



**Descripción de los sistemas conservativos en mecánica clásica desde el concepto de no integrabilidad de Poincaré**

**Andrés Segura Patiño**

**Universidad Pedagógica Nacional**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

**Licenciatura en Física**

**Bogotá D.C**

**2021**

**Descripción de los sistemas conservativos en mecánica clásica desde el concepto de no integrabilidad de Poincaré**

**Andrés Segura Patiño**



**Directora: Sandra Avila**

**Universidad Pedagógica Nacional**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

**Licenciatura en Física**

**Bogotá D.C**

**2021**

## **Dedicatoria**

Este trabajo está dedicado a mis padres Erasmo Segura y Nelsy Patiño y mi hermana Daniela por permitirme tener esta oportunidad, pero por, sobre todo, haberme entregado lo más valioso que tiene una persona, que es su tiempo. Fue precisamente ese aspecto el que me permitió embancarme en esta empresa y llegar a buen puerto. Por otra parte, agradecer aquellas personas como a Lucia por acompañarme en este proceso y a los diferentes maestros que formaron parte de este, en especial a la profesora Sandra, que gracias a sus recomendaciones y consejos este trabajo ha adquirido esta forma.

*“Por la falta de un clavo fue que la herradura se perdió.  
Por la falta de una herradura fue que el caballo se perdió.  
Por la falta de un caballo fue que el caballero se perdió.  
Por la falta de un caballero fue que la batalla se perdió.  
Y así como la batalla, fue que un reino se perdió.  
Y todo porque fue un clavo el que faltó”.*

**George Herbert**

## Tabla de contenido

I	Introducción .....	7
II	Objetivos .....	11
III	Antecedentes .....	12
1	SISTEMAS INTEGRABLES Y NO INTEGRABLES .....	13
1.1	Mecánica Hamiltoniana .....	13
1.2	Sistemas integrables .....	14
1.3	Variables de ángulo-acción .....	15
1.4	Movimiento periódico y multiperiódico .....	18
1.5	Sistemas no integrables .....	21
1.6	Teoría de la perturbación .....	21
1.7	Teorema de Poincaré .....	24
2	PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA MECÁNICA CLÁSICA .....	26
2.1	Problema de los pequeños denominadores .....	26
2.2	Sección de superficie de Poincaré .....	28
2.3	Resonancias internas .....	35
2.4	Teorema KAM .....	37
2.5	Difusión de Arnol'd .....	39
3	TIEMPO DE RECURRENCIA .....	43
3.1	Tiempo de recurrencia .....	43
3.2	Mezcla .....	45
3.3	Relación entre el teorema de Liouville y la difusión de Arnol'd .....	48
IV	Análisis .....	50
V	Conclusiones .....	52
VI	Bibliografía .....	53
VII	Apendice .....	55
1	A. 1 .....	55
2	A-2 .....	56
3	A-3 .....	57
4	A-4 .....	58

## I Introducción

La física se describe en términos de ecuaciones dinámicas. Estas ecuaciones describen la forma en que un conjunto de variables relevantes (posición y velocidad) para el sistema cambia en el tiempo. Para ello se parte de las siguientes consideraciones: Caracterizar el estado del sistema por una serie de parámetros cuantificables (medibles) y seguidamente introducir dichos parámetros en un modelo conceptual (teoría). A partir de esto, se asume que los modelos son una representación “genuina” de las posibilidades físicas del sistema en cuestión. Por ello, la mecánica clásica es un referente, dado que permite establecer una relación biunívoca entre causa y efecto, y sería Laplace<sup>1</sup> quien inmortalizaría esta noción al afirmar que, conociendo las facetas del estado presente del sistema se puede derivar cualquier estado, pasado o futuro<sup>2</sup>. Entonces la idea de una *evolución única* sugiere, que un estado dado siempre es seguido (y precedido) por la misma historia de transiciones de estado, por ejemplo, las ecuaciones de movimiento de un péndulo sin fricción producirán la misma solución siempre y cuando se tome la misma velocidad y posición iniciales. En términos generales, la idea es que cada vez que se devuelve el modelo matemático al mismo estado inicial (o cualquier estado en la historia de las transiciones de estado), se someterá a la misma historia de transiciones de un estado a otro. En otras palabras, la evolución será única dada una especificación de condiciones iniciales y de contorno. Tenga en cuenta que, tal como esta formulado, la evolución única expresa transiciones de estado en ambas direcciones (pasado y futuro).

Por ejemplo, imagine un sistema físico típico como una película. Satisfacer la evolución única significa que si la película se inicia una y otra vez en el mismo fotograma (devolviendo el sistema al mismo estado inicial), entonces  $x$  repetirá cada detalle de su historia total una y otra vez y se producirán copias idénticas de la película en la misma

---

<sup>1</sup> El determinismo halló su expresión más precisa en el famoso pasaje de Laplace: “Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos” (Laplace, 1996, pág. 25)

<sup>2</sup> De hecho, fue Leibniz quien desarrolló esta noción, apoyándose en su principio de razón suficiente, antes que Laplace. Y sin embargo ha sido la visión de Laplace, la que se ha convertido en ejemplo paradigmático del determinismo en las teorías físicas.

secuencia de imágenes. Además, si se comenzará con un fotograma diferente, dígase, un fotograma en la mitad de la película, todavía hay una secuencia única de fotogramas.

Pero la única manera de que la concepción de Laplace tenga validez es si el conjunto de ecuaciones que describen el sistema es invariante ante transformaciones temporales. Tolman en el capítulo V de su libro<sup>3</sup> demuestra, que, en el mejor de los casos, si las fuerzas que actúan sobre el sistema son independientes del tiempo y la velocidad, entonces los movimientos son reversibles. El argumento de Tolman podría en principio haber probado que los sistemas mecánicos conservativos son completamente reversibles, pero aquí, cabe hacer la siguiente aclaración, y es que el argumento de Tolman depende sutilmente del supuesto de que la mecánica clásica es estrictamente determinista, en el sentido de que el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan los sistemas dinámicos tiene soluciones únicas una vez aplicadas las condiciones de contorno. ¿Qué se puede decir, entonces, acerca de los teoremas de unicidad y existencia para las ecuaciones del movimiento? Parece ser que la raíz del problema, concerniente al argumento de Tolman, se remonta al hecho de que los teoremas matemáticos garantizan la existencia y unicidad *localmente en el tiempo*.

A modo de contraste, supóngase que volver  $x$  al mismo estado inicial produce una secuencia diferente de transiciones de estado en algunas de las ejecuciones. Considere que un sistema es como un dispositivo que genera espontáneamente una secuencia diferente de imágenes en algunas ocasiones cuando se parte de la misma imagen inicial. Además, imagine que dicho sistema tiene la propiedad de que simplemente eligiendo comenzar con cualquier imagen que aparezca normalmente en la secuencia, a veces la imagen elegida no va seguida de la secuencia habitual de imágenes. O imagine que algunas imágenes a menudo no aparecen en la secuencia, o que se agregan nuevas de vez en cuando. Tal sistema no satisfaría la idea de evolución única y no calificaría como determinista.

Un caso de tales sistemas es el problema de los N-cuerpos<sup>4</sup> abordado por Poincaré a finales del siglo XIX. La pregunta que Poincaré se hizo fue si había una manera adecuada de transformar el sistema de ecuaciones que describen el movimiento de planetario en un

---

<sup>3</sup> Tolman, 1938, *Collisions as a Mechanism of Change With Time*, págs. 99-105.

<sup>4</sup>La estabilidad a largo plazo del Sistema Solar, reducible en el caso general al conocido problema de los N-cuerpos, es uno de los problemas más importantes que se han planteado en el curso del desarrollo tanto de las matemáticas como de la física. En 1885, el rey Oscar II de Suecia y Noruega, por sugerencia de G. Mittag-Leffler, estableció un premio por resolver este problema: “*Dado un sistema de muchos puntos de masa que se atraen arbitrariamente entre sí de acuerdo con las leyes de Newton, intente encontrar, bajo el supuesto de que nunca colisionan dos puntos, una representación de las coordenadas de cada punto como una serie en una variable que es alguna función conocida del tiempo y para todos cuyos valores la serie converge uniformemente*” (Whittaker, pág. 351)



sistema donde la interacción gravitacional desapareciera, de tal manera que cada planeta fuese tratado independiente de los demás. Pero lo que Poincaré mostró fue que en general tal transformación no era posible para sistemas de N-cuerpos que interactúan mutuamente, lo que lo llevó a clasificar a los sistemas dinámicos<sup>5</sup> entre integrables, cuasi integrables y no integrables (Poincaré, 1957).

La naturaleza del problema de los N-cuerpos es que dependiendo si este es integrable, cuasi integrable o no integrable, la equivalencia entre los estados del sistema se mantiene o no. Esto se entiende mejor si se considera la transición de un estado A (un sistema de varios cuerpos) sin interactuar en  $t = 0$  a un estado B, después de cierto tiempo  $t$  los cuerpos habrán experimentado cierto número de interacciones. Obviamente la transición de A hacia B implica procesos diferentes que la transición de B hacia A, entonces la equivalencia entre causa y efecto no mantiene esa relación biunívoca que sí mantenía la descripción de Laplace. ¿Pero a qué se debe este hecho? ¿será una particularidad de la teoría empleada, o más bien un atributo del mismo sistema? Como se mostrará, el problema radica en la información que se puede obtener de un sistema, ya que toda medida solo puede realizarse con cierto número finito de cifras decimales. Entonces el problema de la equivalencia entre los estados de un sistema dinámico se debe en principio a la imposibilidad de definir con exactitud la información que posee este.

Pero a pesar de lo mencionado, la forma en que tradicionalmente se enseña y explica la mecánica clásica se basa en una representación de estados “apropiados”, y apropiados es un eufemismo para decir idealizados (con información completa). Normalmente esta descripción se basa en dos aspectos: el primero, que la interacción entre las partes del sistema o el sistema y el exterior no son tenidas en cuenta o son poco importantes. Hecho que facilita el estudio de cada agregado por separado. Y segundo, que la relación entre las partes sea lineal, ya que este aspecto garantiza el análisis del proceso global como la suma de sus partes. Como se puede ver, esta forma de abordar la mecánica excluye por supuesto los resultados de Poincaré; pero claro, no se trata de deslegitimar esta forma de reducir y analizar los sistemas

---

<sup>5</sup> Esta clasificación se basó en el rol que desempeñan las resonancias en los sistemas dinámicos. Estas son el producto de la interacción entre los grados de libertad del sistema. Si las resonancias son conmensurables el sistema se puede reducir por la teoría de perturbación a un sistema integrable o casi integrable, en cuyo caso sería un movimiento periódico o cuasi-periódico respectivamente, pero en caso contrario en que las resonancias sean inconmensurables, la teoría de perturbación no tiene nada que decir. Para el caso en que las resonancias son inconmensurables los efectos colectivos (producto de las interacciones) primarán sobre el comportamiento individual de las partes. Esto es característico de los sistemas no integrables, sumado al hecho de la imprevisibilidad.

por parte de la mecánica clásica, ya que los resultados hablan por sí mismos, sino de lo que se trata es de proponer una forma alterna de describirla e interpretarla, en términos de la evolución temporal de las interacciones.

Teniendo en cuenta lo anterior y dada la naturaleza disciplinar de este trabajo y la perspectiva personal desde la cual su autor la quiso abordar; se propone trabajar mediante una descripción documental de forma cualitativa, para ello, el autor ha propuesto dividir el trabajo en tres partes, esto con el fin de presentar cierto nivel de comprensión respecto a los temas abordados, de tal forma que sean legibles y accesibles. Dado que el objetivo de este trabajo es presentar una descripción alterna a la de la mecánica clásica que tradicionalmente se enseña teniendo en cuenta los resultados de Poincaré, concernientes a los sistemas integrables.

Con lo anterior, el presente trabajo se propone presentar una descripción de la no equivalencia entre estados dinámicos para sistemas conservativos de la mecánica clásica, teniendo en cuenta el concepto de no integrabilidad propuesto por Poincaré, por lo cual en el primer capítulo se encuentra una descripción de los diferentes tópicos relacionados a la descripción de los sistemas conservativos dentro de la mecánica clásica, esto con el fin de contextualizar los resultados obtenidos por Poincaré, respecto a la clasificación de los sistemas dinámicos y comprender el teorema que lleva su nombre. Se utilizará la formalización Hamiltoniana dada sus ventajas, ya que permite evaluar la evolución temporal de cualquier propiedad del sistema sin tener que recurrir a la solución de las ecuaciones que describen el movimiento. El segundo capítulo consiste en demostrar que las interacciones y los efectos colectivos derivados de ellas tienen una influencia general sobre la dinámica del sistema. Hecho acompañado de las discontinuidades producto de la superposición de resonancias, asociado a la difusión de Arnol'd. Y finalmente en la tercera parte se relacionan los conceptos de no integrabilidad y difusión, para mostrar que la irreversibilidad está implícita dentro de la descripción de la mecánica clásica, sin necesidad de recurrir a elementos ad hoc. Conviene subrayar que los resultados que se expondrán se basarán principalmente en técnicas geométricas.

## II Objetivos

### General

Presentar una descripción de la no equivalencia entre estados dinámicos para sistemas conservativos de la mecánica clásica teniendo en cuenta el concepto de no integrabilidad propuesto por Poincaré.

### Específicos

- Realizar una revisión preliminar alrededor del papel que desempeñan las interacciones en la formalización y descripción de la mecánica clásica, describiendo las razones por las cuales no pueden ser eliminadas, desde la perspectiva de Poincaré.
- Identificar las condiciones para las cuales la equivalencia entre estados es un caso particular (local) en la descripción dinámica de la mecánica clásica.
- Relacionar las condiciones de no integrabilidad con los procesos colectivos producto de las resonancias.

### III Antecedentes

Para introducirse al tema tratado de este trabajo es necesario conocer su origen como su desarrollo a lo largo del tiempo. Por ello, a opinión del autor, estos tres trabajos recogen estos dos aspectos. El primero por su formalismo y descripción conceptual, el segundo por mostrar cómo ha ido cambiando este tema a lo largo del tiempo y el tercero por ser el origen de la cuestión tratada aquí.

1. Valdés (1983) realiza una descripción detallada sobre el fenómeno de difusión de Arnol'd, asociado a la intersección de variedades invariantes, para sistemas con  $n > 2$  grados de libertad. Parte de sus resultados permitirán comprender el comportamiento de sistemas de la forma  $H = H_0 + \lambda H_1$ , que serán objeto de análisis en la primera sección y parte de la segunda sección de este documento; haciendo especial énfasis en los casos en que  $\lambda \ll 1$ , pero para los casos particulares en que  $\lambda \gg 1$ , el trabajo de Valdés brinda una explicación sobre las consecuencias que tiene sobre el sistema, sobre todo analizando las cadenas de transición, que es la manera de describir la transición hacia la inestabilidad de los sistemas dinámicos.
2. Núñez (1990) presenta una descripción general cualitativa sobre las características que tienen los sistemas dinámicos Hamiltonianos, en especial aquellos donde  $H = cte$ . Para estudiar el comportamiento de cada uno de estos sistemas, Núñez los somete a diferentes condiciones límite, para distinguir los sistemas que son periódicos de aquellos que no lo son, por ello, esta clasificación hará parte de la segunda sección de este trabajo, en la cual se describirán los sistemas integrables, cuasi integrables y no integrables
3. Prigogine, Petrosky, Hasegawa, & Tasaki, (1991) desarrollan un nuevo método de integración en términos de funciones de distribución (el conjunto de Gibbs), el cual consiste en la construcción de un conjunto complejo de funciones propias y valores propios para el operador de Liouville-Neumann. Por ello, para los sistemas integrables clásicos, una solución de este problema generalizado se reduce a trayectorias (a diferencia de los casos cuánticos que se reducen a funciones de onda). Parte de los resultados desarrollados por Prigogine y sus colaboradores harán parte de este documento en lo que concierne a los efectos de las resonancias y la formación y orientación en el tiempo de correlaciones; que formarán parte de la segunda sección y parte de la tercera.

## 1 SISTEMAS INTEGRABLES Y NO INTEGRABLES

A primera vista, parecería que, cuando se conocen las ecuaciones dinámicas de un sistema, se puede predecir con precisión su estado en cualquier momento pasado o futuro en el tiempo. Sin embargo, un examen más detenido revela el contraejemplo del movimiento molecular en los gases. Aunque en este caso se conocen todas las ecuaciones de movimiento de moléculas individuales y las leyes de sus colisiones, es inútil resolver estas ecuaciones en un intento de predecir las posiciones y velocidades precisas de las moléculas en algún momento futuro. La predicción determinista falla en este caso debido a la extrema sensibilidad de dicho sistema a pequeñas variaciones en sus condiciones iniciales. La más mínima perturbación en las coordenadas y velocidades de las moléculas es suficiente para cambiar completamente su movimiento.

Resulta que, bajo ciertas condiciones, una solución de un sistema puramente determinista de ecuaciones diferenciales ordinarias puede representar un proceso aleatorio. Para entender esta idea, se comenzará con una descripción del formalismo de la mecánica Hamiltoniana, para de ahí deducir la noción de lo que significa un sistema integrable. En esa medida se mostrará que los sistemas de esta índole tienen diferentes formas de representación (geométrica), siempre y cuando sean compatibles con la noción de transformación canónica. Esta representación permitirá hacer la distinción y aclaración de la forma de representar geoméricamente estos sistemas. Para el caso en que esta condición no sea posible, se emplea lo que se conoce como teoría de perturbaciones, que permitirá tener una noción más clara sobre la forma en que Poincaré abordó el problema de los sistemas integrables.

### 1.1 Mecánica Hamiltoniana

Gran parte del análisis de los sistemas físicos tienen lugar en un espacio matemático abstracto compuesto por las variables necesarias para especificar completamente el estado del sistema<sup>6</sup>, por ejemplo, en la formulación Lagrangiana ese espacio se llama, *espacio de configuración*, donde la representación del estado del sistema se obtiene mediante

---

<sup>6</sup>Se considera que un estado es una descripción de los valores de las variables que caracterizan al sistema en algún momento  $t$ , para este caso serían la posición y la velocidad. Como ejemplo simple de un modelo clásico, considere un cañón disparando una bola. Las condiciones iniciales serían la posición inicial y la velocidad de la bola cuando salió de la boca del cañón. La ecuación de evolución más estas condiciones iniciales describirían entonces la trayectoria de la pelota.

coordenadas y velocidades generalizadas respectivamente  $q_1, \dots, q_n$  y  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . En la formalización Hamiltoniana ese espacio se llama, *espacio de fase*, donde la descripción del sistema también viene dada por coordenadas generalizadas  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , pero en lugar de velocidades, estas se reemplazan por momentos generalizados  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Así que el problema principal es encontrar la forma en que evolucionan estas cantidades en el tiempo,  $q(t)$  y  $p(t)$ . Esto se logra solucionado el siguiente conjunto de  $2n$ -ecuaciones diferenciales de primer orden conocidas como ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1)$$

donde la función  $H = H(q, p)$  es el Hamiltoniano.

En la formulación Hamiltoniana, el estado de un sistema con  $n$  grados de libertad, se describe mediante un unico punto  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  en un espacio  $2n$ -dimensional. Por lo tanto, comenzando en  $t = 0$  desde un punto inicial  $(q_0, p_0)$ , el estado del sistema en un tiempo posterior  $t$  estará dado por el punto  $(q(t), p(t))$ , donde  $q(t)$  y  $p(t)$  son las ecuaciones de movimiento, es decir, las soluciones de las ecuaciones (1) con las condiciones iniciales  $q(0) = q_0$  y  $p(0) = p_0$ .

## 1.2 Sistemas integrables

El concepto de integrabilidad se refiere a la existencia de constantes de movimiento que son responsables de la evolución regular de las trayectorias en el espacio de fase, en regiones bien definidas de éste. Hay varias formas equivalentes de enunciar este concepto<sup>7</sup>, y en todas ellas se encuentra implícito de una forma u otra, que las ecuaciones de Hamilton constan de igual número de constantes de movimiento como de grados de libertad. En otras palabras, que el Hamiltoniano de un sistema con  $n$ -grados de libertad es integrable si existen  $n$ -constantes independientes (del tiempo) de movimiento,  $I_i(p, q) = \alpha_i$  ( $\alpha_i = cte$ ), que están en involución<sup>8</sup>, lo que significa que las cantidades  $I_i$  satisfacen la siguiente condición

$$[I_i, I_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

es decir, el corchete de Poisson entre dos de ellos desaparece. Hay que resaltar que no basta con que existan  $n$ -constantes de movimiento, si estas no satisfacen la propiedad de involución

<sup>7</sup> Ver Golstein, 1994, capítulo IX.

<sup>8</sup> Una función involutiva en matemáticas es una función que es su propia inversa.

(2), propiedad que garantiza la existencia de una transformación canónica, para la cual los momentos transformados,  $\tilde{p}_i = I_i$ , son integrales de movimiento, por lo tanto constantes.

Lamentablemente, la existencia de  $n$ -integrales de movimiento en involución son la excepción más que la norma. Poincaré demostró, que la mayoría de los sistemas mecánicos solo tienen la energía como constante de movimiento. *Por tanto la mayoría de los sistemas con más de un grado de libertad no son integrables*<sup>9</sup>. La existencia de  $n$ -constantes de involución  $I_i$ , hace que las trayectorias que estas describen se limiten a moverse en un espacio particular del espacio de fase. Esto se debe al hecho de que las trayectorias se limitan a moverse en una variedad  $\mathcal{M}$  de  $n$ -dimensiones determinada por las constantes de movimiento. De hecho, la variedad  $\mathcal{M}$  está definida por un conjunto de  $n$ -ecuaciones algebraicas

$$I_1(q, p) = \alpha_1, \dots, I_n(q, p) = \alpha_n, \quad (3)$$

donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son constantes arbitrarias. En este sentido, las trayectorias que describen este conjunto de ecuaciones en el espacio de fases en el tiempo *nunca* salen de  $\mathcal{M}$ , porque de lo contrario se violarían las leyes de conservación. Nótese que la variedad  $\mathcal{M}$  depende de los valores particulares de las constantes de movimiento, y dado que éstas dependen de la elección del estado inicial del sistema, se deduce que  $\mathcal{M}$  está fijada por las condiciones iniciales. Se puede demostrar<sup>10</sup> que  $\mathcal{M}$  es una variedad compacta (cerrada y acotada), que tiene la forma (topología) de un toro  $n$ -dimensional (ver Fig. 1).

El problema de integración de los sistemas Hamiltonianos, es bastante complejo, aunque existen métodos bastante generales (aunque no universales) que permiten construir soluciones de las ecuaciones (1) o aproximaciones de ellas. Sin embargo el sistema de ecuaciones (1) es completamente integrable, si existe una transformación canónica, es decir una transformación de variables que conserva la forma de las ecuaciones de Hamilton.<sup>11</sup>

### 1.3 Variables de ángulo-acción

Para un sistema integrable con  $n$ -grados de libertad, las trayectorias en el espacio de fase se encuentran fijadas en toros  $n$ -dimensionales (toros invariantes), y este hecho proporciona una forma de definir un nuevo conjunto de variables canónicas.

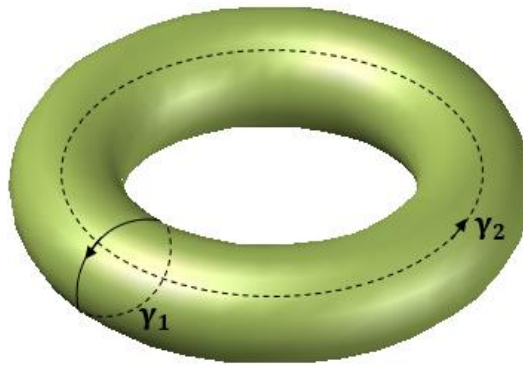
---

<sup>9</sup> Ver Koslov V. , págs. 17-27.

<sup>10</sup> La demostración se realizará en la segunda parte de este trabajo.

<sup>11</sup> Ver Viniegra, 2009, págs. 60-66.

De hecho cualquier toro de  $n$ -dimensiones es un objeto periodico que puede considerarse como el resultado de  $n$ -periodicidades independientes. En otras palabras, puede definirse  $n$ -curvas cerradas independientes,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , en un toro dado, donde ninguna de las  $\gamma_n$  puede deformarse continuamente entre sí o reducirse a cero<sup>12</sup>. Por ejemplo, en la Fig. 1, se muestra un toro bidimensional en el cual la trayectoria  $\gamma_1$  gira por el camino más corto mientras que la trayectoria  $\gamma_2$  lo hace por el camino más largo.



**Fig. 1. Dos trayectorias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , independientes en un toro bidimensional. Elaboración propia.**

Teniendo en cuenta el conjunto de curvas cerradas, se definen las variables de acción mediante las integrales de línea:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_{j=1}^n p_j dq_j, \quad (4)$$

donde

$$p_j = p_j(q, \alpha), \quad (5)$$

son los momentos en función de las coordenadas generalizadas  $q = q(q_1, \dots, q_n)$  y las constantes de movimiento  $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . La ecuación (5) se obtiene resolviendo para los momentos ( $p$ ) el conjunto de ecuaciones algebraicas (3) proporcionado por la existencia de  $n$ -integrales independientes. Ya que (4) se integra con respecto a las coordenadas generalizadas, las variables de acción solo dependen de los invariantes integrales<sup>13</sup>

$$J_i = J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (6)$$

<sup>12</sup> Ver Tabor, 1988, págs. 71-73.

<sup>13</sup> Las variables que siguen esta representación se les conoce como *variables cíclicas* (o *ignorables*), ya que permiten explicar el carácter periódico del comportamiento dinámico.



que son constantes de movimiento.

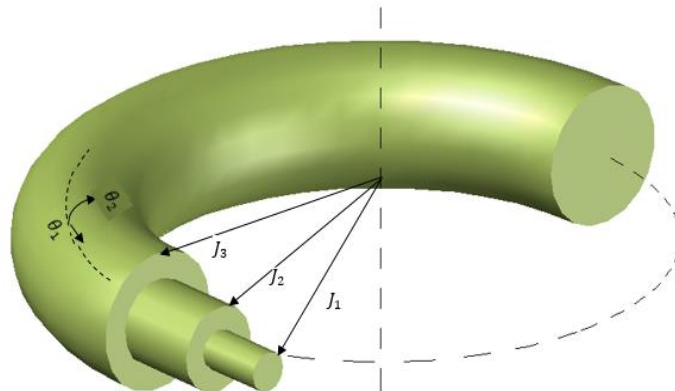
Si ahora se define una transformación canónica de  $(q, p)$  a un nuevo conjunto de variables  $(\theta, J)$ , donde las acciones son los momentos transformados y las variables ángulares son las coordenadas generalizadas. Una función generadora  $S$  para esta transformación viene dada por la siguiente integral indefinida

$$S(q, J) = \int \sum_{j=1}^n p_j(q, J) dq_j, \quad (7)$$

donde  $p_j(q, J)$  viene dada por la ecuación (5), en el que  $\alpha$  se escribe en términos de las acciones ( $J$ ) después de resolver la ecuación (6). Por tanto las nuevas coordenadas

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J}, \quad (8)$$

desempeñan el papel de los ángulos, aumentando en  $2\pi$  cuando la trayectoria en el espacio de fase experimenta un giro completo alrededor de  $\gamma_i$ , mientras que los momentos (las acciones) son los radios de los toros invariantes (ver Fig. 2).



**Fig. 2.** En un sistema integrable, el espacio de fase se compone básicamente de un grupo de toros anidados con diferentes relaciones de frecuencias. Las variables  $J_1, J_2$  y  $J_3$  configuran los diferentes toros que corresponden a diferentes condiciones iniciales, y  $\theta_1, \theta_2$  son las coordenadas sobre el toro. Basado en el texto de Tabor.

En las variables de acción-ángulo, las ecuaciones de Hamilton toman la forma

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H'}{\partial J} \quad , \quad \dot{J} = -\frac{\partial H'}{\partial \theta} \quad (9)$$

donde  $H' = H$ , ya que se trata de una transformación canónica independiente del tiempo.

Por otra parte, dado que  $\dot{J} = 0$ , las  $J$  son constantes de movimiento. Por lo tanto,  $\partial H' / \partial \theta = 0$ , lo que implica que  $H' = H(J)$ , donde

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} \equiv \omega(J) = cte. \quad (10)$$

Así, que la solución de las ecuaciones de Hamilton (9) son

$$J_i = cte, \quad \theta_i = \omega_i(J)t + \delta_i, \quad (11)$$

donde  $\delta_i = \theta_i(0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y  $\omega_i$  son las frecuencias angulares del movimiento (multi-periódico) del sistema<sup>14</sup>. Por tanto, las variables de acción (momentos transformados) son constantes mientras que las variables de ángulo (coordenadas transformadas) son funciones lineales del tiempo.

#### 1.4 Movimiento periódico y multi-periódico

La relación entre las variables originales,  $(q, p)$ , y las nuevas,  $(\theta, J)$ , está dada por la ecuación (7). Esto implica que es conocida la relación entre ambos conjuntos de variables canónicas

$$q = q(\theta, J), \quad p = p(\theta, J) \quad (12)$$

Debido a la naturaleza periódica de las variables angulares (ver A. 1), se tiene de (12) que los momentos ( $p$ ) y las coordenadas ( $q$ ), son funciones multi-periódicas de las variables angulares ( $\theta$ ), con periodo  $2\pi$ , y lo mismo sucede para cualquier función dinámica  $f(\theta, J)$ .

Como es bien sabido, cualquier función periódica puede representarse mediante una serie de Fourier. Así, por ejemplo,  $q_j$ , sería

$$q_j = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_n}^{(j)} e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)},$$

con  $k_i$  como índices enteros. Al tratar el conjunto de  $k_i$  también como un vector  $n$ -dimensional,  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , la expansión se puede escribir de una forma más compacta

$$q_j = \sum_k c_k^{(j)} e^{ik \cdot \theta} \quad \text{donde} \quad \sum_k = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty}.$$

---

<sup>14</sup> Ver Berry, 1978, págs. 27-30.

Los coeficientes de Fourier  $c_{\mathbf{k}}^{(j)}$ , que depende de las variables de acción, están dados por

$$c_{\mathbf{k}}^{(j)}(J) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}} q_j(\boldsymbol{\theta}, J).$$

Si también se escribe la dependencia temporal de las variables angulares dadas por (11), entonces la dependencia temporal de  $q_j$ , toma la forma

$$q_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{(j)}(J) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t}, \quad (13)$$

donde  $a_{\mathbf{k}}^{(j)} = c_{\mathbf{k}}^{(j)} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}}$ . De forma similar, esto puede extenderse para los momentos<sup>15</sup>.

$$p_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{(j)}(J) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t}. \quad (14)$$

Esto significa que la trayectoria del sistema en  $\mathcal{M}$  es multiperiodica con  $t$  períodos

$$t_i = \frac{2\pi}{\omega_i}. \quad (15)$$

Sin embargo, a pesar de que las coordenadas y los momentos de los sistemas integrables son funciones periódicas con  $n$ -frecuencias independientes  $\omega_i$ , esta propiedad no implica que las  $q$  y  $p$  en general sean funciones periódicas del tiempo, pues sería necesario que se cumpliera (15), es decir un periodo para el cual todas las  $q$  y  $p$  sean periódicas. A este respecto, Loskutov<sup>16</sup> muestra que este es el caso sí y sólo si, las frecuencias  $\omega_i$  son múltiplos enteros de una sola frecuencia  $\omega_0$ . Esto quiere decir

$$\omega_i = k_i \omega_0, \quad (16)$$

donde  $i = 1, \dots, n$ , con  $k_i \in \mathbb{Z}$ . Lo que quiere decir que, para tener un movimiento periódico, las frecuencias deben ser *commensurables*. Esto equivale a suponer que todas las frecuencias son múltiplos racionales entre sí

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{k_i}{k_j} = \text{un número racional}. \quad (17)$$

Si las frecuencias son inconmensurables, es decir, que no están relacionadas racionalmente, entonces el movimiento se denomina *cuasiperiódico* y tiene la particularidad

<sup>15</sup> Ver Brillouin, 1949, págs. 79-81.

<sup>16</sup> Ver Loskutov, 2007, págs. 942-944.

de nunca repetirse (ver Fig. 3-b). Por otra parte, como las trayectorias del espacio de fase se encuentran contenidas en los toros invariantes definidos por (11) se puede concluir que, en un toro dado, la trayectoria en el espacio de fase será una curva cerrada, sí y solo si las frecuencias del movimiento son conmensurables (ver Fig. 3-a). Cuando las frecuencias son *inconmensurables*, la trayectoria cubrirá densamente el toro, sin cerrarse nunca sobre sí misma<sup>17</sup>.

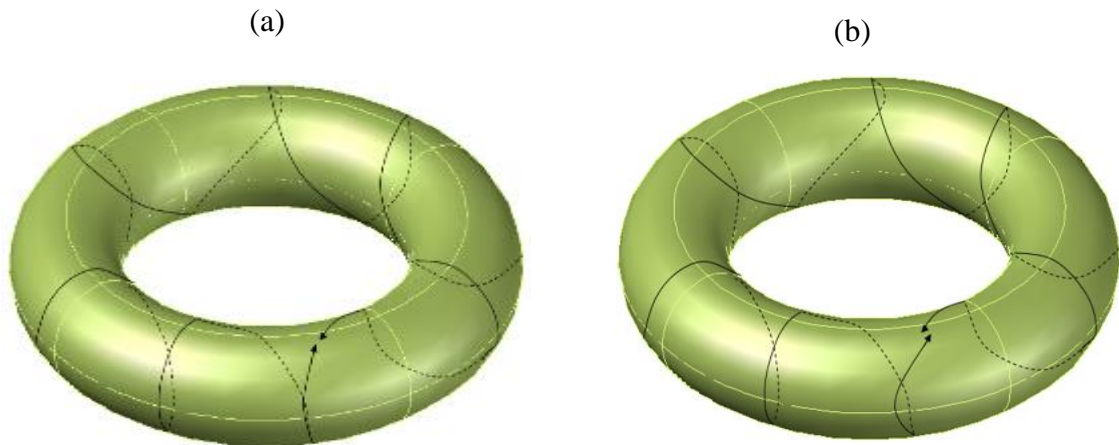
Una condición para que las frecuencias sean conmensurables es la existencia de  $n - 1$  relaciones de la forma

$$\sum_j^n k_j \omega_j = 0, \quad (18)$$

esto significa que se pueden escribir todas las frecuencias en términos de una de ellas, por

ejemplo  $\omega_1$ . Esto sugiere que  $\omega_j = \left(\frac{k_j}{k_1}\right) \omega_1$  con  $k_1$  y  $k_j \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto la relación

$\omega_j/\omega_i = k_j/k_i$  es un número racional.



**Fig. 3. a) Muestra un sistema que guarda una relación racional (conmensurable) de las frecuencias, lo que significa que la trayectoria es una curva cerrada en el toro. b) Por otro lado si la relación de las frecuencias es irracional (inconmensurable), la trayectoria nunca se cerrará. Elaboración propia.**

Ahora bien, ¿Cuál de estas situaciones es típica? Según la teoría de números (como se verá en la segunda parte de este trabajo) la conmensurabilidad es la excepción más que la norma, donde la condición (18) es válida solo para un conjunto de frecuencias ( $\omega$ ).

<sup>17</sup> Ver Tabor, 1988, págs. 77-79.

## 1.5 Sistemas no integrables

Desde la descripción Hamiltoniana de la mecánica se sabe que un sistema dinámico puede representarse de diferentes formas equivalentes por una transformación canónica del conjunto de variables  $(q, p)$ . Entre todas las posibles transformaciones que existen, habrá una que permitirá representar al Hamiltoniano como una función únicamente de los momentos  $H(p)$ , en otras palabras, si una transformación canónica existe llevando un sistema de ecuaciones que describe un conjunto de partículas que interactúan en un conjunto donde las interacciones desaparecen, entonces el sistema se clasifica como integrable<sup>18</sup>. Esto significa que el sistema original de ecuaciones se puede transformar en uno donde el comportamiento de cada partícula se describe completamente por una ecuación que es independiente del comportamiento de cualquier otra.

Pero lo que Poincaré mostró en el primer volumen de *New methods of celestial mechanics* (1957), fue que en general tal transformación era imposible para sistema de  $N$ -cuerpos que interactúan mutuamente, mostró que las interacciones no podían ser eliminadas por un cambio adecuado de variables<sup>19</sup>. Por ejemplo, los sistemas conservativos con un grado de libertad siempre tienen una integral de movimiento, la energía, pero entonces ¿qué sucede con sistemas conservativos con  $n > 1$  grados de libertad?, ¿son integrables? Desafortunadamente no existe una respuesta general a este problema, ya que salvo algunos casos muy particulares de la mecánica, no hay manera de obtener explícitamente fórmulas para las transformaciones canónicas.

## 1.6 Teoría de la perturbación

Como se ha venido diciendo, la mayoría de los sistemas mecánicos (conservativos) no son integrables, teniendo solamente como primera constante de movimiento la energía. Sin embargo, en varias situaciones, los hamiltonianos integrables y no integrables difieren un poco. En tales situaciones es posible obtener soluciones mediante la teoría canónica de perturbaciones. En realidad, se trata de un método más que de una teoría. Este método se puede aplicar si un cuerpo está sujeto a ciertas fuerzas que en verdad puedan ser identificadas

---

<sup>18</sup> Ver Prigogine, Petrosky, Hasegawa, & Tasaki, págs. 4-8.

<sup>19</sup> La búsqueda de casos integrables se abordó principalmente en el siglo XIX (Jacobi, Liouville, Kavelévskaya y otros). Pero con el trabajo de Poincaré quedó claro que un sistema dinámico en su forma general no era integrable, porque las integrales no solo no se conocían, sino que no existían en absoluto por que las trayectorias en general no podían reducirse a un conjunto de variables invariantes, es decir, variables que no guardan relación con el criterio de transformación canónica.

como *perturbaciones*; “esto es, agentes físicos que influyen mínimamente sobre un sistema dinámico” (Viniestra, pág. 164).

Si este es el caso, el Hamiltoniano del sistema  $H = H(\theta, J)$  puede dividirse en una parte integrable  $H_0 = H_0(J)$  y una parte no integrable pero que se puede representar como una pequeña perturbación  $H_1$  de  $H_0$

$$H = H_0 + \lambda H_1, \quad (19)$$

donde  $H_0 = H_0(J)$ ,  $H_1 = H_1(\theta, J)$  y  $\lambda$  es un pequeño parámetro.

Si  $\lambda = 0$ , el sistema (19) es completamente integrable, de donde se deduce, que el Hamiltoniano no perturbado  $H_0$ , tiene lugar en un toro  $2n$ -dimensional de radios  $J_i = \alpha_i (i = 1, 2, \dots)$ . Ahora, si  $\lambda \neq 0$ , lo que sigue es encontrar las correcciones al movimiento generadas por el parámetro  $\lambda$ . En este punto lo que se busca son aproximaciones a través de expansiones de series de potencias de  $\lambda$ . Esto permite expandir la perturbación como una serie de Fourier de las variables angulares. Teniendo en cuenta la notación presentada en la sección [1.4], se ve que (19) se puede escribir como<sup>20</sup>

$$H(\theta, J) = H_0(J) + \lambda \sum_i H_i^{(1)}(J) \cos(k \cdot \theta), \quad (20)$$

donde  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $J = (J_1, \dots, J_n)$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Los coeficientes de Fourier,  $H_i^{(1)}(J)$ , están definidos por

$$H_i^{(1)}(J) = \frac{1}{(2\pi)^i} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) \cos(k \cdot \theta) d\theta_i. \quad (21)$$

La cuestión detrás de este método consiste en encontrar, mediante una serie de potencias de  $\lambda$ , una transformación canónica,

$$(\theta, J) \rightarrow (\theta', J'), \quad (22)$$

a un nuevo conjunto de variables, de modo que el Hamiltoniano transformado sea sólo función de nuevas acciones  $H' = H'(J')$ , haciendo que (19) sea integrable, siendo las  $J'$  constantes y las  $\theta'$  funciones lineales del tiempo.

Tómese, la siguiente función generadora para la transformación canónica

---

<sup>20</sup> Es más conveniente para el siguiente desarrollo de la teoría de la perturbación trabajar con series de Fourier reales, senos y cosenos, en lugar de series exponenciales complejas como en la sección 1.4.

$$S(\theta, J') = \theta \cdot J' + \lambda \sum_i S_i(J') \sin(k \cdot \theta) + O(\lambda^2), \quad (23)$$

que se define por una serie de perturbaciones hasta el primer orden de  $\lambda$  con los coeficientes de Fourier aun no determinados  $S_i(J')$ . En términos de la función generadora, la transformación canónica se obtiene mediante

$$J = \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad , \quad \theta' = \frac{\partial S}{\partial J'} .$$

De donde se deduce

$$J = J' + \lambda \sum_i S_i(J') \cos(k \cdot \theta) + O(\lambda^2) \quad (24)$$

$$\theta' = \theta + \lambda \sum_i \frac{\partial S_i(J')}{\partial J'} \sin(k \cdot \theta) + O(\lambda^2). \quad (25)$$

Dado que se trata de una transformación canónica independiente del tiempo,  $H = H'$ . Por lo tanto,  $H'$  se obtiene a partir de (20) resolviendo las expresiones (24) y (25) para  $(\theta, J)$  como una función de  $(\theta', J')$ , es decir

$$H'(\theta', J') = H_0(J') + \lambda H_0^{(1)} + \lambda \sum_{i \neq 0} \left[ H_i^{(1)}(J') + (k \cdot \omega) S_k(J') \right] \cos(k \cdot \theta) + O(\lambda^2), \quad (26)$$

donde  $\omega = \omega(J')$  son las frecuencias del movimiento no perturbado

$$\omega = \frac{\partial H_0}{\partial J'}, \quad (27)$$

mientras que  $H_0^{(1)}(J')$  es el coeficiente de Fourier de la perturbación correspondiente a  $k = 0$ , que se obtiene a partir de (21)

$$H_0^{(1)}(J') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n H_1(J', \theta'). \quad (28)$$

Es necesario recalcar que, aún se desconocen los coeficientes de Fourier  $S_k(J')$  de la función generadora (23), en este sentido tómesese

$$S_i(J') = -\frac{H_i^{(1)}(J')}{k \cdot \omega}, \quad (29)$$

( $k \neq 0$ ), de modo que el término dentro de la suma (26) desaparece, obteniéndose

$$H' = H_0(J') + \lambda H_0^{(1)}(J') + O(\lambda^2). \quad (30)$$

De ese modo, hasta el primer en  $\lambda$ , el Hamiltoniano transformado  $H'$  es solo función de las nuevas variables de acción y, por tanto, integrable (hasta el primer orden).

### 1.7 Teorema de Poincaré

Existen variedad de sistemas dinámicos donde, después de una transformación canónica  $H(p, q) \rightarrow H(J, \theta)$ , el nuevo sistema puede expresarse como el conjunto de  $2N$ -ecuaciones (ver (11)). Los sistemas para los cuales  $H$  es solo función de  $J$ , son integrables. Sin embargo en 1889 Poincaré (1957) demostró que, en general, es imposible derivar una transformación canónica (conservando la forma de la ecuaciones de Hamilton) que conduzca a una representación del tipo  $H = H(J)$ , para sistemas de  $N$ -cuerpos que interactúan mutuamente<sup>21</sup>.

Poincaré primero se preguntó si existe para un sistema dinámico (conservativo) una transformación canónica que conduzca del  $H(p, q)$  a uno de la forma  $H(J)$ , dependiendo solo de las variables de acción. Esta pregunta, Poincaré la formuló en términos de técnicas de perturbación. Pensó en un Hamiltoniano de la forma (ver (19))

$$H = H_0 + \lambda H_1,$$

en el que  $H_0$  corresponde a la parte integrable del sistema, mientras que el segundo término  $H_1$  perturbado, describe el potencial de interacción, donde  $\lambda$  es la constante de acoplamiento, parámetro que mide la fuerza de interacción. En este sentido, Poincaré se preguntó: ¿Es posible eliminar las interacciones entre las partes que componen un sistema dinámico? O en otras palabras ¿Es posible definir un nuevo conjunto de variables  $J'$ ? De la forma  $J + \lambda J_1 + \lambda^2 J_2 + \dots$  (donde  $J_1, J_2, \dots$  son funciones de  $J$  y  $\theta$ ), tales que  $J'$  tiende a  $J$  cuando  $\lambda$  tiende a cero. En términos más precisos, se buscan variables de acción que se puedan expresar como series de potencias  $\lambda$ . Esto asegura que  $J'$  se desvía poco de  $J$  cuando  $\lambda$  es pequeño. Siempre que esto sea posible, se podrá *eliminar* el potencial asociado a las interacciones entre las partes del sistema dinámico, ya que las nuevas acciones  $J'$ , como ya se mencionó, son

---

<sup>21</sup> Por ejemplo, un sistema de dos cuerpos, como el sistema Tierra-Sol, es integrable en este sentido, en cambio el sistema Tierra-Sol-Jupiter, no lo es. Por lo tanto la definición de un sistema dinámico integrable se configura en la posibilidad de eliminar las interacciones entre las diferentes partes que componen al sistema, en este caso la interacción de la fuerza de la gravedad.



constantes de movimiento y por ende integrables. Sin embargo Poincaré demostró que esto, en general es imposible, debido a las relaciones entre las frecuencias<sup>22</sup>.

Entonces, ¿es la integrabilidad la regla o la excepción? Si todos los sistemas fueran integrables, las constantes de movimiento  $I_i(q, p) = \alpha_i$  siempre existirían, y la incapacidad para determinarlas sería la falta de ingenio por nuestra parte, para reducir el sistema  $H(p, q)$  a  $H(J)$ . Sin embargo, esta no es la cuestión. Como se detalló, la existencia de resonancias prohíbe, en general, una representación en términos de variables cíclicas ( $J$ ), es decir una descomposición del movimiento en movimientos periódicos independientes, salvo para los casos en que las frecuencias guardan una relación racional. Precisamente, la existencia de resonancias (irracional) es la que imposibilita la transformación canónica de un sistema dinámico a otro. En la siguiente sección se abordará este aspecto, que se conoce como el problema fundamental de la mecánica clásica.

---

<sup>22</sup> Ver Brillouin, 1949, págs. 87-89.

## 2 PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA MECÁNICA CLÁSICA

En esta sección se abordará el problema de los pequeños denominadores, y su relevancia en la descripción de los sistemas dinámicos. Debido a la irregularidad presentada por los sistemas cerca de los puntos (resonancias) que guardan una relación irracional y además del reordenamiento cualitativo que experimentan las trayectorias bajo la acción de las perturbaciones en la vecindad de las resonancias, una forma de describir y estudiar estos sistemas dinámicos es mediante el uso de los mapas de Poincaré, que simplifica significativamente el análisis de los sistemas hamiltonianos. En esta medida aparecerán dos tipos de puntos, elípticos e hiperbólicos, los primeros, se caracterizarán por la estabilidad y regularidad de las trayectorias cerca a ellos, los segundos, serán los causantes de la inestabilidad e irregularidad en los sistemas dinámicos. Estos puntos hiperbólicos permitirán explicar el funcionamiento de las *cadenas de transición*, que son la forma de describir el fenómeno de la difusión de Arnol'd

### 2.1 Problema de los pequeños denominadores

Poincaré no solo demostró la no integrabilidad, sino que además dio la razón de ello, la existencia de resonancias entre los grados de libertad del sistema. Si se observa la ecuación (29), hay problemas cuando

$$k \cdot \omega = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_n \omega_n = 0. \quad (31)$$

Si las frecuencias de un sistema dinámico son conmensurables, entonces siempre existe un conjunto de números enteros tales que la condición (31) se cumple, sin embargo, cuando las frecuencias de un sistema dinámico son inconmensurables (y recordando que cualquier número irracional puede aproximarse, con cualquier grado de precisión, mediante una secuencia de números racionales) siempre será posible encontrar enteros  $k_1, \dots, k_n$ , que genere denominadores  $k \cdot \omega$  tan pequeños como se desee, poniendo en duda la convergencia de la expresión (29). En realidad, serían dos dudas: la convergencia de la serie  $S_i(J')$  y de la serie de potencias de  $\lambda$ . Este es el famoso problema de los *pequeños denominadores*, al que Poincaré denominó “el problema fundamental de la mecánica clásica”<sup>23</sup>.

---

<sup>23</sup> Ver Tabor, 1988, pág. 104.

Para detallar mejor los aspectos asociados a la inconmensurabilidad y su relación con los números irracionales, considere un sistema con dos grados de libertad, donde la relación de sus frecuencias  $(\omega_1/\omega_2)$  será  $\sigma$ . Teniendo en cuenta la expresión (31), esto se puede escribir

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sigma = \frac{k_1}{k_2} = \frac{r}{s} \quad (r \text{ y } s \in \mathbb{Z}). \quad (32)$$

Por tanto  $\sigma$  será racional si las frecuencias son conmensurables, es decir las trayectorias en  $\mathcal{M}$  serán cerradas ( $r$  y  $s$  es una notación más conveniente para  $k_1$  y  $k_2$ ). Por otro lado, una  $\mathcal{M}$  con frecuencias inconmensurables, donde sus trayectorias nunca se cierran, tiene una  $\sigma$  irracional, no pudiéndose escribir como (32). Pero puede aproximarse mediante lo que se conoce como una *fracción continua*<sup>24</sup> de  $\sigma$

$$\sigma = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (a_0 \in \mathbb{Z} \text{ y } a_1, a_2, \dots, \in \mathbb{N}).$$

Aproximaciones sucesivas de la fracción continua

$$\sigma_n = \frac{r_n}{s_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}} \quad (33)$$

define una secuencia  $r_n/s_n$  de aproximaciones racionales a  $\sigma$ . En contraste, esta aproximación es la más adecuada<sup>25</sup>, en el sentido de que ningún racional  $r/s$  con  $s \leq s_n$  está

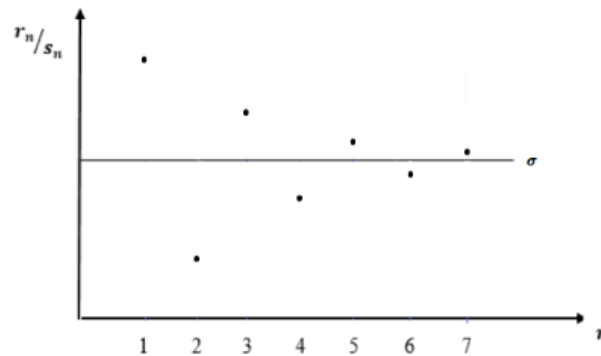
<sup>24</sup> A diferencia de lo que pudiese pensarse, la teoría de las funciones continuas se desarrolló en los siglos XVII y XVIII pensando en la construcción de un planetario. Un planetario es un modelo del sistema solar a escala: gira una manija y un sistema de engranajes mueve los planetas a las velocidades proporcionales correctas. El problema es que las relaciones de frecuencia no son todas racionales, por lo que el engranaje teóricamente perfecto implicaría un número desmesurado de dientes.

<sup>25</sup> Para ilustrar esto, tómesese a  $\pi$

$$\frac{r_0}{s_0} = 3, \quad \frac{r_1}{s_1} = \frac{22}{7} = 3.1429, \quad \frac{r_2}{s_2} = \frac{333}{106} = 3.14151, \quad \frac{r_3}{s_3} = \frac{355}{113} = 3.1415929,$$

donde  $s \leq s_n$ . Donde  $\sigma_1$  se aproxima a los dos primeros dígitos de  $\pi$ ,  $\sigma_2$  3 dígitos y  $\sigma_3$  seis dígitos. Un hecho particular es que este resultado ya era conocido por Leo-Tze (604-531) a.C.

más cerca de  $\sigma$  que  $r_n/s_n$ . Esto muestra que la secuencia siempre converge a  $\sigma$  (ver Fig. 4), y que los sucesivos valores de  $r_n/s_n$  son alternativamente mayores o menores que  $\sigma$ .



**Fig. 4. Convergencia de  $\sigma$  a través de aproximaciones sucesivas de  $r_n/s_n$ .**  
Elaboración propia

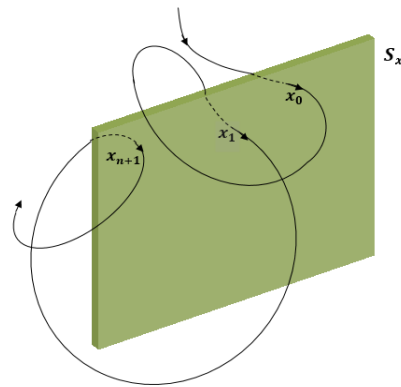
Esto sugiere entonces que para cualquier  $\sigma$  es posible encontrar<sup>26</sup> racionales  $r/s$  que difieran de  $\sigma$  en una cantidad del orden de  $s^{-2}$ . Entonces, en cualquier dominio de las  $\theta$ , incluso el más pequeño, siempre habrá una infinidad de tales puntos de inconmensurabilidad (o degeneración).

## 2.2 Sección de superficie de Poincaré

Ahora se discutirá un método poderoso introducido por Poincaré para examinar el movimiento de sistemas dinámicos. Sea  $S_x$  una superficie dimensional  $n - 1$  transversal a las trayectorias de un sistema dinámico. Considere un punto  $x_0$  en  $S_x$  en  $t = 0$ . A medida que evoluciona la trayectoria que comienza en  $x_0$ , eventualmente volverá a  $S_x$  en  $x_1$  después de un cierto periodo.

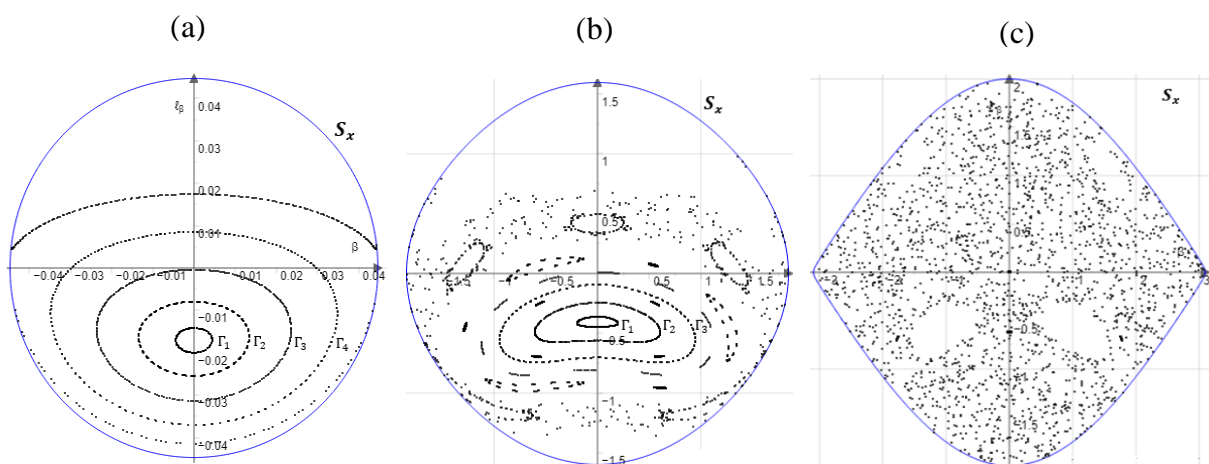
Si se consideran todos los puntos en  $S_x$ , se puede definir un mapeo  $T$  de  $S_x$ , de manera que  $x_1 = T(x_0)$ , y en general después de las  $n + 1$  iteraciones (intersecciones)  $x_{n+1} = T(x_n)$ . El mapeo  $T$  se llama *mapa o sección de Poincaré* del sistema dinámico.

<sup>26</sup> Ver Arnol'd, 1963, pág. 98.



**Fig. 5. Construcción de un mapa de Poincaré para un sistema Hamiltoniano. Elaboración propia.**

La utilidad de estas secciones de superficie radica en que las iteraciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de un punto inicial  $x_0$  revelan si el sistema es integrable o no. Si el sistema es integrable, la trayectoria no explora toda la superficie de energía, sino un toro ( $\mathcal{M}$ ) particular que dependerá de las condiciones iniciales, es decir, que las intersecciones de la trayectoria con  $S_x$  aparecerán como un conjunto de puntos distribuidos regularmente, formando una curva cerrada  $\Gamma$  (ver Fig. 6-a). Para el movimiento no integrable, los toros no se encuentran definidos, lo que significa que las intersecciones de la trayectoria con  $S_x$  aparecerán aleatoriamente, dispersas sobre  $S_x$  (ver Fig. 6-c)

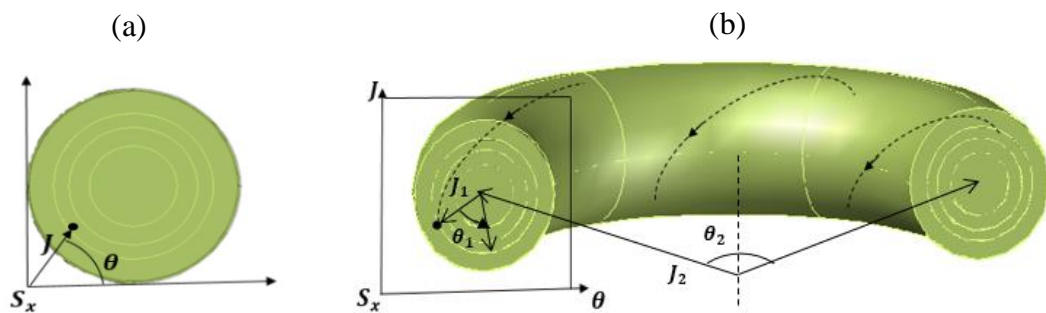


**Fig. 6. Mapa de Poincaré para un modelo de péndulo doble. (a)  $E = 0.04$ , (b)  $E = 1.26$  y (c)  $E=3$ . Después de un número suficiente de iteraciones, se pueden sacar conclusiones sobre la dinámica del sistema. Elaboración propia.**

Cuando se incrementó la energía  $E$ , la imagen experimentó cambios significativos. Algunas curvas invariantes comenzaron a desintegrarse y formaron un denso conjunto de puntos que aparentemente estaban dispersos de manera irregular sobre el plano  $S_x$ . Por ejemplo, para  $E = 1.26$ , la sección  $S_x$  muestra el conjunto de curvas cerradas (invariantes)  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$ , y a su alrededor un conjunto disperso de islas y puntos. En otras palabras, a este valor de energía, el sistema tenía los dominios de comportamiento regular e irregular en su espacio de fase. Para valores de energía aún mayores, como  $E = 3$ , el área ocupada por los toros se redujo a regiones diminutas, haciéndose imperceptible. A continuación, se describirán algunas características que presentan estos mapeos y su relevancia para distinguir un sistema integrable de uno que no lo es.

### 2.2.1 Mapa de giro

Los toros de los sistemas integrables cortan la superficie  $S_x$  en curvas concéntricas, que para el caso más simple son cerradas. Es comprensible el porqué de emplear las variables de acción-ángulo en  $S_x$ , ya que  $J$  y  $\theta$  describen las coordenadas polares en  $S_x$



**Fig. 7. a) Las curvas invariantes ahora son círculos concéntricos en  $S_x$ . b) Para un sistema integrable en términos de las variables de acción-ángulo, el espacio de fase es un conjunto de toros anidados. Basado en el artículo de (Berry, pág. 66).**

Esto es consistente, ya que el área de la sección  $S_x$  del toro  $J$  es

$$\oint p dq = 2\pi J = \pi\rho^2,$$

donde a partir de la ecuación (4), se puede deducir esta relación, y teniendo en cuenta que el área de un círculo es  $A = \pi r^2 \rightarrow \pi\rho^2$  (ver A-3). El mapeo de cualquier trayectoria se conserva  $J = cte$  y  $\theta$  varía linealmente (ver la ecuación (11)). Si  $t = 2\pi/\omega_j$  es el intervalo de

tiempo (ver la ecuación (15)) entre los diferentes cruces de una trayectoria con  $S_x$ , y sea  $\theta$  el ángulo con el que una trayectoria cruza  $S_x$ , si su ángulo inicial era  $\theta_0$ , entonces

$$\theta = \theta_0 + \omega_i t = \theta_0 + 2\pi \frac{\omega_i}{\omega_j} = \theta_0 + 2\pi\rho \quad (34)$$

donde  $\frac{\omega_i}{\omega_j} = \rho$  recibe el nombre de *número de rotación* (dado que  $\rho$  depende de  $\omega$ , y estas a su vez dependen de  $J$  (ver la ecuación (10))) Si  $\rho$  es irracional, entonces los puntos  $x_n$  llenan todo el círculo cuando  $n \rightarrow \infty$ . Si  $\rho$  es racional, los puntos  $x_n$  se mapean entre sí sucesivamente, cada  $\omega_j$  pasos<sup>27</sup>. Por tanto, si se utiliza esta representación, se puede hablar de círculos no resonantes y resonantes, y a medida que se pasa de un círculo a otro, el número de rotación cambia. Para ser específicos, se asume que  $\rho(J)$  aumenta al aumentar  $J$  (ver Fig. 3 y Fig. 7). Por lo tanto, se ha reducido un sistema integrable a la forma

$$T = \begin{cases} J_{i+1} = J_i \\ \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\rho(J_i), \end{cases} \quad (35)$$

que se denomina mapa de rotación o mapa de torsión.

¿Pero sí ahora se considera un sistema perturbado? En la sección de Poincaré, tener en cuenta la perturbación corresponde a agregar nuevos términos al mapa de torsión

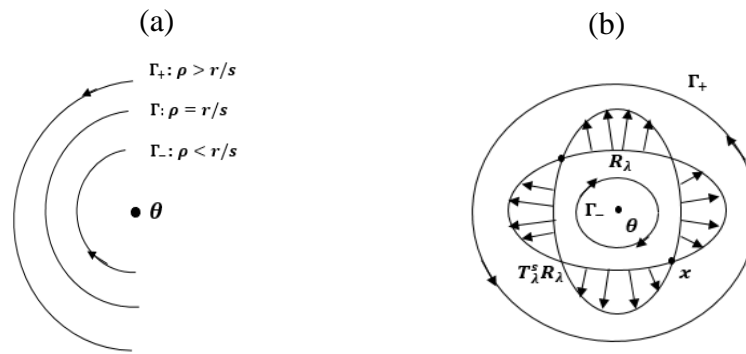
$$T_\lambda = \begin{cases} J_{i+1} = J_i + \lambda f(J_i, \theta_i) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\rho(J_i) + \lambda g(J_i, \theta_i), \end{cases} \quad (36)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones periódicas de  $\theta_i$ . De acuerdo con el teorema KAM, bajo una pequeña perturbación,  $\lambda \ll 1$ , la mayoría de los círculos con  $\rho$  irracional se conservan<sup>28</sup>. Para ver esto, considere un círculo  $\Gamma$  imperturbable  $\rho = r/s$  (racional). Todo punto de  $\Gamma$  es un punto fijo de  $T$ . Ahora considere dos círculos  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  entre los cuales se encuentra el círculo  $\Gamma$  (ver Fig. 8-a). Como  $\rho(J)$  aumenta con  $J$ , los números de rotación irracional de tales círculos satisfacen las respectivas desigualdades: En  $\Gamma_+$ ,  $\rho > r/s$  y en  $\Gamma_-$ ,  $\rho < r/s$ <sup>29</sup>. Según el teorema KAM, los círculos  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  se conservan y solo se deforman ligeramente, dichos círculos  $\Gamma_+^\lambda$  y  $\Gamma_-^\lambda$  son invariantes bajo la transformación  $T_\lambda$ :

<sup>27</sup> Si el movimiento es periódico (la trayectoria es cerrada), entonces algunas intersecciones  $x_n$  coincidirán con  $x_0$  ( $n$  depende del orden de conmensurabilidad de las frecuencias  $\omega_i/\omega_j$ ).

<sup>28</sup> Ver Masoliver & Ros, 2011, pág. 449.

<sup>29</sup> Después de aplicar el mapa  $T_0$   $s$  veces (con el mapa iterado denotado por  $T_0^s$ ), los puntos del círculo  $\Gamma_+$  se rotan en un ángulo mayor que  $2\pi$  y los puntos del círculo  $\Gamma_-$  en un ángulo menor que  $2\pi$ . Por lo tanto, parece que en relación con  $\Gamma$ , el mapa  $\Gamma_+$  gira en sentido antihorario y  $\Gamma_-$  en sentido horario



**Fig. 8. a) Curvas  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma$  y  $\Gamma_-$ . b) Resultado de la perturbación  $T_\lambda$ . Basado en el artículo de (Berry, pág. 69).**

Bajo el mapeo perturbado  $T_\lambda^S$ , estos giros relativos se conservan si  $\lambda$  es lo suficientemente pequeño, esto significa que para cualquier radio  $\rho = cte$ , entre las curvas  $\Gamma_+^\lambda$  y  $\Gamma_-^\lambda$ , se puede encontrar un punto  $x(\theta, \lambda)$  tal que el mapa  $T_\lambda^S$  rota sus coordenadas angulares exactamente a través de  $2\pi$ . Estos puntos  $x$  forman una curva  $R_\lambda$ , cerca a  $\Gamma$ , cuando  $\lambda \rightarrow 0$ . Ahora, al aplicar  $T_\lambda^S$  a  $R_\lambda$ , se genera otra curva que es  $T_\lambda^S R_\lambda$ . Esta curva debe cruzarse con  $R_\lambda$  porque debe tener el misma área que  $R_\lambda$  (ver Fig. 8-b). Cada intersección  $x$  es un punto fijo de  $T_\lambda^S$ , donde la orbita formada por todos los  $x$  bajo  $T_\lambda$  consta de

$$x, T_\lambda x, T_\lambda^2 x, \dots, T_\lambda^{S+1} x = x, \quad (37)$$

por lo tanto, algunos puntos se conservan bajo la perturbación  $\lambda$ .

### 2.2.2 Puntos elípticos e hiperbólicos.

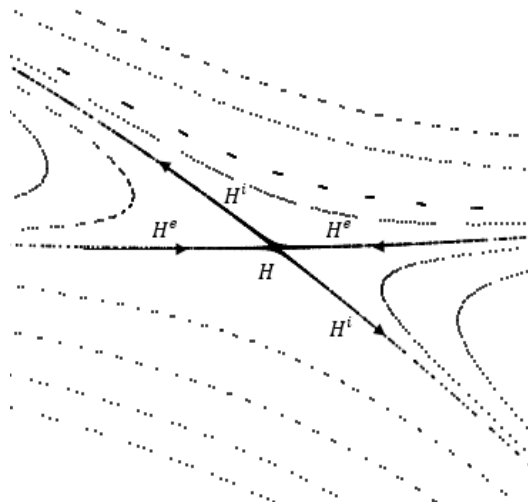
Una consideración detallada del mapa  $T_\lambda$  en la vecindad de varios puntos  $x$  revela la siguiente diferencia cualitativa. Los puntos vecinos a algunos puntos  $x$  permanecen cerca de ellos y parecen girar alrededor de ellos, mientras que los puntos situados cerca de otros  $x$  tienden a salir de su vecindario. Por esta razón, estos puntos se denominan respectivamente elípticos e hiperbólicos. Los puntos elípticos están rodeados por una familia de trayectorias cerradas que son invariantes bajo  $T_\lambda^S$  y forman "islas" (gaps); los puntos hiperbólicos están conectados por separatrices. Este patrón es típico de los sistemas no lineales débilmente perturbados y siempre emerge cerca de una resonancia<sup>30</sup>.

<sup>30</sup> Ver Tabor, 1988, págs. 139-142.



Según el teorema del punto fijo de Poincaré-Birkhoff<sup>31</sup>, una secuencia de puntos elípticos e hiperbólicos alternos aparece en las proximidades de cada resonancia, aunque en una escala menor. A su vez, una isla cerca de cada uno de estos puntos elípticos reproduce todo el patrón en miniatura<sup>32</sup>. Las curvas cerradas en la vecindad de los puntos elípticos corresponden a toros menores (ver Fig. 10b). Según la teoría KAM, algunos de estos “minitoros” se conservan; otros colapsan en otros más pequeños debido a resonancias de orden superior, y así sucesivamente, hasta el infinito. Así, la resonancia da como resultado un patrón muy complejo, que se repite en escalas progresivamente más pequeñas, siendo así, en cierto sentido, autosimilar.

La particularidad de los puntos hiperbólicos ( $H$ ), es que cuentan con cuatro curvas invariantes (o separatrices): dos estables ( $H^e$ ) que entran a  $H$ , y dos inestables ( $H^i$ ) que salen de  $H$ .

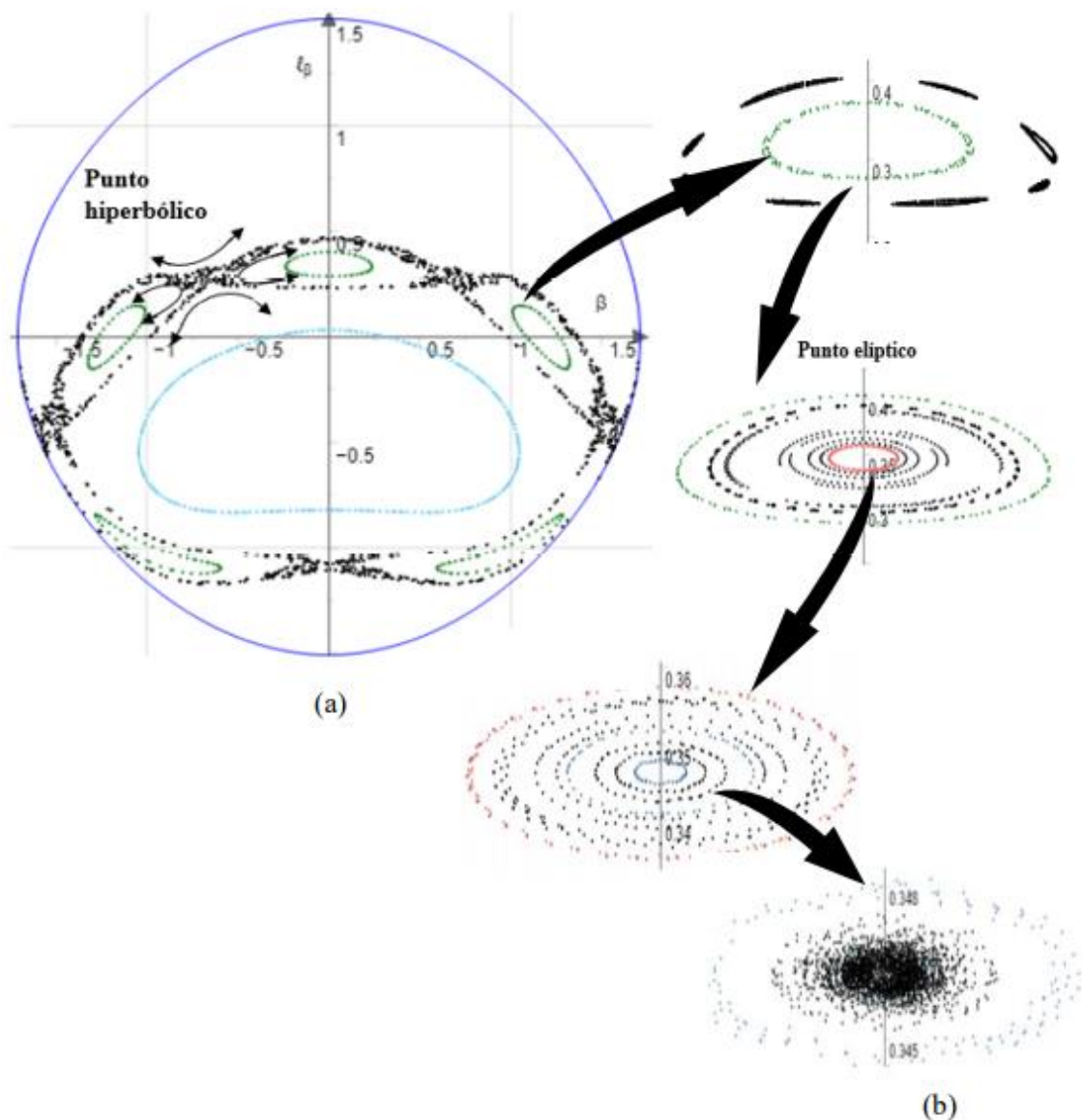


**Fig. 9. Puntos estables ( $H^e$ ) e inestables ( $H^i$ ) cerca de un punto hiperbólico  $H$ . Estos puntos son la forma de evidenciar la presencia de resonancias sobre  $S_x$ . Basado en el texto de (Valdés, pág. 76).**

Para el caso de un sistema integrable, se pueden conectar entre sí múltiples puntos hiperbólicos estables e inestables, formando trayectorias lisas. En  $S_x$ , dichas trayectorias aparecen como una transición suave de una rama de separatriz inestable a una

<sup>31</sup> En topología simpléctica y sistemas dinámicos, el teorema de Poincaré-Birkhoff (también conocido como teorema del punto fijo de Poincaré-Birkhoff y último teorema geométrico de Poincaré) establece que cada homeomorfismo que conserva el área y la orientación de un anillo que rota los dos límites en direcciones opuestas tiene al menos dos puntos fijos.

<sup>32</sup> Ver Berry, 1978, págs. 78-84.

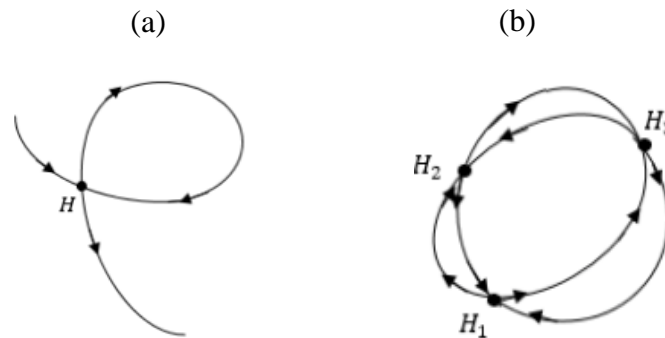


**Fig. 10.** Se observa cinco islas (color verde) alrededor de la trayectoria estable (color azul). a) En el espacio entre isla e isla, están los puntos de transición hiperbólicos y elípticos. b) Origen de estructuras auto semejante, conforme aumenta la escala. Basado en el texto de (Tabor, pág. 131).

estable. Las ramas de la separatriz pueden estar cerca del mismo punto hiperbólico (ver Fig. 11-a) o conectar varios de esos puntos, formando una especie de nudos (Fig. 11-b). En el primer caso, una rama de la separatriz estable ( $H^e$ ) e inestable ( $H^i$ ) forma un bucle. Este bucle, conocido como bucle homoclínico, es una trayectoria doblemente asintótica con la propiedad de que cualquier punto  $q$  en dicho bucle siempre se acerca a  $H$ <sup>33</sup>. Para en el

<sup>33</sup> Esto significa que cuando  $\lim_{s \rightarrow \infty} T^s q \rightarrow H$ . Existe un punto dentro de la curva homoclínica. Ver Tabor, 1988, págs. 139-142 o Berry, 1978, págs. 69-80, para una descripción más detallada.

segundo caso, las trayectorias que consisten en ramas de separatriz estables e inestables se denominan trayectorias heteroclínicas.



**Fig. 11. (a) Una trayectoria homoclínica y (b) una trayectoria heteroclínica. Basado en el artículo de (Berry, pág. 78).**

Si hay una perturbación, las ramas de la separatriz ya no forman uniones homoclínicas y heteroclínicas lisas, pero pueden cruzarse. El punto de intersección de las ramas de una separatriz estable e inestable de la misma resonancia se llama punto homoclínico. Si una rama estable e inestable de diferentes puntos hiperbólicos (resonancias) se cruzan, aparece un punto heteroclínico (ver Fig. 9 y Fig. 10). Y son precisamente los puntos heteroclínicos la transición del movimiento regular al irregular, generado por una cadena de puntos elípticos e hiperbólicos (ver Fig. 10-a), que produce una descripción complicada de las trayectorias en  $S_x$ . Este aspecto permitirá explicar el funcionamiento de la difusión de Arnol'd, mediante lo que él catálogos como *cadena de transición*, pero antes de hacer esto, se describirán algunos aspectos relacionados a las resonancias.

### 2.3 Resonancias internas

El surgimiento de las resonancias como ya se mencionó, son el resultado de las interacciones entre los diferentes grados de libertad del sistema dinámico. Este hecho desempeña un papel crucial en cuanto al análisis de sistemas integrables, ya que a partir de las relaciones de las frecuencias (conmensurables e inconmensurables) se puede determinar si un sistema es integrable o no. Para el caso de que se trate de un sistema no integrable, se ha empleado el método de perturbación, para tratar de reducir el sistema a la forma  $H = H_0 + \lambda H_1$ , si  $\lambda = 0$ , el sistema es completamente integrable, pero si,  $\lambda \neq 0$  ¿qué tan fuertes son entonces los cambios en el carácter del sistema integrable? Habría que discutir cómo determinar la magnitud de los efectos de las interacciones. Si la interacción es débil sus efectos irán desapareciendo con el tiempo, dejando en equilibrio o cuasi equilibrio al sistema, pero si sus efectos son considerables, repercutirá en la dinámica misma del sistema.

Atendiendo a esta situación Chirikov<sup>34</sup> introdujo un parámetro que describe el grado de superposición de resonancias<sup>35</sup>

$$K = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim \frac{\Delta J}{\delta J} \quad (38)$$

sí la interacción es débil, es decir, si  $K \ll 1$ , el movimiento debe ser regular y las trayectorias deben cubrir  $(n - m)$ -toros dimensionales ( $m$  denota  $J_m$ ) en todas partes densamente. Para el caso en el que  $K > 1$ , la dinámica resulta compleja de describir, por su irregularidad, ya que no se acomoda a los criterios periódicos o cuasiperiódicos. En este sentido, si la influencia de la perturbación  $\lambda$  es lo bastante grande, puede llegar a generar resonancias de orden superior, llegando a modificar sustancialmente la estructura del movimiento.

Por ejemplo, en un gas, las correlaciones<sup>36</sup> inducidas por los choques dependen directamente de la densidad del número de partículas. Si la densidad es alta, las correlaciones espaciales inducidas por las colisiones acoplarán cada partícula con muchas de ellas. Y es este acoplamiento lo que conduce al comportamiento colectivo responsable de la formación de estructuras coherentes, como turbulencias y ondas de choque (Bishop R., pág. 20). Pero si la densidad es baja, estos efectos colectivos<sup>37</sup> asociados a las correlaciones desaparecerán, dada la distancia media que cada partícula debe recorrer, haciendo poco probable que una colisión (evento) ocurra. Para ver la forma cómo se desarrollan estas correlaciones, considérese el trabajo de Orban & Belleman (1967), en el cual, a partir de simulaciones numéricas, analizan el comportamiento de la función H de Boltzmann para un gas homogéneo a diferentes temperaturas. Cuando comienzan a chocar las moléculas del gas, las primeras interacciones (estas interacciones están asociadas con las resonancias) establecen correlaciones binarias entre partículas. A medida que persisten las interacciones, comienzan a aparecer correlaciones ternarias. El proceso continuará estableciendo correlaciones

---

<sup>34</sup> Ver Chirikov, 1960, págs. 255-257. El término  $\Delta\omega$  representa la distancia entre resonancias y  $\Delta J$  es la distancia entre dos bucles de separatriz, entonces, si las separaciones de las resonancias no se cruzan, no ocurren interacciones entre las resonancias.

<sup>35</sup> Para una demostración ver Valdés, 1983, págs. 32-37.

<sup>36</sup> Prigogine & Stengers presentan la siguiente definición:

“...mientras que la definición de las interacciones, es decir, de las relaciones efectivas entre constituyentes, forma parte de la misma definición de un sistema, y por lo tanto, precede en este sentido al estudio de sus diferentes regímenes de actividad, en cambio las correlaciones se definen con respecto al « todo » y las « partes » que caracteriza cada uno de ellos” (1991, pág. 60)

Autores como Prigogine, Petrosky, Hasegawa, Tasaki, y otros..., se han preguntado cómo un determinado suceso local afecta a su entorno y en qué medida.

<sup>37</sup> El término “efectos colectivos” se emplea para describir el comportamiento de un agregado de partículas acopladas de alguna manera (fuerzas de largo alcance como el electromagnetismo y la gravedad o correlaciones espaciales por interacciones) que es distinta del comportamiento de las partículas individuales.

cuaternarias y así sucesivamente a través de correlaciones N-arias a medida que más y más partículas se involucren con otras a través de colisiones. Donde la progresión de correlaciones de orden inferior (que aparecen primero) a correlaciones de orden superior (que aparecen después) corresponde a un ordenamiento temporal<sup>38</sup> en la evolución de los estados del gas. Las correlaciones y otros efectos colectivos pueden rivalizar o superar el papel de las trayectorias individuales, dejando a estas (las trayectorias) como un elemento explicativo básico (Bishop R. , 2004, pág. 21).

¿Esto que implica? Que antes de cualquier interacción entre los diferentes grados de libertad que pueda tener el sistema dinámico, estos pueden caracterizarse por trayectorias  $(p, q)$  suaves del tipo (13) y (14). Pero conforme comienzan a interactuar, surgen discontinuidades<sup>39</sup> asociadas a cada interacción, esto significa que las ecuaciones que describen la dinámica del sistema tendrán soluciones únicas o aproximadas de acuerdo con sus condiciones iniciales dentro de un intervalo de tiempo. Este intervalo puede ser corto y, a medida que pasa el tiempo, el intervalo de tiempo para el que existen tales soluciones puede acortarse o incluso reducirse a cero de tal manera que después de algún período las soluciones dejan de existir. De modo que, “aunque el determinismo pueda mantenerse a nivel local, esto no garantiza que el determinismo deba mantenerse a nivel global” (Bishop R. , 2006, pág. 5).

## 2.4 Teorema KAM

Aunque no se pueda lograr una comprensión profunda del teorema KAM, a continuación, se hará una descripción, que, a consideración, son los elementos más relevantes aquí.

A fines del siglo XIX, el consenso general era que la adición de incluso la perturbación más pequeña haría que cualquier sistema conservativo no fuera integrable, y que cualquier trayectoria del espacio-fase exploraría densamente la capa de energía de una manera irregular. Todos los esfuerzos e intentos de algunos de los mejores matemáticos y físicos de la época fracasaron en resolver el problema del pequeño divisor, y, por tanto, a

---

<sup>38</sup> Por ejemplo, supóngase que se observa un vaso de agua, de acuerdo con las correlaciones que existen entre las moléculas, se puede distinguir el agua “joven” de la “vieja”. Es decir, se puede precisar el estado del agua, entre un antes y un después, en función del número de correlaciones.

<sup>39</sup> Supóngase que se pasa del estado A (de un sistema de muchos cuerpos) sin correlaciones en  $t = 0$  a un estado B en el tiempo  $t$  que implica múltiples correlaciones. Obviamente, la transición de A hacia B implica procesos diferentes que la transición inversa de B hacia A (ver el trabajo de Orban & Bellemans, 1967 o Prigogine & Stengers, 1991, págs. 103-134).

principios del siglo XX, este campo de investigación desapareció y las cuestiones relativas a la estabilidad planetaria a largo plazo casi se olvidaron en la investigación convencional.

Sin embargo, hacia 1954, Kolmogorov<sup>40</sup> presentó una forma de obtener una teoría de perturbaciones canónicas, apropiada para toros no resonantes. La nueva idea de Kolmogorov fue probada rigurosamente en 1961 por Arnold e, independientemente, por Moser en 1962. Que para la década de 1960 se conocería como teorema KAM.

Siguiendo la descripción desarrollada por Arnol'd, suponga un sistema integrable  $H_0$ , que es perturbado por la función  $H_1$  de modo que el Hamiltoniano total es

$$H = H_0(J) + \lambda H_1(J, \theta),$$

donde  $\lambda \ll 1$ , y las ecuaciones de Hamilton vienen dadas por

$$\dot{J}_i = -\lambda \frac{\partial H_1}{\partial \theta_i}, \quad \dot{\theta}_i = \omega_i + \lambda \frac{\partial H_1}{\partial J_i},$$

con  $\frac{\partial H_0}{\partial J_i} = \omega_i$ , que representa las frecuencias del movimiento no perturbado.

La idea de Kolmogorov era que, lejos de las frecuencias de resonancias, es posible construir una serie de perturbaciones, en potencias pares de  $\lambda$ . Con el resultado general de que, para la mayoría de las condiciones iniciales, el movimiento generado por el hamiltoniano  $H = H_0(J) + \lambda H_1(J, \theta)$ , permanece cerca de  $H_0$ , es decir, confinado a residir en ciertas superficies que se asemejan a toros ligeramente deformados.

Para ser más precisos en la formulación del teorema, hay que asumir que  $H$  es una función analítica y que el movimiento no perturbado generado por  $H_0$  no es degenerado<sup>41</sup>. La última afirmación implica que el hessiano de  $H_0$  es diferente de cero:

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j} \right| \neq 0,$$

lo que significa que las frecuencias del sistema no perturbado son funcionalmente independientes.

---

<sup>40</sup> "On the conservation of conditionally periodic motions under small perturbation of the Hamiltonian" es el artículo presentado por Kolmogorov. A su vez el artículo de Arnol'd se titula "The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case" y el presentado por Moser lleva por nombre "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus".

<sup>41</sup> Es decir, que se pueden parametrizar los toros invariantes del Hamiltoniano  $H_0$  por medio de las frecuencias, con lo que realmente "casi todos" los toros invariantes para  $\lambda = 0$  se conservan, o para  $\lambda$  lo suficientemente pequeño.

Ahora, el sistema debe estar fuera de la vecindad de una resonancia, es decir,

$$\left| \sum_i k_i \omega_i \right| > c |k|^{-r},$$

donde  $r$  depende del número de grados de libertad  $n$  del sistema y la constante  $c$  está determinada por la magnitud de la perturbación  $\lambda H_1$ . Si  $\lambda H_1$  es lo suficientemente pequeño, entonces para casi todas las frecuencias no resonantes  $\bar{\omega}$  existe una superficie invariante  $\mathcal{M}(\bar{\omega})$  del sistema perturbado tal que  $\mathcal{M}(\bar{\omega})$  está cerca de  $\mathcal{M}_0(\bar{\omega})$ . En otras palabras, las trayectorias del hamiltoniano perturbado evolucionarán en superficies  $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\bar{\omega})$  que están "cercanas" a los toros  $\mathcal{M}_0$  del sistema integrable. Esto significa que, para casi todas (pero no todas) las frecuencias no resonantes, las trayectorias del espacio-fase son regulares en la medida en que  $\lambda$  es lo suficientemente pequeño (el teorema no dice qué tan pequeño debe ser  $\lambda$ ). Por lo tanto, dadas las condiciones del teorema, las pequeñas perturbaciones no destruyen los toros invariantes  $\mathcal{M}_0$  sino que solo los deforman. Estos toros deformados, reciben el nombre de superficies KAM.

Pero ¿qué pasa con los toros en los cuales sus frecuencias guardan una relación racional? En la sección 5.5 de Lieberman & Lichtenberg (1993) demuestran<sup>42</sup> que las resonancias destruyen completamente los toros resonantes. En consecuencia, las trayectorias en estos toros, que, recordemos, en ausencia de perturbación siguen curvas cerradas y periódicas bien definidas en él, pierden sus límites y deambulan por el espacio de fase (de hecho, solo a través del subespacio dado por la superficie de energía constante). Por lo tanto, el movimiento en toros resonantes se vuelve completamente irregular e inestable.

## 2.5 Difusión de Arnol'd

Para  $n = 2$ , considere el siguiente sistema casi integrable

$$H = H_0(J) + \lambda H_1(J, \theta),$$

si  $\lambda = 0$ , toda trayectoria asociada al hamiltoniano definido por  $H$ , está contenida en un toro invariante  $J = cte$ , con lo que dos trayectorias que se encuentren en dos toros diferentes mantienen constante la distancia entre los momentos asociados. Ahora, cuando  $\lambda \neq 0$ , por el teorema KAM, se sabe que existirán algunos toros invariantes y otros no. Estos toros

---

<sup>42</sup> El nombre de esta sección es *The effects of Correlations*

destruidos resultan estar intercalados entre los toros que se conservan bajo la perturbación. La trayectoria de estos toros destruidos estará acotada por el espacio que hay entre dos toros invariantes, sin posibilidad de poder salir de ese espacio (Valdés, 1983, pág. 45). Esto significa que las variables de acción correspondientes casi no cambian y permanecen cerca de sus valores iniciales en el curso del movimiento. Por lo tanto, para sistemas con dos grados de libertad que satisfacen las condiciones del teorema de Kolmogorov, para cualquier condición inicial, se conserva la estabilidad global (Koslov, Neishtadt, & Arnol'd, 2002, pág. 274).

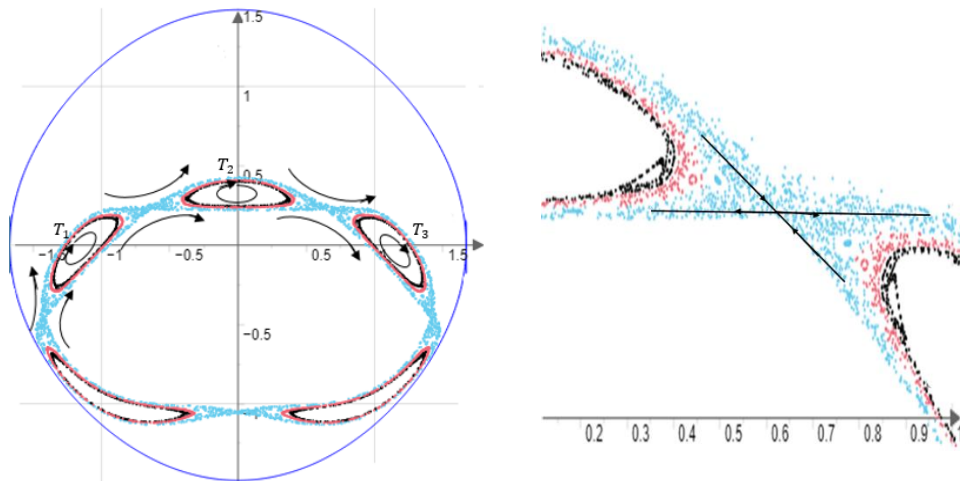
Sí  $n > 2$ , los toros invariantes ya no dividen la hipersuperficie de energía  $(2n - 1)$ -dimensional en partes que no se cruzan. En tales sistemas, la dinámica es cuasiperiódica para la mayoría de las condiciones iniciales. Pero existen condiciones, para las cuales las trayectorias ubicadas entre las regiones de los toros invariantes pueden *escapar* a otras regiones de la capa de energía. Esto se puede entender por el hecho de que, en  $n > 2$ , los dominios de los toros destruidos se fusionan, formando una red (la red de Arnol'd). La trayectoria que describe cualquier punto en la hipersuperficie de energía sobre esta red puede acercarse arbitrariamente a cualquier punto de esta hipersuperficie (ver Fig. 6-c). Este fenómeno, que existe para perturbaciones arbitrariamente pequeñas, se conoce como difusión de Arnold y solo aparece en sistemas con más de dos grados de libertad.

Este fenómeno está asociado a la influencia que tienen los puntos hiperbólicos sobre la trayectoria de los sistemas dinámicos. Siguiendo la descripción que hace Valdés (1983); dado dos círculos de transición  $T_1, T_2$ , sobre una variedad  $\mathcal{M}$ , donde  $T_1 \neq T_2$ , se dirá que hay transición de  $T_1$  a  $T_2$ , o lo que es lo mismo  $T_1 \rightarrow T_2$ , si existe  $x \in \mathcal{M}$  tal que

$$H^e T_1 \bigcap_x H^i T_1.$$

Esto significa que la transición de un punto  $H^e$  a uno  $H^i$  se da en la medida en que las superficies  $T_1$  y  $T_2$  tengan en común un punto  $x$ , tal que ambas superficies se conectan, y esta sucesión del tipo  $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow \dots$ , finita o infinita recibe el nombre de *cadena de transición*.





**Fig. 12. Cadena de transición como consecuencia de la transición de un punto  $H^e$  a uno  $H^i$ . Elaboración propia.**

Hasta este punto, se puede observar las implicaciones que tienen las relaciones de las frecuencias sobre la descripción de los sistemas integrables y de aquellos que no lo son. En consecuencia, para frecuencias conmensurables (racional)  $\omega_i/\omega_j$ , la trayectoria representa una curva cerrada en el toro. Por otro lado, cuando  $\omega_i/\omega_j$  es irracional (es decir, las frecuencias son inconmensurables), la trayectoria nunca se cierra.

La particularidad de que los sistemas integrables sean la excepción y los no integrables la norma, se debe en principio a la inconmensurabilidad de las resonancias. Este hecho se manifiesta en la divergencia de las series de potencia del parámetro  $\lambda$  cuando se aplica el método de perturbación. En ese sentido el teorema KAM, presenta una alternativa a la convergencia de estas series cuando la distancia a estos puntos es lo suficientemente grande, de tal manera que si  $\lambda$  es lo suficientemente pequeña, la mayoría de los toros se conservan o se deforman levemente, pero en otros casos se destruyen. Sin embargo, el número de los toros que se conservan en comparación de aquellos que se destruyen, es mayor.

Ahora, cuando el número de grados de libertad es mayor que dos ( $n > 2$ ), los toros invariantes ya no dividen la hipersuperficie  $(2n - 1)$ -dimensional en partes desconectadas. Como consecuencia, las regiones donde los toros son destruidos se fusionan y forman una única red, esta red es la causante de que la trayectoria se desplace por todas partes de la superficie de energía, este fenómeno se conoce como difusión de Arnol'd (ver Fig. 6-c). Una forma de describir y estudiar estos sistemas dinámicos es mediante el uso de los mapas de

Poincaré, que simplifica significativamente el análisis de los sistemas hamiltonianos. Si se conoce el mapa  $T$  (o se conoce el patrón que dejan las trayectorias en la superficie  $S_x$ ), esto permite sacar conclusiones importantes sobre el comportamiento de un sistema. De hecho, cuando el mapa de Poincaré genera una secuencia finita de puntos (por ejemplo,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ), esto indica una trayectoria cerrada en el espacio de fase y, por lo tanto, la presencia de movimiento periódico. Por el contrario, si el conjunto de puntos generado por un mapa de Poincaré llena alguna curva cerrada en la superficie  $S_x$ , esto manifiesta un movimiento cuasiperiódico.

Pero aún, no queda claro el porqué de la inconmensurabilidad de las resonancias. No es claro si es una característica que se deduce del propio marco teórico empleado, o es más bien una manifestación propia de los mismos sistemas dinámicos. Por otro lado, si las diferencias entre los sucesivos estados de un sistema dinámico se deben simplemente a las diferencias entre las configuraciones espaciales de los elementos en él, simplemente sería cuestión de tiempo para que la configuración inicial se diese de nuevo. Según el teorema de recurrencia, un sistema mecánico conservativo, dado un tiempo suficientemente largo, *debe*, pasar un número infinito de veces por una configuración que se halla infinitamente cerca de una configuración por la que ya ha pasado. Tal vez, entonces, el problema de la integración para los sistemas no integrables sea cuestión de esperar el tiempo suficiente. Pero como se observará a continuación, tal aseveración sólo será válida para un tipo de sistema en particular. Esta y la otra cuestión serán los temas para tratar en la siguiente sección.

### 3 TIEMPO DE RECURRENCIA

Teneiendo en cuenta que para un sistema integrable, el tiempo de recurrencia dependerá de la relación de las frecuencias, esto implica , que si estas son conmensurables, equivale a suponer que todas las frecuencias se pueden expresar como múltiplos racionales entre si. Teniendo un período igual al de la ecuación (15). Para el caso contrario, en el que la relación de las frecuencias es inconmensurable, los sistemas pueden denominarse cuasiperiódico (o ergodico), donde cualquier trayectoria es densa en una subvariedad del toro de dimensión  $n - \dim \mathcal{M}_\omega$ , ya que esta volverá a la proximidad de un estado inicial genérico infinitas veces<sup>43</sup>. Este tipo de sistemas son típicos en la medida en que  $\lambda$  sea lo suficientemente pequeño ( $\lambda \ll 1$ ). Aquí hay que recordar que estas afirmaciones reposan en la posibilidad de desacoplar el conjunto de ecuaciones que describen el sistema, o en el mejor de los casos que por medio de técnicas de perturbación los efectos de las resonancias sean locales y no altere sustancialmente la estructura dinámica del sistema. Pero qué pasa para sistemas con  $\lambda \gg 1$ , ¿Cuál es el tiempo de recurrencia para estos sistemas y los anteriores? Estos aspectos serán los abordados en esta sección, primero describiendo el tiempo de recurrencia para los sistemas cuasiperiódicos, para pasar luego al fenómeno de mezcla, que esta asociado a un tiempo de no recurrencia, que será la característica de los sistemas no integrables.

#### 3.1 Tiempo de recurrencia

Las ecuaciones que describen los sistemas dinámicos presentados hasta ahora tienen la siguiente forma

$$\dot{x} = v(x). \quad (39)$$

Aquí  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  es un vector  $n$ -dimensional que especifica el estado del sistema y  $v = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una función vectorial<sup>44</sup>. Cuando las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  se fijan, las ecuaciones tienen una solución única

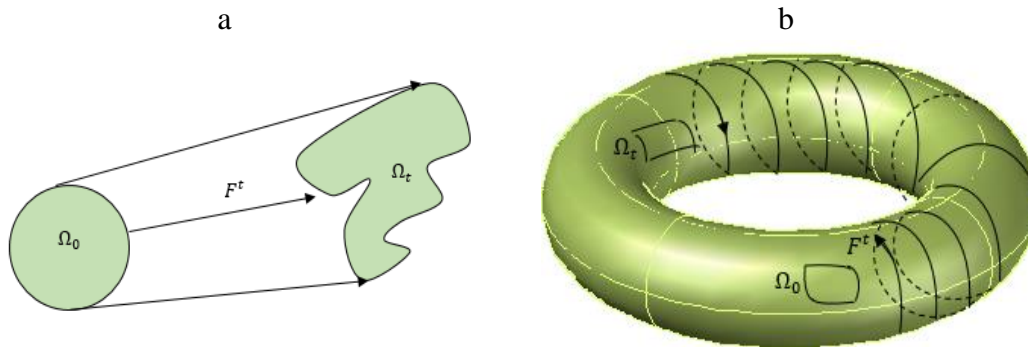
$$x(t) = F(t, x_0). \quad (40)$$

---

<sup>43</sup> La dimensión  $\dim \mathcal{M}_\omega$  a veces se denomina multiplicidad de la resonancia, y es el número de relaciones de resonancias independientes que existen entre las frecuencias  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Los casos extremos son  $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$ , que generalmente se llama el caso no resonante, y  $\dim \mathcal{M}_\omega = n - 1$ , el caso completamente resonante. Ver Giorgilli, págs. 254-255.

<sup>44</sup> Note que las ecuaciones dinámicas (1) de un sistema hamiltoniano con  $n$ -grados de libertad se pueden convertir en la forma (38) si se asume que  $x_i = q_i$  y  $\dot{x}_{i+k} = p_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Cualquier solución  $x(t)$  determina una trayectoria en el espacio de fase formado por todos los vectores  $x$ . Dado que la solución (40) relaciona cada punto inicial  $x_0$  con algún otro punto  $x(t)$  en el tiempo  $t$ , esto define un cierto mapeo  $F^t x_0 = x(t)$  en el espacio de fase. Por tanto,  $F^t$  mapea cualquier región inicial  $\Omega_0$  del espacio de fase en otra región  $\Omega_t = F^t \Omega_0$ .



**Fig. 13. a) Acción del mapeo  $F^t$  para un sistema Hamiltoniano. b) Evolución de una pequeña región  $\Omega_0$  bajo el flujo de fase. Elaboración propia.**

El volumen de la región  $\Omega_0$  al transformarse en  $\Omega_t$ , permanece constante. Esta afirmación, conocida como el teorema de Liouville<sup>45</sup>, se deriva de las propiedades (ver sección 1.1 y 1.2) de los sistemas Hamiltonianos conservativos.

Supóngase que  $h(x)$  es una función integrable, es decir, es solución de (39). El promedio de tiempo<sup>46</sup> de esta función es

$$\bar{h}(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(x(t)) dt. \quad (41)$$

Si las trayectorias del sistema dinámico no van al infinito, sino que están limitadas a alguna región  $D$  de volumen  $V_D$  en el espacio de fase. El promedio de fase de la función  $h(x)$  puede definirse como

$$\langle h \rangle = \frac{1}{V} \int_{(D)} h(x) dV, \quad (42)$$

<sup>45</sup> Ver Heriksson, 2021, págs. 4-7.

<sup>46</sup> Para cualquier función integrable, la media del tiempo es igual a la media del espacio, o lo que es lo mismo, el tiempo empleado por una trayectoria dentro de cualquier región  $\Omega$  debe ser igual al volumen de esta región. Que es similar a la expresión (15). Pero Frisch (pág. 4) demuestra que ese tiempo dependerá del número de grados de libertad del sistema, Es decir, cuanto mayor es el número de grados de libertad del sistema, menos es la fracción del tiempo que pasa cerca de cualquier estado inicial.

donde  $dV = dx_1, \dots, dx_n$ . Se dice que el movimiento del sistema dinámico es ergódico (o el sistema dinámico se llama ergódico) si, para una función integrable arbitraria  $h(x)$ , en casi todas las condiciones iniciales  $x_0$ , el promedio temporal y de fase de  $h(x)$  coinciden

$$\bar{h}(x_0) = \langle h \rangle, \quad (43)$$

esto significa que, para un sistema ergódico, el tiempo promedio no depende de la elección de la condición inicial  $x_0$ .

Hay que aclarar y tener en cuenta, que el flujo de fase de los sistemas hamiltonianos no puede ser ergódico en el sentido estricto de la definición anterior. Dado que, en tales sistemas, la energía es una constante, la trayectoria debe estar en alguna hipersuperficie  $H = E$  y el flujo puede ser ergódico solo dentro de esta hipersuperficie. Si hay  $I$  integrales de movimiento adicionales, el movimiento de tal sistema estará restringido a una hipersuperficie de  $n - I - 1$  dimensiones. Es esta hipersuperficie  $G$  la que representa entonces la "región" alcanzable del espacio. Con esta noción, la definición (41) puede reformularse como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(x(t)) dt = \frac{1}{S_G} \int_{(G)} h(x) dS, \quad (44)$$

donde la última integral se realiza sobre la hipersuperficie  $G$  y  $S_G$  es el área de esta hipersuperficie.

Por lo tanto, cuando el movimiento de un sistema hamiltoniano es ergódico, su trayectoria en el espacio de fase cubre uniforme y densamente, con el tiempo, toda la hipersuperficie especificada por las integrales de movimiento. Una propiedad característica del movimiento ergódico de un sistema hamiltoniano es la invariancia de la forma de un pequeño dominio. A medida que pasa el tiempo, tal dominio simplemente se mueve sobre el toro que cruza cada uno de sus segmentos infinitas veces (ver Fig.13-b).

### 3.2 Mezcla

Hay sistemas dinámicos hamiltonianos con regímenes de movimiento más complicados. En estos sistemas, cualquier pequeña región inicial  $\Omega_0$  se deforma fuertemente a medida que se desplaza sobre la hipersuperficie de energía. En el proceso de dicho cambio, la región se deforma, sin romperse nunca (ver Fig. 14). Si se espera lo suficiente, la región inicial se extendería por toda la hipersuperficie, por lo que sus piezas se pueden encontrar en

cualquier parte de esta hipersuperficie. Se dice que tales sistemas dinámicos poseen la propiedad de mezclarse<sup>47</sup>.

Para formalizar el concepto de mezcla, se seguirá a Balescu (1975). Considérese dos dominios arbitrarios  $A$  y  $B$  dentro del dominio  $D \subset \mathcal{M}$ . Supóngase que el dominio  $B$  permanece inmóvil, mientras que el dominio  $A$  evoluciona bajo la acción de la transformación  $A_t = F^t A$ . Entonces la intersección  $A_t \cap B$  constituirá la colección de todas las partes de  $A$  que han llegado dentro del dominio inmóvil  $B$  en un instante  $t$ . Se dice que el sistema dinámico se mezcla, si en el límite  $t \rightarrow \infty$ , es igual

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t \cap B}{B} = A. \quad (45)$$

Se puede comentar esta definición de la siguiente manera. Dado que el movimiento considerado es conservador, deja invariante la medida de la región  $A$ , es decir,  $A_t = A$ . Además,  $A = A_t/D$  es la fracción relativa del volumen ocupado por  $A$  en toda la región alcanzable  $D$ . Por otro lado,  $(A_t \cap B)/B$  representa la fracción relativa del volumen ocupado en la región  $B$  por las partes de  $A_t$  que la habían alcanzado en el tiempo  $t$ . La ecuación (45) establece que en el límite  $t \rightarrow \infty$  estas dos razones coinciden<sup>48</sup>, independientemente de los tamaños, formas y posiciones relativas originales de las regiones  $A$  y  $B$ .

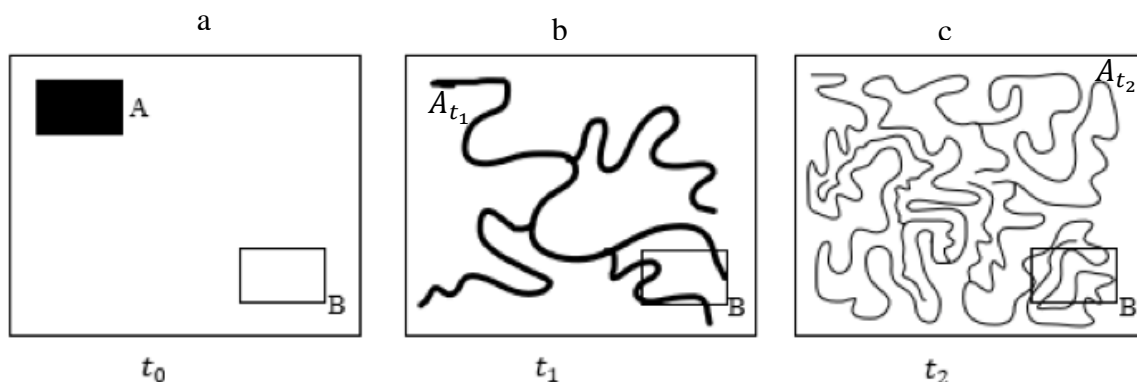
Hay varias implicaciones importantes de la definición anterior. La región  $B$  inmóvil se puede elegir para que sea arbitrariamente pequeña y se pueda colocar en cualquier lugar. A pesar de esto, después del paso de un tiempo  $t$  suficientemente largo, encontraremos dentro de  $B$  partes de la región  $A_t = F^t A$  que evolucionaron a partir de la región inicial  $A$ . Esto significa que cuando  $t \rightarrow \infty$ , partes de  $A_t$  se pueden encontrar en cualquier pequeña vecindad de cualquier punto en la región alcanzable del espacio de fase. En otras palabras, la región inicial  $A$  se transforma con el tiempo en una red muy fina y penetrante cuyos hilos pueden

---

<sup>47</sup> Para ilustrar este aspecto, considere el ejemplo clásico de Gibbs. Suponga que un recipiente contiene 30% de tinta y 70% de agua, y que inicialmente la tinta y el agua no se mezclan. Ahora, agítese el recipiente. Después de un tiempo, encontraríamos que el líquido parece homogéneo: cada parte de la mezcla consta de un 30% de tinta y un 70% de agua. La mezcla dinámica en el espacio de fase se parece a este proceso, con la única excepción de que la región inicial no se divide en gotas separadas, sino que siempre permanece conectada.

<sup>48</sup> Esto significa que en  $t \rightarrow \infty$ , las partes de  $A_t$  se pueden encontrar en cualquier pequeña vecindad de cualquier punto en la región alcanzable del espacio de fase. En otras palabras, la región inicial  $A$  se transforma con el tiempo en una telaraña muy fina y penetrante cuyos hilos pueden detectarse dentro de cualquier elemento de volumen, por pequeño que sea. Sin embargo, el volumen total ocupado por esta red, que es siempre igual al volumen de la región inicial  $A$

detectarse dentro de cualquier elemento de volumen, por pequeño que sea. Sin embargo, el volumen total ocupado por esta red es siempre igual al volumen de la región inicial  $A$ .



**Fig. 14. Evolución de una región en el caso de un sistema que presenta mezcla. Basado en el artículo de (Heriksson, pág. 3)**

Esto implica que las trayectorias de un sistema dinámico con mezcla son siempre absolutamente inestables con respecto a pequeñas perturbaciones y que divergen con el paso del tiempo. La divergencia de trayectorias significa que el comportamiento de este sistema dinámico es impredecible. Si se conoce la posición inicial de un punto en el espacio de fase solo con cierta precisión finita, es decir, solo se sabe que este punto pertenece a una pequeña región  $\Omega_\varepsilon$  de un tamaño característico  $\varepsilon$ , no se puede decir dónde se encontrará después de un tiempo suficientemente largo. Por lo tanto, la impredecibilidad se origina en sistemas con mezcla. La sensibilidad de las condiciones iniciales del sistema (a pequeñas perturbaciones) juegan aquí un papel crucial.

Una característica de este fenómeno es que produce una irreversibilidad efectiva, y es que después de que haya transcurrido tiempo suficiente, cualquier parte alcanzable del espacio de fase contendrá las partes que provienen de muchas regiones iniciales distantes (y, en el límite  $t \rightarrow \infty$ , de casi cualquier región inicial). En consecuencia, si solo se sabe que, en un momento final en el tiempo, el punto del espacio de fase se encuentra en una pequeña región de tamaño  $\varepsilon$ , no se puede determinar de manera única dónde estaba el punto inicialmente<sup>49</sup>. Por tanto, la inevitable inexactitud en la determinación del estado actual del

<sup>49</sup> En la mecánica clásica, es un supuesto fundamental que la evolución de un sistema es determinista en ambas direcciones del tiempo, es decir, tanto hacia el futuro como hacia el pasado. La evolución determinista de un sistema significa que es posible, con absoluta certeza, decir que cualquier estado dado del sistema evolucionó de un estado único definido en el pasado y evolucionará a un estado único definido en el futuro. En este sentido Heriksson explica

*No puede haber ninguna ambigüedad en la historia evolutiva de un sistema. Por lo tanto, la evolución determinista implica que en ninguna parte del espacio de fases los estados pueden converger o divergir. Los sistemas que parecen evolucionar de forma no determinista dan lugar a la aparición de procesos irreversibles en la naturaleza (2021, págs. 2-3).*

sistema juega un papel importante en este caso. Dado que, en cualquier experimento físico, las variables que describen a este, solo se pueden medir con cierta precisión finita, entonces la descripción determinista de los sistemas dinámicos con mezcla no tiene sentido<sup>50</sup>.

Puede verse fácilmente que no hay contradicción con la existencia de ecuaciones de movimiento reversibles que describen el movimiento con mezcla. La cuestión es que la irreversibilidad está relacionada con el engrosamiento o redondeo de algunas cantidades. En este caso, parte de la información contenida en la solución exacta se pierde desde el principio. El estado de tal sistema solo puede volverse progresivamente menos definido con su movimiento. Entonces la afirmación antes expuesta sobre la existencia de soluciones a las ecuaciones de movimiento durante intervalos de tiempo finitos cobra sentido (sec. [2.3]), ya que las constantes de movimiento  $J_i$  solo se mantienen como tal, durante un intervalo de tiempo.

### 3.3 Relación entre el teorema de Liouville y la difusión de Arnol'd

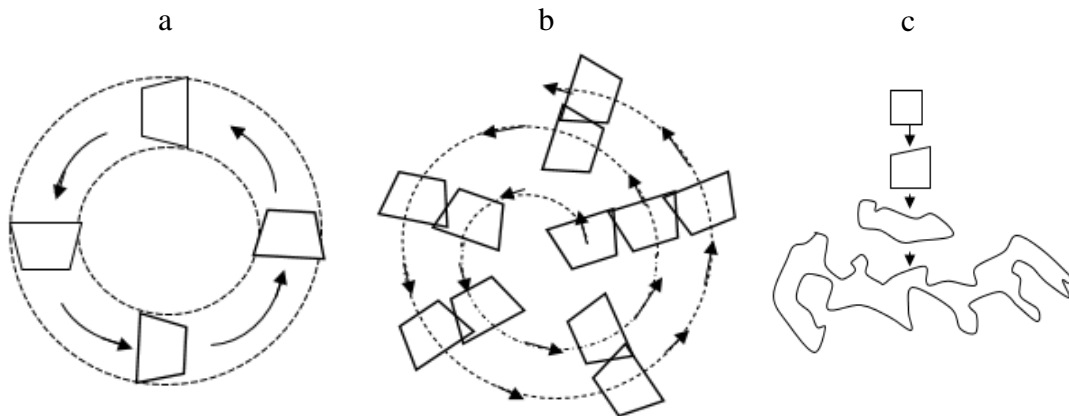
El problema de la estabilidad de acuerdo con la Fig. 14, consiste en si la región  $A$ , permanece localizada, a medida que  $t$  crece, o si, por el contrario, comienza a extender. Si la región  $A$  permanece localizada conforme el tiempo avanza, se tiene una medida estable del sistema (lo que significa estados físicos detallados del sistema), y las imprecisiones en su especificación no se amplificaran con el tiempo, lo que implica que el volumen de la región  $A$  permanece constante (Fig. 15-a). Por otro lado, puede suceder que el volumen de la región  $A$  se preserve en el tiempo, con la diferencia del caso anterior, que puede dispersarse sobre enormes regiones del espacio de fase (pasando por todos los estados energéticamente posibles) (Fig. 15-b). Esto debido a que las imprecisiones en la medición se amplifican levemente en el tiempo. Donde se puede ver una relación entre estas dos situaciones, con los sistemas integrables y cuasintegrables respectivamente, donde el factor  $\lambda$  se asocia a la precisión con que se puede conocer los parámetros que describen a un sistema dinámico; si  $\lambda = 0$ , la información que se obtiene del sistema es total.

---

La razón de esto es que, si un sistema comienza en un estado dado, no es necesariamente el caso de que el sistema termine en el mismo estado inicial invirtiendo el movimiento del sistema en el tiempo.

<sup>50</sup> Durante mucho tiempo se creyó que la mezcla solo es posible en sistemas con muchos grados de libertad. Sin embargo, el Sinai (*Ergodic properties of certain systems of two-dimensional discs and three-dimensional balls*) demostró en 1962 que esta propiedad la posee incluso un sistema que consta de dos discos planos rígidos sobre una mesa con bordes reflectantes rígidos. Aunque los rigurosos resultados de Sinai se aplican solo a dos discos que interactúan, se puede esperar que la misma propiedad se mantenga para conjuntos de muchos discos que chocan elásticamente.





**Fig. 15. Varios tipos de flujo en el espacio de fase: a) no ergódico; b) ergódico, pero sin mezcla y c) mezcla. Basado en el artículo de (Heriksson, pág. 3).**

Sin embargo, existe un problema considerable respecto a la información que se puede obtener de un sistema, ya que toda medida solo puede realizarse con cierto número finito de cifras decimales. Este hecho se manifiesta, regresando al problema de estabilidad de la región  $A$ , en que, si bien se preserva el volumen de la región, no implica que se conserve su forma: de hecho, como ya se describió, la región tenderá a distorsionarse sobre el espacio de fase, formando una red, esta red será el producto de la presencia de puntos homoclínicos y heteroclínicos, que es en esencia la forma en que se describe el fenómeno de difusión de Arnol'd (Fig. 15-c). Entonces, el problema de los pequeños denominadores, a diferencia de lo que concebía Poincaré, no es un problema del formalismo empleado, sino una característica propia de cómo se perciben los fenómenos. Entonces lo que se observa es que el fenómeno de difusión viola el teorema de Liouville (ver A-4).

Ahora, lo que se puede desprender de este aspecto, es que independientemente de la precisión con que se conozca el estado inicial de un sistema (dentro de un límite razonable), las imprecisiones tenderán a crecer con el tiempo y la información que inicialmente se tenía, se hace casi inútil<sup>51</sup>, en el sentido de que, bajo esta consideración, es como si el sistema “olvidara” sus condiciones iniciales con el paso del tiempo. En este sentido, la mecánica clásica es esencialmente impredecible, dado que, cuanto mayor sea el número de grados de libertad del sistema, menor será la posibilidad que de pase cerca de cualquier estado inicial.

<sup>51</sup> Si bien la información se conserva en este tipo de sistemas, no lo hace su calidad, en el sentido de que la distinción entre estados físicos no se preserva en el tiempo, a excepción de la energía.

## IV Análisis

En un principio el enfoque clásico sobre la integración de sistemas dinámicos de la forma  $H = H_0 + \lambda H_1$ , consistía en buscar la integrabilidad por cuadraturas, es decir, en buscar una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales que involucren solo un número finito de operaciones algebraicas y el cálculo de integrales de funciones conocidas. Pero según el enfoque presentado aquí, se tiende a considerar que un sistema hamiltoniano es integrable si su espacio de fase está foliado en toros invariantes que llevan movimientos periódicos o cuasi periódicos. Sin embargo, este tipo de sistemas son la excepción más que la norma. Ya que la influencia de las interacciones entre las partes del sistema cambia de forma significativa la estructura de este y por ende su dinámica con el tiempo.

Sin embargo, el enfoque ingenuo de la teoría de perturbación consistía en probar que el comportamiento del sistema dinámico para  $\lambda \neq 0$  no era muy diferente al del sistema no perturbado  $H_0$ . Más precisamente, se intentaba mostrar que el espacio de fase todavía admite una foliación continua en toros invariantes, que están cerca de los no perturbados, y que el movimiento sigue siendo periódico o cuasiperiódico en tales toros. Con este fin, contaba con dos métodos. El primer método, era buscar una transformación canónica  $(p, q \rightarrow J, \theta)$ , de tal forma que el nuevo sistema fuese independiente de las variables angulares  $H = H(J)$ , siendo directamente integrable. El segundo método, consiste en buscar integrales primeras que sean perturbaciones de las integrales del hamiltoniano no perturbado  $H_0$ . De hecho, este último método, aunque más directo, presenta algunos problemas de consistencia formal que son bastante delicados y han sido resueltos sólo en casos particulares<sup>52</sup>; estas dificultades se superan en cambio mediante el primer método que es más general. Pero tal enfoque falló, por el teorema de Poincaré<sup>53</sup>, que probó la inexistencia de integrales analíticas<sup>54</sup> a excepción de la energía (ver A-3).

---

<sup>52</sup> Por ejemplo, en el trabajo de Igor V. Volovich titulado *Time irreversibility problem and functional formulation of classical mechanics*, se presenta una descripción de este tipo de casos.

<sup>53</sup> "The canonical equations of celestial mechanics do not admit any analytical and uniform integral besides the energy integral." Ver Brillouin, pág. 78.

<sup>54</sup> Autores como M. Born, o Brillouin, pasaron por alto la no analiticidad de las  $J$ 's en el caso general, y asumieron que aún se podría escribir una fórmula de tipo (6), dando la energía en función de las  $J$ 's. Sin embargo, no tendría sentido expresar una expresión bien definida, como la energía, en función de cantidades no analíticas, las  $J$ 's. El método completo simplemente no funciona en los problemas más generales, cuando no se usa ninguna restricción para limitar los valores de los coeficientes  $S_k(J')$ .

Tal imposibilidad se debe a la presencia de resonancias, que alteran significativamente la dinámica del sistema; estas pueden ser irracionales o racionales. Pero el problema, son aquellas que guardan una relación irracional entre sí. En principio esta dificultad, que se conoce como el problema fundamental de la mecánica clásica<sup>55</sup>, podría atribuírsele al formalismo empleado, a la teoría, como algunos pensaron, incluso el mismo Poincaré. Pero la cuestión es más de fondo, ya que está asociado a la cantidad de información que se puede medir de las variables que definen a un sistema físico; en vez de describir cantidades enteras, normalmente la información medida se presenta como un número de decimales finitos.

Así que el ideal clásico, en el que el observador no tenía problemas para ver la distinción entre los estados del sistema, donde la cantidad de información o conocimiento que posee éste, en cualquier instante de tiempo es completa; o donde la irreversibilidad de los estados dinámicos es una consecuencia de la aparente falta de conocimiento del observador, al no ser capaz de rastrear con precisión infinita los estados físicos de éste, ya no es posible. Dado que, si bien, las ecuaciones que describen a estos sistemas son ecuaciones diferenciales ordinarias y se tienen pruebas de unicidad y existencia para ellas, el hecho es que estas soluciones no se mantienen salvo las excepciones presentadas (sistemas integrables o cuasintegrables) en el tiempo, esto significa, que la definición de variables  $\theta, J$  puede ser materialmente alterada en puntos de degeneración. Esta discontinuidad puede ser el resultado de un cambio muy pequeño de cualquier parámetro en las ecuaciones dinámicas, o también de cualquier cambio pequeño en las condiciones iniciales. Esto implica, que con el transcurrir del tiempo los valores de las variables definidas en el espacio de fase se vuelven estadísticamente dependientes.

Por ello, es físicamente imposible medir con precisión todos los parámetros que definen un sistema dinámico. Aunque matemáticamente se habla de un parámetro con "cierto valor dado" y se admite que este valor está estrictamente definido, sin ningún posible error. Físicamente se sabe que nada se puede medir con precisión, que las teorías, incluso las mejores, solo son aceptables dentro de ciertos límites y que hay que tener en cuenta los errores de medición en todas las aplicaciones posibles. En tales condiciones, la inestabilidad mencionada corresponde a una situación en la que la teoría es incapaz de producir una solución bien definida (analítica).

---

<sup>55</sup> Max Born escribió: "*It would indeed be remarkable if Nature fortified herself against further advances in knowledge behind the analytical difficulties of many-body problem*" Ver Tabor, 1988, pág. 105.

## V Conclusiones

Las condiciones iniciales no se "dan"; deben medirse y observarse; esto significa que las coordenadas  $q_i$  y los momentos  $p_i$  se conocen dentro de cierto margen de error  $\Delta q_i$  y  $\Delta p_i$ , lo que implica que la menor variación del parámetro  $\alpha_m$  (ver [1.1]), o lo que es lo mismo, el menor cambio en los valores iniciales puede provocar variaciones no continuas de  $J_i$ ,  $\theta_i$  y dar lugar a una solución completamente diferente a la anterior, esto significa que los diferentes estados por los que pasa el sistema a lo largo del tiempo no son equivalentes entre sí. Y esto es sin duda un tipo especial de inestabilidad, impuesto por el teorema de Poincaré, aunque no estudiado completamente y no entendido completamente en todas sus consecuencias.

Cuando las variables no se pueden desacoplar, se debe admitir que no se puede resolver tales problemas con exactitud. Y donde el uso y las ampliaciones de series para aproximaciones no son demasiado fiables. El teorema de Poincaré prueba definitivamente que estas expansiones en serie no convergen, en el mejor de los casos, pueden ser semiconvergentes. Suponiendo que este sea el caso, se puede calcular soluciones aproximadas para cualquier intervalo de tiempo limitado, pero no se puede obtener una solución estrictamente rigurosa, esto sugiere que las predicciones pueden ser buenas durante un cierto período de tiempo, al principio; o incluso (si las condiciones iniciales están definidas con mucha precisión) las predicciones pueden ser correctas durante un intervalo de tiempo bastante largo (como es el caso de los problemas astronómicos), pero a la larga, la incertidumbre debe siempre llegar a ser dominante. Esto es así, ya que, el margen de error con el que se pueden precisar las variables de acción-ángulo están dadas respectivamente por  $\Delta J_i, \Delta \theta_i$ . Si bien los  $\Delta J_k$  permanecen constantes en el transcurso del tiempo (por definición), las variables angulares muestran un comportamiento diferente. El error  $\Delta \theta_i$  aumenta constantemente con el transcurrir del tiempo (por definición), haciendo que a la larga el error crezca y por ende la incertidumbre.

El problema de los pequeños denominadores, y el hecho de la inconmensurabilidad de las frecuencias, surge en principio por la imposibilidad de definir con exactitud las condiciones iniciales, así, que de aquí se deduce, que a partir de las condiciones iniciales se puede controlar la degeneración.

## VI Bibliografía

- Arnol'd, V. I. (1963). Theory of perturbations. En V. I. Arnol'd, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics* (págs. 94-109). Rusia: Russian Math.
- Balescu, R. (1975). *Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics*. New York: JHON WILEY & SONS.
- Berry, M. (1978). Regular and irregular motion. *American Institute of Physics*(46), 16-120.
- Bishop, R. (2004). Nonequilibrium statistical mechanics Brussels-Austin style. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*(30), 1-30.
- Bishop, R. (2006). Determinism and indeterminism. En R. Grosseteste, *In encyclopedia of philosophy* (Segunda ed., págs. 29-35). Illinois: Thomson Gale.
- Brillouin, L. (1949). Poincaré and the shortcomings of the Hamilton-Jacobi method for classical or Quantized Mechanics. *J. of Applied Physics*(20), 76-94.
- Chirikov, B. V. (1960). Resonance processes in magnetic traps. *J. Nucl. Energy Part C: Plasma Physics, I*, 253-260.
- Frisch, H. L. (1956). Poincaré Recurrences. *The Physical Review*, 104(1), 1-5.
- Giorgill, A. (1989). New insights on the stability problem from recent results in classical perturbation theory. En D. Benest, & C. Froeschle, *Modern Methods in Celestial Mechanics* (págs. 249-285). Yvette Cedex: Editions Frontières.
- Golstein, H. (1994). *Mecánica clásica*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Heriksson, A. (2021). On the Gibbs-Liouville theorem in classical mechanics. *HAL archives-ouvertes*, 1-11.
- Koslov, V. (1983). Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics. *Russian Mathematical Surveys, I*(38), 1-76.
- Koslov, V. V., Neishtadt, A. I., & Arnol'd, V. (2002). En *matematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics* (Tercera ed., págs. 274-278). Nueva York: Springer.
- Laplace, P.-S. (1996). De la probabilidad. En P.-S. Laplace, *Ensayo filosófico sobre las posibilidades* (págs. 24-31). Barcelona: Ediciones Altaya, S.A.
- Lieberman, M., & Lichtenberg, A. (1993). The effects of correlations. En M. Lieberman, & A. Lichtenberg, *Regular and Chaotic Dynamics* (Segunda ed., Vol. 38, págs. 328-345). Nueva York: Springer-Verlag.
- Loskutov, A. (2007). Dynamical chaos: systems of classical mechanics. *Physics-USpekhi*, 50(9), 936-964.
- Masoliver, J., & Ros, A. (2011). Integrability and chaos: the classical uncertainty. *European Journal Of Physics*(32), 431-458.
- Núñez, H. N. (1990). *Regularidad y caos en sistemas dinámicos*. Trabajo de maestría , UNAM, Departamento de física, Mexico.

- Orban, J., & Bellemans, A. (22 de Abril de 1967). Velocity-inversion and irreversibility in a dilute gas of hard disk. *Physics Letter*, XXIV A(11), 620-621.
- Poincaré, H. (1957). Non-existence of uniform Integrals. En H. Poincaré, *New methods of celestial mechanics* (Vol. I, págs. 201-232). New York: Dover Publications.
- Prigogine, I., & Stengers, I. (1991). *Entre el tiempo y la eternidad* (Primera ed.). Madrid: Alianza Editorial S.A.
- Prigogine, I., Petrosky, T., Hasegawa, H., & Tasaki, S. (1991). Integrability and Chaos in Classical and Quantum Mechanics. *Chaos, Solitons and Fractals*, I(1), 3-24.
- Tabor, M. (1988). *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. Nueva York: Jhon Wiley and Sons.
- Tolman, R. (1938). Collision as a mechanism of change with time. En R. C. Tolman, *The Principles of Statistical Mechanics* (págs. 99-132). Londres: Clarendon Press.
- Valdés, A. D. (1983). *Por qué la difusión de Arnol'd aparece genéricamente en los sistemas hamiltonianos con más de dos grados de libertad*. Tesis de doctorado, Universidad de Barcelona, Facultad de Matemáticas.
- Viniegra, F. (2009). *Mecánica Libro 3*. Mexico, D.F.: UNAM.
- Whittaker, E. (1917). The reduction of the problem of three bodies. En E. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies* (Segunda ed., págs. 339-356). Londres, Inglaterra: Cambridge University Press.

## VII Apendice

### 1 A.1

Los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = \varphi(x, a),$$

donde  $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  es una función vectorial (normalmente suave),  $a$  simboliza el conjunto de parámetros y  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un vector  $n$ -dimensional que caracteriza el estado del sistema dinámico.

Defínase los siguientes campos vectoriales  $\varphi_m$  en el espacio de fase

$$\varphi_i = \left( \frac{\partial I_i}{\partial p}, \frac{\partial I_i}{\partial q} \right).$$

Para visualizar que  $\mathcal{M}$  tiene la forma de un toro  $n$ -dimensional, primero hay que mostrar que los campos  $\varphi_i$  son independientes (paralelos) y tangenciales a  $\mathcal{M}$ . La propiedad de independencia se deduce inmediatamente de la independencia de las integrales  $I_i$ . A continuación, se tiene que los gradientes  $2n$ -dimensionales:

$$\nabla I_j = \left( \frac{\partial I_j}{\partial p}, \frac{\partial I_j}{\partial q} \right),$$

son perpendiculares a toda superficie  $I_j(p, q) = \alpha_j$ .

Por otro lado, el producto escalar de los campos  $\varphi_i$  con los gradientes es

$$\varphi_i \cdot \nabla I_j = \frac{\partial I_i}{\partial p} \cdot \frac{\partial I_j}{\partial q} - \frac{\partial I_i}{\partial q} \cdot \frac{\partial I_j}{\partial p} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial I_i}{\partial q_k} \frac{\partial I_j}{\partial p_k} - \frac{\partial I_i}{\partial p_k} \frac{\partial I_j}{\partial q_k} \right),$$

y, teniendo en cuenta la propiedad de involución, se obtiene

$$\varphi_i \cdot \nabla I_j = [I_i, I_j] = 0.$$

Por tanto, los campos  $\varphi_i$  son perpendiculares a  $\nabla I_j$ , y dado que los gradientes  $\nabla I_j$  son perpendiculares a  $\mathcal{M}$ , se concluye que los campos  $\varphi_i$  son tangenciales a la variedad  $\mathcal{M}$ .

El teorema de Poincaré-Hopf (también conocido como “hairy ball theorem”), establece que si en una variedad compacta  $\mathcal{M}$  de dimensión  $n$ , se pueden definir  $n$  campos vectoriales independientes tangenciales a  $\mathcal{M}$ , entonces  $\mathcal{M}$  tiene necesariamente la forma de un toro  $n$ -dimensional

## 2 A-2

Con el fin de mostrar la periodicidad de las variables angulares, primero se mostrará que cuando el estado del sistema completa una oscilación completa a lo largo de la curva cerrada  $\gamma_j$  (ver Fig. 3-a), la variable angular correspondiente varía en  $2\pi$ . Denotando esta variación por  $\Delta_i\theta_j$  (el cambio de la variable de ángulo  $\theta_j$  cuando la coordenada  $q_j$  realiza una oscilación completa) se tiene que

$$\Delta_i\theta_j = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial q_k} dq_k, \quad (\text{A-2.1})$$

pero recordando la ecuación (8), se tiene que  $\theta_j = \partial S / \partial J_j$ , por tanto

$$\Delta_i\theta_j = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial J_j} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint_{\gamma_j} \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k. \quad (\text{A-2.2})$$

Por otra parte, de la ecuación (7), se tiene que  $\partial S / \partial q_k = p_k$ , por eso

$$\Delta_i\theta_j = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint_{\gamma_j} p_k dq_k, \quad (\text{A-2.3})$$

y usando la relación (4), se obtiene

$$\Delta_i\theta_j = 2\pi \frac{\partial J_i}{\partial J_j}, \quad (\text{A-2.4})$$

y, dado que  $J_1, \dots, J_n$  son variables independientes, se obtiene

$$\Delta_i\theta_j = 2\pi\delta_{ij}, \quad \text{con} \quad \delta_{ij} \begin{cases} i \neq j \rightarrow 0 \\ i = j \rightarrow 1 \end{cases},$$

lo que significa que la variable angular  $\theta_j$  cambia en  $2\pi$  solo cuando el sistema ejecuta una oscilación completa a lo largo de la curva  $\gamma_j$ .



### 3 A-3

Los toros de los sistemas integrables cortan la superficie de la sección  $S_x$  en curvas concéntricas que en el caso más simple están cerradas. Por ello es conveniente emplear variables de acción-ángulo  $(J, \theta)$ , dado que  $J, \theta$  son las coordenadas polares en  $S_x$ . Esto es consistente, ya que el área de la sección  $S_x$  del toro  $J_x$  es

$$\oint p dq = \oint p_x dx = 2\pi J_x, \quad (\text{A-3.1})$$

Recuérdese la ecuación (4).

El mapeo de cualquier trayectoria conserva  $\rho$  (es decir  $J_x$ ), conforme  $\theta$ . Si  $t = 2\pi/\omega_y$  es el intervalo de tiempo hasta el próximo cruce con  $S_x$ ,  $\theta$  habrá recorrido

$$\theta = \theta_0 + \omega_x t = \theta_0 + 2\pi \frac{\omega_x}{\omega_y}, \quad (\text{A-3.2})$$

donde  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \rho$  es la relación de entre las frecuencias del toro considerado, y que se denomina número de rotación.

Ahora, dado que el área de la sección transversal del toro es  $A = \pi J^2$ , donde  $J$  hace de radio y, por otro lado, como se observó en la Sección 1, se sabe que  $J = J(\omega)$ , es decir, las acciones están en función de las frecuencias; pero viendo también que  $\rho$  es función de las frecuencias, se puede sustituir a  $J$  por  $\rho$ ; así quedando el área de la sección transversal  $S_x$  en términos de las relaciones de las frecuencias  $A = \pi \rho^2$ .

## 4 A-4

Considere alguna función  $\Phi^0$ , que sea constante respecto al Hamiltoniano no perturbado  $H_0$ , esto significa

$$[H_0, \Phi^0] = 0. \quad (\text{A-4.1})$$

Por el contrario, si  $\Phi^0$  no es invariante

$$[H_0, \Phi^0] \neq 0. \quad (\text{A-4.2})$$

La pregunta es, entonces: ¿Es posible encontrar una función  $\Phi$  que se reduzca a  $\Phi^0$  para  $\lambda \rightarrow 0$  y que sea invariante del movimiento? Tal función tendría que satisfacer las relaciones

$$[H, \Phi] = 0. \quad (\text{A-4.3})$$

Una respuesta precisa es asumir que  $\Phi$  es analítica (en matemáticas una función analítica es aquella que puede expresarse como una serie de potencias convergente) en la constante de acoplamiento, entonces se puede expandir  $\Phi$  en una serie de Taylor de  $\lambda$

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \Phi^{(i)}(p_1, \dots, p_N; q_1, \dots, q_N), \quad (\text{A-4.4})$$

donde  $\Phi^{(i)}$  puede expresarse como una expansión de Fourier

$$\Phi^{(i)} = \sum_k \Phi_k^{(i)}(p, \dots, p_N) e^{i \sum_j q_j \cdot q_i}. \quad (\text{A-4.5})$$

Ahora hay que determinar los coeficientes  $\Phi_k^{(i)}$ , de tal forma que satisfagan (A-3.3). De (A-3.3) y de la expresión (A-3.4) se obtiene, al igualar las potencias  $\lambda$ , la siguiente sucesión de ecuaciones

$$\begin{aligned} [H_0, \Phi^0] &= 0 \\ [H_0, \Phi^0] + [H_1, \Phi^{(i-1)}] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A-4.6})$$

Habría que demostrar primero que el término principal  $\Phi^0$ , puede elegirse independientemente de  $H_0$ . Así que considere

$$\Phi^0 = \psi(H_0). \quad (\text{A-4.7})$$

Entonces la forma de la constante es  $\Phi^0 = \psi(H_0)$ . Para  $\lambda \rightarrow 0$ , este invariante se desvanece, por definición. Entonces se puede escribir

$$\begin{aligned}\Phi - \psi(H) &= \lambda[\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)} + \dots] \\ \Phi - \psi(H) &= \lambda\Phi',\end{aligned}\tag{A-4.8}$$

donde,  $\Phi'$  es de nuevo una constante, un invariante.

Por lo tanto, si  $\Phi^{(0)}$  es una función de  $H_0$ , siempre se podrá encontrar otro invariante cuyo término principal no sea una función de  $H_0$ , excepto, por supuesto, en el caso trivial en el que  $\Phi$  es una función de  $H$ .

Siempre que se consideren constantes de movimiento, que sean regulares respecto al vector  $k$ , se podrá excluir el caso en el que  $\Phi^{(0)}$  dependa de las coordenadas. De hecho, usando (A-3.5) y la condición (A-3.6), se obtiene

$$\psi_k^0 \sum_i k_i \cdot p_i = 0,\tag{A-4.9}$$

esto requiere

$$\psi_k^0 = 0 \quad \text{o} \quad \sum_i k_i \cdot p_i = 0.\tag{A-4.10}$$

Pero la segunda condición sólo puede satisfacerse de manera idéntica (es decir, para todos los valores de  $p$ ) si

$$k_1 = k_2 = \dots = k_N.\tag{A-4.11}$$

Por tanto, se puede concluir que

$$\psi_k^0 = 0 \quad \text{excepto para } k = 0\tag{A-4.12}$$

Ahora considérese la ecuación (A-3.8), correspondiente al primer orden de  $\lambda$ . Se obtiene, teniendo en cuenta (A-3.12)

$$\psi_k^1 \sum_i p_i \cdot k_i = H_k \sum_i k_i \cdot \frac{\partial \Phi^0}{\partial p_i}\tag{A-4.13}$$

donde  $H_k$  es el coeficiente de Fourier de la energía potencial (ver (13))

$$H_1(J, \theta) = \sum_k H_1(J) e^{i \sum k_i \cdot \theta_i}.\tag{A-4.14}$$

Se observa que  $H_k$  no desaparece cuando las condiciones de resonancia

$$\sum_i k_i \cdot p_i = 0,\tag{A-4.15}$$

se satisfacen. De ello se deduce que en cada punto donde se satisfacen las condiciones de resonancia, también se tiene

$$\sum_i k_i \cdot \frac{\partial \Phi^0}{\partial p_i} = 0. \quad (\text{A-4.16})$$

Esta ecuación es por lo tanto una consecuencia de la validez de las condiciones de resonancia (A-3.15) y para todos los puntos para los que se satisface (A-3.15), se tiene

$$p_1 / (\partial \Phi^0 / \partial p_1) = p_2 / (\partial \Phi^0 / \partial p_2) = \dots = p_N / (\partial \Phi^0 / \partial p_N). \quad (\text{A-4.17})$$

Esto significa, que las condiciones de resonancia tienen tantas “soluciones” como relaciones del tipo  $m/n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

Por ejemplo, para un sistema con dos grados de libertad, la condición de resonancia (A-3.15), se define como

$$p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 = 0, \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

y simplemente expresa que  $p_1$  y  $p_2$  son conmensurables entre sí. Ahora bien, cada variación del dominio de  $p_1$  y  $p_2$ , por pequeño que sea, habrá un número infinito de valores para los que se cumple esta condición (ver (A-3.5)).

Por lo tanto, dado que (A-3.17) es válido para todos los puntos, y dado que las  $\Phi^0$ 's son funciones continuas, estas relaciones deben satisfacerse de manera idéntica. Pero eso significa que todos los determinantes

$$\begin{vmatrix} p_i & p_j \\ \partial \Phi^0 / \partial p_i & \partial \Phi^0 / \partial p_j \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{A-4.18})$$

desaparecen. Ésta es precisamente la condición de que  $\Phi^0$  sea una función de  $H_0$ .

Se puede concluir que para sistemas que satisfagan la condición de disipatividad, no existen invariantes de movimiento, excepto la energía, que es analítica en la constante de acoplamiento y tiene coeficientes de Fourier no singulares. Pero, para el resto, estos son destruidos por las interacciones.