RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA DEL CÁLCULO INTEGRAL QUE INVOLUCRAN LAS CÓNICAS

Anamaría Saldaña Huertas

Yenny Paola Vallejo Jiménez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2021

RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA DEL CÁLCULO INTEGRAL QUE INVOLUCRAN LAS CÓNICAS

Anamaría Saldaña Huertas
Código 2015240080
Cédula 1012334539

Yenny Paola Vallejo Jiménez
Código 2015240086
Cédula 1122131891

Monografía presentada como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Director: Orlando Aya Corredor

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2021

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios por permitirnos llegar a nuestra alma mater, la Educadora de educadores, la Universidad Pedagógica Nacional, quien nos acogió y nos formó integralmente para salir y entregar corazones en el aula de clase.

Gracias a cada uno de los maestros del departamento de Matemáticas, los cuales contribuyeron a nuestra formación.

Un especial agradecimiento al profesor Orlando Aya Corredor, asesor de este trabajo de grado, por todo el tiempo dedicado, su paciencia, sus conocimientos y su infinito apoyo, muchas gracias.

DEDICATORIA:

A la vida por permitirme soñar y alcanzar mis sueños.

A mis padres por su infinito amor y apoyo.

Mi esposo por su compañía, compresión y colaboración.

Mis hijos que son la principal motivación para seguir adelante.

Mis hermanas, sobrinas y cuñadas por la colaboración brindada.

Esos amigos del corazón que siempre estuvieron dándome ánimo y apoyo para seguir.

ANAMARÍA SALDAÑA HUERTAS

A Dios por darme la vida y permitir que cumpla mis propósitos y sueños día a día.

A mis padres por los valores y enseñanzas que me inculcaron para ser una persona íntegra y responsable; mi madre, quien es ese ángel que me cuida desde el cielo y sé que está muy orgullosa de ver los triunfos de su hija amada.

A mis hermanos y sobrinos que me han colaborado para llegar a esta meta.

A cada uno de mis compañeros por brindarme su colaboración, ánimo y compañía en el desarrollo de esta etapa en mi vida.

YENNY PAOLA VALLEJO JIMÉNEZ

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"**RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA DEL CÁLCULO INTEGRAL QUE INVOLUCRAN LAS CÓNICAS**"**, elaborado por las estudiantes **ANAMARÍA SALDAÑA HUERTAS,** identificada con el Código **2015240080** y Cédula **1012334539** y **YENNY PAOLA VALLEJO JIMÉNEZ,** identificada con el Código **2015240086** y Cédula **1122131891** el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y tres** (43) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas.**

En constancia se firma a los siete (7) días del mes de diciembre de 2021.

Orlando Aya C.

Mg. ORLANDO AYA CORREDOR
Director del Trabajo de grado

Mg. NATALIA MORALES ROZO
Jurado del Trabajo de grado

Mg. GIL ALBERTO DE JESÚS DONADO
Jurado del Trabajo de grado

Resumen Analítico en Educación (RAE)

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL Educadora de educadores	**FORMATO**
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 07 - 12 - 2021	**Página I de V**

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de Grado de Pregrado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA DEL CÁLCULO INTEGRAL QUE INVOLUCRAN LAS CÓNICAS
Autor(es)	SALDAÑA HUERTAS, ANAMARÍA VALLEJO JIMÉNEZ, YENNY PAOLA
Director	AYA CORREDOR, ORLANDO
Publicación	Bogotá. 2021
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Cálculo integral, visualización, exploración, conjeturación y verificación

2. DESCRIPCIÓN

Según nuestra experiencia en los cursos de la línea del cálculo de la versión tres de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y el estudio realizado para el trabajo de grado, Hernández, C. y Velandia, D. (2013), en los cursos de Cálculo Diferencial, Calculo Integral y Cálculo en Varias Variables, se evidencian falencias al abordar situaciones problemas donde están involucradas funciones analíticas relacionadas con las cónicas. Es por ello, que se requiere realizar una propuesta que atienda esta problemática y que eventualmente pueda ser implementada en los cursos que se mencionaron anteriormente. De igual manera, se pretende generar herramientas y conocimientos integradores que potencien las habilidades de los estudiantes de la Licenciatura para su desarrollo profesional; en este sentido, se buscará situaciones que involucren, en la medida de lo posible, conceptos del cálculo y de las cónicas básicas, o realizar una generalización de las situaciones.

3. FUENTES

Para la elaboración de este documento se consultaron tres libros de cálculo, cuatro trabajos de grado, cinco artículos y un medio electrónico. Los más relevantes son:

Hernández, C. y Velandia, M. (2013). *Una Exploración de las Cónicas desde el Cálculo Diferencial* [tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

Tejero, J. (2015). *Exploración del cálculo integral desde el contexto de la geometría dinámica* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas. Séptima edición* México: Thomson.

Larson, R. & Bruce, H. (2010). *Cálculo 1 de una variable. Novena edición.* México: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1992). *Cálculo con geometría analítica. Sexta edición.* México: HARLA.

4. CONTENIDOS

La presente propuesta busca, brindar algunos elementos que posibiliten la incorporación del estudio de algunos ejercicios representativos de las temáticas del cálculo integral utilizando como base los textos **Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas**, séptima edición (2013) de J. Stewart, **Cálculo 1 de una variable,** novena edición (2010) de R. Larson y **Cálculo con geometría analítica**, sexta edición (1992) de L. Leithold, en particular en relación con los contenidos fundamentales de las aplicaciones de la integral definida: áreas, volúmenes, área y volúmenes de superficie de revolución, trabajo y centroide, las cuales están asociadas con las cónicas.

El documento consta de seis capítulos: el primero, denominado justificación, plantea las razones que validan la elaboración del mismo; en el segundo capítulo se exponen los principales referentes teóricos en los que se basa el estudio, desde el punto de vista de la visualización, conjeturación y heurísticas en la resolución de problemas y del uso de GeoGebra®. No se presenta marco matemático ya que este está sujeto al presentado en los textos antes mencionados.

En el tercer capítulo, denominado contextualización de los problemas, se plantean los ejercicios a estudiar; en el cuarto capítulo se realiza el análisis al desarrollo de los ejercicios implementados en la prueba piloto (realizados por estudiantes o egresados de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional); por último, se presenta el capítulo de las conclusiones donde se muestra los resultados de la investigación frente al cumplimiento de los objetivos, así como algunas observaciones generales.

5. METODOLOGÍA

La metodología que se usó para llevar a cabo este trabajo fue la siguiente:

1. Selección de situaciones problemas que tenían como eje principal el trabajo con cónicas en los libros de cálculo mencionados anteriormente.
2. Solución analítica de situaciones problema seleccionadas.
3. Construcción en el software de GeoGebra® de situaciones problema seleccionadas.
4. Diseño de dos documentos como propuesta para desarrollar en un curso de Cálculo Integral en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.
5. Diseño del documento “Prueba Piloto”.
6. Convocatoria a estudiantes y egresados de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, interesados en aportar a la investigación mediante el desarrollo de la prueba piloto.
7. Recolección de las pruebas desarrolladas y análisis de las mismas.
8. Elaboración de un banco de situaciones problema con soluciones paso a paso para ser implementadas por parte de los profesores del espacio académico ya sea como ejemplos de clase, talleres para los estudiantes o evaluaciones

6. CONCLUSIONES

Las conclusiones se realizaron teniendo en cuenta los objetivos planteados en esta investigación; para cada objetivo se elaboraron de tres a cuatro conclusiones, es decir que se obtuvieron un total de 11 conclusiones, a continuación, se mencionan las más relevante en cada objetivo:

- La implementación del software, dentro del proceso de formación de Licenciados en Matemáticas cobra mayor relevancia ya que le brinda no solo herramientas disciplinares dentro del Calculo Integral, sino que le suministra, al futuro docente, herramientas didácticas para la enseñanza de dichos conceptos del cálculo.

- Debido a que algunas situaciones problema que se adaptaron y diseñaron en la prueba piloto eran generalizadas, se observó que hubo varias dificultades en su resolución, por lo que se recomienda que en los espacios académicos de Cálculo Integral se presenten más ejercicios de esta forma con el fin de reducir estas dificultades.

- En ciertas situaciones problema además de vincular las cónicas con el cálculo integral se relacionó estos dos conceptos con el área de la geometría, permitiendo de esta manera mejorar los procesos de enseñanza - aprendizaje de la labor docente.

Fecha de elaboración del resumen	**18**	**10**	**2021**

Tabla de contenido

Tabla de ilustraciones

INTRODUCCIÓN

El presente estudio se desarrolla en el marco de la didáctica del cálculo, en la misma línea de las monografías de grado "Una Exploración de las cónicas desde el Cálculo Diferencial" (Velandia y Hernández 2013) y "Exploración Del Cálculo Integral Desde El Contexto De La Geometría Dinámica" (Tejero 2015), en las que se destaca la importancia del trabajo relacionado con la resolución de problemas en la línea del cálculo (diferencial e integral) y de la misma manera, la importancia del manejo de software educativo como lo es GeoGebra®. Es por ello que, en la presente investigación, surgió el interés de diseñar e implementar una propuesta de estudio en el cálculo integral, basado en las secciones cónicas a través de situaciones problema, las cuales serán mediadas por el software de GeoGebra®.

Esta investigación inicialmente se lleva a cabo con el fin de dar continuidad a la propuesta desarrollada por Velandia y Hernández (2013) "Una Exploración de las cónicas desde el Cálculo Diferencial", puesto que en la experiencia de las autoras de la presente investigación, en el espacio académico de Cálculo Integral de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se percibió que, aún seguía evidenciándose dificultad en conceptos que involucran las cónicas en los espacios académicos correspondientes a la línea del cálculo y la geometría analítica. De esta manera, se busca fortalecer los conocimientos en el cálculo integral con situaciones problema que involucren conceptos que en otros espacios académicos son abordados superficialmente, (por diferentes circunstancias como lo son, la falta de tiempo y problemas sociopolíticos de la universidad), para que a través de contextos intra-matemáticos o de aplicación a otras ciencias, el estudiante adquiera herramientas que le permitan tener una mejor comprensión respecto a las cónicas y así mismo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área de las matemáticas y que estos le contribuyan a su futura labor docente.

En el primer capítulo, se encuentran los fundamentos de la investigación, en el cual se exponen los argumentos que dieron origen a este proyecto, los cuales se encuentran en la justificación y que sirven como base para generar los objetivos de la investigación. En el segundo capítulo, se encuentran los referentes teóricos que dan fundamento al estudio realizado, los autores que se mencionan en este apartado se enfatizan en la importancia del trabajo con situaciones problema y la implementación de GeoGebra ® como software educativo. No se presenta marco matemático, debido a que los temas que se abordaron se pueden investigar en los textos universitarios de cálculo en una variable en trascendentes tempranas que se relacionan en la bibliografía.

En el tercer capítulo, se desarrollan analíticamente los ejercicios que fueron propuestos para la prueba piloto; dichos ejercicios se retomarán en el cuarto capítulo para el diseño, ejecución y análisis de los resultados obtenidos al implementar dicho pilotaje. En el quinto capítulo, se muestran las conclusiones que se obtuvieron en esta propuesta. Finalmente, en los anexos se encuentra dos propuestas adaptadas y diseñadas por las autoras, al igual que un banco de ejercicios con su respectiva solución analítica, con la finalidad de que sirvan como insumo para generar material de trabajo en el curso de cálculo integral en un programa de formación inicial de profesores y particularmente de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Capítulo 1: Justificación y objetivos

1.1 JUSTIFICACIÓN

En el año 2013 Hernández y Velandia realizaron el trabajo de grado titulado: "UNA EXPLORACIÓN DE LAS CÓNICAS DESDE EL CÁLCULO DIFERENCIAL", en el cual propusieron una serie de actividades basándose en los conocimientos sobre las secciones cónicas en situaciones problema, la finalidad de dicha propuesta era dar un enfoque más profundo sobre el concepto de las cónicas en el ámbito del cálculo diferencial de la LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS de la UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, se plantea este trabajo de grado con el objetivo de dar continuidad a dicha propuesta en el espacio académico de cálculo integral.

Además, con la implementación de estas propuestas en los dos espacios académicos nombrados anteriormente, se espera una mejor comprensión y un mejor rendimiento académico de los estudiantes de la licenciatura en los espacios académicos que están directamente relacionados con estas temáticas, como lo son: Geometría Analítica y Cálculo en Varias Variables. De igual manera, se pretende generar herramientas para los estudiantes de la licenciatura a favor de su desarrollo profesional y les permita experimentar en este contexto procesos como la exploración, la visualización, la conjeturación y la resolución de problemas.

1.2 OBJETIVOS

Para el desarrollo del presente trabajo, la elaboración de la propuesta y la evaluación preliminar de la misma, se plantearon los siguientes objetivos

1.2.1 Objetivo general

Diseñar actividades matemáticas que permitan la exploración y argumentación en el trabajo con cónicas utilizando GeoGebra® en el espacio de Cálculo Integral de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional

1.2.2 Objetivos específicos

- Presentar soluciones analíticas a problemas relacionados con cónicas, en el contexto del Cálculo Integral.

- Implementar el software GeoGebra® para la visualización y exploración de los problemas que se trabajarán en relación a las cónicas en el contexto del Cálculo Integral.

- Generar unas actividades matemáticas exploratorias y analíticas que vinculen las cónicas con las integrales y que puedan ser implementadas en el espacio académico de Cálculo Integral en un programa de formación inicial de profesores, en particular de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Capítulo 2: Marco teórico y metodología

En este apartado, se presentarán algunos aportes realizados por dos líneas de investigación en didáctica de las matemáticas, las cuales son fundamentales para el desarrollo de este trabajo: una de ellas es la importancia de la solución de problemas en el desarrollo del conocimiento matemático, y por otro, el uso de GeoGebra® como herramienta para el desarrollo de los procesos cognitivos (conjeturación, exploración, visualización y verificación). Cabe resaltar que inicialmente se pensó en incorporar un marcó matemático al presente trabajo, pero se optó por no hacerlo pues básicamente correspondía a reproducir lo que se presenta en diversos textos de cálculo universitario de cálculo en una variable en trascendentes tempranas.

2.1 Resolución de problemas en el desarrollo del conocimiento matemático

Hacia la década de los 40, Polya empieza a inquietarse por el bajo rendimiento de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y específicamente en la resolución de problemas. Y tras cinco años de recopilar información en sus cursos, establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana y cataloga al hombre como “el animal que resuelve problemas”; y con ello nace la inquietud de llevar al aula de clase diferentes problemas que le permitan a los estudiantes poner a prueba sus conocimientos e investigar aquellos conceptos que desconoce y desarrollar métodos heurísticos en la resolución y solución de problemas (citado por Sepúlveda 2009).

Unos años después, hacia la década de los 70, se empezó a dar el reconocimiento que se debía al trabajo que Polya venía haciendo, y surge una línea de investigación que acoge los planteamientos teóricos y metodológicos que Polya había propuesto para la educación matemática. Además de esto, incorpora los procesos heurísticos y el monitoreo y control como aspectos indispensables en la resolución de problemas, y, por ende, en la educación matemática (Sepúlveda 2009).

Sepúlveda (2009), señala que Polya clasifica los problemas en dos tipos: los rutinarios (problemas que al momento de solucionarlos no requieren de mayor esfuerzo por parte de la persona que lo está realizando), y los no rutinarios (problemas que requieren de mayor atención y esfuerzo por parte de la persona que lo realiza). Sin embargo, más allá de la complejidad del problema, también se trata de señalar la importancia de los contextos que se manejan en los problemas, según Sepúlveda (2009), estos contextos, pueden ser de experiencias cercanas a los estudiantes, al igual que aplicaciones de otras ciencias (siempre que estas involucren los conceptos matemáticos que se requieren en el momento). Barrera y Santos (2002), caracterizan los contextos en: contextos del mundo real, los hipotéticos o realistas y los formales o puramente matemáticos (llamados también intramatemáticos). El propósito de esta caracterización, va enfocado a la necesidad de realizar la elección de los problemas más apropiados (en cuanto a complejidad y contexto) para que el estudiante pueda tener avances en el aprendizaje matemático, los cuales, posteriormente serán base para la solución de problemas de mayor complejidad.

"El sujeto construye su conocimiento en la medida en la que tiene contacto con los objetos de aprendizaje y adapta sus nuevas experiencias con las anteriores, lo cual genera una readaptación de sus estructuras mentales que se traducen como cambios en la manera de pensar sobre dichos objetos y que, necesariamente, se manifiestan a través de representaciones externas." (Sepúlveda, 2009, p. 87, 88)

En este sentido, Polya (citado por Sepúlveda 2009) identifica a los procesos heurísticos…: "*algunas veces son trazos, toma de valores extremos, aplicación de resultados conocidos, comparaciones, visualizaciones, descarte de posibilidades, etc., los cuales necesariamente se combinan con los procesos de reflexión (autorreflexión)".* Pero esto no queda allí, según Sepúlveda, 2009, como citó a Schooenfeld, 1985, quien adopta el trabajo de Polya, incorporando la dimensión cognitiva, y a las acciones de monitoreo y control los renombra como procesos metacognitivos. Y resalta, que la forma en que un estudiante sabe que va avanzando en el método propuesto por Polya es haciendo un inventario de sus conocimientos y la forma en las que fueron adquiridos.

Sepúlveda, 2009, evidencia como desde los NCTM, (2000*)*, también hacen énfasis en la resolución de problemas como eje central de las matemáticas escolares, señalando que debe ser una actividad fundamental, que puede ser desarrollada por los estudiantes de forma individual o grupal, ya que brinda al estudiante las herramientas para un aprendizaje significativo, intervenido por otros procesos de pensamiento como lo son: la búsqueda de conexiones, el empleo de distintas representaciones, la necesidad de justificar los pasos dados en la solución del problema y comunicar los resultados obtenidos. De igual manera, “La resolución de problemas no es una parte aislada de la educación matemática y de los programas de las materias, es una parte fundamental para todo aprendizaje matemático” (Sepúlveda, 2009, p.84 como se citó en NCTM, 2000)

Schoenfeld (1992) plantea que la Resolución de Problemas (RP) son actividades que permiten a los estudiantes desarrollar habilidades matemáticas, las cuales facilitan un mejor entendimiento en los diferentes conceptos que se estén trabajando y esto, a la vez le da la posibilidad de realizar un estudio más profundo de dicho tema; Schoenfeld, manifiesta que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas, donde los estudiantes pueden desarrollar modos de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina. Con ello identifica las siguientes acciones como las características del pensamiento matemático: tomar casos particulares, plantear conjeturas, descubrir patrones y relaciones, hacer generalizaciones y justificar resultados.

Sepúlveda (2009), cita el NCTM (1989) donde resalta la importancia de crear situaciones problema con características específicas que permitan evidenciar los niveles de entendimiento, los grados de interpretación y los tipos de acercamiento realizados por los estudiantes, así como el manejo de los recursos y conceptos matemáticos. El buen diseño de los problemas es necesario para ayudar a los estudiantes a tener un mejor dominio matemático, incluyendo habilidades como: “explorar, conjeturar y razonar lógicamente, así como la habilidad para usar efectivamente una variedad de métodos matemáticos en la resolución de problemas”

De igual manera, define que la RP se adapta a diferentes significados de acuerdo al uso que se le da:

- Resolver problemas como contexto para: enseñar matemáticas, crear motivación por algunos temas, recrear, desarrollar habilidades y practicar
- Resolver problemas como destreza: rutinarios (habilidades básicas), no rutinarios (de nivel superior) y técnicas de resolución como contenido para aplicar lo aprendido.
- Resolver problemas es “hacer matemáticas”: enfocar el trabajo de los matemáticos para resolver problemas y concibiendo las matemáticas como problemas y soluciones (Polya. 1954).

2.2 El uso de GeoGebra como herramienta para el desarrollo de las tareas cognitivas (conjeturación, exploración, visualización y verificación)

Las TIC (*tecnologías de la informática y las comunicaciones*), están jugando un papel muy importante en los diferentes niveles de la educación: “La tecnología informática ha avanzado para permitir la estructuración intencional de entornos matemáticos altamente complejos (‘micromundos’), donde las configuraciones ya no son estáticas como las producciones de lápiz y papel, sino dinámicas. Esto hace que los análisis de los sistemas de representación externos sean aún más importantes. Debemos considerar no sólo la estructura de fondo, sino la estructura representativa, si queremos entender cómo cambian las cogniciones humanas al interactuar con tales entornos” (Grijalva, 2020, p. 222).

Rodríguez (2017) resalta que las matemáticas universitarias tienen un alto nivel de complejidad en su aprendizaje, debido a la rigurosidad de sus procesos y demostraciones, el formalismo de su lenguaje, la implementación de los saberes previos y la aplicación de los contenidos a la vida cotidiana; es por ello que resalta la importancia del trabajo con las TIC en este nivel educativo, ya que asegura que con ellas se generan procesos de enseñanza y aprendizaje que permiten la exploración de contenido en situaciones particulares, desarrollando prácticas investigativas y analíticas que luego implementaría en la toma de decisiones para el desarrollo de modelos matemáticos y la comprensión de conceptos abstractos.

Sombra (2019) resalta algunas cualidades de GeoGebra® como software educativo, entre ellas ser un programa de fácil acceso, libre, fácil de utilizar, su interfaz gráfica es atractiva, tiene la posibilidad de vincular diferentes representaciones de los objetos matemáticos, existen versiones para diferentes dispositivos (computador, Tablet y celular), se pueden ver representaciones 3D y actualmente ya se puede implementar la realidad aumentada y la posibilidad de hacer impresiones en 3D. Es por ello que en este trabajo se implementó este software con el fin de brindar a los estudiantes herramientas que le permitan desarrollar algunos procesos cognitivos como lo son: visualizar, explorar, conjeturar y verificar.

Rodríguez (2017) destaca lo dicho por Debárboa (2012) haciendo referencia a la ventaja de usar GeoGebra® como software educativo de tipo heurístico, resaltando las cualidades que permiten tener un aprendizaje experimental y por exploración, esto debido a que el programa admite hacer modificaciones, que deja evidenciar las variables para finalmente comparar y verificar los resultados, lo que ayuda al estudiante a desarrollar los diferentes pensamientos matemáticos, además de poner en juego los saberes previos que le ayudarán a descubrir y generar conocimientos nuevos. En otras palabras, se le está dando al estudiante la posibilidad de modelar situaciones problema, que le permitan generar algún tipo de conjeturas, en las que posteriormente podrá validar o replantear dependiendo de la exploración realizada. Así, no sólo está generando la reconstrucción del conocimiento, sino a su vez está desarrollando nuevas habilidades matemáticas y competencias que aportan en la educación (Rodríguez 2017).

Reyes (2017) señala la estrecha relación que existe entre la visualización y la exploración, así como entre la conjeturación y la justificación ya que él trabaja dichos procesos desde la demostración y, para uso en este trabajo se cambiaría por la solución declarativa y justificada de las situaciones problema. También, resalta que todo inicia desde el proceso de visualización, pasando a la exploración para luego conjeturar y finalmente argumentar, en el presente trabajo estos argumentos se tomarán como la verificación de los resultados.

2.3 Metodología

La metodología que se usó para llevar a cabo este trabajo, puede considerarse emergente en el sentido que se empleó un esquema básico de desarrollo que consistía en las siguientes fases:

1. Selección de situaciones problemas que tenían como eje principal el trabajo con cónicas en los libros de cálculo mencionados anteriormente.

2. Solución analítica de situaciones problema seleccionadas.

3. Construcción en el software de GeoGebra® de situaciones problema seleccionadas.

4. Diseño de dos documentos como propuesta para desarrollar en un curso de Cálculo Integral en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

5. Diseño del documento “Prueba Piloto”.

6. Convocatoria a estudiantes y egresados de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, interesados en aportar a la investigación mediante el desarrollo de la prueba piloto.

7. Recolección de las pruebas desarrolladas y análisis de las mismas.

8. Elaboración de un banco de situaciones problema con soluciones paso a paso para ser implementadas por parte de los profesores del espacio académico ya sea como ejemplos de clase, talleres para los estudiantes o evaluaciones (ver Anexo E)

Capítulo 3. Problemas propuestos para la prueba piloto

En este capítulo, se mostrará la solución analítica, paso a paso de las situaciones problema que se seleccionaron para implementarlos en la prueba piloto:

NOTA: en algunas situaciones problema, se encontrarán enumeradas ciertas ecuaciones necesarias para su respectiva solución; esta enumeración se hace para cada una de las situaciones problema abordadas.

3.1 Problema 1

Adaptado del texto, Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart ejemplo 1 página 548.

La curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-b \leq x \leq b$ *con* $b \leq a$ *es un arco de la circunferencia* $x^2 + y^2 = a^2$. *Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje* x. *(ver ilustración 1)*

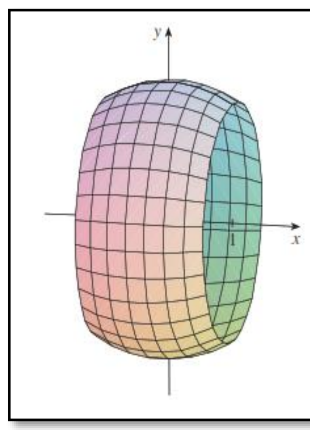


Ilustración 1. *Área de una superficie generada por un arco de circunferencia*

Se tiene la fórmula de área superficial:

$$S = \int_{-b}^{b} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Se deriva y con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Luego,

$$S = 2\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{a^2 - x^2}\ \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$S = 2a\pi \int_{-b}^{b} 1 dx$$

$$S = 2a\pi(b + b)$$

$$S = 4ab\pi$$

Por tanto, el área de la superficie obtenida al hacer girar el arco $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en torno al eje x es de $\boldsymbol{4ab\pi}$**.**

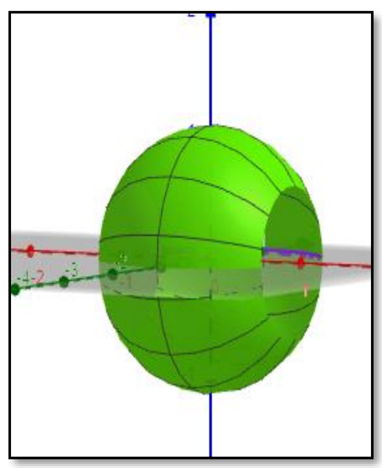


Ilustración 2. Construcción en GeoGebra® del área de una superficie.

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/trtpxmh3

3.2 Problema 2

Tomado del texto, cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 5.9 ejercicio 48 página 468

Obtenga la región acotada por la parábola $x^2 = 4py$ *y las rectas* $y = x + 8p$ *y* $y = -x + 8p$

Se sustituye la ecuación de una de las rectas en la de la parábola para determinar los puntos de corte

$$x^2 = 4p(x + 8p\ )$$

$$x^2 = 4px + 32p^2$$

$$x^2 - 4px - 32p^2 = 0$$

$$x = \frac{4p \pm \sqrt{16p^2 + 128p^2}}{2} = \frac{4p \pm \sqrt{144p^2}}{2}$$

$$x = \frac{4p \pm 12p}{2}$$

$$x = 8p \qquad\qquad x = -4p$$

Ahora se halla el área de las dos regiones mediante el uso de la simetría

$$A = 2\int_0^{4p} \left(-x + 8p - \frac{x^2}{4p}\right) dx$$

$$A = 2\left[\frac{-x^2}{2} + 8px - \frac{x^3}{12p}\right]_0^{4p}$$

$$A = 2\left[-8p^2 + 32p^2 - \frac{64p^3}{12p}\right] = 2\left(24p^2 - \frac{16}{3}p^2\right) = 2\left(\frac{56}{3}p^2\right) = \frac{112}{3}p^2$$

Por tanto, la región acotada por la parábola $x^2 = 4py$ *y las rectas* $y = x + 8p$ *y* $y = -x + 8p$ es $\boldsymbol{\frac{112}{3}p^2}$

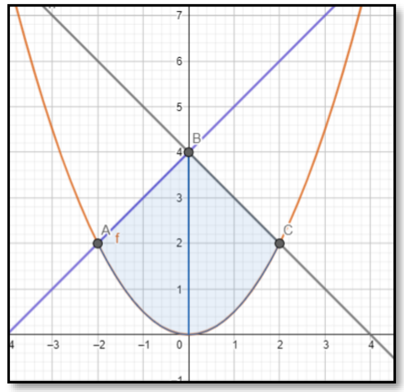


Ilustración 3. Área entre una parábola y dos rectas

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/xfyzhqga

3.3 Problema 3

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart problemas adicionales capítulo 8 ejercicio 3 página 577

Si la esfera de radio r *se corta mediante un plano cuya distancia desde el centro de la esfera es* d*, entonces la esfera se divide en dos piezas llamadas segmentos de una base. Las superficies correspondientes se llaman zonas esféricas de una base.*

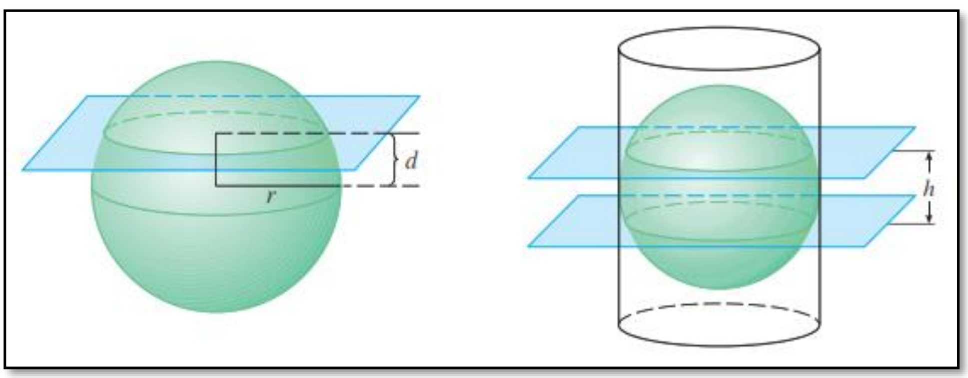


Ilustración 4. Esfera de radio r cortada por uno y dos planos respectivamente

a) *Determine las áreas superficiales de las dos zonas esféricas indicadas en la figura.*

Se tiene que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, y se deriva con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}(2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Con la ecuación del área superficial, se tiene:

$$S = \int_0^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_0^d 2\pi\sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$S = \int_0^d 2\pi\sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$S = \int_0^d 2\pi r dx = 2\pi r x\Big]_0^d = 2\pi r d$$

Para encontrar las superficies pedidas se tiene, para la parte superior, que:

$$S_{arriba} = S_{me} - S = 2\pi r^2 - 2\pi r d = 2\pi r(r - d)$$

Análogamente se hace para la parte inferior:

$$S_e - S_{arriba} = 4\pi r^2 - 2\pi r^2 + 2\pi r d = 2\pi r(r + d)$$

Por tanto, las áreas superficiales de las dos zonas esféricas son:

$$\boldsymbol{S = 4\pi r^2 - 2\pi r^2 + 2\pi r d = 2\pi r(r + d)}$$

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/fdfgsrtq

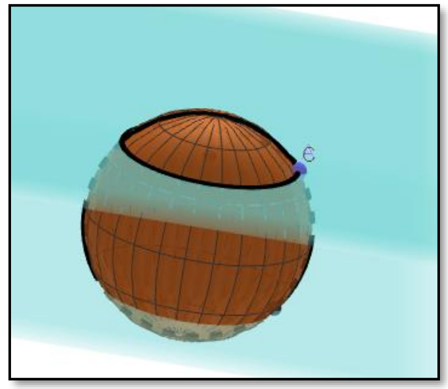


Ilustración 5. *Esfera cortada por dos planos*

b) *Una esfera de radio r se inscribe en un cilindro circular recto de radio r. Dos planos perpendiculares al eje central del cilindro y apartados una distancia h cortan una zona esférica de dos bases en la esfera. Demuestre que el área superficial de la zona esférica es igual al área superficial de la región que los dos planos cortan en el cilindro.*

La ecuación de la circunferencia, vista frontal de la esfera, es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ (1)}$$

Al derivar la ecuación (1)

$$2xx' + 2y = 0$$

$$x' = -\frac{2y}{2x}$$

$$x' = -\frac{y}{x}$$

El área superficial es

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x\sqrt{1 + (x')^2}\, dy \text{ (2)}$$

Al reemplazar x' en la ecuación (2) se tiene

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x \sqrt{1 + \left(-\frac{y}{x}\right)^2}\, dy$$

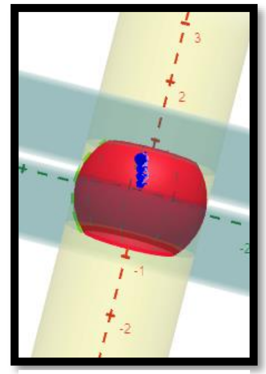


Ilustración 6*. Esfera inscrita en un cilindro circular recto*

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\, dy$$

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}\, dy$$

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$$

Ahora, al tener en cuenta que $r^2 = x^2 + y^2$

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi \sqrt{r^2}\, dy$$

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi\, r\, dy$$

$$S = [2\pi r y]_{y_1}^{y_2}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C),

$$S = 2\pi r\,(y_2 - y_1)$$

Dado que $y_2 - y_1 = h$, se tiene

$$S = 2\pi r h$$

Por tanto, el área superficial de la región que los dos planos cortan en el cilindro es igual al área superficial de la zona esférica.

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/sw7x5hd5

3.4 Problema 4

Tomado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 6.1 ejercicio 18 página 500

Obtenga la fórmula del volumen de un cono circular recto de altura h y un radio de base a, generado al hacer girar la región acotada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos.

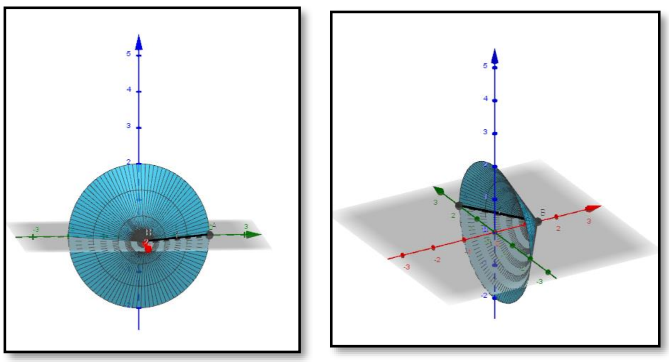


Ilustración 7. Cono circular recto.

Enlace de la construcción https://www.geogebra.org/m/qj4nhbkk

Se tiene que la ecuación general de la recta es $y = mx + b$, donde $b = h$, los puntos de corte de la recta que contiene la hipotenusa son: $(0, h)$ y $(a, 0)$, respectivamente. Con dichos puntos se procede a encontrar la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h - 0}{0 - a} = -\frac{h}{a}$$

Por lo que se tiene la ecuación de la recta

$$y = mx + b = -\frac{h}{a}x + h$$

Se despeja x

$$x = \frac{a(h - y)}{h}$$

Ahora se halla el volumen del sólido por el método de discos

$$V = \int_{0}^{h} \pi \left[\frac{a(h-y)}{h}\right]^2 dy$$

$$V = \pi \int_{0}^{h} \frac{a^2(h-y)^2}{h^2} dy$$

$$V = \frac{\pi a^2}{h^2}\left[-\frac{(h-y)^3}{3}\right]_0^h$$

Y por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

Por tanto, se obtiene que la fórmula del volumen de un cono circular recto de altura h y un radio de base a, generado al hacer girar la región acotada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos es:

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi a^2 h}{3}}$$

3.5 Problema 5

Tomado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 6.1 ejercicio 37 página 501

Un paraboloide de revolución se obtiene por la rotación de la parábola $y^2 = 4px$ *alrededor del eje* x. *Encuentre el volumen limitado por un paraboloide de revolución y un plano que se encuentra a* 10 *cm del vértice, y la sección plana de la intersección es una circunferencia de* 6 *cm de radio.*

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/fgmah4vy

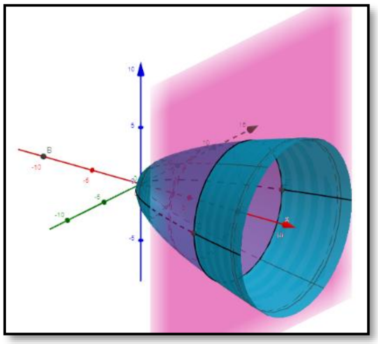


Ilustración 8. Paraboloide de revolución obtenido por la rotación de una parábola

- $y^2 = 4px$
- $x^2 + y^2 = r^2$
- $x^2 + y^2 = 36$

Se determina el valor de p, es decir la distancia focal de la parábola, para ello, se tiene que

$$x = 10;\, y = 6$$

Entonces,

$$y^2 = 4px$$

Al reemplazar

$$6^2 = 4p(10)$$

$$36 = 40p$$

$$p = \frac{36}{40}$$

$$p = \frac{9}{10}$$

Luego, el volumen, por el método de discos, es

$$V = \int_0^{10} \pi y^2 dx$$

Al sustituir y^2 en la integral

$$V = \int_0^{10} \pi\ (4px) dx$$

$$V = \int_0^{10} \pi \left(4\left(\frac{9}{10}\right)x\right) dx$$

Al resolver la integral

$$V = \frac{36}{10}\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = \frac{36\pi(100)}{20}$$

$$V = 180\,\pi\,u^3$$

Por tanto, el volumen limitado por un paraboloide de revolución y un plano que se encuentra a 10 cm del vértice, y la sección plana de la intersección es una circunferencia de 6 cm de radio es $\mathbf{180\,\pi\,u^3}$

3.6 Problema 6

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart sección 6.2 ejercicio 69 página 441

Algunos de los iniciadores de cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro Sterometría Doliorum en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de barriles). A menudo se aproxima la forma de sus lados mediante parábolas.

a) *Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-{}^{h}/_{2} \leq x \leq {}^{h}/_{2}$, donde c es una constante positiva. Pruebe que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = {}^{ch^2}/_{4}$*

b) *Demuestre que el volumen encerrado por el barril es*

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right)$$

c) *Identifique por medio de un software qué superficie de revolución se obtiene cuando* $c \leq 0$, *siendo* c *la constante dada en el ítem a.*

Solución:

a)

Datos:

- $y = R - cx^2; -{}^{h}/_{2} \leq x \leq {}^{h}/_{2};\ c > 0$. Eje de giro x
- A verificar: $r = R - d$ con $d = {}^{ch^2}/_{4}$

Al evaluar la función en ${}^{h}/_{2}$ se tiene

$$y\left({}^{h}/_{2}\right) = R - c\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$y\left({}^{h}/_{2}\right) = R - \frac{ch^2}{4}$$

Luego, si $y\left({}^{h}/_{2}\right) = r$ entonces, $y\left({}^{h}/_{2}\right) = r = R - d;$ con $d = \frac{ch^2}{4}$.

Ahora, si se evalúa la función en $\left(-\frac{h}{2}\right)$, el resultado será el mismo que se obtuvo con ${}^{h}/_{2}$

Ya que $\left({}^{h}/_{2}\right)^2 = \left(-{}^{h}/_{2}\right)^2$.

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/hayaag7m

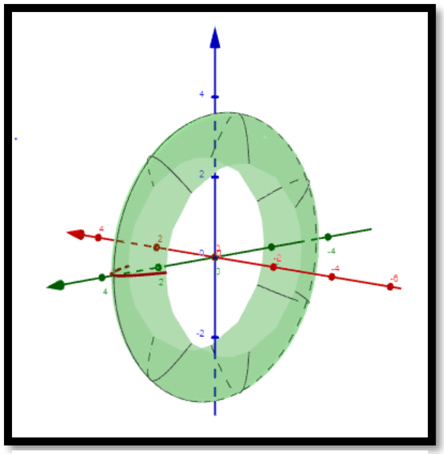


Ilustración 9. *Barril de radio r*

b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right)$$

Del método de discos para hallar el volumen se tiene:

$$V = \pi \int_a^b [r(x)]^2 dx \ \ (1)$$

Por lo que se reemplaza los valores dados en la ecuación (1)

$$V = \pi \int_{-h/2}^{h/2} (R - cx^2)^2 dx$$

Por simetría se tiene

$$V = 2\pi \int_0^{h/2} (R^2 - 2Rcx^2 + c^2x^4\ )\ dx$$

Al resolver la integral y mediante el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = 2\pi\left[R^2x - \frac{2}{3}Rcx^3 + \frac{c^2x^5}{5}\right]_0^{h/2}$$

$$V = 2\pi\left[R^2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{2}{3}Rc\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}c^2\left(\frac{h}{2}\right)^5\right]$$

$$V = 2\pi\left[R^2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{2}{24}Rch^3 + \frac{1}{160}c^2h^5\right]$$

Al simplificar se obtiene

$$V = 2\pi\left[\frac{R^2h}{2} - \frac{Rch^3}{12} + \frac{1}{160}c^2h^5\right]$$

Lo cual que equivale a

$$V = \frac{2}{3}\pi\left[\frac{3R^2h}{2} - \frac{3Rch^3}{12} + \frac{3}{160}c^2h^5\right]$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{6R^2}{2} - \frac{6Rch^3}{12} + \frac{6}{160}c^2h^5\right]$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[3R^2h - \frac{1Rch^3}{2} + \frac{3}{80}c^2h^5\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}h\left[3R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4\right]$$

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[2R^2 + R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4\right] \ (3)$$

Completando cuadrados en la expresión, $R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4$ se obtiene

$$R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4 + \frac{1}{16}c^2h^4 - \frac{1}{16}c^2h^4$$

$$R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{1}{16}c^2h^4 + \frac{3}{80}c^2h^4 - \frac{1}{16}c^2h^4$$

Factorizando y reduciendo términos semejantes

$$\left[R - \frac{1}{4}ch^2\right]^2 - \frac{1}{40}c^2h^4 \text{ (4)}$$

De los datos dados en el ítem (a), se sustituye $d = \frac{ch^2}{4}$ en la ecuación (4)

$$[R - d]^2 - \frac{1}{40}\ (ch^2)^2 \text{ (5)}$$

Nuevamente al sustituir $ch^2 = 4d$ en la ecuación (5)

$$[R - d]^2 - \frac{1}{40}\ (4d)^2$$

$$[R - d]^2 - \frac{16d^2}{40}$$

$$[R - d]^2 - \frac{2}{5}d^2$$

Luego, al sustituir la expresión $[R - d]^2 - \frac{2}{5}d^2$ en la ecuación (3) se tiene:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[2R^2 + (R - d)^2 - \frac{2}{5}d^2\right] \text{ (6)}$$

Sustituyendo $r = R - d$ en la ecuación (6)

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right]$$

Por tanto, se tiene que el volumen de un barril de altura h y radio R es:

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi h}{3}\left[2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right]}$$

c) Utilizando el software de GeoGebra®, se obtuvieron las siguientes representaciones cuando $c \leq 0$

Finalmente, dado que el ejercicio proponía que la constante $c > 0$; se realizó un análisis más allá del mismo, para ver la representación en GeoGebra® cuando $c \leq 0$:

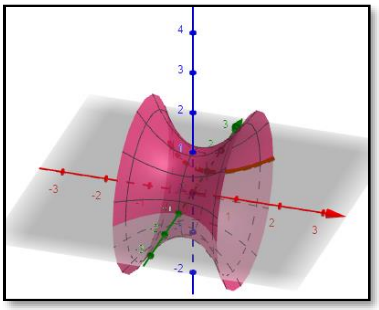


Ilustración 10. Hiperboloide de una hoja

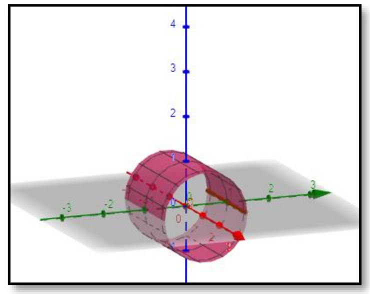


Ilustración 11. Cilindro de altura h y radio r

Si $c < 0$, la superficie es un hiperboloide de una hoja.

Si $c = 0$, la superficie es un cilindro.

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/rsfqdpzb

3.7 Problema 7

Tomado de Cálculo de una Variable, Trascendentes Tempranas de J. Stewart sección 8.3 ejercicio 42 página 562

Un rectángulo R con lados a y b se divide en dos partes R_1 y R_2 mediante un arco de la parábola que tiene sus vértices en las esquinas de R y que pasa a través de la esquina opuesta. Halle el centroide tanto de R_1 como de R_2.

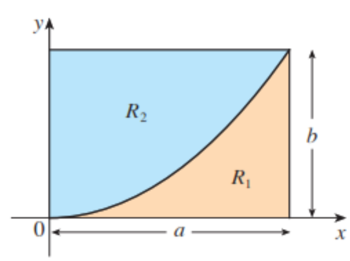


Ilustración 12. Rectángulo dividido por un arco de parábola

De la definición de centroide se tiene:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{a}^{b} x\, f(x)\, dx \quad (7)$$

Para determinar la coordenada x del centroide de la región 1, (R_1), es necesario hallar el área de esta región:

$$A_{R_1} = \int_{a}^{b} f(x) - g(x)\, dx$$

$$A_{R_1} = \int_{0}^{a} \left(\frac{b}{a^2}x^2\right) dx$$

$$A_{R_1} = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$A_{R_1} = \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}$$

$$A_{R_1} = \frac{ab}{3}$$

Luego, al reemplazar A_{R_1} en la ecuación (7)

$$\bar{x} = \frac{3}{ab}\int_{0}^{a} x\left(\frac{bx^2}{a^2}\right) dx$$

$$\bar{x} = \frac{3}{ab}\left[\frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$\bar{x} = \frac{3}{4a^3}a^4$$

$$\bar{x} = \frac{3}{4}a$$

La coordenada y del centroide de la región 1 (R_1) es:

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^a \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{ab}\int_0^a \left(\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^4}x^4\right) dx$$

$$\bar{y} = \frac{3b^2}{2a^5 b}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\bar{y} = \frac{3}{10}\frac{b}{a^5}a^5$$

$$\bar{y} = \frac{3}{10}b$$

Luego, el centroide de la región 1 es: $\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{10}b\right)$

Ahora, para determinar el área de la región 2 se va a tener en cuenta el área del rectángulo y a esta área se restará el área de la región 1:

1. La coordenada en x

$$A_{R_2} = A_{Rec} - A_{R_1}$$

$$A_{R_2} = ab - \frac{ab}{3}$$

$$A_{R_2} = \frac{2}{3}ab$$

Las coordenadas del centroide de la región 2, (r_2), son:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} = \int_0^a x\, f(x)\ dx$$

$$\bar{x} = \frac{3}{2ab}\int_0^a x\left[b - \frac{bx^2}{a^2}\right] dx$$

$$\bar{x} = \frac{3}{2ab}\left[\frac{bx^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\bar{x} = \frac{3}{2ab}\left[\frac{ba^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^4}{4}\right]$$

$$\bar{x} = \frac{3}{2ab}\left[\frac{a^2b}{2} - \frac{a^2b}{4}\right]$$

$$\bar{x} = \frac{3}{2ab}\left[\frac{2a^2b - a^2b}{4}\right]$$

$$\bar{x} = \frac{3a^2b}{2ab}\left[\frac{1}{4}\right]$$

$$\bar{x} = \frac{3}{8}a$$

2. La coordenada en y

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2ab}\int_0^a \frac{1}{2}\left[b - \frac{bx^2}{a^2}\right]^2 dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\int_0^a \left[b^2 - \left(\frac{bx^2}{a^2}\right)^2\right] dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2x^4}{a^4}\right] dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\left[b^2x - \frac{b^2}{a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\left[b^2 a - \frac{b^2}{a^4}\frac{a^5}{5}\right]$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\left[b^2 a - \frac{b^2 a}{5}\right]$$

$$\bar{y} = \frac{3b^2 a}{4ab}\left[1 - \frac{1}{5}\right]$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4}b\left[\frac{4}{5}\right]$$

$$\bar{y} = \frac{3}{5}b$$

Finalmente, se obtiene que el centroide de cada región es:

Región 1: $\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{10}b\right)$

Región 2: $\left(\frac{3}{8}a, \frac{3}{5}b\right)$

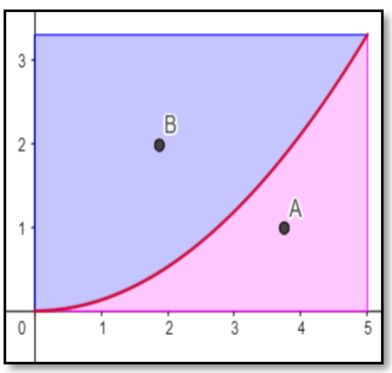


Ilustración 13. Centroide de las dos regiones que están en el triángulo.

Enlace de construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/hsc7p4z6

3.8 Problema 8

Tomado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 6.1 ejercicio 4 página 500

Encontrar el volumen de la región limitada por la curva $y = x^2 + 1$, $x = 2$; $x = 3$ girando alrededor del eje x.

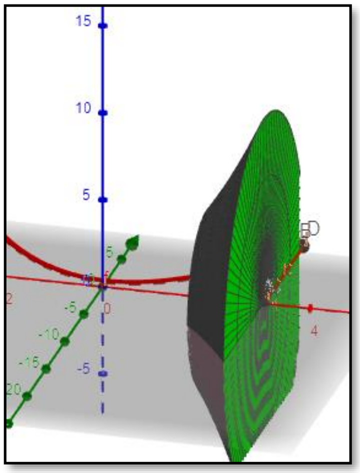


Ilustración 14. *Sólido de revolución generado por una curva y dos rectas.*

Enlace de la construcción en GeoGebra®: para visualizar el sólido de revolución en la construcción, es necesario activar el deslizador **a**.

https://www.geogebra.org/m/rzhg7wgu

a) *Utilice el **Teorema de Pappus** para encontrar dicho volumen.*

Para aplicar el **método de Pappus** es necesario determinar el área de cada una de las regiones:

Para la región 1 (R_1):

$$A = \int_2^3 (x^2 + 1)\,dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_2^3$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$A = (9 + 3) - \left({}^{8}/_{3} + 2\right)$$

$$A = 10 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}u^2$$

La coordenada y del centroide es:

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{22}\int_2^3 \frac{1}{2}(x^2+1)^2\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{44}\int_2^3 (x^4+2x^2+1)\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{44}\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_2^3$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\bar{y} = \frac{3}{44}\left[\left(\frac{243}{5}+18+3\right)-\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+2\right)\right]$$

$$\bar{y} = \frac{3}{44}\left(\frac{838}{15}\right)$$

$$\bar{y} = \frac{419}{110}$$

El volumen por el método de Pappus es:

$$V = 2\pi\bar{y}A$$

$$V = 2\pi\left(\frac{419}{110}\right)\left(\frac{22}{3}\right)$$

$$V = \frac{838}{15}\pi\, u^3$$

b) Verifique el resultado anterior usando el volumen de un sólido de revolución.

Por el método de los discos:

$$V = \pi\int_2^3 (x^2+1)^2\, dx$$

$$V = \pi\int_2^3 (x^4+2x^2+1)\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_2^3$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = \pi \left[\left(\frac{243}{5} + 18 + 3\right) - \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right)\right]$$

$$V = \frac{838}{15}\pi\, u^3$$

3.9 Problema 9

Tomado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold ejercicios de repaso capítulo 6 ejercicio 27 página 549

Halle el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la parábola $y = 9 - x^2$.

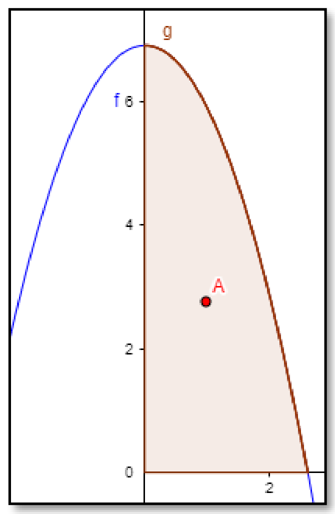


Ilustración 15. *Centroide de la región en el primer cuadrante.*

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/bgvgxcxk

Este ejercicio se realizará de forma general y luego para el caso particular

Lo primero es buscar los puntos de corte de la parábola $y = b - ax^2$ con el eje x

$$b - ax^2 = 0$$

Factorizando

$$\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\,x\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\,x\right)=0$$

Como el centroide se encuentra en el primer cuadrante, entonces

$$\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\,x\right)=0$$

$$x=\sqrt{b/a}$$

Luego, el área es:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$A=\int_0^{\sqrt{b/a}}(b-ax^2)\,dx$$

Resolviendo la integral

$$A=\left[bx-\frac{ax^3}{3}\right]_0^{\sqrt{b/a}}$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$A=b\sqrt{b/a}-\frac{a}{3}\frac{b}{a}\sqrt{b/a}$$

$$A=\sqrt{b/a}\left[b-\frac{1}{3}b\right]$$

$$A=\tfrac{2}{3}b\sqrt{b/a}\;u^2 \qquad (8)$$

Para el caso en particular, se tiene $y=9-x^2$; donde $a=1$ y $b=9$

Reemplazando los valores de a y b en la ecuación (8)

$$A = \frac{2}{3}(9)\sqrt{9/1}\ u^2$$

$$A = \frac{18}{3}(3)\ u^2$$

$$A = 18\, u^2$$

Ahora, la coordenada x del centroide es

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\, dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\sqrt{b/a}} x(b - ax^2)\, dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\sqrt{b/a}} (bx - ax^3)\, dx$$

Resolviendo la integral

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\left[\frac{bx^2}{2} - \frac{ax^4}{4}\right]_0^{\sqrt{b/a}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\frac{x^2}{4}[2b - ax^2]_0^{\sqrt{b/a}}$$

$$\bar{x} = \frac{x^2}{4A}[2b - ax^2]_0^{\sqrt{b/a}}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\bar{x} = \frac{\left(\sqrt{b/a}\right)^2}{4A}\left[2b - a\left(\sqrt{b/a}\right)^2\right] \qquad (9)$$

Sustituyendo A en la ecuación (9)

$$\bar{x} = \frac{\left(\sqrt{b/a}\right)^2}{4\left(\frac{2}{3}b\sqrt{b/a}\right)}\left[2b - a\frac{b}{a}\right]$$

$$\bar{x} = \frac{3\sqrt{b/a}}{8b}[b]$$

$$\bar{x} = \tfrac{3}{8}\sqrt{b/a} \qquad (10)$$

Para el caso en particular, se sustituye los valores $a = 1$ y $b = 9$ en la ecuación (10):

$$\bar{x} = \frac{3}{8}\sqrt{9/1}$$

$$\bar{x} = \frac{9}{8}u$$

Finalmente, la coordenada y del centroide es

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\sqrt{b/a}} \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx; \text{ con } a \neq 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\sqrt{b/a}} \left(\frac{1}{2}(b - ax^2)^2\right)\,dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_0^{\sqrt{b/a}} (b^2 - 2abx^2 + a^2x^4)\,dx$$

Resolviendo la integral

$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\left[b^2x - \frac{2abx^3}{3} + \frac{a^2x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{b/a}}$$

Por el T.F.C

$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\left[b^2\sqrt{b/a} - \frac{2ab\left(\sqrt{b/a}\right)^3}{3} + \frac{a^2\left(\sqrt{b/a}\right)^5}{5}\right] \qquad (11)$$

Sustituyendo A en la ecuación (11) y factorizando $\sqrt{b/a}$ en el numerador

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{b/a}}{2\left(\frac{2}{3}b\sqrt{b/a}\right)}\left[b^2 - \frac{2}{3}ab\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{a^2}{5}\frac{b^2}{a^2}\right]; \text{ con } b \neq 0$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4b}\left[b^2 - \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{5}b^2\right]$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4b}\left[\frac{8}{15}b^2\right]$$

$$\bar{y} = \frac{24}{60}b$$

$$\bar{y} = \frac{2}{5}b \ (5)$$

Para el caso en particular, se sustituye $b = 9$ en la ecuación (10):

$$\bar{y} = \frac{2(9)}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{18}{5}u$$

Por tanto, las coordenadas del centroide del caso particular son:

$$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \left(\boldsymbol{9/8}, \boldsymbol{18/5}\right)$$

3.10 Problema 10

Tomado de Cálculo 1 de una Variable R. Larson sección 7.2 ejercicio 67 página 467

El arco de $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0,4]$ se gira alrededor de la recta $y = b$ (ver ilustración 14)

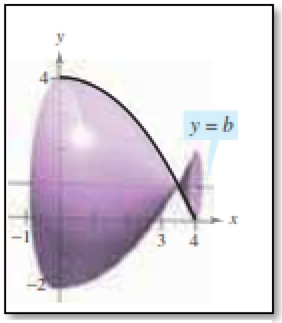


Ilustración 16. *Sólido de revolución definido por un arco en un intervalo dado.*

a) *Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b*

Como el eje de rotación del sólido es la recta $y = b$ se halla el volumen

$$V = \pi \int_0^4 \left[4 - \frac{x^2}{4} - b\right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 \left[(4 - b) - \frac{x^2}{4}\right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 \left[(4 - b)^2 - \frac{(4 - b)x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right] dx$$

$$V = \pi \left[(4 - b)^2 x - \frac{(4 - b)x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^4$$

$$V = \pi \left[(4 - b)^2 4 - (4 - b)\frac{32}{3} + \frac{64}{5}\right]$$

$$V = \pi \left[64 - 32b + 4b^2 - \frac{128}{3} + \frac{32b}{3} + \frac{64}{5}\right]$$

$$V = \pi \left[4b^2 - \frac{64}{3}b + \frac{512}{15}\right]$$

Para el apartado b, se tiene la función

$$V(b) = \pi\left[4b^2 - \frac{64}{3}b + \frac{512}{15}\right]$$

Se halla la primera y la segunda deriva la función

$$V'(b) = \pi\left[8b - \frac{64}{3}\right]$$

$$V''(b) = \pi(8) = 8\pi$$

Como la segunda derivada es positiva, quiere decir que la función es cóncava hacia arriba, por tanto, tienen un mínimo. Para encontrar ese mínimo, se iguala a cero la primera derivada

$$\pi\left[8b - \frac{64}{3}\right] = 0$$

$$8b = \frac{64}{3}$$

$$b = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

Por tanto, el volumen del sólido en función de b es de $\mathbf{\frac{8}{3}}$

Enlace de la construcción en GeoGebra®: para visualizar el sólido de revolución en la construcción, es necesario activar los deslizadores **a** y **B**

https://www.geogebra.org/m/bgek94n2

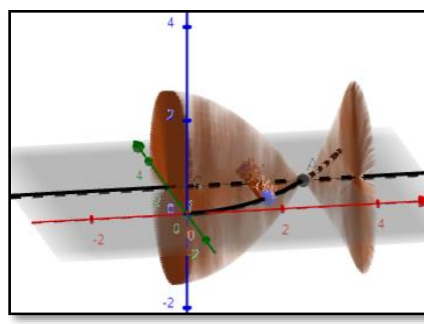


Ilustración 17. *Volumen de un sólido de revolución generado por un arco.*

3.11 Problema 11

Tomado de Cálculo 1 de una Variable R. Larson sección 7.2 ejercicio 69 página 467

Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

Cilindro circular recto	i. $\pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2$
Elipsoide	ii. $\pi \int_0^h r^2 dx$
Esfera	iii. $\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$
Cono circular recto	iv. $\pi \int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$
Toro	v. $\pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$

❖ Se toma la primera integral

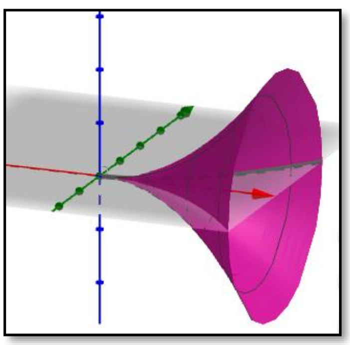


Ilustración 18. *Cono circular recto.*

Enlace de la construcción en el Software de GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/tjgdtuds

i) $\pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx$$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^h$$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - \frac{0}{3}\right)$$

$$V = \pi \frac{hr^2}{3}$$

Que corresponde al volumen de un cono circular recto inciso (d)

❖ Para la segunda integral

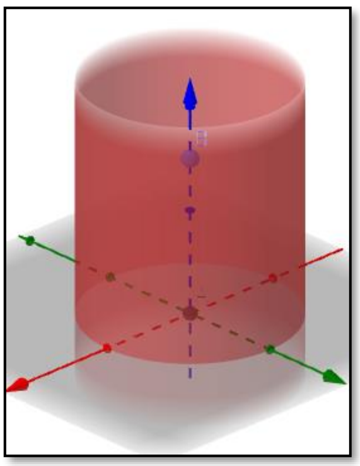


Ilustración 19. Cilindro circular recto.

Enlace de la construcción en el Software de GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/stcwbgva

ii) $\pi \int_0^h r^2 dx$

$$V = \pi \int_0^h r^2 dx$$

$$V = \pi r^2 \int_0^h dx$$

$$V = \pi r^2 (x)_0^h$$

$$V = \pi r^2 (h - 0)$$

$$V = \pi h r^2$$

Esta fórmula de volumen corresponde al cilindro circular recto inciso (a)

❖ Tomando la tercera integral:

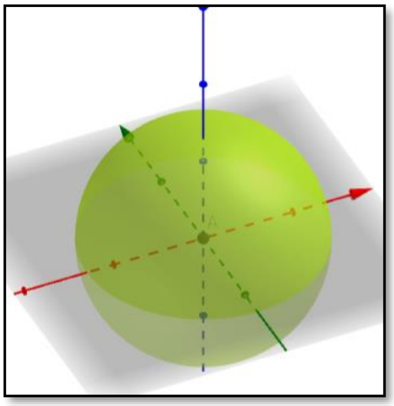


Ilustración 20. Esfera de radio r.

Enlace de la construcción en el Software de GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/ytu3mucv

iii) $\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_{-r}^{r}$$

$$V = \pi \left(r^2 (r + r) - \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3}\right)\right)$$

$$V = \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{6x^3 - 2r^3}{3}\right)$$

$$V = \pi \frac{4r^3}{3}$$

Fórmula que corresponde al volumen de una esfera, inciso (c)

❖ Para la cuarta integral

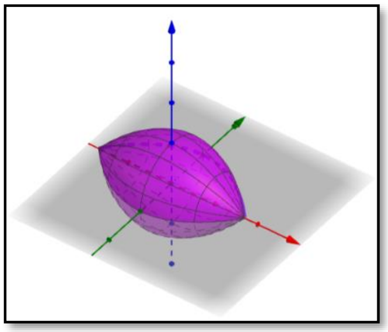


Ilustración 21. Elipsoide.

Enlace de la construcción en el Software de GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/zucfqaae

iv) $\pi \int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$$

$$V = \pi a^2 \int_{-b}^{b} \left(1-\frac{x^2}{b^2}\right) dx$$

$$V = \pi a^2 \left(x-\frac{x^3}{3b^2}\right)_{-b}^{b}$$

$$V = \pi a^2 \left((b+b)-\left(\frac{b^3}{3b^2}+\frac{b^3}{3b^2}\right)\right)$$

$$V = \pi a^2 \left(2b-\frac{2b}{3}\right)$$

$$V = \pi a^2 \left(\frac{6b-2b}{3}\right)$$

$$V = \frac{4\pi a^2 b}{3}$$

Esta fórmula corresponde al de volumen un elipsoide, inciso (b)

Finalmente, para la quinta integral

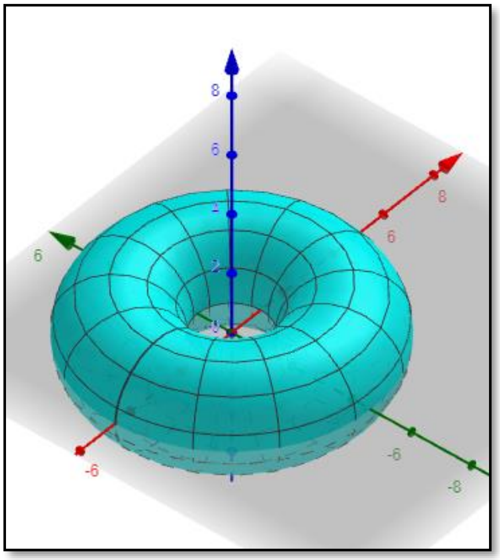


Ilustración 22. Toro de radio r

Enlace de la construcción en el Software de GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/gygkj9k5

v) $\pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2\right) dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2}dx$$

$$V = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

Se realiza sustitución trigonométrica

$$x = r\sin\theta \text{ entonces } dx = r\cos\theta d\theta$$

Al hacer la sustitución también cambian los límites de integración

Si $x = -r$

$-r = r\sin\theta$

$\theta = \sin^{-1}(-1)$

$\theta = \frac{-\pi}{2}$

Si $x = r$

$r = r\sin\theta$

$\theta = \sin^{-1}(1)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

Sustituyendo se tiene

$$V = 4\pi R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin\theta}\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$V = 4\pi R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\sqrt{1 - \sin\theta}\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$V = 4\pi R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$V = 4\pi R r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(cos2\theta + 1)d\theta$$

De nuevo se hace sustitución

$u = 2\theta$ por tanto $\theta = \frac{u}{2}$ y $d\theta = \frac{1}{2}du$

Si $\theta = \frac{-\pi}{2}$

$$\frac{u}{2} = \frac{-\pi}{2}$$

$$u = -\pi$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{u}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$u = \pi$$

De lo que se tiene

$$V = 2\pi R r^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos u \cdot \frac{1}{2} du + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \right)$$

$$V = 2\pi R r^2 \left(\frac{1}{2} [\sin u]_{-\pi}^{\pi} + [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right)$$

$$V = 2\pi R r^2 \left(\frac{1}{2} (\sin \pi - \sin(-\pi)) + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$V = 2\pi^2 R r^2$$

Esta fórmula de volumen corresponde a un toro, inciso (e)

Capítulo 4: Descripción y análisis de la prueba piloto

Inicialmente, el profesor director de trabajo de grado se reunió con los dos profesores, que estaban a cargo del espacio académico de Cálculo Integral del semestre 2021–1 de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con el fin de llevar a cabo en dichos cursos la actividad propuesta en la presente investigación, para ello, se diseñaron dos documentos con algunas de las situaciones problemas seleccionadas y adaptadas anteriormente, dichos documentos se enviaron a los profesores a cargo. A continuación, se presenta el contenido básico de ellos y dónde pueden ser vistos en extenso dentro del presente escrito.

- Documento 1: Se proponen cuatro problemas resueltos paso a paso junto con las construcciones en el software de GeoGebra, sobre los siguientes temas: área entre curvas, volúmenes, superficies de revolución, y teorema de Pappus, uno de cada uno. La propuesta era para ser desarrollados, o bien como ejemplos guiados paso a paso en clase, o como una asignación de taller sobre aplicaciones de la integral (Ver Anexo A).

- Documento 2: Se presenta seis problemas que podían ser para un parcial extra-clase, con el propósito de que las autoras de la presente investigación revisarán y analizarán los resultados entregados por los estudiantes y de esta manera, ellas asignarán una calificación que sería entregada a los profesores titulares del espacio académico. Ellos habían sido consultados y se acordó que los temas sobre los que se centraría la propuesta fueran áreas, volúmenes, superficies de sólidos de revolución, centro de masa y teorema de Pappus (ver Anexo B). De la misma manera, se adjuntó, a los profesores que orientan el espacio académico, un tercer documento en el cual se encuentran las soluciones a los ejercicios planteados en el documento 2 (ver Anexo C).

Debido al cese de las actividades académicas producido en el marco de la movilización social en Colombia, por el paro nacional estudiantil que inició el 28 de abril de 2021 y que tuvo una duración inicial de aproximadamente dos meses, resultó imposible llevar a cabo la actividad del documento uno y dos con los estudiantes que en ese momento estaban cursando el espacio académico Cálculo Integral. Así, las autoras del trabajo decidieron diseñar y adaptar una prueba piloto (ver Anexo D) que contenía 11 situaciones problemas que se basaron en los temas que se enunciaron en el documento dos. Para llevar a cabo dicha prueba, se solicitó la colaboración de 42 compañeros egresados y docentes en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, los cuales, se seleccionaron entre amigos y allegados de las autoras y el asesor de la investigación y teniendo en cuenta que los docentes en formación ya hubieran cursado el espacio académico de Cálculo Integral; la muestra que se escribió anteriormente se pensó con el fin de tener al menos tres a cuatro soluciones diferentes por cada una de las situaciones que se plantearon en dicho documento. Teniendo claro el listado de los problemas y de la población muestra, se hizo una asignación aleatoriamente de los ejercicios y a partir de ello, se organizó un Word con las indicaciones generales y el ejercicio especifico, el cual fue enviado personalmente a cada participante por medio de correo electrónico o redes sociales.

Una vez enviada la invitación a los 42 compañeros, sólo se obtuvo la respuesta de 19, (10 egresados y 9 de pregrado), los cuales resolvieron la situación problema que le correspondió a cada uno; a continuación, se realiza un análisis general de las respuestas dadas a las situaciones problema que se presentó como una prueba piloto. Cabe resaltar que se envió un ejercicio a cada participante, y estos tenían un tiempo de ocho días para resolverlo y enviar la respuesta nuevamente por e-mail.

El análisis de los resultados se realizó teniendo en cuenta los cuatro apartados que se mencionaron en cada una de las pruebas piloto, es así como se solicitó a cada compañero realizar los siguientes ítems según el ejercicio propuesto:

a) Resolverlo paso a paso.
b) Si hace uso de un software a plataforma matemática por favor indicar (en qué sentido se usó; conjeturar, explorar, verificar, entre otros) y evidenciar.

c) Su opinión sobre la pertinencia de abordar este ejercicio en el espacio académico de Cálculo Integral de la Licenciatura en Matemáticas.

d) Indicar si el ejercicio le permitió afianzar sus conocimientos sobre cónicas en torno al Cálculo Integral.

4.1 Resolución del problema

En este apartado se crearon dos categorías para analizar las producciones, la primera en relación con la completes de la solución y la segunda frente al algoritmo de solución empleado.

4.1.1 Completa e incompleta

Se analiza si el participante realizó completa o incompletamente la solución a la situación problema planteada. (La instrucción solicitaba realizarla paso a paso)

4.1.1.1 Problema 1:

Este ejercicio lo resolvieron dos participantes egresados, en el cual, uno de ellos lo resolvió de manera completa, sin embargo, la respuesta que obtuvo no fue correcta. Como se evidencia en la ilustración 22, el participante (egresado), usó el software de GeoGebra®, con el fin de explorar y visualizar el sólido que se iba a obtener mediante la rotación del arco de la circunferencia respecto al eje x, lo cual le permitió entender la situación problema propuesta y de esta manera plantear alguna solución o estrategia para solucionar dicha situación, tal y como lo menciona Rodríguez (2017), el uso del software de GeoGebra® ayuda a que el estudiante pueda modelar situaciones problemas y a partir de ello, inicie con los procesos matemáticos, es decir, inicie con la visualización, posteriormente con la exploración, luego con la conjeturación y finalmente con el proceso de la argumentación y de esta manera realizar la respectiva verificación mediante la argumentación analítica.

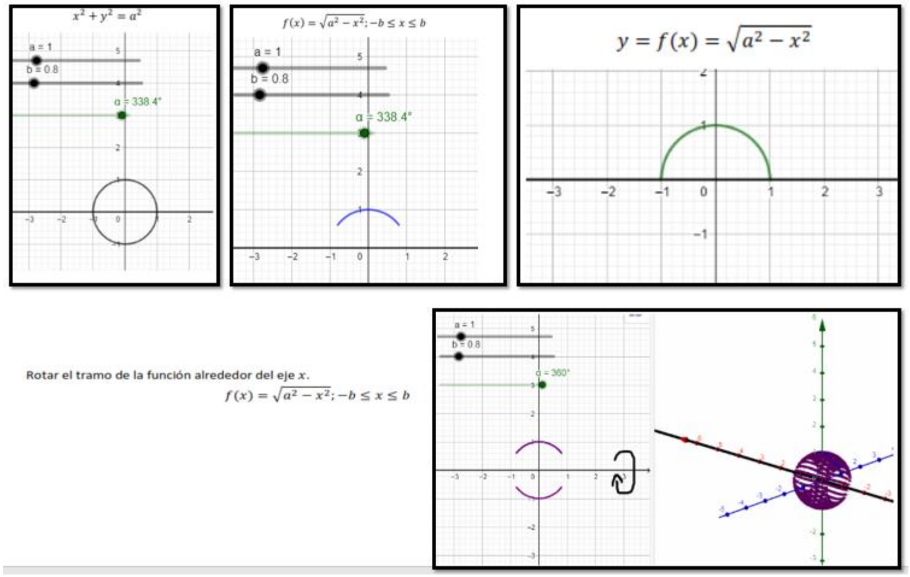


Ilustración 23. *Construcciones realizadas por un egresado.*

4.1.1.2 Problema 2:

Fue resuelto por cuatro participantes, tres de ellos son estudiantes de pregrado y el otro egresado. Solo hubo un participante que lo solucionó de manera completa y los demás cometieron errores u omitieron pasos significativos que impidieron una solución adecuada. El ejercicio solicitaba encontrar la región acotada por la parábola $x^2 = 4py$ y las rectas

$y = x + 8p$ y $y = -x + 8p$ (ver ilustración 24)

Dos participantes, ambos de pregrado obtuvieron la respuesta, que se observan en las ilustraciones 25 y 26, en la cual se puede evidenciar que tomaron las cuatro regiones para realizar dicha área, es decir, que hicieron una interpretación alternativa del enunciado que dentro del contexto del mismo también podía ser acertada.

Asumieron, que el área de las tres funciones era: $A = \sum_{i=1}^{4} R_i$ y no la interpretaron como la acotada por la parábola y la que está bajo las dos rectas. En este sentido, es importante en este ejercicio hacer claridad sobre lo que se busca determinar.

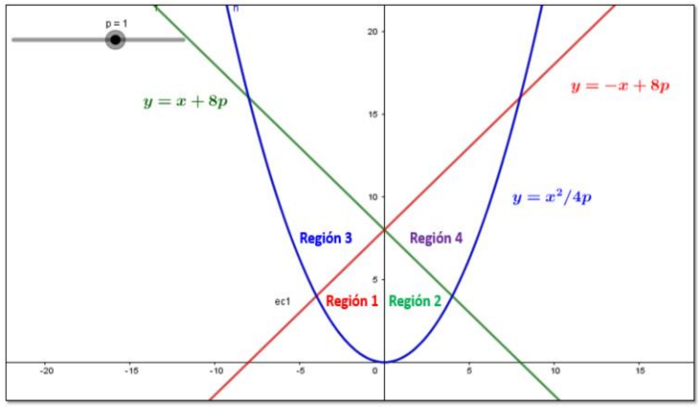


Ilustración 24. *Regiones acotadas por una parábola y dos rectas*

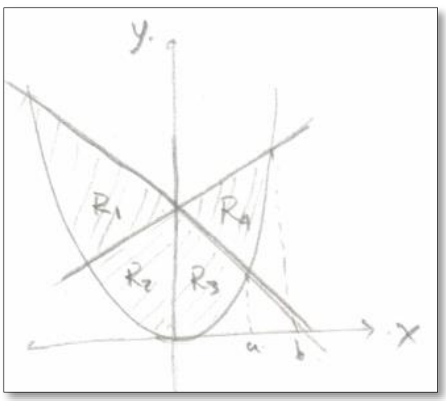


Ilustración 25*. Expresa que el área de las tres funciones es la sumatoria de todas las regiones.*

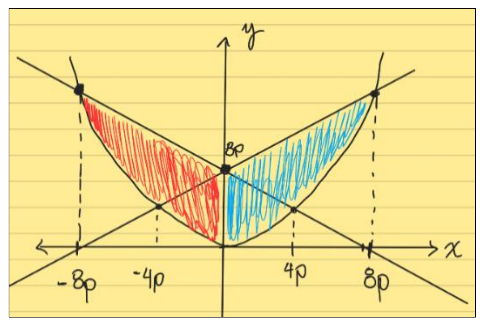


Ilustración 26. *Indica que el área de las tres funciones es lo coloreado por azul y rojo, la cual era simétrica con respecto al eje y.*

Otra situación que se presentó al analizar dichas actividades fue que el ejercicio al ser generalizado, tuvo en cuenta dos casos, cuando $p > 0$ y $p < 0$, pero en los dos casos la región sombreada era la misma, por tal motivo el área debía ser igual, pero en la ilustración 27, se evidencia que no se obtuvo este resultado, mostrando que las áreas obtenidas eran distintas.

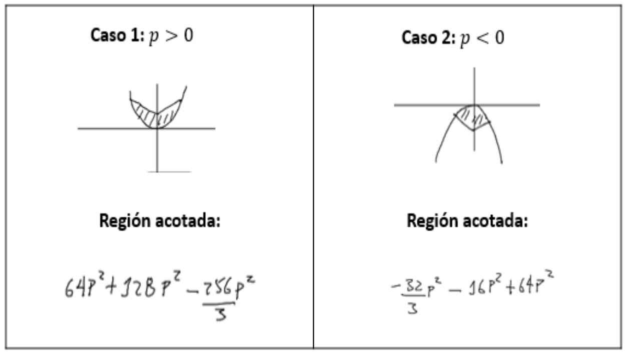
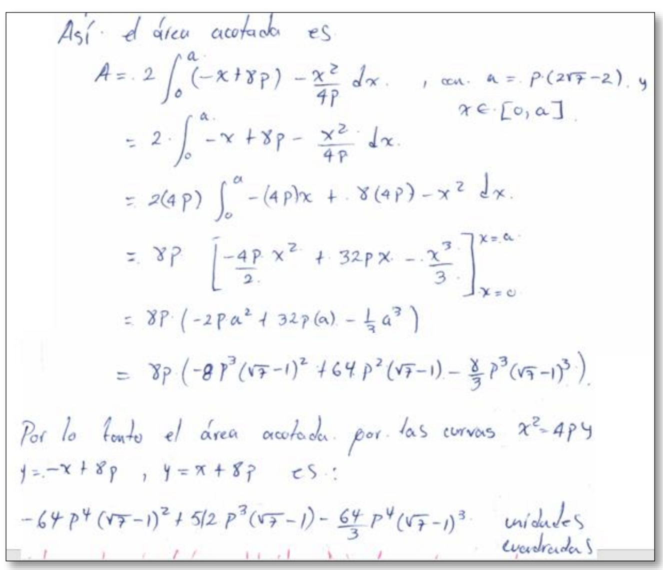


Ilustración 27. *En los casos, p > 0 y p < 0, el área obtenida fue distinta.*

Otra situación que se observó es que al determinar los límites de integración de la integral estos quedaron inadecuadamente establecidos, por lo que el resultado no fue el esperado. (ver ilustración 28); el participante se percató del error y volvió a realizar el proceso adecuadamente, adjunto un documento de 10 páginas, en el cual se encontraba las dos soluciones que realizó de dicha situación problema en los dos intentos que realizó y en las conclusiones generales que él escribió, mencionó que realizó dos intentos para encontrar la solución a lo planteado en dicha situación. (ver ilustración 29); esto hace evidente lo propuesto por Polya citado en Sepúlveda 2009, donde resalta la importancia del autorreflexión como parte del proceso metacognitivos, el cual le permite al sujeto construir y ampliar su conocimiento.


Así el área acotada es

$$A = 2\int_0^a (-x+8p) - \frac{x^2}{4p}\,dx, \quad \text{con } a = p(2\sqrt{7}-2), \text{ y } x \in [0,a]$$

$$= 2\int_0^a -x + 8p - \frac{x^2}{4p}\,dx$$

$$= 2(4p)\int_0^a -(4p)x + 8(4p) - x^2\,dx$$

$$= 8p\left[-\frac{4p}{2}x^2 + 32px - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a}$$

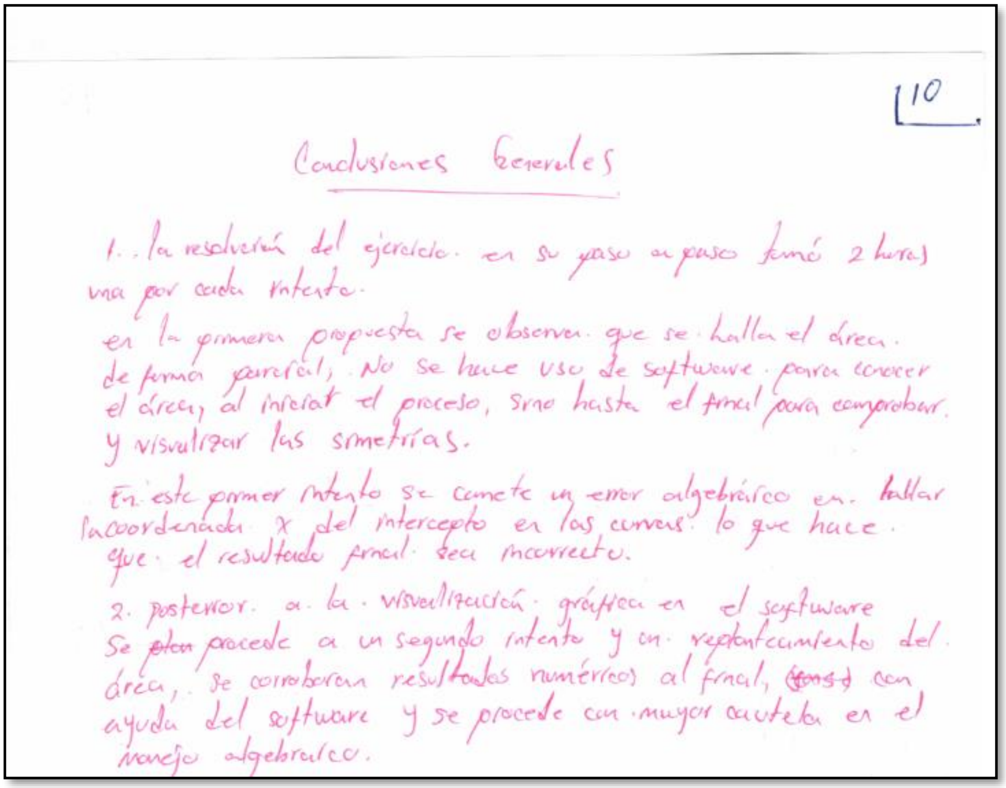
$$= 8p\left(-2pa^2 + 32p(a) - \frac{1}{3}a^3\right)$$

$$= 8p\left(-8p^3(\sqrt{7}-1)^2 + 64p^2(\sqrt{7}-1) - \frac{8}{3}p^3(\sqrt{7}-1)^3\right)$$

Por lo tanto el área acotada por las curvas $x^2 = 4py$, $y = -x + 8p$, $y = x + 8p$ es:

$-64p^4(\sqrt{7}-1)^2 + 512p^3(\sqrt{7}-1) - \frac{64}{3}p^4(\sqrt{7}-1)^3$ unidades cuadradas

Ilustración 28. *Uno de los límites de integración no fue el correcto.*



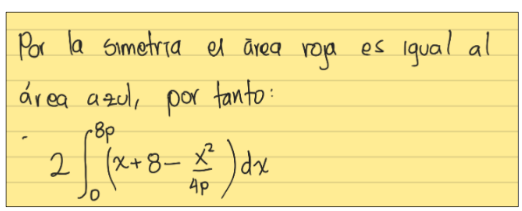
10

Conclusiones Generales

1. la resolución del ejercicio en su paso a paso tomó 2 horas una por cada intento.
en la primera propuesta se observa que se halla el área de forma parcial, No se hace uso de software para conocer el área, al iniciar el proceso, sino hasta el final para comprobar y visualizar las simetrías.
En este primer intento se comete un error algebraico en hallar la coordenada x del intercepto en las curvas lo que hace que el resultado final sea incorrecto.
2. posterior a la visualización gráfica en el software se ~~plan~~ procede a un segundo intento y un replanteamiento del área, se corroboran resultados numéricos al final, con ayuda del software y se procede con mayor cautela en el manejo algebraico.

Ilustración 29. *El participante realizó observaciones generales sobre lo realizado.*

Finalmente, uno de los participantes olvidó escribir el parámetro p de la función de la recta $x + 8p$. lo que altera significativamente el resultado, pero además restringe la solución a un caso muy particular donde la distancia focal de la parábola es unitaria. (ver ilustración 30)



Por la simetria el área roja es igual al área azul, por tanto:

$$2\int_0^{8p}\left(x+8-\frac{x^2}{4p}\right)dx$$

Ilustración 30*. Falto escribir el parámetro p en la función de la recta.*

4.1.1.3 Problema 3:

El ejercicio fue resuelto por dos participantes, (egresado y estudiante de pregrado); ninguno lo resolvió completamente. El participante egresado mencionó textualmente, que no había logrado plantear la integral de la superficie de revolución dado que el ejercicio de maestro de secundaria no le ha dado uso al cálculo integral. (ver ilustración 31); Esto permite inferir que algunos licenciados que son egresados de la Licenciatura en Matemáticas de la universidad ingresan a trabajar a una institución educativa en donde solo se enfatizan por tener presente lo que enseñan a sus estudiantes, olvidando por completo su proceso continuo de formación como profesional.

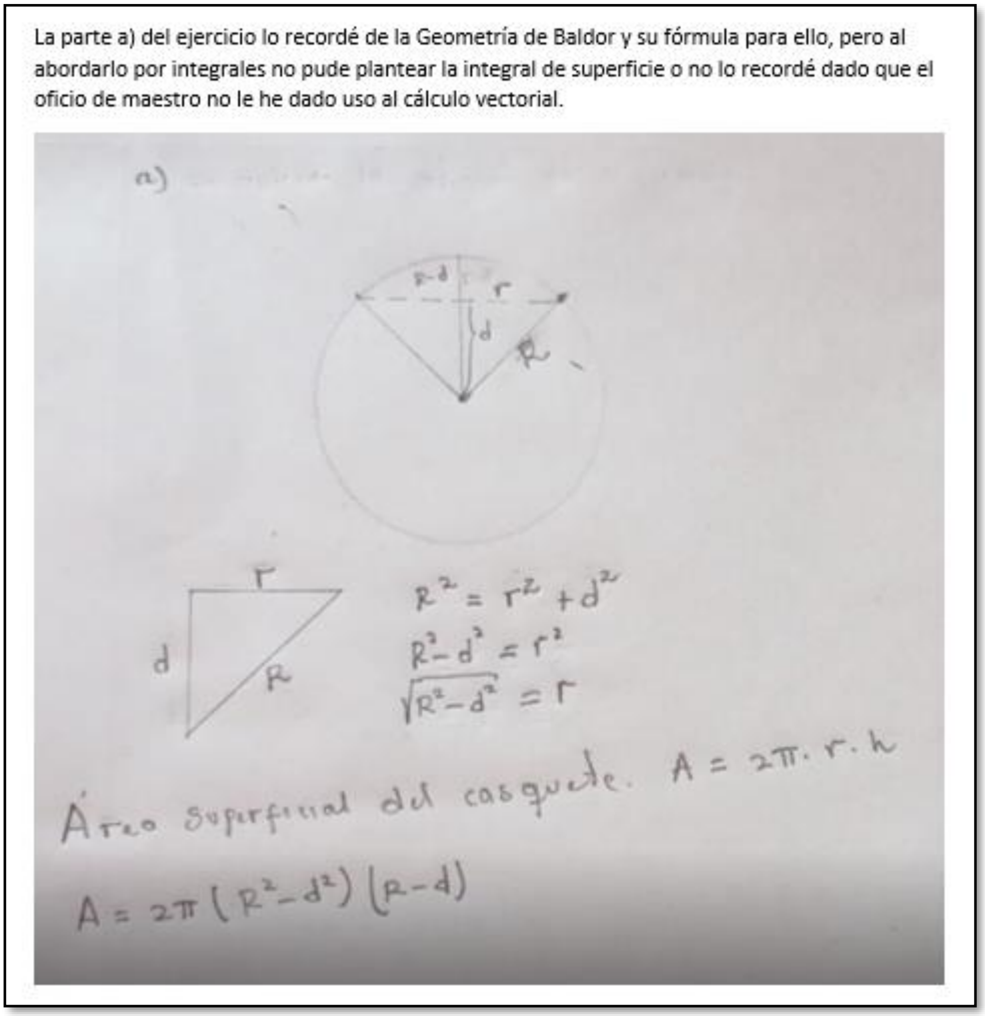


Ilustración 31. El egresado no logró solucionar la situación problema.

4.1.1.4 Problemas 4, 5 y 6:

Estos ejercicios lo resolvieron uno, tres y dos participantes respectivamente, los cuales lo solucionaron completos, paso a paso, y obteniendo las respuestas esperadas, en la cual se puede evidenciar que cada participante realiza los procesos matemáticos, como lo es la visualización a partir de la construcción a lápiz y papel, debido a que hay ciertas situaciones problemas que se pueden solucionar con un bosquejo que realice de dicha situación y partir de esta plantear la estrategia a usar para resolver el problema y de esta manera conjeturar lo obtenido.

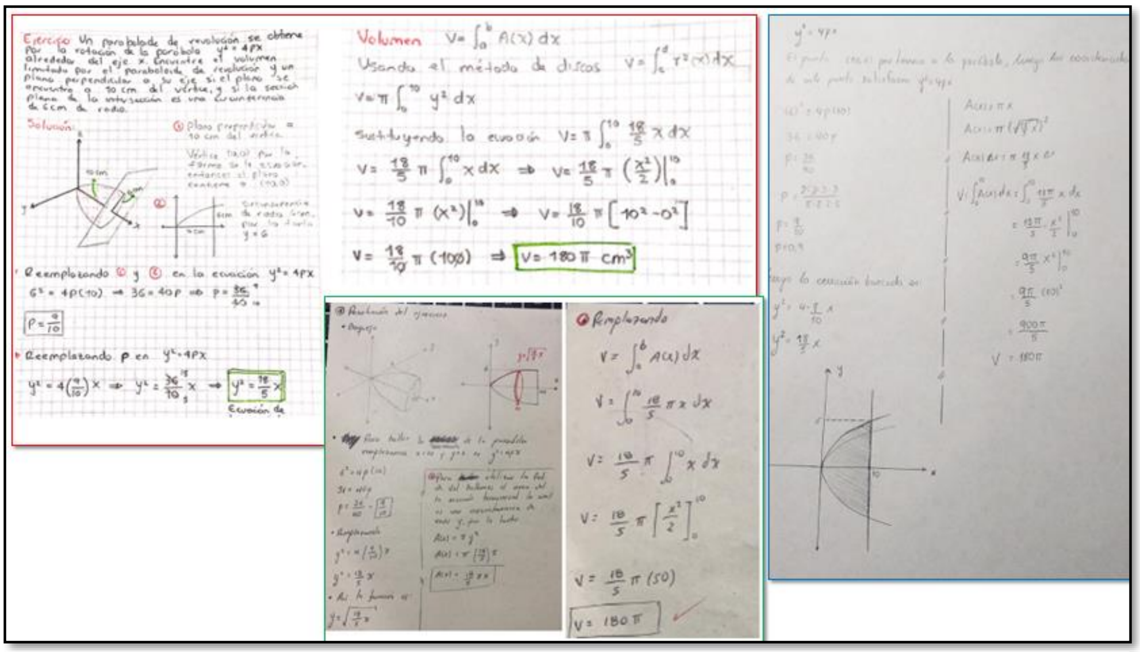


Ilustración 32. *Soluciones de tres participantes al problema cinco.*

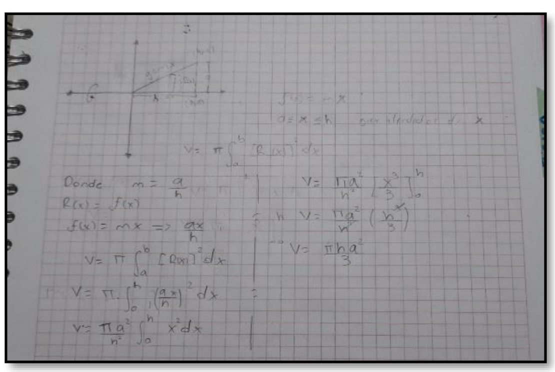


Ilustración 33. *Solución correcta del ejercicio 4.*

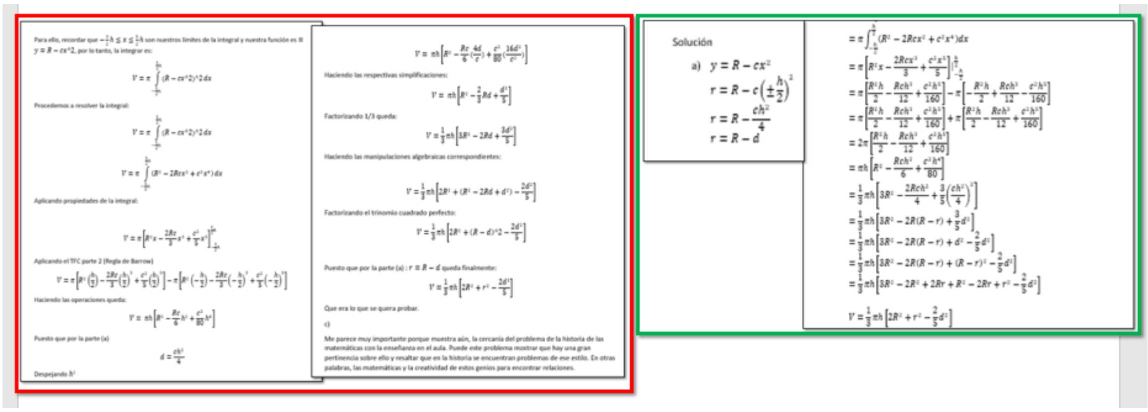
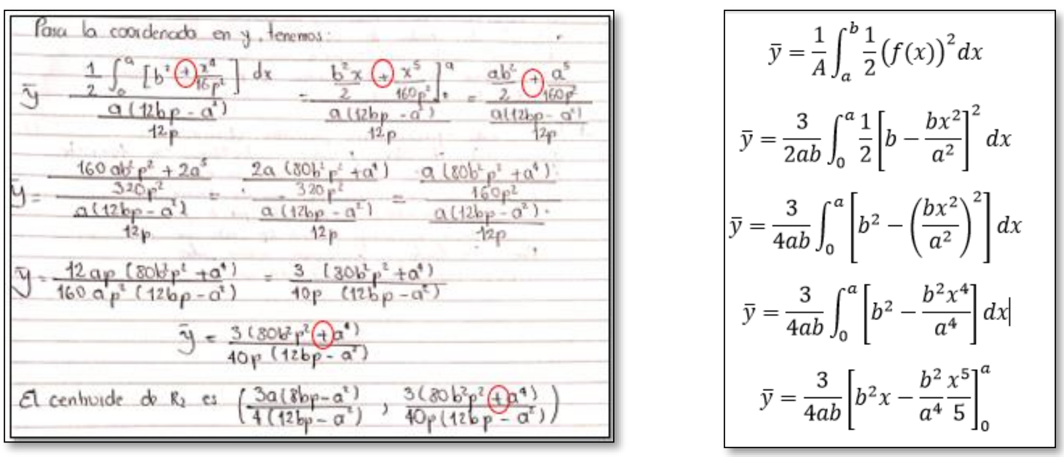


Ilustración 34. Soluciones de dos participantes al problema seis.

4.1.1.5 Problema 7:

La participante abordó la situación problema usando otras variables diferentes a las dadas en la ilustración que acompañaba al enunciado; los resultados que se obtuvieron en el centroide de la región dos fueron diferentes a los esperados, debido a que ella, la participante, se equivocó en un signo, lo cual cambia el resultado total, tal y como se evidencia en la ilustración (35) se hace una comparación de las dos maneras en las que se abordó la situación problema y de la misma manera se encierra en círculos de color rojo el error que se evidenció en hallar la coordenada y de la región 2 que se solicitaba en el ejercicio.



Para la coordenada en y, tenemos:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a \left[b^2 + \frac{x^4}{16p^2}\right] dx}{\frac{a(12bp-a^2)}{12p}} = \frac{\left.\frac{b^2x}{2} + \frac{x^5}{160p^2}\right]_0^a}{\frac{a(12bp-a^2)}{12p}} = \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{a^5}{160p^2}}{\frac{a(12bp-a^2)}{12p}}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{160ab^2p^2+2a^5}{320p^2}}{\frac{a(12bp-a^2)}{12p}} = \frac{\frac{2a(80b^2p^2+a^4)}{320p^2}}{\frac{a(12bp-a^2)}{12p}} = \frac{\frac{a(80b^2p^2+a^4)}{160p^2}}{\frac{a(12bp-a^2)}{12p}}$$

$$\bar{y} = \frac{12ap(80b^2p^2+a^4)}{160ap^2(12bp-a^2)} = \frac{3(80b^2p^2+a^4)}{40p(12bp-a^2)}$$

$$\bar{y} = \frac{3(80b^2p^2+a^4)}{40p(12bp-a^2)}$$

El centroide de R_2 es $\left(\frac{3a(8bp-a^2)}{4(12bp-a^2)}, \frac{3(80b^2p^2+a^4)}{40p(12bp-a^2)}\right)$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2 dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2ab}\int_0^a \frac{1}{2}\left[b - \frac{bx^2}{a^2}\right]^2 dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\int_0^a \left[b^2 - \left(\frac{bx^2}{a^2}\right)^2\right] dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2x^4}{a^4}\right] dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab}\left[b^2x - \frac{b^2}{a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

Ilustración 35. Se comete un error con respecto al signo y se hace la comparación de la forma de escribir un ejercicio y de esta manera buscar la comprensión y su solución.

4.1.1.7 Problema 8:

Este ejercicio fue resuelto por un estudiante de pregrado; se solicitaba determinar el centroide de la región acotada entre una parábola y el primer cuadrante. El participante mencionó que observó y se orientó por un video en YouTube para solucionarlo debido a que en su paso por el espacio académico de Cálculo Integral no había visto dicho tema. Aun así, no logra la respuesta esperada. (ver ilustración 36); Esta acción y la indicación dada por el participante pone de relieve varios cuestionamientos que van más allá de los objetivos del presente trabajo, entre otros, ¿qué está ocurriendo con los desarrollos de los contenidos temáticos de los cursos de fundamentación de la licenciatura?

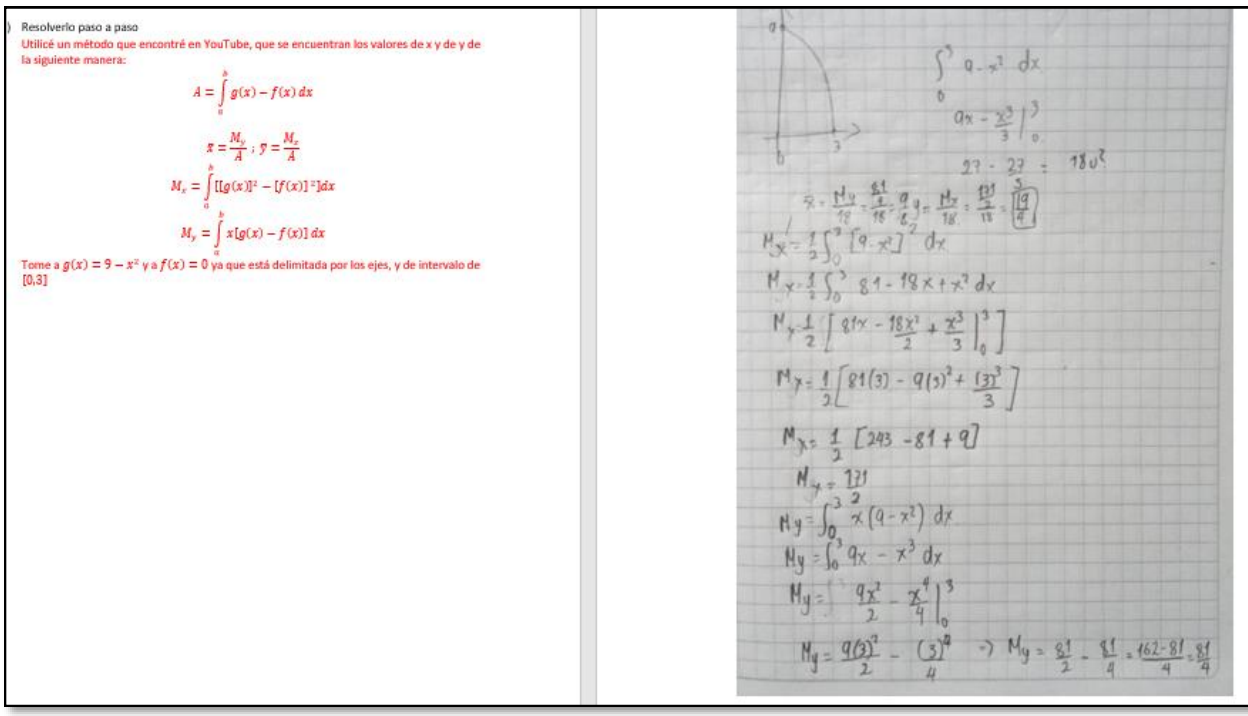


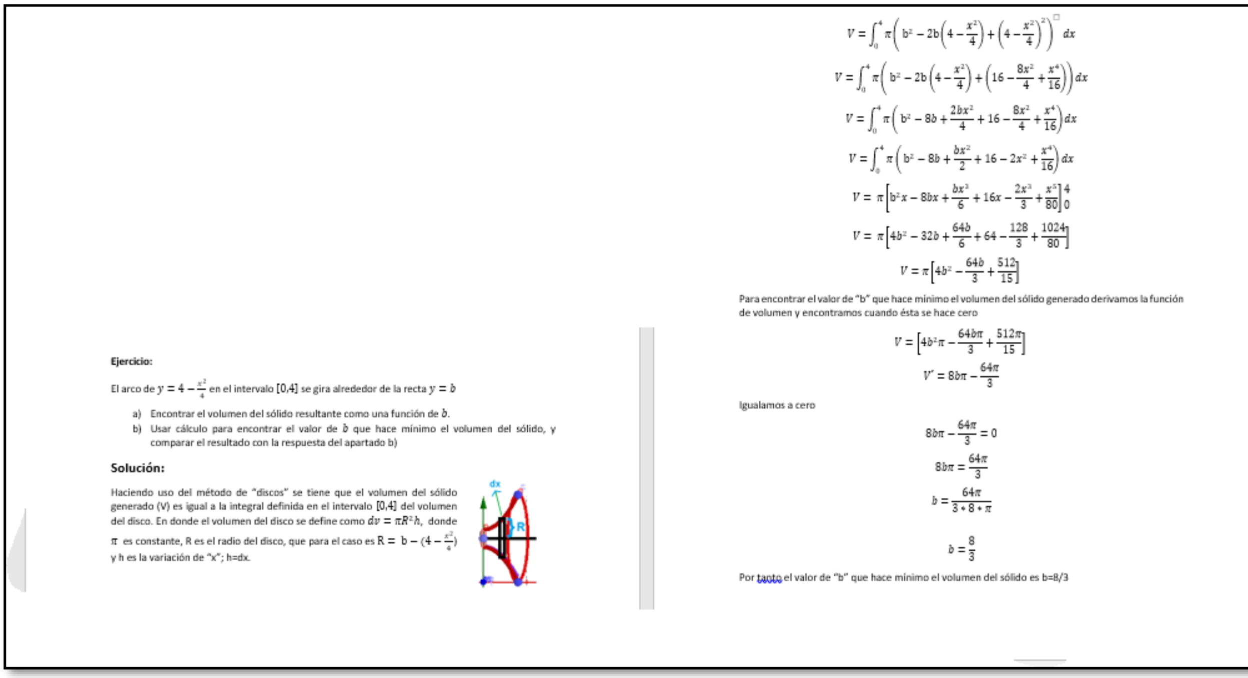
Ilustración 36. *El estudiante pone de manifiesto que se orientó por YouTube para resolver la situación problema.*

4.1.1.8 Problema 9:

Debido a que no todos los participantes a quienes se les envió la invitación pudieron efectivamente colaborar, por diversas razones, no se obtuvo una solución a dicho ejercicio.

4.1.1.9 Problema 10 y 11:

Fueron resueltos por un participante cada uno, se solucionaron completos, paso a paso y obteniendo las respuestas esperadas.



Ejercicio:

El arco de $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0,4]$ se gira alrededor de la recta $y = b$

a) Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b.

b) Usar cálculo para encontrar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido, y comparar el resultado con la respuesta del apartado b)

Solución:

Haciendo uso del método de "discos" se tiene que el volumen del sólido generado (V) es igual a la integral definida en el intervalo $[0,4]$ del volumen del disco. En donde el volumen del disco se define como $dv = \pi R^2 h$, donde π es constante, R es el radio del disco, que para el caso es $R = b - (4 - \frac{x^2}{4})$ y h es la variación de "x"; h=dx.

$$V = \int_0^4 \pi\left(b^2 - 2b\left(4 - \frac{x^2}{4}\right) + \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)^2\right) dx$$

$$V = \int_0^4 \pi\left(b^2 - 2b\left(4 - \frac{x^2}{4}\right) + \left(16 - \frac{8x^2}{4} + \frac{x^4}{16}\right)\right) dx$$

$$V = \int_0^4 \pi\left(b^2 - 8b + \frac{2bx^2}{4} + 16 - \frac{8x^2}{4} + \frac{x^4}{16}\right) dx$$

$$V = \int_0^4 \pi\left(b^2 - 8b + \frac{bx^2}{2} + 16 - 2x^2 + \frac{x^4}{16}\right) dx$$

$$V = \pi\left[b^2x - 8bx + \frac{bx^3}{6} + 16x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{80}\right]_0^4$$

$$V = \pi\left[4b^2 - 32b + \frac{64b}{6} + 64 - \frac{128}{3} + \frac{1024}{80}\right]$$

$$V = \pi\left[4b^2 - \frac{64b}{3} + \frac{512}{15}\right]$$

Para encontrar el valor de "b" que hace mínimo el volumen del sólido generado derivamos la función de volumen y encontramos cuando ésta se hace cero

$$V = \left[4b^2\pi - \frac{64b\pi}{3} + \frac{512\pi}{15}\right]$$

$$V' = 8b\pi - \frac{64\pi}{3}$$

Igualamos a cero

$$8b\pi - \frac{64\pi}{3} = 0$$

$$8b\pi = \frac{64\pi}{3}$$

$$b = \frac{64\pi}{3 * 8 * \pi}$$

$$b = \frac{8}{3}$$

Por tanto el valor de "b" que hace mínimo el volumen del sólido es b=8/3

Ilustración 37. *Solución de la situación problema 10 dada por un egresado*

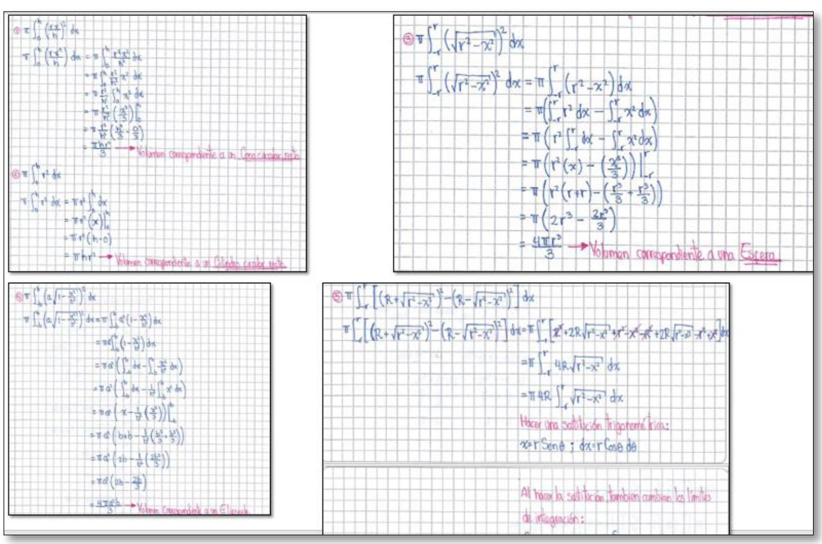


Ilustración 38. *Solución hecha por un participante a la situación problema 11.*

4.1.2 Algoritmo que usó para solucionar la situación problema planteada

En este apartado se identificaron diferentes tipos de proceder algorítmico (cálculo integral, cálculo en varias variables o geometría), que usaron los participantes para resolver las situaciones problema que se les propuso a cada uno. Dentro de las cuales se puede mencionar que la mayoría de estos usaron el cálculo integral como método para argumentar sus procesos, de la mano de la geometría analítica para ver propiedades de las cónicas, sin embargo, hubo algunos casos en los que se logró evidenciar el uso de cálculo en varias variables, ya que se observa el uso de integrales dobles y coordenadas polares. Así como lo dice Sepúlveda (2009), la RP es "hacer matemática", y, destacar las diferentes soluciones que se plantearon para las situaciones problema, muestra la pertinencia de las misma para dicho propósito. A continuación, se presenta algunas evidencias al respecto:

$$x = r\cos(\theta)\,;\, y = r\,sen(\theta)$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2\cos^2(\theta) - r^2 sen^2(\theta)}}\, r dr d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2\left(\cos^2(\theta) + sen^2(\theta)\right)}}\, dr d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2(1)}}\, dr d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr d\theta$$

$$S = a\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr d\theta$$

Ilustración 39. *Se evidencia el uso de conceptos pertenecientes al área de Cálculo en Varias Variables*

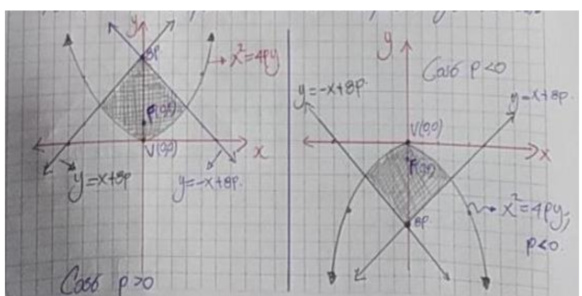
4.2 Software

En este apartado se analizan dos aspectos, el primero en relación con el uso que se le da dentro del proceso de solución (esto es si se emplea o no, con evidencias proporcionadas) y el segundo, para los casos en que se le da uso, en referencia con las acciones para las cuáles se empleó.

4.2.1 Uso

Hubo 10 participantes que usaron el software GeoGebra® para apoyar el proceso de solución del ejercicio que se propuso, en términos de lo descrito por Sombra (2019), lo estarían implementando como herramienta en los procesos cognitivos de visualizar, explorar o conjeturar. Seis participantes adjuntaron la evidencia del uso mientras que los otros cuatro participantes manifestaron haberla usado, pero no adjuntaron las evidencias.

Los nueve participantes restantes, mencionaron en el documento, que no habían usado ningún software para dar solución al problema propuesto; sin embargo, es importante mencionar que la mayoría de los participantes 16 de 19 usaron alguna representación (lápiz y papel, software o apple) para dar sustento a lo realizado.



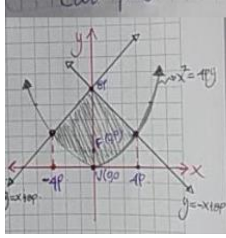


Ilustración 40. *El estudiante usó la representación que realizó a lápiz y papel para comprobar los resultados que iba obteniendo en la situación problema dada.*

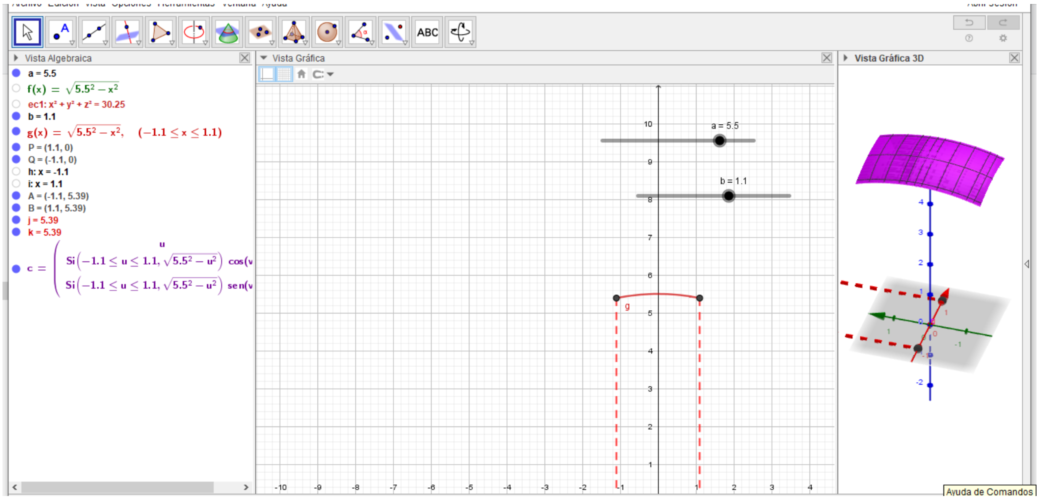


***Ilustración 41**. Uso del software de GeoGebra con el fin de corroborar los resultados que se obtuvieron.*

4.2.2 Tipo de uso

Los participantes que usaron Software manifestaron con qué finalidad lo emplearon, a continuación, se sintetizan las ideas expresadas y se presentan en relación con la herramienta empleada.

4.2.2.1 Uso el software de GeoGebra®:

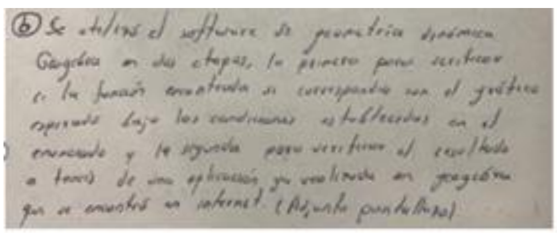
A continuación, se encuentra los aspectos en que los estudiantes mencionaron al haber hecho uso del Software de GeoGebra® en el momento en el que lo usaron para solucionar la situación problema.

- Explorar y mediante la visualización evidenciar propiedades que a simple vista no se puedan detectar.
- Comprobar los resultados obtenidos.
- Comprobar conjeturas dadas inicialmente al abordar la solución de un ejercicio.

- Observar y comprobar los puntos de intersección de las funciones dadas.
- Verificar si la función encontrada correspondía con el gráfico esperado bajo las condiciones dadas en el enunciado del ejercicio.
- Entender la situación problema.
- Conjeturar posibles soluciones o aproximaciones a la solución.

4.2.2.2. Uso de una aplicación ya realizada en GeoGebra®

En los resultados obtenidos de la prueba piloto, un participante mencionó que había usado un Apple en GeoGebra® que se encontraba en internet, con el fin de verificar el resultado obtenido. (ver ilustración 40)


b) Se utilizó el software de geometría dinámica Geogebra en dos etapas, la primera para verificar si la función encontrada si correspondía con el gráfico esperado bajo las condiciones establecidas en el enunciado y la segunda para verificar el resultado a través de una aplicación ya realizada en geogebra que se encontró en internet. (Adjunto pantallazo)

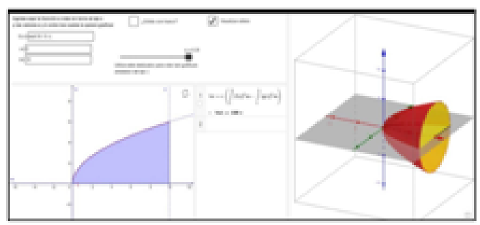


Ilustración 42. *Apple que estaba disponible en Internet, la cual se usó para corroborar los resultados.*

4.3 Pertinencia

En este apartado se menciona si el ejercicio propuesto a cada compañero resultaría pertinente para abordarlo en una clase de Cálculo Integral de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas y en particular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Frente a ello se obtuvieron las siguientes afirmaciones:

Los ejercicios fueron pertinentes debido a que:

- Mejoró la comprensión del tema “área de una superficie de revolución”, de igual manera, es un ejemplo clásico para introducir el tema desde la superficie más conocida como lo es la esfera.
- Obliga a plantear hipótesis y conjeturar
- Ayuda a conceptualizar el área entre curvas
- Se puede resolver cierta situación problema de distintas maneras.
- El problema geométrico les oportuno en la enseñanza del cálculo ya que permite ilustrar el cálculo de áreas no regulares como aplicación importante del concepto de integral.
- Permite trabajar el volumen de sólidos de revolución a partir de figuras que se han trabajado desde la escuela, como lo es el triángulo para conformar un cono.
- Permite mostrar habilidades para interpretar y plantear una solución a un problema involucrando el cálculo de una integral.
- Visibiliza las aplicaciones de integrales, las cuales en muchas ocasiones quedan como un ejercicio mecánico.
- Estos ejercicios trabajan aspectos fundamentales de las matemáticas, como lo son la modelación, razonamiento, representación, y la mecanización de procedimientos.
- Con respecto al ejercicio de centroide permite visualizar la aplicación de integrales en contextos reales.
- Permite que se establezca una relación entre conceptos conocidos como: determinación de volúmenes de sólidos (cilindros, para el caso de los discos), la integral (métodos de integración de funciones polinómicas e integrales definidas), la derivada, determinación de máximos y mínimos de una función a partir de la derivada.
- Permite al estudiante acercarse al concepto de integral definida, de la misma manera, permite evidenciar que hay situaciones (ejercicios que se pueden representar en un software dinámico) que se pueden resolver haciendo uso de la integral definida.

4.4 Ampliación del conocimiento en cónicas y Cálculo Integral

En este apartado se analizan las referencias que las producciones de los participantes hacen frente al aporte que la situación problema que se les propuso hace frente al conocimiento ya sea de las cónicas, sus propiedades y elementos, y frente a los conceptos y procesos del Cálculo Integral.

Para recoger esta información, en cada documento que se envió, se realizó una última pregunta, en la cual se indagaba por ello. A continuación, se recopilan algunas de las afirmaciones dadas por los compañeros.

Sí contribuyó debido a que:

- Implicó recordar el concepto de integral como el límite de sumatoria, es decir, desde el punto de vista gráfico y el volumen a partir de un sólido de revolución;
- En el espacio académico, algunos temas no se alcanzan a estudiar;
- No es usual utilizar la ecuación general de una cónica, en el caso de cierto ejercicio, la parábola, al momento de plantear una integral;
- Permitió afianzar habilidades en términos de secciones cónicas en el momento de relacionar la ecuación y la representación gráfica de la parábola y de la misma manera con la circunferencia.
- Con respecto al cálculo integral, permitió afianzar la capacidad de plantear y resolver situaciones a través de la formulación de integrales definidas y los métodos para determinar volúmenes.
- Integró el cálculo integral con la geometría analítica.
- El ejercicio permitió el afianzamiento de conceptos, ya que para llegar a su solución se requiere poner en juego conocimientos de temáticas propias del cálculo integral, del cálculo diferencial, como las propiedades de los sólidos.
- Para realizar la simulación de GeoGebra®, implicó recordar la ecuación de la esfera.

No contribuyo debido a:

- En algunos ejercicios no permitió afianzar conocimientos en cónicas, ya que, si se usa una parábola en el ejercicio, no se hace uso de alguna característica de ésta, como directriz, **foco, vértice, entre otros.**
- **No amplió el conocimiento que el participante ya tenía.**

Capítulo 5: Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas del trabajo articuladas desde los objetivos propuestos y en correlación con las evidencias obtenidas en las soluciones presentadas por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y egresados del mismo programa durante el pilotaje de los ejercicios

5.1 Con respecto al primer objetivo

Desde la presentación de soluciones analíticas a problemas relacionados con cónicas, en el contexto del Cálculo Integral.

- Sepúlveda (2009), plantea que la RP se puede adaptar en un contexto con el fin de recrear conocimientos previos, lo cual fue necesario por parte de los participantes y las autoras de la investigación debido a que algunos ejercicios que se seleccionaron abarcaron temas que por falta de uso frecuente suele olvidarse y también porque debido a las diferentes dinámicas propias de la universidad, dichos temas no se alcanzan a estudiar. Lo anterior, infiere que la investigación, contribuyó a un espacio de aprendizaje y de cuestionamiento de los saberes.

- En algunos ejercicios se pude evidenciar que existen diferentes estrategias para resolver una misma situación problema, lo cual conlleva, un aporte significativo para nuestra labor docente, debido a que fortalece los procesos de enseñanza y de aprendizaje, así como lo plantea Pólya, la RP se vuelve una estrategia para "hacer matemáticas".

- Puesto que muchas de las aplicaciones de las integrales no se estudian a profundidad en el espacio académico de Cálculo Integral es sorprendente ver cómo a partir de ellas se pueden modelar o resolver situaciones del contexto real.

- Debido a que algunas situaciones problema que se adaptaron y diseñaron en la prueba piloto eran generalizadas, se observó que hubo varias dificultades en su resolución, por lo que se recomienda que en los espacios académicos de Cálculo Integral se presenten más ejercicios de esta forma con el fin de familiarizarse con estas situaciones.

5.2 Con respecto al segundo objetivo

Desde la implementación el software GeoGebra® para la visualización y exploración de los problemas que se trabajarán en relación con las cónicas en el contexto del Cálculo Integral.

- Rodríguez (2017) resalta la pertinencia de los software educativos de tipo heurístico, ya que permiten a los estudiantes tener un aprendizaje experimental y por exploración; es por ello que ciertos ejercicios fueron generalizados, por ende, es importante modelar en el software de GeoGebra® la gráfica del ejercicio planteado, con el fin de realizar un análisis de esta, visualizando las condiciones dadas a través de variaciones con el fin de conjeturar posibles soluciones o aproximaciones a la solución.

- Como lo plantea Sombra (2019), algunos de los ejercicios planteados que involucraban las cónicas fue necesario modelar el ejercicio en el software de GeoGebra® con el fin de visualizar propiedades que, a simple vista, lápiz y papel, no se alcanzan a percibir.

- Es importante comprobar la expresión analítica del resultado (lo que en su momento Polya llamaría autorreflexión) con la construcción en el software de GeoGebra® con el fin de verificar las respuestas obtenidas y constatar que estas fueron el resultado correcto, lo cual infiere que se tiene más seguridad al tener estos dos resultados. Sin embargo, al usar un software como verificación se debe estar seguro de aspectos como la sintaxis, las aproximaciones que se realizan y en el caso de las construcciones, que estas sean correctas, pues una diferencia emergente en los resultados suministrados por él y el obtenido a papel y lápiz puede dar origen a cualquier combinación de valores de verdad frente a la pregunta ¿es adecuada la solución?

- La implementación del software, dentro del proceso de formación de Licenciados en Matemáticas cobra mayor relevancia ya que le brinda no solo herramientas disciplinares dentro del Calculo Integral, sino que le suministra, al futuro docente, herramientas didácticas para la enseñanza de conceptos de la matemática en general.

5.3 Con respecto al tercer objetivo

Desde la acción de generar actividades matemáticas exploratorias y analíticas que vinculen las cónicas con las integrales y que puedan ser implementadas en el espacio académico de Cálculo Integral en un programa de formación inicial de profesores, en particular de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

- Los ejercicios planteados en la prueba piloto permitieron reflejar los procesos cognitivos planteados por Schoenfeld (1992) involucrados en la matemática, como lo son, la modelación, el razonamiento, la representación y la mecanización de procedimientos.

- Las situaciones problema que se diseñaron desde el eje central de los NCTM (2000), que permitieron crear un reto a los participantes en el cual debían mostrar todas las habilidades matemáticas que se ha adquirido en el transcurso de la formación académica con el propósito de interpretar y plantear una solución a un problema involucrando el cálculo de una integral.

- En ciertas situaciones problema además de vincular las cónicas con el cálculo integral se relacionó estos dos conceptos con el área de la geometría, permitiendo de esta manera mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Anexo A.

Propuesta de problemas resueltos paso a paso para que se implementen en la clase de Cálculo Integral

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS

Propuesta de ejercicios para que el profesor desarrolle en las clases de Cálculo de Integral

1. **Algunos de los iniciadores de cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Sterometría Doliorum* en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de barriles). A menudo se aproxima la forma de sus lados mediante parábolas.**

   La solución de este problema la puede encontrar en el problema 6 del capítulo 3

2. **En la figura se muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes en P y Q. ¿A qué altura arriba del diámetro debe colocarse la recta horizontal para minimizar el área sombreada?**

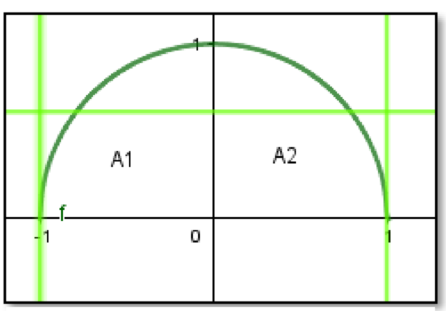


Ilustración 43. *Semicírculo con radio 1*

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart problemas adicionales capítulo 8 ejercicio 6 página 577

Datos:

- $y = \sqrt{1 - x^2}$
- $y = h$

Por simetría se tiene

$$A = A_1 + A_2$$

Ahora bien,

$$A_1 = \int_O^b \left(\sqrt{1 - x^2} - h\right) dx$$

$$A_1 = \int_O^{\sqrt{1-h^2}} \left(\sqrt{1 - x^2} - h\right) dx$$

$$A_1 = \int_O^b \left(\sqrt{1 - x^2} - h\right) dx$$

$$A_2 = \int_b^1 \left(h - \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{1-h^2}}^1 \left(h - \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 + A_2 = [-hx]_0^{\sqrt{1-x^2}} + \int_O^{\sqrt{1-h^2}} \left[\sqrt{1 - x^2}\right] dx + [hx]_{\sqrt{1-h^2}}^1 - \int_{\sqrt{1-h^2}}^1 \left[h - \sqrt{1 - x^2}\right] dx$$

$$A = -h\sqrt{1 - h^2} + \int_O^{\sqrt{1-h^2}} \left[\sqrt{1 - x^2}\right] dx + h - h\sqrt{1 - h^2} + \int_1^{\sqrt{1-h^2}} \left[\sqrt{1 - x^2}\right] dx$$

$$A(h) = h - 2h\sqrt{1 - h^2} + \int_O^{\sqrt{1-h^2}} \left[\sqrt{1 - x^2}\right] dx + \int_1^{\sqrt{1-h^2}} \left[\sqrt{1 - x^2}\right] dx$$

$$A' = \frac{dA}{dh} = 1 - 2\sqrt{1-h^2} - 2h \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-h^2}} \cdot (-2h) + \frac{d}{dh}\int_{0}^{\sqrt{1-h^2}} \left[\sqrt{1-x^2}\right] dx + \int_{1}^{\sqrt{1-h^2}} \left[\sqrt{1-x^2}\right] dx$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene

$$\frac{dA}{dh} = 1 - 2\sqrt{1-h^2} + \frac{2h^2}{\sqrt{1-h^2}} + \sqrt{1-(1-h^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-h^2}}(-2h) + \sqrt{1-\left(\sqrt{1-h^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-h^2}} \cdot (-2h) = 0$$

$$1 - 2\sqrt{1-h^2} + \frac{2h^2}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{\sqrt{1-1+h^2}}{\sqrt{1-h^2}}h - \frac{\sqrt{1-1+h^2}h}{\sqrt{1-h^2}} = 0$$

$$1 - 2\sqrt{1-h^2} + \frac{2h^2}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{h^2}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{h^2}{\sqrt{1-h^2}} = 0$$

$$1 - 2\sqrt{1-h^2} = 0$$

$$1 = 2\sqrt{1-h^2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - h^2$$

$$h^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}$$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (se toma sólo la raíz positiva)

h es un punto crítico, ahora toca demostrar que es un mínimo, por lo que se tiene

$$A' = 1 - 2\sqrt{1-h^2}$$

Para los $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene $y < 0$, la función decrece y para los $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene $y > 0$ la función crece. De lo cual se concluye que h es un mínimo.

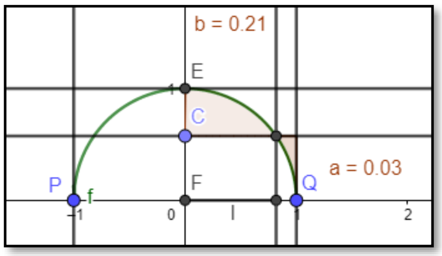


Ilustración 44. Área mínima sombreada.

Enlace de la construcción

https://www.geogebra.org/m/uq24fr9n

3. **Un paraboloide de revolución se obtiene por la rotación de la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje x. Encuentre el volumen limitado por un paraboloide de revolución y un plano que se encuentra a $10\ cm$ del vértice, y la sección plana de la intersección es una circunferencia de $6\ cm$ de radio.**

La solución a este problema la puede encontrar en el capítulo 3 problema 5

4. **Una esfera se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x.**

Adaptado de cálculo con geometría analítica L. Leithold sección 6.5 ejercicio 24 página 533

a) **Calcule el centro de masa del semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$**

La física garantiza, como lo presenta, Sandonís, J (s.f.), que la posición del centro de masas de un sistema de partículas viene dada por la siguiente expresión:

$$\vec{r}_{C.M} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} \Rightarrow\ x_{C.M} = \frac{\int x\, dm}{\int dm};\ y_{C.M} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}\ (12)$$

Ahora, si el cuerpo tiene forma de hilo o alambre, los diferenciales de masa dm están asociados a diferenciales de longitud dl: $dm = \lambda\, dl$, donde λ es la densidad lineal (masa por unidad de longitud), esta densidad puede ser constante o no.

Para obtener la posición del centro de masas se necesita dos coordenadas, la coordenada x del centro de masas y la coordenada y; la integral se debe realizar a lo largo de toda la longitud L de la semicircunferencia, por tanto, las ecuaciones (12) serán:

$$x_{C.M} = \frac{\int_L \; x\, dm}{\int_L \; dm};\ y_{C.M} = \frac{\int_L \; y\, dm}{\int_L \; dm};$$

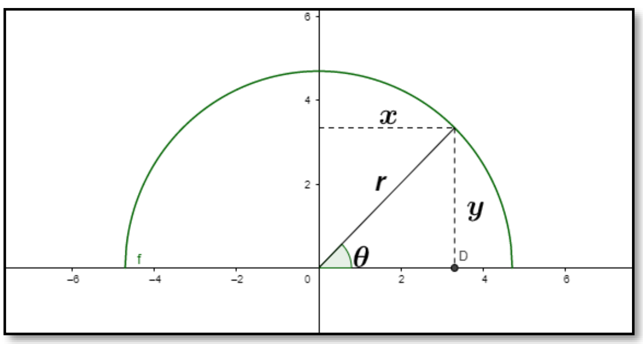


***Ilustración 45**. Complemento para visualizar las coordenadas polares.*

A continuación, se resuelve la situación problema propuesta:

Enlace de construcción:

https://www.geogebra.org/m/vpvbfknd

Teniendo en cuenta la ilustración (45) y al hacer uso de las coordenadas polares se tiene

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

La coordenada x del centro de masas está dada por:

$$x_{C.M} = \frac{\int_L \; x\,dm}{\int_L \; dm}$$ donde L es la longitud de la curva (13)

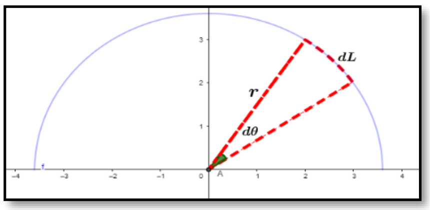


Ilustración 46. Construcción auxiliar.

Teniendo en cuenta que:

$$dm = \lambda\, dL$$

$$\lambda = \frac{dm}{dL}$$

$$dL = r\, d\theta$$

Sustituyendo dm en la ecuación (13)

$$x_{C.M} = \frac{\int_0^\pi x\,\lambda\, dL}{\int_0^\pi \lambda\, dL}$$

$$x_{C.M} = \frac{\lambda\int_0^\pi x\, dL}{\lambda\int_0^\pi dL} \quad (14)$$

Reemplazando dL y las coordenadas polares en la ecuación (14)

$$x_{C.M} = \frac{\int_0^\pi r\cos\theta\, r\, d\theta}{\int_0^\pi r\, d\theta}$$

$$x_{C.M} = \frac{r^2\int_0^\pi \cos\theta\; d\theta}{r\int_0^\pi \; d\theta}$$

$$x_{C.M} = \frac{r \int_0^{\pi} \cos\theta \ d\theta}{\int_0^{\pi} \ d\theta}$$

$$x_{C.M} = \frac{r[\sin\theta]_0^{\pi}}{[\theta]_0^{\pi}}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$x_{C.M} = \frac{r[\sin\pi - \sin 0]}{\pi - 0} = 0$$

Resultado que desde el concepto físico era de esperarse.

La coordenada y del centro de masas está dada por:

$$y_{C.M} = \frac{\int_L \ y \, dm}{\int_L \ dm} \text{ donde } L \text{ es la longitud de la curva (15)}$$

Sustituyendo dm en la ecuación (15)

$$y_{C.M} = \frac{\int_0^{\pi} y \, \lambda \, dL}{\lambda \int_0^{\pi} dL}$$

$$y_{C.M} = \frac{\lambda \int_0^{\pi} y \, dL}{\lambda \int_0^{\pi} dL} \ (16)$$

Reemplazando dL y las coordenadas polares en la ecuación (16)

$$y_{C.M} = \frac{\int_0^{\pi} r \sin\theta \, r \, d\theta}{\int_0^{\pi} r \, d\theta}$$

$$y_{C.M} = \frac{r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \ d\theta}{r \int_0^{\pi} \ d\theta}$$

$$y_{C.M} = \frac{r \int_0^{\pi} \sin\theta \ d\theta}{\int_0^{\pi} \ d\theta}$$

$$y_{C.M} = \frac{r[-\cos\ \theta]_0^{\pi}}{[\theta]_0^{\pi}}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$y_{C.M} \frac{r[\cos 0 - \cos \pi]}{\pi - 0}$$

$$y_{C.M} = \frac{r[1-(-1)]}{\pi} = \frac{2r}{\pi}$$

Por tanto, las coordenadas del centro de masas son:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{2r}}{\boldsymbol{\pi}}\right)$$

b) Utilice el primer teorema de Pappus para verificar el resultado anterior

Primer teorema de Pappus: si un segmento de una curva plana C se gira alrededor de un eje que no corta la curva (posiblemente excepto a sus puntos finales), el área S de la superficie de revolución resultante está dada por el producto de la longitud de C por la distancia d recorrida por el centroide de C.

La función dada es

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Por simetría de la figura se tiene que la coordenada en $\underline{x}$ es:

$$x = 0$$

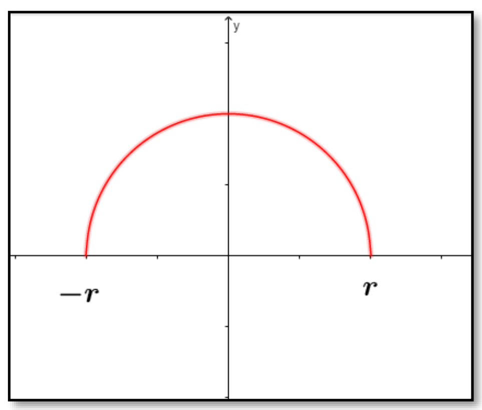


Ilustración 47*. Semicircunferencia con radio r.*

Por el primer teorema de Pappus, el área de la superficie S de la superficie de revolución es

$$A = l.d \ (17)$$

Al reemplazar el área de una esfera, que es la superficie generada, en la ecuación (1)

$$4\pi r^2 = l.d \quad (18)$$

Donde l es longitud de la curva generadora y d la distancia recorrida por el centroide al generar la superficie; así l y d son

$$l = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

$$d = 2\pi y$$

Luego, al reemplazar los valores de l y d en la ecuación (18)

$$4\pi r^2 = \pi r. 2\pi y$$

$$2r = \pi y$$

$$\frac{2r}{\pi} = y$$

Por tanto, las coordenadas del centroide son:

$$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{\pi}}\right)$$

Referencias:

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*. México. D.F: Cengage Learning

Sandonís, J. (s.f.). Repositorio Abierto de la Universidad de Cantabria. Cantabria, España. Recuperado de: https://personales.unican.es/junqueraj/JavierJunquera_files/Fisica-1/Teoria_Centros_de_Masa.pdf

Anexo B

Propuesta de ejercicios que se pueden utilizar para taller o parcial

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

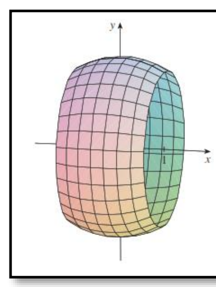
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Propuesta taller aplicación de cónicas en cálculo integral

1. Encontrar el volumen de la región limitada por la curva $y = x^2 + 1$, $x = 2$; $x = 3$ girando alrededor del eje x.

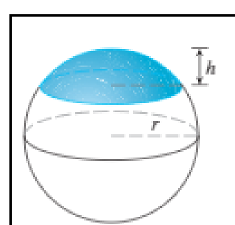
   a) Utilice el teorema de Pappus para encontrar dicho volumen.
   b) Verifique el resultado anterior usando el volumen de un sólido de revolución.

2. La curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-b \leq x \leq b$ con $b \leq a$ es un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x.



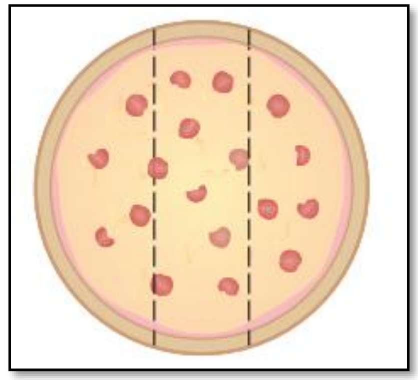
3. Halle el centroide de la región en el primer cuadrante acotado por los ejes coordenados y la parábola $y = 9 - x^2$.

4. Calcular el volumen de un casquete de una esfera con radio r y altura h.



5. Obtenga el área de la región acotada por las dos parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$

6. Tres estudiantes han ordenado una pizza de radio r. En lugar de cortar en la forma tradicional, deciden hacer cortes paralelos, como se ve en la figura. Debido a sus conocimientos de matemáticas ¿pueden determinar dónde cortar de modo que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?



* Figuras tomadas de texto: Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*. México. D.F: Cengage Learning

Material adaptado y diseñado por Saldaña Anamaría y Vallejo Yenny.

Anexo C

Solución de los ejercicios propuestos para taller o parcial

A continuación, se encuentra la solución de los ejercicios propuestos para el taller o parcial

1. **Encontrar el volumen de la región limitada por la curva $y = x^2 + 1,\ x = 2;\ x = 3$ girando alrededor del eje x.**

   La solución la puede encontrar en el problema 8 del capítulo 3

2. **La curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}, -b \leq x \leq b$ con $b \leq a$ es un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x.**

   La solución la puede encontrar en el problema 1 del capítulo 3

3. **Halle el centroide de la región en el primer cuadrante acotado por los ejes coordenados y la parábola $y = 9 - x^2$.**

   La solución la puede encontrar en el problema 9 del capítulo 3

4. Calcular el volumen de un casquete de una esfera con radio r y altura h

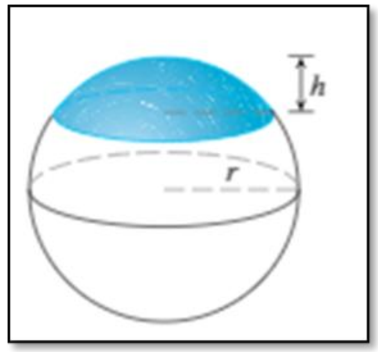


Ilustración 48. Volumen de un casquete.

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart sección 6.2 ejercicio 49 página 439

En el plano $x - y$ se tiene:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Se despeja x^2

$$x^2 = r^2 - y^2$$

Por el método de discos

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

Sustituyendo con los datos del problema

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - y^2) dy$$

Integrando

$$V = \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{r-h}^{r}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$V = \pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^2(r-h) - \frac{(r}{}\right.\right.$$

$$V = \pi\left[\frac{2r^3}{3} - r^3 + r^2h + \frac{r^3}{3} - \frac{3r^2h}{3} + \right.$$

$$V = \pi\left[rh^2 - \frac{h^3}{3}\right]$$

$$V = \pi h^2\left[r - \frac{h}{3}\right]\ (u^3)$$

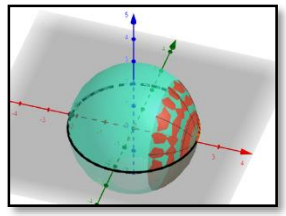


Ilustración 49. *Volumen de un casquete de una esfera.*

Enlace de la construcción en GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/wgnnbztn

5. **Obtenga el área de la región acotada por las dos parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$**

Adaptado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 5.9 ejercicio 47 página 468

$$y^2 = 4px \ (19)$$

$$x^2 = 4py \ (20)$$

Suponiendo que $p > 0$

Al despejar y de la ecuación (20) se tiene

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

Ahora reemplazando y en la ecuación (19)

$$\left(\frac{x^2}{4p}\right)^2 = 4px$$

Resolviendo

$$\frac{x^4}{16p^2} = 4px$$

$$x^4 = 64p^3x$$

$$x^4 - 64p^3x = 0$$

$$x(x^3 - 64p^3) = 0$$

Por tanto,

1) $x = 0$
2) $x^3 - 64p^3 = 0$ (3)

Factorizando la ecuación (3)

$$(x - 4p)(x^2 + 4p + 16p^2) = 0$$

Dado que $p > 0$, la expresión $x^2 + 4p + 16p^2 > 0$, entonces

$$x - 4p = 0$$
$$x = 4p$$

Por lo tanto, como

$$y^2 = 4px \ (1)$$

$$x^2 = 4py \ (2)$$

El área es

$$A = \int_0^{4p} \left(\sqrt{4px} - \frac{x^2}{4p}\right) dx$$

Integrando

$$A=\left[\frac{2}{3}(2)\sqrt{p}x^{3/2}-\frac{1}{4p}\frac{x^3}{3}\right]_0^{4p}$$

$$A=\left[\frac{4}{3}\sqrt{p}x^{1/2}-\frac{x^3}{12p}\right]_0^{4p}$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$A=\frac{4}{3}p^{1/2}(4p)^{3/2}-\frac{1}{12p}(4p)^3$$

$$A=\frac{4}{3}p^{1/2}(8)p^{3/2}-\frac{1}{12p}(64p^3)$$

$$A=\frac{32}{3}p^2-\frac{16}{3}p^2$$

$$\mathrm{A}=\frac{16}{3}\mathrm{p}^2$$

Por tanto, el área de la region acotada por las dos parábolas es: $\mathbf{A}=\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\mathbf{p}^{\mathbf{2}}$

Enlace de la construcción en GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/nd65yc5r

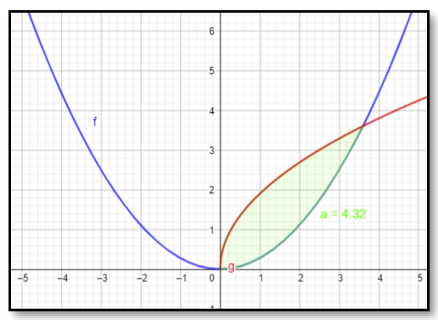


Ilustración 50. *Área de una región acotada por dos parábolas.*

6. **Tres estudiantes han ordenado una pizza de radio r. En lugar de cortar en la forma tradicional, deciden hacer cortes paralelos, como se ve en la figura. Debido a sus conocimientos de matemáticas ¿pueden determinar dónde cortar de modo que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?**

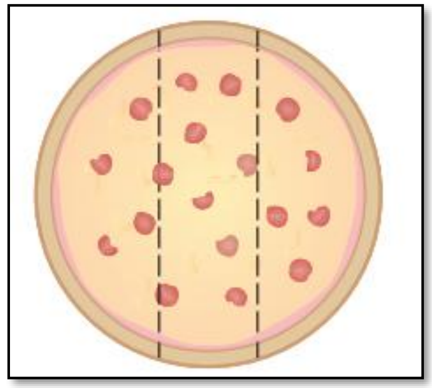


Ilustración 51. Representación de los costes paralelos de una pizza.

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart problemas adicionales capítulo 7 ejercicio 1 página 534

Fraccionando los sectores, se puede considerar que el representado en la ilustración 16 corresponde a la doceava parte de la pisa a repartir en tres partes de idéntica área.

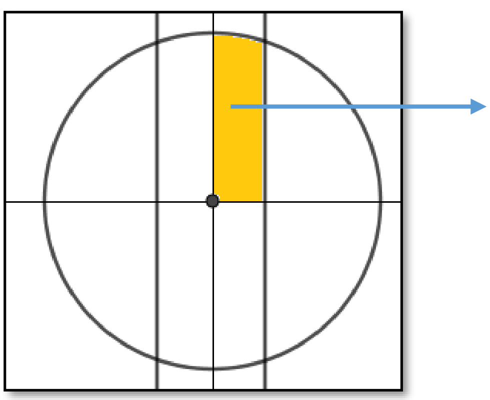


Ilustración 52. Ilustración cortes de la pizza. Creada por Saldaña, A & Vallejo, Y.

$A = \frac{\pi R^2}{12}$ (1)

Se tiene que $A = \int_0^a (R^2 - x^2)\,dx$ (2)

Aplicando sustitución trigonométrica

$$x = Rsin\theta \ \rightarrow dx = Rcos\theta\ d\theta$$

$$x^2 = R^2 sen^2\theta$$

$$R^2 - x^2 = R^2 - R^2 sen^2\theta$$

$$R^2 - x^2 = R^2(1 - sen^2\theta)$$

$$R^2 - x^2 = R^2 cos^2\theta$$

Se igualan (1) y (2)

$$\frac{\pi R^2}{12} = \int_a^b \sqrt{R^2 cos^2\theta} \cdot Rcos\theta d\theta$$

$$\frac{\pi R^2}{12} = \int_a^b Rcos\theta Rcos\theta d\theta$$

$$\frac{\pi R^2}{12} = \int_a^b R^2 cos^2\theta d\theta$$

$$\frac{\pi R^2}{12} = R^2 \int_a^b cos^2\theta d\theta$$

$$\frac{\pi}{12} = \int_a^b \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta$$

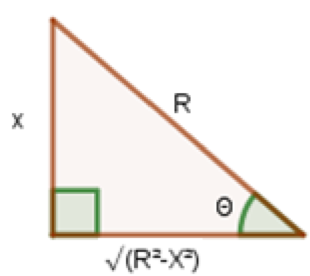
$$\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_a^b$$

$$\frac{\pi}{6} = \left[\theta + \frac{2sin\theta cos\theta}{2}\right]_a^b$$

$$\frac{\pi}{6} = [\theta + sen(\theta)\cos(\theta)]_a^b$$

Como

$$x = Rsin\theta \;\rightarrow\; sin\theta = \frac{x}{R} = \frac{C_0}{H}$$



$$\frac{\pi}{6}=\left[sen^{-1}\left(\frac{x}{R}\right)+\frac{x}{R}\cdot\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}\right]_0^a$$

$$\frac{\pi}{6}=\left[sen^{-1}\left(\frac{x}{R}\right)+\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{R^2}\right]_0^a$$

$$\frac{\pi}{6}=\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{R}\right)+\frac{a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\right]$$

$$\frac{\pi}{6}=\left[sen^{-1}\left(\frac{a}{R}\right)+\frac{a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\right]$$

$$0=sen^{-1}\left(\frac{a}{R}\right)+\frac{a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}-\frac{\pi}{6}$$

La solución en a amerita resolución gráfica o por métodos numéricos. En particular, como propuesta didáctica y para apoyar los procesos de visualización se propone realizarla por método gráfico, determinando el punto de corte de las funciones:

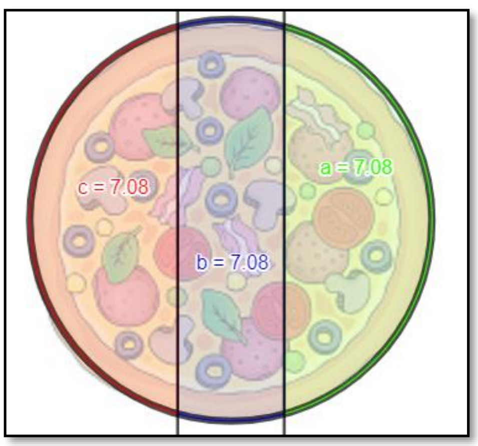


Ilustración 53. Ilustración cortes de la pizza. Creada por Saldaña, A & Vallejo, Y.

$$y=sen^{-1}\left(\frac{a}{R}\right) \text{ y } y=\frac{\pi}{6}-\frac{a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}$$

La solución gráfica puede ser apreciada en el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/cwtcv3pp

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/classic/arcmstxa

NOTA: Como alternativa didáctica se propone un video en la plataforma de YouTube realizado por las autoras de la investigación, en el cual se modela la situación problema de la pizza mediante Realidad Aumentada con el fin de potenciar y enriquecer los resultados que se obtuvieron analíticamente y en el software de GeoGebra®:

Enlace del video: https://youtu.be/VoIXp-Z3SdI

Anexo D

Ejercicios que se seleccionaron para aplicar la prueba piloto

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

EJERCICIOS PARA REALIZAR EL PILOTAJE

A cada uno de los participantes se le envió un archivo Word, en el cual contenía las instrucciones generales que se mencionan a continuación junto con el ejercicio que a cada uno de ellos de correspondió.

INSTRUCCIONES GENERALES

Cordial saludo, estimado compañero.

Como se había comentado en días anteriores, se envía el ejercicio con el fin de solicitarle amablemente nos colabore con los siguientes cuatro ítems:

a) Resolverlo paso a paso.

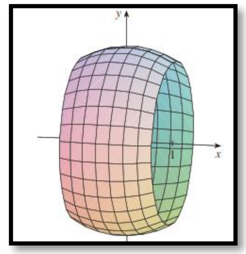
b) Si hace uso de un software a plataforma matemática por favor indicar (en qué sentido se usó; conjeturar, explorar, verificar, entre otros) y evidenciar.

c) Su opinión sobre la pertinencia de abordar este ejercicio en el espacio de Cálculo Integral de la Licenciatura en Matemáticas.

d) Indicar si el ejercicio le permitió afianzar sus conocimientos sobre cónicas y/o sobre el Cálculo Integral.

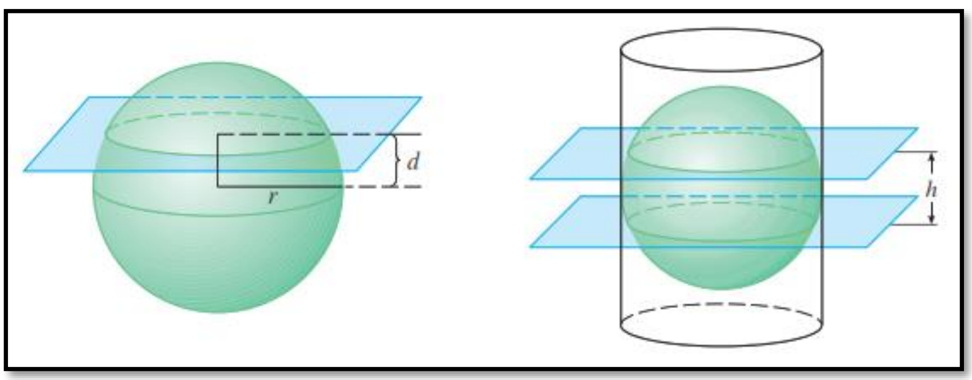
EJERCICIOS SELECCIONADOS PARA APLICAR LA PRUEBA PILOTO

1. La curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-b \leq x \leq b$ con $b \leq a$ es un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x.



2. Obtenga la región acotada por la parábola $x^2 = 4py$ y las rectas $y = x + 8p$ y $y = -x + 8p$

3. Si la esfera de radio r se corta mediante un plano cuya distancia desde el centro de la esfera es d, entonces la esfera se divide en dos piezas llamadas segmentos de una base. Las superficies correspondientes se llaman zonas esféricas de una base.



a) Determine las áreas superficiales de las dos zonas esféricas indicadas en la figura.

b) Una esfera de radio r se inscribe en un cilindro circular recto de radio r. Dos planos perpendiculares al eje central del cilindro y apartados una distancia h cortan una zona esférica de dos bases en la esfera. Demuestre que el área superficial de la zona esférica es igual al área superficial de la región que los dos planos cortan en el cilindro.

4. Obtenga la fórmula del volumen de un cono circular recto de altura h y un radio de base a., generado al hacer girar la región acotada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos.

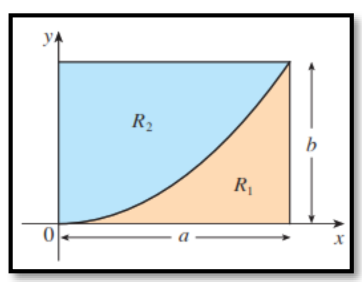
5. Un paraboloide de revolución se obtiene por la rotación de la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje x. Encuentre el volumen limitado por un paraboloide de revolución y un plano perpendicular a su eje si el plano se encuentra a $10\ cm$ del vértice, y si la sección plana de la intersección es una circunferencia de $6\ cm$ de radio.

6. Algunos de los iniciadores de cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Sterometría Doliorum* en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de barriles). A menudo se aproxima la forma de sus lados mediante parábolas.

   a) Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-{}^{h}/_{2} \leq x \leq {}^{h}/_{2}$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = {}^{ch^2}/_{4}$

   b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es $v = \frac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right)$

7. Un rectángulo R con lados a y b se divide en dos partes R_1 y R_2 mediante un arco de la parábola que tiene su vértice en las esquinas de R y que pasa a través de la esquina opuesta. Halle el centroide en ambos R_1 y R_2.



8. Emplee el teorema de Pappus para hallar el volumen de un cono circular recto cuyo radio en la base es de r unidades y la altura de h unidades.

9. Halle el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la parábola $y = 9 - x^2$

10. El arco de $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0,4]$ se gira alrededor de la recta $y = b$

    a) Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b.

    b) Usar cálculo para encontrar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido, y comparar el resultado con la respuesta del apartado b.

11. Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

Cilindro circular recto	vi. $\pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2$
Elipsoide	vii. $\pi \int_0^h r^2 dx$
Esfera	viii. $\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$
Cono circular recto	ix. $\pi \int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$
Toro	x. $\pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$

Agradecemos de antemano su apoyo para sacar adelante nuestro trabajo de grado.

Atentamente:

Anamaría Saldaña
Yenny Vallejo
Orlando Aya

Anexo E

Solución de los ejercicios que se pueden implementar en el desarrollo de un curso de cálculo integral.

En este apartado, se encuentran todos los ejercicios que se resolvieron en la investigación, los cuales quedan como base de datos para ser utilizados en un curso de cálculo integral. A continuación, se encuentran dichos ejercicios ordenados por temas:

I. Centroide

Un rectángulo R con lados a y b se divide en dos partes R_1 y R_2 mediante un arco de la parábola que tiene sus vértices en las esquinas de R y que pasa a través de la esquina opuesta. Halle el centroide en ambos R_1 y R_2 .

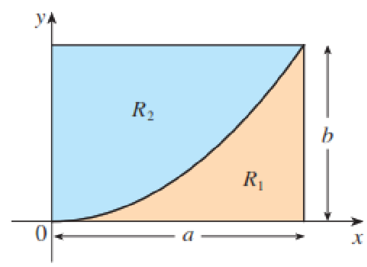


Ilustración 54. *Tomado de Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas, (p. 549), por Stewart. J, (2008), Cengage Learning.*

La solución se puede encontrar en el problema 7 capítulo 3

Halle el centroide de la región en el primer cuadrante acotado por los ejes coordenados y la parábola $y = 9 - x^2$.

La solución se puede evidenciar en el problema 9 del capítulo 3

Una esfera de radio r se forma al girar la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x.

La solución la puede visualizar en el punto 4 del anexo A

II. Áreas

Tres estudiantes han ordenado una pizza de radio r. En lugar de cortar en la forma tradicional, deciden hacer cortes paralelos, como se ve en la figura. Debido a sus conocimientos de matemáticas ¿pueden determinar dónde cortar de modo que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?

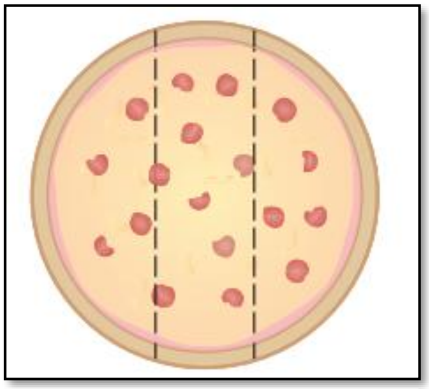


Ilustración 55. *Tomada de texto: Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable trascendentes tempranas.*

La solución se puede visualizar en el punto 6 del anexo C

Si la esfera de radio r se corta mediante un plano cuya distancia desde el centro de la esfera es d, entonces la esfera se divide en dos piezas llamadas segmentos de una base. Las superficies correspondientes se llaman zonas esféricas de una base.

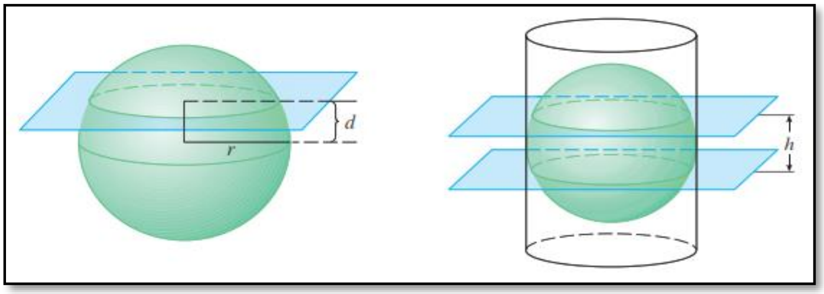


Ilustración 56. *Tomado de Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. (p. 577), por Stewart. J.2012. Cengage Learning.*

La solución la puede visualizar en el problema 3 del capítulo 3

La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $a>b$ Se hace girar en torno al eje x para formar una superficie llamada *Elipsoide* o *Esferoide Prolato*. Determine el área superficial de este elipsoide.

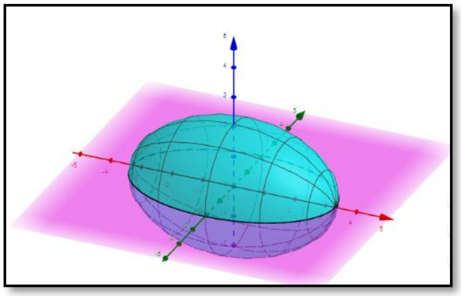


Ilustración 57. Esferoide prolato.

Enlace de la construcción

https://www.geogebra.org/m/yfwsayts

En primer lugar, se identifica la definición de Esferoide Prolato:

Esferoide Prolato: es una superficie de la revolución obtenida girando una elipse sobre su eje principal.

La función es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ \ a>b$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xb^2}{2ya^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xb^2}{ya^2}$$

Luego, el área superficial será:

$$S = \int 2\pi y ds$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad (21)$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación (21)

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{\left(1 + \left(-\frac{xb^2}{ya^2}\right)^2\right)} dx$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{\frac{y^2a^4 + x^2b^4}{y^2a^4}}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{y}{a^2 y} \sqrt{y^2a^4 + x^2b^4}\, dx \quad (22)$$

Se tiene que $y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$, se sustituye esta expresión en la ecuación (22)

$$S = \frac{2\pi}{a^2} \int_{-a}^{a} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2a^4 + x^2b^4}\, dx$$

Factorizando b^2, y por simetría

$$S = \frac{2\pi}{a^2} 2b \int_{0}^{a} \sqrt{a^4 - x^2a^2 + x^2b^2}\, dx$$

$$S = \frac{4\pi b}{a^2} \int_{0}^{a} \sqrt{(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)}\, dx$$

Factorizando a^4

$$S = \frac{4\pi b}{a^2} \int_{0}^{a} \sqrt{a^4 \left(1 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^4} x^2\right)}\, dx$$

$$S = \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a a^2\sqrt{1 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^4}x^2}dx$$

$$S = 4\pi b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{(a^2-b^2)}{a^4}x^2}\ dx\ (23)$$

Si $u = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x$ entonces, $du = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\ dx$

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}du = dx$$

Si $x = 0 \rightarrow\ u = 0$ si $x = a\ \rightarrow u = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Al sustituir u y du en la ecuación (23)

$$S = 4\pi b\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\left(\sqrt{1 - u^2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)du$$

$$S = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\sqrt{1 - u^2}\,du\ (24)$$

Luego, si $u = \sin(\theta)$

$du = \cos\ (\theta)d\theta$

Si $u = 0 \rightarrow \theta = 0$ y si $u = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \rightarrow \theta = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$

Al sustituir u y du en la ecuación (24)

$$S = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_0^{sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}\ \cos(\theta)\ d\theta$$

$$S = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_0^{sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}\sqrt{cos^2(\theta)}\ \cos\ (\theta)\,d\theta$$

$$S = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_0^{sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}cos^2\ (\theta)\ d\theta$$

Usando las identidades trigonométricas, ángulos dobles

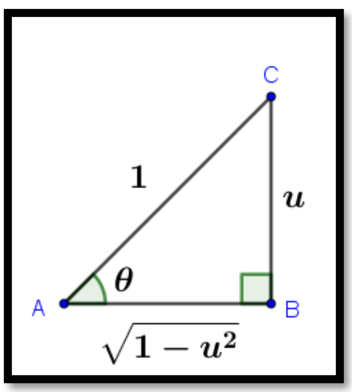
$$S = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)} \left(\frac{1 + \cos\ (2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$S = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)} d\theta + \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)} \cos(2\theta)\, d\theta\right]$$

$$S = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\theta + \frac{\sin\ (2\theta)}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}$$

$$S = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\theta + \frac{2\sin(\theta)\cos\ (\theta)}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)} \quad (25)$$

Pero $u = \sin\ (\theta)$, luego $\theta = \sin^{-1}(u)$,



Teniendo en cuenta el $\triangle ABC$ y sustituyendo $\sin(\theta)$ se tiene que $cos\theta = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1} = \sqrt{1-u^2}$

$$S = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\sin^{-1}(u) + u\sqrt{1-u^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \quad (26)$$

Luego, sustituyendo u en la ecuación (26)

$$S = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x\right) + \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x\right)\left(\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^4}x^2}\right)\right]_0^a$$

$$S = 2\pi b\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x\right) + \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x\right)\left(\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^4}x^2}\right)\right)\right]_0^a$$

Usando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

$$S = 2\pi b\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x\right)+x\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^4}x^2}\right]_0^a$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$S = 2\pi b\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}a\right)+a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^4}a^2}\right]$$

Simplificando tenemos

$$S = 2\pi b\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)+a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right]$$

Usando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$$S = 2\pi\left[\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)+ab\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}}\right]$$

$$S = 2\pi\left[\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)+ab\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

$$S = 2\pi\left[\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)+b^2\right]$$

a) Si la elipse del inciso anterior, gira en torno a su eje menor (el eje y), el elipsoide resultante se le conoce como **esferoide oblato**. Halle el área de la superficie de este elipsoide.

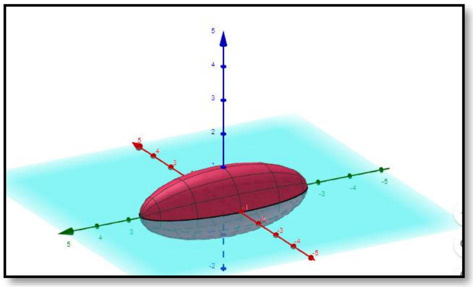


Ilustración 58. *Esferoide oblato.*

Enlace de la construcción

https://www.geogebra.org/m/uwa2hjmy

Despejando x de la función

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, b>a$$

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

$$x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

Derivando con respecto a y

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{2x}{a^2}\frac{dx}{dy}+\frac{2y}{b^2}=0$$

$$\frac{2x}{a^2}\frac{dx}{dy}=-\frac{2y}{b^2}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{2a^2y}{2b^2x}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x} \quad (27)$$

Reemplazando x en la ecuación (27)

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{ay}{b^2 \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}}}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{ay}{b\sqrt{b^2 - y^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{b}\,\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la expresión

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y^2}{b^2 - y^2}$$

Luego, el área superficial es

$$S = \int 2\pi x ds \quad (28)$$

Reemplazando x y ds en la ecuación (28)

$$S = \int_{-b}^{b} 2\pi a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,\sqrt{1 + \left({}^{dx}/_{dy}\right)^2}\,dy \quad (29)$$

Sustituyendo $\frac{dx}{dy}$ en la ecuación (29) y usando la simetría, tenemos

$$S = 2\int_{0}^{b} 2\pi a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y^2}{b^2 - y^2}}\,dy$$

$$S = 4\pi a \int_0^b \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \sqrt{\frac{b^4 - b^2y^2 + a^2y^2}{b^2(b^2-y^2)}}\, dy$$

$$S = 4\pi a \int_0^b \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\, \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b^4 - b^2y^2 + a^2y^2}{(b^2-y^2)}}\, dy$$

$$S = \frac{4\pi a}{b} \int_0^b \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\, \sqrt{\frac{b^4 - b^2y^2 + a^2y^2}{(b^2-y^2)}}\, dy$$

$$S = \frac{4\pi a}{b} \int_0^b \sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2}}\, \sqrt{\frac{b^4 - b^2y^2 + a^2y^2}{(b^2-y^2)}}\, dy$$

$$S = \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\, \sqrt{\frac{b^4 - b^2y^2 + a^2y^2}{(b^2-y^2)}}\, dy$$

$$S = \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 - y^2(b^2-a^2)}\, dy$$

Nota: Podría usarse el método anterior, pero por efectos didácticos y para que el profesor pueda hacer uso de ellos, sugerimos el uso de las tablas de integración, en particular, tomando la "Página de Referencia 6" del texto Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas, Stewart. J.2012. Cengage Learning. De la entrada número 30:

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (30)$$

Haciendo la comparación, tenemos

- $a^2 = b^4$

  $a = b^2$
- $u^2 = y^2(b^2-a^2)$

  $u = y\sqrt{b^2-a^2}$

Reemplazando los términos de a, u en la ecuación (30)

$$S=\frac{4\pi a}{b^2}\left[\frac{y\sqrt{b^2-a^2}}{2}\sqrt{b^4-y^2(b^2-a^2)}+\frac{b^4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y\sqrt{b^2-a^2}}{b^2}\right)\right]_0^b$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$S=\frac{4\pi a}{b^2}\left[\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{2}\sqrt{b^4-b^2(b^2-a^2)}+\frac{b^4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{b^2}\right)\right]$$

$$S=\frac{4\pi a}{b^2}\left[\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{2}\sqrt{b^4-b^4+b^2a^2}+\frac{b^4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)\right]$$

$$S=\frac{2\pi a}{b^2}\left[b\sqrt{b^2-a^2}\,\sqrt{b^2a^2}+b^4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)\right]$$

$$S=\frac{2\pi a}{b^2}\left[ab^2\sqrt{b^2-a^2}+b^4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)\right]$$

$$S=2\pi\left[a^2\sqrt{b^2-a^2}+ab^2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)\right]$$

III. Áreas entre curvas

Obtenga la región acotada por la parábola $x^2=4py$ y las rectas $y=x+8p$ y $y=-x+8p$

La solución se puede visualizar en el problema 2 del capítulo 3

Una elipse es cortada por un círculo de radio a. El eje mayor de la elipse coincide con un diámetro del círculo, y el eje menor tiene longitud $2b$. Demuestre que el área de la parte restante del círculo es la misma que el área de una elipse con semiejes a y $a-b$

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart problemas adicionales capítulo 7 ejercicio 5 página 534

Se tiene la ecuación general de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Se despeja y

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Ahora se halla el área de la elipse

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Para realizar esta integral se implementa las tablas de sustituciones trigonométricas

$$A=\frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$A=\frac{4b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2}\right)=\pi ab$$

Como lo que se pide es el área de la región que en la ilustración 37 aparece en rojo, se tiene que es el área de la circunferencia menos el área de la elipse.

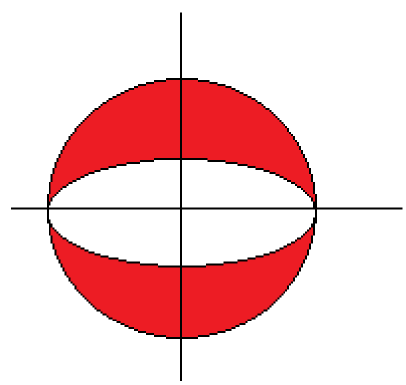


Ilustración 59. Área de la sección roja.

Área de la circunferencia

$$A_{\odot}=\pi a^2$$

Área de la elipse

$$A=\pi ab$$

Área de la región roja

$$A=A_{\odot}-A=\pi a^2-\pi ab=\pi a(a-b)$$

Ahora se debe encontrar el área de la elipse con semiejes a y $a-b$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1$$

$$y = (a-b)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$A = 4\int_0^a (a-b)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4\,(a-b)\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\,dx$$

$$A = 4\,\frac{(a-b)}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$A = 4\frac{(a-b)}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$A = 4\,\frac{(a-b)}{a}\left[\frac{a}{2}\sqrt{0}+\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-0\right] = 4\,\frac{(a-b)}{a}\frac{\pi a^2}{4}$$

$$A = \pi a(a-b)$$

Obtenga el área de la región acotada por las dos parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$

La solución se puede visualizar en el punto 5 del anexo C

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart problemas adicionales capítulo 7 ejercicio 4 página 534

Los centros de dos discos con radio 1 están apartados una unidad. Encuentre el área de la unión de ellos.

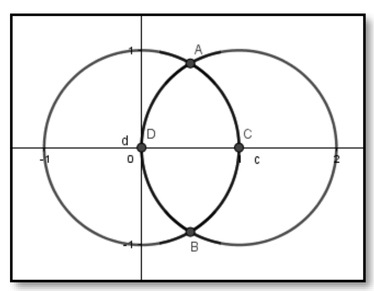


Ilustración 60. Simulación ejercicio.

Primero se halla el área de una de las circunferencias

$$A = \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi$$

Como son dos las circunferencias, el resultado se multiplica por 2, es decir $A_t = 2\pi$

Pero como se pide es la unión, a el área ya encontrada se le debe restar el área de la intersección.

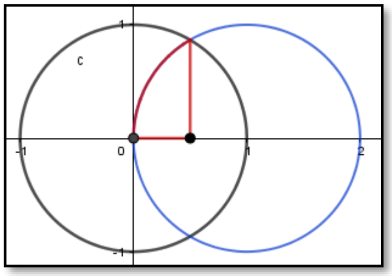


Ilustración 61. *Intersección de las circunferencias y regiones simétricas.*

Para encontrar el área de la intersección se tiene:

Se forman 4 regiones simétricas como se evidencia en la imagen por lo que se tiene A_1

$$A_1 = 4\int_0^{1/2} \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

Se hace sustitución

$$u = x - 1 \; du = dx \text{ si } x = 0 \;\; u = -1 \;\; x = \tfrac{1}{2}\, u = \tfrac{-1}{2}$$

$$A_1 = 4\int_{-1}^{-1/2} \sqrt{1-u^2}\,du$$

$$A_1 = 4\int_{-1}^{-\pi/6} \sqrt{1-sen^2\theta}\, cos\theta d\theta$$

Se realiza sustitución trigonométrica

$$u = sen\theta \; u = -1 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{-\pi}{2}$$

$$du = cos\theta d\theta \; u = \frac{-1}{2} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{-\pi}{6}$$

$$A_{1=}4\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} cos^2\theta\, d\theta$$

$$A_{1=}4\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$A_{1=}\frac{4}{2}\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} [1+\cos(2\theta)]\,d\theta$$

$$A_{1=}2\left[\theta + \frac{sen(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{-\pi/6}$$

$$A_1 = 2\left[\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{sen\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{2}\right) - \left(\frac{-\pi}{2} + \frac{sen(-\pi)}{2}\right)\right]$$

$$A_1 = \left[\frac{-\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A_1 = \frac{-\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi$$

$$A_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora se tiene que el área requerida es $2\pi - A_1$, por tanto:

$$A = 2\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En la figura se muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes en P y Q. ¿A qué altura arriba del diámetro debe colocarse la recta horizontal para minimizar el área sombreada?

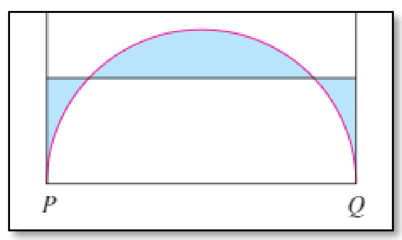


***Ilustración 62**. Tomado de Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. (p. 577), por Stewart. J.2012. Cengage Learning.*

La solución se puede visualizar en el punto 2 del anexo A

IV. Volúmenes

Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paraboloide de revolución, como se muestra en la figura; es decir, su forma se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de un eje vertical.

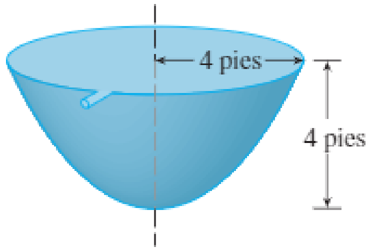


__Ilustración 63__. . Tomado de Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. (p. 458), por Stewart. J.2012. Cengage Learning.

a) Su altura es de 4 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo necesario para bombear el agua fuera del tanque.

b) Después de que se han realizado $4000\, lbr - pie$ de trabajo ¿Cuál es la profundidad del agua restante en el tanque?

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart ejercicios de repaso capítulo 6 ejercicio 29 página 458

a) La parábola está dada por la ecuación $y = ax^2$, por lo que se tiene

$$4 = a(4)^2$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Se sustituye en la ecuación inicial

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 = 4y$$

$$x = \sqrt{4y}$$

$$x = 2\sqrt{y}$$

Se mueven discos de radio $R = 2\sqrt{y}$

$$W = \int_0^4 \pi R^2 62.5(4 - y)dy$$

$$W = \int_0^4 \pi(4y)62.5(4 - y)dy$$

$$W = 250\pi \int_0^4 y(4-y)dy$$

$$W = 250\pi \int_0^4 (4y - y^2)dy$$

$$W = 250\pi \left[2y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^4$$

$$W = 250\pi \left[32 - \frac{64}{3}\right] = 250\pi \left[\frac{32}{3}\right]$$

$$W = \frac{8000\pi}{3} libra - pie \ \approx 8378\, pie - libra$$

b) $W = 250\pi \left[2y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_h^4 = 4000$

$$\left[2y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_h^4 = \frac{4000}{250\pi}$$

$$\left[32 - \frac{64}{3}\right] - \left[2h^2 - \frac{h^3}{3}\right] = \frac{16}{\pi}$$

$$\frac{32}{3} - 2h^2 + \frac{h^3}{3} = \frac{16}{\pi}$$

$$h^3 - 6h^2 + \left(32 - \frac{48}{\pi}\right) = 0$$

Por tanto $0 \leq h \leq 4$

Se empieza a reducir el intervalo para encontrar el valor (dado que es una cúbica no fácilmente solucionable, se sugiere aprovechar para hablar de métodos como el de encajonamiento bisección)

$$h(0) \geq 0$$

$$h \in [2,4] \rightarrow h(2) < 0$$

$$h \in [2,3] \rightarrow h(3) < 0$$

$$h \in [2,2.5] \rightarrow h(2.1) < 0$$

Se recomienda hacer la tabla por Excel

Tomado de cálculo 1 de una variable R. Larson sección 7.2 ejercicio 72 página 468

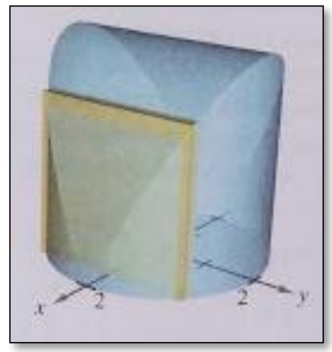


Ilustración 64. Tomado de Cálculo 1: de una variable. (p. 468), por Larson, R., & Edwards, B, 2010, McGrawHillEducation.

Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x

a) Cuadrados

El área estará dada por la función en términos de x es decir:

$$A = L(x)^2$$

$$A = \left[2\left(\sqrt{4 - x^2}\right)\right]^2$$

$$A = 4(4 - x^2)$$

Ahora se halla el volumen

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

$V = \int_{-2}^{2} 4(4 - x^2)dx$, y por simetría

$$V = 2\int_0^2 4(4 - x^2)dx$$

$$V = 8\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$V = 8\left[8 - \frac{8}{3}\right]$$

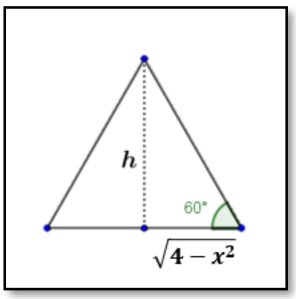
$$V = 8\left[\frac{16}{3}\right] = \frac{128}{3}$$

b) Triángulos equiláteros

Ilustración 65. *Tomado de Cálculo 1: de una variable. (p. 468), por Larson, R., & Edwards, B, 2010, McGrawHillEducation.*

La función es:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$



La base del triángulo es

$$b = 2\sqrt{4 - x^2}$$

La altura del triángulo es

$$\sin(60) = \frac{h}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$h = \sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}$$

Luego, el volumen del sólido es

$$V = \int_{-2}^{2} \frac{b.h}{2}\, dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \frac{2\sqrt{4-x}\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{2}\,dx$$

Por simetría

$$V = 2\sqrt{3}\int_{0}^{2} (4-x^2)\,dx$$

Resolviendo

$$V = 2\sqrt{3}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = 2\sqrt{3}\left(4(2) - \frac{2^3}{3}\right)$$

$$V = 2\sqrt{3}\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$V = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

c) Semicírculos

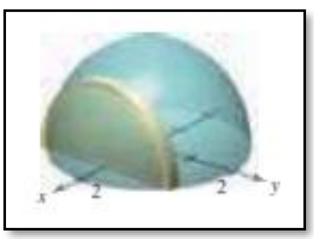


Ilustración 66. *Tomado de Cálculo 1: de una variable. (p. 468), por Larson, R., & Edwards, B, 2010, McGrawHillEducation.*

El área de la media circunferencia es

$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$A = \frac{\pi\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{2}(4-x^2)$$

Luego, el volumen es

$$V = \int A(x)dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \frac{\pi}{2}(4 - x^2)\, dx$$

Por la simetría se tiene

$$V = 2\int_{0}^{2} \frac{\pi}{2}(4 - x^2)\, dx$$

$$V = \int_{0}^{2} \pi\,(4 - x^2)\, dx$$

Resolviendo tenemos

$$V = \pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = \pi\left(8 - \frac{8}{3}\right)$$

$$V = \frac{16}{3}\pi$$

d) Triángulos isósceles rectos

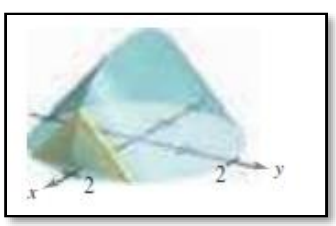
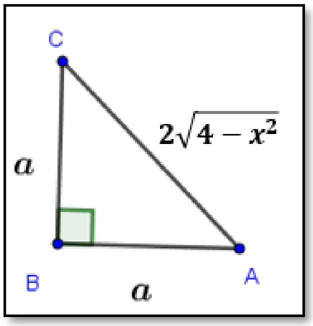


Ilustración 67. *Tomado de Cálculo 1: de una variable. (p. 468), por Larson, R., & Edwards, B, 2010, McGrawHillEducation.*

Visualizando el $\varDelta ABC$ isósceles recto



El área del $\triangle ABC$ es

$$A = \frac{b.h}{2} = \frac{a^2}{2} \ (31)$$

Por el Teorema de Pitágoras

$$a^2 + a^2 = \left(2\sqrt{4 - x^2}\right)^2$$

$$2a^2 = 4(4 - x^2)$$

$$a^2 = 2(4 - x^2)$$

Reemplazando a^2 en la ecuación (31)

$$A = \frac{2(4 - x^2)}{2}$$

$$A = 4 - x^2$$

El volumen del sólido es

$$V = 2\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$$

$$V = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)_0^2$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right)$$

$$V = \frac{32}{3}$$

Ejercicio # 6

Tomado de cálculo 1 de una variable R. Larson solución de problemas capítulo 7 ejercicio 6 página 517

Un orificio perforado en el centro de una esfera de radio r. La altura del anillo esférico restante es h. Encontrar el volumen del anillo y mostrar que es independiente del radio de la esfera.

Enlace de construcción en GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/esbfytbp

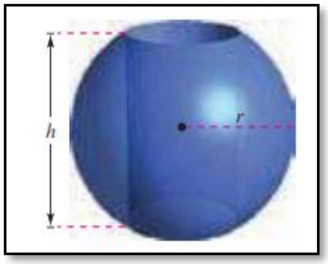


Ilustración 68. *Tomado de Cálculo 1: de una variable. (p. 517), por Larson, R., & Edwards, B, 2010, McGrawHillEducation.*

La función está definida por la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por el método de casquetes cilíndricos el volumen es

$$V = 2\pi \int_a^r x\left(h - \sqrt{r^2 - x^2}\right) dx$$

Por simetría

$$V = 4\pi \int_a^r x\left(h - \sqrt{r^2 - x^2}\right) dx$$

Para hallar el valor de a

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \; (32)$$

Dado que $y = h$, reemplazamos en la ecuación (32)

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$h^2 = r^2 - x^2$$
$$x^2 = r^2 - h^2$$
$$x = \sqrt{r^2 - h^2}$$

Por tanto,

$$V = 4\pi \int_{\sqrt{r^2-h^2}}^{r} x\,(h - \sqrt{r^2 - x^2})\,dx$$

Usando la propiedad distributiva

$$V = 4\pi \int_{\sqrt{r^2-h^2}}^{r} \left[xh - x\sqrt{r^2 - x^2}\right]\ dx$$

Si $u = r^2 - x^2$ entonces $du = -2x\,dx$

$$-\frac{du}{2x} = dx$$

Luego, se tiene que

$$V = 4\pi \left[\int_{\sqrt{r^2-h^2}}^{r} xh\,dx + \int_a^b \frac{1}{2x}\left(xu^{1/2}\right)du\right]$$

$$V = 4\pi \left[\frac{1}{2}x^2h + \frac{1}{2}\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}\right]_{\sqrt{r^2-h^2}}^{r}$$

Factorizando $\frac{1}{2}$ y usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = 2\pi \left[r^2h - (r^2 - h^2)h - \frac{2}{3}h^3\right]$$

$$V = 2\pi \left[r^2h - r^2h + h^3 - \frac{2}{3}h^3\right]$$

$$V = \frac{2\pi h^3}{3}$$

Dado que la expresión del volumen solo es una expresión que depende la altura h entonces el volumen es independiente del radio r.

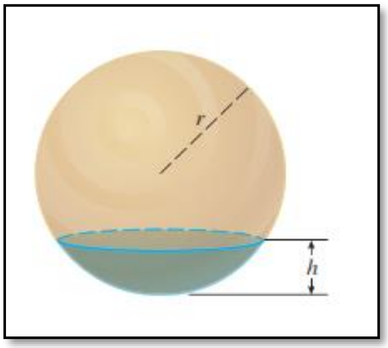


Ilustración 69. *Tomado de Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. (p. 459), por Stewart. J.2012. Cengage Learning.*

a) Demuestre el volumen de un segmento de altura h de una esfera de radio r es

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)}$$

Tomado de Cálculo de una variable trascendentes tempranas de J. Stewart problemas adicionales capítulo 6 ejercicio 5 página 459

La ecuación general de la esfera está definida por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Se despeja x^2

$$x^2 = r^2 - y^2$$

Se aplica el método de discos

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2\, dy$$

Sustituyendo los datos del problema

$$V = \pi \int_{r-h}^{h} (r^2 - y^2) dy$$

Integrando

$$V = \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{r-h}^{h}$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi\left[\frac{2r^3}{3} - r^3 + r^2h + \frac{r^3}{3} - \frac{3r^2h}{3} + \frac{3rh^2}{3} - \frac{h^3}{3}\right]$$

$$V = \pi\left[rh^2 - \frac{h^3}{3}\right]$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2[3r - h]\ (u^3)$$

b) Demuestre que si una esfera de radio 1 se corta mediante un plano a una distancia x desde el centro de tal manera que el volumen de un segmento es el doble del volumen del otro, entonces x es una solución de la ecuación $3x^2 - 9x + 2 = 0$. Donde $0 < x < 1$. Utilice el método de Newton para determinar una x con una aproximación de cuatro cifras decimales.

El método de Newton nos dice que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Por lo que se tiene

$$f(x) = 3x^3 - 9x + 2$$

$$f(x_n) = 3{x_n}^3 - 9x_n + 2$$

$$f'(x_n) = 9{x_n}^2 - 9$$

Sustituyendo en el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{3{x_n}^3 - 9x_n + 2}{9({x_n}^2 - 1)}$$

Para encontrar la x, se debe iniciar sustituyendo valores en la anterior ecuación, se inicia con $x = 1$ y $x = 0$.

Para $x = 1$	Para $x = 0$

$x_1 = 1 - \frac{3(1)^3 - 9(1) + 2}{9(1-1)}$ $x_1 = \frac{-4}{0}$ No tiene sentido porque se indetermina.	$x_1 = 0$ $x_2 = 0 - \frac{3(0)^3 - 9(0) + 2}{9(0-1)} = \frac{2}{9}$ $x_3 = \frac{2}{9} - \frac{3\left(\frac{2}{9}\right)^3 - 9\left(\frac{2}{9}\right) + 2}{9\left(\frac{2}{9} - 1\right)} = \frac{470}{2079}$ $x_4 = \frac{470}{2079} - \frac{3\left(\frac{470}{2076}\right)^3 - 9\left(\frac{470}{2076}\right) + 2}{9\left(\frac{470}{2076} - 1\right)}$ $x_4 = 0{,}22602$ $x_5 = 0{,}22602 - \frac{3(0{,}22602)^3 - 9(0{,}22602) + 2}{9(0{,}22602 - 1)}$ $x_5 = 0{,}2261$

c) Utilice la fórmula para el volumen de un segmento de una esfera para demostrar que la profundidad x en la cual una esfera flotante de radio r se hunde en el agua es una raíz de la ecuación

$$\boldsymbol{x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0;}$$

donde s es el peso específico de la esfera. Suponga que una esfera de madera de radio igual a $0{,}5\ m$ tiene peso específico de $0{,}75$. Calcule la profundidad con una aproximación de cuatro cifras decimales, a la cual la esfera se hunde.

Enlace de la construcción en GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/zrsc8uw4

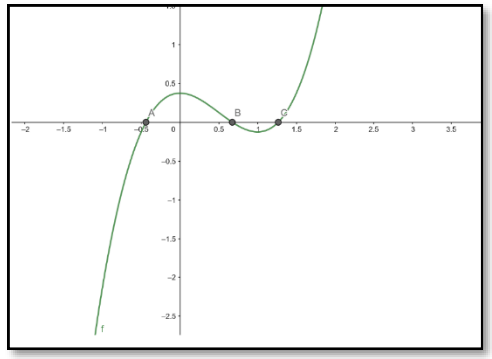


Ilustración 70. Raíces de la función cúbica dada en la situación problema.

Como datos se tiene:

- $\rho_s = s$; dado
- $v_s = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$; "por el ítem a"
- $S = \frac{v_s}{v_T}$; (1); por la definición densidad relativa

Sustituyendo V_s y V_T en la ecuación (1) se tiene

$$S = \frac{\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Luego, teniendo en cuenta que $h = x$

$$S = \frac{\frac{1}{3}\pi x^2(3r - x)}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$4sr^3 = x^2(3r - x)$$

$$4sr^3 = 3x^2 r - x^3$$

$$x^3 - 3x^2 r + 4sr^3 = 0 \; (2)$$

Ahora, al suponer que

$r = \frac{1}{2}m$; $s = \frac{3}{4}$

Sustituyendo r y s en la ecuación (2)

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8} = 0$$

Para calcular la profundidad x, con cuatro cifras decimales

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}$;

$f(x)$ es una función continua por ser un polinomio, luego

- $f(0) = x(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2 + \frac{3}{8}$

  $f(0) = \dfrac{3}{8}$

- $f(1) = x(1)^3 - \frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{8}$
- $f(1) = -\frac{1}{8}$

Entonces, existe un cero entre $(0{,}1)$.

Usando el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x$$

Empezando con $x = \frac{1}{2}$ entonces,

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1/8}{3/4}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1/216}{2/3}$$

$$x_2 = \frac{97}{144} \approx 0{,}674$$

Por tanto, la esfera se hunde $\mathbf{0{,}674}\ \boldsymbol{m}$. aproximadamente

Nota: se debe tener precaución al usar el método de Newton debido a que si se toma un punto muy lejano del que se busca, este puede converger o muy despacio o dar saltos de un lado a otro del punto de corte (fenómeno de desborde).

a. Un tazón semiesférico tiene radio de 5 $\boldsymbol{pulg}$ y le entra agua a razón de $\mathbf{0.2}\ \frac{\boldsymbol{pulg^3}}{\boldsymbol{s}}$

i. ¿Qué tan rápido sube el nivel de agua en el tazón en el instante en que el agua tiene 3 $\boldsymbol{pulg}$ de profundidad?

Como datos se tiene:

- $r = 5\ pulg$
- $\frac{dv}{dt} = 0{,}2\ {pulg^3}/{s}$
- $h = 3\ pulg$
- $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ “por ítem a”

Luego, al derivar v se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}\pi\ 2h\ \frac{dh}{dt}\ (3r - h) + \frac{1}{3}\ \pi h^2\ (-1)\frac{dh}{dt} \qquad (33)$$

Sustituyendo r y $\frac{dv}{dt}$ en la ecuación (33)

$$\frac{1}{5}\ \frac{pulg^3}{s} = \frac{2}{3}\pi\ (h)\frac{dh}{dt}(15\ pulg\ - h) - \frac{\pi}{3}h^2\frac{dh}{dt}$$

Factorizando $\frac{dh}{dt}$ en la ecuación (33)

$$\frac{dh}{dt}\left[\frac{2}{3}\pi h(15\ pulg - h) - \frac{\pi}{3}h^2\right] = \frac{1}{5}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1\ {}^{pulg^3}/_s}{\frac{5}{3}\pi h[2(15\ pulg - h) - h]} \quad (34)$$

Dado que $h = 3\ pulg$, se sustituye h en la ecuación (34)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1\ {}^{pulg^3}/_s}{\frac{5}{3}\pi\ (3pulg)[2(15\ pulg - 3\ pulg) - 3\ pulg]}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1\ {}^{pulg^3}/_s}{5\pi\ pulg\ [24\ pulg - 3\ pulg]}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1\ {}^{pulg^3}/_s}{120\ \pi\ pulg^2 - 15\ \pi\ pulg^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{105\ \pi}{}^{pulg}/_s$$

Por tanto, en el instante en el que el agua tiene $3pulg$ de profundidad, el nivel de agua sube en el tazón es de $\frac{1}{105\ \pi}{}^{pulg}/_s$

Nota: es importante que en algunos problemas matemáticos el profesor utilice las unidades de medida con el fin de proporcionarle al estudiante un aprendizaje significativo en cada una de las temáticas presentadas en el currículo.

ii. En un cierto instante, el agua tiene 4 $pulg$ de profundidad. ¿qué tiempo se requiere para llenar con agua el tazón?

Se tiene que la fórmula para el volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

Pero en el problema se plantea el área de un tazón semiesférico, por lo cual la anterior formula se multiplica por $\frac{1}{2}$

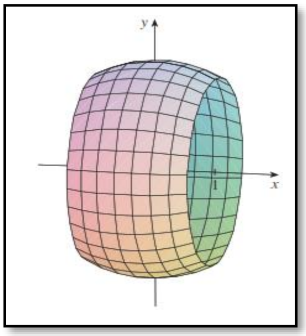


Ilustración 71. Tomado del texto Cálculo de una variable trascendentes tempranas. Stewart. J.

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)\right)$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi(5)^3-\frac{1}{3}\pi(4)^2(3(5)-4)\right)$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{500}{3}\pi-\frac{16}{3}\pi(15-4)\right)=\frac{250}{3}\pi-\frac{176}{3}\pi=\frac{74}{3}\pi$$

Se aplica proporcionalidad directa

$$0.2\, pulg \longrightarrow 1s$$

$$\frac{74\pi}{3}\longrightarrow t$$

$$t=\left[\frac{74\pi}{3}(1)\right]\div 0.2=\frac{370\pi}{3}\approx 387.46\, s$$

V. Sólidos de revolución

Áreas

La curva $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $-b\le x\le b$ con $b\le a$ es un arco de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x.

La solución se puede visualizar en el problema 1 del capítulo 3

Volúmenes

Encontrar el volumen de la región limitada por la curva $y=x^2+1$, $x=2$; $x=3$ girando alrededor del eje x.

La solución se puede visualizar en el problema 8 del capítulo 3

Obtenga la fórmula del volumen de un cono circular recto de altura h y un radio de base a, generado al hacer girar la región acotada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos.

La solución se puede visualizar en el problema 4 del capítulo 3

Algunos de los iniciadores de cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Sterometría Doliorum* en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de barriles). A menudo se aproxima la forma de sus lados mediante parábolas.

La solución se puede visualizar en el problema 6 del capítulo 3

Un paraboloide de revolución se obtiene por la rotación de la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje x. Encuentre el volumen limitado por un paraboloide de revolución y un plano que se encuentra a $10\ cm$ del vértice, y la sección plana de la intersección es una circunferencia de $6\ cm$ de radio.

La solución se puede visualizar en el problema 5 del capítulo 3

Ejercicio # 4 Página

La base de un sólido es la región delimitada por una circunferencia con radio de 2 unidades. Obtenga el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados

Adaptado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 6.1 ejercicio 42 página 501

- La base del sólido es

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2$$

- El área del cuadrado es

$$A = (2y)^2$$
$$A = 4y^2$$
$$A = 4(4 - x^2)$$

- El volumen de la sección transversal es

$$V = \int A(x)\, dx$$

Como es una circunferencia de radio 2, entonces, el intervalo de integración es $[-2,2]$

$$V = \int_{-2}^{2} A(x)\, dx$$

Por simetría

$$V = 2\int_{0}^{2} A(x)\, dx$$

Sustituyendo $A(x)$ en la integral

$$V = 2\int_{0}^{2} 4(4 - x^2) dx$$
$$V = 8\int_{0}^{2} (4 - x^2) dx$$

Resolviendo la integral

$$V = 8\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = 8\left[8 - {}^{8}\!/_{3}\right]$$

$$V = \frac{128}{3} u^3$$

La región limitada por las curvas $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$ gira alrededor del eje x, determine el volumen del sólido generado

Adaptado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 6.2 ejercicio 21 página 508

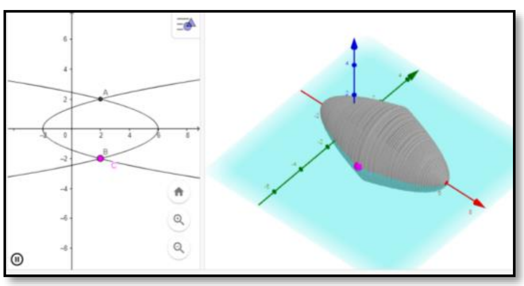


Ilustración 72. Sólido generado por las curvas.

Enlace de la construcción en GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/ykhgfscy

$$x = y^2 - 2 \quad (35)$$
$$x = 6 - y^2 \quad (36)$$

El punto de intersección de las funciones es

$$y^2 - 2 = 6 - y^2$$

$$2y^2 = 8$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm 2$$

Si $y \pm 2$, entonces $x = 6 - 4 = 2$

Despejando y^2 de la ecuación (35) y la ecuación (36)

$$y^2 = x + 2$$
$$y^2 = 6 - x$$

Luego, el volumen es

$$V = \pi \int_{2}^{-2} {y_1}^2 \; dx + \pi \int_{2}^{6} {y_2}^2 \; dx$$

$$V = \pi \int_{2}^{-2} (x + 2) \; dx + \pi \int_{2}^{6} (6 - x) \; dx$$

Integrando

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{2} + \pi \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_{2}^{6}$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = \pi[(2 + 4) - (2 - 4)] + \pi[(36 - 18) - (12 - 2)]$$

$$V = 8\pi + 8\pi = 16\pi$$

La región limitada por las curvas $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$ gira alrededor de la recta $y = 2$. Determine el volumen del sólido generado.

Adaptado de cálculo con geometría analítica de L. Leithold sección 6.2 ejercicio 24 página 508

Se igualan las dos ecuaciones y se despeja y

$$y^2 - 2 = 6 - y^2$$

$$2y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

Se sustituye y en cualquiera de las dos ecuaciones para encontrar x

$$x = y^2 - 2$$

$$x = 4 - 2 = 2$$

Ahora se procede a hallar el volumen del sólido usando cascarones cilíndricos

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (2 - y)[(6 - y^2) - (y^2 - 2)]dy$$

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (2 - y)(8 - 2y^2)dy$$

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (16 - 4y^2 - 8y - 2y^3)dy$$

$$V = 2\pi \left[16y - \frac{4}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{y^4}{2}\right]_{-2}^{2}$$

$$V = 2\pi \left[\left(32 - \frac{32}{3} - 16 + 8\right) - \left(-32 + \frac{32}{3} - 16 + 8\right)\right]$$

$$V = 2\pi \left[64 - \frac{64}{3}\right] = \frac{128}{3}(2\pi) = \frac{256\pi}{3}$$

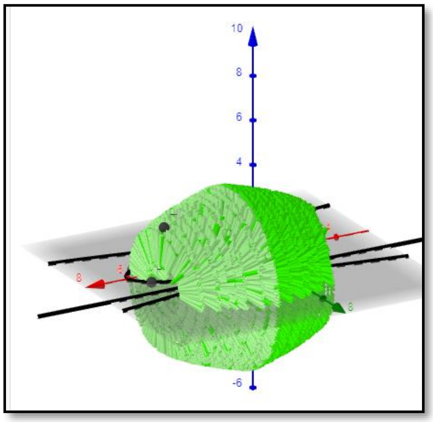


Ilustración 73. Sólido generado en el ejercicio.

Enlace de la construcción en GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/n2wmyfna

El arco de $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0, 4]$ se gira alrededor de la recta $y = b$.

a) Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b

b) Representar la función en una calculadora para el apartado a), y usar la gráfica para aproximar el valor b que hace mínimo el volumen del sólido.

c) Usar cálculo para encontrar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido, y comparar el resultado con la respuesta del apartado b)

La solución se puede visualizar en el problema 10 del capítulo 3

Considerar el plano acotado por la región $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1; \quad a, b > 0$. Mostrar que el volumen del elipsoide formado cuando esta región se gira alrededor de eje x es

$$\frac{4}{3}\pi a b^2 \quad u^3$$

La función dada es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Resolviendo los términos que están al cuadrado

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Despejando y

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\ b$$

Usando la fórmula de un volumen de revolución por el método de los discos:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \quad (1)$$

Al sustituir los valores dados en (1)

$$V = \int_a^b \pi \left[\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\ b\right]^2 dx$$

Por la propiedad de la simetría en las cónicas

$$V = 2\pi \int_0^a \left[\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\ b\right]^2 dx$$

$$V = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

Resolviendo la integral

$$V = 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$V = 2\pi b^2 \left[a - \frac{a^3}{3a^2}\right]$$

$$V = 2\pi b^2 \left[\frac{2}{3}a\right]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2 \quad u^3$$

Por tanto, se ha demostrado que el volumen de un elipsoide es:

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi a b^2 \quad u^3}$$

Enlace de la construcción en GeoGebra®:

https://www.geogebra.org/m/yfwsayts

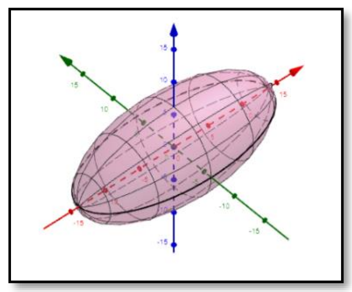


***Ilustración 74**. Elipsoide.*

NOTA: Como alternativa didáctica se propone un video en la plataforma de YouTube realizado por las autoras de la investigación, en el cual se modela la situación problema del volumen de un elipsoide mediante Realidad Aumentada e igualmente se realiza un experimento para realizar una aproximación del volumen de un objeto físico muy similar al de un elipsoide con el fin de potenciar y enriquecer los resultados que se obtuvieron analíticamente y en el software de GeoGebra®:

Enlace del video:

https://youtu.be/DKGD1Cv-j4w

BIBLIOGRAFÍA

Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas. Séptima edición* México: Thomson.

Larson, R. Bruce, H. (2010). *Cálculo 1 de una variable. Novena edición.* México: McGraw-Hill.

Louis, L. (1992). *El cálculo con geometría analítica. Sexta edición.* México: HARLA.

Hernández, C. y Velandia, M. (2013). *Una Exploración de las Cónicas desde el Cálculo Diferencial* [tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN**.**

Tejero, J. (2015). *Exploración del cálculo integral desde el contexto de la geometría dinámica* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN

Reyes, D. (2017). *Visualización y exploración, acciones que se fortalecen en el ambiente de aprendizaje apoyado con GeoGebra en la asignatura de Geometría Euclídea en estudiantes Universitarios.* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2937

Rodríguez, L. (2017). *GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior*. [Ensayo Argumentativo, Universidad Militar Nueva Granada]. https://repository.unimilitar.edu.co/handle/10654/17042

Fernández Blanco, T., Diego Mantecon, J. M. y Gonzales Sequeiros, P. (2019). Procesos de Visualización en una Tarea de Generación y Representación de Cuerpos de Revolución. *Revista Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33 (64), 768-789. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16

Sepúlveda López, A., Medina García, C. y Sepúlveda Jáuregui, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educación matemática*, 21 (2), 79-115

Grijalva Monteverde, A. y Dávila, M. T. (2020). Integral y visualización. *Unión Revista iberoamericana de educación matemática*, 33 (1), 75 – 87

Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*, 52 (3), 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Fernández Blanco, T. (2015). Generando sólidos de revolución en la formación inicial de maestros. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México.