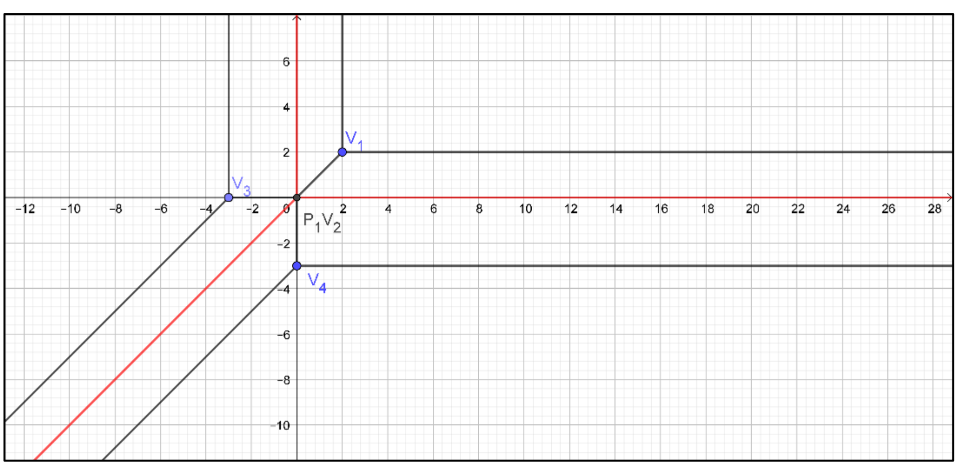
Identifiquemos que P_1origen de la reta tiene las mismas coordenadas que V_2 del polinomio, de acuerdo con ello se puede decir que este punto hace parte de la intersección, ahora analicemos las siguientes comparaciones entre las rectas que definen las semirrectas y segmentos para conocer si hay más puntos de intersección.

Tabla 53. Posibles intersecciones del Ejemplo 6. Sección 3.3.

Como $x = 0$ es paralela con $x = 2$ y $x = -3$, no es posible que se intersequen entre sí.	Como $x = y$ es paralela con $x + 3 = y$ y $x - 3 = y$, no es posible que se intersequen entre sí.
Como $y = 0$ es paralela con $y = -3$, no es posible que se intersequen entre sí.	

Gracias a la tabla 37 que se muestra anteriormente concluimos que existe solo un único punto de intersección $(0{,}0)$, veamos el comportamiento de cada elemento geométrico en el plano.

Figura 19. Gráficas del Ejemplo 6. Sección 3.3.



Observación 1: Nótese que cuando hay una recta y un polinomio tropicales de segundo grado, es posible que se intersequen en un único punto, en dos, o en infinitos, dependiendo como se definan los polinomios.

Para el segundo caso veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7: Sean los siguientes polinomios tropicales de segundo grado

P_1: $3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \odot y \oplus 2 \odot y^2 \oplus 4 \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 6$ y

P_2: $1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 1 \odot y^2 \oplus 5 \odot y \oplus 4 \odot x \oplus 3$; Vamos a analizar la posible intersección.

Inicialmente en la tabla 47 tenemos los polinomios tropicales:

Tabla 54. Polinomios del Ejemplo 7. Sección 3.3.

P_1
$3 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \odot y \oplus 2 \odot y^2 \oplus 4 \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 6$ $= 3 \odot 2x \oplus 5 \odot x \odot y \oplus 2 \odot 2y \oplus 4 \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 6$ $= 3 + 2x \oplus 5 + x + y \oplus 2 + 2y \oplus 4 + y \oplus 5 + x \oplus 6$ $= mín\{3 + 2x, 5 + x + y, 2 + 2y, 4 + y, 5 + x, 6\}$
P_2
$1 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 1 \odot y^2 \oplus 5 \odot y \oplus 4 \odot x \oplus 3$ $= 1 \odot 2x \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 1 \odot 2y \oplus 5 \odot y \oplus 4 \odot x \oplus 3$ $= 1 + 2x \oplus 4 + x + y \oplus 1 + 2y \oplus 5 + y \oplus 4 + x \oplus 3$ $= mín\{1 + 2x, 4 + x + y, 1 + 2y, 5 + y, 4 + x, 3\}$

Ahora, si analizamos las rectas que proyectadas que define cada polinomio tenemos:

Tabla 55. Rectas definidas del Ejemplo 7. Sección 3.3.

P_1				P_2			
Recta 1	$y = 2$	Recta 2	$x = 1$	Recta 1	$y = -2$	Recta 2	$x = -1$
Recta 3	$y = x + 1$			Recta 3	$y = x - 1$		
Recta 4	$x = -1$	Recta 5	$y = 0$	Recta 4	$x = 1$	Recta 5	$y = 0$
Recta 6	$y = 2$	Recta 7	$x = 2$	Recta 6	$y = 4$	Recta 7	$x = 3$
Recta 8	$x + 3 = y$	Recta 9	$y = x - 2$	Recta 8	$x + 3 = y$	Recta 9	$y = x - 3$

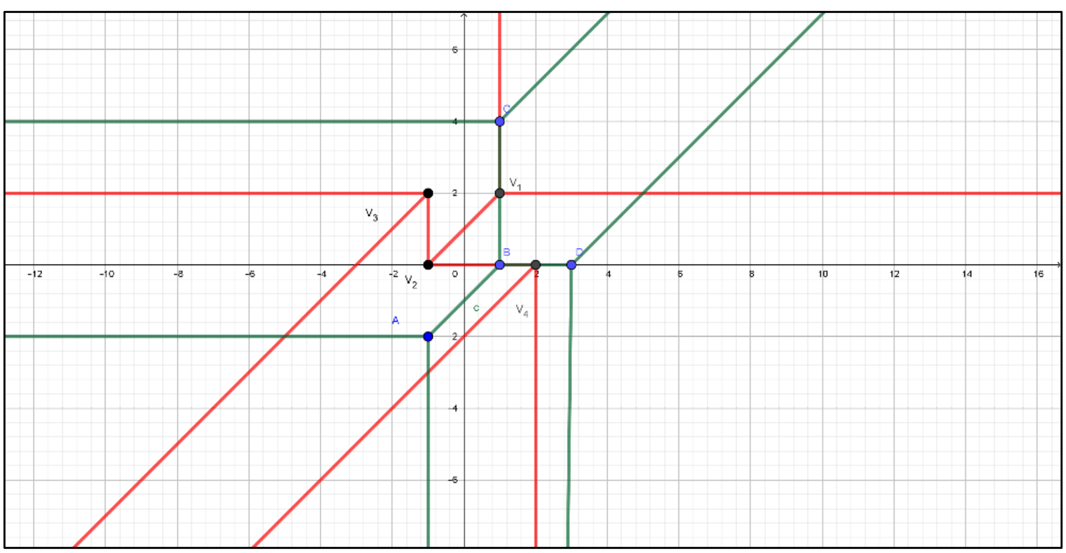
Luego, vamos a encontrar los vértices de cada polinomio tropical.

Tabla 56. Vértices de los polinomios del Ejemplo 7. Sección 3.3.

P_1		P_2	
Recta 1 y 2	$V_1 = (1,2)$	Recta 1 y 2	$V_1 = (-1,-2)$
Recta 4 y 5	$V_2 = (-1,0)$	Recta 4 y 5	$V_2 = (1,0)$
Recta 6 y 8	$y = 2$ y $x + 3 = y$ $x + 3 = 2$ $x = -1$ Entonces $V_3 = (-1,2)$	Recta 6 y 8	$y = 4$ y $x + 3 = y$ $x + 3 = 4$ $x = 1$ Entonces $V_3 = (1,4)$
Recta 7 y 9	$x = 2$ y $y = x - 2$ $2 - 2 = y$ $y = 0$ Entonces $V_4 = (2,0)$	Recta 7 y 9	$x = 3$ y $y = x - 3$ $y = 3 - 3$ $x = 0$ Entonces $V_4 = (3,0)$

Observemos que la Recta 2 de P_1 es igual a la Recta 4 de P_2, pero también la Recta 5 de P_1 es igual a la Recta 5 de P_2 y la Recta 8 de P_1 es igual a la Recta 8 de P_2, veamos entonces como se comportan estas rectas en la gráfica de cada polinomio tropical.

Figura 20. Polinomios del Ejemplo 7. Sección 3.3.



Notemos que, la Recta 8 de ambos polinomios a pesar de ser la misma no comparten ningún punto en los polinomios, pero la Recta 2 y 4 se intersecan en infinitos puntos, ya que su intersección es un segmento, sucede lo mismo con la Rectas 5 en ambos polinomios, lo cual observamos que P_1 y P_2 se intersecan en infinitos puntos.

Ejemplo 8: Sean los siguientes polinomios tropicales de segundo grado

$P_1: 7\odot x^2 \oplus 3\odot x\odot y\oplus 5\odot y^2\oplus 2\odot y\oplus 1\odot x\oplus 11$ y

$P_2: 1\odot x^2 \oplus 3\odot x\odot y\oplus 1\odot y^2\oplus 3\odot y\oplus 4\odot x\oplus 5$; Vamos a analizar la posible intersección.

Inicialmente en la tabla tenemos los polinomios tropicales:

Tabla 57. Polinomios del Ejemplo 8. Sección 3.3.

P_1
$7\odot x^2 \oplus 3\odot x\odot y\oplus 5\odot y^2\oplus 2\odot y\oplus 1\odot x\oplus 11$ $= 7\odot 2x \oplus 3\odot x\odot y\oplus 5\odot 2y\oplus 2\odot y\oplus 1\odot x\oplus 11$ $= 7+2x \oplus 3+x+y\oplus 5+2y\oplus 2+y\oplus 1+x\oplus 11$ $= mín\{7+2x, 3+x+y, 5+2y, 2+y, 1+x, 11\}$
P_2
$1\odot x^2 \oplus 3\odot x\odot y\oplus 1\odot y^2\oplus 3\odot y\oplus 4\odot x\oplus 5$ $= 1\odot 2x \oplus 3\odot x\odot y\oplus 1\odot 2y\oplus 3\odot y\oplus 4\odot x\oplus 5$ $= 1+2x \oplus 3+x+y\oplus 1+2y\oplus 3+y\oplus 4+x\oplus 5$ $= mín\{1+2x, 3+x+y, 1+2y, 3+y, 4+x, 5\}$

Ahora, si analizamos las rectas que proyectadas que define cada polinomio tenemos:

Tabla 58. Rectas definidas del Ejemplo 8. Sección 3.3.

P_1				P_2			
Recta 1	$y=9$	Recta 2	$x=10$	Recta 1	$y=2$	Recta 2	$x=1$
Recta 3	$y=x-1$			Recta 3	$y=x+1$		
Recta 4	$x=-1$	Recta 5	$y=-3$	Recta 4	$x=0$	Recta 5	$y=0$
Recta 6	$y=-3$	Recta 7	$x=-6$	Recta 6	$y=2$	Recta 7	$x=3$

Recta 8	$x - 2 = y$	Recta 9	$y = x + 4$	Recta 8	$x + 2 = y$	Recta 9	$y = x - 2$

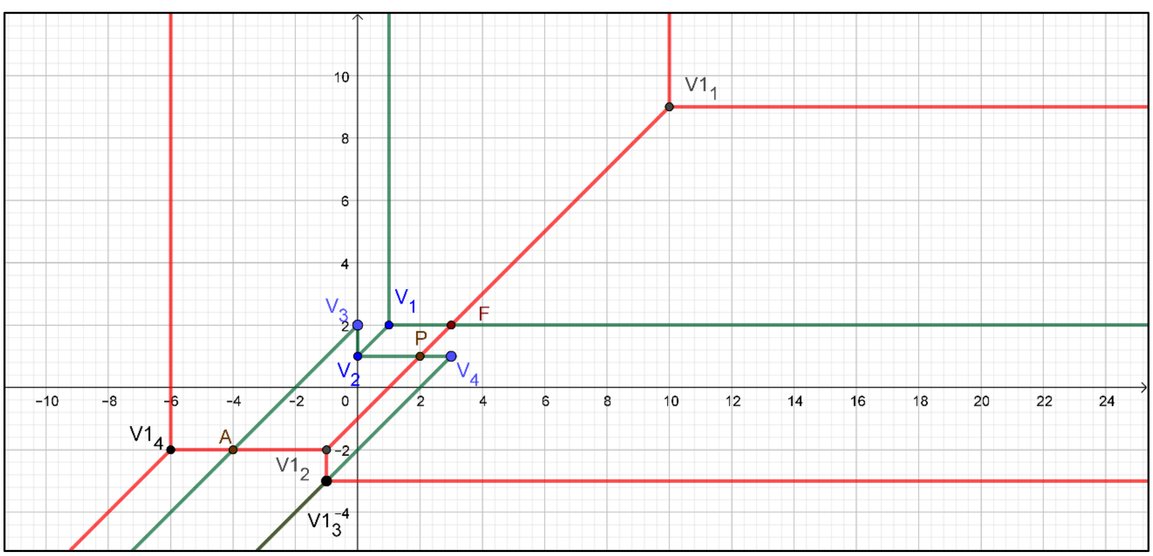
Luego, vamos a encontrar los vértices de cada polinomio tropical.

Tabla 59. Vértices de los polinomios del Ejemplo 8. Sección 3.3.

P_1		P_2	
Recta 1 y 2	$V1_1 = (10,9)$	Recta 1 y 2	$V_1 = (1,2)$
Recta 4 y 5	$V1_2 = (-1,-2)$	Recta 4 y 5	$V_2 = (0,1)$
Recta 6 y 8	$y = -3$ y $x - 2 = y$ $x - 2 = -3$ $x = -1$ Entonces $V1_3 = (-1,-3)$	Recta 6 y 8	$y = 2$ y $x + 2 = y$ $x + 2 = 2$ $x = 0$ Entonces $V_3 = (0,2)$
Recta 7 y 9	$x = -6$ y $y = x + 4$ $-6 + 4 = y$ $y = -2$ Entonces $V1_4 = (-6,-2)$	Recta 7 y 9	$x = 3$ y $y = x - 2$ $y = 3 - 2$ $x = 1$ Entonces $V_4 = (3,1)$

Observemos que la Recta 8 de P_1 es igual a la Recta 9 de P_2, veamos entonces como se comportan estas rectas en la gráfica de cada polinomio tropical.

Figura 21. Polinomios del Ejemplo 8. Sección 3.3



Ahora veamos que, la Recta 8 de P_1 es igual a la Recta 9 de P_2, se intersecan en infinitos puntos, ya que su intersección es una semirrecta, de donde podemos concluir de manera general que los dos polinomios tropicales se intersecan en infinitos puntos.

Ejemplo 9: Sean los siguientes polinomios tropicales de segundo grado

P_1: $2\odot x^2 \oplus (-2)\odot x\odot y\oplus(-3)\odot y^2\oplus(-5)\odot y\oplus(-3)\odot x\oplus(-9)$ y

P_2: $2\odot x^2 \oplus 5\odot x\odot y\oplus 2\odot y^2\oplus(-3)\odot y\oplus(-3)\odot x\oplus 5$; Vamos a analizar la posible intersección.

Inicialmente en la tabla 59 tenemos los polinomios tropicales:

Tabla 60. Polinomios del Ejemplo 9. Sección 3.3.

P_1 $$\begin{gathered} 2\odot x^2 \oplus (-2)\odot x\odot y\oplus(-3)\odot y^2\oplus(-5)\odot y\oplus(-3)\odot x\oplus(-9) \\ = 2\odot 2x \oplus (-2)\odot x\odot y\oplus(-3)\odot 2y\oplus(-5)\odot y\oplus(-3)\odot x\oplus(-9) \\ = 2+2x \oplus (-3)+x+y\oplus 2y-3\oplus y-5\oplus x-3\oplus(-9) \\ = mín\{2+2x, -3+x+y, 2y-3, y-5, x-3, -9\} \end{gathered}$$
P_2 $$\begin{gathered} 2\odot x^2 \oplus 5\odot x\odot y\oplus 2\odot y^2\oplus(-3)\odot y\oplus(-3)\odot x\oplus 5 \\ = 2\odot 2x \oplus 5\odot x\odot y\oplus 2\odot 2y\oplus(-3)\odot y\oplus(-3)\odot x\oplus 5 \\ = 2+2x \oplus 5+x+y\oplus 2+2y\oplus y-3\oplus x-3\oplus 5 \\ = mín\{2+2x, 5+x+y, 2+2y, y-3, x-3,5\} \end{gathered}$$

Ahora, si analizamos las rectas que proyectadas que define cada polinomio tenemos:

Tabla 61. Rectas definidas del Ejemplo 9. Sección 3.3.

P_1				P_2			
Recta 1	$y=-4$	Recta 2	$x=-6$	Recta 1	$y=8$	Recta 2	$x=8$
Recta 3	$y=x+2$			Recta 3	$y=x$		
Recta 4	$x=-3$	Recta 5	$y=-1$	Recta 4	$x=-8$	Recta 5	$y=-8$
Recta 6	$y=-2$	Recta 7	$x=-5$	Recta 6	$y=-5$	Recta 7	$x=-5$
Recta 8	$x+1=y$	Recta 9	$y=x+4$	Recta 8	$x+3=y$	Recta 9	$y=x-3$

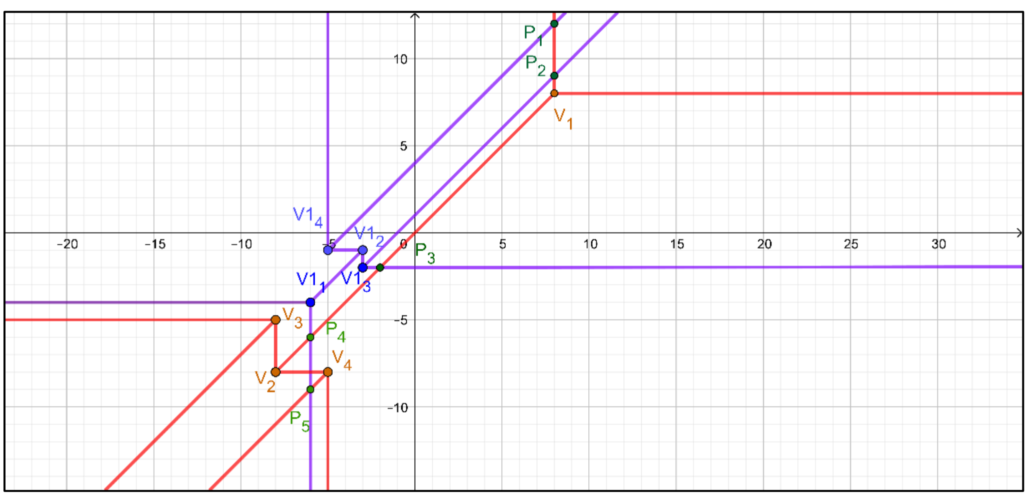
Luego, vamos a encontrar los vértices de cada polinomio tropical.

Tabla 62. Vértices de los polinomios del Ejemplo 9. Sección 3.3.

P_1		P_2	
Recta 1 y 2	$V1_1 = (-6,-4)$	Recta 1 y 2	$V_1 = (8{,}8)$
Recta 4 y 5	$V1_2 = (-3,-1)$	Recta 4 y 5	$V_2 = (-8,-8)$
Recta 6 y 8	$y = -2$ y $x + 1 = y$ $x + 1 = -2$ $x = -3$ Entonces $V1_3 = (-3,-2)$	Recta 6 y 8	$y = -5$ y $x + 3 = y$ $x + 3 = -5$ $x = -8$ Entonces $V_3 = (-8,-5)$
Recta 7 y 9	$x = -5$ y $y = x + 4$ $-5 + 4 = y$ $y = -1$ Entonces $V1_4 = (-5,-1)$	Recta 7 y 9	$x = -5$ y $y = x - 3$ $y = -5 - 3$ $y = -8$ Entonces $V_4 = (-5,-8)$

Observemos que la Recta 7 de P_1 es igual a la Recta 7 de P_2, veamos entonces como se comportan estas rectas en la gráfica de cada polinomio tropical.

Figura 22. Polinomios del Ejemplo 9. Sección 3.3



Notemos que, la Recta 7 de ambos polinomios tienen la misma ecuación, pero las semirrectas no se intersecan, pero la semirrecta que se determina por la Recta 2 de P_2 se interseca con la Recta 8 y 9 de P_1 en un punto respectivamente, simultáneamente la Recta 6 de P_1 se interseca en un único punto con la Recta 3 de P_2, y por último Recta 3 de P_1 se interseca en un único punto con la Recta 9 de P_2 y en un único punto con la Rectas 3 de P_2, de acuerdo con ello los polinomio tropicales se intersecan en 5 puntos.

Observación 2: Nótese que cuando tenemos dos polinomios tropicales de segundo grado, es posible que se intersequen en 2, 4, 5 puntos, o en infinitos, dependiendo como se definan los polinomios.

Sugiero unir 2.2 con 3, lo cual constituye la producción de lo "tropical"; aritmética, álgebra, matemática, geometría…?

4. AMEBAS Y USO DE MAPLE

Este capítulo se da inicialmente una definición de las amebas de forma general, luego se construyen las amebas que definen algunas curvas tropicales como rectas y polinomios de segundo grado en dos variables, al mismo tiempo la construcción llamada Maple[9].

Definición Preliminar: Sea la siguiente aplicación:

$$log: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Definido como,

$$(x, y) \mapsto (log|x| \, , log|y|)$$

Como el logaritmo es indefinido en cero, excluimos el origen restringiendo el dominio de nuestros polinomios al conjunto $(C)^2$. (Sánchez, 2010).

Recordemos que en el capítulo 1 en la sección 1.2. se define una variedad algebraica como un conjunto tal que existe un sistema de ecuaciones para el cual el conjunto es el conjunto de soluciones de dicho sistema, es por ello por lo que podemos establecer la siguiente definición

[9] En el Anexo D, se encuentra una reseña de la Aplicación MAPLE.

Definición de Ameba: Si $X \subset (C)^2$ es una variedad algebraica, su ameba es el conjunto,

$$A(X) = -log(X).$$

La ameba de una variedad algebraica es la imagen bajo la aplicación

$$log: (C)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

4.1.Ameba de una Recta

Para analizar la ameba de una recta veamos lo siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Si $X \subset (C)^2$ es la recta de ecuación $x + y + 3 = 0$, entonces $A(X)$ se establece a partir de:

La ecuación de la recta definida como:

$$x + y + 3 = 0$$

Despejando a y de la ecuación,

$$y = -x - 3$$

Ahora por la definición preliminar en conjunto con la de ameba se tiene que:

$$A(X) = -\, log|x|\, , log|x + 3|$$

Como $X \subset (C^*)^2$ podemos sustituir a $x = re^{i\theta}$, de donde decimos que:

$$A(X) = -\, log\left|re^{i\theta}\right|, log|re^{i\theta} + 3|$$

Donde $-\infty < \theta < \infty$ y $-\infty < r < \infty$.

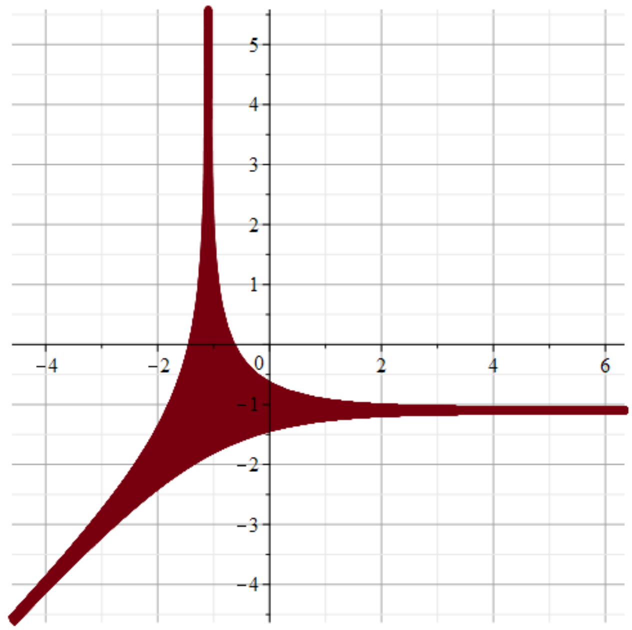
En la siguiente tabla utilizamos MAPLE para representa la ameba de la recta $x + y + 3 = 0$

Tabla 63. Ameba del Ejemplo 1. Sección 4.1.

Código para MAPLE	**Forma gráfica de la Ameba**

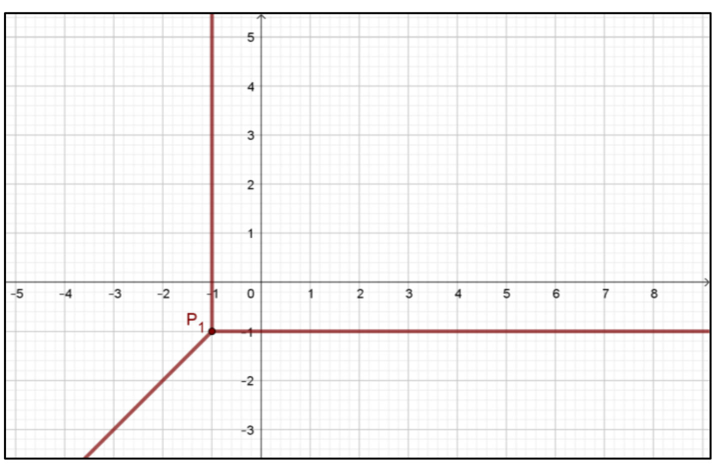
```
> f := x + y + 3;
> s := solve(f, y);
> N := map(abs, [x, s]);
> L := map(-log, N);
> A := subs(x
            = r * exp(theta * I), L);
> Ap := seq(plot([op(subs(theta
= k * Pi/200, A)), r
= -100 .. 100], thickness = 6), k
= -100 .. 100);
> plots[display](Ap)
```

Figura 23.gráfica de la Ameba del Ejemplo 1. Sección 4.1.



En la gráfica de la ameba se puede observar que está conformada por tres secciones que se llaman tentáculos, pero analicemos que dichos tentáculos en el límite forman una recta tropical la cual es llamada espina de la ameba, como sigue;

Figura 24. Espina de la ameba del Ejemplo 1. Sección 4.1.



Ejemplo 2: Si $X \subset (C^*)^2$ es la recta de ecuación $\frac{5}{6}x + \frac{3}{2}y + \frac{11}{7} = 0$, entonces $A(X)$ es:

Inicialmente tenemos la ecuación de la recta como:

$$\frac{5}{6}x + \frac{3}{2}y + \frac{11}{7} = 0$$

Despejando a y de la ecuación,

$$y = \frac{-\frac{5}{3}x - \frac{22}{7}}{3}$$

Ahora por la definición preliminar en conjunto con la de ameba se tiene que:

$$A(X) = -\,log|x|\,, log\left|\frac{-\frac{5}{3}x - \frac{22}{7}}{3}\right|$$

Como $X \subset (C^*)^2$ podemos sustituir a $x = re^{i\theta}$, de donde decimos que:

$$(X) = -\,log\left|re^{i\theta}\right|, -log\left|\frac{-\frac{5}{3}e^{i\theta} - \frac{22}{7}}{3}\right|$$

Donde $-\infty < \theta < \infty$ y $-\infty < r < \infty$.

En la siguiente tabla utilizamos MAPLE para representa la ameba de la recta

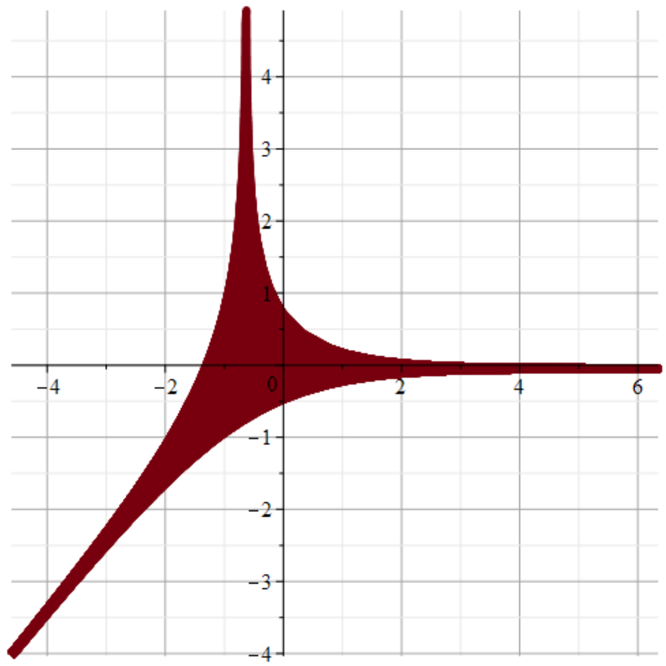
$\frac{5}{6}x + \frac{3}{2}y + \frac{11}{7} = 0$,

Tabla 64. Ameba del Ejemplo 2. Sección 4.1

Código para MAPLE	**Forma gráfica de la Ameba**

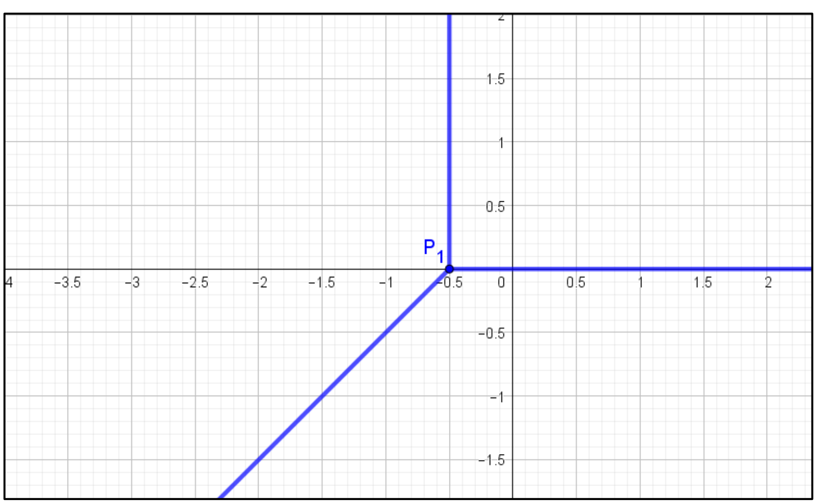
```
> f := 5/6 x + 3/2 y + 11/7;
> s := solve(f, y);
> N := map(abs, [x, s]);
> L := map(−log, N);
> A := subs(x
            = r ∗ exp(theta
            ∗ I), L);
> Ap := seq(plot([op(subs(theta
= k ∗ Pi/200, A)), r
= −100 .. 100], thickness = 6), k
= −100 .. 100);
> plots[display](Ap)
```

Figura 25. gráfica de la Ameba del Ejemplo 2. Sección 4.1.



En la gráfica de la ameba se puede observar que está conformada por tres secciones que se llaman tentáculos, pero analicemos que dichos tentáculos en el límite forman una recta tropical llamada espina de la ameba, como sigue;

Figura 26. Espina de la Ameba del Ejemplo 2. Sección 4.1.



4.2.Ameba de Polinomios de Segundo Grado

Para analizar la ameba de los polinomios de segundo grado veamos aquellas curvas que son generalmente las más conocidas en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: (**<u>Hipérbola</u>**). Si $X \subset (C^*)^2$ es la hipérbola de ecuación $3xy + 2x + 2y = 5$, entonces $A(X)$ se compone de:

Inicialmente tenemos partimos del polinomio:

$$3xy + 2x + 2y = 5,$$

Despejando a y de la ecuación,

$$y = -\frac{2x-5}{3x+2}$$

Ahora por la definición preliminar en conjunto con la de ameba se tiene que:

$$A(X) = -\,log|x|\,, log\left|\frac{2x-5}{3x+2}\right|$$

Como $X \subset (C^*)^2$ podemos sustituir a $x = re^{i\theta}$, de donde decimos que:

$$(X) = -\,log\left|re^{i\theta}\right|, -log\left|\frac{2re^{i\theta}-5}{3re^{i\theta}+2}\right|$$

Donde $-\infty < \theta < \infty$ y $-\infty < r < \infty$.

En la siguiente tabla utilizamos MAPLE para representa la ameba de la hipérbola

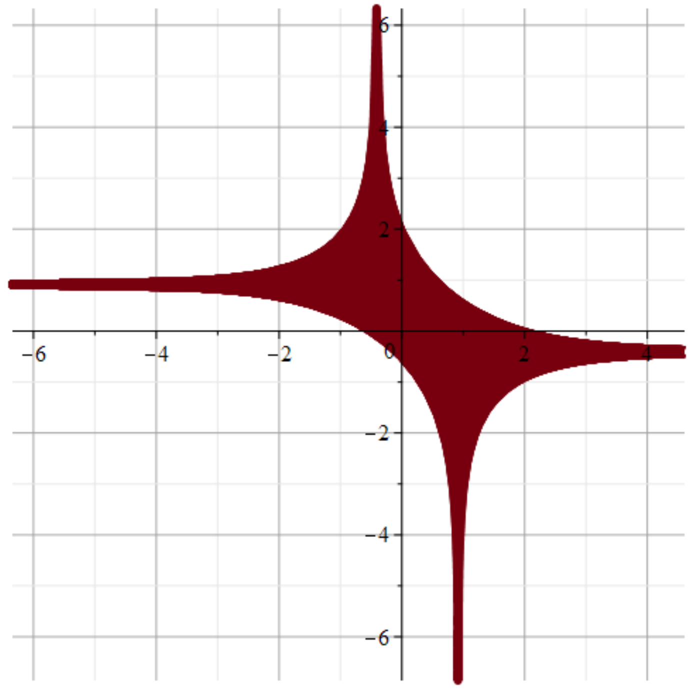
$3xy + 2x + 2y = 5,$

Tabla 65. Ameba del Ejemplo 1. (Hipérbola). Sección 4.2.

Código para MAPLE	**Forma gráfica de la Ameba**

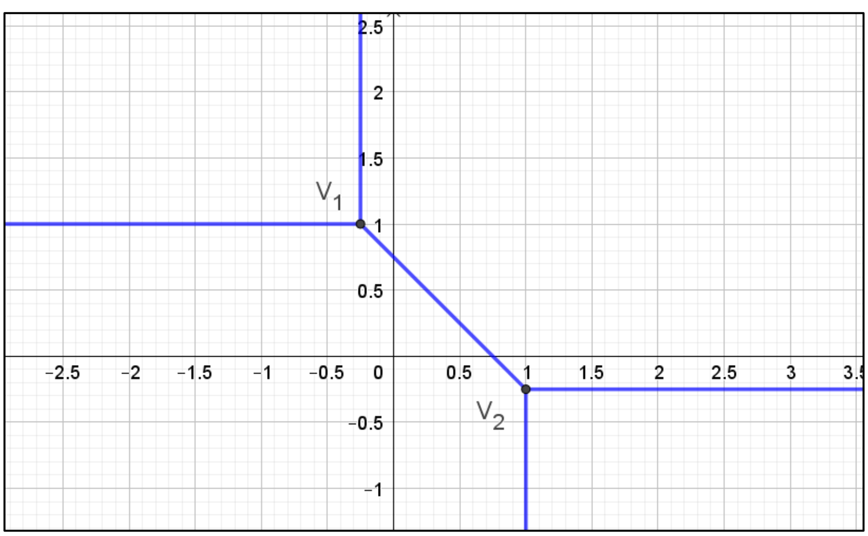
```
> f := 3xy + 2x + 2y − 5
> s := solve(f, y);
> N := map(abs, [x, s]);
> L := map(−log, N);
> A := subs(x
        = r ∗ exp(theta
        ∗ I), L);
> Ap := seq(plot([op(subs(theta
= k ∗ Pi/200, A)), r
= −100 .. 100], thickness = 6), k
= −100 .. 100);
> plots[display](Ap)
```

Figura 27. Ameba del Ejemplo 2. Sección 4.2.



En la gráfica de la ameba se puede observar que está conformada por cuatro secciones que se llaman tentáculos, pero analicemos que dichos tentáculos en el límite forman un polinomio tropical de segundo grado, como sigue;

Figura 28. Espina de la Ameba del Ejemplo 1. Sección 4.2.



Ejemplo 2: (**Parábola**). Si $X \subset (C^*)^2$ es la hipérbola de ecuación $3x^2 + 3x - y = 2$, entonces $A(X)$ se compone de:

Inicialmente tenemos partimos del polinomio:

$$3x^2 + 3x - y = 2$$

Despejando a y de la ecuación,

$$y = 3x^2 + 3x - 2$$

Ahora por la definición preliminar en conjunto con la de ameba se tiene que:

$$A(X) = -\,log|x|\,, log|3x^2 + 3x - 2|$$

Como $X \subset (C^*)^2$ podemos sustituir a $x = re^{i\theta}$, de donde decimos que:

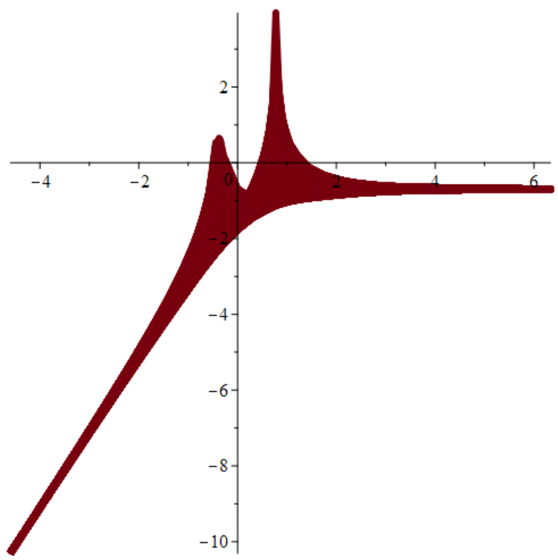
$$(X) = -\,log\left|re^{i\theta}\right|, -log\left|3re^{i\theta^2} + 3re^{i\theta} - 2\right|$$

Donde $-\infty < \theta < \infty$ y $-\infty < r < \infty$.

En la siguiente tabla utilizamos MAPLE para representa la ameba de la parábola $3x^2 + 3x - 2 = y$,

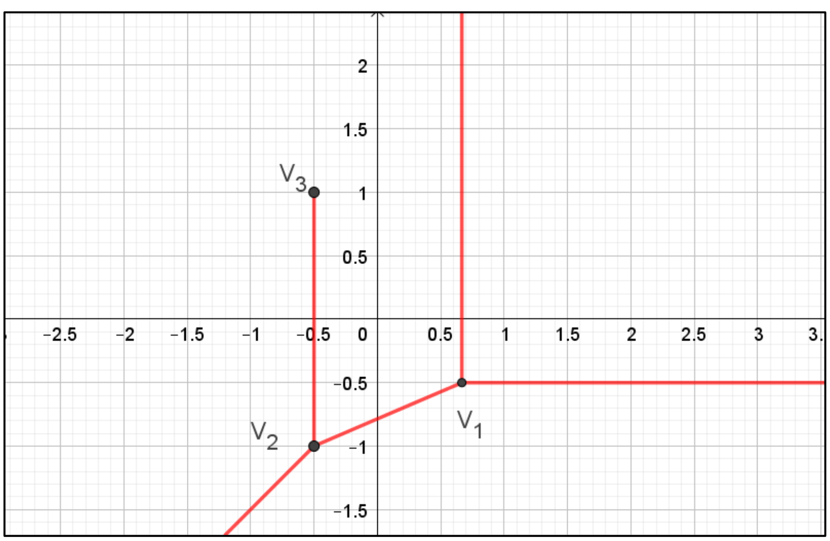
Tabla 66. Ameba del Ejemplo 2. (Parábola). Sección 4.2.

Código para MAPLE	**Forma gráfica de la Ameba**

$> f := 3x^2 + 3x - 2 - y$ $> s := solve(f, y);$ $> N := map(abs, [x, s]);$ $> L := map(-log, N);$ $> A := subs(x = r * exp(theta * I), L);$ $> Ap := seq(plot([op(subs(theta = k * Pi/200, A)), r = -100..100], thickness = 6), k = -100..100);$ $> plots[display](Ap)$	***Figura 29.*** Ameba del Ejemplo 2. Sección 4.2. 

En la gráfica de la ameba se puede observar que está conformada por tres secciones que se llaman tentáculos, dichas secciones en el límite forman un polinomio tropical de segundo grado, como sigue;

Figura 30. Espina de la Ameba del Ejemplo 2. Sección 4.2.



5. CONCLUSIONES

Las conclusiones de este estudio se pueden estructurar en tres secciones, primero sobre aquellos elementos teóricos importantes de la matemática tropical en torno a propiedades y definiciones, segundo acerca de las curvas y superficies en cuanto a su forma gráfica y algebraica donde se señalan aquellas particularidades y observaciones encontradas y tercero sobre los elementos a resaltar para la formación docente.

5.1. Elementos Teóricos

Ahora que hemos visto los diferentes capítulos que componen este trabajo y esencialmente en los capítulos 2 y 3 es precisó concluir que dichas definiciones y teoremas aquí sintetizados es solo un elemento inicial para desarrollar todo un estudio teórico sobre la geometría tropical.

Centrando la atención en el desarrollo matemático de los conceptos es importante concluir que:

1. Debido a la estructura del conjunto $\mathcal{H}$ se dan definiciones como la idempotencia para la suma la cual permite establecer teoremas que son posibles de demostrar como:
   - Si $x, y \in \mathcal{H}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $(a \oplus b)^n = a^n + b^n$.
2. Es importante decir que desde la aritmética clásica se establecen propiedades para la potenciación que cambian con las nuevas definiciones para la suma y el producto tropical ya que se concluye que:
   - $\forall\, x \in \mathcal{H}$ y $n, m \in \mathbb{Z}^+$ entonces $x^{n \oplus m} = x^n \oplus x^n$, gracias a las propiedades que tiene el mínimo conjugadas con las propiedades de conmutatividad de la suma tropical.
   - $\forall\, x \in \mathcal{H}$ y $n, m \in \mathbb{Z}^+$ entonces $x^{n \odot m} = x^n \odot x^m$, debido a que la potencia se convierte en sumar las veces que me diga el exponente las cuales se pueden separar según corresponda con el exponente.

5.2.Curvas

Tras la recopilación y análisis de la información presentada en el capítulo 3 y 4 podemos concluir que:

1. Debido a como se reconfigura la definición de suma y producto, los elementos geométricos como polinomio en una variable, rectas y polinomios de grado dos en dos variables se componen de segmentos y semirrectas que son definidas por medio de rectas y teniendo en cuenta el mínimo en cada parte que compone la curva.
2. Los elementos geométricos se centran en el análisis de las posibles combinaciones entre los términos que componen la expresión algebraica, esto porque de habla de que el mínimo debe asumirse por lo menos dos veces entre los miembros de la expresión.
3. Se presenta la definición de raíces de un polinomio, la cual toma un nuevo sentido que hace referencia a la intersección de las rectas que define la expresión de la curva tropical donde se involucran al mínimo en un determinado intervalo.
4. En términos geométricos, se observa que los polinomios en una variable pueden tener la misma representación gráfica sin ser iguales algebraicamente.
5. En los polinomios de dos variables se puede realizar las siguientes conclusiones;
    - Dos rectas tropicales se intersecan en un único punto o en infinitos puntos.
    - Se puede encontrar la expresión algebraica de una recta tropical a partir de el vértice y el valor de algún coeficiente bien sea a, b ó c.
    - En la geometría tropical el concepto de rectas paralelas desaparece porque en todos los casos existe un tipo de intersección.

- Dos polinomios tropicales de grado dos en dos variables presenta diferentes casos de intersección entre los cuales tenemos los más comunes que son: únicamente 4 puntos e infinitos puntos.
- Las rectas y los polinomios tropicales de grado dos en dos variables presentan los siguientes casos de intersección: únicamente en un punto o dos puntos o infinitos puntos.
- Dos polinomios tropicales de grado dos en dos variable tiene diferentes casos de intersección, las cuales se presentan: cuatro, cinco o infinitos puntos intersección, aclarando que los polinomios tienen diferentes expresiones algebraicas.

5.3.Formación Docente

En cuanto a la formación como futura Licenciada en Matemáticas el desarrollo de este estudio se puede concluir que:

1. El uso de herramientas tecnológicas para construir conceptos y analizar propiedades es útil ya que permite explorar diferentes casos de una misma situación, debido a ello se resalta la importancia de usar estas herramientas para llevar a cabo la construcción dentro y fuera del aula.
2. Al realizar un estudio de cómo se comportan las curvas cambiando las definiciones fortalece a la formación debido a que se involucra el quehacer matemático a la hora de explorar conjeturar y demostrar aquellas particularidades encontradas.

REFERENCIAS

Androvic, D. y Verschelde, J. (2009). *Tropical Algebraic Geometry in Maple*. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Lilinois Chicago.

Águeda, R. (s.f.). *Variedades Algebraicas y Esquemas, Una introducción a la Geometría Algebraica.* Universidad Autónoma de México. Recuperado el 15 de enero, 2022. http://intermat.fciencias.unam.mx/varalg.pdf

Campos, M., Garzón, M., Mora, C., Pérez, J. y Villamarín, G. (2004). *Fundamentos del Álgebra* Lineal. Universidad Nacional De Colombia.

Chitiva, J. (febrero del 2018). *Introducción a la geometría tropical y su aplicación al diseño de mecanismos.* [Diapositivas en LaTeX]. Recuperado 15 de octubre, 2020. https://quantil.co/wp-content/uploads/2018/02/Seminario-Introducci%C3%B3n-a-la-Geometr%C3%ADa.pdf

Correa, A. (s.f.). *Aritmética, Álgebra y Geometría Tropical*. Trabajo final de pregrado. Universidad de Valladolid.

Czubara, C. (2011). *Hipersuperficies Tropicales Singulares*. Tesis de Licenciatura. Universidad de Buenos Aires. Argentina.

Garay, C. (2018). *Matemática tropical*. México. 2do Encuentro Nacional de Jóvenes Investigadores en Matemáticas.

Laface, A. (2008). *Introducción a la Geometría Tropical*. Trabajo. Universidad de Concepción.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. Limusa.

Luque, C., Jiménez, H., y Ángel, J. (2013). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables.* (2nd ed.). Universidad Pedagógica Nacional.

Maclagan, D. y Sturmfels, B. (2009). *Introduction to Tropical Geometry*. Recuperado el 16 de diciembre de 2021 de http://www.cs.technion.ac.il/~janos/COURSES/238900-13/Tropical/MaclaganSturmfels.pdf

Mikhalkin, G. y Reau, J. (2018). Tropical Geometry. Recuperado el 20 de diciembre de 2021 de https://www.math.uni-tuebingen.de/user/jora/downloads/main.pdf

MapleSoft. (10 de enero del 2022). *Poderoso Software para Matemáticas y Modelaje.* https://www.maplesoft.com/contact/webforms/google/maple/mathsoftware-sp.aspx

Moise, E. (1966). *Geometría Moderna*. Addison- Wesley Iberoamericana, S.A.

Ortiz, F. (2008). *Álgebra de Polinomios*. Apuntes de ingeniería mecánica y eléctrica. Universidad Autónoma de México.

Prieto, Y. [EfrainVega]. (2017, agosto, 24). *Geometría tropical desde los tiempos de Hilbert.* (Yulieth Prieto). [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=AoB2-EdcVH4

Revilla, F. (22 de octubre de 2015). *Semianillo Tropical.* Fernando Revilla. Recuperado el 09 de octubre de 2020 de *https://fernandorevilla.es/2015/10/22/semianillo-tropical/*

Sánchez, D. (2010). *Introducción a la Geometría Tropical*. [Tesis de Pregrado, Pontificia Universidad Javeriana]. Repositorio Institucional – Pontificia Universidad Javeriana. *https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/8784/tesis715.pdf?sequence=1*

Simson, F. (s.f.). *Elementos de Euclides*. Universidad de Glasgow. Madrid. España.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, Trascendentes tempranas*. Thomson. Tercera Edición.

Suppes, P. (1976). *Teoría Axiomática de Conjuntos.* Norma.

Las referencias presentadas aquí deben corresponder con las citaciones realizadas en el extenso del documento y viceversa.

ANEXOS

Anexo A
Propiedades del mínimo

En nuestro estudio y basados en los libros clásicos de matemática se estable el mínimo como:

<u>Definición del mínimo:</u> Sea un conjunto $\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se dice que x es el mínimo si y solo si $x \leq n$ para todo $n \in \mathcal{H}$.

Entonces partiendo de dicha definición y teniendo en cuenta que $\mathcal{H}$ es un conjunto bien ordenado[10] se puede decir que se cumplen las siguientes propiedades:

1. Para todo $x \in \mathcal{H}$ se cumple que: $mín\{x, x\} = x$.
2. Para todo $x \in \mathcal{H}$ se cumple que: $mín\{x, \infty\} = \infty$
3. Para todo $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple que:
$$mín\{x, y\} = mín\{y, x\}$$
4. Para todo $x, y, n \in C$ se cumple que:
$$n * mín\{x, y\} = mín\{n * x, n * y\} = mín\{x * n, y * n\} = mín\{x, y\} * n$$
5. Para todo $x, y, n \in C$ se cumple que:
$$n + mín\{x, y\} = mín\{n + x, n + y\} = mín\{x + n, y + n\} = mín\{x, y\} + n$$
6. Para todo $x, y, n \in C$. Si $x > n > y$ entonces se cumple que:
$$mín\{x, y, n\} = mín\{x, y\} = y$$

Anexo B
Para hablar sobre la aritmética del infinito tenemos lo siguiente Suppes (1976) establece los siguiente:

---

[10] Lema de Zorn: Si X es un conjunto ordenado por la relación $\leq$ tal que toda $\leq -cadena$ de X es acotada superiormente en X, entonces X posee al menos un elemento máximal.

Teorema de la buena ordenación: Todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir, para cualquier conjunto X existe una relación de orden " $\leq$ " tal que $(X, \leq)$ es bien ordenado. (Muñoz, 2002, p. 256- 259

1. $\infty + \infty = \infty$

2. $\infty * \infty = \infty$

3. $\infty^{\infty} = \infty$

4. Para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$x^{\infty} = \underbrace{x * x * x * \dots}_{\infty\, Veces} = \infty$$

5. Para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\infty^{x} = \underbrace{\infty * \infty * \infty * \infty * \dots}_{x\, Veces} = \infty$$

6. Para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$x + \infty = \infty$$

$$\infty + x = \infty$$

7. Para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\frac{\infty}{x} = \infty$$

8. Para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\infty - x = \infty$$

Pero **no** se encuentra definido

$$x - \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{x}{\infty}$$

Anexo C

<u>Teorema 3</u>: Para $< \mathcal{H}, \bigoplus >$ y $x, y, z, u, v \ \in \mathcal{H}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

Identidad I de Stein: $x \oplus (x \oplus y) = y \oplus x$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (x \oplus y)$	Dado
2	$(x \oplus x) \oplus y$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$x \oplus y$	Idempotencia tropical (2)
4	$y \oplus x$	Conmutativa tropical (3)

Identidad II de Stein: $(x \oplus y) = (y \oplus x) \oplus y$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$(x \oplus y)$	Dado
2	$y \oplus x$	Conmutativa tropical (1)
3	$(y \oplus y) \oplus x$	Idempotencia tropical (2)
4	$y \oplus (y \oplus x)$	Asociativa de la suma tropical (3)
5	$(y \oplus x) \oplus y$	Conmutativa tropical (4)

Identidad I de Schröder: $x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus y) \oplus y$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (x \oplus y)$	Dado
2	$(x \oplus x) \oplus y$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$(x \oplus y)$	Idempotencia tropical (2)
4	$x \oplus (y \oplus y)$	Idempotencia tropical (3)
5	$(x \oplus y) \oplus y$	Asociativa de la suma tropical (4)

Elasticidad: $x \oplus (y \oplus x) = (x \oplus y) \oplus x$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus x)$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus x$	Asociativa de la suma tropical (1)

Asociativa cíclica I: $x \oplus (y \oplus z) = z \oplus (x \oplus y)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus z)$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$z \oplus (x \oplus y)$	Conmutativa tropical (2)

Asociativa cíclica II: $x \oplus (y \oplus z) = (z \oplus x) \oplus y$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus z)$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$z \oplus (x \oplus y)$	Conmutativa tropical (2)
4	$(z \oplus x) \oplus y$	Asociativa tropical (3)

Identidad de Abel Graβmann I: $x \oplus (y \oplus z) = z \oplus (y \oplus x)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus z)$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$z \oplus (x \oplus y)$	Conmutativa tropical (2)

Identidad de Abel Graβmann II: $x \oplus (y \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus z)$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (1)

Permutabilidad a izquierda: $x \oplus (y \oplus z) = y \oplus (x \oplus z)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus z)$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$(y \oplus x) \oplus z$	Conmutativa tropical (2)
4	$y \oplus (x \oplus z)$	Asociativa de la suma tropical (3)

Permutabilidad a derecha: $(x \oplus y) \oplus z = (x \oplus z) \oplus y$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$(x \oplus y) \oplus z$	Dado
2	$z \oplus (x \oplus y)$	Conmutativa tropical (1)
3	$(z \oplus x) \oplus y$	Asociativa de la suma tropical (2)

Propiedad del producto reducido: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (z \oplus y)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$(x \oplus y) \oplus z$	Dado

2	$x \oplus (y \oplus z)$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$x \oplus (z \oplus y)$	Conmutativa tropical (2)

Autodistributividad a izquierda: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus (x \oplus z)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus z)$	Dado
2	$(x \oplus x) \oplus (y \oplus z)$	Idempotencia tropical (1)
3	$x \oplus (x \oplus (y \oplus z))$	Asociativa de la suma tropical (2)
4	$x \oplus \big((x \oplus y) \oplus z\big)$	Asociativa de la suma tropical (3)
5	$(x \oplus (x \oplus y)) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (4)
6	$((x \oplus y) \oplus x) \oplus z$	Conmutativa tropical (5)
7	$(x \oplus y) \oplus (x \oplus z)$	Asociativa de la suma tropical (6)

Autodistributividad a derecha: $(x \oplus y) \oplus z = (x \oplus z) \oplus (y \oplus z)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$(x \oplus y) \oplus z$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus (z \oplus z)$	Idempotencia tropical (1)
3	$((x \oplus y) \oplus z) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (2)
4	$(x \oplus (y \oplus z)) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (3)
5	$x \oplus ((y \oplus z) \oplus z)$	Asociativa de la suma tropical (4)
6	$x \oplus (z \oplus (y \oplus z))$	Conmutativa tropical (5)
7	$(x \oplus z) \oplus (y \oplus z)$	Asociativa de la suma tropical (6)

Autodistributividad a izquierda abeliana: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus (z \oplus x)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x \oplus (y \oplus z)$	Dado
2	$(x \oplus x) \oplus (y \oplus z)$	Idempotencia tropical (1)
3	$x \oplus (x \oplus (y \oplus z))$	Asociativa de la suma tropical (2)
4	$x \oplus ((x \oplus y) \oplus z)$	Asociativa de la suma tropical (3)
5	$x \oplus (z \oplus (x \oplus y))$	Conmutativa tropical (4)
6	$(x \oplus z) \oplus (x \oplus y)$	Asociativa de la suma tropical (5)
7	$(x \oplus y) \oplus (x \oplus z)$	Conmutativa tropical (6)
8	$(x \oplus y) \oplus (z \oplus x)$	Conmutativa tropical (7)

Autodistributividad a derecha abeliana: $(x \oplus y) \oplus z = (z \oplus x) \oplus (y \oplus z)$. Demostración:

#	Afirmación	Garantía
1	$(x \oplus y) \oplus z$	Dado
2	$(x \oplus y) \oplus (z \oplus z)$	Idempotencia tropical (1)
3	$\big((x \oplus y) \oplus z\big) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (2)
4	$\big(x \oplus (y \oplus z)\big) \oplus z$	Asociativa de la suma tropical (3)
5	$\big((y \oplus z) \oplus x\big) \oplus z$	Conmutativa tropical (4)
6	$(y \oplus z) \oplus (x \oplus z)$	Asociativa de la suma tropical (5)
7	$(x \oplus z) \oplus (y \oplus z)$	Conmutativa tropical (6)
8	$(z \oplus x) \oplus (y \oplus z)$	Conmutativa tropical (7)

Bisimetría: $(x \oplus y) \oplus (u \oplus v) = (x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$. Demostración:

#	Afirmación	Garantía
1	$(x \oplus y) \oplus (u \oplus v)$	Dado
2	$x \oplus (y \oplus (u \oplus v))$	Asociativa de la suma tropical (1)
3	$x \oplus \big(y \oplus (v \oplus u)\big)$	Conmutativa tropical (2)
4	$x \oplus ((y \oplus v) \oplus u)$	Asociativa de la suma tropical (3)
5	$x \oplus (u \oplus (y \oplus v))$	Conmutativa tropical (4)
6	$(x \oplus u) \oplus (y \oplus v)$	Asociativa de la suma tropical (5)

Teorema 4: Para $< \mathcal{H}, \odot >$ y $x, y, z, u, v \in \mathcal{H}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

Elasticidad: $x \odot (y \odot x) = (x \odot y) \odot x$. Demostración:

#	Afirmación	Garantía
1	$x \odot (y \odot x)$	Dado
2	$(x \odot y) \odot x$	Asociativa del producto tropical (1)

Asociativa cíclica I: $x \odot (y \odot z) = z \odot (x \odot y)$. Demostración:

#	Afirmación	Garantía
1	$x \odot (y \odot z)$	Dado
2	$(x \odot y) \odot z$	Asociativa del producto tropical (1)
3	$z \odot (x \odot y)$	Conmutativa tropical (2)

Asociativa cíclica II: $x \odot (y \odot z) = (z \odot x) \odot y$. Demostración:

#	Afirmación	Garantía
1	$x\odot(y\odot z)$	Dado
2	$(x\odot y)\odot z$	Asociativa del producto tropical (1)
3	$(y\odot x)\odot z$	Conmutativa tropical (2)
4	$y\odot(x\odot z)$	Asociativa del producto tropical (3)
5	$(x\odot z)\odot y$	Conmutativa tropical (4)
6	$(z\odot x)\odot y$	Conmutativa tropical (5)

Identidad de Abel Graβmann I: $x\odot(y\odot z) = z\odot(y\odot x)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x\odot(y\odot z)$	Dado
2	$(x\odot y)\odot z$	Asociativa del producto tropical (1)
3	$(y\odot x)\odot z$	Conmutativa tropical (2)
4	$z\odot(y\odot x)$	Conmutativa tropical (3)

Identidad de Abel Graβmann II: $x\odot(y\odot z) = (y\odot x)\odot z$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x\odot(y\odot z)$	Dado
2	$(x\odot y)\odot z$	Asociativa del producto tropical (1)
3	$(y\odot x)\odot z$	Conmutativa tropical (2)

Permutabilidad a izquierda: $x\odot(y\odot z) = y\odot(x\odot z)$. Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$x\odot(y\odot z)$	Dado
2	$x\odot(z\odot y)$	Conmutativa tropical (1)
3	$(x\odot z)\odot y$	Asociativa del producto tropical (2)
4	$y\odot(x\odot z)$	Conmutativa tropical (3)

Permutabilidad a derecha: $(x\odot y)\odot z.$ Demostración:

#	**Afirmación**	**Garantía**
1	$(x\odot y)\odot z$	Dado
2	$x\odot(y\odot z)$	Asociativa del producto tropical (1)
3	$x\odot(z\odot y)$	Conmutativa tropical (2)
4	$(x\odot z)\odot y$	Asociativa del producto tropical (3)

Propiedad del producto reducido: $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y)$. Demostración:

#	Afirmación	Garantía
1	$(x \odot y) \odot z$	Dado
2	$x \odot (y \odot z)$	Asociativa del producto tropical (1)
3	$x \odot (z \odot y)$	Conmutativa tropical (2)

Bisimetría: $(x \odot y) \odot (u \odot v) = (x \odot u) \odot (y \odot v)$. Demostración:

#	Afirmación	Garantía
1	$(x \odot y) \odot (u \odot v)$	Dado
2	$x \odot (y \odot (u \odot v))$	Asociativa del producto tropical (1)
3	$x \odot ((y \odot u) \odot v)$	Asociativa del producto tropical (2)
4	$x \odot ((u \odot y) \odot v)$	Conmutativa tropical (3)
5	$x \odot (u \odot (y \odot v))$	Asociativa del producto tropical (4)
6	$(x \odot u) \odot (y \odot v)$	Asociativa del producto tropical (5)

Anexo D

Maple es un programa que se establece con el fin de resolver problemas matemáticos y de modelación, donde vienen articulados diferentes comandos que permiten hacer cálculos algebraicos y simbólicos de álgebra computacional, fue constituido en los años 80 por el grupo de Cálculo Simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá, en la actualidad ha sido mejorado y comercializado por MapleSolft con sede en Canadá.

Este programa está dirigido esencialmente para Matemáticos e Ingenieros, pero se puede usar como recurso en el aula para apoyar el proceso de visualización, exploración, modelación entre otros, es un programa que no es encuentra de libre acceso por lo tanto hay que obtener licencias para su descarga y funcionamiento.

Siendo así es claro que se debe comprar un paquete donde permite instalar la aplicación con sus funciones, Maple se convierte entonces es una herramienta, tecnológicamente avanzada, que incorpora algoritmos simbólicos propios utilizados por la comunidad afín con las matemáticas.

Por otro lado, este software incorpora desde versiones preliminares sistemas de resolución numéricos que patrocinan sus aliados como Numerical Algorithms Group (NAG).

El Software puede ser utilizado desde cualquier área científica, se vuelve relevantes para el ámbito de la enseñanza ya que permite central la atención en el concepto y no en el proceso que se necesita para que la aplicación ejecute, en el de investigación o, en desarrollo gracias a que realiza diversos calculo y se minimizan los tiempos de prueba.

En el presente trabajo se aborda para la construcción principalmente de amebas, donde se hacen necesarios algunos comandos que permiten graficarlas, aquellos que fueron utilizados son los siguientes.

6. ***Variables*****:** Las variables definidas como letras y guardando en ella elementos como funciones, letras, valores producto de una operación, esto por medio de símbolo " $\coloneqq$ ".
7. ***Solve***: Este comando usado para resolver una ecuación con respecto a una variable, es decir recibe un polinomio y despeja la variable indicada.
8. ***Map***: Este comando se utiliza para aplicar un determinado proceso a una función que esta guardada en una variable.
9. ***Abs:*** Utilizado para aplicar el valor absoluto de valor que se encuentra en una variable.
10. ***Subs:*** Aplicado para sustituir alguna variable definida en alguna función.
11. ***Seq:*** Este comando nos ayuda a construir secuencias donde se establece una función que depende de un parámetro y se da valores o intervalos a dicho parámetro.
12. ***Plot:*** Este comando es utilizado para graficar funciones o secuencias que se definen en variables.