UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

NOCIONES ASOCIADAS A LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Yerson Andres Cipagauta Ortiz

Ana María Garzón Sandoval

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., 2021

NOCIONES ASOCIADAS A LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Yerson Andres Cipagauta Ortiz

cód. 2016240021

yacipagautao@upn.edu.co

Ana María Garzón Sandoval

cód. 2016240035

amgarzons@upn.edu.co

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADO/A EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR

Mg. Gil Alberto de Jesús Donado Núñez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., 2021

Agradecimientos

A Dios

Por ser tan misericordioso con nosotros, darnos la sabiduría y la salud para que hoy podamos cumplir el primero de nuestros sueños.

A la Universidad Pedagógica Nacional

Por abrirnos sus puertas, ser nuestra alma mater, convertirse en nuestro segundo hogar y formarnos en diversos aspectos para ejercer con orgullo el papel de educadores matemáticos.

Al profesor Alberto Donado

Por su paciencia, sabiduría y acompañamiento tanto en la realización de este trabajo como en los espacios académicos que tuvimos la oportunidad de ver con él.

Dedicatoria

A mi familia, quienes estuvieron acompañándome y aconsejándome durante este proceso; especialmente a mis padres y hermana, por su sacrificio y esfuerzo, ayudándome a cumplir este sueño; y por último y no menos importante, a Ana María Garzón por aceptar ser mi compañera y apoyarme en todo lo necesario.

Yerson Andres Cipagauta Ortiz

A mi familia, quienes me acompañaron, apoyaron y sostuvieron durante el transcurso de mi carrera, especialmente a mi madre por tanta paciencia, amor y esfuerzo inagotable. A mi alma mater la UPN y a mi compañero Yerson por su sabiduría y apoyo.

Ana María Garzón Sandoval

RESUMEN ANALÍTICO DE EDUCACIÓN (RAE)

1. *Información general*	
Tipo de documento	*Trabajo de grado*
Acceso al documento	*Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca central*
Título del documento	*Nociones asociadas a la continuidad de una función en un punto*
Autor(es)	*Cipagauta Ortiz, Yerson Andres* *Garzón Sandoval, Ana María*
Director	*Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús*
Publicación	*Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2021,53 páginas*
Unidad patrocinante	*Universidad Pedagógica Nacional*
Palabras clave	*Definición, función, teorema, demostración, continuidad, discontinuidad, clasificación, cálculo.*

2. *Descripción*

En el presente trabajo de grado se abordan dos nociones asociadas a la continuidad de una función en un punto, concepto presentado en los preliminares; las nociones surgen de alterar lógicamente la definición de función continua en un punto y se analizan mediante ejemplos y contraejemplos de funciones que cumplen o no la respectiva definición asociada a la continuidad, con el fin de caracterizar el conjunto de funciones que cumplen cada una de estas definiciones.

3. *Fuentes*

Apóstol, T. M. (1991). Calculus (Vol. I). (F. Vélez Cantarell, Trad.) Barcelona, España: REVERTÉ S.A.

Bartle, R. G. (1990). INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO (2 ed.). (C. Gutierrez Gonzalez, Trad.) México: LIMUSA.

Flores, I., & Saravia, N. (2014). Las asíntotas y sus mitos. VII Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas. Educación Matemática en contexto, (pág. 655). Perú.

Gonzalez Mota, J. A. (s.f). FUNCIONES MONOTONAS, ACOTADAS, SIMÉTRICAS, PERIÓDICAS. Recuperado el 13 de 10 de 2021, de Algunos temas de Matemáticas II: https://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Larson, R., & Edwards , B. (2010). Cálculo1. De una variable. México: Interamericana Editores S.A. de C.V.

Leithold, L. (1998). El Cálculo (Séptima ed.). (Fidencio Mata González, Ed.) México: GRUPO MEXICANO MAPASA, S.A.

Muñoz Quévedo, J. M. (2014). Introducción a la teoría de conjuntos. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Pérez González, F. (s.f). Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. (U. d. Granada, Ed.) Granada, España: Creative Crommos.

Spivak, M. (1992). Calculus (Segunda ed.). (B. Frontera Márques, Trad.) Barcelona, España: Reverté S.A.

Stewart, J. (1999). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (Cuarta ed.). (A. Sestier Bouclier, Trad.) Thomsons Editores S.A.

4. *Contenidos*

El presente trabajo se compone de cinco (5) secciones, a saber:

En la primera consta de la presentación de conceptos como el límite de una función en un punto,

teoremas ya establecidos sobre las funciones continuas, definiciones sobre las funciones acotadas, asíntotas verticales de una función y el teorema de la desigualdad triangular.
En el siguiente apartado se realiza un breve recorrido por la definición de función discontinua en un punto desde la negación de la definición de función continua en un punto dada por Apóstol (1991), mediante algunos ejemplos concretos debidamente demostrados.
En la tercera sección se analiza la primera noción asociada a la continuidad en un punto, que surge de intercambiar el orden de los cuantificadores y resulta: $(\forall\delta > 0)(\exists\varepsilon > 0):((\forall x \in D(f))(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon))$*, mediante ejemplos y contraejemplos de funciones que cumplen o no dicha definición con el fin de lograr una caracterización del conjunto de funciones que cumplen la definición.*
En la siguiente sección se aborda la segunda noción asociada a la continuidad en un punto que surge de modificar los cuantificadores, resultando: $(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0):((\forall x \in D(f))(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon))$*, mediante un análisis similar al que se hizo con la primera noción.*
Finalmente, se presentan las conclusiones producto del análisis realizado con las dos nociones asociadas a la continuidad de una función en un punto.

5. *Metodología*

Para la realización de este trabajo se inició con el estudio del concepto de continuidad en un punto, posteriormente se planteó la primera definición e inició su exploración mediante ejemplos y contraejemplos, a medida que se avanzaba resultó necesario introducir conceptos como asíntota vertical, desigualdad triangular y funciones acotadas puntualmente con el fin de justificar algunas proposiciones subyacentes de este estudio; posteriormente se abordó la segunda noción, también mediante ejemplos y contraejemplos los cuales sirvieron para evidenciar la necesidad de incluir la definición de función acotada para lograr su caracterización; finalmente, este documento se logró mediante la organización de resultados aislados que se obtenían por la manera en que se abordaron las nociones trabajadas.

6. *Conclusiones*

- *Si dos funciones son C1, entonces su suma, resta y multiplicación es C1.*
- *A diferencia de las funciones continuas, si una función es C1 en uno de sus puntos se garantiza que es C1 en todo su domino.*
- *El conjunto de funciones C1 admite todo tipo de discontinuidad exceptuando aquella que se da por asíntota vertical.*
- *El conjunto de las funciones C1 está compuesto por todas las funciones que no tienen asíntota vertical o están acotadas en cada uno de sus puntos.*
- *Si dos funciones son C2, entonces su suma, resta y multiplicación es C2.*
- *A diferencia de las funciones continuas, si una función es C2 en uno punto se garantiza que es C2 en todo su domino.*
- *El conjunto de funciones C2 admite todo tipo de discontinuidad exceptuando aquella que se da por asíntota vertical, siempre y cuando la función esté acotada.*
- *El conjunto de las funciones C2 está compuesto por todas las funciones acotadas.*

Elaborado por:	*Cipagauta Ortiz, Yerson Andres* *Garzón Sandoval, Ana María*		
Revisado por:	*Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús*		
Fecha de elaboración del resumen:	*17*	*10*	*2021*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"**NOCIONES ASOCIADAS A LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO**"**, elaborado por los estudiantes **YERSON ANDRÉS CIPAGAUTA ORTIZ,** identificado con el Código **2016240021** y Cédula **1024590582** y **ANA MARÍA GARZÓN SANDOVAL** identificada con el Código **2016240035** y Cédula **1010086002** el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cinco** (45) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas.**

En constancia se firma a los seis (06) días del mes de diciembre de 2021.

Mg. GIL ALBERTO DE JESÚS DONADO NÚÑEZ
Director del Trabajo de grado

Mg. LUIS EDUARDO ESPITIA SUPELANO
Jurado del Trabajo de grado

César Rendón

Mg. CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA
Jurado del Trabajo de grado

Tabla de contenido

Tabla de gráficos

A. Introducción

El presente trabajo consiste en el estudio de algunos enunciados que surgen a partir de modificaciones a la definición de continuidad en un punto, concepto que se aborda en los preliminares mediante la presentación de conceptos como el límite de una función en un punto y teoremas ya establecidos sobre las funciones continuas; en este apartado también se mencionan definiciones sobre las funciones acotadas, asíntotas verticales de una función y el teorema de la desigualdad triangular, conceptos claves para el desarrollo de las secciones posteriores.

En el siguiente apartado se realiza un breve recorrido por la definición de función discontinua en un punto desde la negación de la definición de función continua en un punto dada por Apóstol (1991), mediante algunos ejemplos concretos debidamente demostrados.

En la tercera sección se analiza la primera noción asociada a la continuidad en un punto, que surge de intercambiar el orden de los cuantificadores y resulta: $(\forall\delta > 0)(\exists\varepsilon > 0): \Big(\big(\forall x \in D(f)\big)(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\Big)$, mediante ejemplos y contraejemplos de funciones que cumplen o no dicha definición con el fin de lograr una caracterización del conjunto de funciones que cumplen la definición.

En la siguiente sección se aborda la segunda noción asociada a la continuidad en un punto que surge de modificar los cuantificadores, resultando: $(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0): \Big(\big(\forall x \in D(f)\big)(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\Big)$, mediante un análisis similar al que se hizo con la primera noción.

Finalmente, se presentan las conclusiones producto del análisis realizado con las dos nociones asociadas a la continuidad de una función en un punto.

B. Justificación

El interés sobre la propuesta de trabajo de grado se deriva de tres motivos. El primero, es la sugerencia dada por el profesor Alberto Donado de mirar las posibles nociones asociadas a la continuidad de una función en un punto; el segundo, es el interés de los autores hacia la línea del cálculo y particularmente por el tema de continuidad, reconociendo que este es de suma importancia para el desarrollo de esta línea ya que de allí surgen diversos conceptos relevantes. El último motivo, y quizás el más relevante, es el de vivenciar el quehacer matemático, pues en el transcurso de la carrera se ha reconocido el papel fundamental de esta actividad en el aula, lo que potenciará la labor propia como futuros docentes.

C. Objetivos

Objetivo general

Clasificar algunas funciones en nuevos conjuntos obtenidos al alterar lógicamente la definición de continuidad en un punto, mediante su comparación con las funciones continuas en un punto y la caracterización de estos conjuntos.

Objetivos específicos

- Alterar la definición de continuidad en un punto, obteniendo las siguientes definiciones:
  - $(\forall\delta > 0)(\exists\varepsilon > 0): \left(\left(\forall x \in D(f)\right)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\right)$
  - $(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0): \left(\left(\forall x \in D(f)\right)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\right)$
- Clasificar las funciones que cumplen que $(\forall\delta > 0)(\exists\varepsilon > 0): \left(\left(\forall x \in D(f)\right)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\right)$ y caracterizar el conjunto de estas funciones.
- Clasificar las funciones que cumplen que $(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0): \left(\left(\forall x \in D(f)\right)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\right)$ y caracterizar el conjunto de estas funciones.

1. Preliminares

En este primer capítulo se enunciarán algunas definiciones y teoremas que serán utilizados para la elaboración del documento.

Una de las primeras nociones que se trabajan en el estudio del cálculo diferencial es el límite de una función en un punto de esta. Se dice, de manera informal, que si una función *f(x)* se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c por cualquiera de los dos lados, entonces el ***límite*** de *f(x)* cuando x se aproxima a c, es L; y se escribe $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Definición de límite[1]

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Uno de los usos del concepto de límite es caracterizar las asíntotas verticales de una función; a saber:

Definición de asíntota vertical[2]

La recta $x = b$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$, si por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to b} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to b+} f(x) = \infty$

d) $\lim_{x \to b+} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \to b-} f(x) = \infty$

f) $\lim_{x \to b-} f(x) = -\infty$

[1] En Larson (2010, p. 52)
[2] En Stewart (1999, p.98)

Las siguientes definiciones sobre funciones acotadas que fueron tomadas y adaptadas de González (s.f).

Funciones acotadas superiormente: Una función $f(x)$ se dice que está acotada superiormente si existe un número real M tal que

$$f(x) \leq M \; \forall x \; \in D(f)$$ [3]

Funciones acotadas inferiormente: Una función $f(x)$ se dice que está acotada inferiormente si existe un número real m tal que

$$f(x) \geq m \; \forall x \; \in D(f)$$

Funciones acotadas: Una función $f(x)$ se dice que está acotada si lo está superior e inferiormente. Es decir, existe $m, M \in \mathbb{R}$ tal que

$$m \leq f(x) \leq M \; \forall x \; \in D(f)$$

Esto es equivalente a decir que $f(x)$ está acotada si y sólo si

$$\exists k \in \mathbb{R}_{+} / |f(x)| \leq k \; \forall x \in D(f)$$

Funciones acotadas superiormente en un punto: Una función $f(x)$ está acotada superiormente en un punto $a \in D(f)$ si existe δ, M tal que para todo $x, |x - a| < \delta$ entonces $f(x) \leq M$

Funciones acotadas inferiormente en un punto: Una función $f(x)$ está acotada inferiormente en un punto $a \in D(f)$ si existe δ, m tal que para todo $x, |x - a| < \delta$ entonces $f(x) \geq m$

---

[3] $D(f)$: Dominio de la función $f(x)$

Funciones acotadas en un punto: Una función $f(x)$ está acotada superior e inferiormente en un punto $a \in D(f)$ si existe $\delta > 0, m, M$ tal que para todo x que cumple $|x - a| < \delta$ entonces $m \leq f(x) \leq M$.

Otro concepto importante en el estudio del Cálculo Diferencial es el de continuidad de una función; existen varias clases de continuidad que se pueden reconocer en una función: continuidad en un punto, continuidad en un intervalo y continuidad en todos los reales o en su dominio.

Una noción intuitiva e informal que se tiene de continuidad es aquella en la que se dice que una función es continua si se puede representar por medio de un trazo continuo (valga la redundancia) y sin levantar la mano, es decir, que no haya huecos ni saltos en ella.

Se pueden encontrar 3 definiciones formales para la continuidad en un punto:

(1) Definición de continuidad en un punto[4]

Una función f es continua en un punto c si y solo si $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

De la anterior definición se pueden deducir dos condiciones que debe cumplir una función para ser continua en un punto c: que f esté definida en c y que $\lim_{x \to c} f(x)$ exista, esto nos lleva a una segunda definición.

(2) Definición de continuidad en un punto[5]

Una función f es continua en un punto c, si y solo si:

---

[4] Ver Stewart (1999, p. 122)
[5] Ver Larson (2010, p. 70)

1. f está definida en c
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Las definiciones anteriores, además, se pueden reducir a la definición siguiente:

***(3) Definición de continuidad en un punto*[6]**

Una función f es continua en un punto c si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D(f)$ si $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Note que, a diferencia de la definición de límite, x ya no tiene por qué ser distinto a c, ya que se tiene $|x - c| < \delta$ y no $0 < |x - c| < \delta$. Además, al pasar de $|f(x) - L| < \varepsilon$ a $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ se está diciendo implícitamente que el límite de la función en c es $f(c)$.

Teniendo en cuenta esta definición de continuidad en un punto, la continuidad en un intervalo será la continuidad en todos los puntos de este (sea abierto o cerrado), la continuidad en la recta real será la continuidad de una función en todos los puntos de esta y, además, se dice que una función es continua en su dominio si es continua en todos los puntos en donde esta esté definida. A continuación, se enlistarán algunos ejemplos y teoremas sobre las funciones continuas; si desea conocer las respectivas demostraciones de los teoremas, puede dirigirse a los libros referenciados en cada uno.

Teorema 1.1[7]: Sean c y p cualquier número real con $p \neq 0$, si f y g son funciones continuas en c, entonces se cumple que:

[6] Ver Apóstol, (1991, p. 161)

i) $p \cdot f$
ii) $f + g$
iii) $f - g$
iv) $f \cdot g$
v) $\frac{f}{g}\ si\ g(c) \neq 0$

Son continuas en c.

Ejemplo 1.1: Funciones de la forma x^n con $n \in N$

Sea $f(x) = g(x) = x$.

Se cumple que $f(x)\ y\ g(x)$ son continuas en $c \in R$.

Utilizando la parte iv del Teorema 1.1, se cumple que $f(x) \cdot g(x) = x^2$ es continua en c.

Suponer que $h(x) = x^n$ es continua en c.

Veamos que $m(x) = x^{n+1}$ es continua en c. Por propiedades de la potenciación se cumple que $x^{n+1} = x^n \cdot x$ y esto es $m(x) = x^n \cdot x$. Como $f(x) = x\ y\ h(x) = x^n$, $m(x)$ se puede reescribir como $m(x) = h(x) \cdot f(x)$. Se sabe que $f(x)$ es continua en c y por hipótesis se tiene que $h(x)$ es continua en c, aplicando la parte iv del Teorema 1.1 se concluye que $m(x) = x^{n+1}$ es continua en c.

Demostrando así que cualquier función de la forma x^n con $n \in N$, es continua en c.

Ejemplo 1.2: Funciones racionales[8]

Dados dos polinomios $p(x)\ y\ q(x)$, la función racional $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es continua en c, siempre y cuando $q(c) \neq 0$. A modo de ejemplo se demostrará la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sea $q(x) = 1$, $q(x)$ es continua.

---

[7] Ver Larson, R (2010, p. 75)
[8] Ver Leithold, L. (1998, p. 72)

Sea $p(x) = x$, $p(x)$ es continua.

Entonces $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ y aplicando la parte v del Teorema 1.1, se cumple que $f(x)$ es continua en $c \neq 0$.

Teorema 1.2[9]: Sea c cualquier número real y sea $p = f(c)$. Si f es continua en c y g es continua en p, entonces la función $h = f \circ g$ es continua en c.

Teorema 1.3 (Teorema de Bolzano)[10]: Sea f continua en cada punto del intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$, existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Teorema 1.4 (Conservación del signo de las funciones continuas)[11]: Sea f continua en c. Si $f(c) \neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.

Teorema 1.5 (Teorema del valor intermedio)[12]: Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

Teorema 1.6[13]: Si f es continua en b y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$. Es decir, $\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(\lim_{x \to a} g(x))$.

Finalmente, para propósitos del trabajo se enunciará el teorema de desigualdad triangular.

[9] Ver Spivak, M. (1992, p. 145-146)
[10] Ver Apóstol, T. M. (1991, p. 175); Spivak, M. (1992, p)
[11] Ver Apóstol, T. M. (1991, p. 176)
[12] Ver Apóstol, T. M. (1991, p. 177), Spivak, M. (1992, p. 155)
[13] Ver Stewart, J. (1999, p. A45)

Teorema 1.7 (La desigualdad del triángulo)[14]: Si a, b son cualesquier números reales, entonces

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

2. Discontinuidad

Una función es discontinua en un punto cuando no se cumple la condición de continuidad, esto visto desde la lógica proposicional[15] es la negación de la proposición

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$$

Que resulta

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in D(f))(|x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon)$$

Definición de función discontinua en un punto

Una función f es discontinua en un punto c si y solamente si es posible encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x_δ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - c| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(c)| \geq \varepsilon$

2.1. Ejemplos de funciones discontinuas en c

Ejemplo 2.1.1: funciones donde $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} + 2, x < 2 \\ e^{(x-2)} + 3, x \geq 2 \end{cases}$

[14] Ver Bartle (1990, p. 54)

[15] Consultar en Muñoz Quévedo, J. M. (2014). Introducción a la teoría de conjuntos. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

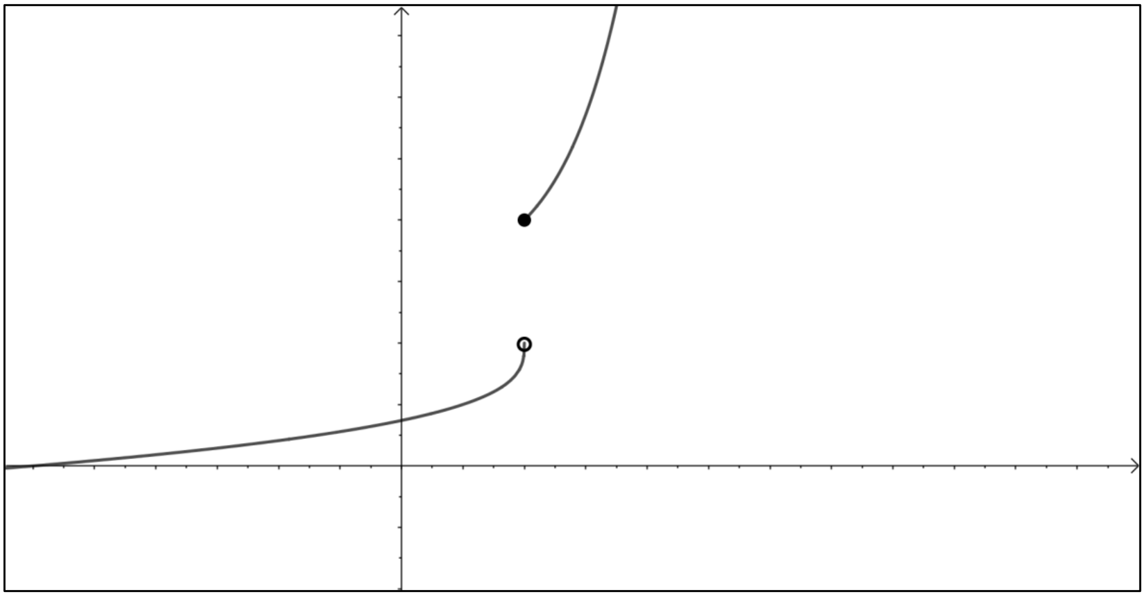

Gráfico 1. Representación de la función del literal a en el ejemplo 2.1.1

Demostración

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt[3]{x-2} + 2 = 2$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} e^{(x-2)} + 3 = 4$

Existe $\varepsilon = \frac{\left|\lim_{x \to 2^-} f(x) - \lim_{x \to 2^+} f(x)\right|}{2} = \frac{|2-4|}{2} = 1$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = 2 - \frac{\delta}{2}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 2| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(2)| \geq \varepsilon$, porque:

$$|x_\delta - 2| = \left|\left(2 - \frac{\delta}{2}\right) - 2\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right|$$

Como $\delta > 0$, $\left|\frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2}$ entonces $\left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$

Además $\delta > 0$ y $\frac{\delta}{2} > 0$ entonces $2 - \frac{\delta}{2} < 2$, por lo tanto $f(x_\delta)$ se evalúa en $\sqrt[3]{x-2} + 2$.

$$|f(x_\delta) - f(2)| = \left|\left(\sqrt[3]{\left(2 - \frac{\delta}{2}\right) - 2} + 2\right) - 4\right| = \left|-2 + \sqrt[3]{-\frac{\delta}{2}}\right|$$

Ahora bien, $\frac{\delta}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{\delta}{2} < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{\delta}{2}} < 0 \Rightarrow -2 + \sqrt[3]{-\frac{\delta}{2}} < -2$ y $|-2| > 1$, entonces $\left|-2 + \sqrt[3]{-\frac{\delta}{2}}\right| > 1$.

b) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} sen(2x), x \leq 0 \\ -(x^2 - 1), x > 0 \end{cases}}$

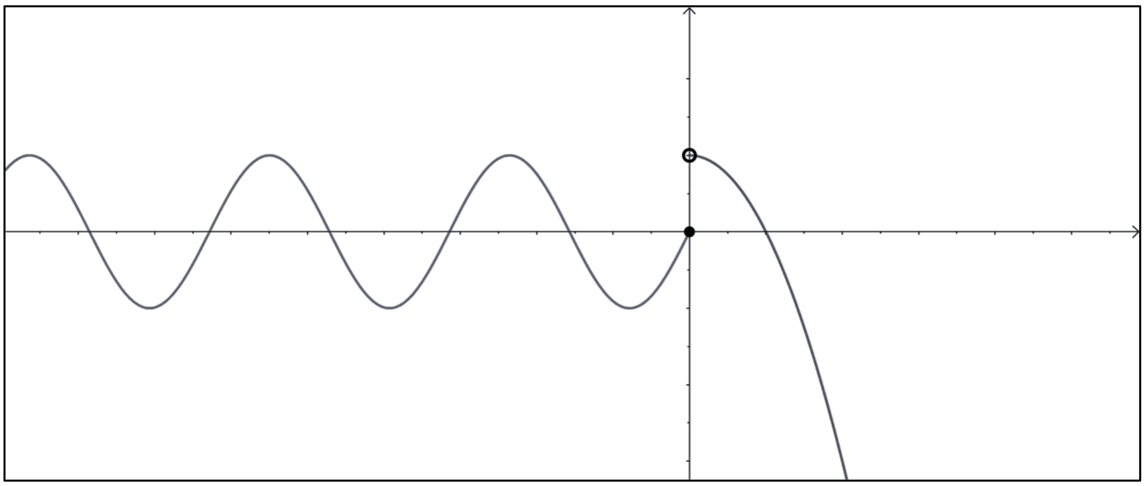

Gráfico 2. Representación de la función del literal b en el ejemplo 2.1.1

Demostración

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} sen(2x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -(x^2 - 1) = 1$

Sea $\varepsilon = \frac{\left|\lim_{x \to 0^-} f(x) - \lim_{x \to 0^+} f(x)\right|}{2} = \frac{|0-1|}{2} = \frac{1}{2}$

Se hace necesario hallar el punto de intersección entre $y = \frac{1}{2}$ y $y = -(x^2 - 1)$, ya que si δ es mayor a la abscisa de este punto existirán algunos valores para x_δ que cumplen que $|x_\delta - 0| < \delta$ y que no cumplen que $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$, como se puede ver en el gráfico 3.

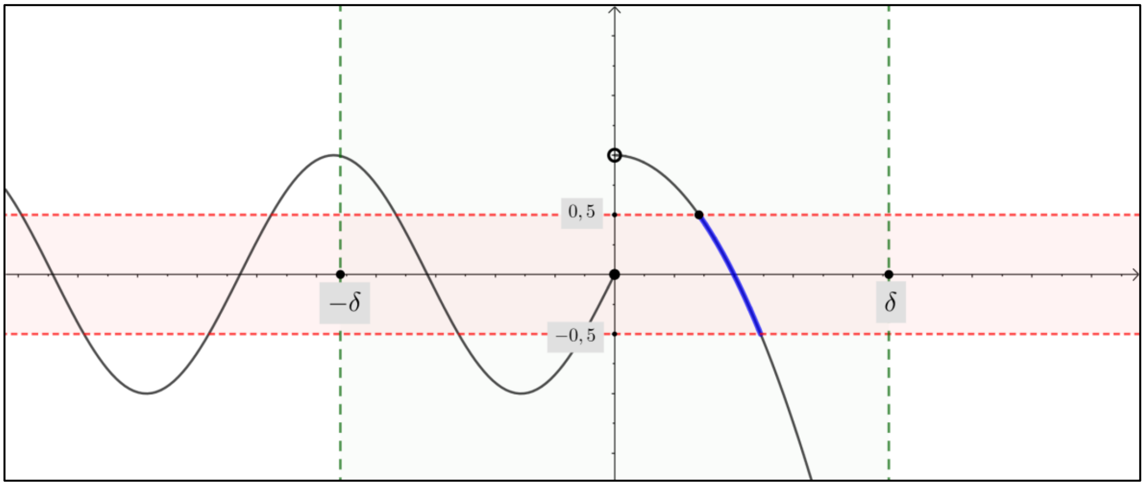

Gráfico 3. Valores para x_δ que nos satisfacen las condiciones necesarias de la función del literal b en el ejemplo 2.1.1

Entonces:

$-(x^2-1)=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=1-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ y como $f(x)=-(x^2-1)$ para $x>0$, entonces el valor de la abscisa es $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Caso 1: $\boldsymbol{\delta \leq \sqrt{\frac{1}{2}}}$

Existe $\varepsilon=\frac{\left|\lim_{x\to 0^-} f(x)-\lim_{x\to 0^+} f(x)\right|}{2}=\frac{|0-1|}{2}=\frac{1}{2}$ tal que para todo $\delta>0$ existe $x_\delta=\frac{\delta}{2}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta-0|<\delta$ y $|f(x_\delta)-f(0)|\geq\varepsilon$, porque:

$$|x_\delta-0|=\left|\frac{\delta}{2}-0\right|=\left|\frac{\delta}{2}\right|<\delta$$

Como $\delta>0$ se cumple que $\frac{\delta}{2}>0$ y por tanto $x_\delta>0$, así que $f(x_\delta)$ se evalúa en $-(x^2-1)$.

$$|f(x_\delta)-f(0)|=|(-({x_\delta}^2-1))-0|=\left|\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-1\right|$$

Suponer que $\left|\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - 1\right| < \frac{1}{2}$

$$\left|\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - 1\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - 1\right|^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - 1\right)^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta^4}{16} - \frac{\delta^2}{2} + 1 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\delta^4}{16} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \delta^4 - 8\delta^2 + 12 < 0 \Rightarrow (\delta^2 - 6)(\delta^2 - 2) < 0$$

$$(\delta - \sqrt{6})(\delta + \sqrt{6})(\delta - \sqrt{2})(\delta - \sqrt{2}) < 0$$

$(\delta - \sqrt{6})$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(\delta + \sqrt{6})$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(\delta - \sqrt{2})$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(\delta + \sqrt{2})$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$-\sqrt{6}$ $\quad -\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad \sqrt{6}$

$\delta \in (-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$ o $\delta \in (\sqrt{2}, \sqrt{6})$

Pero se tiene que $\delta > 0$ por lo tanto se descarta el primer intervalo solución, además se sabe que $\delta \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$ entonces se descarta el segundo intervalo solución, es decir, la solución lleva a una contracción, por lo que el supuesto $\left|\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - 1\right| < \frac{1}{2}$ es falso, por lo tanto, se cumple que $\left|\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - 1\right| \geq \frac{1}{2}$

Caso 2: $\boldsymbol{\delta > \sqrt{\frac{1}{2}}}$

Existe $\varepsilon = \frac{\left|\lim_{x\to 0^-} f(x) - \lim_{x\to 0^+} f(x)\right|}{2} = \frac{|0-1|}{2} = \frac{1}{2}$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$, porque:

$$|x_\delta - 0| = \left|\frac{\sqrt{2}}{4} - 0\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{4}\right|$$

Como $\frac{\sqrt{2}}{4} < \sqrt{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{\frac{1}{2}} < \delta$, se tiene que $\frac{\sqrt{2}}{4} < \delta$, además $\frac{\sqrt{2}}{4} > 0$, lo que implica que $\left|\frac{\sqrt{2}}{4}\right| < \delta$.

Como $\frac{\sqrt{2}}{4} > 0$, $f(x_\delta)$ se evalúa en $-(x^2 - 1)$.

$$|f(x_\delta) - f(0)| = \left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - f(0)\right| = \left|-\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1\right)\right| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1\right| = \left|\frac{1}{8} - 1\right| = \left|-\frac{7}{8}\right|$$

$$= \left|\frac{7}{8}\right|$$

Como $0 < \frac{1}{2} < \frac{7}{8}$ entonces $\left|\frac{7}{8}\right| > \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Finalmente, se concluye que para $f(x) = \begin{cases} sen(2x), x \leq 0 \\ -(x^2 - 1), x > 0 \end{cases}$ existe $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$.

c) $\boldsymbol{f(x) = [\![x]\!]}$

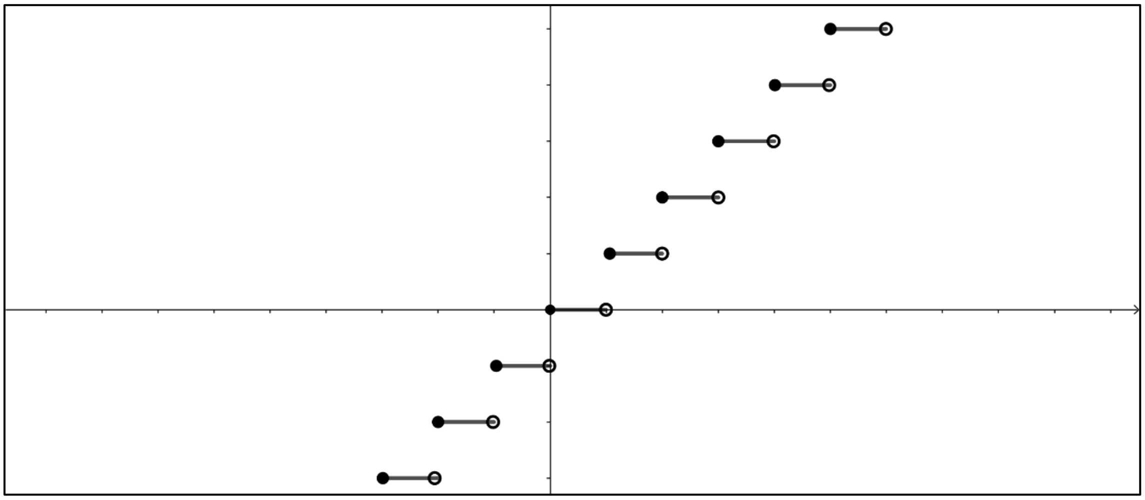

Gráfico 4. Representación de la función del literal c en el ejemplo 2.1.1.

Esta función es discontinua en todo $c \in \mathbb{Z}$.

Demostración

Existe $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = c - \frac{\delta}{2}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - c| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(c)| \geq \varepsilon$.

$$|x_\delta - c| = \left|\left(c - \frac{\delta}{2}\right) - c\right| = \left|-\frac{\delta}{2}\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

$$|f(x_\delta) - f(c)| = \left|f\left(c - \frac{\delta}{2}\right) - f(c)\right|$$

Como $\delta > 0$ entonces $\frac{\delta}{2} > 0$ y $c - \frac{\delta}{2} < c$

Aplicando f(x) $=$ ⟦x⟧ se tiene que $f\left(c - \frac{\delta}{2}\right) = k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $k < c$.

Debido a que $k < c$ y $k, c \in \mathbb{Z}$ se cumple que $|k - c| \geq 1$ así pues

$$\left|f\left(c - \frac{\delta}{2}\right) - f(c)\right| = |k - c| > \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.1.2: Función donde $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x^3 - 1}}{\boldsymbol{x - 1}}, \boldsymbol{x \neq 1} \\ \boldsymbol{1, x = 1} \end{cases}$$

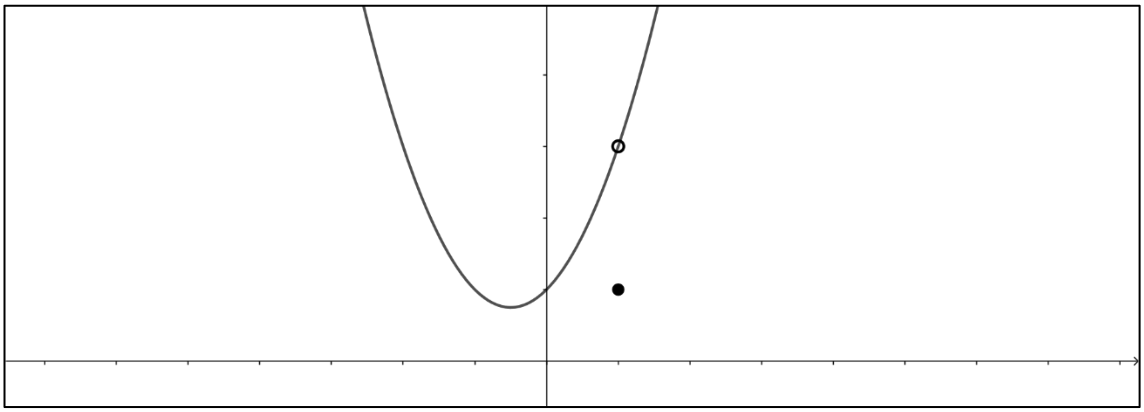

Gráfico 5. Representación de la función del ejemplo 2.1.2

Demostración

Existe $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = 1 + \frac{\delta}{2}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 1| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(1)| \geq \varepsilon$ porque:

$$|x_\delta - 1| = \left|1 + \frac{\delta}{2} - 1\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

$$|f(x_\delta) - f(1)| = \left|\frac{\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^3 - 1}{1 + \frac{\delta}{2} - 1} - 1\right| = \left|\frac{\left(\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - 1\right)\left(\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) + 1\right)}{1 + \frac{\delta}{2} - 1} - 1\right|$$

Como $\frac{\delta}{2} > 0$ entonces $1 + \frac{\delta}{2} - 1 \neq 0$

$$\left|\left(\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) + 1\right) - 1\right| = \left|\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)\right| = \left|1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} + 1 + \frac{\delta}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{\delta^2}{4} + \frac{3\delta}{2} + 2\right|$$

Como $\frac{\delta^2}{4} > 0$, $\frac{3\delta}{2} > 0$ y $2 > \frac{1}{2}$ se cumple que

$$\frac{3\delta}{2} + 2 > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\delta^2}{4} + \frac{3\delta}{2} + 2 > \frac{1}{2} > 0$$

Entonces

$$\left|\frac{\delta^2}{4} + \frac{3\delta}{2} + 2\right| > \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.1.3: Función donde $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}}$$

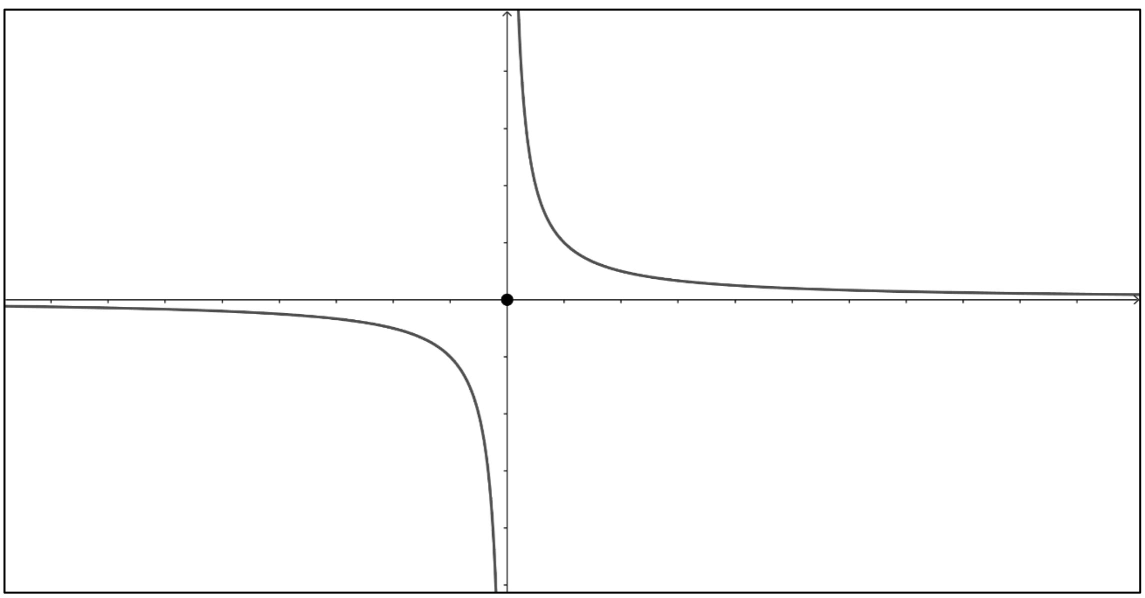

Gráfico 6. Representación de la función del ejemplo 2.1.3

Demostración

Sea $\varepsilon = 1$

Se hace necesario hallar el punto de intersección entre $y = 1$ y $y = \frac{1}{x}$, ya que si δ es mayor a la abscisa de este punto existirán algunos valores para x_δ que cumplen que $|x_\delta - 0| < \delta$ y que no cumplen que $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$

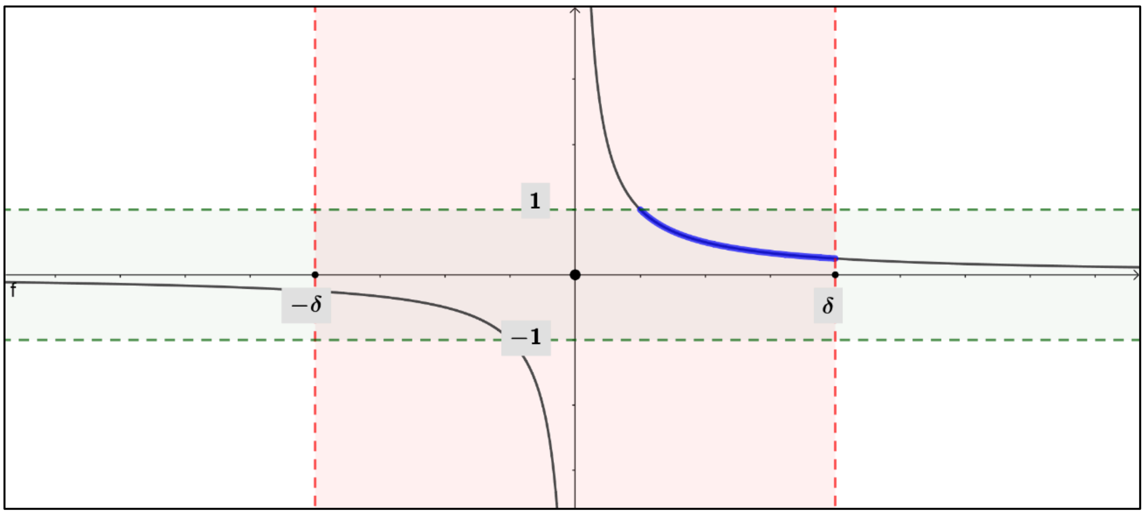

Gráfico 7. Valores para x_δ que no satisfacen las condiciones necesarias en la función del ejemplo 2.1.3

Entonces:

$$\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

Caso 1: $\boldsymbol{\delta \leq 1}$

Existe $\varepsilon = 1$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$.

$$|x_\delta - 0| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

$$|f(x_\delta) - f(0)| = \left|\frac{1}{\frac{\delta}{2}} - 0\right| = \left|\frac{2}{\delta}\right|$$

Como $0 < \delta < 1$ entonces

$$\frac{1}{\delta} > 1 > 0$$

$$\frac{2}{\delta} > 2 > 0$$

$$\left|\frac{2}{\delta}\right| > 2$$

Caso 2: $\boldsymbol{1 < \delta}$

Existe $\varepsilon = 1$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = \frac{1}{2}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$.

$$|x_\delta - 0| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

$$|f(x_\delta) - f(0)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{2}} - 0\right| = |2| \geq 1$$

Existe $\varepsilon = 1$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}$ en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$.

Ejemplo 2.1.4: Función oscilante

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{sen\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0} \\ \boldsymbol{0, x = 0} \end{cases}$$

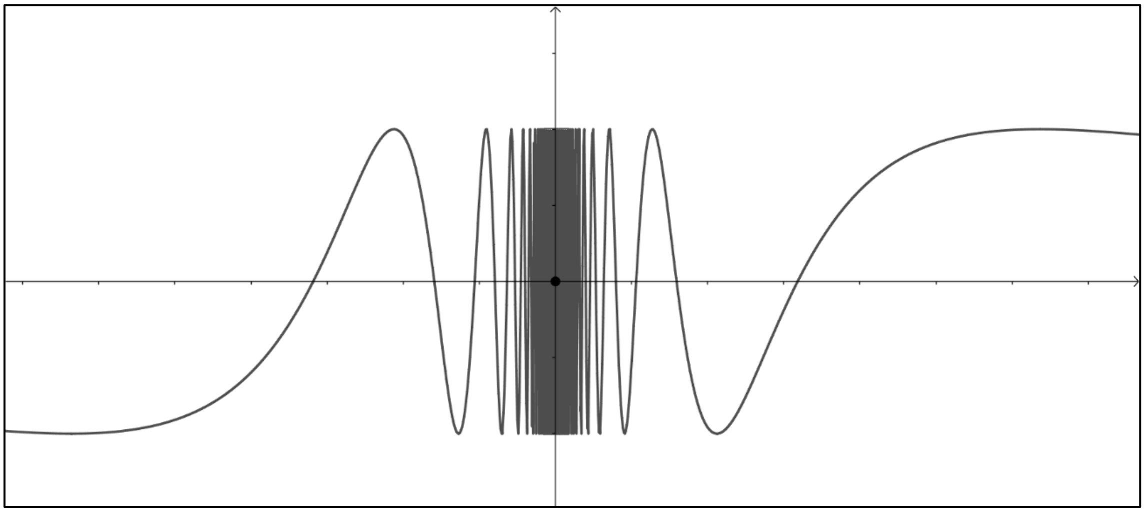

Gráfico 8. Representación de la función del ejemplo 2.1.4

Para demostrar que esta función es discontinua se hará uso del siguiente teorema auxiliar, cuya demostración se presenta por contradicción.

Teorema auxiliar: Para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{2}{(2n+1)\pi}$.

Suponer que $\delta \leq \frac{2}{(2n+1)\pi}$ para todo n de $\mathbb{N}$, así pues

$$\frac{(2n+1)\pi}{2} \leq \frac{1}{\delta}$$

$$2n+1 \leq \frac{2}{\delta\pi}$$

$$n \leq \frac{2}{2\pi\delta} - \frac{1}{2}$$

$$n \leq \frac{2-\pi\delta}{\pi\delta}$$

Es decir que $\frac{2-\pi\delta}{\pi\delta}$ es cota superior de $\mathbb{N}$ lo cual es falso, quedando demostrado el teorema.

Ahora, continuando con la demostración que compete a este ejemplo:

Existe $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = \frac{2}{(2n+1)\pi} < \delta$en el dominio de $f(x)$, que cumple que $|x_\delta - 0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(0)| \geq \varepsilon$

$$|x_\delta - 0| = \left|\frac{2}{(2n+1)\pi}\right| < \delta$$

$$|f(x_\delta) - f(0)| = \left|f\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right) - f(0)\right| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{2}{(2\mathrm{n}+1)\pi}}\right) - 0\right| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right|$$

Como $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = 1$ o -1 así pues $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right| = 1$ entonces

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{2}$$

3. Funciones de clase 1

La primera noción relacionada con la definición de continuidad que se abordará es aquella que surge al intercambiar el orden de los cuantificadores, que resulta siendo un cambio en el orden de la elección de los intervalos.

(1) Definición de función de clase 1 en c ($C1$)

Una función f es $C1$ en un punto c si y solamente si para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo x en el dominio de $f(x)$, si $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

3.1. Ejemplos de funciones $C1$ en c

3.1.1. Ejemplos de funciones continuas en c y $C1$ en c

Ejemplo 3.1.1: Funciones constantes

Sea ***a*** cualquier número real, se define la función $f(x) = a$ constante **y** sea c cualquier punto de la recta real, se cumple que para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon = \delta$ tal que para todo c del dominio de $f(x)$, si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Demostración

Dado $\delta > 0$ definimos $\varepsilon = \delta$

Tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| = |a - a| = 0 < \delta = \varepsilon$

Así

$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ siempre que $|x - c| < \delta$

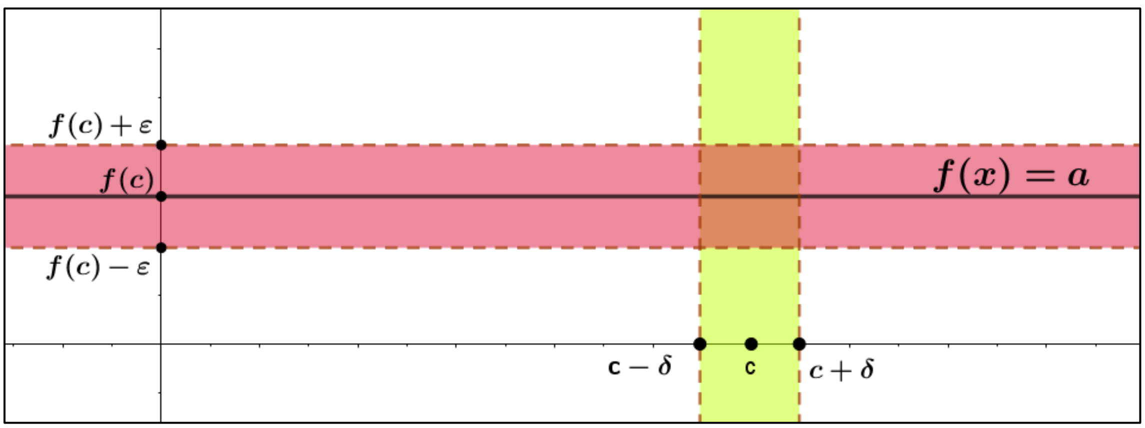

Gráfico 9. Las funciones constantes son C1 en c

Ejemplo 3.1.2: Funciones lineales

Sean a y b cualesquiera números reales con $a \neq 0$, $f(x) = ax + b$ una función lineal y c cualquier real, se cumple que para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon = |a|\delta$ tal que para todo c del dominio de $f(x)$, si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Demostración

Dado $\delta > 0$ se define $\varepsilon = |a|\delta$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, porque:

$$|f(x) - f(c)| = |(ax + b) - (ac + b)|$$

$$= |ax + b - ac - b|$$

$$= |ax - ac|$$

$$= |a(x - c)|$$

$$= |a||x - c|$$

$$= |a||x - c| < |a|\delta = \varepsilon$$

Así, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ siempre que $|x - c| < \delta$

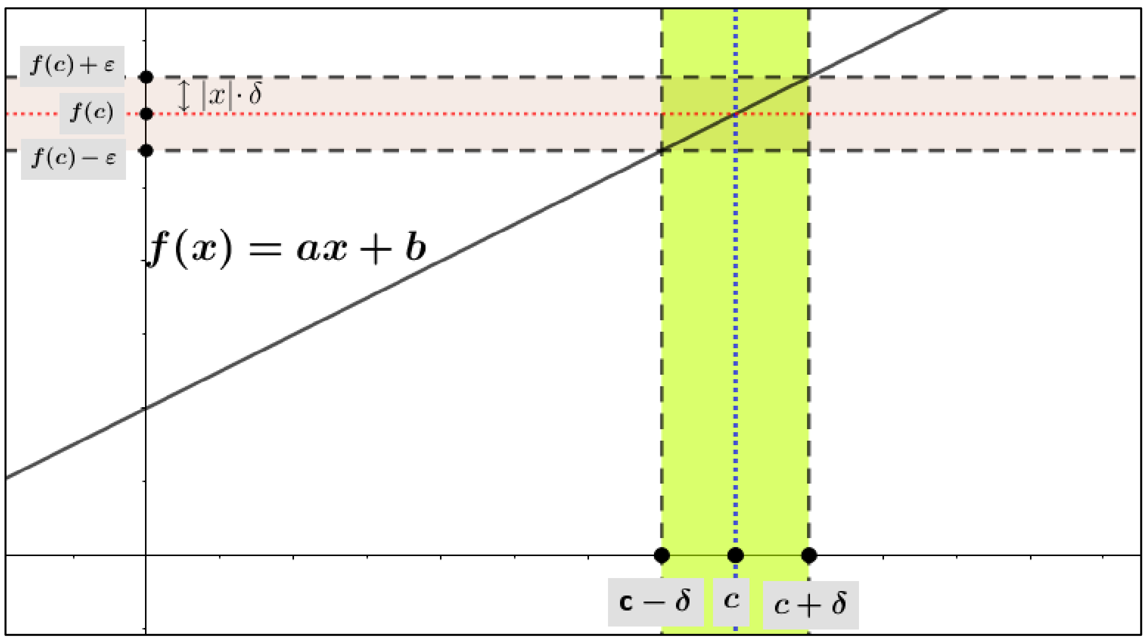

Gráfico 10. Las funciones lineales son C1 en c

Ejemplo 3.1.3: La función x^2

Sea $f(x) = x^2$ y c cualquier número real, se cumple que para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon = min\{1, \delta(2|c| + 1)\}$, tal que para todo c del dominio de $f(x)$, si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Demostración

Dado $\delta > 0$ se define $\varepsilon = min\{1, \delta(2|c| + 1)\}$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, porque:

$|f(x) - f(c)| = |x^2 - c^2| = |x - c||x + c|$

Debido a que $|x - c| < \delta$, se cumple que $|x - c||x + c| < \delta|x + c|$

Ahora se supone que $|x - c| < 1$, de donde se obtiene que:

$-1 < x - c < 1$

$-1 + 2c < x + c < 1 + 2c$

$-1 + 2c < x + c < 1 + 2c \leq 1 + 2|c|$

Por la propiedad transitiva de los números reales, se tiene que $-1 + 2c < 1 + |c|$ y, por tanto $|x + c| < 1 + 2|c|$.

Concluyendo así que $|x - c||x + c| < \delta(1 + 2|c|) = \varepsilon$.

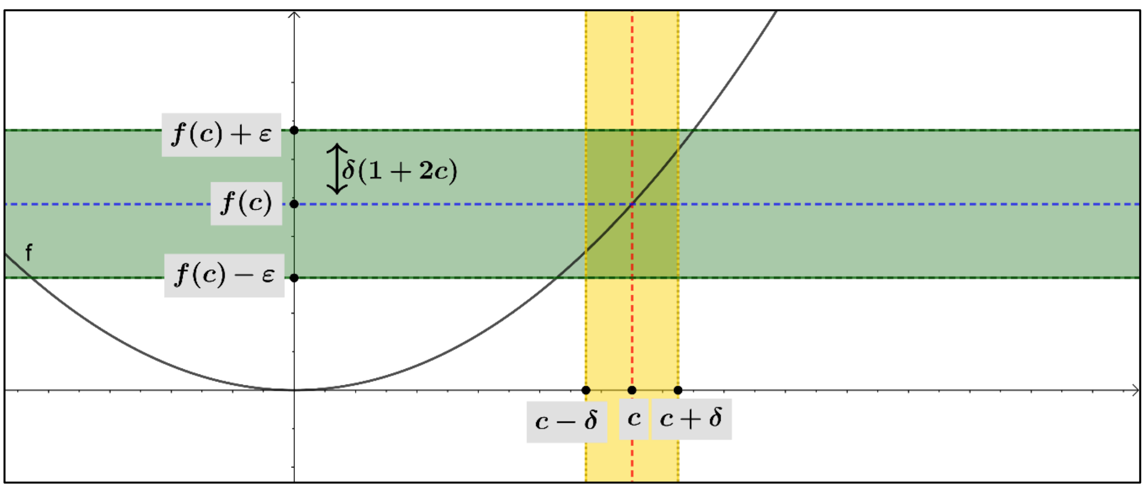

Gráfico 11. La función x^2es $C1$ en c

Una vez clasificadas ciertas funciones en $C1$, resulta relevante presentar algunas propiedades (teoremas) que cumplen todas estas funciones y que nos permitirán clasificarlas completamente.

Teorema 3.1.1: Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones $C1$ en c, y p cualquier real distinto de cero, se cumple que:

a) $h(x) = p \cdot f(x)$
b) $h(x) = f(x) + g(x)$
c) $h(x) = f(x) - g(x)$

Es $C1$ en c.

Demostración

Para realizar las respectivas demostraciones resulta relevante recordar la definición de función de clase 1:

Una función f es $C1$ en un punto c si y solamente si para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo c del dominio de $f(x)$, si $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

a) $\boldsymbol{h(x) = p \cdot f(x)}$ **es** $\boldsymbol{C1}$ **en** $\boldsymbol{c}$

Como $f(x)$ es $C1$ en c se tiene que existe ε_1 tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon_1$, así pues

$$|p| \cdot |f(x) - f(c)| < \varepsilon_1 \cdot |p| \Rightarrow |p \cdot (f(x) - f(c)| < \varepsilon_1 \cdot |p|$$

$$\Rightarrow |p \cdot f(x) - p \cdot f(c)| < \varepsilon_1 \cdot |p|$$

Sea $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot |p|$, además $h(x) = p \cdot f(x)$, se cumple que:

$$|p \cdot f(x) - p \cdot f(c)| = |h(x) - h(c)| < \varepsilon$$

Entonces el producto de un escalar por una función $C1$ en c, es $C1$ en c.

b) $\boldsymbol{h(x) = f(x) + g(x)}$ es de $\boldsymbol{C1}$ en $\boldsymbol{c}$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son $C1$ en c, se tiene que existe $\varepsilon_1\ y\ \varepsilon_2$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon_1$ y $|g(x) - g(c)| < \varepsilon_2$, de donde $|f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Haciendo uso de la desigualdad triangular, se obtiene

$$|f(x) - f(c) + g(x) - g(c)| \leq |f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)|$$

Por la propiedad transitiva, se cumple que

$$|f(x) - f(c) + g(x) - g(c)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Sea $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, además $h(x) = f(x) + g(x)$, se cumple que

$$|(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))| = |h(x) - h(c)| < \varepsilon$$

Entonces, la suma de funciones $C1$ en c, es $C1$ en c.

c) $\boldsymbol{h(x) = f(x) - g(x)}$ es $\boldsymbol{C1}$ en $\boldsymbol{c}$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son $C1$ en c, se tiene que existe ε_1 y ε_2 tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon_1$ y $|g(x) - g(c)| < \varepsilon_2$, de donde $|f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $|a - b| \leq |a| + |b|$, se cumple que

$$|(f(x) - f(c)) - (g(x) - g(c))| < |f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)|$$

Por la propiedad transitiva, se tiene

$$|(f(x) - f(c)) - (g(x) - g(c))| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow |(f(x) - g(x)) - (f(c) - g(c))| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Sea $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, además $h(x) = f(x) - g(x)$, se cumple que

$$|(f(x) - g(x)) - (f(c) - g(c))| = |h(x) - h(c)| < \varepsilon$$

Entonces, la diferencia de funciones $C1$ en c, es $C1$ en c.

Ejemplo 3.1.4: Funciones cuadráticas

Sean a, b, c y d cualquier número real con $a \neq 0$, se define la función $f(x) = ax^2 + bx + d$ en donde se cumple que para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$, tal que para todo c del dominio de $f(x)$, si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Demostración

Sea la función $h(x) = x^2$ que por ejemplo 2.3 se sabe que es $C1$ y por la parte a del teorema 2.1 se cumple que $a \cdot h(x)$ también es $C1$, es decir que $a \cdot x^2$ es $C1$.

En el ejemplo 2.2 se demostró que cualquier función lineal también es $C1$, entonces la función $g(x) = bx + d$ también es $C1$.

Finalmente, utilizando la parte b del teorema 2.1 se puede concluir que $f(x) = a \cdot h(x) + g(x)$ es $C1$, es decir que $f(x) = a \cdot x^2 + bx + d$ es $C1$.

3.1.2. Funciones discontinuas en c y $C1$ en c

Ejemplo 3.1.2.1: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{sen\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0} \\ \boldsymbol{0, x = 0} \end{cases}$

Esta función es discontinua en $c = 0$, pero es $C1$ en este punto.

Dado $\delta > 0$ se define $\varepsilon = 1{,}5$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Demostración

$|f(x) - f(c)| = \left|sen\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = \left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1{,}5;$ porque $-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

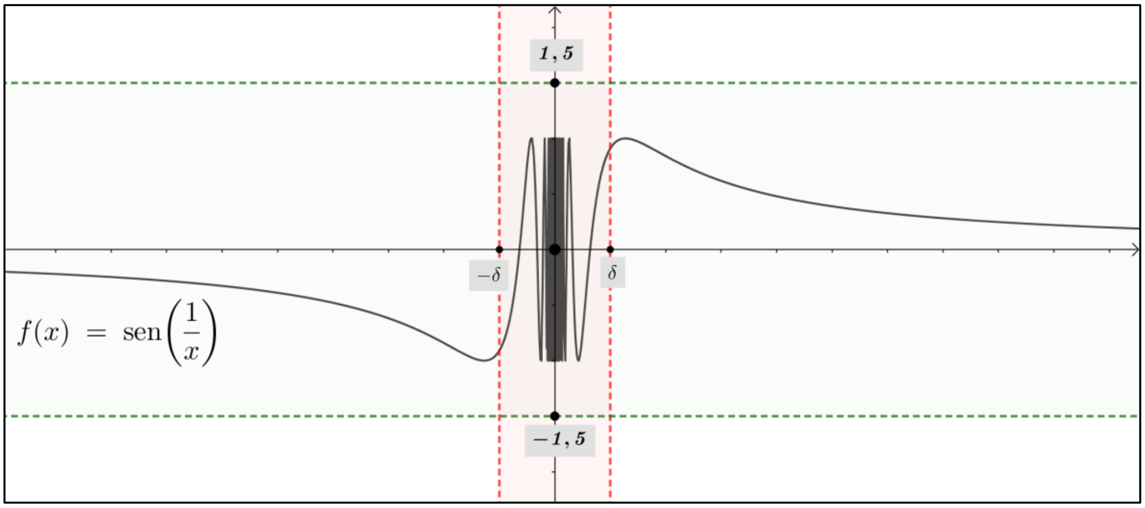

Gráfico 12. Representación de la función del ejemplo 3.1.2.1

Ejemplo 3.1.2.2. $[\![x]\!]$

Esta función es discontinua en todo c que pertenece al conjunto de los números enteros.

Dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon = \delta + 1$ tal que para todo x si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Demostración

$|f(x) - f(c)| = |[\![x]\!] - [\![c]\!]| = |[\![x]\!] - c|$, así pues como $|x - c| < \delta$ para todo δ además $[\![x]\!] \leq x \Longrightarrow [\![x]\!] - c \leq x - c$ luego

$|[\![x]\!] - c| \leq |x - c| < \delta < \delta + 1 = \varepsilon$ o $|x - c| \leq |[\![x]\!] - c| < \delta < \delta + 1 = \varepsilon$

Así, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ siempre que $|x - c| < \delta$.

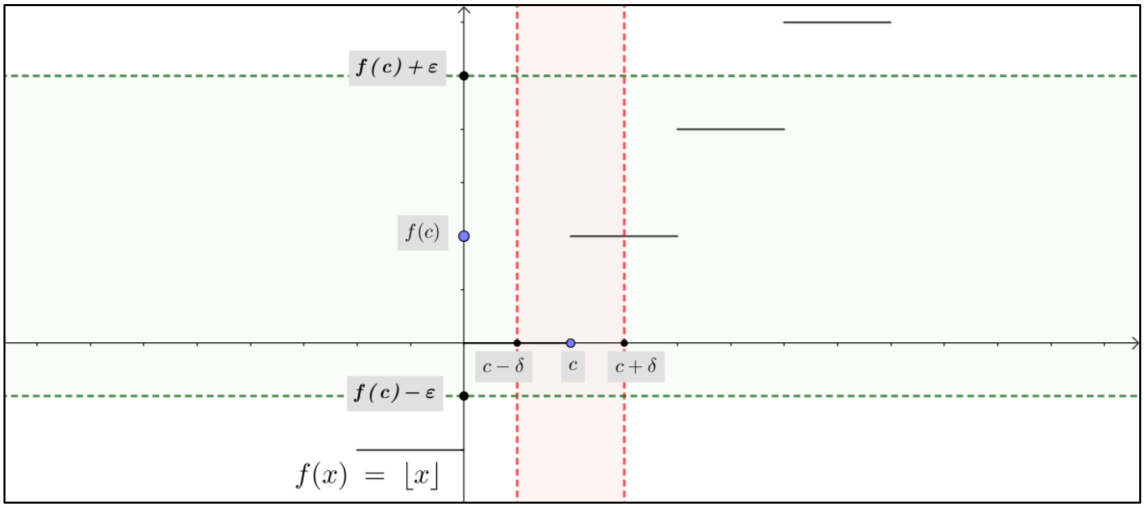

Gráfico 13. Representación de la función del ejemplo 3.1.2.2

3.2. Ejemplo de función que no es $C1$ en c

Las funciones que no son $C1$, deben satisfacer la negación de la definición de funciones $C1$, que es:

$$(\exists\delta > 0)(\forall\varepsilon > 0)(\exists x_\delta \in D(f))(x_\delta < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(c)| \geq \varepsilon)$$

Es decir, que debe existir al menos un entorno alrededor de c (con radio δ) tal que por más grande (o pequeño) que se escoja un entorno alrededor de $f(c)(\text{con radio } \varepsilon)$, siempre va a ser posible encontrar un x_δ en el entorno de c tal que $f(x_\delta)$ está por fuera del entorno de $f(c)$.

Ejemplo 3.2.1: La función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$

Para analizar esta función se escogerá $c = 0.1$ y $\delta = 1$, es decir que el entorno alrededor de c es el intervalo $[-0.99,1.01]$ sobre el eje x. Ahora, sea $\varepsilon = 1000$, teniendo así que el entorno alrededor de $f(c)$ es el intervalo $[-990,1010]$ sobre el eje y.

En este caso se puede encontrar $x = \frac{1}{1500}$ que pertenece al intervalo $[-0.99, 1.01]$, y en consecuencia se tiene que $f\left(\frac{1}{1500}\right) = 1500$, valor que no pertenece al intervalo $[-990, 1010]$.

Siguiendo este razonamiento será posible escoger cualquier valor de ε aún más grande como $\varepsilon = 1'000.000$ y nuevamente existirá algún x, como $x = \frac{1}{2'000.000}$ que pertenezca a $[-0.99, 1.01]$ y que cumple que $f\left(\frac{1}{2'000.000}\right) = 2'000.000$, valor que no pertenece al intervalo $[-999.990, 1'000.010]$.

Finalmente, este proceso se podrá repetir indefinidamente (haciendo mayor a ε) y siempre se podrá encontrar algún valor de x en donde $f(x)$ no pertenezca al entorno de $f(c)$.

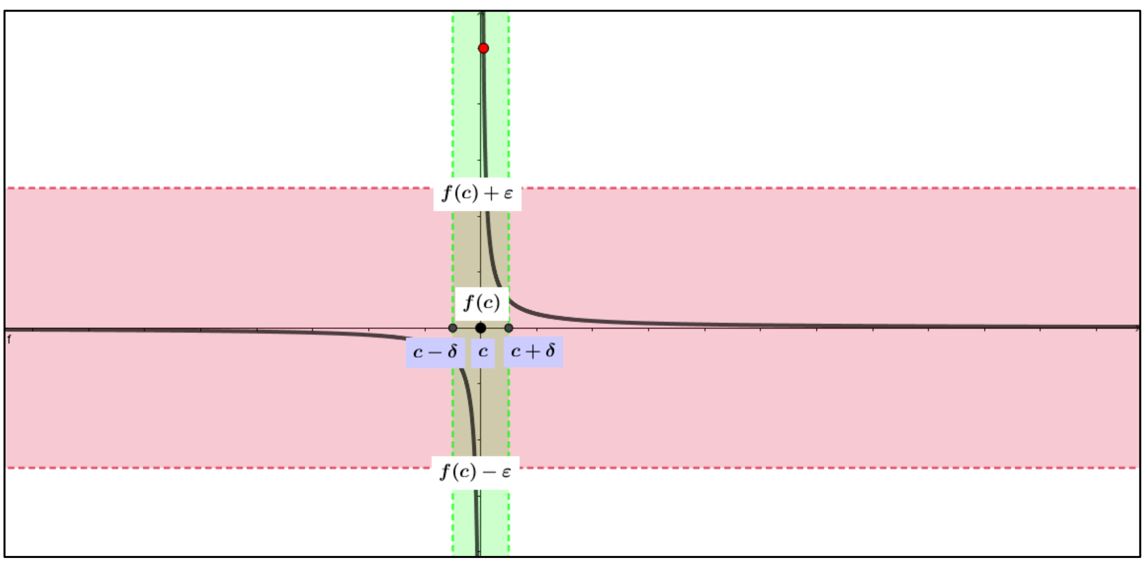

Gráfico 14. La función del ejemplo 3.2.1 no es C1 en c

Nota: Este también es un ejemplo de una función discontinua en c y que no es $C1$ en c. Esto se puede comprobar mediante un razonamiento análogo tomando a c como $c = 0$.

3.3. Propiedades y características de las funciones $C1$

Teniendo en cuenta el ejemplo 3.2.1, se puede pensar que las funciones con asíntota vertical no son $C1$ en ningún c.

Teorema 3.3.1: Si $f(x)$ es una función con asíntota vertical en b, entonces $f(x)$ no es $C1$ para todo c en el dominio de $f(x)$.

Como $f(x)$ tiene asíntota vertical, suponer que $\lim_{x \to b+} f(x) = \infty$

Tómese un número c que pertenece al dominio de $f(x)$; existe $\delta > 0$ tal que b pertenece al intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, como se muestra en el siguiente gráfico

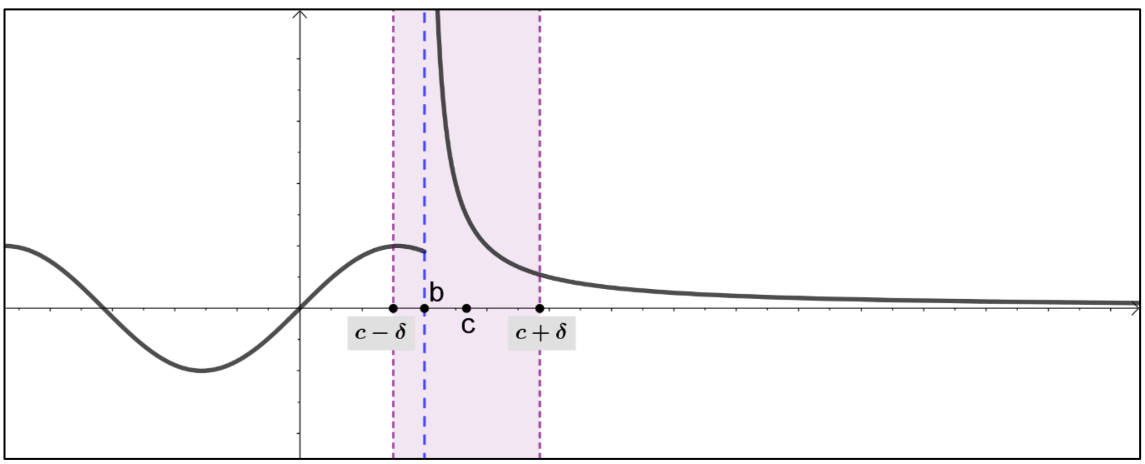

Gráfico 15. Apoyo visual #1 para la demostración del teorema 3.3.1

Como b pertenece al entorno de c, entonces para cualquier valor que tome $\varepsilon > 0$ existe un valor en $(c - \delta, c + \delta)$ tal que su imagen esta por fuera del entorno $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$,

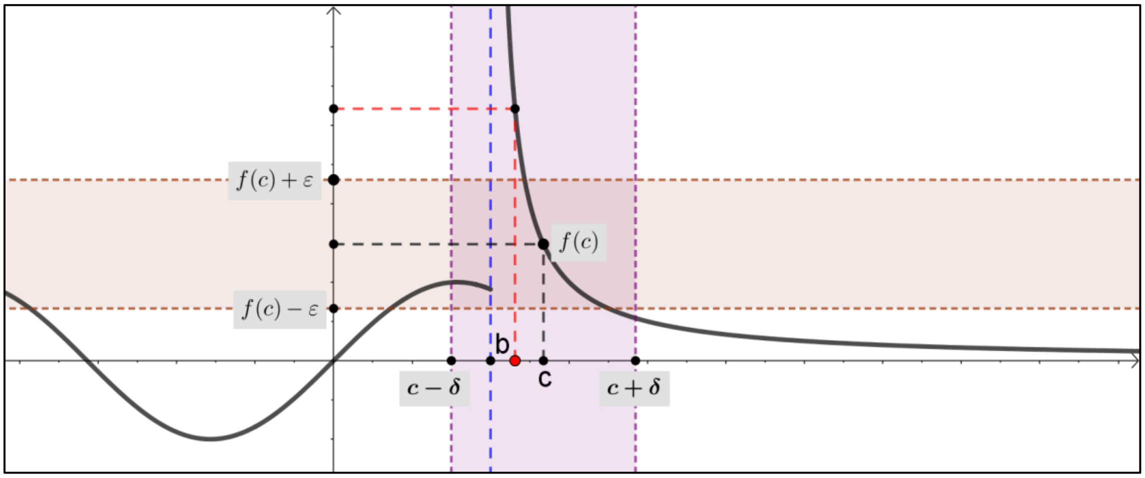

Gráfico 16. Apoyo visual #2 para la demostración del teorema 3.3.1

Esto se garantiza debido a que $\lim_{x\to b+} f(x) = \infty$, lo que permite afirmar que para $M = |f(c)| + \varepsilon$ hay un número δ_1 tal que si $b < x < b + \delta_1$ entonces $f(x) > M$, así pues $f(x) > M \Rightarrow f(x) > |f(c)| + \varepsilon \Rightarrow f(x) - |f(c)| > \varepsilon$

Además $f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) - |f(c)| \leq |f(x)| - |f(c)|$ al utilizar la desigualdad triangular se tiene $f(x) - |f(c)| \leq |f(x)| - |f(c)| \leq |f(x) - f(c)|$ y por transitividad $f(x) - |f(c)| \leq |f(x) - f(c)|$ como también $f(x) - |f(c)| > \varepsilon$, nuevamente por transitividad $\varepsilon < |f(x) - f(c)|$. Como b pertenece al intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ se cumple que $b < x < b + \delta_1 \leq c + \delta$ o $b < x < c + \delta \leq b + \delta_1$, en ambos casos existe $\delta > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe x tal que $|x - c| < \delta$ y $|f(x) - f(c)| > \varepsilon$, por lo tanto $f(x)$ no es $C1$.

De manera análoga se puede demostrar que si $f(x)$ es una función con algún b tal que cumple alguna de las otras cinco condiciones, entonces $f(x)$ no es $C1$ para todo c en el dominio de $f(x)$.

Corolario 3.3.1: De lo anterior se puede concluir que:

1) No toda función continua en c es de C1 en c.

2) Toda función racional cuyo denominador se haga cero en algún valor, no es de C1 en cualquier c.

3) Mediante la negación del teorema 3.3.1 se tiene que si $f(x)$ es $C1$ en c, entonces $f(x)$ no tiene asíntota vertical.

Teorema 3.3.2: Si $f(x)$ es una función sin asíntota vertical, entonces $f(x)$ es $C1$ en todo c de su dominio.

La demostración de este teorema se hará por contradicción.

Suponer que $f(x)$ no es $C1$, esto es $(\exists \delta > 0)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists x)$ tal que $|x - c| < \delta$ y $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$, haciendo uso de la desigualdad triangular, se tiene que $|f(x) - f(c)| \geq |f(x)| - |f(c)|$, como es para todo épsilon se puede afirmar $|f(x) - f(c)| \geq |f(x)| - |f(c)| \geq \varepsilon$ así pues

$$|f(x)| - |f(c)| \geq \varepsilon$$

$$|f(x)| - |f(c)| + |f(c)| \geq \varepsilon + |f(c)|$$

$$|f(x)| \geq \varepsilon + |f(c)|$$

Sea $M = \varepsilon + |f(c)|$ entonces

$$|f(x)| \geq M$$

Por lo que se puede concluir que para $M = \varepsilon + |f(c)|$ existe δ, x tal que $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x)| \geq M$,lo que significa que $f(x)$ tiene asíntota vertical, de esta manera al negar el consecuente se tiene una contradicción en el antecedente, lo que permite demostrar la veracidad de esta proposición.

Los dos teoremas anteriores (2.2 y 2.3) constituyen una caracterización de las funciones $C1$, la cual es:

(2) ***Definición de función de clase 1 en c (C1)***

Una función $f(x)$ es $C1$ en c, si y solamente si no tiene asíntota vertical.

Ejemplo 3.3.1: Las funciones con discontinuidad removible, de salto u oscilantes son $C1$. Esto se puede afirmar porque ninguna de estas discontinuidades se debe a alguna asíntota vertical.

Teorema 3.3.3: Si $f(x)$ es una función acotada en cada uno de sus puntos, entonces $f(x)$ no tiene asíntota vertical.

La demostración de este teorema se hará por contradicción.

Suponer que $f(x)$ tiene asíntota vertical, así que, particularmente, para algún b se cumple que $\lim_{x \to b+} f(x) = \infty$; como $f(x)$ está acotada en todos sus puntos, especialmente lo está en b, lo que permite afirmar que existe $\delta > 0, m, M$ tal que para todo $x,$ si $|x - b| < \delta$ entonces $m \leq f(x) \leq M$, pero como $\lim_{x \to b+} f(x) = \infty$ entonces para M existe δ_1, tal que $M \leq f(x)$ siempre que $b < x < b + \delta_1$, como $b + \delta_1$ puede ser mayor o menor a $b + \delta$ se tiene que $b < x < b + \delta_1 \leq b + \delta$ o $b < x < b + \delta \leq b + \delta_1$, en ambos casos se cumple que $f(x) \leq M$ y $M \leq f(x)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, el supuesto es falso, es decir que $f(x)$ no tiene asíntota vertical.

De manera análoga se puede demostrar que si $f(x)$ es una función acotada en todos sus puntos entonces $f(x)$ no tiene asíntota vertical, con alguna de las otras cinco condiciones para tener asíntota vertical.

Teorema 3.3.4: Si $f(x)$ no tiene asíntota vertical, entonces $f(x)$ es acotada en cada uno de los puntos de su dominio.

La demostración de este teorema se hará por contradicción.

Suponer que $f(x)$ no es acotada en cada uno de sus puntos, es decir que existe al menos algún a en el dominio de $f(x)$ tal que para todo $\delta > 0, m, M$ se cumple que $|x - a| < \delta\ y\ (f(x) < m\ o\ f(x) > M)$. Como lo anterior se cumple para todo $\delta, m\ y\ M$, entonces para cualquier M existirá un δ_M tal que $|x - a| < \delta_M\ y\ f(x) > M$, es decir que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, lo que no puede suceder ya que $f(x)$ no tiene asíntota vertical.

Del mismo modo, para cualquier m existirá un δ_m tal que $|x - a| < \delta_m\ y\ f(x) < m$, lo que lleva a concluir que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, que no puede suceder porque $f(x)$ no tiene asíntota vertical.

De esta manera se evidencia que en cualquiera de los casos posibles al negar el consecuente se obtiene una contradicción en el antecedente, lo que permite demostrar la veracidad de esta proposición.

Los dos teoremas anteriores (2.4 y 2.5) se pueden resumir en el siguiente teorema bicondicional.

Teorema 3.3.5: La función $f(x)$ es acotada en cada uno de sus puntos si y solamente si no tiene alguna asíntota vertical.

Así mismo, este teorema y la segunda definición de funciones $C1$ permiten realizar una transitividad para caracterizar de otra manera a estas funciones, ya que la definición 2 garantiza que si $f(x)$ es $C1$ en c, no tiene asíntota vertical y viceversa, y el teorema 2.6 garantiza que si $f(x)$ no tiene asíntota vertical, es acotada en cada uno de sus puntos y viceversa, entonces:

(3) Definición de función de clase 1 en c ($C1$)

Una función $f(x)$ es $C1$ en c, si y solamente si es acotada en cada uno de sus puntos.

Teorema 3.3.6: Si $f(x)$ es $C1$ en c, entonces es $C1$ en todos los puntos de su dominio.

Demostración

La demostración de este teorema se hará por contradicción.

Suponer que $f(x)$ no es $C1$ en algún b de su dominio, entonces por el teorema 2.3 se cumple que $f(x)$ tiene alguna asíntota vertical; lo cual no es cierto porque $f(x)$ es $C1$ en c y por la definición 2 de funciones $C1$ se cumple que $f(x)$ no tiene asíntota; por lo tanto, si $f(x)$ es $C1$ en c, entonces es $C1$ en todos los puntos de su dominio.

Teorema 3.3.7: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones $C1$, entonces:

a) $h(x) = f(x) \pm g(x)$

b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Es $C1$.

Demostración

a) En el teorema 2.1 se demostró que si $f(x)$ y $g(x)$ funciones $C1$ en c, y p cualquier real distinto de cero, se cumple que:

- $h(x) = p \cdot f(x)$
- $h(x) = f(x) + g(x)$
- $h(x) = f(x) - g(x)$

Es $C1$ en c.

Entonces por el teorema 2.7 se cumple que $h(x)$ es $C1$.

b) $\boldsymbol{h(x) = f(x) \cdot g(x)}$

Cómo $f(x) y\ g(c)$ son $C1$, por la definición 3 de función $C1$ se afirma que $f(x)\ y\ g(x)$ son acotadas en cada uno de los puntos de su dominio; al tomar un punto arbitrario c del dominio de $f(x)$ y $g(x)$, por la definición de función acotada en un punto, se cumple que:

Para $f(x)$ existe $\delta_1 > 0, m_1, M_1$ tal que para todo x que cumple $|x - c| < \delta_1$ entonces $m_1 \leq f(x) \leq M_1$ y para $g(x)$ existe $\delta_2 > 0, m_2, M_2$ tal que para todo x que cumple $|x - c| < \delta_2$ entonces $m_2 \leq g(x) \leq M_2$; teniendo en cuenta lo anterior y que $m_1 \leq M_1, m_2 \leq M_2$, es necesario considerar todas las posibles combinaciones que pueden tener $m_1, M_1, m_2\ y\ M_2$, que son:

- $m_1 < 0, M_1 \leq 0, m_2 < 0\ y\ M_2 \leq 0$
- $m_1 < 0, M_1 \leq 0, m_2 \leq 0\ y\ M_2 > 0$
- $m_1 < 0, M_1 \leq 0, m_2 \geq 0\ y\ M_2 > 0$
- $m_1 < 0, M_1 \geq 0, m_2 < 0\ y\ M_2 \leq 0$
- $m_1 < 0, M_1 \geq 0, m_2 \geq 0\ y\ M_2 > 0$
- $m_1 < 0, M_1 \geq 0, m_2 \leq 0\ y\ M_2 > 0$
- $m_1 \geq 0, M_1 > 0, m_2 < 0\ y\ M_2 \leq 0$
- $m_1 \geq 0, M_1 > 0, m_2 \leq 0\ y\ M_2 > 0$
- $m_1 \geq 0, M_1 > 0, m_2 \geq 0\ y\ M_2 > 0$

Como $m_1 \leq M_1, m_2 \leq M_2$ y suponiendo que $m_1 < 0, M_1 \leq 0, m_2 < 0\ y\ M_2 \leq 0$, se cumple que $M_1 \cdot M_2 \leq f(x) \cdot g(x) \leq m_1 \cdot m_2$, así pues $M = m_1 \cdot m_2$ y $m = M_1 \cdot M_2$, entonces para $f(x) \cdot g(x)$ existe $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}, m\ y\ M$ tal que para todo x que cumple $|x - c| < \delta$ entonces $m \leq f(x) \cdot g(x) \leq M$, es decir que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es acotada en c, pero como c

es un punto arbitrario de los dominios, se concluye que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es acotada en todos los puntos de su dominio; finalmente usando la definición 3 de función $C1$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es $C1$. Análogamente se puede demostrar que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es $C1$, con cualquiera de los casos restantes.

El cociente de funciones $C1$ no es $C1$

En el ejemplo 2.1 Y 2.2 se mostró que toda función constante o lineal es $C1$, por lo tanto, la función $f(x) = 1$ y $g(x) = x$ son $C1$; pero, la función $h(x) = \frac{1}{x}$ no es $C1$ como se mostró en el ejemplo 2.5

3.4. Resumen de las funciones $C1$

A continuación, se presenta un diagrama donde se resume brevemente el trabajo realizado con las funciones $C1$.

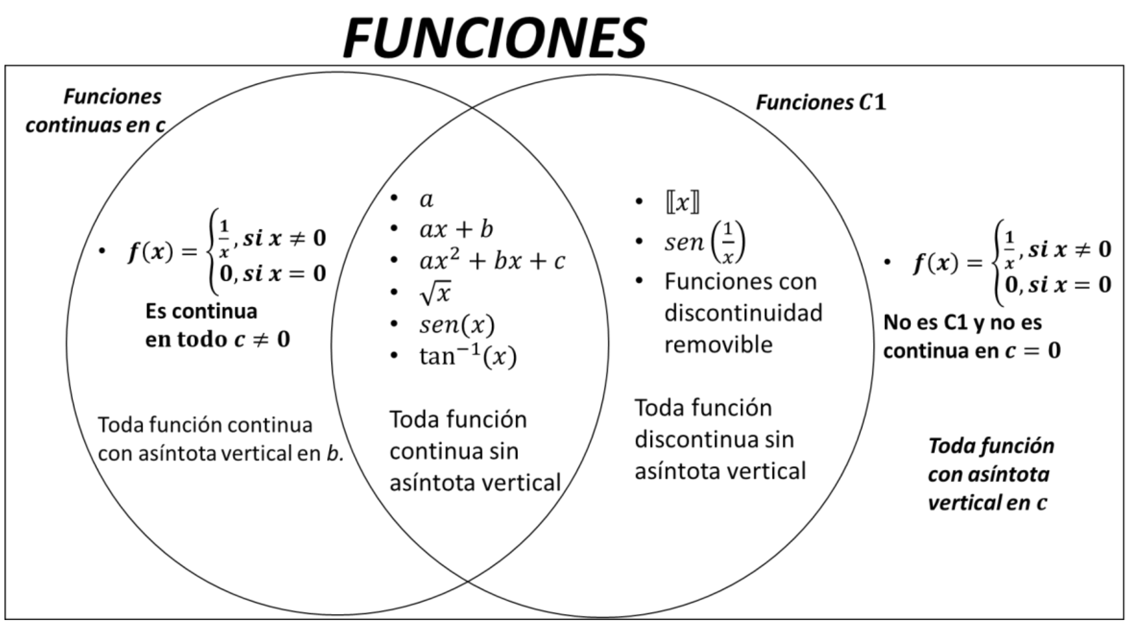

Gráfico 17. Breve resumen de las funciones $C1$

4. Funciones de clase 2

4.1. Ejemplos de funciones $C2$ en c

4.1.1. Funciones continuas en c y $C2$ en c

Ejemplo 4.1.1.1 funciones constantes

Sea a cualquier número real, se define la función $f(x) = a$ constante y sea c cualquier punto de la recta real se cumple existe $\varepsilon = 1$ para todo $\delta > 0$ tal que para todo x si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < 1$.

Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ entonces $|f(x) - f(c)| = |a - a| = |0| < 1$ siempre que $|x - c| < \delta$.

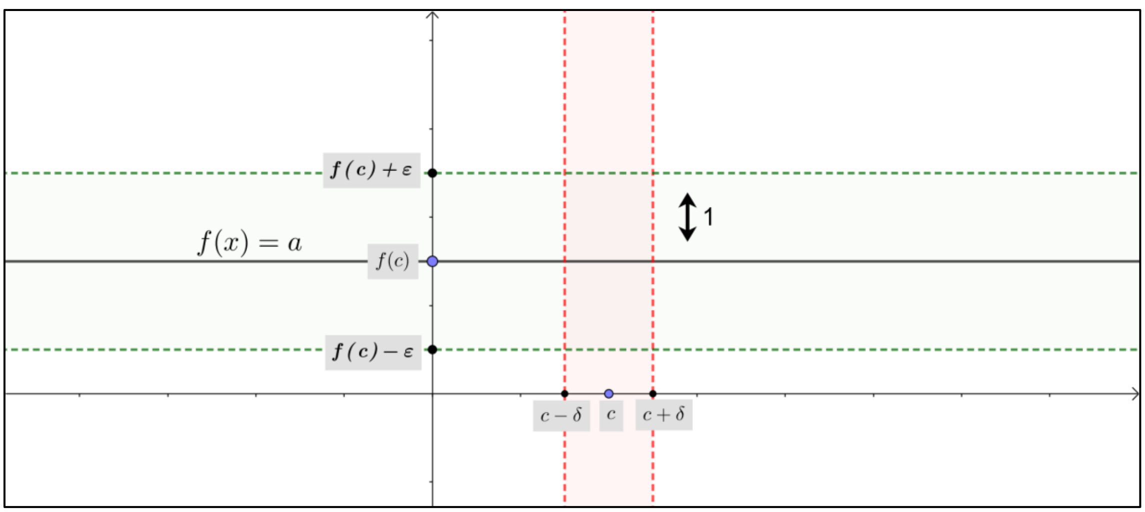

Gráfico 18. Representación de la función del ejemplo 4.1.1.1

Ejemplo 4.1.1.2: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Existe $\varepsilon = 2$ para todo $\delta > 0$, que cumple que para todo x, si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ porque:

$$|f(x) - f(c)| = \left|\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{c^2 + 1}\right|$$

Por desigualdad triangular se cumple que $\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{c^2+1}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2+1}\right| + \left|\frac{1}{c^2+1}\right|$

Además, por propiedades de los reales se sabe que

$$x^2 \geq 0 \ \wedge \ c^2 \geq 0$$

$$x^2+1 \geq 1 \ \wedge \ c^2+1 \geq 1$$

$$-1 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \ \wedge -1 < \frac{1}{c^2+1} \leq 1$$

$$\left|\frac{1}{x^2+1}\right| < 1 \wedge \left|\frac{1}{c^2+1}\right| < 1$$

De donde

$$\left|\frac{1}{x^2+1}\right| + \left|\frac{1}{c^2+1}\right| < 2$$

Y por transitividad, se cumple que $\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{c^2+1}\right| < \varepsilon = 2$

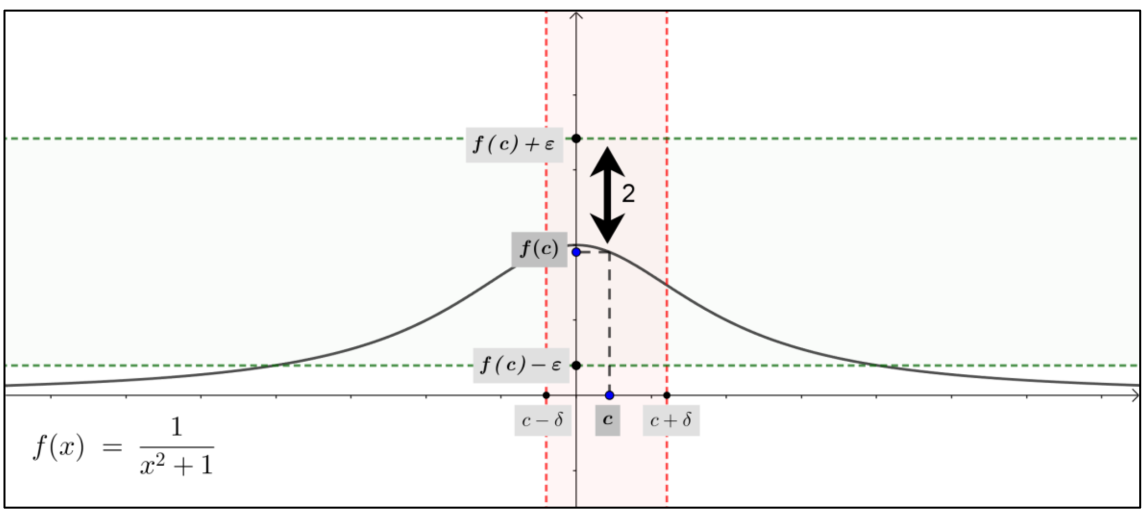

Gráfico 19. Representación de la función del ejemplo 4.1.1.2

4.1.2. Funciones discontinuas en c y $C2$ en c

Ejemplo 4.1.2.1: $f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

Esta función no es continua en $c = 0$ como se mostró en el ejemplo 2.1.4, pero si es $C2$ en $c = 0$, pues existe $\varepsilon = 3$ para todo $\delta > 0$ tal que para todo x si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < 3$.

Sea $\varepsilon = 3$ y $\delta > 0$ entonces $|f(x) - f(c)| = \left|sen\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = \left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ como $-1 \leq sen(\alpha) \leq 1$ luego $|sen(\alpha)| \leq 1$ entonces $\left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 < 3$ siempre que $|x - c| < \delta$.

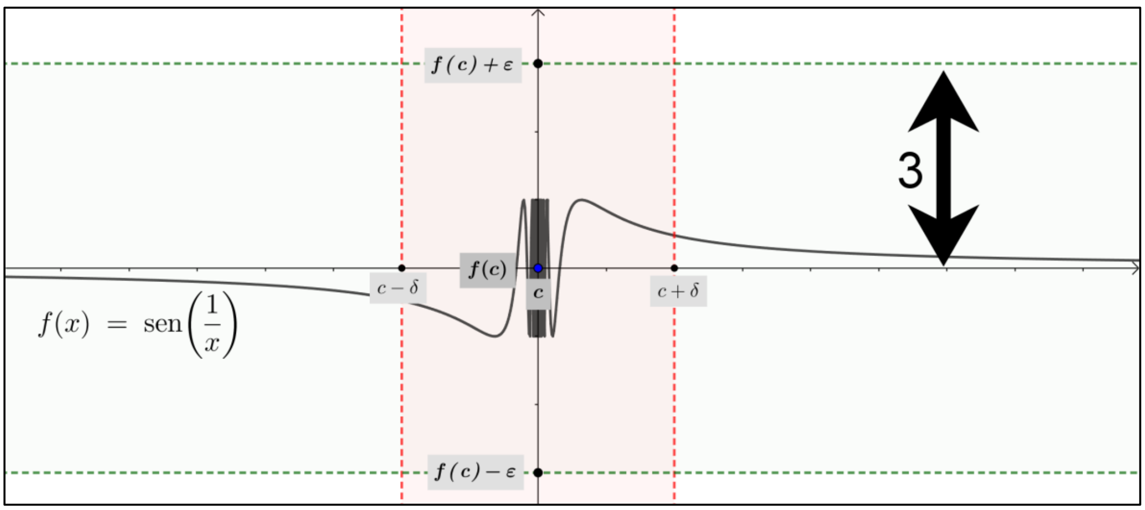

Gráfico 20. Representación de la función del ejemplo ***4.1.2.1***

Ejemplo 4.1.2.2: $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, x = 0 \end{cases}}$

Se cumple que existe $\varepsilon = 4$ para todo $\delta > 0$, tal que para todo x si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, porque:

$$|f(x) - f(c)| = \left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)\right|$$

Por desigualdad triangular se cumple que

$$\left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)\right| \leq \left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right| + \left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)\right|$$

Y a su vez se sabe que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2} \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

De donde

$$\left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2} \ \wedge \ \left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right| + \left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)\right| \leq \pi < 4$$

Para finalmente hacer uso de la transitividad y concluir que

$$\left|\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)\right| < 4 = \varepsilon$$

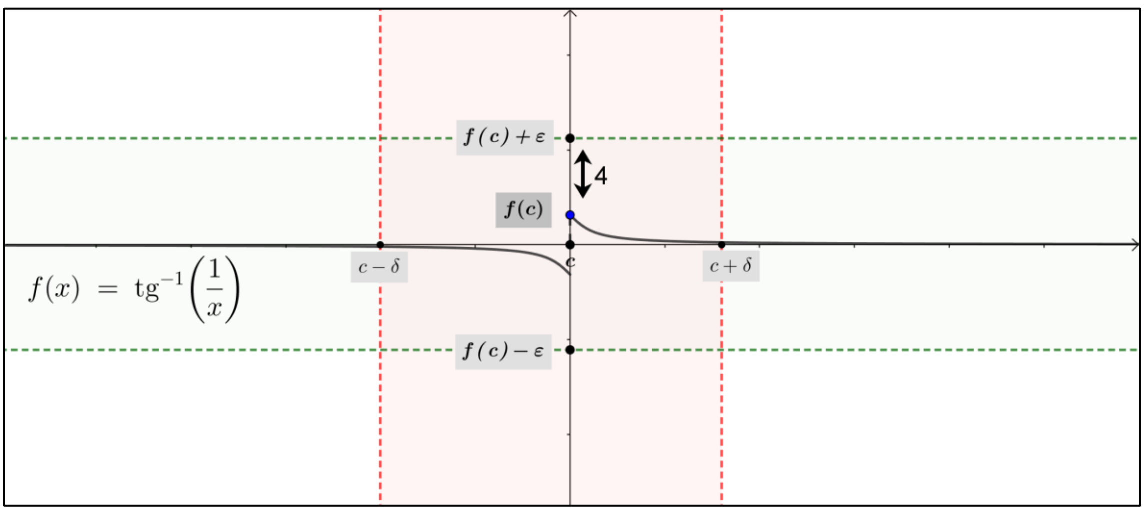

Gráfico 21. Representación de la función del ejemplo ***4.1.2.2***

4.2. Ejemplos de funciones que no son $C2$ en c

Las funciones que no son $C2$ en c, deben satisfacer la negación de la definición de funciones $C2$, que es:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\exists x_\varepsilon \in D(f))(|x_\varepsilon - c| < \delta \ \wedge |f(x_\varepsilon) - f(c)| \geq \varepsilon)$$

Es decir, que por más grande (o pequeño) que se escoja un entorno alrededor de $f(c)$ (con radio ε), debe existir al menos un entorno alrededor de c (con radio δ) tal que siempre va a ser posible encontrar un x_ε en el entorno de c tal que $f(x_\varepsilon)$ está por fuera del entorno de $f(c)$.

4.2.1. Funciones continuas en c que no son $C2$ en c

Ejemplo 4.2.1.1: $f(x) = x$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, y existe x_ε tal que $|x_\varepsilon - c| < \delta$ y $|f(x_\varepsilon) - f(c)| > \varepsilon$.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = 2\varepsilon$, y existe $x_\varepsilon = c + \frac{3\varepsilon}{2}$, tal que

$|x_\varepsilon - c| = \left|c + \frac{3\varepsilon}{2} - c\right| = \left|\frac{3\varepsilon}{2}\right| < 2\varepsilon = \delta$, y

$|f(x_\varepsilon) - f(c)| = \left|f\left(c + \frac{3\varepsilon}{2}\right) - f(c)\right| = \left|c + \frac{3\varepsilon}{2} - c\right| = \left|\frac{3\varepsilon}{2}\right| > \varepsilon.$

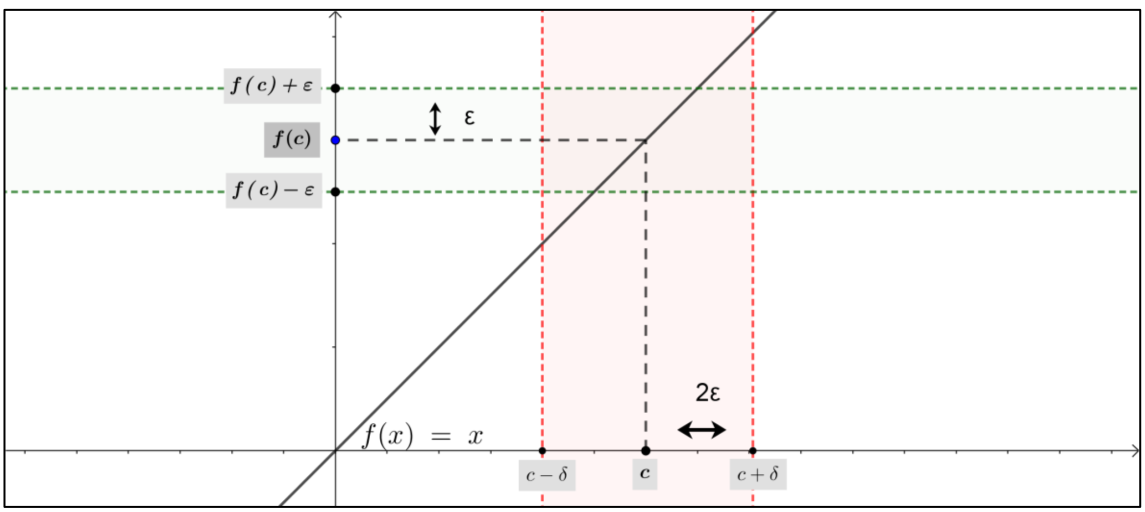

Gráfico 22. Representación de la función del ejemplo 4.2.1.1

Ejemplo 4.2.1.2: $f(x) = x^2$

Tómese a $c = 2$; en este punto $f(x)$ es continua, pero no es $C2$ ya que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que existe x_ε que cumple que $|x_\varepsilon - c| < \delta$ y $|f(x_\varepsilon) - f(c)| > \varepsilon$.

Sea $\delta = \varepsilon + 2$ y $x_\varepsilon = 3 + \sqrt{\varepsilon}$ entonces

$$|x_\varepsilon - c| = \left|3 + \sqrt{\varepsilon} - 2\right| = \left|1 + \sqrt{\varepsilon}\right| < \varepsilon + 2\delta, \text{ y}$$

$|f(x_\varepsilon) - f(c)| = \left|f\left(3 + \sqrt{\varepsilon}\right) - f(2)\right| = \left|\left(3 + \sqrt{\varepsilon}\right)^2 - 2^2\right| = \left|9 + 6\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon - 4\right| =$ $\left|\varepsilon + 6\sqrt{\varepsilon} + 5\right|$, como $0 < \varepsilon, 0 < 6\sqrt{\varepsilon}, 0 < 5$ entonces $0 < \varepsilon < \varepsilon + 6\sqrt{\varepsilon} + 5$ luego $|f(x_\varepsilon) - f(c)| = \left|\varepsilon + 6\sqrt{\varepsilon} + 5\right| > \epsilon.$

Este es un ejemplo de una función con cota inferior ($m = 0$) que no es $C2$ en $c = 2$.

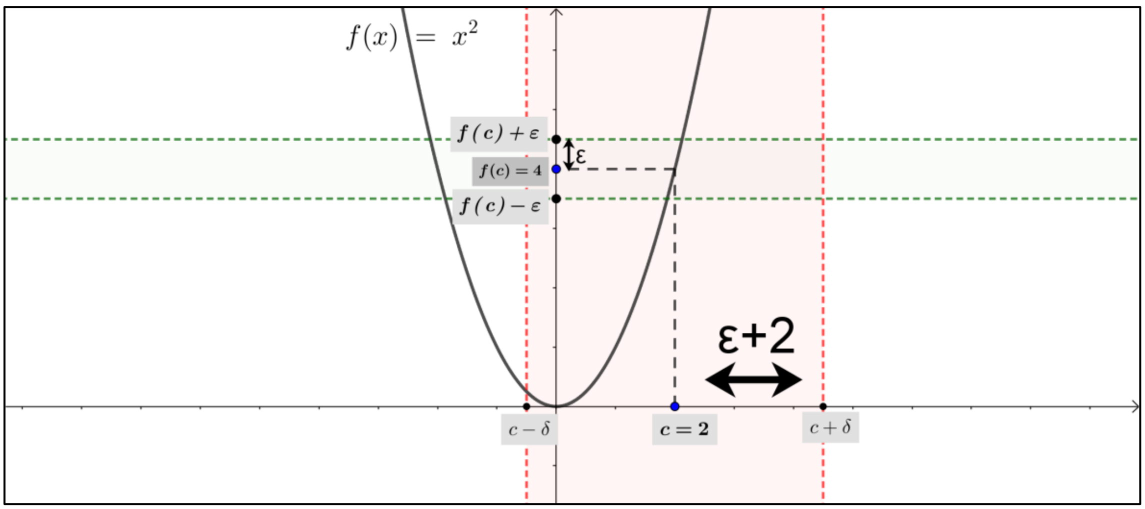

Gráfico 23. Representación de la función del ejemplo 4.2.1.2

4.2.2. Funciones discontinuas en c que no son $C2$ en c

Ejemplo 4.2.2.1: $[\![x]\!]$

Tómese a c como un número que pertenece a los número enteros.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que existe x_ε que cumple que $|x_\varepsilon - c| < \delta$ y $|f(x_\varepsilon) - f(c)| > \varepsilon$.

Sea $\delta = 2\varepsilon + 2$ y $x_\varepsilon = c + \epsilon + 1$ entonces

$$|x_\varepsilon - c| = |(c + \varepsilon + 1\,) - \mathrm{c}| = |c + \varepsilon + 1 - \mathrm{c}| = |\varepsilon + 1| < 2\varepsilon + 2$$

$|f(x_\varepsilon) - f(c)| = |f(c + \varepsilon + 1) - f(c)| = |c + f(\varepsilon) + 1 - c| = |[\![\varepsilon]\!] + 1|$, así pues $[\![\varepsilon]\!] \leq \varepsilon$ entonces $[\![\varepsilon]\!] + 1 \geq \varepsilon > 0$ luego $|f(x_\varepsilon) - f(c)| = |[\![\varepsilon]\!] + 1| \geq \varepsilon$.

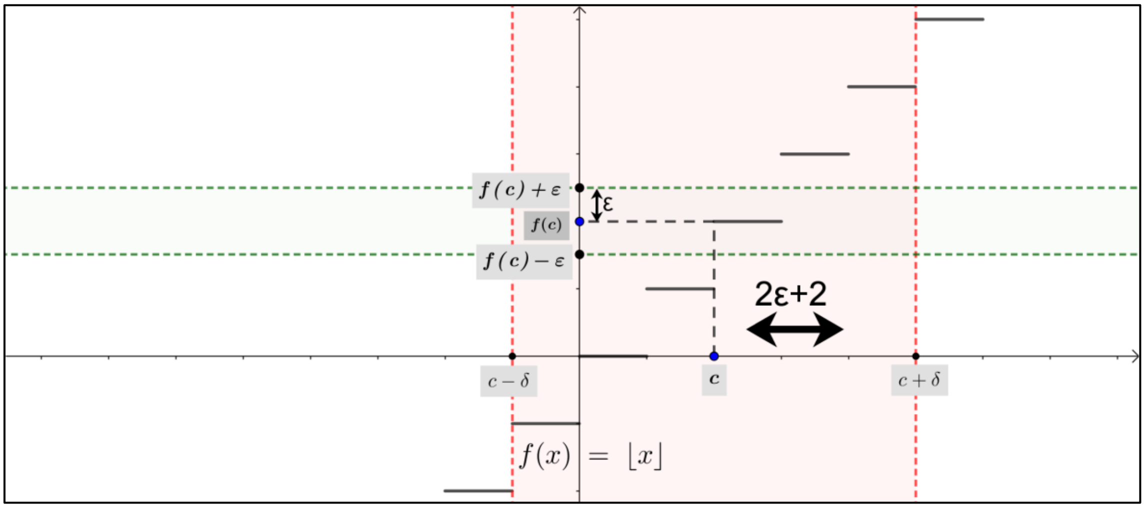

Gráfico 24. Representación de la función del ejemplo 4.2.2.1

Ejemplo 4.2.2.2: $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x, x \neq 0 \\ 5, x = 0 \end{cases}}$

Sea $c = 0$, se cumple que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = 2\varepsilon + 5$ y $x_\varepsilon = \frac{3}{2}\varepsilon + 5$ tal que $|x_\varepsilon - c| < \delta$ y $|f(x_\varepsilon) - f(c)| \geq \varepsilon$, porque:

- $|x_\varepsilon - c| = \left|\frac{3}{2}\varepsilon + 5 - 0\right| = \left|\frac{3}{2}\varepsilon + 5\right| < 2\varepsilon + 5 = \delta$
- $|f(x_\varepsilon) - f(c)| = \left|f\left(\frac{3}{2}\varepsilon + 5\right) - f(0)\right| = \left|\frac{3}{2}\varepsilon + 5 - 5\right| = \left|\frac{3}{2}\varepsilon\right| > \varepsilon$

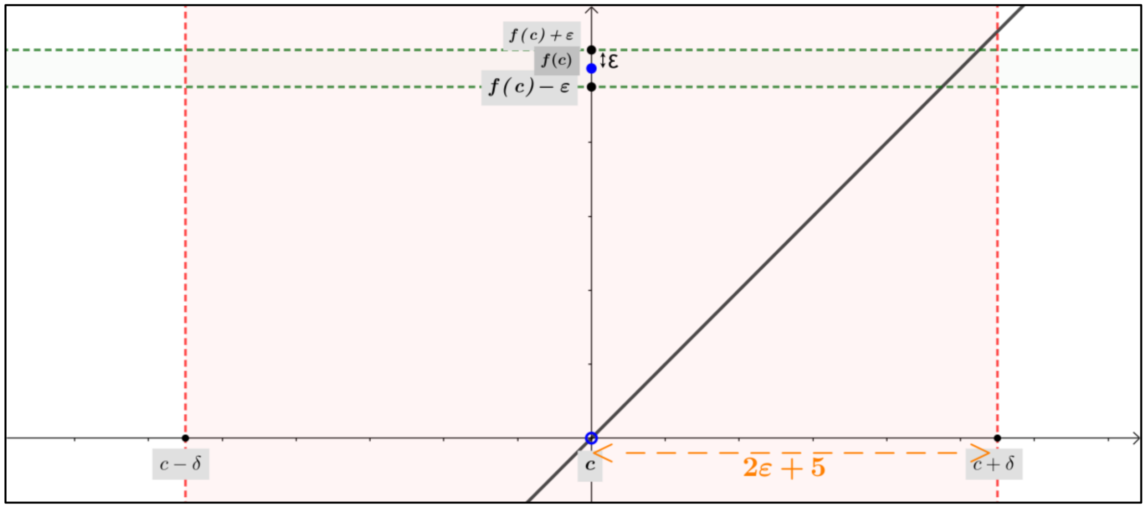

Gráfico 25. Representación de la función del ejemplo ***4.2.2.2***

Ejemplo 4.2.2.1: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{x}, x \neq 0} \\ \boldsymbol{0, x = 0} \end{cases}$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, y existe x_ε tal que $|x_\varepsilon - c| < \delta$ y $|f(x_\varepsilon) - f(c)| > \varepsilon$.

Sea $c = 0$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ y existe $x_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}$ tal que

$|x_\varepsilon - c| = \left|\frac{1}{2\varepsilon} - 0\right| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$, y

$|f(x_\varepsilon) - f(c)| = \left|f\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) - f(c)\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{2\varepsilon}} - 0\right| = |2\varepsilon| > \varepsilon.$

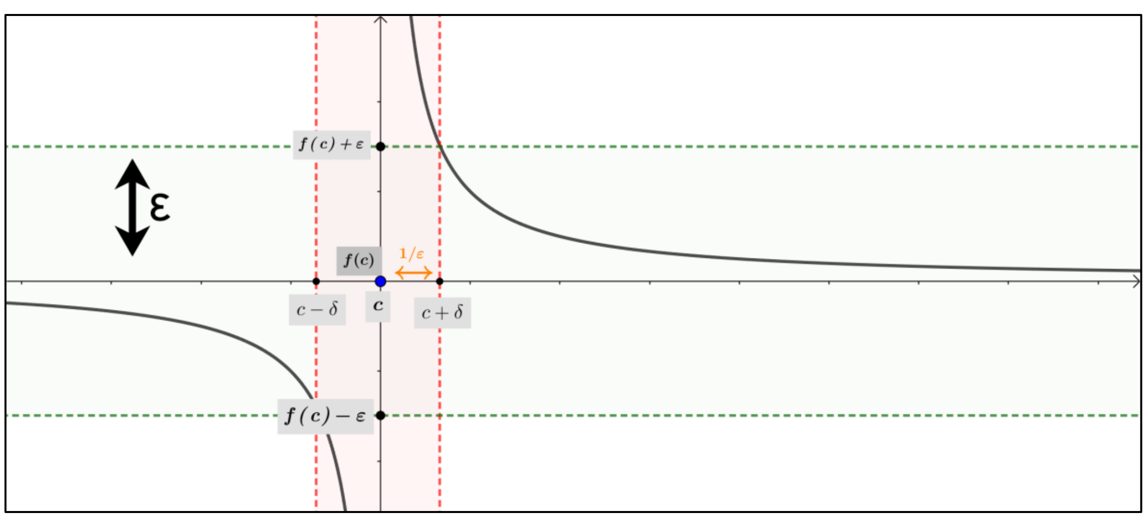

Gráfico 26. Representación de la función del ejemplo 4.2.2.1

4.3. Propiedades y características de las funciones $C2$

Teorema 4.3.1: Si $f(x)$ es $C2$ en c entonces $f(x)$ es acotada.

Como $f(x)$ es $C2$ en c, se cumple que existe $\varepsilon > 0$ para todo $\delta > 0$ tal que para todo x que pertenece al dominio de $f(x)$ si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ así pues $|f(x) - f(c)| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < f(x) - f(c) < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon + |f(c)| < f(x) < \varepsilon + |f(c)|$ luego $|f(x)| < \varepsilon + |f(c)|$, así $k = \varepsilon + |f(c)|$ tal que $|f(x)| < k$, como es para todo $\delta > 0$, se puede tomar un δ tan grande como se quiera, siempre se cumple que para todo x que pertenece al dominio de $f(x)$ si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x)| < k$.

Teorema 4.3.2: si $f(x)$ es acotada entonces $f(x)$ es $C2$ en c.

Como $f(x)$ es acotada se cumple que existe k que pertenece a $\mathbb{R}_+^*$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo x que pertenece al dominio de $f(x)$, así pues por desigualdad triangular se tiene que $|f(x) - f(c)| \leq |f(x)| + |f(c)|$, luego $|f(x)| + |f(c)| \leq k + |f(c)|$, obteniendo que $|f(x) - f(c)| \leq k + |f(c)|$.

Ahora suponer que $f(x)$ no es $C2$ en c, por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y existe x_ε que pertenece al dominio de $f(x)$ tal que $|x_\varepsilon - c| < \delta$ y $|f(x_\varepsilon) - f(c)| \geq \varepsilon$, como se cumple para todo $\varepsilon > 0$, así pues para $\varepsilon = k + |f(c)| + 1$ existe $\delta_1 > 0$ y existe $x_{\varepsilon 1}$ que pertenece al dominio de $f(x)$ se cumple que $|x_{\varepsilon 1} - c| < \delta$ y $|f(x_{\varepsilon 1}) - f(c)| \geq k + |f(c)| + 1 = \varepsilon$, como $k + |f(c)| + 1 > k + |f(c)|$ entonces $|f(x_{\varepsilon 1}) - f(c)| > k + |f(c)|$, además se tiene que $x_{\varepsilon 1}$ pertenece al dominio de $f(x)$ por lo tanto cumple que $|f(x_{\varepsilon 1}) - f(c)| \leq k + |f(c)|$, lo cual es una contradicción porque se tiene que $|f(x_{\varepsilon 1}) - f(c)| > k + |f(c)|$ y $|f(x_{\varepsilon 1}) - f(c)| \leq k + |f(c)|$, por lo tanto el supuesto es falso así que $f(x)$ es $C2$ en c.

Los dos teoremas anteriores (4.3.1 y 4.3.2) constituyen una caracterización de las funciones $C2$, la cual es:

(2) Definición de función $C2$

La función $f(x)$ es $C2$ si y solamente si es acotada.

Teorema 4.3.3: Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones $C2$ y p cualquier número real distinto de cero, se cumple que:

a) $h(x) = p \cdot f(x)$

b) $h(x) = f(x) \pm g(x)$

c) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Es $C2$

Demostración

a) $\boldsymbol{h(x) = p \cdot f(x)}$

Como $f(x)$ es $C2$, por la definición 2 de funciones $C2$ se sabe que $f(x)$ es acotada, es decir que existe k_1 en los reales positivos tal que $|f(x)| \leq k_1$ y como $p \neq 0$ se cumple que $|p| > 0$, de donde

$|f(x)| \cdot |p| \leq k_1 \cdot |p| \Rightarrow |p \cdot f(x)| \leq |p| \cdot k_1 \Rightarrow |p \cdot f(x)| \leq k = |p| \cdot k_1$

Es decir que $h(x) = p \cdot f(x)$ es acotada, por $k = |p| \cdot k_1$; y nuevamente por la definición 2 de funciones $C2$, se concluye que $h(x)$ es $C2$.

b) $\boldsymbol{h(x) = f(x) \pm g(x)}$

Como $f(x), g(x)$ son $C2$, por la definición 2 de funciones $C2$ se sabe que ambas funciones son acotadas, es decir que

$\exists k_1 \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leq k_1$ y $\exists k_2 \in \mathbb{R}_+ : |g(x)| \leq k_2$, de donde $|f(x)| + |g(x)| \leq k_1 + k_2$

Utilizando la desigualdad triangular se sabe que $|f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ y finalmente por transitividad se concluye que $|f(x) \pm g(x)| \leq k = k_1 + k_2$, por lo tanto $h(x) = f(x) \pm g(x)$ es acotada por $k = k_1 + k_2$; y nuevamente por la definición 2 de funciones $C2$, se concluye que $h(x)$ es $C2$.

c) $\boldsymbol{h(x) = f(x) \cdot g(x)}$

Como $f(x), g(x)$ son $C2$, por la definición 2 de funciones $C2$ se sabe que ambas funciones son acotadas, es decir que

$\exists k_1 \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leq k_1$ y $\exists k_2 \in \mathbb{R}_+ : |g(x)| \leq k_2$, de donde $|f(x)||g(x)| \leq k_1 \cdot k_2$

Por propiedades del valor absoluto se concluye que $|f(x) \cdot g(x)| \leq k = k_1 \cdot k_2$, por lo tanto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es acotada por $k = k_1 \cdot k_2$; y nuevamente por la definición 2 de funciones $C2$, se concluye que $h(x)$ es $C2$.

Nota: El cociente de funciones $C2$ no se cumple; a continuación, se presenta un contraejemplo ilustrativo para comprender esto.

Sean $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ dos funciones $C2$ (porque son acotadas por $k = 1$), se define $h(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ que no es $C2$, porque no existe algún k para el cual esta función sea acotada.

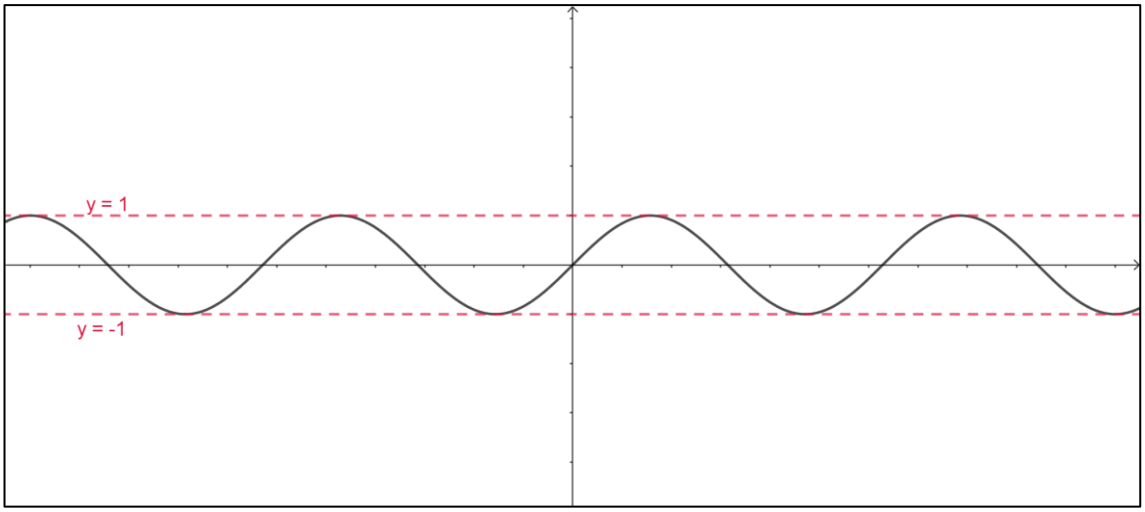

Gráfico 27. La función sen(x) es $C2$

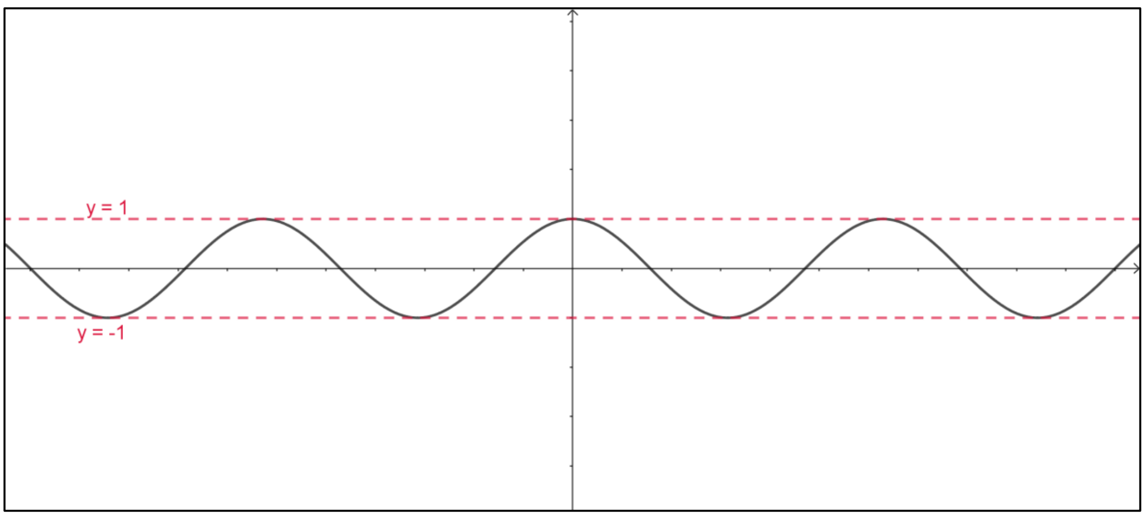

Gráfico 28. La función cos(x) es $C2$

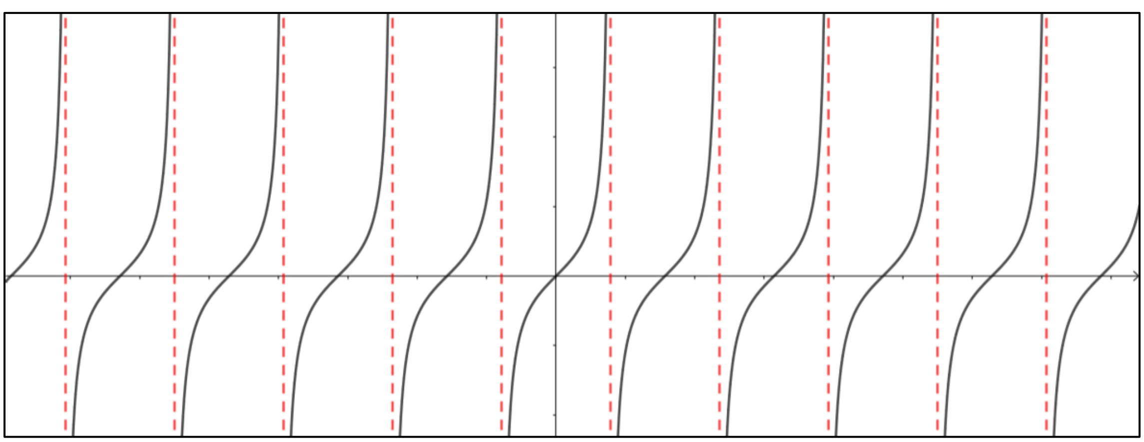

Gráfico 29. La función tan(x) no es $C2$

4.4. Resumen de las funciones $C2$

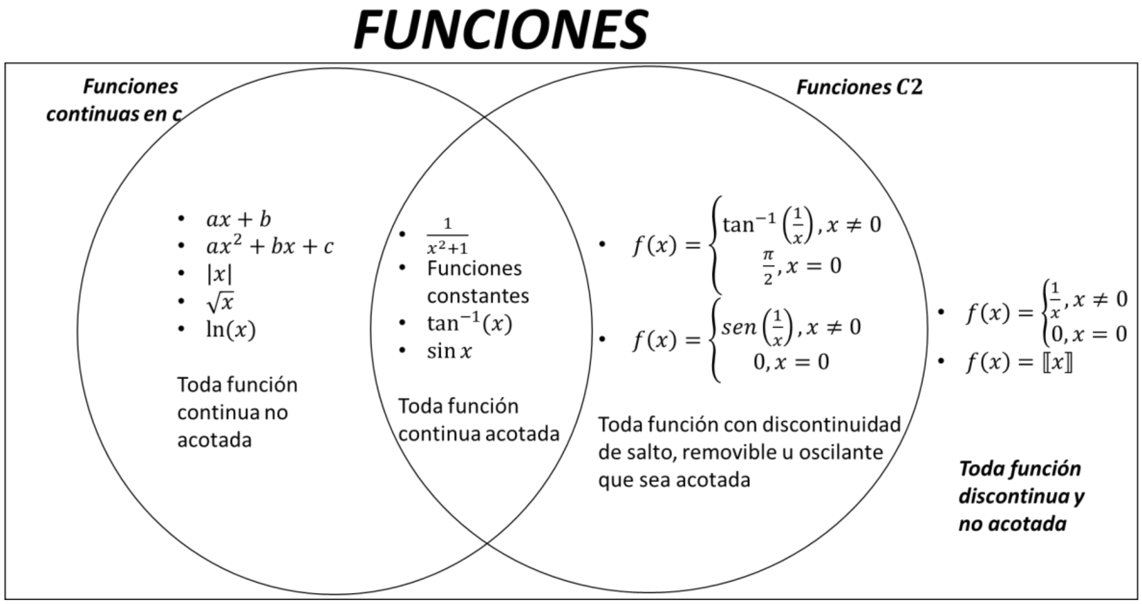

Gráfico 30. Breve resumen de las funciones $C2$

5. Conclusiones

5.1. Conclusiones generales del trabajo

Las conclusiones generales se pueden estructurar en dos grupos, el primero sobre las conclusiones acerca del conjunto de funciones $C1$, el segundo sobre las conclusiones acerca del conjunto de funciones $C2$, realizando una comparación entre cada uno de estos conjuntos con las funciones continuas y discontinuas.

5.1.1. Sobre C1

- Si dos funciones son $C1$, entonces su suma, resta y multiplicación es $C1$.
- A diferencia de las funciones continuas, si una función es $C1$ en uno de sus puntos se garantiza que es $C1$ en todo su domino.

- El conjunto de funciones $C1$ admite todo tipo de discontinuidad exceptuando aquella que se da por asíntota vertical.
- El conjunto de las funciones $C1$ esta compuesto por todas las funciones que no tienen asíntota vertical o están acotadas en cada uno de sus puntos.

5.1.2. Sobre $C2$

- Si dos funciones son $C2$, entonces su suma, resta y multiplicación es $C2$.
- A diferencia de las funciones continuas, si una función es $C2$ en uno punto se garantiza que es $C2$ en todo su domino.
- El conjunto de funciones $C2$ admite todo tipo de discontinuidad exceptuando aquella que se da por asíntota vertical, siempre y cuando la función esté acotada.
- El conjunto de las funciones $C2$ esta compuesto por todas las funciones acotadas.

5.2. Acerca de la formación docente

El hecho de reconfigurar una definición clásica del cálculo real demandó el uso de GeoGebra o gráficas con ayuda de lápiz y papel, lo que fortaleció el proceso de observación y debido a que fue necesario hacer la construcción de una gran cantidad de casos y analizar lo sucedido en cada uno de ellos fue posible realizar conjeturas al respecto de cada situación, fortaleciendo también este proceso esencial en la actividad matemática; dichas conjeturas exigían también el refuerzo del proceso demostrativo o de justificación, ya que mediante este se obtuvieron los resultados deseados o se pudo comprobar la falsedad de algunos que se daban por hecho; lo descrito anteriormente constituye parte fundamental del quehacer matemático, necesario para la profesión como docentes de matemáticas que debe ser cumplida.

Además, el vivenciar el quehacer matemático brindó herramientas que pueden ser usadas al momento de la enseñanza de las matemáticas, tales como el proponer exploraciones que permitan a los estudiantes realizar sus propias conjeturas y que les brinde la posibilidad de ser o no demostradas.

5.3. Proyecciones

Finalmente se mencionarán algunas ideas que se relacionan y pueden ser desarrolladas teniendo en cuenta este trabajo.

1) Continuar el estudio de las funciones C1 y/o C2, tratando de buscar analogías o mayores diferencias con las funciones continuas, mediante la reinterpretación de teoremas fundamentales en la continuidad con cada una de estas nuevas clases de funciones, como el teorema de Bolzano, del valor intermedio, de conservación del signo, etc.
2) Continuar con el estudio de las funciones que cumplen las variantes restantes de la definición de continuidad en un punto alterando los cuantificadores, por ejemplo:
   - $(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon > 0) : \big((\forall x \in D(f))(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\big)$
   - $(\forall \delta > 0)(\forall \varepsilon > 0) : \big((\forall x \in D(f))(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\big)$
   - $(\exists \delta > 0)(\exists \varepsilon > 0) : \big((\forall x \in D(f))(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)\big)$

   Siguiendo la estructura utilizada mediante la búsqueda de ejemplos y contraejemplos para poder realizar conjeturas que finalmente serán o no demostradas.

6. Bibliografía

Apóstol, T. M. (1991). *Calculus* (Vol. I). (F. Vélez Cantarell, Trad.) Barcelona, España: REVERTÉ S.A.

Bartle, R. G. (1990). *INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO* (2 ed.). (C. Gutierrez Gonzalez, Trad.) México: LIMUSA.

Flores, I., & Saravia, N. (2014). Las asíntotas y sus mitos. *VII Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas. Educación Matemática en contexto*, (pág. 655). Perú.

Gonzalez Mota, J. A. (s.f). *FUNCIONES MONOTONAS, ACOTADAS, SIMÉTRICAS, PERIÓDICAS.* Recuperado el 13 de 10 de 2021, de Algunos temas de Matemáticas II: https://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Larson, R., & Edwards , B. (2010). *Cálculo1. De una variable.* México: Interamericana Editores S.A. de C.V.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (Séptima ed.). (Fidencio Mata González, Ed.) México: GRUPO MEXICANO MAPASA, S.A.

Muñoz Quévedo, J. M. (2014). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Pérez González, F. (s.f). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.* (U. d. Granada, Ed.) Granada, España: Creative Crommos.

Spivak , M. (1992). *Calculus* (Segunda ed.). (B. Frontera Márques, Trad.) Barcelona, España: Reverté S.A.

Stewart, J. (1999). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (Cuarta ed.). (A. Sestier Bouclier, Trad.) Thomsons Editores S.A.