

APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

Luis Yesid Cortés Maldonado

Dirección de Prof. Yecid Cruz Bonilla



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL**

Trabajo de grado presentado para optar por el título de
Licenciado en Física

Departamento de Física
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia
2021

Agradecimientos

A toda la comunidad academica de la Universidad Pedagógica, en especial a mis acompañantes de línea 2 la enseñanza de física y su relación física-matemática y al profesor Yecid Cruz por su asesoría.

Dedicatoria

A mis padres y hermana, sin su apoyo no podría haberlo logrado.

Resumen

En el presente trabajo se realiza una reconstrucción de tres modelos matemáticos que son el Newtoniano, partiendo del desarrollo de las ecuaciones de Newton, el de la relatividad general con la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein. La solución de Schwarzschild y la Aproximación Post-Newtoniana de potenciales gravitacionales la cual busca linealizar las ya nombradas ecuaciones de campo Einstein, con el fin de encontrar la solución al problema de los dos cuerpos, se usa como base la anomalía de la precesión de la órbita de Mercurio, la cual resulta fundamental debido que fue la piedra angular para revisar el modelo Newtoniano, además se revisa cómo fue planteada la solución en cada modelo, se encuentran las similitudes y diferencias entre ellos, finalmente se exhibe una tabla de resultados con los valores de las precesiones teóricas para seis cuerpos celestes los cuales son Mercurio, Venus, Tierra, Ícarus, Apofis y (410777) 2009 FD, estos tres últimos elegidos debido a que sus órbitas se intersectan con la de la Tierra, una descripción de las posibles órbitas que puede tener un cuerpo de prueba en diferentes radios de Schwarzschild y un programa en Excel que permite determinar la precesión de cualquier cuerpo celeste en el sistema solar.

Índice general

1. El problema de los dos cuerpos en la mecánica clásica	10
1.1. El problema de los dos cuerpos	10
1.2. Planteamiento del problema en mecánica clásica	12
1.2.1. Masa reducida	13
1.2.2. El problema de Kepler	15
1.2.3. El movimiento de un cuerpo en un campo central	15
1.2.4. Solución del problema de Kepler	19
2. Relatividad general y una nueva concepción del movimiento	24
2.1. Principio de equivalencia	26
2.1.1. Formulación del principio de equivalencia	27
2.2. Minimizando la acción, la curva geodésica	27
2.2.1. Encontrando la geodésica	28
2.3. La métrica de Schwarzschild	30
2.3.1. Las magnitudes conservadas, los vectores de Killing	30
2.3.2. Las órbitas de Schwarzschild, la solución al problema de los dos cuerpos	35
2.3.3. Análisis de los potenciales	37
2.3.4. Encontrado la precesión de las órbitas de Schwarzschild	40
3. Más allá de la relatividad general, la aproximación Post-Newtoniana	43
3.1. Acercamiento de la mecánica clásica a la relatividad general	43
3.2. Aproximación Post-Newtoniana (APN)	45
3.2.1. APN en las ecuaciones de campo de Einstein	47

3.2.2. Aplicación de la APN precesión del perihelio	51
3.3. Comparación entre los modelos	56
3.4. Medidas comparativas	58
3.5. Las órbitas en términos del radio de Schwarzschild	59
3.6. Programa medidor de precesiones	61
4. Conclusiones	62
Anexos	65
A. Relación entre el tiempo coordinado y el tiempo propio	66
B. Deducción de la precesión en la métrica de Schwarzschild	68
C. Deducción del valor de la aceleración	72
D. Deducción del valor de los símbolos de Christoffel	74
E. Datos extras utilizados en el cálculo de las precesiones	77

Planteamiento del problema

Durante mis estudios realizados en la licenciatura en física en la Universidad Pedagógica Nacional, pude evidenciar cómo los problemas de movimiento celeste rara vez son profundizados, con base en esto y para una mejor formación como docente en física, realizo esta investigación de tipo monográfico con eje temático fundamentado en el problema de los dos cuerpos el cual es de suma importancia cuando se habla de mecánica celeste.

En el problema de los dos cuerpos se ejecuta la formalización de tres modelos de movimiento celeste; el clásico (Newton), el relativista (solución de Swarzschild) y la aproximación Post-Newtoniana (APN), sustentando que formalizar no solo es el acto de describir el modelo matemático sino que entender la discusión física que hay detrás de cada uno de los modelos.

Es necesario recalcar que esta investigación tiene un carácter de tipo metacognitivo, entendiendo la metacognición cómo el proceso de aprendizaje en el cual un individuo es capaz de identificar cómo logra su proceso y meta de aprendizaje y su alcance en este proceso. Determina si el estudiante es capaz de regular su conocimiento partiendo de sus destrezas, reconociendo e interiorizando los saberes adquiridos Flavell, (1979)[4].

Objetivos

Objetivo General

Realizar un análisis teórico de la solución del problema de los dos cuerpos en la mecánica clásica (a partir de las leyes de Newton), la relatividad general (específicamente en la solución de Schwarzschild) y la aproximación Post-Newtoniana.

Objetivos Específicos

- Identificar las características, diferencias y similitudes entre los distintos modelos.
- Describir como se concibe el movimiento a partir de cada modelo.
- Hacer la formalización de cada uno de los modelos.

Introducción

Desde tiempos remotos el hombre ha visto hacia el firmamento y quedado fascinado con los cuerpos celestes que alcanza a divisar, por consecuente, no es de extrañarse que en la antigüedad y aun ahora exista gente que crea que estos influyen de alguna forma en su vida diaria, más allá de esa discusión, es un hecho que grandes pensadores buscaron dar respuesta al movimiento aparente de los cuerpos del sistema solar alrededor de la tierra por así decirlo, uno de estos fue Tolomeo que aproximadamente en el siglo II d.C. propone un modelo de universo en donde la tierra estaba en el centro de este y los demás cuerpos se movían en orbitas circulares con respecto a esta, arrastrados por una esfera llamada "primum mobile", además que, las estrellas estaban fijas en el firmamento en una esfera "lo que se conocería como bóveda celeste", pero por sí solo este sistema no era suficiente para explicar fenómenos como el movimiento retrogrado de los planetas, una trayectoria que describen los mismos dado la impresión de que en ciertas ocasiones del año se movían en dirección opuesta al que seguía normalmente y luego retomaba su dirección original, para esto Tolomeo propone que aparte del movimiento producto del "primum mobile" los planteas también están girando en orbitas circulares con respecto a su propia orbita que circula con respecto a la tierra.

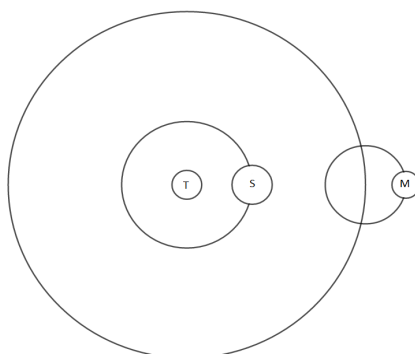


Figura 1: Modelo Tolomeico. Fuente propia

El modelo tolomeico también llamado el modelo geocéntrico no tendría grandes contradictores en la historia, pero a pesar de esto también hubo otros modelos, uno de estos fue el primer modelo heliocéntrico propuesto por Aristarco de Samos alrededor del mismo siglo que el de Tolomeo, en éste el centro del universo era el Sol y los planetas giraban alrededor de éste, a pesar de ser un poco más exacto que el de geocentrismo este modelo no sería muy bien visto por los pensadores y quedaría relegado en la historia Guerrero, (2004)[5].

En el siglo XVI en pleno renacimiento se publicaría post-mortem la obra del alemán Nicolás Copérnico “De revolutionibus orbium coelestium” en donde se postulaba que el Sol era el centro del sistema, además del hecho de que las estrellas ya no se encuentran fijas en el firmamento y no orbitan al sol, este modelo sería rechazado en un principio por la comunidad eclesiástica al considerarla como una herejía, dado que, la creación debería de tener una posición privilegiada en el universo según la misma Nieto, (1996)[9], no obstante, el trabajo realizado por Copérnico se podría tomar como catalizador para investigaciones posteriores como el trabajo de realizado por Galileo, este iría más allá dando una serie de pruebas a esta afirmación como lo sería las fases de Venus que similar a la luna presenta un cambio en la figura que se forma al verla y lo cual es completamente imposible de explicar con el modelo de Tolomeo. El trabajo de Johannes Kepler se vería fundamentado por las observaciones de Galileo.

Capítulo 1

El problema de los dos cuerpos en la mecánica clásica

1.1. El problema de los dos cuerpos

El problema de los dos cuerpos consiste en el estudio de la interacción entre los mismo, dicha interacción puede ser de carácter gravitatorio o eléctrico, cabe la aclaración que los cuerpos encuentran aislados, es decir que la influencia gravitacional debida a otro objeto debe de ser despreciada si es posible. Este problema ha sido uno de los más estudiado no solo por su grado de simplicidad, sino que además por tener una solución analítica, con el mismo se puede resolver problemas de mecánica celeste ¹ tanto como de problemas cuánticos, un claro ejemplo de esto es la solución de los átomos hidrogenoides ².

En el siglo XVII Johannes Kepler basado en las observaciones realizadas por

¹Cómo la precesión los planetas al orbitar al Sol (es más notoria en Mercurio al estar tan cerca de este)

²Son los átomos que estan compuesto por un nucleo y exclusivamente un electrón, al estar estos compuestos por un núcleo muy masivo en comparación al electrón que lo está “orbitando”, este es el caso más simple del problema de los dos cuerpos

Tycho Brahe da a conocer sus famosas leyes, en la primera postula que la trayectoria por la que se mueven los planetas alrededor del Sol es una elipse, con éste en uno de sus focos. Aunque sus esfuerzos para encontrar las ecuaciones de trayectoria fueron infructíferos, éstas serían determinadas Newton, el cual usando su ley de atracción gravitacional universal las obtendría, además de dar una solución particular del problema de los dos cuerpos, en un principio su teoría sería atacada y cuestionada fuertemente por el hecho de basarse en una interacción sin contacto, lo que más tarde se denominaría como la acción a distancia, aunque con el tiempo se establecería como una de las principales bases en el estudio del movimiento de los cuerpos celestes, gracias a esta los matemáticos Le Verrier y Couch (1845) con el fin de calcular la trayectoria de Urano el cual presentaba una irregularidad en su órbita matemáticamente añadieron un nuevo planeta, el cual debido a su influencia gravitacional explicaría dicha irregularidad (Molina, 2017)[7], efectivamente un año después el astrónomo Gottfried observaría por primera vez a Neptuno, una de las pruebas más potente de la eficacia del teoría Newtoniana, más sin embargo, el mismo Le Verrier posteriormente realizaría las observaciones del planeta Mercurio encontrando una discrepancia entre la observación y la teoría, por así decir, la trayectoria que describe Mercurio está rotando y esto es lo que se llama la precesión del perihelio, al principio se pensó que existía un cuerpo celeste no descubierto que hacía que su trayectoria no fuera la que se encontraba con los cálculos, aún más importante fue el descubrimiento de Newcomb, el cual fue que no solo Mercurio si no que Venus, la Tierra y Marte también presentaban la misma anomalía, ésto lo ponía claro la teoría newtoniana debía de ser revisada con el fin de dar solución a dichos problemas.

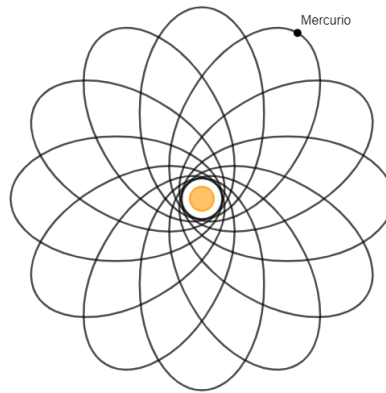


Figura 1.1: Precesión de mercurio. Fuente propia

1.2. Planteamiento del problema en mecánica clásica

Se debe hacer la consideración que dos cuerpos se encuentran interactuando gravitacionalmente y no están siendo sometidas a ninguna fuerza externa, ahora bien, estos tienen una masa m_A y m_B , además de considerarlas como puntuales, al hacer la idealización que están aisladas se puede decir las únicas fuerzas que se encuentran en el sistema serán la que A le ejerce a B y viceversa, por Tercera Ley de Newton $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$. Luego esto se procede a ubicar un marco de referencia inercial fuera de los dos cuerpos de tal modo que se posible encontrar unos radio vectores extienden desde dicho marco hasta cada uno de los cuerpos Figura 1.2. El desarrollo teórico exhibido en este capítulo esta basaso en lectura de (López, 2018)[6].

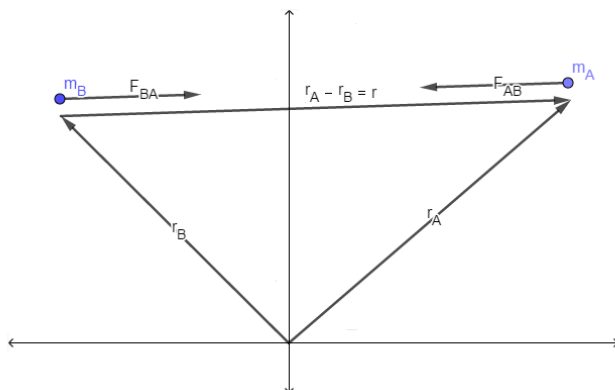


Figura 1.2: Diagrama de cuerpo libre del sistema. Fuente Propia

La fuerza a la que se ven sometidos los cuerpos es la fuerza de gravitación de tal forma que esta puede expresarse como

$$\vec{F}_g = \frac{Gm_A m_B}{r^2} \hat{r} = Gm_A m_B \frac{r}{r^3} \hat{r} \quad (1.1)$$

y a su vez, se puede reexpresar como

$$\vec{F}_g = Gm_A m_B \frac{r_A - r_B}{|r_A - r_B|^3} \hat{r} = \vec{F}_{AB}(r_A - r_B) = -\vec{F}_{BA} \quad (1.2)$$

Como se puede deducir la fuerza de atracción entre los cuerpos únicamente depende de las posiciones, lo cual es un producto de la interacción de carácter asilada, lo que quiere decir que para un sistema aislado lo único realmente importante es la posición relativa de los cuerpos.

1.2.1. Masa reducida

El movimiento de un sistema el cual se compone exclusivamente de dos cuerpos que se encuentran interactuando, es posible describirlo por una solución completa de la forma general. Para la solución de este problema primero se debe encontrar una forma en que se puede simplificar considerablemente, describiendo el movimiento del sistema con base al movimiento de su centro de inercia y el de sus puntos con respecto a este último.

Recordado que si es una fuerza conservativa, como es el caso el potencial del sistema, depende únicamente de la magnitud de r de tal manera que la fuerza y

el potencial quedan $\vec{F} = F(r)\hat{r} = -\nabla U(r)$ entonces el potencial gravitacional se puede expresar de la forma

$$u(r) = U(r_A, r_B) = U(|r_A - r_B|) = -\frac{Gm_A m_B}{r} \quad (1.3)$$

Como se puede observar el potencial de interacción entre los dos cuerpos depende de la distancia entre ellos y la masa de los mismo, es decir, del valor absoluto de la diferencia entre sus radio vectores. Por lo tanto, el Lagrangiano del sistema de este tipo es

$$\mathcal{L} = \frac{m_A \dot{r}_A^2}{2} + \frac{m_B \dot{r}_B^2}{2} - U(|r_A - r_B|) \quad (1.4)$$

Al tomar el marco de referencia inercial de la Figura 1.2 como punto origen de coordenadas el centro de inercia está ubicado en éste, por ende

$$m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B = 0 \quad (1.5)$$

De la última ecuación y conociendo la relación $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ Figura 1.2 es posible hallar los valores de \vec{r}_A y \vec{r}_B

$$\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{r} = \vec{r}_A; \quad \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{r} = \vec{r}_B \quad (1.6)$$

Al remplazar estas expresiones en 1.4 se obtiene que

$$\mathcal{L} = \frac{M \dot{r}^2}{2} - U(r) \quad (1.7)$$

en donde

$$M = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \quad (1.8)$$

El valor de M se denomina de masa reducida, al observar la ecuación 1.7 es evidente que coincide con la formulación de Lagrange de un punto material que solo tiene un grado de libertad y cuya masa m se mueve a lo largo de un campo exterior $U(r)$ con relación a un punto de origen fijo. Con este método el problema del movimiento de los dos cuerpos se reduce a resolver el problema del movimiento de un punto en un campo exterior $U(r)$. Como se quiere determinar ¿Cómo varia la posición con respecto al tiempo? se plantea una solución en la cual $\vec{r} = \vec{r}(t)$, con esto es posible describir las trayectorias de $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ y $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$ de cada uno de los cuerpos, en relación a su centro de inercia común, se obtienen separadamente gracias las expresión 1.6.

1.2.2. El problema de Kepler

Cuando se habla del problema de los dos cuerpos es casi imposible no referirse al problema de Kepler el cual resulta ser un caso especial de éste, en donde, la interacción de los cuerpos es debida a una fuerza central que como su mismo nombre lo dice, es una fuerza que actúa en una línea radial a un punto fijo (el centro de masa del sistema) y la magnitud de ésta únicamente depende de su coordenada radial, la fuerza puede ser tanto repulsiva como atractiva y cuya solución radica en encontrar la posición, la velocidad y/o su evolución temporal, conociendo las condiciones iniciales que en este caso resultan ser las masas, las posiciones y velocidades.

La importancia del problema de Kepler radica en su planteamiento, dado que por su formulación la energía potencial es inversamente proporcional a la distancia que separa los cuerpos y la fuerza a su vez es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, esto se puede traducir como un caso de campos centrales y como es sabido el campo gravitacional newtoniano hace parte de dichos campos, además que este tienen un carácter netamente atractivo, por ende, surge la necesidad de observar cómo se mueve un cuerpo inmerso en un campo central.

1.2.3. El movimiento de un cuerpo en un campo central

Gracias a que anteriormente se ha simplificado el problema de los dos cuerpos utilizando el centro de masa, ahora es posible determinar el movimiento de un cuerpo dentro de un campo exterior, en donde la energía potencial dependa únicamente de la distancia r a un punto fijo, el cual además debe permanecer inmóvil, con estas características es posible darse cuenta que dicho campo exterior es uno de tipo central, en donde la fuerza que actúa sobre el cuerpo se puede expresar

$$\vec{F} = \frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{dU}{dr} \vec{r} \quad (1.9)$$

Y su magnitud depende solo de r y esta varia con respecto a lo largo del radio vector.

Ahora bien, si el cuerpo está inmerso en el campo central el movimiento tiene lugar en este, entonces el momento del sistema se conserva con respecto al centro del campo, es decir, el momento angular \vec{L} de un cuerpo moviéndose en un campo central se conserva

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.10)$$

Sabiendo que los vectores \vec{p} y \vec{r} son perpendiculares entre sí en una órbita circular, es posible afirmar que \vec{L} es constante, lo que significa que el movimiento del cuerpo en el radio vector permanece siempre en el mismo plano, el cual es perpendicular a \vec{L} con lo que se puede concluir que el movimiento del cuerpo en el campo central es exclusivamente en el plano anteriormente mencionado y si se escribe el lagrangiano en función de coordenadas polares queda de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (1.11)$$

Realizando la derivada parcial de \mathcal{L} con respecto de φ , se puede ver que \mathcal{L} independiente a esta variable, por consecuente φ es despreciable de tal forma que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = mr^2\dot{\varphi} = cte = |L| \equiv |L_z| \quad (1.12)$$

Es importante recalcar el hecho de que $\dot{\varphi}$ según la expresión 1.12 jamás cambiara su signo, además, gracias a esta misma se puede concluir la ley de la conservación momento angular, para esta ley es posible encontrar una interpretación netamente geométrica, en donde, el área es formada por el barrido del desplazamiento infinitesimal del radio vector y como se puede ver en la Figura 1.3 es la aproximadamente igual a la de un triángulo (al ser un barrido infinitesimal) y está definida por la expresión $\frac{1}{2}r^2d\varphi$ renombrar la expresión por dA se puede reexpresar el momento angular del cuerpo.

$$\frac{1}{2}r^2d\varphi = dA; L = 2m\dot{A} = mr^2\dot{\varphi} \quad (1.13)$$

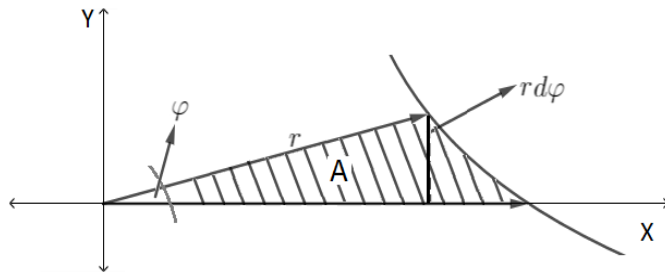


Figura 1.3: Representación geométrica. Fuente propia

En donde \dot{A} es la llamada velocidad areolar, por lo tanto, dicha velocidad se conserva, esto es exactamente lo que plantea Kepler en su segunda ley la cual postula, el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

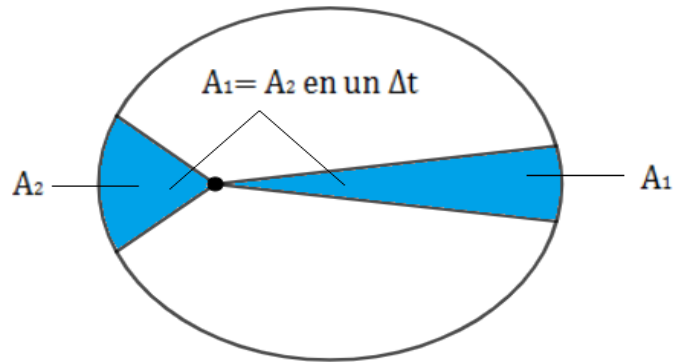


Figura 1.4: segunda ley de Kepler

Para encontrar la solución del movimiento de un cuerpo inmerso en un campo central se debe hacer uso de las leyes de la conservación del momento y la energía, a parte teniendo en cuenta la expresión encontrada en 1.12 es posible reescribir la expresión de la energía

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad (1.14)$$

De esta expresión se puede hallar \dot{r}

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \quad (1.15)$$

Separando variables e integrando

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \quad (1.16)$$

Al reexpresar la 1.12 es posible encontrar la expresión

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} \quad (1.17)$$

Al remplazar el valor hallado de dt encontrado 1.16 en 1.17

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{m^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (1.18)$$

Tanto las expresiones 1.16 y 1.18 brindan solución que describe el movimiento de un cuerpo inmerso en el campo central descrito anteriormente, 1.16 permite encontrar la distancia desde el centro al cuerpo en función del tiempo, además se puede evidenciar la relación entre φ y r que resulta ser la ecuación que permite describir la trayectoria del cuerpo.

Retomando a 1.14 es posible ver que está muestra la parte radial del movimiento, además que, como se ve al lado derecho de la igualdad este no depende de ningún ángulo, por consecuencia, este movimiento se puede tomar como lineal en un campo potencial de energía, este también es llamado potencial eficaz y se puede expresar como

$$U_{ef} = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (1.19)$$

En donde $\frac{L^2}{2mr^2}$ hace referencia a la energía centrífuga³, en referencia a r sus valores determinan los límites en donde tiene lugar el movimiento por la distancia con respecto al centro. Cuando se cumple que la suma de las energías potencial y centrífuga del sistema es igual a la energía total del mismo 1.20, la velocidad radial se anula.

$$U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E \quad (1.20)$$

³Debido a que la energía centrífuga está asociada con la distancia entre los cuerpos hace referencia a una energía potencial, la cual poseen todos que esten rotando.

A diferencia de un movimiento lineal el que se anule la velocidad radial no implica que el cuerpo en movimiento se detenga, dado que este mismo posee aun una velocidad angular la cual no ha sufrido ningún cambio, entonces es posible preguntarse ¿qué es lo que significa un $\dot{r} = 0$? Esto representa el punto de inflexión en donde la función $r(t)$ pasa de aumentar a disminuir y/o lo contrario. Dependiendo de la limitación de la variación de r es posible que el movimiento del cuerpo sea finito o infinito, si la variación de r está comprendida por la condición de $r \geq r_{min}$ el movimiento del cuerpo es infinito (su trayectoria estará descrita desde y hasta el infinito y r_{min} es la distancia más proxima entre los cuerpos, esto implica que el cuerpo tiene una trayectoria que vendrá desde y volverá al infinito), por otro lado si la variación está limitada por la condición $r = r_{min}$ y $r = r_{max}$ el movimiento es finito y estará dentro de los límites de un “anillo” que está limitado por las dos circunferencias, aunque esto no significa que la trayectoria descrita por el cuerpo sea necesariamente una curva cerrada.

1.2.4. Solución del problema de Kepler

Después de haber estudiado el movimiento de un cuerpo en un campo central es posible preguntarse por las características de la trayectoria, como lo puede ser las cerradas que resultan ser un caso especial, en el cual el ángulo $\Delta\varphi$ se puede expresar como un fracción racional de 2π de forma que

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{n_1}{n_2} \quad (1.21)$$

donde n_1 y n_2 son números enteros, n_1 hace referencia al número de vueltas dadas en un periodo de tiempo y n_2 es la cantidad de repeticiones de dicho periodo, por consiguiente (1.18) se puede reformular como

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{L}{m^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (1.22)$$

Pero para obtener una mayor información se debe de estudiar el potencial eficaz⁴ el cual es una gran herramienta para obtener la descripción de las trayectorias

⁴Recordando que el potencial U_{ef} efectivo es la suma del potencial $U(r)$ y la energía centrífuga $\frac{L^2}{2mr^2}$

en el potencial inicial $U(r)$, ahora bien, teniendo esto en cuenta se plantea un campo gravitacional de la forma

$$U(r) = -\frac{Gm_A m_B}{r} \quad (1.23)$$

De tal manera que se puede expresar el potencial eficaz como

$$U_{ef} = -\frac{Gm_A m_B}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (1.24)$$

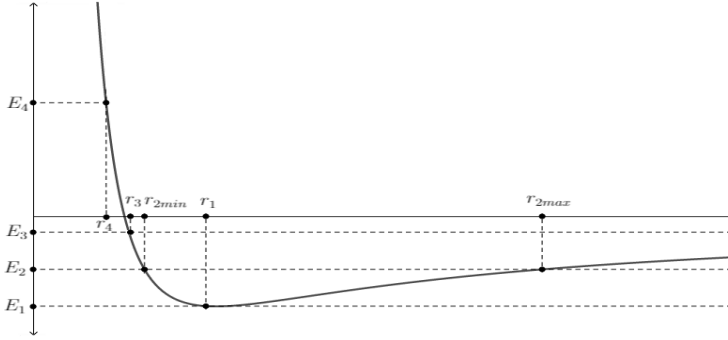


Figura 1.5: El movimiento del cuerpo en un campo potencial está limitado por las regiones en donde el potencial eficaz es menor o igual a la energía total del sistema. Fuente propia.

Para interpretar la Figura 1.5 es necesario recordar la expresión de la energía hallada en (1.14), donde se redujo el problema de dos dimensiones a una, de tal forma que la nueva expresión de la energía está dada por la función

$$E = \frac{m_B}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{Gm_A m_B}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{Gm_A m_B}{r} \quad (1.25)$$

Con esto en mente el primer punto de análisis es cuando el valor de la energía es igual a E_1 , como se puede ver en la gráfica $E_1 = U_{ef} = cte$, entonces, esto implica que existe un único valor de r que cumple con esta condición, por lo tanto $r = cte$ y al serlo implica que $\dot{r} = 0$ de tal forma que (1.25) se puede reexpresar

$$E = \frac{m_B r^2 \dot{\phi}^2}{2} - \frac{Gm_A m_B}{r} \quad (1.26)$$

despejando $\dot{\varphi}$ se obtiene que

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2(E + \frac{Gm_A m_B}{r})}{m_B r^2}} \quad (1.27)$$

Caso 1 E_1

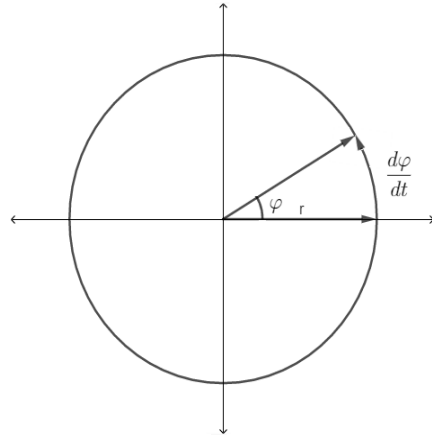


Figura 1.6: la velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$ está dada en $\frac{rad}{s}$

Como se puede apreciar en 1.27 del lado derecho es una constante, así que se puede afirmar que $\dot{\varphi} = cte^5$, al serlo se puede expresar como $\frac{d\varphi}{dt} = cte$ y como es sabido si se tiene una expresión de este tipo y agregando la condición de $r = cte$ resulta describiendo una trayectoria circular donde la constante a la que se iguala $\frac{d\varphi}{dt}$ es la velocidad angular con que se mueve el cuerpo y r la distancia entre los cuerpos.

⁵Estos se puede afirmar siempre y cuando el movimiento se produzca en un plano lo que garantiza un momento angular constante y por consecuencia una velocidad angular constante.

Caso 2 E_2

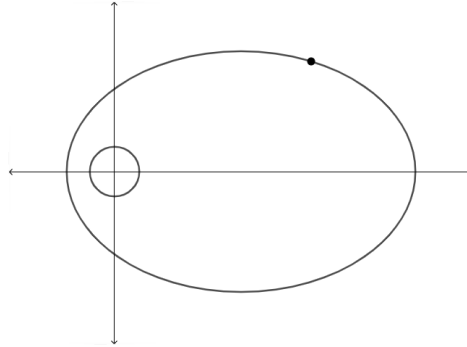


Figura 1.7: la velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$ esta dada en $\frac{rad}{s}$

Es posible notar en la Figura 1.5 que ahora r no permanece constante sino que varía a lo largo de dos puntos r_{2min} y r_{2max} lo que indica que la órbita ya no es circular, en este caso es de forma elíptica en donde r_1 es la distancia más proxima a la que se pueden encontrar los cuerpos y r_2 más lejana, es importante recalcar que estos dos puntos representan una cota en el movimiento, es decir, cuerpo orbitante no puede salir de dicha órbita.

Caso 3 E_3

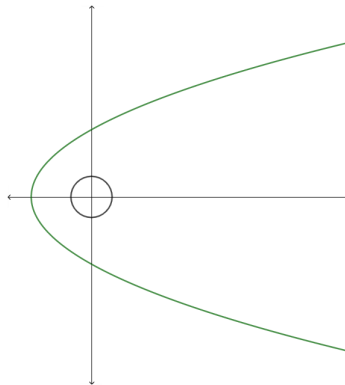


Figura 1.8: la velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$ esta dada en $\frac{rad}{s}$

En este caso aunque en la Figura 1.5 no se alcanza a divisar es posible encontrar dos distancias cotas, como en el caso anterior, pero la gran diferencia entre los casos 2 y 3 es la órbita tan alargada de este último, por dar una comparación con algo conocido el primero hace referencia a la trayectoria que describen cuerpos como los planetas y el segundo a la de los cometas.

Finalmente en el último caso en donde la energía es E_4 son los cuerpos que se acercan una sola vez al cuerpo orbitado y nunca vuelven.

Con base en todo lo anterior se puede concluir que en este modelo las interacciones son de caracter instantaneo, lo que va en contra de los postulados de la relatividad especial, además que no debería existir precesión alguna en el problema de los dos cuerpos, debido a que se trata de un sistema ligado dos cuerpos gracias a una fuerza, prueba suficiente para revisar la interpretación del problema de los dos cuerpos.

Capítulo 2

Relatividad general y una nueva concepción del movimiento

La relatividad general planteada por Einstein entre los años 1915 y 1916, es una generalización de la relatividad especial la cual no incluye los marcos acelerados, esto resulta fundamental en el planteamiento de respuestas imposibles para la mecánica clásica debido a que en esta se confunde lo que son los movimientos aparentes y los relativos, es decir, para esta si un cuerpo se encuentra en movimiento aparente con respecto a otro, uno de los dos cuerpos se mueve aparentemente y el otro se mueve realmente o los dos cuerpos se mueven realmente y en lo que a esta compete solo trata con movimientos reales y no aparentes, pero ¿qué sucede con los marcos acelerados? Para dar respuesta a esto es necesario realizar un experimento mental.

Una persona se encuentra dentro de un ascensor el cual esta en caída libre, dicha persona al estar cayendo con el ascensor experimenta una sensación de ingravidez (no tendría peso aparentemente), pero al dar una explicación a esto es necesario suponer la existencia “real” de la gravedad, dado que los movimientos aparentes son el resultado de los movimientos absolutos “reales”. Para la relatividad general en cambio, la explicación a los fenómenos gravitacionales

son debidos a un cambio de sistema de referencia, para la persona dentro del ascensor no existe un campo gravitacional, pero para otra por fuera del ascensor si existe dicho campo gravitacional.

“Estaba sentado en mi silla de la Oficina de Patentes de Berna cuando, de repente, tuve una idea: que si una persona está en caída libre, no siente su propio peso. Me quedé atónito. Esta simple experiencia imaginaria del pensamiento me produjo una gran impresión, y me llevó hacia una nueva teoría de la gravitación”

Con esta teoría se producen grandes cambios en la forma de ver y pensar el universo, concepciones como las de un espacio y tiempos no absolutos sino relativos, la descripción de un universo cuatri-dimensional en donde el espacio y el tiempo hacen parte de una combinación la cual se denomina como espacio-tiempo, el cual no es inmutable sino que depende de su contenido, es decir que este puede cambiar su forma dependiendo de la masa y energía de los objetos que estén ubicados en él (la deformación del espacio-tiempo) y es acá donde se genera el gran cambio al problema de los dos cuerpos con respecto a la formulación newtoniana, como ya se había mencionado esta dejaba de lado una pieza demasiado importante sin una posible respuesta (la acción a distancia), la relatividad general proporciona una respuesta a la causa del movimiento y la trayectoria que describen los cuerpos “El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse” Wheeler (1998). La relatividad general brinda grandes herramientas para la descripción de los problemas de orbitación, el claro ejemplo es la precesión del perihelio Mercurio, la cual describe a la perfección la trayectoria de dicho planeta, pero los estudios de esta teoría con respecto al problema de los dos cuerpos va más allá de Mercurio, un claro ejemplo de esto es el estudio realizado a la estrella Sagitario A, la cual después de casi 30 años de observación se pudo estimar su trayectoria ¹ y evidencian que esta debe de estar orbitando un agujero negro supermasivo de aproximadamente cuatro millones e veces la masa solar, al igual que Mercurio orbitando el sol, Sagitario A describe un trayectoria en forma en

¹Las observaciones fueron realizadas por Very Large Telescope (VLT)

roseta tal y como se predice con la relatividad general Abuter et al. , (2020)[1]. La descripción de la trayectoria de los cuerpos que orbitan a otros es posible gracias a las ecuaciones de campo formuladas por Einstein y por las soluciones de Schwarzschild, en donde este ultimo describe como la curvatura espacio-temporal producto de una masa esférica es comparable con un campo gravitacional y a su tratamiento matemático, por lo tanto, Schwarzschild representa una solución de vacío, para la región exterior al cuerpo esférico que produce el campo gravitatorio, en donde los cuerpos que se encuentran en dicho campo gravitacional se mueven por las denominadas geodésicas, las cuales no son más que las trayectorias que cumplen con el principio de mínima acción.

2.1. Principio de equivalencia

De una forma muy simplificada el principio de equivalencia hacer referencia a la semejanza de los marcos acelerados con los marcos en reposo, es importante recalcar que la T.R.G. es de carácter local debido al formulación de este principio, en donde es imposible diferenciar entre la acción de un campo gravitacional y la producida por una aceleración, si y solo sí, la región del espacio es muy pequeña y si el tiempo transcurrido es relativamente pequeño Figura 2.1; esto se debe a que los campos gravitacionales no son homogéneos, lo que corresponde a que las líneas de campo no son paralelas entre sí, además de que estas varían con respecto a la distancia que las separa del centro.

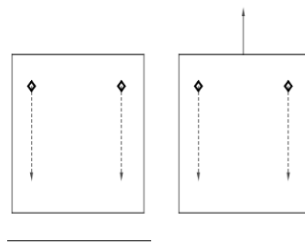


Figura 2.1: Igualdad entre un marco en un campo gravitacional y uno acelerado sin restricciones espaciales y temporales

2.1.1. Formulación del principio de equivalencia

Se tiene un sistema de referencia Σ_1 , en el cual existe un campo gravitacional por consecuencia todos los cuerpos caen con la misma aceleración $(-\gamma)$ sin importar la naturaleza física o química de los cuerpos, es equivalente a otro sistema de referencia Σ_2 el cual se encuentra uniformemente acelerado con respecto a Σ_1 con una aceleración en magnitud igual pero en dirección contraria, $(+\gamma)$ en una región del espacio en donde no exista ningún campo.

Los resultados de los experimentos realizados en Σ_1 no se diferencian a los resultados hallados en Σ_2

2.2. Minimizando la acción, la curva geodésica

La curva geodésica es la longitud mínima que une dos puntos en una superficie y es comparable a la línea recta en un plano. En mecánica clásica según las leyes de Newton los movimientos inerciales están limitados únicamente a los movimientos rectilíneos, ya que esta está basada en un espacio Euclídeo (un espacio plano) el cual es independiente al tiempo y estos son los dos grandes cambios que se originan a partir de la relatividad general, dado que en esta el espacio y el tiempo están entrelazados, lo que se conoce como el espacio-tiempo, además de no ser Euclídeo, permitiendo que los movimientos inerciales no estén limitados únicamente a líneas rectas, sino que esto depende de la geometría en la cual se está analizando el movimiento.²

Para encontrar la distancia mínima entre dos puntos, es necesario suponer una superficie en la cual están contenidas dos curvas S y S' que son infinitamente próximas entre sí, además de que deben conectar los puntos P_1 y P_2 , al tener estas características se garantiza tener una relación biunívoca entre los infinitos puntos que forman a S y S' , así que para cualquier punto P contenido en S le corresponde un punto P' contenido en S' , al elegir otro punto Q que pertenece a S e infinitamente próximo a P se encontrará su respectivo par Q' en S' . Bajo estas características se garantiza que $\overrightarrow{PP'}$ es paralelo a $\overrightarrow{QQ'}$, por consecuencia,

²Ejemplo: Si el movimiento tiene lugar en un espacio esférico la ruta inercial que describe un cuerpo será un segmento de circunferencia, pero si tiene lugar en un espacio plano dicha ruta será una línea recta

si se mueve el punto P a lo largo de S , $\overrightarrow{PP'}$ se desplazará paralelamente con respecto a si mismo y a su vez los segmentos de PP' , QQ' , ..., TT' ...) variarán su longitud a medida que el punto P se desplaza a lo largo de S , así pues, se puede considerar un vector \vec{A} , el cual está orientado en la misma dirección del segmento PP' y como es posible concluir el vector \vec{A} en los puntos P_1 y P_2 es nulo.

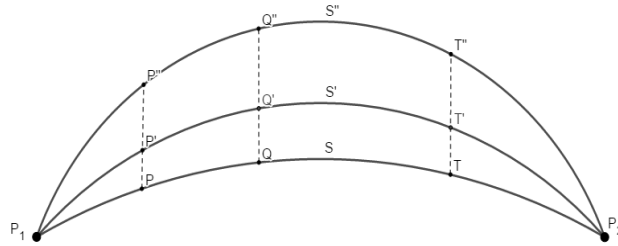


Figura 2.2: Familia de curvas entre P_1 y P_2

Teniendo en cuenta lo anteriormente enunciado, se puede ver que es posible describir la familia de curvas de S a lo largo del barrido del vector \vec{A} con respecto a S , siempre y cuando, lo esté multiplicando una constante cualquiera ε , así para, diferentes valores de ε se puede describir cualquier curva de dicha familia (S' , S'' , ...), también es posible ver que si se tiene un valor $\varepsilon = 0$ se obtiene la curva original S .

2.2.1. Encontrando la geodésica

Sea L la longitud de la curva S comprendida entre los puntos P_1 y P_2 y L' la longitud de otra curva S' entre lo mismos dos puntos, es posible percatarse de que el valor L' está en función de ε , de tal forma de que si $\varepsilon = 0$ se tendrá la igualdad $L = L'$, gracias a esto es posible realizar la expansión de L' en serie de Taylor, tal que:

$$L' = L + \varepsilon \left(\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 L'}{\partial \varepsilon^2} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \varepsilon^n \left(\frac{\partial^n L'}{\partial \varepsilon^n} \right) \quad (2.1)$$

Esta ecuación hace referencia a cualquier L y no es la longitud mínima, pero se puede suponer que en dicha expresión ya fue encontrada la longitud mínima L'

y que esta debe cumplir la relación $\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} = 0$, se obtiene que

$$\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \varepsilon^2} \right) + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \varepsilon^3} \right) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{n-1} \left(\frac{\partial^n L}{\partial \varepsilon^n} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Con lo anteriormente nombrado es sencillo notar que, cuando $L = L'$ significa que se tiene un $\varepsilon = 0$ Y si este se reemplaza en 2.2 se obtiene que

$$\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Den la expresión 2.1 se obtiene que

$$L' - L = \varepsilon \left(\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 L'}{\partial \varepsilon^2} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \varepsilon^n \left(\frac{\partial^n L'}{\partial \varepsilon^n} \right) \quad (2.4)$$

El primer término de la expresión 2.4 $\varepsilon \left(\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \right)$ se simboliza como δL

$$L' - L = \delta L + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 L'}{\partial \varepsilon^2} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \varepsilon^n \left(\frac{\partial^n L'}{\partial \varepsilon^n} \right) \quad (2.5)$$

Los términos de mayor orden es posible despreciarlos de tal modo que se obtiene la relación $L' - L = \delta L$ en la cual ya se sabe que $\delta L = \varepsilon \left(\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \right) = 0$, entonces se puede decir que $L' - L = \delta L = 0$, este último resultado muestra que de todas las infinitas curvas que pasan por los punto P_1 y P_2 existe una única curva que proporciona la menor longitud posible entre los puntos (geodésica), esto se logra hacer debido a despreciar los términos de orden superior en la expresión 2.5.

La geodésica también admite una representación en forma diferencial, para lo cual se debe hacer ciertas especificaciones empezando por nombrar con dS al diferencial de arco de una curva geodésica, además de un dS' que es el arco de otra curva diferente S' .

Para generalizar el concepto de geodésica en diferentes variedades es necesario plantear el segmento de línea en función de la métrica

$$s = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \quad (2.6)$$

haciendo uso de la condición de Euler, la cual exige que la integral de una función tenga un valor que sea un máximo o un mínimo (valor estacionario), entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0 \quad (2.7)$$

de 2.6 se puede obtener que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij}d\dot{x}^i d\dot{x}^j} \quad \dot{s} = F \quad s = \int \dot{s} dt \quad (2.8)$$

Remplazando las anteriores relaciones en la condición de valor estacionario se obtiene que

$$\ddot{x}^r - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \dot{x}^r + \Gamma_{ij}^r \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{d^2 x^r}{dt^2} - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \frac{d^2 x^r}{dt^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{d^2 x^j}{dt^2} \quad (2.9)$$

finalmente cambiando los parametros $s = t$, $\dot{s} = 1$ y $\ddot{s} = 0$ se obtiene

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{d^2 x^j}{dt^2} = 0 \quad (2.10)$$

esto indica que si esta condición se cumple se garantiza que un cuerpo que se mueva por una una geodésica en cualquier variedad, para el caso de un espacio Euclideo (plano) los simbolos de Christoffel son cero, lo que recupera un movimiento inercial $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$

2.3. La métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild es el resultado de una de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, donde se supone un espacio-tiempo curvo, dicha curvatura es producida por el efecto que tiene una masa sobre este, esta métrica se caracteriza por ser un caso especial en donde se supone un espacio vacío en donde hay un cuerpo esférico, estático y masivo, el cual va a ser quien deforme el espacio-tiempo y esta deformación será la causante del movimiento del cuerpo que esté orbitando al dicho cuerpo masivo.

2.3.1. Las magnitudes conservadas, los vectores de Killing

Para comenzar es necesario saber que significa una magnitud conservada y la mejor forma de hacerlo es con un ejemplo; suponga un objeto que se mueve a lo largo de una geodésica, toda magnitud que se mantenga invariante a lo largo del movimiento se considera como una magnitud conservada, conocerlas resulta ser muy útil dado que gracias a estas no resulta necesario solucionar las ecuaciones de la geodésica para encontrar la trayectoria que describe un cuerpo,

dado que estas pueden resultar con un grado alto de dificultad.

Para encontrar las magnitudes conservadas en el espacio-tiempo de Minkowski es necesario definir una cuadrivelocidad u^α 2.12 la cual es la derivada del elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowski 2.11 con respecto al tiempo propio $d\tau$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^{i2} \quad (2.11)$$

$$u = \frac{dx^0}{d\tau} e_0 + \frac{dx^1}{d\tau} e_1 + \frac{dx^2}{d\tau} e_2 + \frac{dx^3}{d\tau} e_3 = \frac{d}{d\tau} (x^\alpha) e_\alpha = u^\alpha e_\alpha \quad (2.12)$$

Una vez teniendo la cuadrivelocidad es posible preguntarse si existe una cuadrivelocidad, la cual resulta ser la derivada de u^α con respecto al tiempo propio

$$a = \frac{d}{d\tau} (u) = \frac{d}{d\tau} (x^\alpha) e_\alpha = \frac{d}{d\tau} (u^\alpha e_\alpha) \quad (2.13)$$

realizando la derivada da como resultado

$$a = \frac{du^\alpha}{d\tau} e_\alpha + u^\alpha \frac{de_\alpha}{d\tau} \quad (2.14)$$

para la expresión $\frac{de_\alpha}{d\tau}$ es necesario realizar la regla de la cadena de tal forma que $\frac{de_\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta}$, la expresión $\frac{dx^\beta}{d\tau}$ hace referencia a una cuadrivelocidad, esto resulta evidente después de realizar la comparación con 2.12, de tal forma que

$$\frac{de_\alpha}{d\tau} = u^\beta \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (2.15)$$

es importante recalcar que $\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta}$, hace referencia a la conexión por ende se puede reescribir de la forma que

$$u^\beta \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u^\beta e_\gamma \quad (2.16)$$

reemplazando la solución encontrada en 2.16 en 2.14 se obtiene que

$$a = \frac{du^\alpha}{d\tau} e_\alpha + u^\alpha \frac{de_\alpha}{d\tau} = \frac{du^\alpha}{d\tau} e_\alpha + u^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u^\beta e_\gamma \quad (2.17)$$

para este punto es posible ver que los índices γ y α de la conexión dado que estos son mudos por ende se puede renombrar de tal forma que

$$a = \frac{du^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha u^\gamma u^\beta e_\alpha \quad (2.18)$$

En este paso se puede factorizar e_α

$$a = \left(\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha u^\gamma u^\beta \right) e_\alpha \quad (2.19)$$

al recordar que el cuerpo se está moviendo por una geodésica es posible afirmar que ³

$$a = \left(\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha u^\gamma u^\beta \right) e_\alpha = 0 \quad (2.20)$$

En el tercer capítulo se abordará de una forma más extensa este resultado.

A lo largo de una geodésica el producto escalar entre el la cuadrivelocidad y un vector de Killing se mantiene constante, para hacer esta afirmación es necesario revisar cómo se comporta dicho producto en un tiempo que será el tiempo propio del cuerpo que se mueve, de esta manera se obtiene que

$$\frac{d}{d\tau}(u\xi) = \frac{du}{d\tau}\xi + u \frac{d\xi}{d\tau} \quad (2.21)$$

como ya se había descrito el producto $\frac{du}{d\tau}\xi$ es nulo debido a que no existe aceleración en una curva geodésica, para el segundo término $\frac{d\xi}{d\tau}$ es necesario aplicar regla de la cadena de tal forma que; $u \frac{d\xi}{d\tau} = u \frac{dx^\alpha}{d\tau} \partial_\alpha \xi$, pero recordado que $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ corresponde a la cuadrivelocidad de tal forma que reexpresando 2.21 queda

$$\frac{d}{d\tau}(u\xi) = uu^\alpha \partial_\alpha (\xi e_\beta) = uu^\alpha (\nabla_\alpha \xi^\beta) e_\beta \quad (2.22)$$

siendo ∇_α la derivada covariante del vector de Killing con respecto α .

Reescribiendo la cuadrivelocidad u en función de un vector base queda de la forma

$$\frac{d}{d\tau}(u\xi) = u^\gamma e_\gamma u^\alpha (\nabla_\alpha \xi^\beta) e_\beta \quad (2.23)$$

reorganizando los términos se encuentra que

$$u^\gamma u^\alpha \nabla_\alpha \xi^\beta e_\beta e_\gamma \quad (2.24)$$

Como se puede ver el producto de los vectores bases $e_\beta e_\gamma$ genera la métrica $g_{\beta\gamma}$ de tal forma que

$$u^\gamma u^\alpha \nabla_\alpha \xi^\beta g_{\beta\gamma} \quad (2.25)$$

sabiendo que la derivada covariante del tensor métrico $g_{\beta\gamma} = 0$, por propiedades de esta misma y además por contracción de índices se puede decir que

$$u^\gamma u^\alpha \nabla_\alpha \xi_\beta \quad (2.26)$$

³Recordado que es posible concluir esto debido a que la geodésica se trata de una trayectoria inercial en cualquier tipo de geometría por consiguiente $a = 0$

por propiedades de los tensores cuando se multiplica un tensor simétrico como es el caso de $u^\gamma u^\alpha$ por otro tensor que no es ni simétrico ni antisimétrico como es el caso de $\nabla_\alpha \xi_\beta$, solo sobrevive la parte simétrica de dicho tensor de la forma que

$$u^\gamma u^\alpha \nabla_\alpha \xi_\beta = \frac{1}{2} u^\gamma u^\alpha (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha) \quad (2.27)$$

En este caso se cumple que $\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$, ya con este resultado se puede afirmar que $\frac{d}{d\tau}(u\xi) = 0$, lo que indica que se puede encontrar una magnitud conservada siempre y cuando el cuerpo se esté moviendo por una geodésica de lo contrario esta cantidad no se conserva.

Ya sabiendo lo que es una magnitud conservada matemáticamente, es posible preguntarse ¿Qué propiedades físicas son las que cumplen con su conservación en el movimiento a lo largo de una geodésica? Para lo cual se puede partir de la ecuación de la cuadrivelocidad dado que anteriormente ya fue demostrado que se mantiene como una constante

$$u\xi = cte \quad (2.28)$$

por conveniencia el vector de Killing que se utiliza corresponde al vector base temporal en el espacio de Minkowski, tal que $\xi = e_0$, por lo tanto se puede formular 2.28

$$ue_0 = u^\alpha e_\alpha e_0 = -g_{\alpha 0} \quad (2.29)$$

Al estar en el espacio de Minkowski se sabe que la métrica es diagonal por lo cual, se tiene que el único componente que sobrevive de $g_{\alpha 0}$ es g_{00} , es decir, la componente temporal de dicho espacio, de tal forma ⁴

$$u^0 g_{00} = -c \frac{dt}{d\tau} = cte \quad (2.30)$$

Sabiendo que la relación entre $\frac{dt}{d\tau} = \gamma^5$ revisar anexo A, se puede reescribir

$$- \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = cte \quad (2.31)$$

⁴Recordando que u^0 es la derivada de la componente temporal con respecto al tiempo propio

⁵ γ hace referencia al factor de Lorentz $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en el espacio-tiempo de Minkowski

En este momento es posible preguntarse por el tipo de magnitud es la constante de 2.31, para ello se realiza una aproximación suponiendo velocidades bajas es decir $v \ll c$, gracias a la expansión serie de Taylor se puede responder esta pregunta, pero primero se nombra la función a la cual se hace dicha expansión, en este caso la función es $f\left(\frac{v}{c}\right)$, entonces

$$f\left(\frac{v}{c}\right) = c \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

realizando la primera y segunda derivada se obtiene que

$$f'\left(\frac{v}{c}\right) = \frac{c}{2} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{-2v}{c}\right) = \frac{v}{c} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} c \quad (2.33)$$

$$f''\left(\frac{v}{c}\right) = c \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{v}{c} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{5}{2}} \left(-2\frac{v}{c}\right) \quad (2.34)$$

recordando la aproximación en serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!} (x - x_0) \quad (2.35)$$

Reemplazando 2.33 y 2.34 en 2.35 se obtiene que

$$cte = c + \frac{1}{2} \frac{1}{c} v^2 \quad (2.36)$$

multiplicando esa constante de 2.36 por mc

$$mc(cte) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 \quad (2.37)$$

gracias a eso es posible determinar el carácter de la constante que sería

$$cte = \frac{E}{mc} \quad (2.38)$$

Por lo tanto cuando no se realizan la aproximación de velocidades bajas se obtiene que

$$u\xi = -\frac{E}{mc} \quad (2.39)$$

finalmente es posible encontrar lo que se conoce como el cuadrimomento de la partícula

$$u\xi = -\frac{E}{mc} \longrightarrow mu\xi = -\frac{E}{c} \longrightarrow P\xi = -\frac{E}{c} \quad (2.40)$$

2.3.2. Las órbitas de Schwarzschild, la solución al problema de los dos cuerpos

Para cualquier curso de relatividad general es más que necesario la enseñanza de la solución de Schwarzschild, la cual resulta de suma importancia al tratarse de la primera y más simple solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein, esta tiene como fundamento la geometría en el espacio-tiempo debido aun punto material estático y con simetría esférica. Debido a esto es posible decir que la solución de Schwarzschild se categorizada como una solución estática de vacío con simetría esférica, la cual en cordenadas polares cumple con:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.41)$$

Con el fin de simplificar la expresión se puede renombrar las constantes de tal modo que $\frac{2GM}{c^2} = a$, también se puede hacer la consideración de que el movimiento tiene lugar en un plano, lo que significa que $\theta = \frac{\pi}{2}$, simplificando aún más

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.42)$$

para simplificar aun más los cálculos se puede cambiar de coordenadas a unas nuevas que se llamarán coordenadas adimensionales que están en función de las anteriores y cumplen que $\hat{r} = \frac{r}{a}$, $\hat{t} = c \frac{t}{a}$ y $\hat{\phi} = c \frac{\phi}{a}$

$$d\hat{\tau}^2 = \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) c^2 d\hat{t}^2 - \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r}^2 - \hat{r}^2 d\hat{\phi}^2 \quad (2.43)$$

Dado que los coeficientes que acompañan a la métrica no tienen una dependencia temporal es posible ver que uno de los vectores de Killing que se pueden utilizar es $\xi = e_0$, lo mismo sucede con la parte angular de la métrica, de tal modo que se puede usar el vector $\xi = e_3$, con esto en mente se plantea el producto de los respectivos vectores de Killing con cuádrimomento $P^\mu \xi$, anteriormente ya se había deducido que para el Killing temporal $P^\mu \xi \rightarrow m \frac{dx^\mu}{d\tau} e_\mu \xi = -\frac{E}{c}$ 2.40, reemplazando en las coordenadas adimensionales se obtiene una relación entre estas y las coordenadas dimensionales

$$mc \frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{E}{c} \quad (2.44)$$

Debido a que ambas coordenadas tanto dimensionales como adimensionales realizan la misma operación es posible igualarlas

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{\tau}} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \quad (2.45)$$

Con esto es posible encontrar la expresión adimensional de la energía

$$\hat{E} = \frac{E}{mc^2} \quad (2.46)$$

Ahora es posible encontrar la relación entre el momento angular dimensional y el adimensionado como una analogía con la energía, nuevamente usando el cuadrimento, pero en este caso el Killing usado es la parte angular es decir $\xi = e_3$

$$m \frac{dx^3}{d\tau} e_3 e_3 = m \frac{d\phi}{d\tau} r^2 = L \quad (2.47)$$

Gracias a esto se puede encontrar la relación entre la variación del ángulo ϕ y el tiempo propio y esta relación está condicionada por el momento lineal del sistema

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{\left(\frac{a}{c}\right) \hat{\tau}} = \frac{L}{ma\hat{\tau}^2} \quad (2.48)$$

Con esto en cuenta se puede encontrar la relación entre el momento lineal dimensional y el adimensionado

$$\hat{L} = \frac{L}{mac} \quad (2.49)$$

En esta parte usarán unidades adimensionales las cuales se escriben de la misma forma que sus contrapartes dimensionales, de tal modo que al reemplazar 2.46 en 2.45 se obtiene 2.50 y 2.49 en 2.48 se obtiene 2.51

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)} \quad (2.50)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (2.51)$$

Al reemplazar 2.50 y 2.51 en la métrica adimensional 2.43 y didividiendo esta por $d\tau^2$

$$1 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.52)$$

Con el fin de realizar un análisis energético se reemplaza 2.50 y 2.51 en 2.52 con eso es posible encontrar una relación entre el momento lineal, la distancia entre los cuerpos y el tiempo propio del cuerpo que está orbitando al otro

$$E^2 - 1 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{r} - \frac{L^2}{r^3} \quad (2.53)$$

Retomando las constantes originales y nombrando una nueva constante como ε ⁶ se encuentra que

$$\varepsilon = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3} \quad (2.54)$$

llegados a este punto es imposible no notar la gran similitud entre la expresión de la energía encontrada de una manera clásica 1.25 y la relativista 2.54, las cuales solo difieren en el último factor $-\frac{GML^2}{mc^2r^3}$ de esta última, a su vez, es posible preguntarse por el potencial eficaz, el cual describe el movimiento del cuerpo, para ello se utiliza la expresión de la energía potencial de 2.53, la cual es

$$V(r) = \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{r} - \frac{L^2}{r^3} \quad (2.55)$$

de esta forma se puede describir la trayectoria del cuerpo y para hacerlo es necesario buscar los máximos y mínimos que puede tener el valor de r de la fórmula del potencial, los cuales son $r_{min} = L^2 + \sqrt{L^2 - 3}$ y $r_{max} = L^2 - \sqrt{L^2 - 3}$, una vez hallados es posible evidenciar la trayectoria en términos de L

2.3.3. Análisis de los potenciales

Dentro de las características que el potencial eficaz permite estudiar se encuentra la forma de las órbitas, ya que éste brinda información no sólo de la energía sino también de la distancia entre los cuerpos. Con base en esto es posible plantear cinco casos en los cuales se puede ver la diferencia entre los movimientos dependiendo de L^2 .

caso 1 $L^2 = 0$

Es posible notar que esto implica que 2.51 es igual a cero, es decir no se presenta ninguna velocidad angular con lo que se puede concluir que el cuerpo no está

⁶esta constante resulta ser $(E^2 - 1)mc^2$

orbitando, por el contrario se dirige en línea recta a estrellarse con el objeto más masivo.

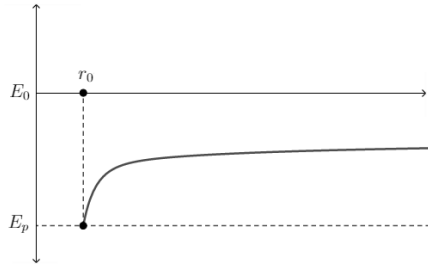


Figura 2.3: Energía en función del radio.
Fuente propia.

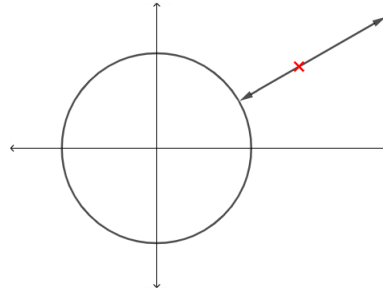


Figura 2.4: Caída libre debido a que no existe velocidad angular. Fuente propia.

caso 2 $L^2 = 3$

Como es posible ver el cuerpo posee una velocidad angular lo que garantiza que orbite, pero la suma entre las energías potencial y cinética da como resultado que se vaya acercando al cuerpo orbitado y termine cayendon en este último⁷

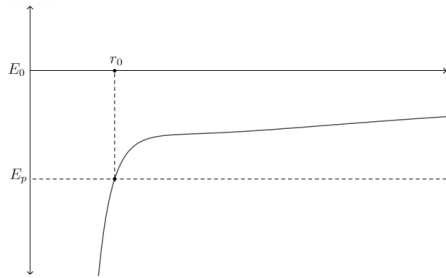


Figura 2.5: Energía en función del radio.
Fuente propia.

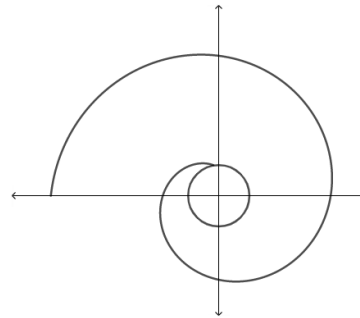


Figura 2.6: Caída con velocidad angular.
Fuente propia.

caso 3 $L^2 > 3$

Estes es el primer caso en el que se puede decir estrictamente que está orbitando, sin embargo estas tienen la peculiaridad de ser muy alargadas, por consiguiente,

⁷El tiempo que demore en caer depende de la distancia, que separe a los cuerpos

la distancia máxima entre los cuerpos es muy grande (este es el caso de las órbitas de los cometas).

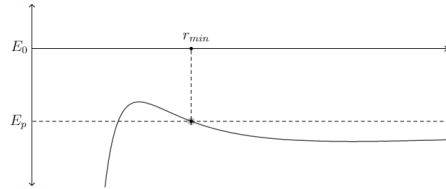


Figura 2.7: Energía en función del radio.

Fuente propia.

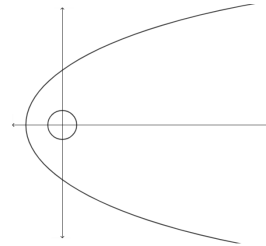


Figura 2.8: Órbitas de los cometas.

Fuente propia.

caso 4 $L^2 > 3$

Al igual que en la teoría Newtoniana es posible tener órbitas circulares, pero estas se denominan como inestables debido a que requieren que la suma de las energías sea una cantidad concreta haciendo que cualquier perturbación significativa la modifique.

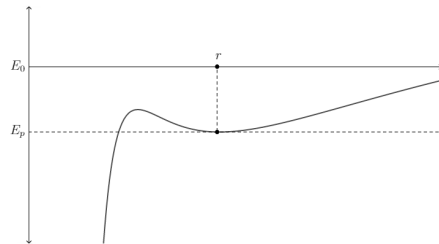


Figura 2.8: Energía en función del radio.

Fuente propia.

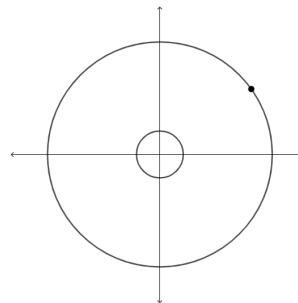


Figura 2.9: Órbitas circulares.

Fuente propia.

caso 5 $L^2 > 3$

Posiblemente el caso más relevante al ser la diferencia de la relatividad general con la teoría Newtoniana, esta última predice las órbitas elípticas pero estáticas (es decir, que se mantienen inmutables) pero en la relatividad estas precisan provocando esa figura similar a una rosa o roseta.

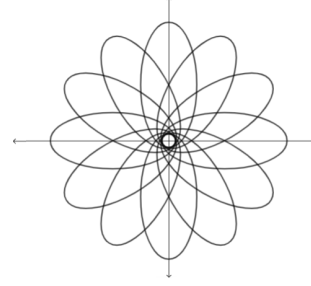
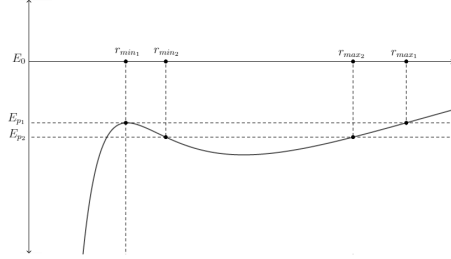


Figura 2.8: Energía en función del radio.. Fuente propia. Figura 2.9: Órbitas elípticas con precesión. Fuente propia.

2.3.4. Encontrado la precesión de las órbitas de Schwarzschild

La ecuación Euler-Lagrange puede describir una geodésica en cualquier variedad, la cual posee un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau} \quad (2.56)$$

Debido a que se está trabajando con la métrica de Schwarzschild el $g_{\mu\nu}$ es el de la misma, así que el lagrangiano se reescribe con base en 2.41

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = & - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ & + r^2 \left(\text{sen}^2 \phi \frac{d\phi^2}{d\tau^2} + \frac{d\phi^2}{d\tau^2} \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Recordando que $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ y al igual que en 2.42 se puede reescribir de tal forma más simple

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{a}{r} \right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \frac{d\phi^2}{d\tau^2} = -c^2 \quad (2.58)$$

En los caso de $\frac{dr^2}{d\tau^2}$ y $\frac{d\phi^2}{d\tau^2}$ están relacionados con el momento angular y la energía total del sistema y son constantes y debido a que el Lagrangiano no depende no

de t ni de ϕ se puede simplificar como

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{d}{d\tau} (2r^2 \dot{\phi}) = 0 & 2r^2 \dot{\phi} &= \Psi \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(-2 \left(1 - \frac{a}{r} \right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} \right) = 0 & -2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 \dot{t} &= -2c^2 \eta \\ & & \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) &= 2\eta\end{aligned}\tag{2.59}$$

Si se multiplica 2.58 por $\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{m}{2}$ (m es la masa de un partícula de prueba; es a la que se le analizá el movimiento)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} mc^2 \eta^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{m \Psi^2}{8r^2} &= \frac{1}{2} mc^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \\ \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{m \Psi^2}{8r^2} - \frac{GMm}{r} &= mc^2 \left(\frac{\eta^2 - 1}{2} \right)\end{aligned}\tag{2.60}$$

Por conveniencia se pueden redefinir de tal forma que al realizar las operaciones se puedan simplificar

$$\frac{\Psi^2}{4} = \frac{L^2}{m^2} \qquad \frac{\eta^2 - 1}{2} = \frac{E}{mc^2}$$

insertando las nuevas constantes en 2.60

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{L^2}{2m^2 r^2} - \frac{GMm}{r}\tag{2.61}$$

Como se puede observar los a excepción de $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$, son los mismos que el del potencial eficaz hallado en 2.54, esto implica que E es una constante de energía y para ser más exactos es la energía Newtoniana total del sistema (la suma entre la energía potencial y cinética)

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + m \Phi_{ef}\tag{2.62}$$

Gracias al proceso realizado en el Anexo B se puede encontrar la precesión y el radio de la partícula

$$r = \frac{\alpha}{1 + \cos((1 - \epsilon)\phi)}\tag{2.63}$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - e^2)}\tag{2.64}$$

Esta última fórmula es la usada para hallar la precesión de la orbita debido a la deformación del espacio-tiempo, radicando así la nueva interpretación al

movimiento de los cuerpo celestes. La principal falencia de este modelo está en su planteamiento debido a que propone un campo estático, lo que no va acorde a las observaciones debido a que estas apunta a que todo en el universo está girando, lo que indica que esta solución es un caso especial.

Capítulo 3

Más allá de la relatividad general, la aproximación Post-Newtoniana

3.1. Acercamiento de la mecánica clásica a la relatividad general

De acuerdo con el razonamiento teórico del capítulo anterior se describe el movimiento de los cuerpos bajo la influencia de un campo gravitacional central, en este caso lo que se pretende hacer es reexpresar las ecuaciones de campo de Einstein de tal forma que realizando la aproximación $v \ll c$ se pueda encontrar las correcciones relativistas a la teoría Newtoniana. Para empezar se deben de conectar las dos teorías lo cual resulta ser bastante sencillo, se debe de iniciar considerando un cuerpo que se mueve muy lentamente a lo largo de un campo gravitacional débil semejante al de Schwarzschild¹, debido a que el cuerpo se mueve muy lentamente se puede despreciar $\frac{dx}{dt}$ con respecto a $\frac{dt}{dt}$ por ende la

¹De simetría esférica y estática

ecuación de movimiento del cuerpo es

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (3.1)$$

Debido que el campo es de carácter estático (no varía con respecto al tiempo) es posible deducir que las derivadas temporales de 3.1 son igual a 0, entonces se puede encontrar que

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad (3.2)$$

a su vez como es un campo débil es posible plantear un sistema coordenado semejante al de Minkowski en donde

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (3.3)$$

en donde $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$, de tal modo que el primer orden de $h_{\alpha\beta}$

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \quad (3.4)$$

Operando con los símbolos de Christoffel

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} \quad (3.5)$$

Además de esta ecuación también se obtiene que $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$ lo que significa que $\frac{dt}{d\tau}$ es una constante, además se puede dividir 3.5 por $\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (3.6)$$

de acuerdo con el resultado clásico esta última ecuación permite encontrar el potencial gravitacional

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\nabla \phi \quad (3.7)$$

donde ϕ es equivalente a $-\frac{GM}{r}$, además si se compara 3.5 y 3.6 se puede concluir que

$$h_{00} = -2\phi + cte \quad (3.8)$$

Como el sistema de coordenadas se restringe a volverse minkowskiano, por consiguiente en el infinito tiende a cero y gracias a esto si $\phi = 0$ se puede concluir que la constante que lo acompaña en 3.8 es igual a cero, con esto ya es posible regresar a la métrica original de 3.3

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (3.9)$$

Ahora bien esta es la aproximación clásica a la relatividad general solo toma en cuenta los primeros términos, así que sólo se esta tomando una parte del tensor $g_{\mu\nu}$ y el tensor métrico minkowskiano $\eta_{\mu\nu}$. En este punto se puede que g_{00} se aproxima al orden del potencial clásico $\frac{GM}{r}$, en este caso es posible preguntarse por los demás órdenes como por ejemplo $\frac{GM}{r^2}$

3.2. Aproximación Post-Newtoniana (APN)

En este momento ya no se supondrá un solo cuerpo muy masivo y otro que lo esté orbitando, sino que ahora los cuerpos se atraen mutuamente y partiendo de esto en la mecánica clásica la energía cinética de un cuerpo es aproximadamente del mismo orden de magnitud que la energía potencial, sabiendo esto es posible hallar una relación entre el potencial y la velocidad del cuerpo que será

$$v^2 \approx \frac{GM}{r} \quad (3.10)$$

La APN permite encontrar el movimiento de órdenes superiores más allá de la mecánica clásica dado que en está el parametro del movimiento esta sujeto a v^2 , pero en la APN se puede parametrizar con los órdenes superiores y cuanto mayores sean más precisa es el resultado, para este caso el mayor orden será v^4 . Iniciando se plantea la ecuación de movimiento del sistema²

$$\frac{du}{d\tau} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} u^{\beta} u^{\gamma} = 0 \quad (3.11)$$

Mediante el cálculo de la aceleración realizado en el Anexo C es posible ver que

²Nótese que la ecuación de movimiento es exactamente la misma anteriormente hallada en 2.20, solo varia en la omisión de la escritura del vector unitario e_{α} para simplificar la escritura, lo mismo pasa con c la cual es tomada como 1

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{\partial_i g_{00}}{2} \quad (3.12)$$

$g_{00} = -\phi$ en donde ϕ es exactamente el mismo potencial gravitacional newtoniano y es a este al cual se le pretende realizar las correcciones relativistas

$$-\frac{\partial_i}{2}(1 + 2\phi) = -\partial_i \phi \quad (3.13)$$

para este punto es imposible de ver la diferencia entre los dos potenciales, pero acá precisamente es donde se diferencia con las correcciones desarrollables en potencias de v^2

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{00}^{(0)} + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + \dots + g_{00}^{(2n)} \\ g_{0i} &= g_{0i}^{(1)} + g_{0i}^{(3)} + g_{0i}^{(5)} + \dots + g_{0i}^{(2n-1)} \\ g_{ij} &= g_{ij}^{(0)} + g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(4)} + \dots + g_{ij}^{(2n)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

cada componente de la métrica posee una infinita suma de aportes de potenciales gravitacionales, los cuales depende de su orden de magnitud, en este caso los más relevantes son los primeros tres órdenes de g_{00} y el primero de g_{0i} y g_{ij} ³, para mayor comodidad en la escritura $-\phi$ es nombrado como u , de esta forma se puede reescribir los aportes potenciales como

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2u}{c^2} - \frac{2(\psi - u^2)}{c^4} \\ g_{ij} &= -\delta_{ij} \left(1 + \frac{2u}{c^2} \right) \\ g_{0i} &= \frac{4u_i}{c^3} \end{aligned} \quad (3.15)$$

gracias a la deducción realizada en el Anexo D es posible saber los valores de los símbolos de Christoffel, estos son necesarios para realizar la corrección de la APN al potencial clásico

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{2} \partial_t u \\ \Gamma_{0i}^0 &= -\frac{1}{2} \partial_t u \end{aligned}$$

³Esto se debe a que los los órdenes superiores están en términos de $\frac{1}{c^5}$ los cuales son tan significativamente pequeños que sus aportes son prácticamente irrelevantes

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2}\partial_j u_i + \partial_t u_i + \frac{1}{2}\delta_{ij}u\partial_j u \\
\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}(\partial_t u\delta_{ij} + \partial_t u_j - \partial_j u_i) \\
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}(\partial_k u_j + \partial_j u_i - \partial_i u_k)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Mediante la suma de los símbolos de Christoffel, que son los aportes de potenciales gravitacionales de orden de $\frac{1}{c}$ hasta $\frac{1}{c^4}$ es posible encontrar la primera corrección de la APN al potencial gravitacional clásico y se puede expresar como

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \phi + \frac{1}{2}\eta^i \tag{3.17}$$

donde η^i

$$\eta^i = 4\partial_t u_i + \partial_i \psi - 4\phi\partial + 3u_i\partial_t\phi + 3\mathbf{v}^2(\partial_i u_j - \partial_j u_i) + 4\mathbf{v}^i\mathbf{v}^j\partial_j\phi - \partial_i\phi\mathbf{v}^2 \tag{3.18}$$

En la siguiente sección esta misma perturbación esta escrita de una forma en donde se ve clara su aporte en movimiento en un campo central η

3.2.1. APN en las ecuaciones de campo de Einstein

Una vez hecha la corrección en el potencial gravitacional es necesario integrar el resultado a las ecuaciones de campo de Einstein con el fin de encontrar una nueva corrección que a posteriori permitan encontrar el movimiento que describen los cuerpos, para esto es necesario recordar que en la teoría clásica se obtiene un resultado en la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho^4$, por lo que es esperable encontrar una relación semejante. Planteando las ecuaciones de campo

$$R^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \tag{3.19}$$

Multiplicando en los dos lados de la igualdad por $g^{\mu\nu}$

$$R - \frac{1}{4}R = -RT_{\mu\nu} \tag{3.20}$$

donde $R = -\frac{8\pi G}{c^4}$, con esto se encuentra el tensor de Ricci y puede ser expresado como

⁴Esta ecuación permite describir el comportamiento no solo de los campos electromagnéticos y gravitacionales, sino que también el comportamiento de un fluido ideal, es pertinente en este caso debido a la modelación del universo como fluido perfecto de la relatividad general

Por definición el tensor momento-energía y haciendo las consideraciones de campo débil se $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu = \rho_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = -R \left(\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (3.21)$$

Debido a la condición de campo débil la única componente de $T^{\mu\nu}$ que sobrevive es T^{00} entonces se puede concluir que $T = \rho c^2$

$$R_{\mu\nu} = -R \left(\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \rho c^2 \right) \quad (3.22)$$

Suponiendo que se perturba la métrica al igual que 3.3 se reescribe en términos de esta

$$R_{\mu\nu} = -R \left(\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \rho c^2 \right) \quad (3.23)$$

Como la perturbación es muy pequeña tal que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ se puede recuperar la métrica de Minkowski con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \approx 1$, además a la hacer la aproximación de velocidades bajas se obtiene que $\rho_{\mu\nu} = \rho c^2$ de esta forma da como resultado

$$R_{00} = -R \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right) = -\frac{1}{2} R \rho c^2 \quad (3.24)$$

Por definición el tensor de Ricci se escribe como

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \quad (3.25)$$

como ya se sabe que la única componente que sobrevive es R_{00} los términos $\Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda$ al estar en una variedad cuasi-plana pueden ser despreciados debido a que tienden a cero y el $\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha}$ suponiendo un campo estacionario también es igual a cero por lo que queda como

$$R_{00} = -\frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (3.26)$$

donde

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda} \quad (3.27)$$

por lo que R_{00} queda como

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (3.28)$$

ahora si se igualan las 3.24 y 3.28 y se toma en cuenta la relación $h_{00} = -2\phi/c^2$ se obtiene que

$$-R\frac{1}{2}\rho c^2 = -\frac{1}{2c^2}\nabla^2 2\phi \quad (3.29)$$

finalmente retomando las constantes originales de R se obtiene que

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \quad (3.30)$$

retomando la ecuación de Poisson clásica.

Como se describió el desarrollo es para un campo estático lo cual implica un caso particular, pero mediante este desarrollo es posible suponer un campo no estático para lo cual el término ρ en 3.30 debe de sustituirse por $T^{\mu\nu}$ debido a que ya que existe un nuevo aporte en el tensor momento-energía por lo que 3.30 se define ahora como

$$\nabla^2 \phi = 4\pi GT^{\mu\nu} \quad (3.31)$$

En las ecuaciones de campo de Einstein también es posible realizar una expansión de los campos gravitacionales semejante a la 3.14, tal que

$$\begin{aligned} T^{00} &= T^{00(0)} + T^{00(2)} + T^{00(4)} + \dots + T^{00(2n)} \\ T^{0i} &= T^{0i(3)} + T^{0i(5)} + T^{0i(7)} + \dots + T^{0i(2n-1)} \\ T^{ij} &= T^{ij(0)} + T^{ij(2)} + T^{ij(4)} + \dots + T^{ij(2n)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Las componentes $T^{00(0)}$ es la densidad de masa en reposo, $T^{00(2)}$ es la parte no relativista de la densidad de energía no relativista, $T^{i0(0)}$ es la componente de la energía espacio temporal y $T^{ij(2)}$ es la componete espacial.

Recordando que el tensor de Ricci 3.25 tiene nuevos símbolos que no desaparecen debido a la rotación del cuerpo produciendo un campo rotacional es necesario hallarlos para encontrar los nuevos componentes de la métrica, este proceso es análogo al hecho en el Anexo D y con este se obtiene las siguientes ecuaciones diferenciales (las componentes de la métrica en términos del tensor de Ricci)

$$\begin{aligned} R_{00}^{(2)} &= \nabla^2 g_{00}^{(2)} \\ R_{ij}^{(2)} &= \nabla^2 g_{ij}^{(2)} \\ R_{0i}^{(3)} &= \nabla^2 g_{i0}^{(3)} \\ R_{00}^{(4)} &= \nabla^2 g_{00}^{(4)} - \frac{1}{2}g_{ij}^{(2)}\nabla^2 g_{00}^{(2)} - \frac{1}{2}(\nabla^2 g_{00}^{(2)})^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Despreciando las consideraciones que se hicieron en 3.21 y escribiendolas en su forma general

$$R_{\mu\nu} = -R \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (3.34)$$

Remplazando las ecuaciones encontradas en 3.33 en las ecuaciones de campo de 3.34 se obtiene que

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_{00}^{(2)} &= -\frac{8\pi G}{c^2} T^{00(0)} \\ \nabla^2 g_{00}^{(2)} &= -\frac{8\pi G}{c^2} \delta_{ij} T^{00(0)} \\ \nabla^2 g_{00}^{(2)} &= \frac{16\pi G}{c^2} T^{0i(1)} \\ \nabla^2 g_{00}^{(2)} &= \partial_0 g_{00}^{(0)} + g_{ij}^{(2)} \partial_{ij} R_{ij}^{(2)} - \partial_i g_{00}^{(2)} \partial_i R_{ij}^{(2)} - \frac{8\pi G}{c^2} (T^{00(2)} + T^{ii(2)} - 2g_{00}^{(2)} T^{00(0)}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

haciendo la suposición que la perturbación en el infinito es cero se puede concluir que

$$g_{00}^{(2)} = -2\phi \quad (3.36)$$

$$g_{ij}^{(2)} = -2\delta_{ij}\phi \quad (3.37)$$

en este punto es importante recalcar que mediante 3.36 se obtiene nuevamente la ecuación Poisson de forma natural para el potencial Newtoniano, pero reescrito con base en el tensor momento-energía de orden (0)

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G T^{00(0)} \quad (3.38)$$

en donde a partir de la relación de 3.33 se puede encontrar el valor de ϕ como

$$\phi(t, \mathbf{r}) = -\frac{G}{c^4} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} T^{00(0)}(r') d^3 r' \quad (3.39)$$

de 3.33 también se pueden encontrar las demás componentes tal que

$$g_{0i}^{(3)} = \zeta \quad (3.40)$$

donde ζ es un nuevo aporte potencial debido al giro del cuerpo orbitado, el cual también desaparece en el infinito y es posible hallarlo como

$$\zeta(t, \mathbf{r}) = -G \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} T^{i0(1)}(r') d^4 r' \quad (3.41)$$

Para encontrar el ultima componente de la métrica $g_{00}^{(4)}$ es necesario usar 3.34 y 3.36 para ser remplazados en 3.33 sando como resultado

$$\nabla^2 g_{00}^{(4)} = 2\nabla^2 \phi - 2 \left(\frac{\partial \phi}{(\partial x^0)^2} + \frac{8\pi G}{c^4} (T^{00(2)} + T^{ii(2)}) \right) \quad (3.42)$$

donde $\nabla^2 g_{00}^{(4)} = \delta^{ij} \partial_{ij} g_{00}^{(4)}$, esto sugiere la existencia de dos potenciales tales que

$$g_{00}^{(4)} = -2(\phi^2 + \psi) \quad (3.43)$$

observando 3.42 y 3.43 se concluye que la forma de este nuevo potencial ψ esta descrita bajo la condición de

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial \phi}{x^0} + \frac{8\pi G}{c^4} (T^{00(2)} + T^{ii(2)}) \quad (3.44)$$

el nuevo potencial ψ debe cumplir con la condición de que en el infinito su aporte es nulo infinito

$$\psi(t, \mathbf{r}) = - \int \frac{1}{\mathbf{r} - \mathbf{r}'} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{(\partial x^0)^2} + \frac{G}{c^4} (T^{00(2)}(t, \mathbf{r}') + T^{ii(2)}(t, \mathbf{r}')) \right) d^3 r' \quad (3.45)$$

3.2.2. Aplicación de la APN precesión del perihelio

El caso con el que se inicio la discusión del problema de los dos cuerpos es la anomalía de la precesión de Mercurio, entonces resulta ser la adecuado para poner a prueba la APN buscando dar solución a esta, para esto es tomado en cuenta los otros planetas, la rotación solar, el achatamiento solar, etc. Esta parte esta apoyada en el desarrollo realizado en Weinberg (1972)[13].

Planteando el potencial responsable a la componente g_{00} se obtienen que $\phi + \psi$, es importante recalcar que esto se debe a la simetría esférica debida al sol, entonces

$$\phi + \psi = -\frac{GM_{\odot}}{r} + \epsilon(r, t) \quad (3.46)$$

en la expresión de $\epsilon(r, t)$ estan implícitamente los potenciales clásicos de los demás planetas, además de términos de mayor orden en la contribución solar superiores $\phi + \psi$. La ecuación de movimiento de una partícula puntual es entonces

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3} + \eta + O(v^6) \quad (3.47)$$

en donde es una pequeña perturbación en la métrica η y está descrita cómo:

$$\eta = -\nabla(\epsilon + 2\phi^2) - \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) + 3\mathbf{v} \frac{\partial\phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi - \mathbf{v}^2 \nabla\phi \quad (3.48)$$

Debido a que la interacción gravitacional es mutua es necesario usar el vector de Laplace-Runge-Lenz de tal forma que

$$\mathbf{A} = -M_{\odot}G \frac{\mathbf{r}}{r} + (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \quad (3.49)$$

Cuando no existe la perturbación η en la ecuación 3.46 se obtienen las ecuaciones

$$r = \frac{L}{1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)} \quad (3.50)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{LM_{\odot}G}}{r^2} \quad (3.51)$$

$$\frac{dr}{dt} = e\sqrt{\frac{M_{\odot}G}{L}} \text{sen}(\varphi - \varphi_0) \quad (3.52)$$

donde e es la excentricidad y L el semilatus rectum, también se toma la órbita en el plano $\phi = \frac{\phi}{2}$, con el perihelio en un ángulo azimutal ϕ_0 , entonces h es un vector constante perpendicular a la órbita y con magnitud

$$|h| = \sqrt{LM_{\odot}G} \quad (3.53)$$

Debido a que el vector vector de Laplace-Runge-Lenz es constante y siempre apunta al perihelio, se puede ver que si el perihelio precesa en un tiempo determinado por cualquier posible perturbación implica un cambio del vector unitario de \mathbf{A} con respecto al tiempo al lo largo una dirección perpendicular tanto a \mathbf{A} como a h

$$|\mathbf{A}| = eM_{\odot}G \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= (\mathbf{h} \times \mathbf{A}) \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \frac{1}{|\mathbf{h}|\mathbf{A}^2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para hallar $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ es necesario realizar la operación entre 3.49 y 3.47 obteniendo que la variación de \mathbf{A} debido a una perturbación es

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \eta \times \mathbf{h} + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \eta) \quad (3.56)$$

Como se puede ver en 3.56 esta es una ecuación lineal, lo que implica que $\frac{d\varphi_0}{dt}$ también lo es, de tal modo que se puede calcular la perturbación de este ultimo como la suma de las precesiones producidas por las perturbaciones η

Como se puede ver en 3.48 existen muchas aportaciones en la perturbación los más significativo son $\nabla\phi$ debido a que en este se encuentra el aporte del potencial gravitacional del Sol y las correcciones relativistas y $-\nabla\epsilon$, debido a que este es el aporte de los potenciales gravitacionales clásicos de los demás planetas. Si se supone un Sol esférico se puede deducir que el potencial es $\phi_{\odot} = -\frac{GM_{\odot}}{r}$, por consecuencia

$$\eta = -2\nabla\phi_{\odot}^2 + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi_{\odot} - \mathbf{v}^2\nabla\phi_{\odot} \quad (3.57)$$

Para encontrar la precesión es necesario usar 3.56- 3.57 y 3.50- 3.56 en 3.55, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= 8M_{\odot}G\mathbf{h}L^{-3}(1 + \text{ecos}(\varphi - \varphi_0))^3 \text{sen}^2(\varphi - \varphi_0) - M_{\odot}Ge^{-1}\mathbf{h}L^{-3} \\ &\times [7(1 + \text{ecos}(\varphi - \varphi_0))^2 + 4(1 + \text{ecos}(\varphi - \varphi_0))^3 \text{cos}(\varphi - \varphi_0)^3 \\ &+ (1 + \text{ecos}(\varphi - \varphi_0))^4] \text{cos}(\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Se pretende hallar la precesión por revolución para ello es necesario ver que la variación de φ_0 es muy lenta con respecto al tiempo, por ende es posible realizar una suma infinitesimal sobre dicha variación y encontrar su valor, para ello se realiza la integral manteniendo φ_0 fijo en el integrado y usando 3.50 3.51 y 3.52, lom cual da como resultado

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{dt} \frac{dt}{d\varphi} d\varphi \\ &= \frac{L^2}{\mathbf{h}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{dt} (1 + \text{cos}(\varphi - \varphi_0))^{-2} d\varphi \end{aligned} \quad (3.59)$$

La mayor parte de los términos se anulan con la integración angular, por lo cual

$$\Delta\varphi_0 = 6\pi \frac{GM_{\odot}}{L} = 6\pi \frac{GM_{\odot}}{ac^2(1 - e^2)} \quad (3.60)$$

Este resultado de la precesión se presenta para un Sol el cual no está rotando, pero para ser más precisos se debe incluir dicha rotación. Como se sabe cuando un cuerpo rota se genera un momento angular $\omega(r)$ y debido a dicha rotación se genera un campo el cual tiene un aporte en 3.57 descrito por ζ

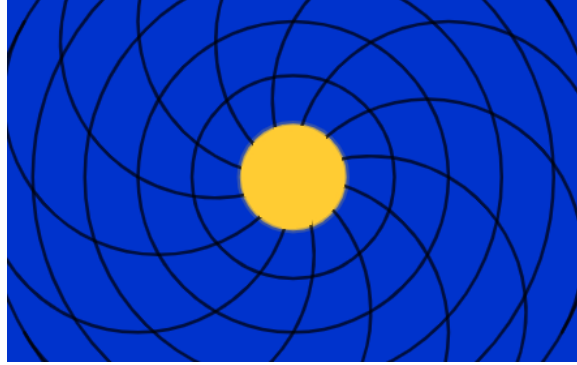


Figura 3.1: Campo producido por un cuerpo en rotación. Fuente propia

el cual se puede calcular mediante la extrapolación a la densidad de momento de un cuerpo, para lo cual

$$T^{i0(1)}(\mathbf{r}', t) = T^{00(0)}(r')(\omega(r') \times \mathbf{r}')_i \quad (3.61)$$

Este potencial fue descrito en 3.41

$$\zeta(r) = -4G \int \frac{\omega(r') \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} T^{(0)00}(r') d^4 x' \quad (3.62)$$

Debido a que el campo producido por la rotación es semejante a una esfera es posible utilizar el ángulo sólido el cual está definido en su forma integral como $\omega = \int_s \frac{ds}{r^2} e_r$

$$\int \frac{d\Omega \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{3r'} \mathbf{r} \quad r' > r \quad (3.63)$$

Debido que el interés de estudio es el campo por fuera de la esfera 3.62 puede ser reescrito de tal forma que

$$\zeta(r) = \frac{16\pi G}{3r^3} \left(\mathbf{r} \times \int \omega(r') T^{00(0)}(r') d^4 x' \right) \quad (3.64)$$

a su vez esta integral puede ser reescribirse de tal forma, a que se use el momento angular J (este es el momento angular del objeto que rota, en este caso el sol)

$$J_k^{(1)} = \frac{\epsilon_{ijk} J_{ij}^{(1)}}{2} = \int d^3 x \epsilon_{ijk} x^i T^{j0(1)} \quad (3.65)$$

de una forma que quede conveniente para resolver J puede ser expresado semejante a 3.61

$$\begin{aligned}
J &= \int (\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times)) T^{00(0)}(r') d^4 x' \\
&= \int (r'^2 \boldsymbol{\omega}(r') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega}(r'))) T^{00(0)}(r') d^4 x' \\
&= \frac{8}{3} \pi \int \boldsymbol{\omega}(r') T^{00(0)}(r') d^4 x'
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Ahora se puede encontrar el aporte de la rotación del Sol en perturbación y queda como

$$\zeta = \frac{2G}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{J}_\odot) \tag{3.67}$$

En la ecuación 3.57 se asume que el aporte de ζ en 3.48 es nulo para simplificar el cálculo, lo mismo sucede en este punto, el aporte de ϕ es considerado como nulo, por consecuente la perturbación η queda escrita como

$$\eta = \mathbf{v} \times (\nabla \times \eta) = 6G\mathbf{h}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_\odot)r^{-5} + 2G(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_\odot)r^{-3} \tag{3.68}$$

nuevamente se expresa la variación del vector Laplace-Runge-Lenz con respecto al tiempo

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 6G\mathbf{h}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_\odot)r^{-5} - 2G(\mathbf{v} \times \mathbf{J}_\odot)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})r^{-3} - 2G\mathbf{v}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{J}_\odot)r^{-3} \tag{3.69}$$

Para el caso en donde el cuerpo orbitado tiene una masa mucho mayor que el orbitante como es el caso del Sol y Mercurio se puede considera que la rotación del orbitado es perpendicular al plano de la órbita del orbitante, esto se hace con el fin de que el momento angular \mathbf{J}_\odot sea paralelo al momento angular orbital por unidad de masa \mathbf{h} , de tal forma que la precesión queda

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_0}{dt} &= \frac{2J_\odot h^2}{M_\odot L^4 e} ((1 + e \cos(\varphi - \varphi_0))^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) \\
&\quad - (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0))^3 (e + \cos(\varphi - \varphi_0)))
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Con esto es posible encontrar la expresión de la precesión debida a la rotación del Sol por revolución

$$\Delta\varphi_0 = -\frac{8\pi J_\odot h}{M_\odot a^2} \tag{3.71}$$

Al sumar las precesiones producidas por el campo gravitacional y la rotación del Sol se puede saber la precesión total órbita

$$\Delta\varphi_0 = 6\pi \frac{GM_\odot}{ac^2(1-e^2)} - 8\pi \frac{J_\odot h}{M_\odot a^2} \tag{3.72}$$

Finalmente el último modelo en estudio la APN muestra ser un caso más general que la solución de Schwarzschild debido a que toma en cuenta la rotación del cuerpo orbitado y describe un nuevo aporte, el gran cambio en este modelo es el planteamiento de infinitos potenciales gravitacionales sumados para formar uno, en este potencial están implícitos el potencial Newtoniano y el Relativista, sumadole un potencial centrífugo

3.3. Comparación entre los modelos

En la siguiente sección se realiza una comparación entre las ecuaciones halladas mediante las tres teorías, con el fin de revisar sus similitudes y/o posibles diferencias para dar una explicación a estas.

Como se puede ver mediante el desarrollo teórico seguido a lo largo de este trabajo, la forma de encontrar el movimiento que describen los cuerpos bajo un campo gravitacional central es mediante el análisis de lo que se llama el potencial eficaz, así que empezar por este resulta idóneo, debido a que en este se evidencian las principales diferencias y similitudes de las teorías, además de que a partir de este se pueden encontrar las demás características del movimiento.

Modelo	Forma del potencial eficaz
Newton	$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$
Schwarzschild	$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GML^2}{c^2 r^3}$
APN	$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} + \epsilon(r, t) - \frac{2G}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{\odot})$

Tabla 3.1: Tabla comparativa entre la forma de los potenciales

Como puede ser evidente en la tabla comparativa el potencial en los tres caso se tiene un fractor común que es $-\frac{GM}{r}$, este hace referencia al potencial newtoniano el cual disminuye cuanto mayor sea la distancia entre los cuerpos. Para el caso clásico (Newton) este potencial es producido por la “acción a distancia” una fuerza sin contacto producida por la interacción gravtacional entre los cuerpos.

Para el caso de la relatividad general (Schwarzschild) solo existe una diferencia con el potencial clásico y es el ultimo factor de este $-\frac{GML^2}{c^2 r^3}$, como se

puede ver es prácticamente imperceptible debido a que es inverso al cubo de la distancia además del cuadrado de la velocidad de la luz, lo que resulta ser un factor muy pequeño en una revolución de ahí la gran dificultad de ser descubierto, este factor hace alusión a la deformación del espacio-tiempo debido a una a la perturbación de una masa muy grande, cuando la distancia a dicha masa es muy grande se recupera el espacio-tiempo de Minkowski, es decir si $r \rightarrow \infty$ la perturbación tiende a cero, esto es lo que se puede llamar como aproximación de campo débil.

El caso más interesante podría decirse que es la APN, debido a que esta engloba las dos anteriores soluciones y realiza aportes significativos en estas, para empezar está explícitamente escritos el potencial clásico y el relativista, también aparecen otros dos nuevos uno que es $\epsilon(r, t)$ en el cual estan descritos los aportes de los demás planeta y $\frac{2G}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{\odot})$ siendo aporte al potencial debido al campo producido por la rotación del cuerpo orbitado el cual en las dos soluciones anteriores es despreciado, este potencial esta descrito por el tensor momento energía y en ningún momento va en contradicción a las teorías anteriores, es más, estas pueden ser descritas como casos especiales de la APN, para terminar realiza la aportación teórica la cual indica no solo existe un potencial sino que este es la suma de infinitos potenciales, estos potenciales son de orden de magnitud muy pequeños⁵, por lo cual, son prácticamente indetectables a la medida con la tecnología actual.

Modelo	Precesión del perihelio
Newton	No existe
Schwarzschild	$6\pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)}$
APN	$6\pi \frac{GM_{\odot}}{ac^2(1-e^2)} - 8\pi \frac{J_{\odot}h}{M_{\odot}a^2}$

Tabla 3.2: Comparación entre los valores de la precesión en los diferentes modelos

La precesión del perihelio de Mercurio es una de las pruebas claves para el reestudio del problema de los dos cuerpos, debido a que en la parte clásica del

⁵Recordando que dichos potenciales son de órdenes de hasta $1/c^4$, los demás potenciales más pequeños son ignorables debido a que tienden a cero

trabajo se dedujo que según esta **No debería existir precesión alguna**, con excepción a la obtenida por el aporte gravitacional de otros cuerpos celestes, lo que va más allá del problema de estudio, más sin embargo no es casualidad que tanto en la relatividad general y en la APN surja uno más aportes para la precesión de la orbita, en el primer caso como se explicó anteriormente es producido por la deformación del espacio-tiempo, en el segundo caso además de la deformación también existe otro factor que resulta ser la influencia del “campo centrífugo” producto de la rotación del cuerpo orbitado (Sol).

3.4. Medidas comparativas

Finalmente es posible encontrar las predicciones teóricas de la precesión, todos los datos utilizados en la siguiente tabla están fundamentados con la base de datos de la NASA[14][15]

Cuerpo celeste	r ($\times 10^9$ m)	e	R.G. $\Delta\varphi_{seg}/siglo$	APN $\Delta\varphi_{seg}/siglo$
Mercurio	57.91	0.2056	42.94	-15.41×10^{-4}
Venus	108.21	0.0068	8.61	-24.11×10^{-5}
Tierra	149.6	0.0167	3.83	-91.36×10^{-6}
Ícaro	164.0	0.827	9.88	-39.62×10^{-6}
Apofis	137.9	0.191	4.87	-11.43×10^{-5}
(410777) 2009 FD	116.35	0.493	5.17	-11.25×10^{-5}

Tabla 3.3: Valores de la precesión de Schwarzschild y rotacional, los valores están dados con base en la cantidad de orbitaciones que realiza el cuerpo celeste en un siglo terrestre

Para ejemplificar cómo fueron hallados los valores se toma el caso de la Tierra y se realizan los cálculos.

$$6\pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)} = 6\pi \frac{6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \cdot 1,989 \times 10^{30} Kg}{149,6 \times 10^9 m \cdot 8,98 \times 10^{20} \left(\frac{m}{s}\right)^2 (1 - 0,0167^2)} \quad (3.73)$$

Como se puede ver todas las unidades dimensionales se simplifican lo que implica un resultado adimensional que tiene únicamente en terminos de *radia-*

nes/revolución, para llegar a la notación de segundo de arco por siglo es necesario recordar que $1^\circ = 3600$ segundo de arco y la relación entre radianes y ángulos $\pi rad = 180^\circ$, también es necesario multiplicar por el número de orbitaciones en un siglo (resulta evidente que son 100)

$$\Delta\varphi_{seg/siglo} = \pi \cdot 5,921 \times 10^{-06} \cdot 100 = \frac{\pi \cdot 5,921 \times 10^{-6} \cdot 3600 \cdot 180}{\pi} = 3,83 \quad (3.74)$$

Dando como resultado la precesión por siglo, debida a la curvatura del espacio tiempo $3,83 \text{ seg. de arc./siglo}$.

Y para la precesión debida a la rotación del Sol ⁶

$$-8\pi \frac{J_\odot h}{M_\odot a^2} = -8\pi \frac{5,5692 \times 10^{32} \frac{Kg \cdot m^2}{s} \cdot 8,762 \times 10^6 m}{1,989 \times 10^{30} Kg \cdot 149,6 \times 10^9 m} \quad (3.75)$$

realizando las mismas consideraciones que 3.74 se obtiene

$$\Delta\varphi_{seg/siglo} = \pi \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 100 = \frac{\pi \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 3600 \cdot 180}{\pi} = -91,36 \times 10^{-6} \quad (3.76)$$

Dando como resultado la precesión por siglo, debida a la rotación del Sol $-91,36 \times 10^{-6} \text{ seg. de arc./siglo}$, precesión que es casi imposible de medir debido a su pequeño aporte en el movimiento de la órbita, para que esta tenga un aporte significativo las medidas deberían ser realizadas a lo largo 1×10^7 años y tendría un valor de $-91.36 \text{ seg. de arc.}$, el negativo en el valor de la precesión es debido a que si se toma el en refencia el polo norte de la Tierra apuntando hacía arriba la rotación del Sol es en sentido antihorario.

3.5. Las órbitas en términos del radio de Schwarzschild

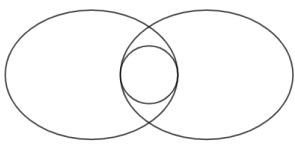
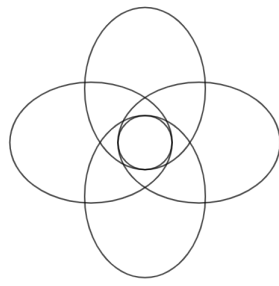
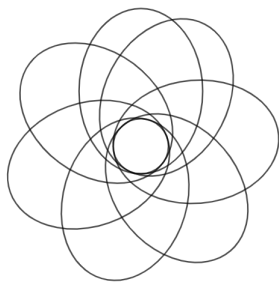
Otro análisis interesante en cuanto precesión en un problema de dos cuerpos visto desde la solución de Schwarzschild es observar cómo se comportan las órbitas con base al valor dependiendo del radio de Schwarzschild para lo que

⁶Recordando que h se puede encontrar con la relación hallada en 3.53, siendo L el semi latas rectum el cual se calcula como $b(1 - e^2)$ siendo b el semi-eje mayor

es necesario usar la formula para la precesión ya conocida 3.60 y escribirla en terminos de dicho radio, tal que

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{GM}{ac^2} \rightarrow 6\pi \frac{GM}{c^2 n \frac{GM}{c^2} (1 - e^2)} \quad (3.77)$$

siendo n el número de radio Schwarzschild y se tomó una excentricidad constante para todos los casos.

Forma de la órbita	Radio de Schwarzschild	Precesión
	$2 \frac{GM}{c^2}$	$\frac{3\pi}{(1-e^2)}$
	$3 \frac{GM}{c^2}$	$\frac{2\pi}{(1-e^2)}$
	$5 \frac{GM}{c^2}$	$\frac{6\pi}{5(1-e^2)}$

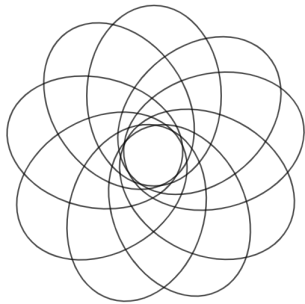
	$8\frac{GM}{c^2}$	$\frac{3\pi}{4(1-e^2)}$
---	-------------------	-------------------------

Tabla 3.4: Forma de las órbitas en diferentes radios de Schwarzschild. Fuente propia

Como se puede ver cuanto mayor sea la distancia entre los cuerpos menor sera la precesión lo que va acorde con los datos cálculados en la tabla 3.3, además de que si, se habla de un cuerpo cuya masa esta comprimida en un radio de Schwarzschild (un agujero negro) no es necesario saber la masa de este para encontrar la precesión si la distancia se escribe en terminos de dicho radio.

3.6. Programa medidor de precesiones

Con el fin de que al lector le sea más fácil de realizar las mediciones teóricas de las precesiones de los cuerpos celestes del sistema solar debidas a la deformación del espacio-tiempo y la rotación del sol, se pone a su disposición un programa en Excel en el cual puede variar la distancia entre los cuerpos, la excentricidad y el número de orbitaciones, este programa se recomienda que se use como un sistema comparativo entre las orbitas de los cuerpos del sistema solar.

Link del Drive para descargar el programa: <https://drive.google.com/file/d/16iIF-WeoYZ0J4benQxyUe1r3iMK110EJ/view?usp=sharing>, Se recomienda descargarlo y habilitar los macros para una mejor experiencia.

Capítulo 4

Conclusiones

Sobre los Modelos

- Es posible hacer la interpretación que el problema de los dos cuerpos resulta siendo un problema de orbitación, en donde las únicas interacciones posibles son las de un cuerpo a otro y la forma de esta interacción depende de la teoría en la que se estudie.
- Durante el estudio del problema de los dos cuerpos se pudo evidenciar que en la solución clásica debido a su formulación tiene como fundamento un espacio desligado completamente del tiempo y este a su vez no es variable dinámica.
- El movimiento de los cuerpos es descrito en la teoría Newtoniana mediante la interacción gravitacional debido a una fuerza, lo que implica un movimiento acelerado.
- En los modelos posteriores Schwarzschild y APN el espacio y el tiempo están entrelazados en un tejido llamado espacio-tiempo, el cual se ve afectado por la presencia de la masa y la energía del sistema, siendo estas las causantes de la deformación del espacio-tiempo y esto a su vez es la causa del movimiento, convirtiendo al tiempo en una variable dinámica.
- En Schwazschil y en la APN se describe un movimiento inercial (no po-

see aceleración), debido a que la trayectoria que siguen los cuerpos son geodésicas, las cuales son las trayectorias que minimizan la acción en cualquier variedad, por ende ya no existe una fuerza que ligue los cuerpos y la interacción es debida a la deformación del espacio-tiempo.

- La velocidad infinita de la acción a distancia clásica es remplazada por una velocidad finita en los modelos posteriores y es igual a la velocidad de la luz.

Sobre la forma de los potenciales

- El análisis de los potenciales gravitacionales juega un papel muy importante en las tres teorías, ya que gracias a estos es posible encontrar las soluciones al problema de los dos cuerpos
- En cuanto su formulación matemática, las ecuaciones de la solución clásica se caracterizan por ser lineales las cuales no presentan una gran dificultad para ser resueltas
- En la relatividad general no son lineales debido a que estas parten de las ecuaciones de campo de Einstein las cuales tienen como propiedad ser no lineales y estar acopladas, esto que representa un grado de dificultad mayor para encontrar las características del movimiento,
- La APN busca hacer una linealización de las ecuaciones de campo de Einstein en donde el potencial gravitacional pueden ser descrito como una suma de múltiples potenciales, también hace uso del tensor momento-energía para ir más allá de las soluciones anteriores siendo posible encontrarlas como casos especiales de la APN.

Sobre la impotencia en la enseñanza

- Como es posible ver a lo largo de este trabajo el problema de los dos cuerpos resulta ser de suma importancia debido a que gracias a este es posible realizar el seguimiento de la evolución teórica. Con base en este se

puede ver un desarrollo físico-matemático de las teorías del movimiento celeste.

- El problema de los dos cuerpos puede resultar ser como un ancla para la enseñanza del movimiento planetario en la física moderna por el simple hecho que partiendo de los conocimientos previos que en la mecánica clásica los conceptos como las trayectorias inerciales, conservación de la energía y el momento angular, que también son usados en los modelos posteriores pueden llegar a ser más fáciles de asimilar.

Anexos

Anexos A

Relación entre el tiempo coordenado y el tiempo propio

Con el fin de encontrar su relación es necesario plantear la definición de tiempo propio de una partícula de tal forma que

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (\text{A.1})$$

pero el elemento de línea es también puede ser igualado a

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.2})$$

de tal forma que

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.3})$$

esta expresión puede ser dividida por $-c^2 d\tau^2$

$$1 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \right) \quad (\text{A.4})$$

en esta expresión es posible hacer factor común a $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$ siempre y cuando que en los términos donde no se encuentre se multiplique por su inverso multiplicativo

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}\right)^2 \right)\right) = 1 \quad (\text{A.5})$$

de esta forma se puede ver que se puede simplificar los $d\tau$ de que las componentes espaciales se pueden reformular de la forma $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2$ que hace referencia a una velocidad v_i^2 y al sumar sus componentes en los ejes x,y,z se puede escribir como su módulo v^2

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} (v^2)\right) = 1 \quad (\text{A.6})$$

con lo cual solo queda despejar $\frac{dt}{d\tau}$ para encontrar su relación

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{A.7})$$

Anexos B

Deducción de la precesión en la métrica de Schwarzschild

Es posible haber notado que la ecuación 2.61 es muy semejante al equilibrio de las energías de para un problema de fuerzas centrales clásico, con base en esto se puede expresar una relación para encontrar la orbita que describe una partícula de prueba.

Como se pudo ver en 2.44 la variación del ángulo con respecto al tiempo propio es igual

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{mr^2} = \dot{\phi} \quad (\text{B.1})$$

realizando un cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ y aplicando la regla de la cadena se obtiene que¹

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -u^2 \frac{dr}{d\phi} \\ \dot{r} &= \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L}{m} u' \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

reemplazando en 2.61 se obtiene

¹Recuerde que las derivadas con respecto al tiempo se expresan como \dot{r} y con respecto a otra variable como u'

$$u'^2 + u^2 - \frac{GM}{c^2}u^3 - \frac{2}{\alpha}u = \frac{2mK}{L^2} \quad (\text{B.3})$$

donde α es la distancia perpendicular al semi-eje mayor, entre la elipse y uno de sus focos y pasa por este último (semi-latus rectum) B.1, además expresa $\alpha = \frac{L^2}{GMm^2} = (1 + e)r_{min}$

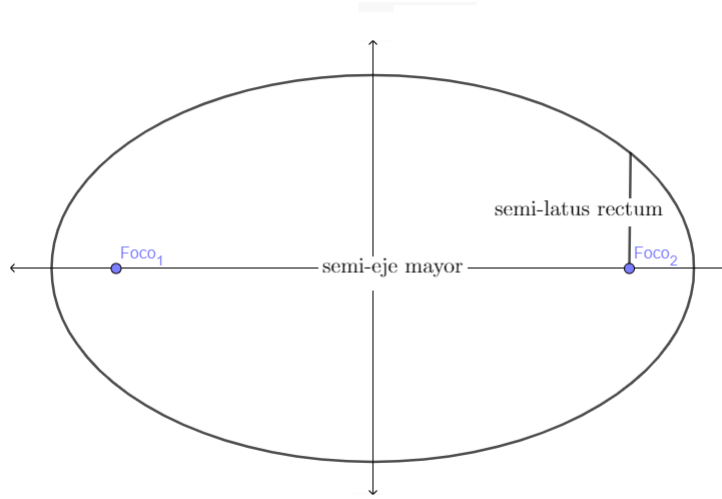


Figura B.1: semi-latus rectum

Realizando la deriva con respecto a ϕ se obtiene la ecuación de la órbita

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{\alpha} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \quad (\text{B.4})$$

Si se pone como ejemplo el sistema sol-planeta el campo gravitacional producido por el primero es débil, así que se puede usar la gravedad Newtoniana para encontrar una solución que se aproxime a la solución en la relatividad general, para esto se supone que la solución Newtoniana no es perturbada es decir que la ecuación B.4 ya no dependerá de $u(\phi)$ si no que ahora solo dependerá de u_0 donde en este término se en cuenta implícitamente una corrección al u del cambio de variable $u = u_0 + u_1$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u_0 - \frac{1}{\alpha} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Esta ecuación es posible suponer una solución semejante a un oscilador armónico simple y su solución es $u_0 - \alpha^{-1} = A \cos(\phi)$, donde $A = \frac{e}{\alpha}$, gracias a esto se puede encontrar el un r

$$u_0 - \alpha^{-1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} = \frac{e \cos \phi}{\alpha}$$

$$r = \frac{\alpha}{1 - e \cos \phi} \quad (\text{B.6})$$

donde e es la excentricidad de la órbita.

Para obtener la corrección relativista es necesario usar B.4 en insertarle las relaciones encontradas anteriormente tal que

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u_0 - \frac{1}{\alpha} + \frac{d^2 u_i}{d\phi^2} + u_i = \frac{3r_s}{2\alpha^2} (1 + e \cos \phi)^2 \quad (\text{B.7})$$

Se puede comparar con B.5 y darse cuenta que los primero tres términos son los de la solución Newtoniana no perturbada, así que ya se tiene una parte de la solución y por analogía también se puede hallar la otra parte y queda como

$$\frac{d^2 u_i}{d\phi^2} + u_i = B(1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \quad (\text{B.8})$$

donde B es $\frac{3r_s}{2\alpha^2}$, y la ecuación tiene como solución

$$u_i = B \left(1 + \phi \sin \phi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right) \quad (\text{B.9})$$

debido que e^2 es muy pequeño por lo que se puede despreciar y encontrar la relación

$$u_1 = B e \phi \sin \phi \quad u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \phi}{\alpha} + B e \phi \sin \phi \quad (\text{B.10})$$

y despejando r

$$r = \frac{\alpha}{1 + e(\cos \phi + \epsilon^2 \sin \phi)} \quad (\text{B.11})$$

El término $\cos \phi + \epsilon^2 \sin \phi$ haciendo las aproximaciones $\cos(\epsilon \phi) = 1$ y $\sin(\epsilon \phi) = \epsilon \phi$ ² y $\epsilon = \frac{3r_s}{2\alpha^2}$ entonces

$$r = \frac{\alpha}{1 + e(\cos((1 - \epsilon)\phi))} \quad (\text{B.12})$$

²Aproximación solo valida para ángulos pequeños

Con esto se puede ver que la partícula no regresa al perihelio en 2π como en el modelo Newtoniano, por consecuente se debe hallar en qué ángulo lo hace, para lo cual

$$\phi = \frac{2\pi}{1 - \epsilon} = 2\pi \left(1 - \frac{3r_s}{2\alpha}\right)^{-1} = 2\pi + \frac{3r_s}{2\alpha} \quad (\text{B.13})$$

finalmente se puede concluir con la precesión en términos conocidos de la métrica

$$\Delta\phi = \frac{3r_s}{2\alpha} = \frac{3r_s}{(1 + e)r_{min}} = \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - e^2)} \quad (\text{B.14})$$

Donde r_s es el radio de Schwarzschild para el cuerpo orbitante $\frac{2GM_\odot}{c^2}$

Anexos C

Deducción del valor de la aceleración

Para encontrar la derivada es necesario usar la regla de la cadena, en donde

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (\text{C.1})$$

Esta derivada da como resultado la velocidad, necesaria para encontrar la aceleración

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{d^2t}{d\tau^2} \frac{dx^\mu}{dt} + \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \frac{d^2x^\mu}{dt^2} \quad (\text{C.2})$$

Realizando la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo se puede encontrar la aceleración

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \frac{d^2t}{d\tau^2} \frac{dx^\mu}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} \quad (\text{C.3})$$

Conociendo que la componente temporal de la métrica t puede ser reescrita como x^0 , la expresión queda de la forma

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \frac{d^2x^0}{d\tau^2} \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^{-2} \quad (\text{C.4})$$

En esta expresión están escritos implícitamente los símbolos de Christoffel de primer orden, entonces

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{u^0} \left(-\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha u^\gamma u^\beta + \Gamma_{\gamma\beta}^0 u^\gamma u^\beta u^i \right) \quad (\text{C.5})$$

Haciendo la relación entre la velocidad u^γ/u^0 , se obtiene que

$$\frac{u^\gamma}{u^0} = \frac{1}{c} \frac{dx^\gamma}{dt} \quad (\text{C.6})$$

Ingresando la la relación de C.6 en C.5 es posible encontrar la aceleración en terminos de las velocidades y los símbolos de Christoffel

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma_{\gamma\beta}^i u^\gamma u^\beta + \Gamma_{\gamma\beta}^0 u^\gamma u^\beta u^i \quad (\text{C.7})$$

Ahora expandiendo los indices

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i u^j - \Gamma_{jk}^i u^j u^k + (\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 u^j + \Gamma_{jk}^0 u^j u^k) u^i \quad (\text{C.8})$$

Finalmente se puede encontrar la aceleración en terminos de un único símbolo que es Γ_{00}^i

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2} (g^{i0} \partial_0 g_{00} + g^{ij} (2\partial_0 g_{0j} - \partial_j g_{00})) \quad (\text{C.9})$$

Lo importante en este punto es que la aceleración puede ser descrita en términos de las componentes de la métrica y recordando que estos campos son estáticos (no varían con respecto al tiempo) se puede describir la aceleración como

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_{00}^i \approx \partial_i g_{00} \quad (\text{C.10})$$

Anexos D

Deducción del valor de los símbolos de Christoffel

Utilizando la condición de coordenadas armónicas, en donde X^μ son funciones escalares, por lo que se tienen cuatro funciones y cada una de estas es una coordenadas

$$\nabla^2 x^\mu = 0 \quad (\text{D.1})$$

La ecuación de Laplace en términos de las componentes de la métrica puede ser escrito como

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \nabla_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu x^\alpha) = 0 \quad (\text{D.2})$$

Debido a que $\partial_\nu x^\alpha$ da como resultado 1 cuando $\alpha = \nu$ y 0 cuando $\alpha \neq \nu$, por ende se puede expresar la como la delta de Kronecker

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \nabla_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta_\nu^\alpha) = 0 \quad (\text{D.3})$$

Como $\alpha = \nu$ y la operación en la delta de Kronecker es uno, el índice ν puede ser cambiado por α

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \nabla_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\alpha}) = 0 \quad (\text{D.4})$$

Siendo el determinante de la métrica igual a

$$\sqrt{|g|} = 1 + 2u + 2(\psi + 7u^2) + \dots + \quad (\text{D.5})$$

debido a que la única la métrica solo puede ser derivada por x^ν se puede expresar como una derivada parcial, tal que

$$\partial_\mu \sqrt{|g|} g^\mu = 4(\partial_t + \partial_i u_i) + \dots + = 0 \quad (\text{D.6})$$

Recordando que la derivada parcial de una componte i puede ser reemplazada por su equivanete temporal se obtiene que

$$\partial_i u_i = -\partial_t u \quad (\text{D.7})$$

Recordando la definición de los símbolo de Cristoffel hallada en C.9

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{00} + \frac{1}{2} g^{0i} (2\partial_0 g_{0i} - \partial_i g_{00}) \quad (\text{D.8})$$

Se puede reemplazar las componentes de la métrica de los potenciales gravitacionales

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} (1 + 2u + 2(\psi + u^2)) \partial_t (1 - 2u) \quad (\text{D.9})$$

debido a que los potenciales desaparecen en el infinito se puede obtener el valor de

$$\Gamma_{00}^0 = -\partial_t u_t \quad (\text{D.10})$$

analogamente se puede encontrar el valor del segundo símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{0i} \partial_0 g_{00} + \frac{1}{2} g^{ij} (2\partial_0 g_{0j} - \partial_j g_{00}) \quad (\text{D.11})$$

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} (1 - 2u) (8\partial_t u_i - \partial_i (1 - 2u - 2(\psi - u^2))) \quad (\text{D.12})$$

$$\Gamma_{00}^i = -4\partial_t u_i - (1 - 2u) (\partial_i u + \partial_i (\psi - u^2)) \quad (\text{D.13})$$

$$\Gamma_{00}^i = -4\partial_t u_i - \partial_i u - \partial_i (\psi - u^2) + 2u \partial_i u \quad (\text{D.14})$$

$$\Gamma_{00}^i = -\partial_i u - 4\partial_t u_i + \psi - 4u \partial_i u \quad (\text{D.15})$$

siguiendo este razonamiento se puede encontrar el valor de los demás símbolos de Christoffel tal que

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{2} \partial_t u \\ \Gamma_{0i}^0 &= -\frac{1}{2} \partial_t u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2}\partial_j u_i + \partial_t u_i + \frac{1}{2}\delta_{ij}u\partial_j u \\
\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}(\partial_t u\delta_{ij} + \partial_t u_j - \partial_j u_i) \\
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}(\partial_k u_j + \partial_j u_i - \partial_i u_k)
\end{aligned}
\tag{D.16}$$

Anexos E

Datos extras utilizados en el cálculo de las precesiones

Cuerpo celeste	N. Orbitaciones	h (Km)	semi-eje mayor (U.A.)
Mercurio	415	8.57×10^4	0.387
Venus	162.43	11.97×10^3	0.723
Tierra	100	14.08×10^3	1
Ícaro	89.28	8.23×10^3	1.078
Apofis	112.8	13.27×10^3	0.922
(410777) 2009 FD	79.45	13.21×10^3	1.164

Tabla E.1: Datos extra para el cálculo de las precesiones

Bibliografía

- [1] Abuter. R, et al. (2020). Detection of the Schwarzschild precession in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole.
- [2] Alamañac. R, (2015). El problema de los dos cuerpos y las leyes de Kepler (Universidad Rioja).
- [3] Benitez. F,(2005). Relatividad General aplicada a Mecánica Celeste. (Universidad de la Republica).
- [4] Flavell, J. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring. American Psychologist, pp. 906-911.
- [5] Guerrero, G. (Enero - Junio de 2004).*El Hombre y la Máquina*. 22, p. 98.
- [6] López, F. (2018). Apuntes Mecánica Celeste Clásica. (Universidad Nacional de San Juan).
- [7] Molina, S. (2017) El método de análisis y síntesis y el descubrimiento de Neptuno. (Università degli Studi di Torino).
- [8] Newton I, (1687). *Principios, matemáticos de la filosofía natura*, Madrid, 1982, Editorial Nacional.
- [9] Nieto. M (1996). Estética y Astronomía en el renacimiento. (Universidad de los Andes).
- [10] Portilla, J. (2001). Elementos de Astronomía de posición. (Universidad Nacional).

- [11] Ramirez, X. (2001) Las astronomía una ciencia de todos y para todos. (Universidad Nacional, sede Medellín).
- [12] Stephanie, H. (1990). Introduction to the theory of the gravitational field.(Cambridge University Press, Cambridge).
- [13] Weinberg, S,(1972). *Gravitayon and cosmology: Principles and application of the general theory of relativity*,1972, New York, Library of congress Cataloging.
- [14] Nasa. (2021, 13 enero). Asteroid Fact Sheet. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/asteroidfact.html>
- [15] Nasa. (2021, 13 enero).Planetary Fact Sheet - Metric<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>