Un estudio de la métrica del ascensor

Jonathan Alexander Sarmiento Laguna

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2021

Un estudio de la métrica del ascensor

Jonathan Alexander Sarmiento Laguna

2017240073

C.C. 1016089278

Trabajo de grado para optar por el título

de Licenciado en Matemáticas

Dirigido por: Gil Alberto de Jesús Donado Núñez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2021

A mis padres por sus sacrificios, esfuerzos, porque a pesar de las dificultades siempre confiaron en mí y me dieron su apoyo total en las decisiones que he tomado, además, de su ánimo para la realización y culminación de este trabajo, pero por encima de todo por ser mi fuente de motivación día a día.

A Vivian por su apoyo y amistad incondicional, por creer y sacar lo mejor de mi durante estos años.

Tabla de contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

En el presente trabajo y a través de los diferentes capítulos, se muestra el estudio realizado para la exploración e identificación de algunos lugares geométricos como lo son: segmento, rayo, recta, mediatriz y secciones cónicas en la métrica del ascensor. En el primer lugar, se da la justificación del porqué de la realización de este trabajo, para luego en el primer capítulo encontrarse con los objetivos generales y específicos para su realización.

En el segundo capítulo, se encuentra el marco de referencia en donde se listan y muestran algunos postulados y definiciones que hacen referencia a algunos de los conocimientos previos necesarios para la realización del estudio. Además, se muestra una tabla en la que se muestran las diversas notaciones asociadas a la métrica usual y a la métrica del ascensor, que se podrá encontrar el lector a lo largo del trabajo. En el tercer capítulo, se presenta las definiciones de métrica y distancia del ascensor, para luego pasar a la demostración de que efectivamente la distancia del ascensor cumple con la definición de métrica.

En el cuarto capítulo se da a conocer el trabajo con los lugares geométricos desde el punto de vista de algunos autores y el cómo el software GeoGebra es de gran ayuda la exploración de estos con el fin de potenciar algunas habilidades matemáticas. En el quinto capítulo, se presentan los lugares geométricos en los cuales se realizó el estudio y en donde se cuenta como se realizó la exploración en de estos lugares en GeoGebra para así con la ayuda de la visualización, poder identificarlos y dar paso a la conjeturación, argumentación y demostración en la métrica del ascensor. Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones producto de la realización de este trabajo, divididas en dos apartados: los aportes realizados a la métrica y las proyecciones.

Justificación

La idea de este presente trabajo surge en la asignatura de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, pues en el inicio de este espacio académico se habla de la definición de distancia usual a la que se le llama distancia euclídea y en donde se mencionó la existencia de diversas definiciones de distancia o métrica, despertando así mi interés en extender el estudio de las métricas, específicamente para este trabajo el de la métrica del ascensor, en donde se pretende ver algunos lugares, además de profundizar en el saber matemático que aporta a los saberes y habilidades adquiridas en el proceso de formación durante la licenciatura.

1. Objetivos

1.1. Objetivo General

Realizar un estudio de la métrica del ascensor que permita describir algunos lugares geométricos.

1.2. Objetivos Específicos

- ✓ Identificar y describir mediante el uso de GeoGebra y métodos algebraicos algunos lugares geométricos asociados a la métrica como lo son: segmento, rayo, recta, punto medio, mediatriz, circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.
- ✓ A partir de la exploración encontrar proposiciones que den cuenta de los lugares geométricos asociados identificados previamente y realizar las correspondientes demostraciones.

2. Marco de Referencia

En este capítulo, se presentarán algunos objetos, postulados y definiciones desde la geometría euclidiana tomados de Samper & Molina (2013) y Lehmann (1989) que servirán de referencia para la realización del estudio de la métrica del ascensor.

2.1.Postulados

- ✓ De la recta: Dados dos puntos, existe exactamente una recta que los contiene.
- ✓ Medidas del segmento: Si B esta entre A y C, entonces $AB + BC = AC$.

2.2. Definiciones

- Segmento: El segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos A, B y todos los puntos X que están entre A y B. Los puntos A y B se llaman extremos del segmento.
- Punto medio: El punto M es el punto medio de $\overline{AB}$, si está entre los puntos A, B y $AM = MB$.
- Puntos colineales: Tres o más puntos son colineales si existe una recta que los contiene.
- Interestancia: B esta entre A y C si se cumple que:
  - i. A, B y C son colineales
  - ii. $AB + BC = AC$
- Mediatriz de un segmento (1): Dado $\overline{AB}$. La mediatriz es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de éste.
- Mediatriz de un segmento (2): Dado $\overline{AB}$. la mediatriz es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.
- Rayo: El rayo $\overrightarrow{AB}$ es la unión del $\overline{AB}$ con el conjunto de puntos X de la recta para los cuales B está entre A y X. El punto A es el origen del rayo

- Rayos opuestos: Dos rayos son opuestos si son colineales y sólo comparten el origen.
- Circunferencia: Dado un punto P, el conjunto de todos los puntos X que equidistan del punto P una distancia r recibe el nombre de circunferencia. El punto P es el centro de la circunferencia.
- Radio de circunferencia: Dada la circunferencia con centro en P y X un punto cualquiera que pertenece a ella. La medida PX o los segmentos $\overline{PX}$ reciben el nombre, respectivamente, de radio o radios de la circunferencia.
- Parábola: Lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija del plano es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto se llamará foco y la recta será la directriz.
- Elipse: Lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los puntos serán llamados focos.
- Hipérbola: Lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos**,** es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.
- Distancia euclídea o usual para $\mathbb{R}$: Sean A y B en $\mathbb{R}$, $d(A,B) = |B - A|$
- Distancia euclídea o usual para $\mathbb{R}^2$: Sean $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$, $d(A,B) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$

2.3.Tabla de notaciones

A continuación, se presenta una tabla en la que se evidencia las diferentes notaciones que aparecen en el desarrollo del estudio de la métrica del ascensor.

Concepto	**Métrica Usual**	**Métrica del Ascensor**
Distancia entre dos puntos S y T	$d(S,T)$	$d_A(S,T)$
Segmento cuyos extremos son A y B	$\overline{AB}$	$\overline{AB}_A$
Rayo cuyo extremo es A y se dirige a B	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}_A$
Recta que pasa por los puntos A y B o una recta	$\overleftrightarrow{AB}$ o l	$\overleftrightarrow{AB}_A$ o l_A
Mediatriz de los puntos A y B	$\mathcal{M}_{A,B}$	$\mathcal{M}_{A,B_A}$
Circunferencia con centro en P y radio r	$\odot P_r$	$\odot(P_r)_A$
Elipse cuyos focos son A y B donde k es la constante	$\oplus\{A,B\}_k$	$\oplus(\{A,B\}_k)_A$
Parábola cuyo foco es A donde l es la directriz	$⊍A_l$	$⊍(A_l)_A$
Hipérbola cuyos focos son A y B donde k es la constante	$\ominus\{A,B\}_k$	$\ominus(\{A,B\}_k)_A$

Tabla 1. Notaciones en el estudio de la métrica del ascensor

3. La Métrica del Ascensor

En este capítulo se da a conocer la definición lo que se considerará que es una métrica, la definición de distancia del ascensor que será de uso en toda la realización del estudio y la demostración de que efectivamente la distancia del ascensor es una métrica en $\mathbb{R}^2$.

3.1. Definición de Métrica

Según Neira (2015) una métrica es:

Sea X un conjunto. Una métrica sobre X es una función $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $x, y, z \in X$, tal que:

1. $p(x, y) \geq 0$
2. $p(x, y) = 0$ sí y solo si $x = y$
3. $p(x, y) = p(y, x)$
4. $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$ (desigualdad triangular)

Si p es una métrica sobre X decimos que (X, p), es un **espacio métrico**. La función p se conoce también como **función distancia** y para cada par de puntos x y y de X, se dice que $p(x, y)$ es la distancia entre x y y.

3.2. Definición Distancia del Ascensor

La definición de distancia del ascensor fue encontrada en Toledo (2017) y es la que se usará a partir de este momento.

En $\mathbb{R}^2$ se define la distancia del ascensor d_A como sigue,

Sean $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$d_A(A, B) = \begin{cases} |b_1 - b_2|, & a_1 = a_2 \\ |b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2|, & a_1 \neq a_2 \end{cases}$$

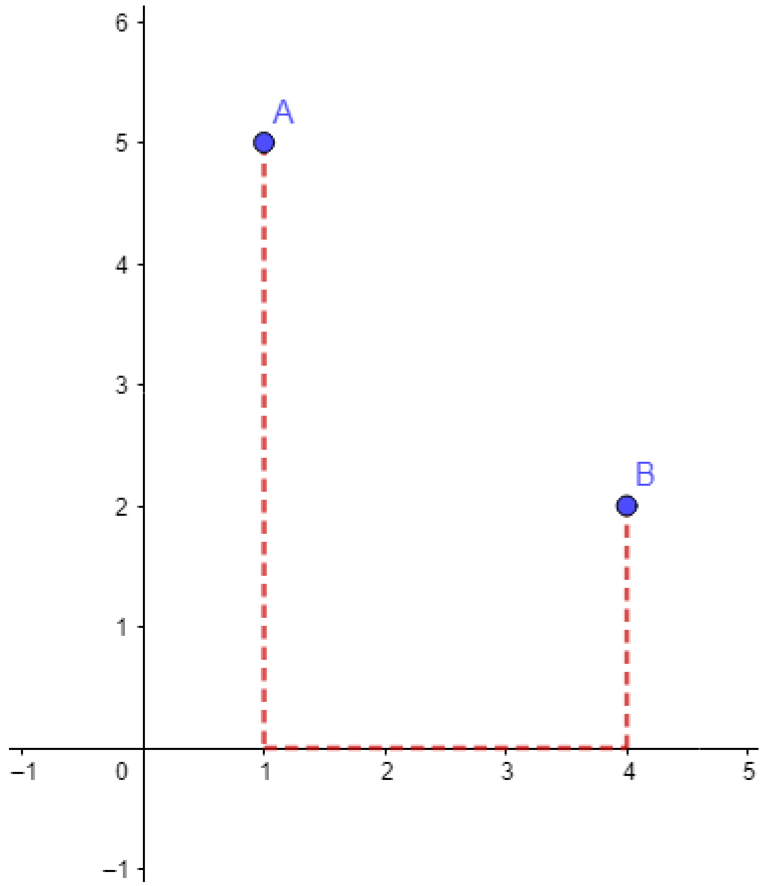

Figura 1. Definición Métrica del Ascensor

Veamos que la distancia del ascensor cumple las propiedades de una métrica.

3.3. Demostración Métrica del Ascensor

Sean $A(a_1, b_1), C(a_2, b_2), C(a_3, c_3) \in \mathbb{R}^2$

1. $d_A(A, B) \geq 0$

Vamos a considerar dos casos:

Caso 1. $a_1 = a_2$

Por la definición de distancia del ascensor y como $a_1 = a_2$, entonces

$$d_A(A, B) = |b_1 - b_2|$$

Y por propiedad de valor absoluto $d_A(A, B) = |b_1 - b_2| \geq 0$.

Caso 2. $a_1 \neq a_2$

Por la definición de distancia del ascensor y como $a_1 \neq a_2$, entonces

$$d_A(A,B) = |b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2|$$

Luego por propiedad del valor absoluto, cada uno de los sumandos es mayor o igual que cero, por lo cual $d_A(A,B) = |b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2| \geq 0$.

2. $d_A(A,B) = 0$ sí y solo si $A = B$

$\Longrightarrow$ Si $d_A(A,B) = 0$ entonces por la definición de distancia del ascensor tenemos que:

i. $|b_1 - b_2| = 0$ si $a_1 = a_2$

Por propiedades de valor absoluto entonces

$$b_1 - b_2 = 0$$

$$b_1 = b_2$$

Por lo que $A = B$

ii. $|b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2| = 0$ si $a_1 \neq a_2$

Luego por propiedades de los reales y de valor absoluto se tiene que:

$$|b_1| = 0 \rightarrow b_1 = 0$$

$$|a_1 - a_2| = 0 \rightarrow a_1 = a_2$$

$$|b_2| = 0 \rightarrow b_2 = 0$$

Por lo cual $A = B$

$\Longleftarrow$ Si $A = B$ entonces, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ por lo que aplicado la definición de distancia del ascensor tendremos que:

$$d_A(A,B) = |b_1 - b_2| = 0$$

3. $d_A(A,B) = d_A(B,A)$

Caso 1. $a_1 = a_2$

Por definición de la distancia del ascensor y las propiedades de valor absoluto tenemos:

$$d_A(A,B) = |b_1 - b_2|$$

$$|b_1 - b_2| = |b_2 - b_1|$$

$$|b_2 - b_1| = d_A(B,A)$$

Caso 2. $a_1 \neq a_2$

Por definición de la distancia del ascensor, las propiedades de valor absoluto y de los números reales, tenemos:

$$d_A(A,B) = |b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2|$$

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_1|$$

$$|b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2| = |b_2| + |a_2 - a_1| + |b_1|$$

$$|b_2| + |a_2 - a_1| + |b_1| = d_A(B,A)$$

4. $d_A(A,C) \leq d_A(A,B) + d_A(B,C)$

Caso 1. $a_1 = a_3$, entonces

$d_A(A,C) = |b_1 - b_3|$ (1)

- Si $a_1 = a_2$

  $d_A(A,B) = |b_1 - b_2|$ (2)

  $d_A(B,C) = |b_2 - b_3|$ (3) por ser $a_1 = a_2 = a_3$

  Luego por (1), (2), (3) se cumple la desigualdad triangular puesto que

$$|b_1 - b_3| \leq |b_1 - b_2| + |b_2 - b_3|$$

- Si $a_1 \neq a_2$

  $d_A(A,B) = |b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2|$ (4)

  $d_A(B,C) = |b_2| + |a_2 - a_3| + |b_3|$ (5) por ser $a_2 \neq a_3$

  Luego por (1), (4), (5) se cumple la desigualdad triangular puesto que

  $|b_1 - b_3| \leq |b_1| + |a_1 - a_2| + 2|b_2| + |a_2 - a_3| + |b_3|$

Caso 2. $a_1 \neq a_3$, entonces

$d_A(A, C) = |b_1| + |a_1 - a_3| + |b_3|$ (6)

- Si $a_1 = a_2$

  Por (6), (2) y (5) se tiene la desigualdad triangular puesto que

  $|b_1| + |a_1 - a_3| + |b_3| \leq |b_1 - b_2| + |b_2| + |a_2 - b_3| + |b_3|$

- Si $a_2 = b_3$

  Por (6), (3) y (4) se tiene la desigualdad triangular puesto que

  $|b_1| + |a_1 - a_3| + |b_3| \leq |b_1| + |a_1 - a_2| + |b_2| + |b_2 - b_3|$

- Si $a_1 \neq a_2$ y $a_2 \neq a_3$

  Por (6), (4) y (5) se tiene la desigualdad triangular pues

  $|b_1| + |a_1 - a_3| + |b_3| \leq |b_1| + |a_1 - a_2| + 2|b_2| + |a_2 - a_3| + |b_3|$

Por tanto, se cumple la desigualdad triangular y d_A es una métrica.

4. Exploración de Lugares Geométricos

En este capítulo se da a conocer el trabajo con los lugares geométricos desde el punto de vista de algunos autores y el cómo el software GeoGebra es de gran ayuda la exploración de estos con el fin de potenciar algunas habilidades matemáticas.

4.1. El Trabajo con Lugares Geométricos

El trabajar lugares geométricos con diversas métricas permite explorar nuevas formas de medir y *promueve el desarrollo del pensamiento geométrico* a traves de diferentes situaciones que retan al conocimiento, Antonio et al (2020). Teniendo esto en cuenta, Ferreyra & Lorenzo (2012) afirman que: “El desarrollo de procesos que permitan el dominio de conceptos y procedimientos y las competencias para observar regularidades, verificar conjeturas y estimar resultados, darán sentido y significación al aprendizaje de la geometría. Es por ello por lo que juzgamos importante realizar previamente *observaciones, hipótesis y conjeturas a partir de lo observado*. En este sentido las herramientas informáticas juegan un rol importante pues, si bien el uso de ellas no permite al alumno *validar o demostrar*, son un recurso para conjeturar propiedades de los objetos, conjeturas difíciles de lograr cuando se trabaja con los recursos tradicionales. Y sabemos que el planteamiento de conjeturas es una de las tareas principales de la matemática".

4.2. Uso de GeoGebra

El asistente matemático GeoGebra, integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y análisis matemático en un ambiente dinámico. En este sentido GeoGebra al recrear ambientes dinámicos, permite a los usuarios la visualización y representación de relaciones de variación a través del uso de deslizadores.

La utilización de este software de geometría dinámica permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para *deducir* resultados y propiedades a partir de la observación directa. Las virtudes de GeoGebra son fortalecidas por procesos de visualización, puesta al servicio de la interpretación de conceptos o propiedades de un objeto matemático, además, pueden también ir más allá de su papel procedimental e inspirar una solución general y creativa (Toledo, 2017).

Teniendo en cuenta lo anterior, para la exploración de los lugares geométricos que se presentaran en este trabajo, se hizo uso tanto de la definición de dicho lugar geométrico, como del software GeoGebra como herramienta TIC que permite una mejor visualización gracias a sus diferentes funcionalidades y así identificar regularidades, verificar conjeturas, formular hipótesis y conjeturas para realizar el estudio de algunos lugares geométricos en la métrica del ascensor.

5. Lugares Geométricos en la Métrica del Ascensor

En este capítulo se dan a conocer los lugares geométricos: segmento, rayo, recta, punto medio, mediatriz y las secciones cónicas en la métrica, en donde se cuenta como se realizó la exploración en de estos lugares en GeoGebra para así con la ayuda de la visualización identificarlos y dar paso a la conjeturación, argumentación y demostración en la métrica del ascensor. Además, se encuentran imágenes antes de cada demostración con el fin de dar una idea de lo que se quiere.

5.1. Segmentos

Durante la exploración en GeoGebra para la identificación del segmento se colocaron puntos A y B que son los extremos del $\overline{AB}_A$ en diversas posiciones del plano, dando como resultado tres tipos de segmentos: los segmentos cuyos puntos tienen la misma abscisa, los segmentos cuya ordenada es igual a cero y los segmentos cuyos puntos extremos tienen distinta abscisa y ordenada. Teniendo esto en cuenta, se tiene la siguiente proposición:

5.1.1. Proposición Segmento del Ascensor

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2), C(a_1, 0)$ y $D(a_2, 0)$ en $\mathbb{R}^2$

1. Si $a_1 = a_2$ entonces $\overline{AB}_A = \overline{AB}$.
2. Si $b_1 = b_2 = 0$ entonces $\overline{AB}_A = \overline{AB}$.
3. Si $a_1 \neq a_2, b_1 \neq 0$ o $b_2 \neq 0$ entonces $\overline{AB}_A = \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DB}$.

5.1.1.1.Demostración.

Parte 1.

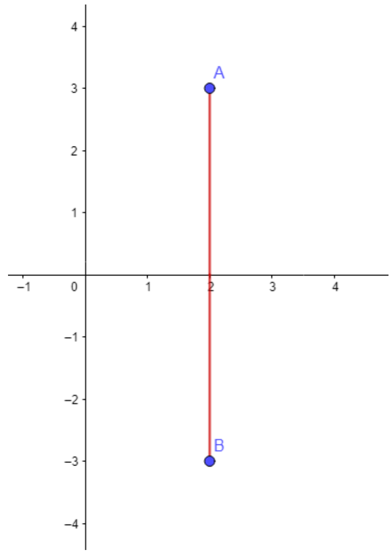

Figura 2. Segmento del Ascensor cuando $a_1 = a_2$

Tenemos $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, por definición de segmento sea $Z(a_1, y) \in \overline{AB}$, entonces $A - Z - B$, luego por definición de distancia usual en $\mathbb{R}^2$:

$$d(A, B) = d(A, Z) + d(Z, B)$$

$$\sqrt{(a_1 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = \sqrt{(a_1 - a_1)^2 + (y - b_1)^2} + \sqrt{(a_1 - a_1)^2 + (b_2 - y)^2}$$

$$\sqrt{0 + (b_2 - b_1)^2} = \sqrt{0 + (y - b_1)^2} + \sqrt{0 + (b_2 - y)^2}$$

Por propiedades de los números reales,

$$|b_2 - b_1| = |y - b_1| + |b_2 - y|$$

Y por la definición de distancia del ascensor tenemos:

$$d_A(A, B) = d_A(A, Z) + d_A(Z, B)$$

Por lo tanto $Z \in \overline{AB}_A$.

Parte 2.

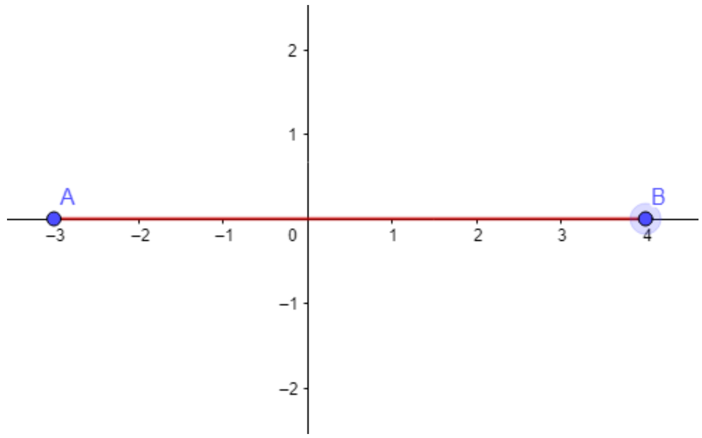

Figura 3. Segmento del Ascensor cuando $b_1 = b_2 = 0$

Sea A y B en $\mathbb{R}^2$, $A(a_1, 0)$ y $B(a_2, 0)$, por definición de segmento sea $Z(x, 0) \in \overline{AB}$, entonces $A - Z - B$, luego por definición de distancia usual en $\mathbb{R}^2$:

$$d(A, B) = d(A, Z) + d(Z, B)$$

$$\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(a_1 - x)^2 + (0 - 0)^2} + \sqrt{(a_2 - x)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$\sqrt{(a_1 - a_2)^2} = \sqrt{(a_1 - x)^2} + \sqrt{(a_2 - x)^2}$$

Por propiedad de los números reales

$$|a_1 - a_2| = |a_1 - x| + |a_2 - x|$$

Y por la definición de distancia del ascensor tenemos:

$$d_A(A, B) = d_A(A, Z) + d_A(Z, B)$$

Por lo tanto $Z \in \overline{AB}_A$.

Parte 3.

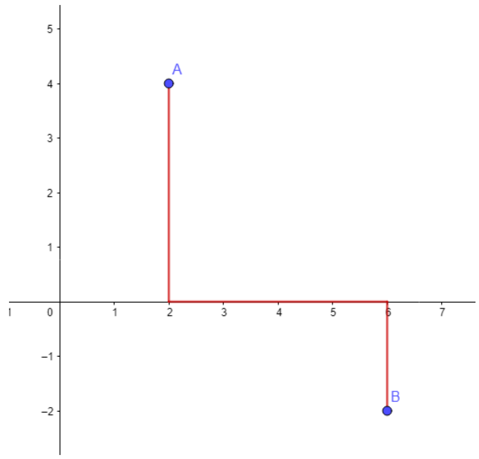

Figura 4. Segmento del Ascensor cuando $a_1 \neq a_2, b_1 \neq 0$ o $b_2 \neq 0$

Sean $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0)$ y $D(a_2, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, por definición de segmento sea $Z(x, y) \in \overline{AB}$, entonces $Z(x, y) \in \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DB}$, por definición de unión tenemos que $Z \in \overline{AC}$ o $Z \in \overline{CD}$ o $Z \in \overline{DB}$.

Caso 1. $Z \in \overline{AC}$

Si $Z(x, y) \in \overline{AC}$ entonces por definición de segmento $A - Z - C$ y $x = a_1$, por definición de distancia usual en $\mathbb{R}^2$ tenemos:

$$d(A, C) = d(A, Z) + d(Z, C)$$

$$\sqrt{0 + (b_1 - 0)^2} = \sqrt{0 + (b_1 - y)^2} + \sqrt{0 + (y - 0)^2}$$

Por propiedad de los números reales

$$|b_1 - 0| = |b_1 - y| + |y - 0|$$

Y por la definición de distancia del ascensor tenemos:

$$d_A(A, B) = d_A(A, Z) + d_A(Z, B)$$

Por lo tanto $Z \in \overline{AC}_A$.

Caso 2. $Z \in \overline{CD}$

Si $Z(x, y) \in \overline{CD}$ entonces por definición de segmento $C - Z - D$ y $y = 0$, por definición de distancia usual en $\mathbb{R}^2$ tenemos:

$$d(C, D) = d(C, Z) + d(Z, C)$$

$$\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(a_1 - x)^2 + (0 - 0)^2} + \sqrt{(a_2 - x)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$\sqrt{(a_1 - a_2)^2} = \sqrt{(a_1 - x)^2} + \sqrt{(a_2 - x)^2}$$

Por propiedad de los números reales

$$|a_1 - a_2| = |a_1 - x| + |a_2 - x|$$

Y por la definición de distancia del ascensor tenemos:

$$d_A(C, D) = d_A(C, Z) + d_A(Z, D)$$

Por lo tanto $Z \in \overline{CD}_A$.

Caso 3. $Z \in \overline{DB}$

Si $Z(x, y) \in \overline{DB}$ entonces por definición de segmento $D - Z - B$ y $x = a_2$, por definición de distancia usual en $\mathbb{R}^2$ tenemos:

$$d(D, B) = d(D, Z) + d(Z, B)$$

$$\sqrt{0 + (b_2 - 0)^2} = \sqrt{0 + (y - 0)^2} + \sqrt{0 + (b_2 - y)^2}$$

Por propiedad de los números reales

$$|b_2 - 0| = |y - 0| + |b_2 - y|$$

Y por la definición de distancia del ascensor tenemos:

$$d_A(D, B) = d_A(D, Z) + d_A(Z, B)$$

Por lo tanto $Z \in \overline{DB}_A$.

Ahora por definición de unión $Z \in \overline{AC}_A \cup \overline{CD}_A \cup \overline{DB}_A$ y por definición de segmento del ascensor $Z \in \overline{AB}_A$.

5.2. Rayos

Durante la exploración en GeoGebra para la identificación del rayo y tomando como referencia el $\overline{AB}_A$ se colocó A como punto de origen del rayo y B como punto hacia el cual estará dirigido en diversas posiciones del plano, dando, así como resultado tres tipos de rayos: los rayos cuyos puntos tienen la misma abscisa, los rayos cuya ordenada es igual a cero y los rayos cuyos puntos A y B tienen diferente abscisa u ordenada. Teniendo esto en cuenta, se tiene la siguiente proposición:

5.2.1. Proposición Rayo del Ascensor

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_1, 0)$ y $D(a_2, 0)$ en $\mathbb{R}^2$

1. Si $a_1 = a_2$ y $a_1 < a_2$ entonces $\overrightarrow{AB}_A = \overrightarrow{AB}$.
2. Si $a_1 = a_2$ y $0 \leq a_2 < a_1$ entonces $\overrightarrow{AB}_A = \mathbb{R}^2 - \{R(a_1, y) \in \mathbb{R}^2 | y > b_1\}$
3. Si $b_2 = 0$ entonces $\overrightarrow{AB}_A = \overline{AC} \cup \overline{CB} \cup \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$.
4. Si $a_1 \neq a_2$ y $b_2 \neq 0$ entonces $\overrightarrow{AB}_A = \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overrightarrow{DB}$.

5.2.1.1. Demostración.

Parte 1.

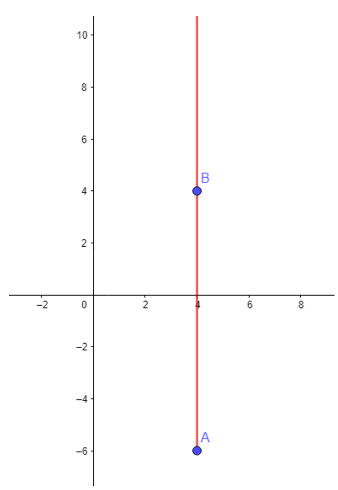

Figura 5. Rayo del Ascensor cuando $a_1 = a_2$ y $a_1 < a_2$

Sea $A(a_1, b_1)$, $B(a_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y $a_1 < a_2$, por definición de rayo sea $Z(a_1, y) \in \overrightarrow{AB}_A$, entonces $Z \in \overline{AB}_A \cup \{Z|A - B - Z\}$, luego por definición de unión tenemos: $Z \in \overline{AB}_A$ o $Z \in \{Z|A - B - Z\}$.

Caso 1. $Z \in \overline{AB}_A$

Si $Z \in \overline{AB}_A$ y como $A(a_1, b_1)$, $B(a_1, b_2)$ entonces $Z \in \overline{AB}$ por segmento del ascensor mostrado anteriormente; y como $Z \in \overline{AB}$ entonces por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}$

Caso 2. $Z \in \{Z|A - B - Z\}$

Por definición de interestancia tenemos $d_A(A, Z) = d_A(A, B) + d_A(B, Z)$ y por definición de distancia del ascensor

$|y - b_1| = |b_2 - b_1| + |y - b_2|$

Por propiedades de los reales

$\sqrt{0 + (y - b_1)^2} = \sqrt{0 + (b_2 - b_1)^2} + \sqrt{0 + (y - b_2)^2}$

Y por definición de distancia usual en $\mathbb{R}^2$ e interestancia tenemos $d(A, Z) = d(A, B) + d(B, Z)$ y $Z \in \{Z|A - B - Z\}$. Luego $Z \in \overrightarrow{AB}$

Parte 2.

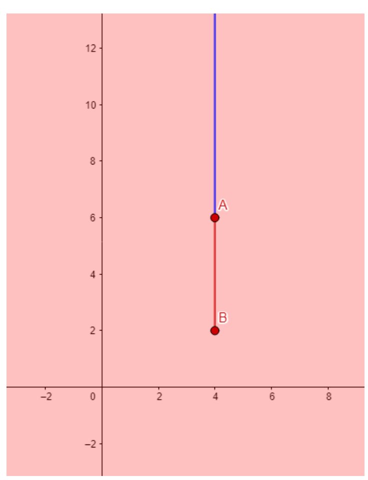

Figura 6. Rayo del Ascensor cuando $a_1 = a_2$ y $0 \leq a_2 < a_1$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y $0 \leq a_2 < a_1$

Sea $Z(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{R(a_1, y) \in \mathbb{R}^2 | y > b_1\}$

Por definición de distancia del ascensor tenemos:

Caso 1. Si $x = a_1$

Como $x = a_1$ entonces

- $y < b_2 < b_1$

  Por definición de distancia del ascensor se tiene que:

  $d_A(A, Z) = |b_1 - y|$

  $d_A(A, B) = |b_1 - b_2|$

  $d_A(B, Z) = |b_2 - y|$

  Sumando

  $d_A(A, B) + d_A(B, Z) = |b_1 - b_2| + |b_2 - y|$

  Por propiedad del valor absoluto

  $d_A(A, B) + d_A(B, Z) = |b_1 - y| = d_A(A, Z)$

  Luego por definición de interestancia se tiene que $A - B - Z$ y por lo tanto por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

- $b_2 < y < b_1$

  Por definición de distancia del ascensor se tiene que:

  $d_A(A, Z) = |b_1 - y|$

  $d_A(A, B) = |b_1 - b_2|$

  $d_A(B, Z) = |b_2 - y|$

  Sumando

  $d_A(A, Z) + d_A(Z, B) = |b_1 - y| + |y - b_2|$

Por propiedad del valor absoluto

$d_A(A,Z) + d_A(Z,B) = |b_1 - b_2| = d_A(A,B)$

Luego por definición de interestancia se tiene que $A - Z - B$ y por lo tanto por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Caso 2.

Si $x \neq a_1$

Por definición de distancia del ascensor se tiene que:

$d_A(A,Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y|$

$d_A(A,B) = |b_1 - b_2|$

$d_A(B,Z) = |b_2| + |a_1 - y| + |y|$

Sumando

$d_A(A,B) + d_A(B,Z) = |b_1 - b_2| + |b_2| + |a_1 - x| + |y|$

Por propiedad del valor absoluto

$d_A(A,B) + d_A(B,Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y| = d_A(A,Z)$

Luego por definición de interestancia se tiene que $A - B - Z$ y por lo tanto por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Parte 3.

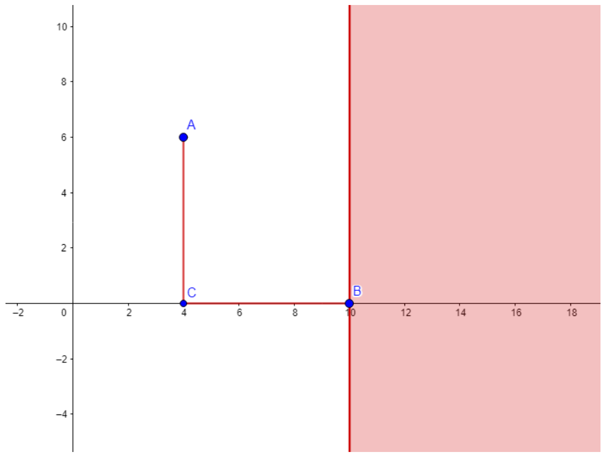

Figura 7. Rayo del Ascensor cuando $b_2 = 0$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, 0), C(a_1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, por definición de rayo sea $Z(x, y) \in \overline{AC} \cup \overline{CB} \cup \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$, por definición de unión tenemos: $Z(x, y) \in \overline{AC}$ o $Z(x, y) \in \overline{CB}$ o $Z(x, y) \in \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$.

Caso 1. $Z(x, y) \in \overline{AC}$

Como $Z(x, y) \in \overline{AC}$ entonces $x = a_1$ y por la conjetura de segmento del ascensor demostrada anteriormente $\overline{AC} = \overline{AC}_A$ y por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Caso 2. $Z(x, y) \in \overline{CB}$

Como $Z(x, y) \in \overline{CB}$ entonces $y = 0$, y por la conjetura de segmento del ascensor demostrada anteriormente $\overline{CB} = \overline{CB}_A$ y por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Caso 3. $Z(x, y) \in \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$

- Si $y = 0$

$d_A(C, Z) = |a_1 - x|$

$d_A(C, B) = |a_1 - a_2|$

$d_A(B, Z) = |a_2 - x|$

Sumando y por propiedad del valor absoluto

$d_A(C,B) + d_A(B,Z) = |a_1 - a_2| + |a_2 - x| = |a_1 - x|$

Luego por definición de interestancia se tiene que $C - B - Z$ y por lo tanto por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

- Si $y \neq 0$

  $d_A(C,Z) = |a_1 - x| + |y|$

  $d_A(C,B) = |a_1 - a_2|$

  $d_A(B,Z) = |a_2 - x| + |y|$

  Sumando y por propiedad del valor absoluto

  $d_A(C,B) + d_A(B,Z) = |a_1 - a_2| + |a_2 - x| + |y| = |a_1 - x| + |y|$

  Luego por definición de interestancia se tiene que $C - B - Z$ y por lo tanto por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

  Nota: Observe que cuando $b_1 = 0$ entonces $\overrightarrow{AB}_A = \overline{AB} \cup \{R(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$ y su demostración es análoga a los casos 2 y 3.

Parte 4.

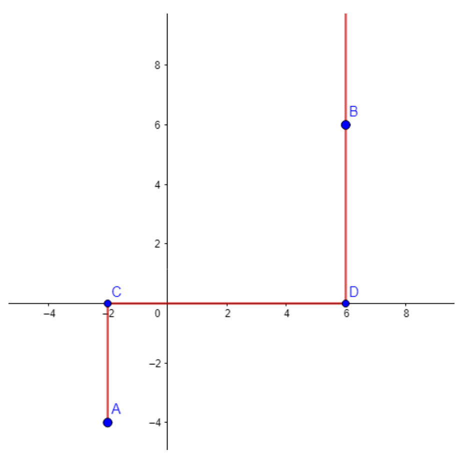

Figura 8. Rayo del Ascensor cuando $a_1 \neq a_2$ y $b_2 \neq 0$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_1, 0)$ y $D(a_2, 0)$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $Z(x, y) \in \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overrightarrow{DB}$, por definición de unión se tiene que $Z(x, y) \in \overline{AC}$ o $Z(x, y) \in \overline{CD}$ o $Z(x, y) \in \overrightarrow{DB}$.

Caso 1. $Z(x, y) \in \overline{AC}$

Como $Z(x, y) \in \overline{AC}$ entonces $x = a_1$ y por la conjetura de segmento del ascensor demostrada anteriormente $\overline{AC} = \overline{AC}_A$ y por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Caso 2. $Z(x, y) \in \overline{CD}$

Como $Z(x, y) \in \overline{CD}$ entonces $y = 0$, y por la conjetura de segmento del ascensor demostrada anteriormente $\overline{CD} = \overline{CD}_A$ y por definición de rayo $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Caso 3. $Z(x, y) \in \overrightarrow{DB}$.

Como $Z(x, y) \in \overrightarrow{DB}$ entonces $x = a_2$ y estaríamos en el caso de la *parte 1* de esta conjetura, la cual ya fue demostrada, por lo tanto $Z \in \overrightarrow{AB}_A$.

5.3. Rectas

Para la realización de la exploración en GeoGebra para la identificación de la recta, se tuvo en cuenta la definición de recta según Polania y Sánchez (2010) la cual dice que la unión de dos rayos es una recta $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Tomando como referencia $\overrightarrow{AB}_A$ tenemos los siguientes tipos de recta: Las rectas cuyas abscisas son iguales, la recta cuya ordenada es igual a cero y las rectas con abscisas y ordinadas distintas. Teniendo esto en cuenta, se tiene la siguiente proposición:

5.3.1. Conjetura Recta del Ascensor

Dados $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0) \in \mathbb{R}^2$

1. Si $a_1 = a_2$ y $a_1 < 0 < a_2$ entonces $\overleftrightarrow{AB}_A = \overleftrightarrow{AB}$.
2. Si $a_1 = a_2$ y $0 \leq a_1 < a_2$ entonces $\overleftrightarrow{AB}_A = \mathbb{R}^2$

3. Si $b_1 = b_2 = 0$ entonces $\overleftrightarrow{AB}_A = \{R(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq a_1\} \cup \overline{AB} \cup \{R(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$

4. Si $a_1 \neq a_2, b_1 \neq 0\ y\ b_2 \neq 0$ entonces $\overleftrightarrow{AB}_A = \overrightarrow{CA} \cup \overline{CD} \cup \overrightarrow{DB}$

5.3.1.1.Demostración.

Parte 1.

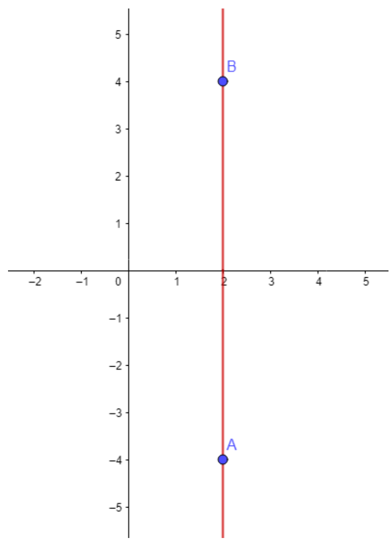

Figura 9. Recta del Ascensor cuando $a_1 = a_2$ y $a_1 < 0 < a_2$

Dados $A(a_1, b_1)$ y $B(a_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ y $a_1 < 0 < a_2$. Sea $Z(x,y) \in \overleftrightarrow{AB}$ entonces por definición de recta tenemos que: $Z \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ y por definición de unión $Z \in \overrightarrow{AB}$ o $Z \in \overrightarrow{BA}$

Caso 1. $Z \in \overrightarrow{AB}$

Como $Z \in \overrightarrow{AB}$ entonces por la conjetura de Rayo del ascensor demostrada anteriormente se tiene que $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Caso 2. $Z \in \overrightarrow{BA}$

Como $Z \in \overrightarrow{BA}$ entonces por la conjetura de Rayo del ascensor demostrada anteriormente se tiene que $Z \in \overrightarrow{BA}_A$

Teniendo en cuenta el caso 1 y 2, por definición de recta se tiene que $Z(x,y) \in \overleftrightarrow{AB}$

Parte 2.

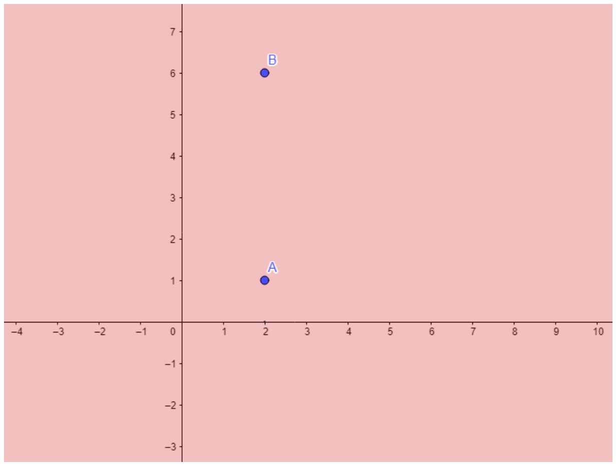

Figura 10. Recta del Ascensor cuando $a_1 = a_2$ y $0 \leq a_1 < a_2$

Dados $A(a_1, b_1)$ y $B(a_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ y $0 \leq a_1 < a_2$. Sea $Z(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}_A$, por definición de recta se tiene $Z \in \overrightarrow{AB}_A \cup \overrightarrow{BA}_A$ y por definición de unión $Z \in \overrightarrow{AB}_A$ o $Z \in \overrightarrow{BA}_A$

Caso 1. $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Como $Z \in \overrightarrow{AB}_A$ por la conjetura del Rayo del ascensor parte 1 demostrada anteriormente, se tiene que $Z \in \overrightarrow{AB}$

Caso 2. $Z \in \overrightarrow{BA}_A$

Como $Z \in \overrightarrow{BA}_A$ por la conjetura del Rayo del ascensor parte 1 demostrada anteriormente, se tiene que $Z \in \mathbb{R}^2 - \{R(a_1, y) \in \mathbb{R}^2 | y > b_2\}$

Entonces teniendo en cuenta el caso 1 y 2 por definición de unión, $Z \in \overrightarrow{AB} \cup \mathbb{R}^2 - \{R(a_1, y) \in \mathbb{R}^2 | y > b_2\}$ y por definición de rayo los puntos $Z \in \overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{Z | A - B - Z\}$ es decir, los puntos $Z(a_1, y)$ tal que $y > b_1$-

Luego $Z \in \mathbb{R}^2$

Parte 3.

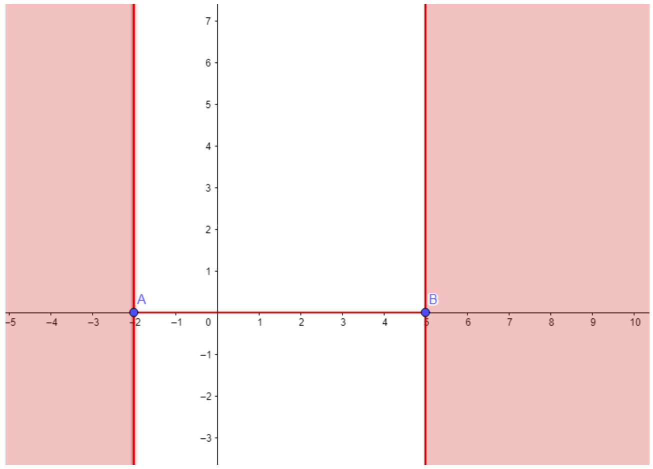

Figura 11. Recta del Ascensor cuando $b_1 = b_2 = 0$

Dados $A(a_1, 0)$ y $B(a_2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Sea $Z(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}_A$, entonces por definición de recta $Z \in \overrightarrow{AB}_A \cup \overrightarrow{BA}_A$ y por definición de unión $Z \in \overrightarrow{AB}_A$ o $Z \in \overrightarrow{BA}_A$.

Caso 1. $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Como $Z \in \overrightarrow{AB}_A$ entonces por la conjetura del Rayo del ascensor parte 3 demostrada anteriormente se tiene que $Z \in \overline{AB} \cup \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$

Caso 2. $Z \in \overrightarrow{BA}_A$

Como $Z \in \overrightarrow{BA}_A$ entonces por la conjetura del Rayo del ascensor parte 3 demostrada anteriormente se tiene que $Z \in \overline{BA} \cup \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq a_1\}$.

Luego teniendo en cuenta el caso 1 y 2 por definición de unión de conjuntos se tiene que $Z \in \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq a_1\} \cup \overline{AB} \cup \{R(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \leq x\}$.

Parte 4.

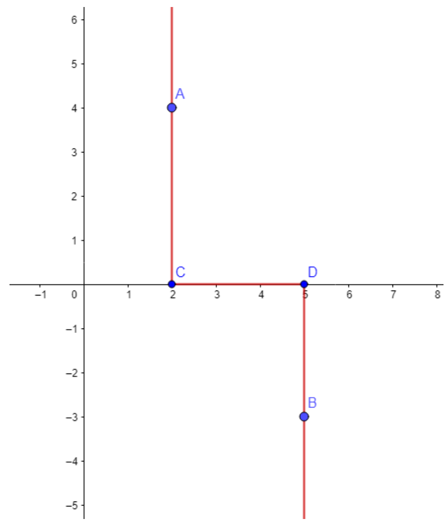

Figura 12. Recta del Ascensor cuando $a_1 \neq a_2, b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$

Dados $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Sea $Z(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}_A$ entonces por definición de recta $Z \in \overrightarrow{AB}_A \cup \overrightarrow{BA}_A$ y por definición de unión tenemos: $Z \in \overrightarrow{AB}_A$ o $Z \in \overrightarrow{BA}_A$

Caso 1. $Z \in \overrightarrow{AB}_A$

Como $Z \in \overrightarrow{AB}_A$ entonces por la conjetura del Rayo del ascensor parte 4 demostrada anteriormente se tiene que $Z \in \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overrightarrow{DB}$

Caso 2. $Z \in \overrightarrow{BA}_A$ entonces por la conjetura del Rayo del ascensor parte 4 demostrada anteriormente se tiene que $\overline{BD} \cup \overline{CD} \cup \overrightarrow{CA}$

Luego teniendo en cuenta el caso 1 y 2 por definición de unión de conjuntos se tiene que $Z \in \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overrightarrow{DB} \cup \overline{BD} \cup \overrightarrow{CA}$, y por la definición de rayo $Z \in \overrightarrow{CA} \cup \overline{CD} \cup \overrightarrow{DB}$

5.4. Puntos Medios

Para la realización de la exploración en GeoGebra para la identificación del punto medio debemos tener en cuenta la definición en la métrica usual de punto medio dice que, el M es el punto medio de $\overline{AB}$, si está entre los puntos A, B y $AM = MC$. Para la métrica del ascensor, se seguirá manteniendo esta definición, recordando que en la métrica del ascensor M está entre A, B si $d_A(A,B) = d_A(A,M) + d(M,B)$. Reescribiendo la definición para acomodarla a la métrica del ascensor tendríamos: el punto M es el punto medio de $\overline{AB}_A$, si está entre los puntos A, B y $d_A(A,M) = d_A(M,B)$.

Ahora, tomando como referencia a $\overline{AB}_A$ mostrado previamente, tenemos diferentes puntos medios dependiendo de la posición de los puntos y las distancias entre ellos. Teniendo esto en cuenta, se tiene la siguiente proposición:

5.4.1. Proposición Punto Medio del Ascensor

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1,b_1), B(a_2,b_2), C(a_1,0), D(a_2,0)$ y $M(x,y)$ punto medio del segmento

1. Si $a_1 = a_2$ entonces $M(x,y) = M\left(a_1, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$
2. Si $a_1 + |b_1| > a_2 + |b_2|$ entonces $M\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2}\right)$
3. Si $a_1 - |b_1| > a_2 - |b_2|$ entonces $M\left(a_2, \frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2}\right)$
4. Si $a_1 + |b_1| < a_2 + |b_2|$ entonces $M\left(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2} + a_1, 0\right)$

5.4.1.1.Demostración.

Parte 1.

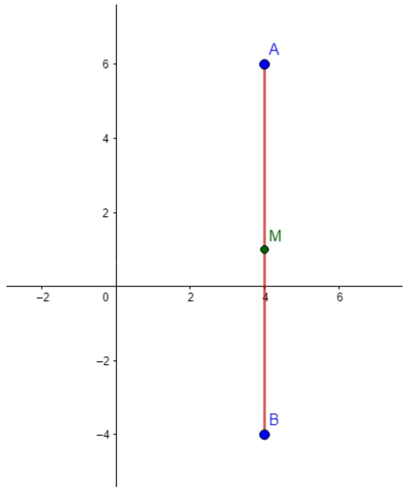

Figura 13. Punto Medio del Ascensor cuando $a_1 = a_2$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_1, b_2)$. Como A y B tienen por abscisa a a_1 entonces por consiguiente la abscisa x de M debe ser igual a a_1 o si no, no pertenecería a $\overline{AB}_A$.

Ahora la ordena de M, debe ser $y = \frac{b_1+b_2}{2}$, pues debe estar en la mitad de b_1 y b_2. Siendo así, entonces el punto medio sería $M(a_1, \frac{b_1+b_2}{2})$, veamos que es así:

Por definición de distancia del ascensor

$$d_A(A, M) = \left|b_1 - \frac{b_1+b_2}{2}\right| = \left|\frac{b_1-b_2}{2}\right|$$

$$d_A(M, B) = \left|\frac{b_1+b_2}{2} - b_2\right| = \left|\frac{b_1-b_2}{2}\right|$$

Luego $d_A(A, M) = d_A(M, B)$ y por lo tanto M es punto medio del segmento.

Parte 2.

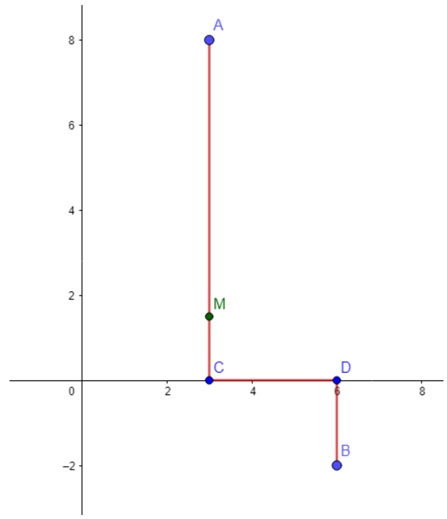

Figura 14. Punto Medio del Ascensor cuando $a_1 + |b_1| > a_2 + |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0)$, $D(a_2, 0)$, $M(x, y)$ y $a_1 + |b_1| > a_2 + |b_2|$

Por definición de circunferencia tenemos $\odot D_{DB}$ que será $(x - a_2)^2 + y^2 = |b_2|^2$, ahora comando la recta $y = 0$ y realizando la intersección con la circunferencia se tiene que

$(x - a_2)^{\mathbf{2}} = |b_2|^2$

$x = \pm|b_2| + a_2$

Formamos entonces el punto $E(|b_2| + a_2, 0)$

Y por definición de circunferencia entonces $d_A(D, B) = d_A(D, E)$

Por definición de circunferencia tenemos $\odot C_{CE}$ que será $(x - a_1)^2 + y^2 = (|b_2| + a_2 - a_1)^2$, ahora comando la recta $x = a_1$ y realizando la intersección con la circunferencia se tiene que

$y^2 = (|b_2| + a_2 - a_1)^2$

$y = \pm(|b_2| + a_2 - a_1)$

Formamos entonces el punto $F(a_1, -|b_2| - a_2 + a_1)$

Entonces el punto medio será $M(a_1, \frac{b_1 - |b_2| - a_2 + a_1}{2})$

Recordando que por definición de circunferencia entonces $d_A(C,E) = d_A(C,F)$ y que $d_A(C,E) = d_A(C,D) + d_A(D,E)$

Luego, $d_A(C,F) = d_A(C,D) + d_A(D,B)$

Veamos qué M es punto medio del segmento

$d_A(A,M) = \left|b_1 - \frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}\right| = \left|\frac{b_2+a_2+|b_2|-a_1}{2}\right|$

$d_A(M,F) = \left|\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2} + |b_2| + a_2 - a_1\right| = \left|\frac{b_1+a_2+|b_2|-a_1}{2}\right|$

Luego $d_A(A,M) = d_A(M,F)$, en donde $d_A(M,F) = d_A(M,C) + d_A(C,F)$ y por consiguiente $d_A(M,F) = d_A(M,C) + d_A(C,D) + d_A(D,B)$

Por lo tanto M es punto medio del segmento.

Parte 3.

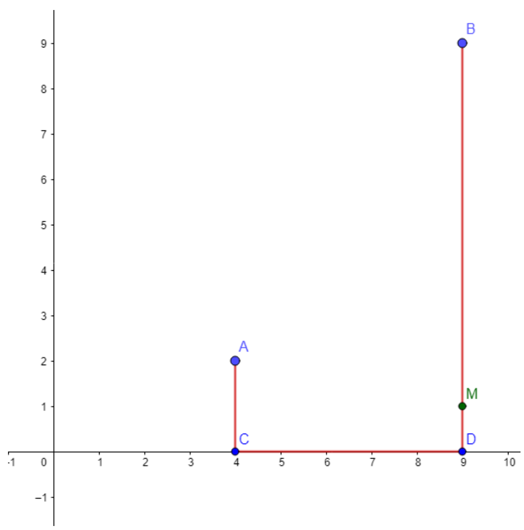

Figura 15. Punto Medio del Ascensor cuando $a_1 - |b_1| > a_2 - |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1,b_1), B(a_2,b_2), C(a_1,0), D(a_2,0)$, $M(x,y)$ y $a_1 - |b_1| > a_2 - |b_2|$

Por definición de circunferencia tenemos $\odot C_{AC}$ que será $(x-a_1)^2 + y^2 = |b_1|^2$, ahora comando la recta $y = 0$ y realizando la intersección con la circunferencia se tiene que

$(x-a_1)^{\mathbf{2}}=|b_1|^2$

$x=\pm|b_1|+a_1$

Formamos entonces el punto $E(-|b_1|+a_1,0)$

Y por definición de circunferencia $d_A(A,C)=d_A(E,C)$

Por definición de circunferencia tenemos $\odot D_{DE}$ que será $(x-a_2)^2+y^2=(a_2+|b_1|-a_1)^2$, ahora comando la recta $x=a_2$ y realizando la intersección con la circunferencia se tiene que

$y^2=(a_2+|b_1|-a_1)^2$

$y=\pm(a_2+|b_1|-a_1)$

Formamos entonces el punto $F(a_2,-a_2-|b_1|+a_1)$

Entonces el punto medio será $M\left(a_2,\frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2}\right)$

Recordando que por definición de circunferencia entonces $d_A(D,E)=d_A(D,F)$ y que $d_A(D,E)=d_A(C,D)+d_A(E,C)$

Luego, $d_A(D,F)=d_A(C,D)+d_A(E,C)$

Veamos qué M es punto medio del segmento

$d_A(B,M)=\left|b_2-\frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2}\right|=\left|\frac{b_2+a_2+|b_1|-a_1}{2}\right|$

$d_A(M,F)=\left|\frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2}+|b_2|+a_2-a_1\right|=\left|\frac{b_1+a_2+|b_1|-a_1}{2}\right|$

Luego $d_A(B,M)=d_A(M,F)$, en donde $d_A(M,F)=d_A(M,D)+d_A(D,F)$ y por consiguiente $d_A(M,F)=d_A(M,D)+d_A(C,D)+d_A(A,C)$

Por lo tanto M es punto medio del segmento.

Parte 4.

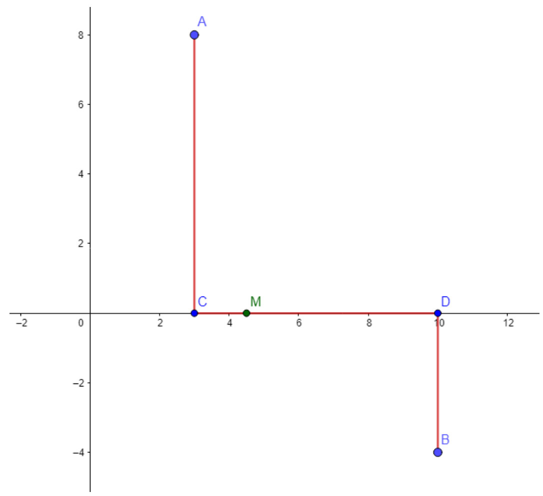

Figura 16. Punto Medio del Ascensor cuando $a_1 + |b_1| < a_2 + |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0)$, $M(x, y)$ y $a_1 + |b_1| < a_2 + |b_2|$

Por definición de circunferencia tenemos $\odot D_{DB}$ que será $(x - a_2)^2 + y^2 = |b_2|^2$, ahora comando la recta $y = 0$ y realizando la intersección con la circunferencia se tiene que

$(x - a_2)^{\mathbf{2}} = |b_2|^2$

$x = \pm|b_2| + a_2$

Formamos entonces el punto $E(|b_2| + a_2, 0)$

Y por definición de circunferencia entonces $d_A(D, B) = d_A(D, E)$

Por definición de circunferencia tenemos $\odot C_{CE}$ que será $(x - a_1)^2 + y^2 = (|b_2| + a_2 - a_1)^2$, ahora comando la recta $x = a_1$ y realizando la intersección con la circunferencia se tiene que

$y^2 = (|b_2| + a_2 - a_1)^2$

$y = \pm(|b_2| + a_2 - a_1)$

Formamos entonces el punto $F(a_1, -|b_2| - a_2 + a_1)$,

Recordando que por definición de circunferencia entonces $d_A(C, E) = d_A(C, F)$ y que $d_A(C, E) = d_A(C, D) + d_A(D, E)$

Luego $d_A(C,F) = d_A(C,D) + d_A(D,B)$

Formamos también el punto medio entre A y F, $G(a_1, \frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2})$.

Por definición de circunferencia tenemos $\odot C_{CG}$ que será $(x-a_1)^2 + y^2 = \left(\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}\right)^2$, ahora comando la recta $y = 0$ y realizando la intersección con la circunferencia se tiene que

$$(x-a_1)^2 = \left(\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}\right)^2$$

$$x = \pm\left(\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}\right) + a_1$$

Entonces $M\left(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2} + a_1, 0\right)$

Por definición de circunferencia $d_A(G,C) = d_A(C,M)$

Veamos que M es punto medio del segmento

G es punto medio de A y F, como se mostro en la parte 2 y $d_A(G,C) = d_A(C,M)$ entonces M es el punto medio del segmento

Demostración alternativa

Una demostración más geométrica y sin pasar a la geometría analítica de esta parte sería:

Dado $\overline{AB}_A$, $A(a_1,b_1), B(a_2,b_2), C(a_1,0), D(a_2,0)$, $M(x,y)$ y $a_1 + |b_1| < a_2 + |b_2|$

Tenemos por definición de segmento $\overline{AC}, \overline{CD}, \overline{DB}$, luego trazamos la circunferencia con centro en D y radio DB. Esta circunferencia al estar centrada en D se interseca con $\overleftrightarrow{CD}$, por lo que formaremos $\overline{DE} \cong \overline{DB}$ por ambos ser radios de la circunferencia.

Trazamos la circunferencia con centro en C, radio AC. DB. Esta circunferencia al estar centrada en C se interseca con $\overleftrightarrow{CD}$, por lo que formaremos $\overline{FC} \cong \overline{AC}$ por ambos ser radios de la circunferencia.

Por lo tanto, tendremos $\overline{FE} \cong \overline{AB}_A$. Ahora trazaremos las circunferencias con centro en F y E y con radio FE, obteniendo así dos circunferencias secantes, encontramos sus puntos de intersección $\{G, H\}$ y, por último, trazamos la perpendicular a $\overline{FE}$ por uno de estos puntos, obteniendo finamente el punto medio del segmento $\overline{AB}_A$.

Para saber las coordenadas de este punto si deberemos pasar a lo analítico.

5.5. Mediatrices

Para la realización de la exploración en GeoGebra para la identificación de la mediatriz, se hizo uso de la definición 2 de mediatriz de un segmento, que dice: dado $\overline{AC}$, la mediatriz es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento; y los tipos de $\overline{AB}_A$ existentes y sus puntos medios encontrados previamente. Teniendo así, la siguiente proposición:

5.5.1. Proposición Mediatriz del Ascensor

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0)$ y $M(x, y)$

1. Si $a_1 = a_2$ y $b_2 = -b_1$ entonces $M(a_1, 0)$ y $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = \{\mathbb{R}^2 - \overleftrightarrow{AB}\} \cup M(a_1, 0)$.
2. Si $a_1 = a_2$ y $b_1 \neq -b_2$ entonces $M\left(a_1, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$ y $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M\left(a_1, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$
3. Si $a_1 \neq a_2$ y $a_1 + |b_1| > a_2 + |b_2|$ entonces $M\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2}\right)$ y $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2}\right)$

   3.1. Si $a_1 + |b_1| = a_2 + |b_2|$ entonces $M(a_1, 0)$ y $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M(a_1, 0) \cup \{Z(x, y) | x < a_1\}$

   3.2. Si $a_1 - |b_1| > a_2 - |b_2|$ entonces $M\left(a_2, \frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2}\right)$ y $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M\left(a_2, \frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2}\right)$

3.3. Si $a_1 - |b_1| = a_2 - |b_2|$ entonces $M(a_2, 0)$ y $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M(a_2, 0) \cup \{P(x,y)|x > a_2\}$

4. Si $a_1 \neq a_2$ y $a_1 + |b_1| < a_2 + |b_2|$ entonces $M\left(-\frac{b_1 - |b_2| - a_2 + a_1}{2} + a_1, 0\right)$ y $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = l_M$ en donde l es la perpendicular a $eje\ x$ por M.

5.5.1.1. Demostración.

Parte 1.

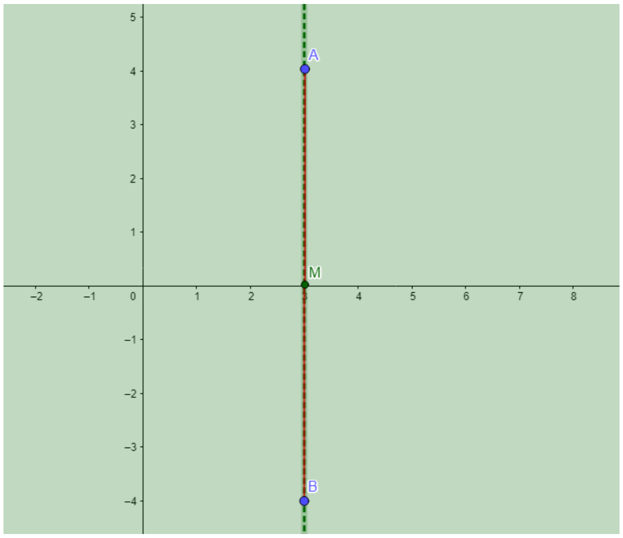

Figura 17. Mediatriz del Ascensor cuando $a_1 = a_2$ y $b_2 = -b_1$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_1, -b_1)$

Por la conjetura del punto medio parte 1, demostrada anteriormente se tiene que $M(a_1, \frac{b_1+b_2}{2})$ y como $b_2 = -b_1$ entonces $M(a_1, 0)$.

Ahora por definición de distancia del ascensor

$d_A(A, M) = |b_1|$

$d_A(B, M) = |-b_1| = |b_1|$

Sea $Z(x,y) \in \{\mathbb{R}^2 - \overleftrightarrow{AB}\} \cup M(a_1, 0)$, entonces por definición de unión $Z(x,y) \in \{\mathbb{R}^2 - \overleftrightarrow{AB}\}$ o $Z(x,y) \in M(a_1, 0)$

Caso 1. $Z(x,y) \in \{\mathbb{R}^2 - \overleftrightarrow{AB}\}$

Como los puntos A y B tienen la misma abscisa, entonces la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es igual a la recta $x = a_1$, por lo que el punto $Z(x,y)$ no tiene por abscisa a $x = a_1$ y así, por definición de distancia del ascensor

$d_A(A,Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y|$

$d_A(B,Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y|$

Luego

$d_A(A,Z) = d_A(B,Z)$

Por lo tanto $Z(x,y) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$

Caso 2. $Z(x,y) \in M(a_1, 0)$

Como M es punto medio del segmento entonces $M(a_1, 0) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$

Entonces por la definición de unión y los caso 1 y 2 tenemos $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = \{\mathbb{R}^2 - \overleftrightarrow{AB}\} \cup M(a_1, 0)$.

Parte 2.

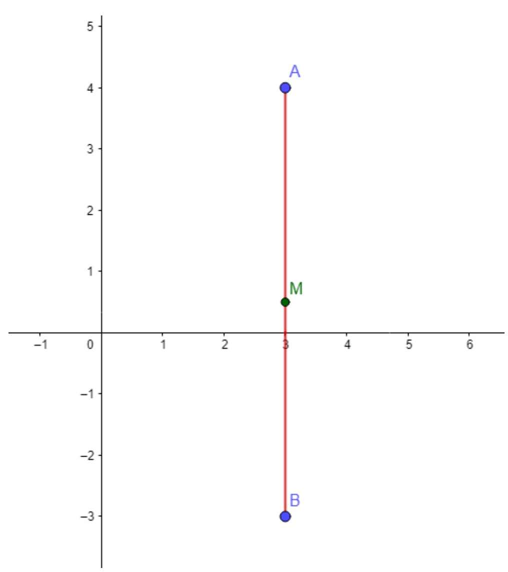

Figura 18. Mediatriz del Ascensor cuando $a_1 = a_2$ y $b_1 \neq -b_2$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_1, b_2), b_1 \neq -b_2$

Por la conjetura del punto medio parte 1, demostrada anteriormente se tiene que $M(a_1, \frac{b_1+b_2}{2})$

Sea $Z(x, y) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$, si $x \neq a_1$, por definición de distancia del ascensor

$d_A(A, Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y|$

$d_A(B, Z) = |b_2| + |a_1 - x| + |y|$

Como $Z(x, y) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$ y por definición de mediatriz

$|b_1| = |b_2|$

Y por definición de valor absoluto

$b_1 = \pm b_2$

Luego

Caso 1. Si $b_1 = b_2$ entonces $A = B$ y no existiría el segmento

Caso 2. Si $b_1 = -b_2$ contradicción con la hipótesis

Ahora, si $x = a_1$ entonces

$d_A(A, Z) = |b_1 - y|$

$d_A(B, Z) = |y - b_2|$

Como $Z(x, y) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$ entonces

$|b_1 - y| = |y - b_2|$

Y por propiedades del valor absoluto

$b_1 - y = \pm(y - b_2)$

Caso 1. Si $b_1 - y = y - b_2$ entonces $y = \frac{b_1+b_2}{2}$

Caso 2. Si $b_1 - y = -y + b_2$ entonces $b_1 = b_2$ por lo que $A = B$

Por lo tanto $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M\left(a_1, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$

Parte 3.

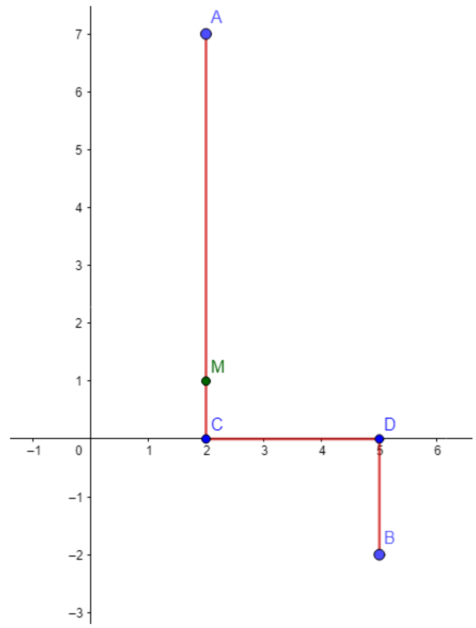

Figura 19. Mediatriz del Ascensor cuando $a_1 \neq a_2$ y $a_1 + |b_1| > a_2 + |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0)$ y $a_1 + |b_1| > a_2 + |b_2|$

Por la conjetura del punto medio parte 2, demostrada anteriormente se tiene que $M\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2}\right)$

Sea $Z(x, y) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$ y $Z \neq M$

$d_A(A, Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y|$

$d_A(B, Z) = |b_2| + |a_2 - x| + |y|$

Como $Z(x, y) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$ y por definición de mediatriz

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| = |b_2| + |a_2 - x| + |y|$

$|b_1| + |a_1 - x| = |b_2| + |a_2 - x|$

Por desigualdad triangular

$|b_1 + a_1 - x| \leq |b_1| + |a_1 - x|$

$|b_2 + a_2 - x| \leq |b_2| + |a_2 - x|$

Luego

$|b_1 + a_1 - x| = |b_2 + a_2 - x|$

Por lo que $|b_1| + a_1 = |b_2| + a_2$, pero por hipótesis $a_1 + |b_1| > a_2 + |b_2|$

Entonces $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M\left(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1}{2}\right)$

Parte 3.1

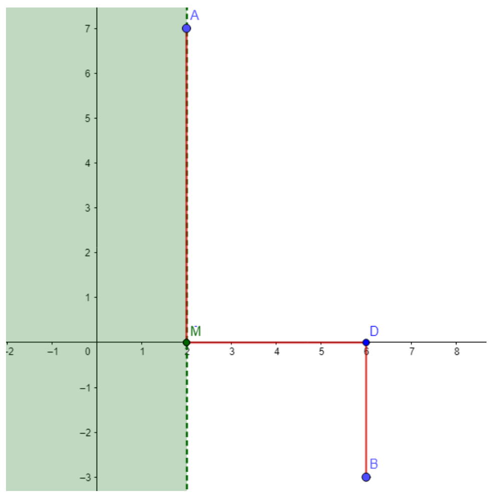

Figura 20. Mediatriz del Ascensor cuando $a_1 + |b_1| = a_2 + |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0)$ y $a_1 + |b_1| = a_2 + |b_2|$

Por la conjetura del punto medio parte 2, demostrada anteriormente se tiene que $M\left(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1}{2}\right)$ y como $a_1 + |b_1| = a_2 + |b_2|$ entonces el punto medio queda de la forma $M(a_1, 0)$.

Sean $Z(x, y), W(x, 0) \in \mathbb{R}^2$, luego x con respecto a a_1 puede estar $x < a_1, x = a_1$ o $x > a_1$

Caso 1. $x < a_1$

$d_A(A, Z) = d_A(Z, W) + d_A(W, M) + d_A(M, A)$

$d_A(Z, M) = d_A(Z, W) + d_A(W, M) + d_A(M, B)$

Y como $d_A(M,A) = d_A(M,B)$ por M ser punto medio del segmento, entonces

$d_A(A,Z) = d_A(Z,M)$

Y por lo tanto $Z(x,y) \in \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$

Caso 2. $x = a_1$

$d_A(A,Z) = d_A(Z,W) + d_A(W,A)$

$d_A(Z,B) = d_A(Z,W) + d_A(W,D) + d_A(D,B)$

Pero como $W(x,0)$ en este caso sería $W(a_1,0)$ por lo que $W = M$ y $Z(x,y) \notin \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$

Caso 3. o $x > a_1$

$d_A(A,Z) = d_A(A,M) + d_A(M,W) + d_A(W,Z) = d_A(M,D) + d_A(D,B) + d_A(M,W) + d_A(W,Z)$

$d_A(Z,B) = d_A(Z,W) + d_A(W,D) + d_A(D,B)$

Luego $d_A(A,Z) > d_A(Z,B)$ y $Z(x,y) \notin \mathcal{M}_{\overline{AB}_A}$

Por lo tanto $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = M(a_1,0) \cup \{Z(x,y) | x < a_1\}$

Parte 3.2

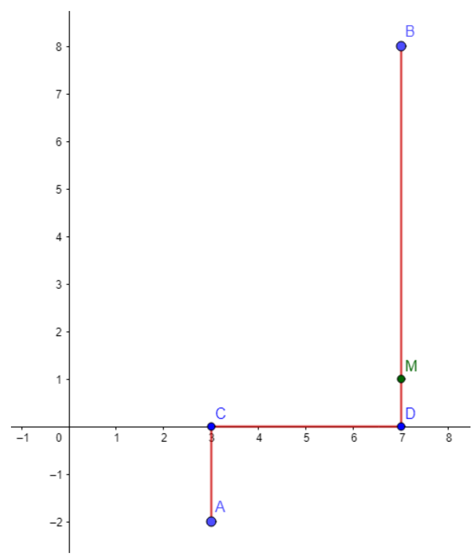

Figura 21. Mediatriz del Ascensor cuando $a_1 - |b_1| > a_2 - |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0)$ y $a_1 - |b_1| > a_2 - |b_2|$

Por la conjetura del punto medio parte 3, demostrada anteriormente se tiene que $M\left(a_2, \frac{b_2 - a_2 - |b_1| + a_1}{2}\right)$

La demostración es análoga a la parte 3.

Parte 3.3

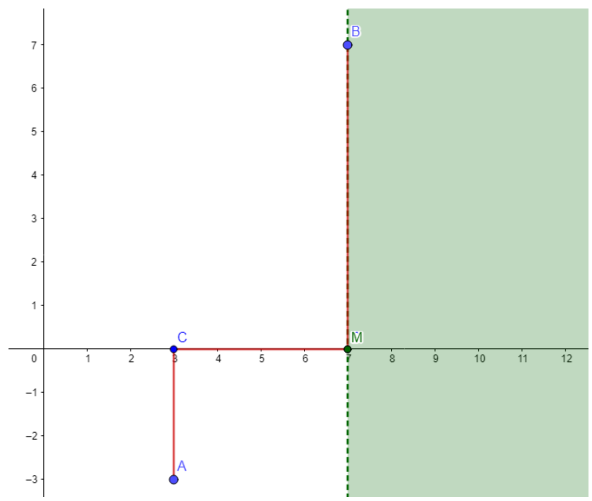

Figura 22. Mediatriz del Ascensor cuando $a_1 - |b_1| = a_2 - |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0)$ y $a_1 - |b_1| = a_2 - |b_2|$

Por la conjetura del punto medio parte 3, demostrada anteriormente se tiene que $M\left(a_2, \frac{b_2 - a_2 - |b_1| + a_1}{2}\right)$ y como $a_1 - |b_1| = a_2 - |b_2|$ entonces el punto medio será $M(a_2, 0)$.

La demostración es análoga a la parte 3.1.

Parte 4.

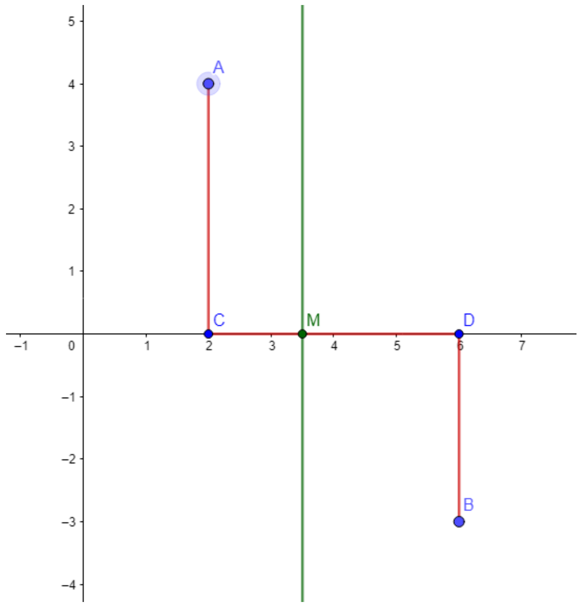

Figura 23. Mediatriz del Ascensor cuando $a_1 + |b_1| < a_2 + |b_2|$

Dados $\overline{AB}_A$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_1, 0), D(a_2, 0)$ y $a_1 + |b_1| < a_2 + |b_2|$

Por la conjetura del punto medio parte 4, demostrada anteriormente se tiene que $M\left(-\frac{b_1 - |b_2| - a_2 + a_1}{2} + a_1, 0\right)$

Como l es la perpendicular al $eje\ x$ por M, entonces tiene por ecuación $x = -\frac{b_1 - |b_2| - a_2 + a_1}{2} + a_1$

Sea $Z(-\frac{b_1 - |b_2| - a_2 + a_1}{2} + a_1, y) \in l$

$d_A(A, Z) = d_A(A, C) + d_A(C, M) + d_A(M, Z)$

$d_A(Z, B) = d_A(M, Z) + d_A(M, D) + d_A(D, B)$

Y como M es punto medio $d_A(A, C) + d_A(C, M) = d_A(M, D) + d_A(D, B)$

Por lo que $d_A(A, Z) = d_A(Z, B)$

Y por lo tanto $\mathcal{M}_{\overline{AB}_A} = l_M$ en donde l es la perpendicular al $eje\ x$ por M.

5.6. Circunferencias

Durante la exploración en GeoGebra para la identificación de la circunferencia se colocó el punto A centro de la circunferencia en diversas posiciones del plano, un deslizador r como medida del radio de la circunferencia, además, teniendo en cuenta la definición se realiza el cálculo algebraico como verificación de la identificación del lugar geométrico, dando, así como resultado diferentes tipos de circunferencia dependiendo de la distancia de A al $eje\ x$ y el radio a tomar.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene la siguiente proposición:

5.6.1. Proposición Circunferencia del Ascensor

Dados $A(a_1, b_1)$ centro de la circunferencia y r el radio de la circunferencia, la circunferencia del ascensor será:

1. Si $|b_1| \geq r$ entonces $\odot(A_r)_A = \{(a_1, b_1 \pm r)\}$
2. Si $|b_1| < r$ entonces $\odot(A_r)_A = \{(a_1, b_1 \pm r)\} \cup \{x = |y| + |b_1| - r + a_1 \text{ tal que } -r + |b_1| < y < r - |b_1|\} \cup \{x = -|y| - |b_1| + r + a_1 \text{ tal que } -r + |b_1| < y < r - |b_1|\}$

5.6.1.1. Demostración.

Parte 1.

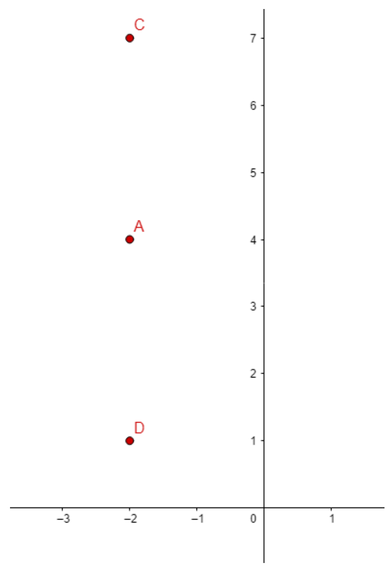

Figura 24. Circunferencia del Ascensor cuando $|b_1| \geq r$

Dados $A(a_1, b_1)$ centro de la circunferencia, r el radio de la circunferencia y $|b_1| \geq r$

→) Sea $Z(x, y) \in \odot(A_r)_A$

Caso 1. Si $x = a_1$, por definición de distancia del ascensor y de circunferencia tenemos:

$d_A(A, Z) = |b_1 - y| = r$

Por definición de valor absoluto

$b_1 - y = -r$ o $b_1 - y = r$

Luego

$y = b_1 + r$ o $y = b_1 - r$

Por lo tanto $y = b_1 \pm r$

Caso 2. Si $x \neq a_1$

$d_A(A, Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y| = r$

Pero por hipótesis $|b_1| \geq r$, luego $d_A(A, Z) \neq r$

Luego por caso 1 y 2 se tiene que $\odot(A_r)_A \subseteq \{(a_1, b_1 \pm r)\}$

$\longleftarrow$) Sea $Z(x, y) \in \{(a_1, b_1 \pm r)\}$

Caso 1. $Z(a_1, b_1 + r)$

$d_A(A, Z) = |b_1 - (b_1 + r)| = |-r| = r$

Caso 2. $Z(a_1, b_1 - r)$

$d_A(A, Z) = |b_1 - (b_1 - r)| = |r| = r$

Luego por caso 1 y 2 se tiene que $\{(a_1, b_1 \pm r)\} \subseteq \odot(A_r)_A$

Por lo tanto $\odot(A_r)_A = \{(a_1, b_1 \pm r)\}$

Parte 2.

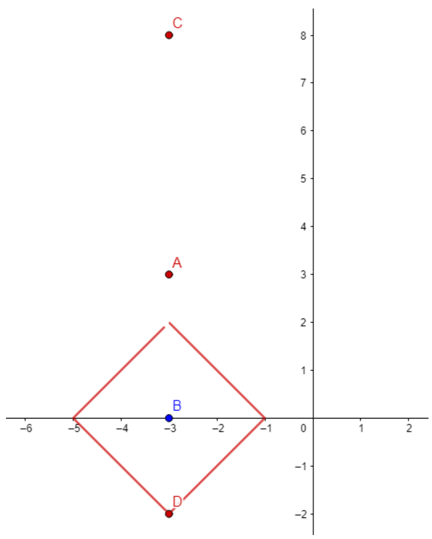

Figura 25. Circunferencia del Ascensor cuando $|b_1| < r$

Dados $A(a_1, b_1)$ centro de la circunferencia, r el radio de la circunferencia y $|b_1| < r$

$\rightarrow$) Sea $Z(x, y) \in \odot(A_r)_A$

Caso 1. Si $x = a_1$, por definición de distancia del ascensor y de circunferencia tenemos:

$d_A(A, Z) = |b_1 - y| = r$

Por definición de valor absoluto

$b_1 - y = -r$ o $b_1 - y = r$

Luego

$y = b_1 + r$ o $y = b_1 - r$

Por lo tanto $y = b_1 \pm r$

Caso 2. $x \neq a_1$

$d_A(A, Z) = |b_1| + |a_1 - x| + |y| = r$

Entonces

$|a_1 - x| = -|y| - |b_1| + r$

Por propiedades de valor absoluto se tiene

$a_1 - x = |y| + |b_1| - r$ o $a_1 - x = -|y| - |b_1| + r$ si $-r + |b_1| < y < r - |b_1|$

Luego

$x = |y| + |b_1| - r + a_1$ o $x = -|y| - |b_1| + r + a_1$

Luego por caso 1 y 2 se tiene que $\odot(A_r)_A \subseteq \{(a_1, b_1 \pm r)\} \cup \{x = |y| + |b_1| - r + a_1 \text{ tal que } -r + |b_1| < y < r - |b_1|\} \cup \{x = -|y| - |b_1| + r + a_1 \text{ tal que } -r + |b_1| < y < r - |b_1|\}$

$\leftarrow$) Sea $Z(x, y) \in \{(a_1, b_1 \pm r)\} \cup \{x = |y| + |b_1| - r + a_1 \text{ tal que } -r + |b_1| < y < r - |b_1|\} \cup \{x = -|y| - |b_1| + r + a_1 \text{ tal que } -r + |b_1| < y < r - |b_1|\}$

Por definición de unión se tiene

Caso 1. $Z(x, y) \in \{(a_1, b_1 \pm r)\}$

Demostrado en la parte 1.

Caso 2. $Z(x, y) \in \{x = |y| + |b_1| - r + a_1 \text{ tal que } -r + |b_1| < y < r - |b_1|\}$

Entonces $Z(|y| + |b_1| - r + a_1, y)$

$d_A(A, Z) = |b_1| + |a_1 - |y| - |b_1| + r - a_1| + |y|$

$d_A(A, Z) = |b_1| + |-|y| - |b_1| + r| + |y|$

Luego por propiedades del valor absoluto

$d_A(A,Z) = |r| = r$

Caso 3. $Z(x,y) \in \{x = -|y| - |b_1| + r + a_1$ tal que $-r + |b_1| < y < r - |b_1|\}$

Entonces $Z(-|y| - |b_1| + r + a_1, y)$

$d_A(A,Z) = |b_1| + |a_1 - (-|y| - |b_1| + r + a_1)| + |y|$

Por propiedades de valor absoluto

$d_A(A,Z) = |b_1| + |(-|y| - |b_1| + r + a_1) - a_1| + |y|$

$d_A(A,Z) = |b_1| + |-|y| - |b_1| + r| + |y|$

Luego por propiedades del valor absoluto

$d_A(A,Z) = |r| = r$

Luego por caso 1, 2 y 3 se tiene que $\{(a_1, b_1 \pm r)\} \cup \{x = |y| + |b_1| - r + a_1$ tal que $-r + |b_1| < y < r - |b_1|\} \cup \{x = -|y| - |b_1| + r + a_1$ tal que $-r + |b_1| < y < r - |b_1|\} \subseteq \odot(A_r)_A$

Y, por lo tanto $\odot(A_r)_A = \{(a_1, b_1 \pm r)\} \cup \{x = |y| + |b_1| - r + a_1$ tal que $-r + |b_1| < y < r - |b_1|\} \cup \{x = -|y| - |b_1| + r + a_1$ tal que $-r + |b_1| < y < r - |b_1|\}$

5.7. Elipses

Durante la exploración en GeoGebra para la identificación de la elipse se colocaron los puntos A y B focos de la elipse en diversas posiciones del plano y un deslizador k como constante de la elipse, además, teniendo en cuenta la definición se realiza el cálculo algebraico se realiza la verificación del lugar, dando, así como resultado diferentes tipos de elipse dependiendo de la distancia entre A y B y la constante a tomar.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene la siguiente proposición:

5.7.1. Proposición Elipse del Ascensor

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ focos de la elipse y k la constante de la elipse

1. Si $a_1 = a_2$ entonces $\bigoplus (\{A,B\}_k)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1+b_2 \pm k}{2}\right)\right\} \cup$

   $\left\{x = \frac{a_1+a_2-k+|b_1|+|b_2|+2|y|}{2} \middle| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\} \cup$

   $\left\{x = \frac{a_1+a_2+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2} \middle| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$

2. Si $a_1 \neq a_2$ entonces $\bigoplus (\{A,B\}_k)_A =$

   $\left\{\left(a_1, \frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\right); \left(a_1, \frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2}\right)\right\} \cup$

   $\left\{\left(a_2, \frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+b_2}{2}\right); \left(a_2, \frac{k-|b_1|-|a_1-x|+b_2}{2}\right)\right\} \cup \left\{x = \right.$

   $\left.\frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1+a_2}{2} \middle| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\} \cup \{x =$

   $\left.\frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2} \middle| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\} \cup \left\{y = \right.$

   $\left.\frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2} \middle| a_1 < x < a_2\right\} \cup \{y = \frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+|b_2|+|a_2-x|}{2} \mid a_1 < x <$

   $a_2\}$

5.7.1.1.Demostración.

Parte 1.

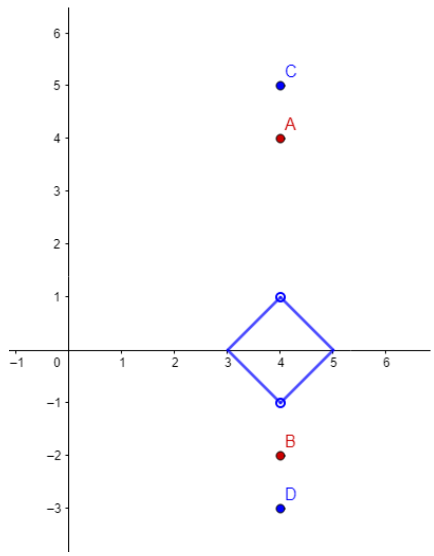

Figura 26. Elipse del Ascensor cuando $a_1 = a_2$

$A(a_1, b_1)$, $B(a_1, b_2)$ focos de la elipse y k la constante de la elipse

Sea $Z(x, y) \in \bigoplus (\{A, B\}_k)_A$, por definición de elipse tenemos que

$d_A(A, Z) + d_A(B, Z) = k$

Caso 1. $x = a_1$

$d_A(A, Z) + d_A(B, Z) = k$

$|b_1 - y| + |b_2 - y| = k$

$|b_1 - y| = k - |b_2 - y|$

Por propiedades del valor absoluto tenemos

$b_1 - y = -k + |b_2 - y|$ o $b_1 - y = k - |b_2 - y|$

Luego

$|b_2 - y| = b_1 - y + k$ o $|b_2 - y| = -b_1 + y + k$

- $|b_2 - y| = b_1 - y + k$

  $b_2 - y = -b_1 + y - k$

$2y = b_1 + b_2 + k$

$y = \frac{b_1+b_2+k}{2}$

$b_2 - y = b_1 - y + k$

$k = b_2 - b_1$

- $|b_2 - y| = -b_1 + y + k$

  $b_2 - y = b_1 - y - k$

  $k = b_1 - b_2$

  $b_2 - y = -b_1 + y + k$

  $2y = b_1 + b_2 - k$

  $y = \frac{b_1+b_2-k}{2}$

  Luego $y = \frac{b_1+b_2 \pm k}{2}$

Caso 2. $x \neq a_1$

$d_A(A, Z) + d_A(B, Z) = k$

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| + |b_2| + |a_1 - x| + |y| = k$

$|b_1| + 2|a_1 - x| + |b_2| + 2|y| = k$

$2|a_1 - x| = k - |b_1| - |b_2| - 2|y|$

Por propiedades de valor absoluto tenemos

$2(a_1 - x) = k - |b_1| - |b_2| - 2|y|$ o $2(a_1 - x) = -k + |b_1| + |b_2| + 2|y|$

Luego

- $2(a_1 - x) = k - |b_1| - |b_2| - 2|y|$

  $-x = \frac{-2a_1+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2}$

  $x = \frac{2a_1-k+|b_1|+|b_2+2|y|}{2}$

- $2(a_1 - x) = -k + |b_1| + |b_2| + 2|y|$

  $-x = \frac{-2a_1 - k + |b_1| + |b_2| + 2|y|}{2}$

  $x = \frac{2a_1 + k - |b_1| - |b_2| - 2|y|}{2}$

$\frac{2a_1 - k + |b_1| + |b_2 + 2|y|}{2} = \frac{2a_1 + k - |b_1| - |b_2| - 2|y|}{2}$

$y = \frac{-k + |b_1| + |b_2|}{2}$ o $y = \frac{k - |b_1| - |b_2|}{2}$

Por lo tanto, por el caso 1 y 2 se tiene que

$$\oplus\,(\{A, B\}_k)_A$$

$$= \left\{\left(a_1, \frac{b_1 + b_2 \pm k}{2}\right)\right\}$$

$$\cup \left\{x = \frac{a_1 + a_2 - k + |b_1| + |b_2| + 2|y|}{2} \middle| \frac{-k + |b_1| + |b_2|}{2} < y < \frac{k - |b_1| - |b_2|}{2}\right\}$$

$$\cup \left\{x = \frac{a_1 + a_2 + k - |b_1| - |b_2| - 2|y|}{2} \middle| \frac{-k + |b_1| + |b_2|}{2} < y < \frac{k - |b_1| - |b_2|}{2}\right\}$$

Veamos que esto se cumple

Sea

$$Z(x, y)$$

$$\in \left\{\left(a_1, \frac{b_1 + b_2 \pm k}{2}\right)\right\}$$

$$\cup \left\{x = \frac{a_1 + a_2 - k + |b_1| + |b_2| + 2|y|}{2} \middle| \frac{-k + |b_1| + |b_2|}{2} < y < \frac{k - |b_1| - |b_2|}{2}\right\}$$

$$\cup \left\{x = \frac{a_1 + a_2 + k - |b_1| - |b_2| - 2|y|}{2} \middle| \frac{-k + |b_1| + |b_2|}{2} < y < \frac{k - |b_1| - |b_2|}{2}\right\}$$

Entonces por definición de unión $Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1+b_2\pm k}{2}\right)\right\}$ o $Z(x,y) \in \left\{x = \frac{a_1+a_2-k+|b_1|+|b_2|+2|y|}{2} \,\middle|\, \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$ o $Z(x,y) \in \left\{x = \frac{a_1+a_2+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2} \,\middle|\, \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$

Caso 1. $Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1+b_2\pm k}{2}\right)\right\}$

$$\left|b_1 - \frac{b_1+b_2+k}{2}\right| + \left|\frac{b_1+b_2+k}{2} - b_2\right|$$

$$\left|\frac{b_1-b_2-k}{2}\right| + \left|\frac{b_1-b_2+k}{2}\right| = k$$

Caso 2. $Z(x,y) \in \left\{x = \frac{a_1+a_2-k+|b_1|+|b_2|+2|y|}{2} \,\middle|\, \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$

$$|b_1| + \left|a_1 - \frac{a_1+a_2-k+|b_1|+|b_2|+2|y|}{2}\right| + 2|y| + \left|\frac{a_1+a_2-k+|b_1|+|b_2|+2|y|}{2} - a_2\right| + |b_2|$$

$$|b_1| + \left|\frac{a_1-a_2+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2}\right| + 2|y| + \left|\frac{a_1-a_2-k+|b_1|+|b_2|+2|y|}{2}\right| + |b_2| = k$$

Caso 3. $Z(x,y) \in \left\{x = \frac{a_1+a_2+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2} \,\middle|\, \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$

$$|b_1| + \left|a_1 - \frac{a_1+a_2+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2}\right| + 2|y| + \left|\frac{a_1+a_2+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2} - a_2\right| + |b_2|$$

$$|b_1| + \left|\frac{a_1-a_2-k+|b_1|+|b_2|+2|y|}{2}\right| + 2|y| + \left|\frac{a_1-a_2+k-|b_1|-|b_2|-2|y|}{2}\right| + |b_2| = k$$

Por lo tanto, se cumple.

Además, cuando la constante k tiende a $d_A(A,B)$ los puntos que quedan por encima de los focos como se ve en la *figura 26* se acercan a estos y la especie de "rombo" que queda cada vez será más pequeño tendiendo a desaparecer cuando $k = d_A(A,B)$.

Parte 2.

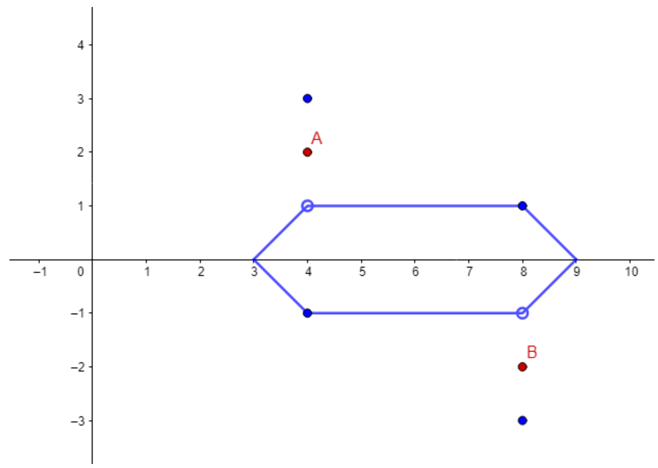

Figura 27. Elipse del Ascensor cuando $a_1 \neq a_2$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ focos de la elipse y k la constante de la elipse

Sea $Z(x, y) \in \bigoplus (\{A, B\}_k)_A$, por definición de elipse tenemos que

$d_A(A, Z) + d_A(B, Z) = k$

Caso 1. $x = a_1$

$d_A(A, Z) + d_A(B, Z) = k$

$|b_1 - y| + |b_2| + |a_2 - x| + |y| = k$

Despejando x

$|a_2 - x| = k - |b_1 - y| - |b_2| - |y|$

Luego por propiedades del valor absoluto tenemos

- $a_2 - x = k - |b_1 - y| - |b_2| - |y|$

  $x = -k + |b_1 - y| + |b_2| + |y| + a_2$

- $a_2 - x = -k + |b_1 - y| + |b_2| + |y|$

  $x = k - |b_1 - y| - |b_2| - |y| + a_2$

Luego

$-k + |b_1 - y| + |b_2| + |y| + a_2 = k - |b_1 - y| - |b_2| - |y| + a_2$

$|b_1 - y| + |b_2| + |y| = k$

Por lo que $|a_2 - x| = 0$ y por lo cual $x = a_2$, lo que no se puede dar

Ahora, despejando y

$|b_1 - y| = k - |b_2| - |a_2 - x| - |y|$

Por propiedades del valor absoluto tenemos

$b_1 - y = k - |b_2| - |a_2 - x| - |y|$ o $b_1 - y = -k + |b_2| + |a_2 - x| + |y|$

Por lo que

$|y| = k - |b_2| - |a_2 - x| - b_1 + y$ o $|y| = k - |b_2| - |a_2 - x| + b_1 - y$

- $|y| = k - |b_2| - |a_2 - x| - b_1 + y$

  $y = k - |b_2| - |a_2 - x| - b_1 + y$

  $k = |b_2| + |a_2 - x|$

  $y = -k + |b_2| + |a_2 - x| + b_1 - y$

  $y = \frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}$

- $|y| = k - |b_2| - |a_2 - x| + b_1 - y$

  $y = k - |b_2| - |a_2 - x| + b_1 - y$

  $y = \frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2}$

  $y = -k + |b_2| + |a_2 - x| - b_1 + y$

  $k = |b_2| + |a_2 - x|$

Si $k = |b_2| + |a_2 - x|$ entonces $|b_1 - y| + |y| = 0$ por lo que $b_1 = x = 0$ y $A = Z$

Luego del caso 1 tendríamos $(a_1, \frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2})$ y $(a_1, \frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2})$

Caso 2. $x = a_2$

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| + |b_2 - y| = k$

Proceso análogo del caso 1.

Se tiene que $\left(a_2, \frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+b_2}{2}\right)$ y $\left(a_2, \frac{k-|b_1|-|a_1-x|+b_2}{2}\right)$

Caso 3. $x \neq a_1$ y $x \neq a_2$

$d_A(A, Z) + d_A(B, Z) = k$

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| + |b_2| + |a_2 - x| + |y| = k$

$|b_1| + |a_1 - x| + |b_2| + |a_2 - x| + 2|y| = k$

Despejando y

$2|y| = k - |b_1| - |a_1 - x| - |b_2| - |a_2 - x|$

Por las propiedades de valor absoluto tenemos

$y = \frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2}$

$y = \frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+|b_2|+|a_2-x|}{2}$

Por lo que tenemos $\left\{y = \frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2} \middle| a_1 < x < a_2\right\} \cup \{y = \frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+|b_2|+|a_2-x|}{2} \mid a_1 < x < a_2\}$

Despejando x

$|a_1 - x| = k - |b_1| - |b_2| - |a_2 - x| - 2|y|$

Por propiedades del valor absoluto tenemos

$a_1 - x = k - |b_1| - |b_2| - |a_2 - x| - 2|y|$ o $a_1 - x = -k + |b_1| + |b_2| + |a_2 - x| + 2|y|$

Luego

$|a_2 - x| = k - |b_1| - |b_2| - 2|y| - a_1 + x$ o $|a_2 - x| = k - |b_1| - |b_2| - 2|y| + a_1 - x$

- $|a_2 - x| = k - |b_1| - |b_2| - 2|y| - a_1 + x$

  $a_2 - x = k - |b_1| - |b_2| - 2|y| - a_1 + x$

  $x = \frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1+a_2}{2}$

  $a_2 - x = -k + |b_1| + |b_2| + 2|y| + a_1 - x$

  $k = |b_1| + |b_2| + 2|y| + a_1 - a_2$

- $|a_2 - x| = k - |b_1| - |b_2| - 2|y| + a_1 - x$

  $a_2 - x = k - |b_1| - |b_2| - 2|y| + a_1 - x$

  $k = |b_1| + |b_2| + 2|y| - a_1 + a_2$

  $a_2 - x = -k + |b_1| + |b_2| + 2|y| - a_1 + x$

  $x = \frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2}$

Luego de k

$|b_1| + |b_2| + 2|y| + a_1 - a_2 = |b_1| + |b_2| + 2|y| - a_1 + a_2$

$a_1 = a_2$

Y esto no se da

De x

$\frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1+a_2}{2} = \frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2}$

$y = \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}$ o $y = \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2}$

Por lo que tenemos $\left\{x = \frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1+a_2}{2} \middle| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\} \cup \left\{x = \frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2} \middle| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$

Por lo tanto, por los casos 1, 2 y 3

$$\bigoplus(\{A,B\}_k)_A=\left\{\left(a_1,\frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\right);\left(a_1,\frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2}\right)\right\}$$

$$\cup\left\{\left(a_2,\frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+b_2}{2}\right);\left(a_2,\frac{k-|b_1|-|a_1-x|+b_2}{2}\right)\right\}$$

$$\cup\left\{x=\frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1+a_2}{2}\middle|\frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2}<y\right.$$

$$\left.<\frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}\cup\{x$$

$$\left.=\frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2}\middle|\frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2}<y<\frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$$

$$\cup\left\{y=\frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2}\middle|a_1<x<a_2\right\}\cup\{y$$

$$=\frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+|b_2|+|a_2-x|}{2}\mid a_1<x<a_2\}$$

Veamos que esto se cumple

Sea $Z(x,y)\in\left\{\left(a_1,\frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\right);\left(a_1,\frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2}\right)\right\}\cup\left\{\left(a_2,\frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+b_2}{2}\right);\left(a_2,\frac{k-|b_1|-|a_1-x|+b_2}{2}\right)\right\}\cup\left\{x=\frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1+a_2}{2}\middle|\frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2}<y<\frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}\cup\left\{x=\frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2}\middle|\frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2}<y<\frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}\cup\left\{y=\frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2}\middle|a_1<x<a_2\right\}\cup\{y=\frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+|b_2|+|a_2-x|}{2}\mid a_1<x<a_2\}$

Luego por definición de unión $Z(x,y)\in\left\{\left(a_1,\frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\right);\left(a_1,\frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2}\right)\right\}$ o $Z(x,y)\in\left\{\left(a_2,\frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+b_2}{2}\right);\left(a_2,\frac{k-|b_1|-|a_1-x|+b_2}{2}\right)\right\}$ o $Z(x,y)\in\left\{x=\frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1+a_2}{2}\middle|\frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2}<y<\frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\right\}$ o $Z(x,y)\in\{x=$

$\frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2} \Big| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2} \Big\}$ o $Z(x,y) \in \Big\{y = \frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2} \Big| a_1 < x < a_2\}$ o $Z(x,y) \in \{y = \frac{-k+|b_1|+|a_1-x|+|b_2|+|a_2-x|}{2} \mid a_1 < x < a_2\}$

Como los casos son similares de a parejas, mostraremos uno de ellos.

Caso 1. $Z(x,y) \in \Big\{\Big(a_1, \frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\Big); \Big(a_1, \frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2}\Big)\Big\}$

$\Big|b_1 - \frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\Big| + \Big|\frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\Big| + |a_2 - x| + |b_2|$

$\Big|\frac{k-|b_2|-|a_2-x|-b_1}{2}\Big| + \Big|\frac{-k+|b_2|+|a_2-x|+b_1}{2}\Big| + |a_2 - x| + |b_2| = k$

De igual forma para cuando $Z(x,y) = \Big(a_1, \frac{k-|b_2|-|a_2-x|+b_1}{2}\Big)$

Caso 3. $Z(x,y) \in \{x = \frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2} \Big| \frac{-k+|b_1|+|b_2|}{2} < y < \frac{k-|b_1|-|b_2|}{2}\Big\}$

$|b_1| + \Big|a_1 - \frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2}\Big| + 2|y| + \Big|\frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1+a_2}{2} - a_2\Big| + |b_2|$

$|b_1| + \Big|\frac{-k+|b_1|+|b_2|+2|y|+a_1-a_2}{2}\Big| + 2|y| + \Big|\frac{k-|b_1|-|b_2|-2|y|+a_1-a_2}{2}\Big| + |b_2| = k$

Caso 5. $Z(x,y) \in \Big\{y = \frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2} \Big| a_1 < x < a_2\}$

$|b_1| + |a_1 - x| + 2\Big|\frac{k-|b_1|-|a_1-x|-|b_2|-|a_2-x|}{2}\Big| + |a_2 - x| + |b_2|$

$|b_1| + |a_1 - x| + \big|k - |b_1| - |a_1 - x| - |b_2| - |a_2 - x|\big| + |a_2 - x| + |b_2| = k$

Por lo tanto, se cumple.

Además, al igual que en la parte 1 cuando la constante k tiende a $d_A(A,B)$ los puntos que quedan por encima o debajo de los focos como se ve en la *figura 27* se acercan más a estos, y la especie de "hexágono" que queda cada vez será más angosto tendiendo a ser el $eje\ x$ cuando $k = d_A(A,B)$.

5.8. Hipérbolas

Durante la exploración en GeoGebra para la identificación de la hipérbola se colocaron los puntos A y B focos de la hipérbola en diversas posiciones del plano y un deslizador k como constante de la hipérbola, dando como resultado diferentes tipos de hipérbola dependiendo de la distancia entre A y B, el punto medio de estos y la constante a tomar.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene la siguiente proposición:

5.8.1. Proposición Hipérbola del Ascensor

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ focos de la hipérbola, $C(a_1, 0), D(a_2, 0)$, k la constante y M el punto medio de A y B.

1. Si $M(a_1, \frac{b_1+b_2}{2})$ entonces $\ominus\ (\{A, B\}_k)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1+b_2 \pm k}{2}\right)\right\}$
2. Si $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ y $\frac{k}{2} < d_A(M, C)$ entonces $\ominus\ (\{A, B\}_k)_A = \left\{(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1 \pm k}{2})\right\}$

   2.1. Si $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ y $\frac{k}{2} = d_A(M, C)$ entonces $\ominus\ (\{A, B\}_k)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1 \pm k}{2}\right)\right\} \cup \{Z(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < a_1\}$

   2.2. Si $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ y $d_A(M, C) < \frac{k}{2} < d_A(M, C) + d_A(C, D)$ entonces $\ominus\ (\{A, B\}_k\ )_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2}\right)\right\} \cup \{x = -\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1\}$

   2.3. Si $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ y $\frac{k}{2} > d_A(M, C) + d_A(C, D)$ entonces $\ominus\ (\{A, B\}_k\ )_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2}\right)\right\} \cup \{(a_2, -\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2} + a_1 - a_2)\}$
3. Si $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2} + a_1, 0)$, $\frac{k}{2} < d_A(C, M)$ y $\frac{k}{2} < d_A(M, D)$ entonces $\ominus\ (\{A, B\}_k)_A = \left\{\mathrm{x} = -\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1 \pm k}{2} + a_1\right\}$

3.1.Si $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}+a_1,0)$, $\frac{k}{2}=d_A(C,M)$ y $\frac{k}{2}<d_A(M,D)$ entonces $\ominus$

$$(\{A,B\}_k)_A=\{Z(x,y)\in\mathbb{R}^2|x<a_1\}\cup\left\{\mathrm{x}=-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1-k}{2}+a_1\right\}$$

3.2.Si $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}+a_1,0)$, $\frac{k}{2}>d_A(C,M)$ y $\frac{k}{2}<d_A(M,D)$ entonces $\ominus$

$$(\{A,B\}_k)_A=\{(a_1,\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1+k}{2})\}\cup\left\{\mathrm{x}=-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1-k}{2}+a_1\right\}$$

3.3.Si $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}+a_1,0)$, $\frac{k}{2}>d_A(C,M)$ y $\frac{k}{2}>d_A(M,D)$ entonces $\ominus$

$$(\{A,B\}_k)_A=\{(a_1,\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1+k}{2})\}\cup\left\{(\mathrm{a}_2,-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1-k}{2}+\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_2)\right\}$$

5.8.1.1. Demostración.

Parte 1.

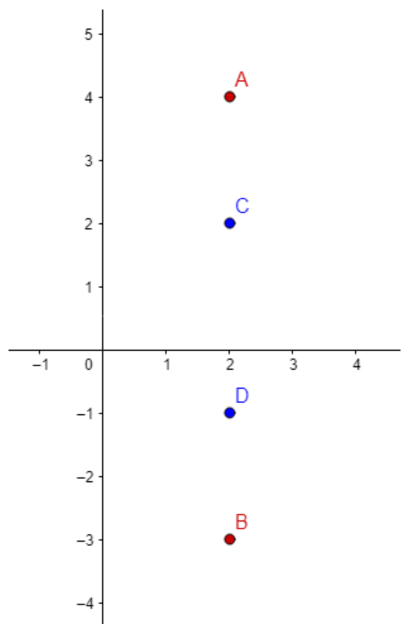

Figura 28. Hipérbola del Ascensor cuando $M(a_1,\frac{b_1+b_2}{2})$

Dados $A(a_1,b_1)$, $B(a_1,b_2)$ focos de la hipérbola, k la constante y $M(a_1,\frac{b_1+b_2}{2})$

Sea $Z(x,y)\in\left\{\left(a_1,\frac{b_1+b_2\pm k}{2}\right)\right\}$, entonces

$$Z(x,y)=\left(a_1,\frac{b_1+b_2+k}{2}\right)\text{ o }Z(x,y)=\left(a_1,\frac{b_1+b_2-k}{2}\right)$$

Caso 1. $Z(x,y) = \left(a_1, \frac{b_1+b_2+k}{2}\right)$

Por definición de hipérbola tenemos

$|d_A(A,Z) - d_A(B,Z)| = k$

$\left|\left|b_1 - \frac{b_1+b_2+k}{2}\right| - \left|\frac{b_1+b_2+k}{2} - b_2\right|\right| = k$

Por propiedades de valor absoluto tenemos que

$|-k| = k$

Caso 2. $Z(x,y) = \left(a_1, \frac{b_1+b_2-k}{2}\right)$

$|d_A(A,Z) - d_A(B,Z)| = k$

$\left|\left|b_1 - \frac{b_1+b_2-k}{2}\right| - \left|\frac{b_1+b_2-k}{2} - b_2\right|\right| = k$

Por propiedades de valor absoluto tenemos que

$|k| = k$

Luego $\ominus\ (\{A,B\}_k)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1+b_2 \pm k}{2}\right)\right\}$

Parte 2.

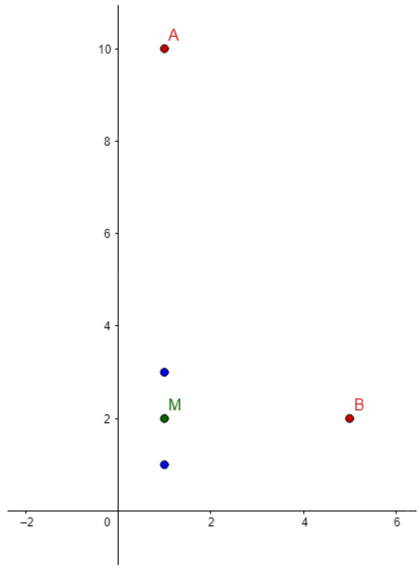

Figura 29. Hipérbola del Ascensor cuando $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ *y* $\frac{k}{2} < d_A(M, C)$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ focos de la hipérbola, k la constante, $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ y $\frac{k}{2} < d_A(M, C)$

Sea $Z(x, y) \in \left\{(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1 \pm k}{2})\right\}$, entonces

$Z(x, y) = (a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2})$ o $Z(x, y) = (a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2})$

Caso 1. $Z(x, y) = (a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2})$

$|d_A(A, Z) - d_A(B, Z)| = k$

Pero $d_A(A, Z) = d_A(A, M) - d_A(C, M)$ y $d_A(B, Z) = d_A(B, M) + d_A(C, M)$, luego

$\left|d_A(A, M) - d_A(C, M) - \left(d_A(B, M) + d_A(C, M)\right)\right| = k$

$|-2d_A(C, M)| = k$

$\left|-2\left(\frac{k}{2}\right)\right| = k$

$|-k| = k$

Caso 2. $Z(x, y) = (a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 - k}{2})$

$|d_A(A, Z) - d_A(B, Z)| = k$

Pero $d_A(A, Z) = d_A(A, M) + d_A(C, M)$ y $d_A(B, Z) = d_A(B, M) - d_A(C, M)$, luego

$\left|d_A(A, M) + d_A(C, M) - \left(d_A(B, M) - d_A(C, M)\right)\right| = k$

$|2d_A(C, M)| = k$

$\left|2\left(\frac{k}{2}\right)\right| = k$

$|k| = k$

Por lo tanto, $\ominus\ (\{A, B\}_k)_A = \left\{(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 \pm k}{2})\ \right\}$

Parte 2.1.

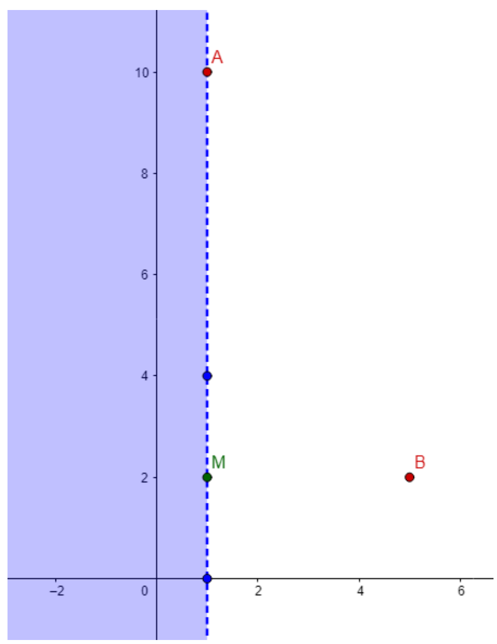

Figura 30. Hipérbola del Ascensor cuando $M(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1}{2})$ *y* $\frac{k}{2} = d_A(M, C)$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ focos de la hipérbola, k la constante, $M(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1}{2})$ y $\frac{k}{2} = d_A(M, C)$

Sea $Z(x, y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 \pm k}{2}\right)\right\} \cup \{Z(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < a_1\}$

Por definición de unión tenemos

$Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1\pm k}{2}\right)\right\}$ o $Z(x,y) \in \{Z(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < a_1\}$

Caso 1. $Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1\pm k}{2}\right)\right\}$

Demostrado anteriormente, además como $\frac{k}{2} = d_A(M,C)$ entonces $Z\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2}\right) = C(a_1, 0)$

Caso 2. $Z(x,y) \in \{Z(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < a_1\}$

$|d_A(A,Z) - d_A(B,Z)| = k$

Pero $d_A(A,Z) = d_A(A,C) + d_A(C,Z)$ y $d_A(B,Z) = d_A(C,Z) + d_A(C,D) + d_A(D,B)$, luego

$\left|d_A(A,C) + d_A(C,Z) - \left(d_A(C,Z) + d_A(C,D) + d_A(D,B)\right)\right| = k$

$|d_A(A,C) + d_A(C,Z) - d_A(C,D) - d_A(D,B)| = k$

Por el caso 1 y como $\frac{k}{2} = d_A(M,C)$

$|k| = k$

Por lo tanto, $\ominus\,(\{A,B\}_k)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1\pm k}{2}\right)\right\} \cup \{Z(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < a_1\}$

Parte 2.2.

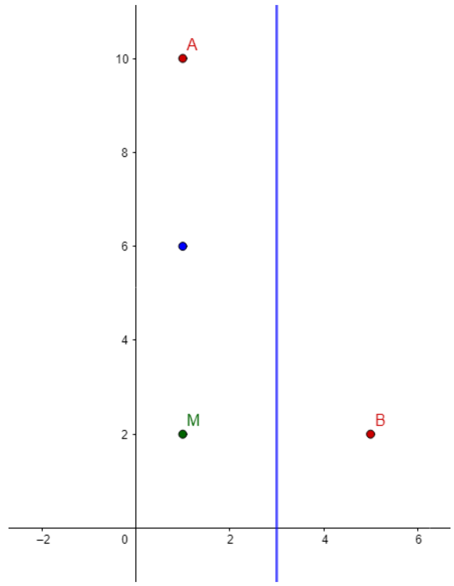

Figura 31. Hipérbola del Ascensor cuando $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ *y* $d_A(M,C) < \frac{k}{2} < d_A(M,C) + d_A(C,D)$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ focos de la hipérbola, k la constante, $M(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2})$ y $d_A(M,C) < \frac{k}{2} < d_A(M,C) + d_A(C,D)$

Sea $Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2}\right)\right\} \cup \{x = -\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1\}$

Por definición de unión tenemos

$Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2}\right)\right\}$ o $Z(x,y) \in \{x = -\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1\}$

Caso 1. $Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2}\right)\right\}$

Demostrado anteriormente en la parte 1.

Caso 2. $Z(x,y) \in \{x = -\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1\}$

Como Z pertenece a la recta entonces $Z(x,y) = Z(-\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1, y)$ y en particular el punto $W(-\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1, 0)$ estará en ella.

$|d_A(A,W) - d_A(B,W)| = k$

Pero $d_A(A,W) = d_A(A,M) + d_A(M,C) + d_A(C,W)$ y $d_A(B,W) = d_A(W,D) + d_A(D,B)$, luego como M es el punto medio y $d_A(M,C) < \frac{k}{2} < d_A(M,C) + d_A(C,D)$ se tiene que $d_A(A,M) = d_A(M,C) + d_A(C,W) + d_A(W,D) + d_A(D,B)$

Luego

$|d_A(M,C) + d_A(C,W) + d_A(W,D) + d_A(D,B) + d_A(M,C) + d_A(C,W) - d_A(W,D) - d_A(D,B)| = k$

$|2d_A(M,C) + 2d_A(C,W)| = k$

$\left|2\left(\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2}\right) + 2\left(-\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2}\right)\right| = k$

$|k| = k$

Ahora, con $Z(-\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1, y)$

$$|d_A(M,C) + d_A(C,W) + d_A(W,D) + d_A(D,B) + d_A(M,C) + d_A(C,W) + d_A(w,Z) - d_A(W,Z) - d_A(W,D) - d_A(D,B)| = k$$

$|2d_A(M,C) + 2d_A(C,W)| = k$

$\left|2\left(\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1}{2}\right) + 2\left(-\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2}\right)\right| = k$

$|k| = k$

Por lo tanto $\ominus\ (\{A,B\}_k\ )_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2}\right)\right\} \cup \{x = -\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1-k}{2} + a_1\}$

Caso 2.3.

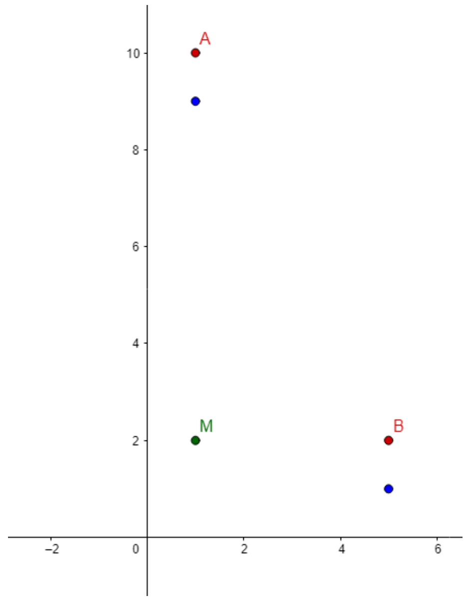

Figura 32. Hipérbola del Ascensor cuando $M(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1}{2})$ *y* $\frac{k}{2} > d_A(M,C) + d_A(C,D)$

Dados $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ focos de la hipérbola, k la constante, $M(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1}{2})$ y $\frac{k}{2} > d_A(M,C) + d_A(C,D)$

Sea $Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 + k}{2}\right)\right\} \cup \{(a_2, -\frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 + k}{2} + a_1 - a_2)\}$

Por definición de unión tenemos

$Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 + k}{2}\right)\right\}$ o $Z(x,y) \in \{(a_2, -\frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 + k}{2} + a_1 - a_2)\}$

Caso 1. $Z(x,y) \in \left\{\left(a_1, \frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 + k}{2}\right)\right\}$

Demostrado anteriormente en la parte 1.

Caso 2. $Z(x,y) \in \{(a_2, -\frac{b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 + k}{2} + a_1 - a_2)\}$

$|d_A(A,Z) - d_A(B,Z)| = k$

Pero $d_A(A,W) = d_A(A,M) + d_A(M,C) + d_A(C,D) + d_A(D,Z)$ y $d_A(B,Z)$, luego como M es el punto medio y $\frac{k}{2} > d_A(M,C) + d_A(C,D)$ se tiene que $d_A(A,M) = d_A(M,C) + d_A(C,D) + d_A(D,Z) + d_A(Z,B)$

$|d_A(M,C) + d_A(C,D) + d_A(D,Z) + d_A(Z,B) + d_A(M,C) + d_A(C,D) + d_A(D,Z) - d_A(Z,B)| = k$

$|2d_A(M,C) + 2d_A(C,D) + 2d_A(D,Z)| = k$

$|b_1 - a_2 - |b_2| + a_1 + 2a_1 - 2a_2 - b_1 + a_2 + |b_2| - a_1 - k + 2a_1 - 2a_2| = k$

$|-k| = k$

Por lo tanto $\ominus(\{A,B\}_k)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2}\right)\right\} \cup \{(a_2, -\frac{b_1-a_2-|b_2|+a_1+k}{2} + a_1 - a_2)\}$

Parte 3.

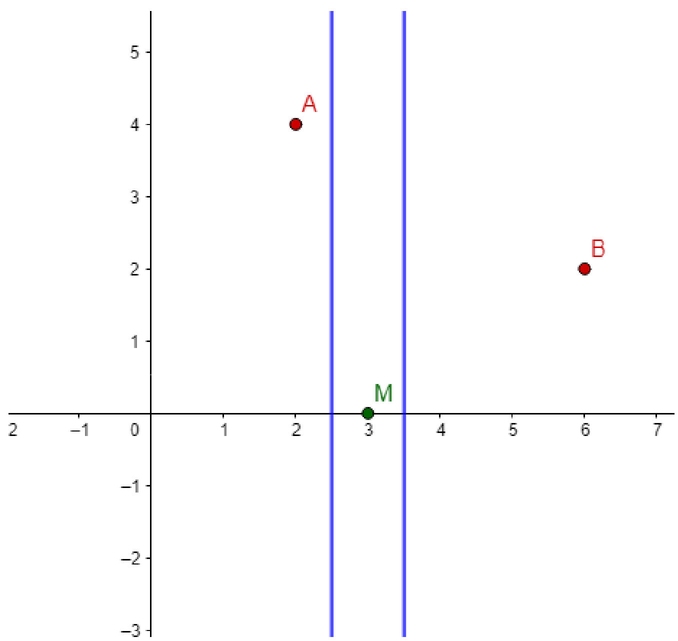

Figura 33. Hipérbola del Ascensor cuando $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2} + a_1, 0)$, $\frac{k}{2} < d_A(C,M)$ *y* $\frac{k}{2} < d_A(M,D)$

Dados $A(a_1,b_1)$, $B(a_2,b_2)$ focos de la hipérbola, k la constante, $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2} + a_1, 0)$, el punto medio de A y B, $\frac{k}{2} < d_A(C,M)$ y $\frac{k}{2} < d_A(M,D)$

Sea $Z(x,y) \in \left\{ \mathrm{x} = -\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1 \pm k}{2} + a_1 \right\}$

Caso 1. $Z(x,y) \in \left\{ \mathrm{x} = -\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1+k}{2} + a_1 \right\}$

$Z(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1+k}{2}+a_1, y)$ y $W(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1+k}{2}+a_1, 0)$

$|d_A(A,Z)-d_A(B,Z)|=k$

$d_A(A,Z)=d_A(A,C)+d_A(C,W)+d_A(W,Z)$ y $d_A(Z,B)=d_A(W,Z)+d_A(W,M)+d_A(M,B)$, pero $d_A(M,B)=d_A(A,C)+d_A(C,W)+d_A(W,M)$, luego

$\left|d_A(A,C)+d_A(C,W)+d_A(W,Z)-\left(d_A(W,Z)+d_A(W,M)+d_A(A,C)+d_A(C,W)+d_A(W,M)\right)\right|=k$

$|-2d_A(W,M)|=k$

$\left|-2\left(\frac{k}{2}\right)\right|=k$

Caso 2. $Z(x,y)\in\left\{\mathrm{x}=-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1-k}{2}+a_1\right\}$

Proceso análogo al caso 1.

Por lo tanto, $\ominus(\{A,B\}_k)_A=\left\{\mathrm{x}=-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1\pm k}{2}+a_1\right\}$

Nota 1.

Las partes 3.1, 3.2 y 3.3 son variantes de la hipérbola, al igual que las partes 2.1 a 2.3 (que ya fueron demostradas), en donde se aprecia que las hipérbolas del ascensor pueden ser, puntos, rectas, semiplanos o una combinación de estas, por lo cual las demostraciones de los casos siguientes con análogas. A continuación, se muestra en imágenes las variaciones.

Caso 3.1.

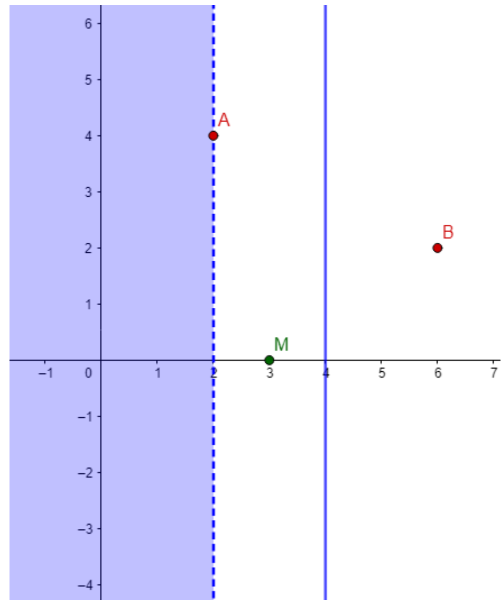

Figura 34. Hipérbola del Ascensor cuando $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}+a_1,0)$, $\frac{k}{2}=d_A(C,M)$ y $\frac{k}{2}<d_A(M,D)$

Caso 3.2.

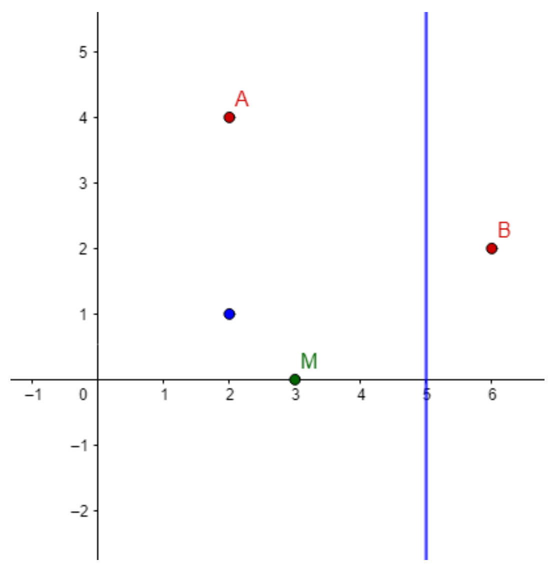

Figura 35. Hipérbola del Ascensor cuando $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}+a_1,0)$, $\frac{k}{2}>d_A(C,M)$ y $\frac{k}{2}<d_A(M,D)$

Caso 3.3.

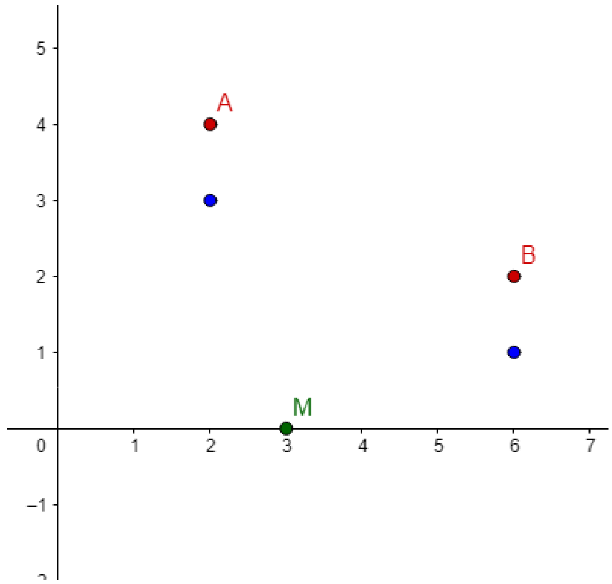

Figura 36. Hipérbola del Ascensor cuando $M(-\frac{b_1-|b_2|-a_2+a_1}{2}+a_1, 0)$, $\frac{k}{2} > d_A(C, M)$ *y* $\frac{k}{2} > d_A(M, D)$

Nota 2.

Cuando el punto medio de A y B sea de la forma $M(a_2, \frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2})$ se tendrán casos similares a los de la parte 2, por lo que nuevamente el proceso de demostración será análogo.

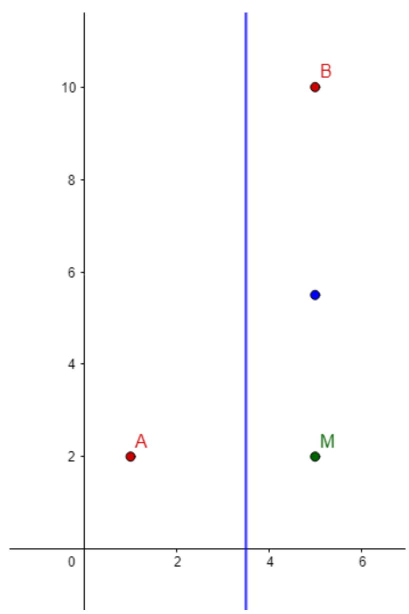

Figura 37. Hipérbola del Ascensor cuando $M(a_2, \frac{b_2-a_2-|b_1|+a_1}{2})$

5.9. Parábolas

Durante la exploración en GeoGebra para la identificación de la parábola se colocó el punto A foco de esta en diversas posiciones del plano junto a la recta l directriz en posiciones paralelas a los ejes coordenados x y y, dando como resultado diferentes tipos de parábola dependiendo de la posición de la recta y la distancia del punto a la recta.

A continuación, se muestra la distancia de punto a recta en la métrica del ascensor y teniendo en cuenta lo anterior, se tiene la proposición.

5.9.1. Distancia de Punto a Recta en la Métrica del Ascensor

En Neira (2015), podemos encontrar la siguiente definición:

5.9.1.1. Definición Distancia entre un Punto y un Conjunto.

Sea $(X.d)$ un espacio métrico. Si A es un subconjunto no vacío de X entonces la distancia $d(x,A)$ de un punto $x \in X$ al conjunto A se define como el ínfimo de los números $d(x,a)$ donde $a \in A$; esto es,

$$d(x,A) = ínf\{d(x,a): a \in A\}$$

Luego, la distancia entre un punto $A(a_1,b_1)$ y una recta l en la métrica del ascensor será

$$d_A(A,l) = ínf\{d_A(A,B): B \in l\}$$

Para el trabajo con la parábola en la métrica del ascensor solo tendremos en cuenta las rectas paralelas a los ejes coordenados pues estas son la que recogen algunos de los tipos de rectas descritas anteriormente.

Por lo que

1. Si l es de la forma $y = k$ entonces $d_A(A,l) = d_A(A,B)$ donde $B(a_1,k)$

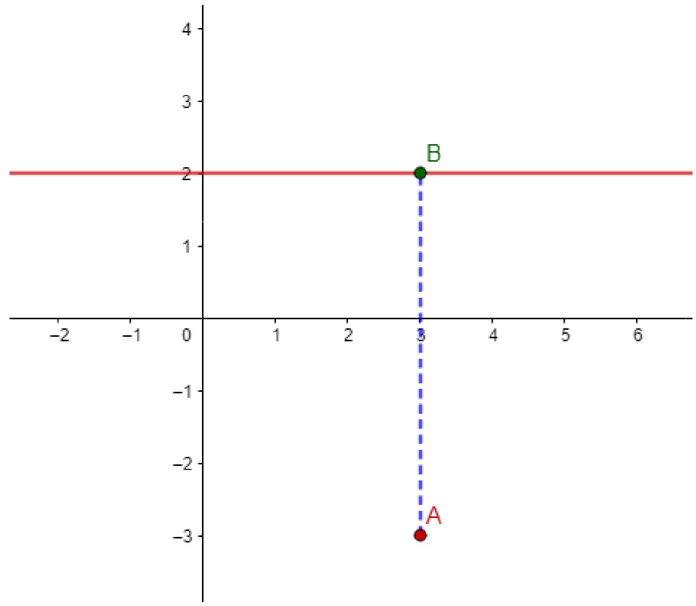

Figura 38. Distancia de punto a recta cuando $y = k$

Sea $B(x, k) \in l$ entonces por definición de la métrica del ascensor tenemos

Caso 1. $x = a_1$

$d_A(B, A) = |k - b_1|$

Caso 2. $x \neq a_1$

$d_A(B, A) = |k| + |x - a_1| + |b_1|$

Pero la definición de distancia de punto a recta dice que $d_A(A, l) = ínf\{d_A(A, B): B \in l\}$

y

$|k - b_1| < |k| + |x - a_1| + |b_1|$

Por lo que $d_A(A, l) = d_A(A, B)$ donde $B(a_1, k)$

2. Si l es de la forma $x = k$ entonces $d_A(A, l) = d_A(A, B)$ donde $B(k, 0)$

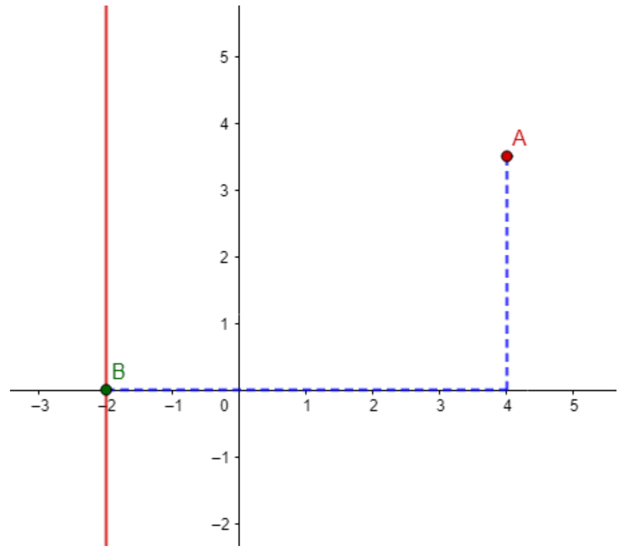

Figura 39. Distancia de punto a recta cuando $x = k$

Sea $B(k, y) \in l$ entonces por definición de métrica del ascensor tenemos

$d(A, B) = |b_1| + |a_1 - k| + |y|$

La definición de distancia de punto a recta dice que $d_A(A, l) = ínf\{d_A(A, B): B \in l\}$ y $d_A(A, l)$ va a ser ínfima cuando $y = 0$ pues

$|b_1| + |a_1 - k| < |b_1| + |a_1 - k| + |y|$

Por lo que $d_A(A, l) = d_A(A, B)$ donde $B(k, 0)$

5.9.2. Proposición Parábola del Ascensor

Dados $A(a_1, b_1)$ foco de la parábola, l la recta directriz

1. Si l es de la forma $y = k$ y $|b_1| \geq k$ entonces $\uplus(A_l)_A = \left\{\left(a_1, \frac{k+b_1}{2}\right)\right\}$

   1.1.Si l es de la forma $y = k$ y $|b_1| < k$ entonces $\uplus(A_l)_A = \left\{\left(a_1, \frac{k+b_1}{2}\right)\right\} \cup \{x = -|k - y| + |b_1| + |y| + a_1 | 0 \leq y < \pm\infty\} \cup \{x = |k - y| - |b_1| - |y| + a_1 | 0 \leq y < \pm\infty\}$

2. Si l es de la forma $x = k$ y $|k - a_1| \leq |b_1|$ entonces $\uplus(A_l)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1 - |k - a_1|}{2}\right)\right\}$

2.1. Si l es de la forma $x = k$ y $|k - a_1| > |b_1|$ entonces $\uplus(A_l)_A = \left\{x = \frac{a_1+|b_1|+k}{2}\right\}$

5.9.2.1.Demostración.

Parte 1.

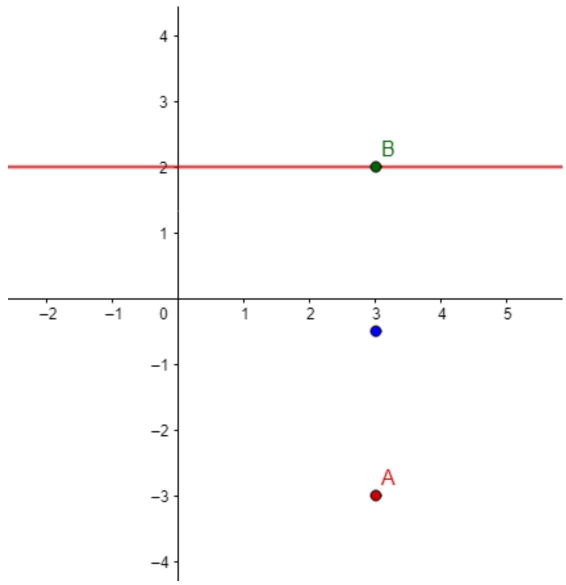

Figura 40. Parábola del Ascensor cuando $y = k$ *y* $|b_1| \geq k$

Dados $A(a_1, b_1)$ foco de la parábola, $y = k$ la recta directriz

Sea $Z(x, y) \in \uplus(A_l)_A$

Por definición de parábola tenemos que

$d_A(A, Z) = d_A(Z, l)$

Por la definición de distancia de punto a recta en la métrica del ascensor tenemos que $d_A(Z, l) = d_A(Z, B)$ donde $B(x, k)$, luego $d_A(A, Z) = d_A(Z, B)$.

Caso 1. $x = a_1$

$|b_1 - y| = |k - y|$

Por definición de valor absoluto tenemos que

$b_1 - y = k - y$

$b_1 = k$

$b_1 - y = -k + y$

$y = \frac{b_1+k}{2}$

Caso 2. $x \neq a_1$

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| = |k - y|$

Pero $|b_1| \geq |k|$ por lo que $|b_1| + |a_1 - x| + |y| > |k - y|$

Por lo que $\uplus(A_l)_A = \left\{\left(a_1, \frac{k+b_1}{2}\right)\right\}$

Veamos que $\left(a_1, \frac{k+b_1}{2}\right)$ cumple

$\left|b_1 - \frac{k+b_1}{2}\right| = \left|\frac{k+b_1}{2} - k\right|$

$\left|\frac{b_1-k}{2}\right| = \left|\frac{b_1-k}{2}\right|$

Parte 1.1.

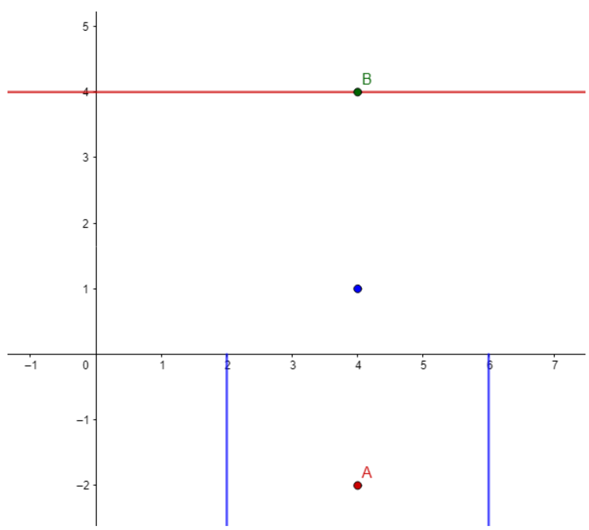

Figura 41. Parábola del Ascensor cuando $y = k$ y $|b_1| < k$

Dados $A(a_1, b_1)$ foco de la parábola, $y = k$ la recta directriz

Sea $Z(x, y) \in \uplus(A_l)_A$

Por definición de parábola tenemos que

$d_A(A, Z) = d_A(Z, l)$

Por la definición de distancia de punto a recta en la métrica del ascensor tenemos que $d_A(Z,l) = d_A(Z,B)$ donde $B(x,k)$, luego $d_A(A,Z) = d_A(Z,B)$.

Caso 1. $x = a_1$

Igual que en la parte 1.

Caso 2. $x \neq a_1$

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| = |k - y|$

Despejando x tenemos

$|a_1 - x| = |k - y| - |b_1| - |y|$

Por propiedad del valor absoluto tenemos

$a_1 - x = |k - y| - |b_1| - |y|$ o $a_1 - x = -|k - y| + |b_1| + |y|$

Por lo que

$x = -|k - y| + |b_1| + |y| + a_1$ o $x = |k - y| - |b_1| - |y| + a_1$

Luego por los casos 1 y 2 se tiene que $\cup(A_l)_A = \left\{\left(a_1, \frac{k+b_1}{2}\right)\right\} \cup \{x = -|k - y| + |b_1| + |y| + a_1 | 0 \leq y < \pm\infty\} \cup \{x = |k - y| - |b_1| - |y| + a_1 | 0 \leq y < \pm\infty\}$

Veamos que se cumple, para $Z(x,y) = \left(a_1, \frac{k+b_1}{2}\right)$ se mostro anteriormente.

$Z(x,y) \in \{x = -|k - y| + |b_1| + |y| + a_1 | 0 \leq y < \pm\infty\}$

$|b_1| + |a_1 - (-|k - y| + |b_1| + |y| + a_1)| + |y| = |k - y|$

$|b_1| + \big||k - y| - |b_1| - |y|\big| + |y| = 0$

$0 = 0$

Parte 2.

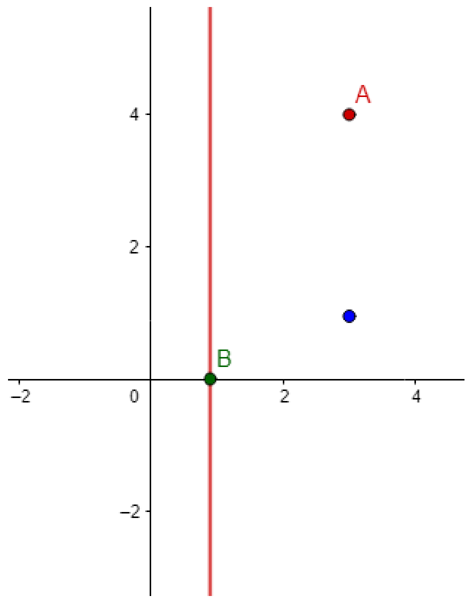

Figura 42. Parábola del Ascensor cuando $x = k$ y $|k - a_1| \leq |b_1|$

Dados $A(a_1, b_1)$ foco de la parábola, $x = k$ la recta directriz y $|b_1| > |k - a_1|$

Sea $Z(x, y) \in \uplus(A_l)_A$

Por definición de parábola tenemos que

$d_A(A, Z) = d_A(Z, l)$

Por la definición de distancia de punto a recta en la métrica del ascensor tenemos que $d_A(Z, l) = d_A(Z, B)$ donde $B(k, 0)$, luego $d_A(A, Z) = d_A(Z, B)$.

Caso 1. $x = a_1$

$|b_1 - y| = |k - a_1| + |y|$

Por propiedad del valor absoluto tenemos

$b_1 - y = |k - a_1| + |y|$ o $b_1 - y = -|k - a_1| - |y|$

Luego

$|y| = b_1 - y - |k - a_1|$ o $|y| = -b_1 + y - |k - a_1|$

Y como $|b_1| > |k - a_1|$ entonces solo tenemos

$|y| = b_1 - y - |k - a_1|$

Y por propiedades de valor absoluto

$y = \frac{b_1 - |k-a|}{2}$

Luego $\uplus(A_l)_A = \left\{\left(a_1, \frac{b_1-|k-a_1|}{2}\right)\right\}$

Caso 2. $x \neq a_1$

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| = |k - x| + |y|$

Y esto no se tiene pues $|b_1| > |k - a_1|$

Veamos que esto se cumple

$\left|b_1 - \frac{b_1-|k-a_1|}{2}\right| = |k - a_1| + \left|\frac{b_1-|k-a_1|}{2}\right|$

$\left|\frac{b_1+|k-a_1|}{2}\right| = 2|k - a_1| + \left|b_1 - |k - a_1|\right|$

Parte 2.1.

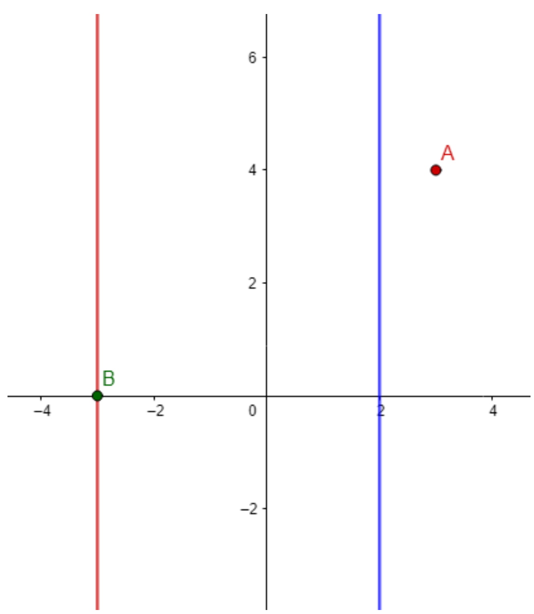

Figura 43. Parábola del Ascensor cuando $|b_1| < |k - a_1|$

Dados $A(a_1, b_1)$ foco de la parábola, $x = k$ la recta directriz y $|b_1| < |k - a_1|$

Sea $Z(x,y) \in \uplus(A_l)_A$

Por definición de parábola tenemos que

$d_A(A,Z) = d_A(Z,l)$

Por la definición de distancia de punto a recta en la métrica del ascensor tenemos que $d_A(Z,l) = d_A(Z,B)$ donde $B(k,0)$, luego $d_A(A,Z) = d_A(Z,B)$.

Caso 1. $x = a_1$

$|b_1 - y| = |k - a_1| + |y|$

Pero esto no se da, pues $|b_1| < |k - a_1|$

Caso 2. $x \neq a_1$

$d_A(A,Z) = d_A(B,Z)$

$|b_1| + |a_1 - x| + |y| = |k - x| + |y|$

Trazamos circunferencia centro en $(a_1, 0)$, radio $|b_1|$ y encontramos la intersección con $y = 0$ en donde el punto sea mayor que a_1

$(x - a_1)^2 + y^2 = |b_1|^2$ y $y = 0$

Formamos el punto

$E(a_1 + |b_1|, 0)$

Luego $d_A(A,Z) = d_A(E,Z)$

Por lo que

$|a_1 + |b_1| - x| + |y| = |k - x| + |y|$

Luego por propiedades del valor absoluto

$x = \frac{a_1+|b_1|+k}{2}$

Por lo tanto $\uplus(A_l)_A = \left\{x = \frac{a_1+|b_1|+k}{2}\right\}$

Veamos que se cumple, sea $Z(\frac{a_1+|b_1|+k}{2}, y)$

$$\left|a_1 + |b_1| - \frac{a_1+|b_1|+k}{2}\right| = \left|k - \frac{a_1+|b_1|+k}{2}\right|$$

$$\left|\frac{a_1+|b_1|-k}{2}\right| = \left|\frac{a_1+|b_1|-k}{2}\right|$$

Por lo tanto, se cumple.

6. Conclusiones

Las conclusiones están divididas en dos, primero se habla de los resultados obtenidos a traves del estudio de la métrica del ascensor en los diferentes lugares geométricos explorados, después, se presentan las proyecciones con el fin de dar continuidad en la investigación de la métrica u otras métricas.

6.1. Con respecto a la Métrica del Ascensor

- ✓ Los segmentos del ascensor son iguales a los segmentos paralelos o verticales de la métrica usual o una unión de estos.
- ✓ Los rayos del ascensor son iguales a los rayos paralelos o verticales de la métrica usual o una unión de estos a excepción de cuando el punto que da la dirección esta en el $eje\ x$, pues esto da pie a semiplanos.
- ✓ Las rectas del ascensor son iguales a las de la métrica usual cuando los puntos tienen la misma abscisa, pero los puntos tomados se encuentran en cuadrantes diferentes. Cuando no ocurre esto, da paso a uniones de segmentos con rayos, semiplanos o planos completos al igual que ocurre con los rayos del ascensor.
- ✓ Los puntos medios en la métrica del ascensor cuando los puntos tienen la misma abscisa se encuentran de la misma forma que en la métrica usual. Cuando esto no ocurra se dependerá de los valores de las abscisas y ordenadas de los puntos para determinar la posición del punto medio.
- ✓ Las mediatrices del ascensor son puntos, rectas o semiplanos dependiendo de la posición del punto medio del segmento.
- ✓ El lugar geométrico que describen las circunferencias del ascensor dependerá de la distancia del punto al $eje\ x$ y el valor de r a tomar.

- ✓ El lugar geométrico que describen las elipses del ascensor dependerá de la posición de los focos y la constante k a tomar, pues esto definirá si la elipse será dos puntos o la amplitud con la que se distanciaran los puntos pertenecientes a este lugar.
- ✓ El lugar geométrico que describen las hipérbolas del ascensor dependerá de los focos, la constante k a tomar y la posición del punto medio, formando así hipérbolas de hojas formadas por puntos, rectas, semiplanos o una combinación de estas tres dependiendo de que tanto se acerque la contante a 0 o a $d_A(A, B)$.
- ✓ El lugar geométrico que describen las parábolas dependerá del posicionamiento de la recta directriz y el foco, dando como resultado un punto o rectas dependiendo la distancia de la recta y el foco.

6.2. Con respecto a la formación

- ➢ Gracias a la ayuda del software GeoGebra se logró identificar cada uno de los lugares geométricos con sus respectivos casos, para así realizar la descripción y las proposiciones de cada uno de estos.
- ➢ Con los métodos analíticos y algebraicos se logró en varias ocasiones corroborar los lugares geométricos visualizados en GeoGebra, además son pieza fundamental de algunas de las demostraciones de las secciones cónicas.
- ➢ La realización de este trabajo de grado puso a prueba cada uno de los conocimientos geométricos, analíticos y algebraicos logrados a traves de los espacios académicos cursados a lo largo de la carrera; además con el uso de GeoGebra y estos conocimientos a lo largo de las exploraciones se realizó un mayor trabajo con los procesos de visualización, conjeturación y demostración los cuales fueron de suma importancia para la culminación de este estudio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la realización de este trabajo de grado me permitió reflexionar sobre los aportes a mi formación docente, pues al poner a prueba mis conocimientos y al hacer uso de procesos de visualización, conjeturación y demostración me di cuenta del laborioso quehacer matemático en cada una de sus actividades, asimismo del quehacer como futuro Licenciado en Matemáticas al pensar como lo realizado durante este documento podría ser de ayuda para potenciar los procesos en los estudiantes y también llevar esto al aula haciendo uso del GeoGebra.

7. Proyecciones

- La realización de este trabajo se puede tomar como aliciente para identificación de la topología asociada a la métrica, tomando como base la circunferencia del ascensor para así dar paso a encontrar los abiertos asociados.
- Este trabajo puede ser motivación para la realización de estudios de lugares geométricos en otras métricas o para la invención de una nueva distancia y su demostración como una métrica nueva.
- Al igual que en algunas ocasiones en la escuela se cambia la definición de distancia por la métrica del taxista y se realiza un trabajo de exploración con los estudiantes, podría hacerse lo mismo con la métrica del ascensor.

Bibliografía

Antonio, J. A., Garzón, C. J., & Sepulveda, O. (2020). Estudio de las Cónicas en Algunas Métricas: Propuesta para el Desarrollo de Pensamiento Espacial. *Revista Boletin REDIPE 9*, 110-129.

Ferreyra, N., & Lorenzo, M. (2012). Visualización de Lugares Geométricos con GeoGebra. *Universidad Nacional del Comahue*.

Lehmann, C. (1989). *GEOMETRÍA ANALÍTICA.* México: Limusa.

Neira, C. (2015). *Topología General.* Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia.

Polanía, C. M., & Sánchez, C. C. (2010). *Un Acercamiento al Pensamiento Geométrico.* Medellín: Universidad de Medellín.

Samper, C., & Molina, Ó. (2013). *Geometría plana un espacio de aprendizaje.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Toledo Sánchez, F. (2017). *Topología de Espacios Métricos Animada con GeoGebra.* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Zapata, Z., & Peñaloza, J. (2020). *Algunos Lugares Geométricos desde la Métrica del Mensajero.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.