CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS COMO PUENTE ENTRE LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO, UTILIZANDO REGLA, COMPÁS Y HOJA CALCO COMO PLANO AUXILIAR

JENNY JOHANNA CANO GÓMEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C

2020

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS COMO PUENTE ENTRE LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO, UTILIZANDO REGLA, COMPÁS Y HOJA CALCO COMO PLANO AUXILIAR

Trabajo de grado como requisito obtener el título de Licenciado en Matemáticas

JENNY JOHANNA CANO GÓMEZ

Código: 2012240016
C.C: 52779677

Directora

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C

2020

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado **titulado "CONSRUCCIONES GEOMÉTRICAS COMO PUENTE ENTRE LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO, UTILIZANDO REGLA, COMPÁS Y HOJA CALCO DE PLANO AUXILIAR"**, elaborado por la estudiante **JENNY JOHANNA CANO GÓMEZ**, identificada con el Código 2012240016 y Cédula 52779677, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y tres** (43) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de febrero de 2021.

Dra. LEONOR CAMARGO URIBE
Director del Trabajo de grado

Mg. LUIS EDUARDO ESPITIA SUPELANO
Jurado del Trabajo de grado

Mg. WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ
Jurado del Trabajo de grado

Aclaración

El 80% del contenido de este documento es igual al que se encuentra en el trabajo de grado entregado por Andrés Camilo Sánchez en 2020-1. Andrés y Jenny hicieron un trabajo colaborativo hasta 2019-2. El 20% de documento corresponde a una ampliación realizada por Jenny Cano en 2020-2. Los lugares en donde se hizo la ampliación se señalan en el documento con color rojo.

Agradecimientos

A la profesora Leonor Camargo, por creer en nuestra idea y ayudarnos a ser la realidad. Plasmándola en este trabajo de grado, que es un gran logro para mí y más aun de la mano de esta gran maestra.

Jenny

Dedicatoria

A mi hija y mi pareja que siempre han creído en mí y son mi apoyo incondicional en todo momento. Jenny

Resumen

Las construcciones geométricas, entendidas como secuencias fundamentadas de pasos para generar representaciones de objetos geométricos a partir de sus propiedades invariantes, tienen un valor importante en el aprendizaje de la geometría (Duval, 2003; Orozco, 2012). A pesar de su importancia en ocasiones la tarea de construir no hace parte de las clases de geometría, debido a que el docente no considera necesario la implementación de dicha tarea o no se cuenta con el tiempo para su implementación (Barrantes y ballesteros, 2012).

Por lo anterior, diseñamos un cuadernillo de construcciones en el que los estudiantes, además de seguir los pasos del procedimiento de construcción, responden preguntas que intentan favorecer su visualización y su razonamiento Los profesores que usen el cuadernillo podrán incentivar, de manera articulada, la visualización, el razonamiento y la construcción geométrica, procesos centrales del trabajo en geometría escolar.

En el Trabajo de grado, además de fundamentar y presentar el cuadernillo de construcciones, informamos sobre la implementación de dos construcciones con un grupo de estudiantes de grado sexto.

Contenido

Tabla de Ilustraciones

Introducción

Las construcciones geométricas, entendidas como secuencias fundamentadas de pasos para generar representaciones de objetos geométricos a partir de sus propiedades invariantes, tienen un valor importante en el aprendizaje de la geometría (Duval, 2003; Orozco, 2012). A pesar de su importancia en ocasiones la tarea de construir no hace parte de las clases de geometría, debido a que el docente no considera necesario la implementación de dicha tarea o no se cuenta con el tiempo para su implementación (Barrantes y ballesteros, 2012).

Por lo anterior, diseñamos un cuadernillo de construcciones en el que los estudiantes, además de seguir los pasos del procedimiento de construcción, responden preguntas que intentan favorecer su visualización y su razonamiento Los profesores que usen el cuadernillo podrán incentivar, de manera articulada, la visualización, el razonamiento y la construcción geométrica, procesos centrales del trabajo en geometría escolar.

En el Trabajo de grado, además de fundamentar y presentar el cuadernillo de construcciones, informamos sobre la implementación de dos construcciones con un grupo de estudiantes de grados sexto.

En el primer capítulo, describimos el proceso que nos llevó a buscar una alternativa para la realización de construcciones geométricas sin el uso de la geometría dinámica. Justificamos la realización de este trabajo, planteándonos un objetivo general y cuatro objetivos específicos.

En el segundo capítulo, presentamos el marco conceptual de la investigación. Incluimos antecedentes sobre trabajos referidos a construcciones geométricas, proponemos una definición para el proceso de construcción, la construcción geométrica, la visualización y el razonamiento. Presentamos algunos pasajes de la historia de las matemáticas en donde la construcción geométrica ha influido en el trabajo matemático y en la enseñanza de geometría. La diferenciación entre trazos auxiliares y trazos fundamentales en una construcción geométrica.

En el tercer y cuarto capítulos describimos el cuadernillo de construcciones geométricas, teniendo como base nuestro marco teórico y los objetivos planteados. Presentado las diez construcciones geométricas seleccionadas, junto con las preguntas previstas para favorecer la visualización y el razonamiento.

Por último, en el quinto capítulo realizamos el análisis de los resultados de la implementación de dos tareas de construcción geométrica con cuatro estudiantes de grado sexto. Terminamos el trabajo con algunas conclusiones.

Capítulo 1. Presentación del Trabajo

Justificación

Las construcciones geométricas generalmente entendidas como el resultado de una secuencia fundamentada de pasos, para generar una representación de un objeto o una relación geométrica, a partir de sus propiedades invariantes, tienen un valor importante en el aprendizaje de la geometría (Duval, 2003; Orozco, 2012). Lo anterior particularmente cuando los estudiantes se enfrentan a la elaboración, exploración, manipulación e interpretación de construcciones geométricas o, como lo mencionan Samper, Leguizamón y Camargo (2001), cuando ellos reflexionan sobre para qué se hicieron algunos trazos y buscan explicaciones sobre por qué los trazos realizados permiten representar un objeto geométrico. Por consiguiente, las construcciones han sido un objeto de estudio fundamental en la didáctica de la geometría.

A pesar de la importancia de las construcciones geométricas para el aprendizaje de la geometría, en ocasiones la tarea de construir no hace parte de las clases, debido a que los docentes no consideran necesaria su inclusión en el currículo o no cuentan con tiempo o recursos para su implementación. Eventualmente se enseñan algunas construcciones geométricas, pero estas no son aprovechadas por los estudiantes como parte de su aprendizaje de la geometría, porque son vistas como rutinarias.

Una de las vías que se puede impulsar para aprovechar la tarea de construcción geométrica en el aprendizaje, es procurar que los estudiantes diferencien entre la representación de un objetó geométrico resultado de una construcción y el proceso constructivo (Rico, 2009). Por tal motivo, los estudiantes deben: diferenciar, al producir una construcción geométrica, los trazos que son auxiliares de los trazos fundamentales; comprender el papel que desempeña cada trazo; y comprender la razón de usar trazos auxiliares específicos para garantizar que en la representación se cumplan ciertas propiedades de los objetos o relaciones geométricas. Así, la actividad de construcción no se convierte en un proceso mecánico, y se vuelve significativa en el aprendizaje de la geometría.

Para lograr dicho aprovechamiento, una opción poderosa es la herramienta Ocultar/Mostrar de los programas de geometría dinámica que permite esconder los trazos auxiliares de una construcción (Burguete, 2007). De esta manera, los estudiantes pueden apreciar la representación del objeto geométrico construido a partir de sus propiedades esenciales y saber qué trazos auxiliares fueron necesarios, sin perder de vista los trazos fundamentales.

En la actualidad, los programas de geometría dinámica son un recurso considerado importante en la enseñanza de la geometría. Tal es así que el Ministerio de Educación ha dado aval a su uso, recomendándolo en los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Adicionalmente, ha implementado el programa "Tablets Para Enseñar" que consiste en dotar de tabletas digitales a los colegios públicos de las principales capitales para que los estudiantes tengan acceso a la tecnología en las clases de matemáticas. Además de las indicaciones del Ministerio, autores como Acosta y Camargo (2012) mencionan que los avances tecnológicos permiten el tratamiento visual y racional de los objetos geométricos.

Por lo anterior, en nuestra propuesta inicial de trabajo de grado consideramos la posibilidad de usar un programa de geometría dinámica, y en particular la herramienta Ocultar/Mostrar para que los estudiantes de grado sexto produjeran construcciones y favorecer con ello sus procesos de visualización y razonamiento, que están relacionados con el proceso de construcción, y son importantes en el aprendizaje de la geometría.

Sin embargo, en nuestras prácticas educativas realizadas en algunos colegios de Bogotá y Soacha, evidenciamos diferentes problemáticas relacionadas con el acceso a la tecnología en la clase de geometría. Por ejemplo, en los colegios Liceo Feyser y Arbolizadora Baja hay muy pocos recursos tecnológicos para distribuir entre los estudiantes. En el Colegio Pablo de Tarso y en el colegio CEDID San Pablo, los profesores desconocen cómo usar los recursos tecnológicos, no los usan en las clases de matemáticas ni hay establecido algún mecanismo para que se pueden usar. En el Liceo Isabel Sarmiento, la clase Tecnología e informática ocupa las salas de informática y no se prestan a los demás profesores. En el colegio Gran Yomasa hay problemas administrativos para el uso de recursos tecnológicos disponibles. Por lo que hacer uso de estos en clase de geometría es casi imposible.

Por lo anterior, vimos la necesidad de buscar una alternativa que acercara a los estudiantes a la geometría y que "emulara" el uso de la herramienta Ocultar/Mostrar de los programas de geometría dinámica. Este recurso debería permitir a los estudiantes diferenciar entre los trazos auxiliares y los trazos fundamentales, contribuyendo con ello a impulsar el tratamiento visual de objetos geométricos y el estudio de sus propiedades vía la construcción geométrica.

En busca de una alternativa, en este trabajo nos inspiramos en un recurso de la clase de arte, el cuaderno de dibujo, para diseñar un cuadernillo de construcciones. Como lo describimos en el Capítulo 3, este tiene hojas blancas intercaladas con hojas calco que usamos para poner en un plano auxiliar los trazos fundamentales promoviendo que se resalten dichos trazos.

1.2. Objetivos

1.2.1. General

Diseñar un cuadernillo para hacer construcciones geométricas con regla y compás e implementar algunas tareas propuestas con estudiantes de grado sexto para evaluar su potencial para desarrollar procesos de visualización y razonamiento.

1.2.2. Específicos

- Elaborar un marco de referencia sobre el uso de la construcción geométrica con regla y compás, utilizando papel calco en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.
- Recopilar un conjunto de construcciones de geometría plana adaptables a los contenidos curriculares de grado sexto.
- Adaptar algunas construcciones para el trabajo con el cuadernillo de dibujo y diseñar tal cuadernillo.
- Implementar algunas tareas del cuadernillo de construcciones con estudiantes de grado sexto y evaluar el funcionamiento del material para desarrollar los procesos de visualización y razonamiento.

Capítulo 2. Marco Conceptual

2.1. El proceso de construcción geométrica

En este trabajo entendemos una construcción geométrica, como una representación de un objeto o relación geométrica que se ha hecho utilizando herramientas de trazo de tal forma que se garantice el cumplimiento de las propiedades de dicho objeto o relación (Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004). Por ejemplo, la representación de un cuadrado hecha con regla no graduada y compás, partiendo de un segmento que sea su diagonal, es una construcción. Según los autores mencionados, el proceso de construcción geométrica, entendido como la secuencia fundamentada de pasos para generar una construcción, cumple dos funciones esenciales:

- Asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas invariantes, en la representación del objeto o relación.
- Lograr una representación genérica de un objeto o relación geométrica, tal que al repetir los pasos del proceso de construcción se obtenga una representación que conserve las mismas propiedades invariantes características del objeto.

Es importante diferenciar una construcción geométrica del proceso de construcción. En este documento este último será considerado como la acción de llevar a cabo la secuencia de pasos fundamentales, partiendo de representaciones dadas de algunos elementos del objeto o relación, o de representaciones de otros objetos relacionados con lo que se quiere construir (Ayala, 2008). Por ejemplo, para representar un cuadrado se puede partir de un segmento que represente el lado, un segmento que represente la diagonal o dos rectas perpendiculares que guían la construcción de los ángulos, entre otras opciones.

Las representaciones iniciales se usan para construir las partes faltantes de la representación del objeto o relación, o trazos auxiliares que guían la construcción de las partes fundamentales a representar (Peláez, 2009). En ese orden de ideas, el proceso de construcción geométrica genera una representación, y el seguir los pasos fundamentales hace que dicha representación tenga propiedades invariantes que caracterizan al objeto o la relación geométrica.

La representación de un objeto o relación se puede lograr mediante diversos procesos de construcción que difieren en los elementos iniciales representados, los trazos auxiliares o fundamentales que se hacen y el orden en que se hacen. Una construcción puede ser producto de diferentes caminos en distintas sucesiones de pasos. Pero por cualquier vía, la representación hecha debe tener las propiedades invariantes del objeto o de la relación (Araya y Alfaro, 2009; Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004). Es conveniente tener la precaución de no alterar el orden de los pasos o de no saltarse pasos de un proceso de construcción porque puede pasar que la representación no resulte ser lo deseado. Por ejemplo, si al construir un cuadrado a partir de una recta, en la secuencia usual de pasos solo se consideran trazos perpendiculares el objeto construido resultaría ser un rectángulo y no un cuadrado porque ningún paso permite garantizar la congruencia de los lados.

En este sentido, la elaboración y manipulación de una construcción geométrica permite a los estudiantes, no solo formular definiciones y conjeturas, sino que también experimentar, examinar y reflexionar, acciones que les permitirán comprender los conceptos y las relaciones geométricas trabajadas (Clements y Battista, 1992).

2.2. El papel de la construcción geométrica en el trabajo en matemáticas

A lo largo de los siglos, los conocimientos matemáticos se han desarrollado para resolver problemas relacionados con el contexto de la época. Muchos de estos conocimientos se han transformado, mostrando que la matemática es obra del hombre y que está en constante elaboración. Uno de tales conocimientos, es el proceso de construcción geométrica.

Las primeras civilizaciones con registros de trabajos con construcciones geométricas son la mesopotámica y la egipcia (Ayala, 2008). En dichos registros se evidencia que el trabajo de construcción, que se realizaba con compases de abertura fija o con varas de determinados tamaños, servía para los trabajos de agricultura y arquitectura. De esta manera tenía un fin pragmático.

La geometría en la Grecia antigua se inspiró en parte por la teoría platónica del mundo de las ideas. Se estructuró teniendo como foco el estudio de las circunferencias y las rectas, vistas como líneas perfectas y básicas. Estos trazos perdieron así el carácter material y adquirieron una connotación idealizada, a diferencia del uso que le daban las culturas mencionadas previamente. Así, por ejemplo, una circunferencia dejó de ser la forma de la luna llena, o una recta ya no era vista como la forma del horizonte y comenzaron a verse como conjuntos de puntos que tienen cierta propiedad (Ayala, 2008).

Los geómetras griegos se enfocaron en el estudio de las propiedades de las formas geométricas y en sus relaciones, apoyándose en las construcciones con regla y compás. En dicho estudio formularon problemas producto de situaciones planteadas o generalizaciones de otras construcciones, que no necesariamente podían resolverse con regla y compás y que sirvieron de base para el desarrollo del conocimiento geométrico. Por ejemplo, la cuadratura de la circunferencia (que consiste en construir un cuadrado que tenga el área igual a la de una circunferencia dada) sirvió de base para encontrar la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro (Ayala, 2008). O la trisección de un ángulo (que consiste en dividir un ángulo en tres ángulos congruentes) sirvió para demostrar que el ángulo de 1° no es construible con regla y compás (Fernández, Peñalba y Mora, 2008).

Euclides, en su trabajo desarrollado en el libro "Los Elementos" le dio a la geometría griega una estructura simple, ordenada y proposicional, usando la lógica de Aristóteles (Ayala, 2008). Esta estructura fue un modelo deductivo para el desarrollo de la ciencia que por más de 2000 años se consideró perfecto y que se centró en las construcciones con regla y compás. En su trabajo con proposiciones geométricas, Euclides concibió el proceso de construcción como una demostración de una conjetura sobre un enunciado geométrico. Así, toda afirmación que tuviera como respaldo una construcción geométrica sería entonces verdadera. Por eso, en cada proposición él indicaba la manera en que es posible construir un objeto geométrico con regla y compás Euclídeo (cuya abertura no se mantenía al levantarlo). La construcción le servía para razonar.

Ilustración 1 Compás Euclídeo. Recuperado de https://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/masones-los-constructores-de-catedrales_6237/2

El compás euclidiano, inspirado por los egipcios y considerado antes del siglo XV como una herramienta divina tenía forma de unas tijeras curvas (Ilustración 1). Fue usado también con fines prácticos, por cientos de años. Como se volvió una importante herramienta para la navegación, se sofisticó, para que se pudiera conservar la abertura. Con ello se solucionaron problemas de precisión recurrentes en cartografía.

Tras el desarrollo de la geometría analítica, en el siglo XVII, las construcciones con regla y compás pasaron a un segundo plano, por la relevancia dada a las representaciones algebraicas. Sin embargo, parte del desarrollo de la geometría analítica fue gracias al uso de regla y compás en la construcción de instrumentos mecánicos para trazar curvas (Bello y Forero, 2014).

Inspirado por los artistas renacentistas y retomando la idea del compás ideal y la regla infinita de Euclides, en el Siglo XVII Desargues formuló los principios de la geometría proyectiva. Además de afirmar que en un plano dos puntos determinan una recta y que todo par de rectas siempre se intersecan, Desargues afirmó que, en el caso de ser rectas paralelas, la intersección se encuentra en el infinito.

Las ideas de Desargues eran muy elaboradas e inicialmente tuvieron muy pocas aplicaciones prácticas y por lo tanto muy poca acogida. Por eso la geometría analítica primó dentro de la comunidad matemática durante los siglos XVII y XVIII. Con las ideas de Lobachevski y su trabajo sobre la inversión, en especial la construcción que realizó para invertir los puntos de una circunferencia (Cisternas y Rigoberto, 2015; Smogorzhevshi, s.f.), se retomó el trabajo de Desargues dando lugar a que la geometría proyectiva fuese objeto de estudio durante el siglo XIX, sirviera de fundamento para el desarrollo de las geometrías no euclidianas y aportara elementos teóricos para el desarrollo de la teoría cuántica y la astrofísica, entre otros.

En la actualidad, con el desarrollo de la tecnología informática y los programas de geometría dinámica, el proceso de construcción geométrica se sofisticó y permitió a los matemáticos tener acceso al compás euclidiano y la regla virtuales. Estos elementos han ayudado a la formulación de conjeturas y posteriormente de teoremas. Un ejemplo es el trabajo matemático desarrollado en el Instituto GeoGebra en el que se buscan relaciones entre objetos geométricos, como, por ejemplo, entre diferentes puntos notables de triángulos. (Ver http://geogebra.es/cvg/06/6.html)

En síntesis, a lo largo de la historia, el razonamiento matemático se ha apoyado en construcciones geométricas. Como mencionan Araya y Alfaro (2009) estas representan la solución a problemas y exhiben propiedades geométricas necesarias para incentivar la visualización y el razonamiento que se puede derivar de ellas.

2.3. Las construcciones geométricas en la enseñanza de la geometría

Al igual que en las matemáticas, el papel de la construcción geometría y del proceso de construcción geométrica en el currículo escolar ha sufrido transformaciones, en respuesta a reformas educativas o a intereses sociales. Antes de la década de los 40 la geometría jugaba un papel importante en la escuela, viéndose como materia del currículo (Barrantes, Balletbo y Fernández, 2014). Una evidencia de lo mencionado son los libros de texto de geometría, que estaban separados de otras ramas de la matemática como la aritmética. El contenido de dichos textos era esencialmente de geometría sintética y presentaban construcciones con regla y compás. Por ejemplo, las geometrías de Cabrera y Medici (1936) tenía una guía visual y un protocolo escrito de diferentes construcciones (Ilustración 2).

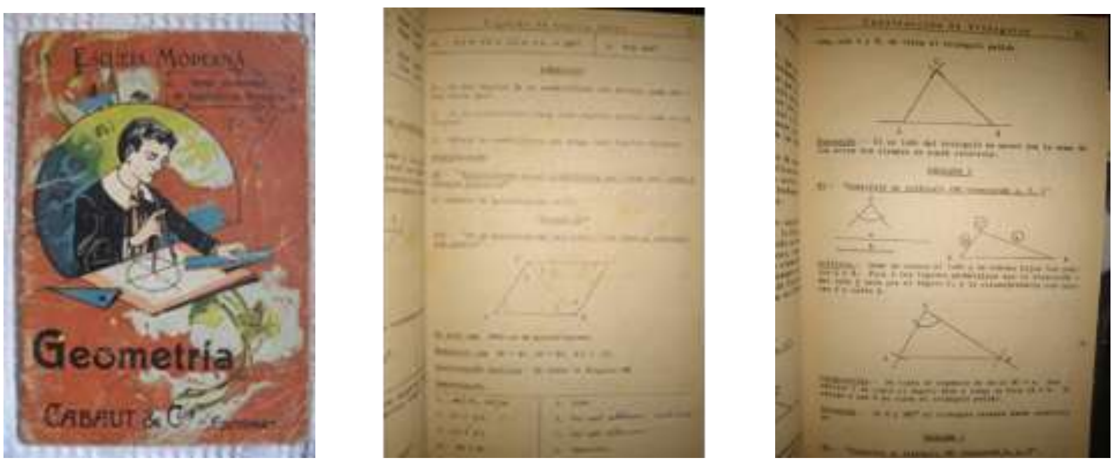


Ilustración 2 Geometría de Cabrera y Medici (1936) rescatado de (Recuperado de https://www.borisbian.com.ar/cabaut-cia-geometria-1920-3849xJM)

Entre los años 40 y los años 60 la geometría fue relacionándose con otras áreas de las matemáticas. La geometría sintética empezó a ser desplazada por la geometría analítica y la trigonometría en el currículo escolar. Una evidencia de esto es que los textos de Cabrera perdieron vigencia y fueron remplazados por otras geometrías como la de Baldor (1966) (Ilustración 3) Como podemos observar, este libro presenta construcciones no tan elaboradas y además las relaciona con medidas y con un sistema de referencia.

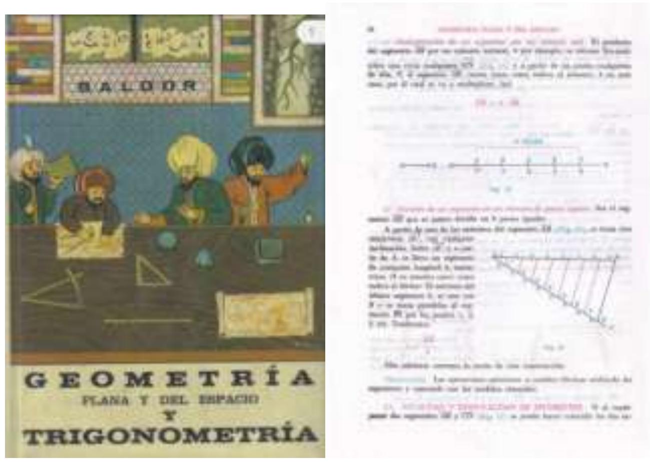


Ilustración 3 Geometría de Baldor (Baldor, 1966)

Desde la década de los 60 y hasta principios del siglo XXI, la geometría sintética quedó en un segundo plano en los programas de matemáticas y dejó de ser una materia del currículo. Pasó a ser un contenido generalmente superficial usado para calcular la medida de ángulos, lados, áreas y volúmenes. Muy pocos profesores le daban la importancia merecida como un medio para que los estudiantes desarrollaran procesos de razonamiento (Caldas, 2006). Por ejemplo, en los textos de la editorial MC Graw Hill publicados en este periodo, la geometría es una unidad de los libros de matemáticas dedicada al cálculo de áreas y volúmenes, como se muestra en la Ilustración 4.

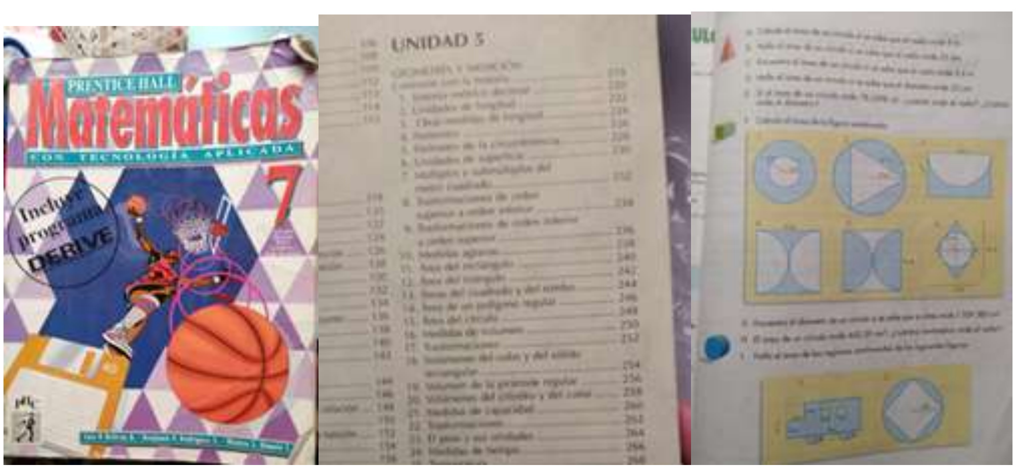


Ilustración 4 libros de la editorial Mc Graw Hill

En estas dos últimas décadas, con el desarrollo de la tecnología informática y en especial de los programas de geometría dinámica, junto con la reforma al currículo producida después de la formulación de los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), la construcción geométrica y en general la geometría sintética ha retomado su papel en la escuela sirviendo como herramienta para desarrollar los procesos de razonamiento y visualización (Castellanos, 2010).

2.4. El papel de la construcción geométrica en el aprendizaje de la geometría

La geometría favorece y desarrolla en los estudiantes capacidades como la percepción visual de formas geométricas bidimensionales y tridimensionales, la expresión verbal relacionada con comunicar ideas acerca del espacio y la forma y el razonamiento apoyado en figuras (Barrantes y Balletbo, 2012). Por esto, la geometría se puede considerar como un instrumento de pensamiento que permite a los estudiantes resolver problemas de diversa índole y comprender un mundo que les ofrece una amplia gama de formas geométricas, en cada uno de los escenarios que lo conforman, sean estos naturales o artificiales Araya y Alfaro (2009). Duval (1998) enfoca el aprendizaje de la geometría en tres procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento, y la construcción. Según este autor, esta última es un puente de conexión entre los procesos de visualización y de razonamiento. Por ejemplo, tras realizar la construcción de un cuadrado un estudiante puede visualizar que sus cuatro lados son congruentes y sus cuatro ángulos son rectos y, según como realicé la construcción, puede determinar condiciones particulares necesarias para que un cuadrilátero sea cuadrado; de modo que, si estas condiciones se cumplen, las propiedades del cuadrado necesariamente se cumplen. A continuación, nos referiremos a los procesos de visualización y razonamiento y luego estableceremos una conexión entre ellos mediante el proceso de construcción.

2.4.1. Visualización

Entendemos la visualización como la habilidad de acceder un objeto o relación geométrica, por medio de imágenes mentales o representaciones físicas (Torregrosa y Quesada, 2007; Cantoral y Montiel, 2003; Marmolejo y González, 2015). Su propósito es identificar características y propiedades de los objetos o relaciones geométricas que están a la vista y aquellas que no se ven a simple vista, pero que se han resaltado mediante trazos (Arcavi ,2003; Duval, 1998).

La visualización es necesaria para que los estudiantes puedan observar y comunicar información relativa a objetos geométricos. Por esto es importante para el aprendizaje de la geometría y generalmente es el primer contacto que tienen los estudiantes con los objetos o relaciones geométricas. Además, es el soporte e impulso para las actividades cognitivas de razonamiento y construcción geométrica (Marmolejo y Vega, 2012).

Pero se debe tener en cuenta que no se puede aprender geometría solo viendo la representación de objetos o relaciones geométricas. La generalización de las propiedades de un objeto geométrico no se puede dar solo a partir de la percepción.

En consecuencia, como dice Portillo (2017), si bien la visualización es el primer proceso geométrico con el que interactúan los estudiantes con los objetos o relaciones geométricas, es necesario que exista una actividad cognitiva de razonamiento en el proceso de construcción, apoyada por la visualización y que también favorezca a esta última.

2.4.2. Razonamiento geométrico

Entendemos el razonamiento geométrico como el proceso de conectar experiencias y saberes inmersos en estas, con el fin de indagar, obtener nueva información sobre objetos o relaciones geométricas, interpretar información sobre estos, y explicar el proceso de construcción de objetos y relaciones geométricas, determinando la manera más razonable de proceder para hacer dichas construcciones. El razonamiento transforma las ideas que surgen en el estudiante relacionadas con objetos geométricos (Samper, Molina y Echeverry, 2013).

Según Acosta y Fiallo (2017) el razonamiento contribuye al desarrollo de la visualización. En este sentido la geometría escolar, se mueve entre dos polos: uno, el de la intuición o la percepción, en donde ubicamos a la visualización; y el otro, el de la deducción o la abstracción en donde ubicamos el razonamiento. A pesar de ser mundos separados, la visualización y el razonamiento coexisten en una relación simbiótica. Es decir que no se puede hacer geometría escolar si se prescinde de uno de ellos.

2.4.3. Proceso de construcción geométrica como puente entre la visualización y el razonamiento

Acosta y Fiallo (2017) afirman que en ciertas ocasiones se presentan tensiones entre los procesos de visualización y de razonamiento: el conocimiento que proviene de la visualización no se conecta bien con el razonamiento o el razonamiento no da cuenta de lo que se está viendo. Una salida que se ha encontrado en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría es mediante el proceso de construcción geométrica (Duval, 1998; Marmolejo y Vega, 2012).

El proceso de construir ayuda a los estudiantes a visualizar atributos de los objetos o las relaciones geométricas y a razonar sobre propiedades y relaciones de estas. Adicionalmente Rico (2009) menciona que gracias a los trazos auxiliares que se emplean al representar un objeto geométrico, es posible visualizar otros trazos que componen al objeto o la relación geométrica. Así un objeto geométrico puede ser visto como constituido por otras formas geométricas interdependientes.

Además, el proceso de construcción ayuda en la resolución de problemas o en la búsqueda de demostraciones. Es por ello que la geometría no se puede seguir enseñando como un producto acabado, suprimiendo todo el proceso de elaboración de dicho conocimiento y aislándola del mundo o de las otras áreas de las matemáticas (Araya y Alfaro, 2009).

2.5. Trazos geométricos auxiliares

En el proceso de construcción geométrica usualmente es necesario utilizar trazos auxiliares para la construcción de los objetos y las relaciones geométricas. Como se ha mencionado en la sección 2.1, partiendo de un elemento un objeto, o de otros que estén relacionados con este se realizan trazos auxiliares que guían la construcción de las demás partes del objeto.

Entendemos como trazos auxiliares a aquellos, realizados con regla no graduada o compás, que se usan para producir las partes faltantes del objeto geométrico a construir, pero que no son elementos fundamentales de este. Los trazos auxiliares determinan conjuntos de puntos que cumplen ciertas propiedades y que sirven para representar partes del objeto. Por ejemplo, si queremos garantizar equidistancia entre puntos o congruencia de segmentos, se utiliza una circunferencia como trazo auxiliar; para garantizar un ángulo recto utilizamos una recta perpendicular como trazo auxiliar. En ese sentido, las representaciones de los objetos geométricos reúnen características y propiedades evidenciadas en los trazos auxiliares.

Como ya dijimos, la comprensión del proceso de construcción geométrica con regla y compás involucra, además de la visualización, ciertos razonamientos que permiten explicar por qué se hace la construcción como se propone. Los trazos auxiliares hacen evidentes ciertas propiedades de un objeto o relación geométrica contribuyendo a la comprensión mencionada. Por ejemplo, cuando se hace la construcción de un rombo partiendo de uno de sus lados, el segmento AB, se usan circunferencias congruentes con centro en los extremos de dichos segmentos es decir A y radio AB, con centro en B y radio AB, se determina un punto E que es la intersección entre las dos circunferencias y se construye una última circunferencia con centro en E y radio AB, para garantizar que los lados del rombo $ABCD$, sean congruentes. El trazo auxiliar de las circunferencias permite que los cuatro puntos sean los vértices de un cuadrilátero de lados congruentes.

Como ya mencionamos, es necesario que los estudiantes diferencien entre un trazo auxiliar y un trazo fundamental. Una manera para lograr esto es añadiendo y ocultando trazos como partes de una configuración geométrica, permitiendo que los estudiantes logren desarrollar los procesos cognitivos de visualización y racionamiento por medio del proceso de construcción geométrica.

2.5.1. El papel calco y los trazos auxiliares

El trabajo de construir con regla y compás es importante para que los estudiantes le den significado a las propiedades de los objetos geométricos (Hoffer, 1981). Pero para ello entender una construcción geométrica, es importante que diferencien los trazos auxiliares de los trazos fundamentales de la construcción. Un recurso para ayudar a esto último es utilizar el papel calco como plano auxiliar (Puig, 1947, López, Fernández y Leno, 2014).

López, Fernández y Leno (2014) sugiere que los estudiantes copien del plano de las construcciones a la hoja calco, los trazos fundamentales de la construcción. Este trabajo le ayuda a entender las propiedades invariantes del objeto o la relación construida (Radford, 1998; Sarasua, 2013).

Además de lo mencionado sobre el papel calco, este sirve para favorecer la aproximación intuitiva a las construcciones geométricas pues puede usarse como plano auxiliar en el que se hagan los trazos fundamentales del objeto o la relación geométrica construida, dejando en la hoja blanca los trazos auxiliares que permiten adelantar el proceso de construcción. De esta manera, el papel calco apoya la visualización de atributos geométricos y la identificación de propiedades que fundamentan el proceso de construcción (Puig, 1947).

Capítulo 3. Proceso Elaboración de la Cartilla de Construcciones Geométricas

En este capítulo presentamos el proceso que condujo a la elaboración de la cartilla para hacer construcciones geométricas.

3.1. Concepción de una idea que dio lugar a la elaboración de la cartilla de construcción geométrica

Nuestra primera idea fue enseñar a hacer construcciones geométricas, en nuestras prácticas docentes, usando un programa de geometría dinámica como GeoGebra. Queríamos usar la herramienta Ocultar/Mostrar cuya principal función es esconder trazos auxiliares que son necesarios en una construcción, pero no son fundamentales. Pensábamos que con la herramienta Ocultar/Mostrar podríamos enseñar objetos y relaciones geométricas a partir de construcciones y no de manera memorística, como veíamos que se hacía en la escuela.

Infortunadamente, como señalamos en la justificación, encontramos muchos obstáculos para usar un programa de geometría dinámica en los colegios donde tuvimos prácticas docentes. Por esta razón, tuvimos que buscar una alternativa que emulara la herramienta Ocultar/Mostrar y fuera asequible a los estudiantes de escasos recursos.

3.2. Inspiración

Se nos ocurrió como alternativa para “emular” la herramienta Ocultar/Mostrar que podíamos aprovechar un recurso utilizado en clases de arte: el cuaderno de dibujo Como vemos en la Ilustración 4 este tiene hojas blancas (1) y (3), con un calibre mayor al de hojas de block normal, y hojas calco (2) que se sobreponen a las hojas blancas.

Ilustración 5 Cuaderno de Dibujo

El cuaderno de dibujo es nuestra inspiración de la cartilla para hacer construcciones geométricas que presentamos en el presente trabajo. Para el aprovechamiento de este recurso hemos tenido en cuenta los elementos centrales del aprendizaje de la geometría que comunicamos en el capítulo dos.

Buscamos que la cartilla les permita a los estudiantes adquirir destrezas en el uso de la regla no graduada y el compás, para adelantar el proceso de construcción de objetos y relaciones geométricas en donde se destaquen sus características. Durante el proceso, buscamos estimular los procesos de visualización y de razonamiento, procurando que los estudiantes comuniquen sus ideas de manera escrita y ordenada.

3.3. Descripción de la cartilla de construcciones geométricas

A continuación, hacemos una descripción de la cartilla de construcciones geométricas indicando cómo vemos que se pueden promover los procesos de visualización y de razonamiento.

3.3.1. Hoja 1: Redacción

Esta hoja contendrá un diagrama de pasos del proceso de construcción geométrica y espacios para que los estudiantes respondan las preguntar formuladas, tanto en las nubes como en los hexágonos. Por ejemplo, en la Ilustración 6 se muestra el diagrama de pasos para realizar la construcción de dos rectas perpendiculares.

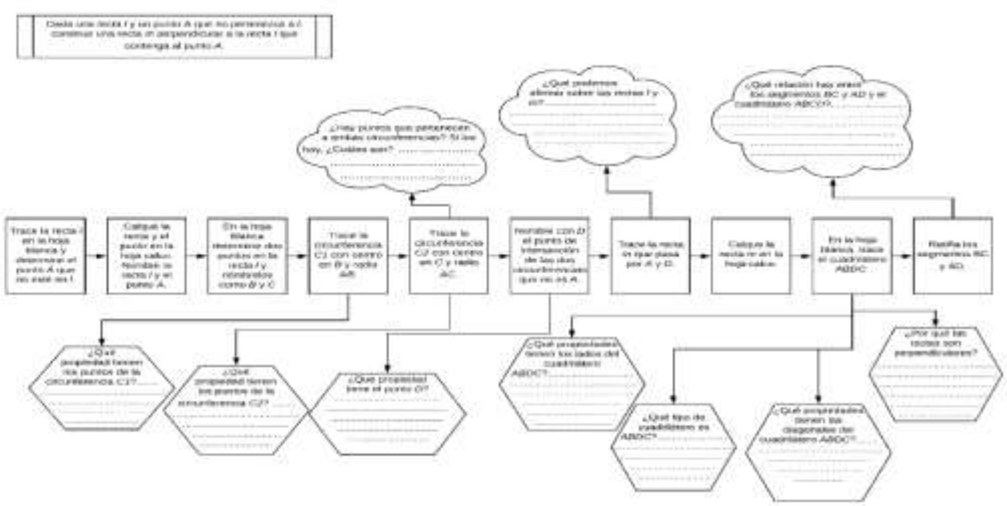


Ilustración 6 Diagrama de pasos construcción

En la hoja de redacción se encuentran los siguientes elementos:

El enunciado: En un rectángulo con doble línea ubicado en la parte superior izquierda de la hoja los estudiantes encontrarán el enunciado de la construcción que deben hacer.

Pasos de la construcción: En una secuencia de rectángulos ubicados hacia la mitad de la hoja, escribimos los pasos del protocolo que deben seguir en el proceso de construcción geométrica, por ejemplo, en la ilustración 6 los pasos de la construcción están resaltados de color rojo.

Espacios para comunicar la visualización: En la parte superior de algunos rectángulos con pasos de la construcción habrá espacios en forma de nubes con preguntas. Los estudiantes deben responder cuestiones relacionadas con el proceso de visualización. Por ejemplo, en el diagrama de la ilustración 6 se pregunta en el paso 7: "¿Qué podemos afirmar sobre las rectas l y m?"; en el paso 5, "¿hay puntos que pertenezcan a ambas circunferencias?" Estas preguntas tienen la finalidad de que los estudiantes escriban atributos y propiedades que se pueden ver y afirmar a simple vista.

Impulso al razonamiento: En la parte inferior de algunos rectángulos hay espacios en forma de hexágono para que los estudiantes respondan preguntas relacionadas con el proceso de razonamiento. Por ejemplo, en el diagrama de la ilustración 5 se hacen las siguientes: en el paso 5 "¿Qué propiedad cumple los puntos de la circunferencia $C2$?"; en el paso 9 "¿Qué propiedad tiene las diagonales del cuadrilátero $ABDC$?". Con estas preguntas buscamos que los estudiantes argumenten el porqué de propiedades de trazos, objetos y relaciones construidas y el por qué los trazos conducen a que el resultado sea realmente el objeto y relación que se quiere construir. Los estudiantes pueden relacionar cada propiedad del objeto con las propiedades que cumple los trazos auxiliares que determinan la construcción.

3.3.2. Hoja 2: papel calco

Esta hoja es traslucida. Esta característica del papel les permite a los estudiantes copiar trazos de la hoja de construcción (ver 3.3.3). Ellos deben calcar solamente los trazos fundamentales del objeto o la relación geométrica. De esta manera, si ubican una hoja blanca entre la hoja calco y la hoja de la construcción verán solamente los trazos fundamentales.

3.3.3. Hoja 3: la construcción

En la tercera hoja el estudiante realiza tanto los trazos auxiliares como los fundamentales del proceso de construcción geométrica. Es una hoja de mayor calibre que las hojas usuales, por lo que tienen la posibilidad de realizar varios trazos sin romper esta hoja.

3.3.4. Fichas guardables

Es un rectángulo de aproximadamente $8\ cm \times 12\ cm$, los estudiantes encontraran un resumen de algunos objetos o relaciones geométricas con su definición y principales características. Este les servirá para justificar algunas propiedades, Por ejemplo, para responder la pregunta “¿Por qué las rectas son perpendiculares?” (paso 9 de la construcción de rectas perpendiculares), necesitan saber que las diagonales de una cometa son perpendiculares. Esta información estará en la ficha “la cometa” como se muestra en la Ilustración 7.

Ilustración 7 Ficha Guardable de la cometa

3.4. Descripción de las tareas de construcción

Las tareas que proponemos en el cuadernillo de construcciones, las diseñamos siguiendo un orden, es decir en cada tarea se utilizan objetos, relaciones y propiedades que se han construido o identificado en tares anteriores.

Por ejemplo, para construir un cuadrado dada un segmento AB que es su diagonal, los estudiantes garantizan que lo construido es un cuadrado si, por ejemplo, siguen los siguientes pasos: punto medio M del segmento AB; una perpendicular l al segmento que contenga a M; una circunferencia $C1$ con centro en M y radio MA; las intersecciones C y D de la circunferencia $C1$ con la perpendicular l; trazar el cuadrilátero $ACBD$. De esta manera, los estudiantes pueden visualizar que el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia y que sus diagonales son perpendiculares. Como las diagonales del objeto se construyeron perpendiculares y congruentes, al hacer uso de construcciones previas, en este caso que las diagonales del cuadrado son perpendiculares y congruentes; los estudiantes pueden decir con argumentos que el objeto construido es un cuadrado.

Capítulo 4. Tareas del Cuadernillo de Construcciones

Tarea 1: La circunferencia

Enunciado de la tarea

Dados los puntos P y Q, construir el conjunto de puntos cuya distancia a P es la misma que la distancia PQ.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

Mediante el protocolo de construcción los estudiantes, determinan puntos que equidistan de un punto P, partiendo de dos puntos, uno de ellos P, los cuales deben ser representados en la hoja blanca, a una distancia razonable y con una ubicación centrada en la hoja para que puedan ver esa equidistancia más fácilmente. El docente guiará el proceso de construcción para que los estudiantes lo realicen paso a paso y, teniendo en cuenta el protocolo, logren construir la circunferencia y visualicen que el lugar geométrico de todos los puntos construidos es la circunferencia.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes a partir de los objetos construidos vean que el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto P es una circunferencia.

El proceso de razonamiento se estimula al pedirle a los estudiantes explicar por qué los puntos construidos equidistan de un punto fijo. Y además que para conservar una distancia él puede utilizar la circunferencia.

Protocolo de construcción

1. En la hoja blanca determine dos puntos P y Q (procure que queden en la parte central de la hoja, ni muy separados, ni muy cercanos).
2. Trace una recta que contenga a P, pero no a Q.
3. Determine dos puntos A y B que pertenezcan a la recta, tales que PA=PQ y PB =PQ (pueden usar regla no graduada o compás).
4. Calque los puntos P, Q, A y B en la hoja calco. Nombre el punto P en la hoja calco.
5. Siga el mismo procedimiento, desde el paso 2 hasta el paso 4, con 5 rectas diferentes que pasen por P para determinar 10 puntos más (C, D, E, F, G, H, I, J, K, L). (La distancia de todos los puntos a P es igual que la distancia PQ).

Preguntas de visualización

Paso 4: ¿Qué puntos están alineados?
Paso 4: ¿Algún punto está entre otros dos?
Paso 4: ¿Qué diferencia hay entre P y otro punto que este entre A y B?
Paso 5: ¿Qué figura geométrica se formaría si pudiéramos determinar muchos puntos usando el mismo procedimiento?

Preguntas de Razonamiento

Paso 3: ¿Existe otro punto contenido en la recta, diferente de A y de B, que esté a una distancia de P igual a la distancia PQ?
Paso 5: ¿Qué propiedad tienen todos los puntos distintos de P que quedaron en la hoja calco?
Paso 5: Sí quiere encontrar todos los puntos que cumplan la propiedad sin seguir el procedimiento ¿Qué debe hacer y por qué?

Hechos geométricos que intervienen

1. Circunferencia: Subconjunto de puntos de un plano, que equidistan de un punto llamado centro.
2. Equidistancia: Dos puntos A y B equidistan de un tercero C si y solo si $AC = BC$.
3. Colinealidad: tres puntos A, B y C son colineales si y solo si existe una recta m tal que $A, B, C \in m$.

Tarea 2: Recta perpendicular por punto externo

Enunciado de la tarea
Dada una recta l y un punto A que no pertenezca a l, construir una recta m perpendicular a la recta l que contenga al punto A.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

Lo que se busca con este protocolo de construcción, es construir una recta perpendicular a otra, dada, por un punto externo de la recta dada. La construcción se hace por medio de circunferencias, que son construcciones auxiliares con las que se garantiza la perpendicularidad de las rectas. Se logra al obtener una cometa y sus diagonales, que son perpendiculares.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes perciban que el punto D equidista de B, como A equidista *de* B y que D equidista de C, como C de A, además de ver que el cuadrilátero $ABDC$, tiene forma de cometa y que los segmentos BC y AD son sus diagonales.

El proceso de razonamiento se estimula al pedirles a los estudiantes que justifiquen porqué los puntos D y A equidistan de los puntos B y C, por qué $ABDC$ es una cometa y por qué sus diagonales son perpendiculares, así como las rectas que las contienen.

Protocolo de construcción

1. Trace una recta en la hoja blanca y nómbrela l. Determine un punto A que no esté en l.
2. Calqué la recta y el punto en la hoja calco. Nombre la recta l y el punto A en la hoja calco.
3. En la hoja blanca determine dos puntos en la recta l y nómbrelos como B y C
4. Trace la circunferencia C1 con centro en B y radio AB.
5. Trace la circunferencia C2 con centro en C y radio AC.

6. Nombre con D el punto de intersección de las dos circunferencias diferentes de A.
7. Trace la recta m que pasa por A y D.
8. Calque la recta m en la hoja calco.
9. En la hoja blanca, trace el cuadrilátero $ABDC$.
10. Retiña los segmentos BC y AD.

Preguntas de visualización

Paso 5: ¿Hay puntos que pertenecen a ambas circunferencias? Si los hay, ¿Cuáles son?

Paso 7: ¿Qué podemos afirmar sobre las rectas l y m?

Paso 10: ¿Qué relación hay entre los segmentos BC y AD y el cuadrilátero $ABCD$?

Preguntas de Razonamiento

Paso 4: ¿Qué propiedad tienen los puntos de la circunferencia $C1$?

Paso 5: ¿Qué propiedad tienen los puntos de la circunferencia $C2$?

Paso 6: ¿Qué propiedad tiene el punto D?

Paso 8: Si E es un punto que no está en l y es distinto de A ¿se puede trazar una recta que cumpla con las propiedades que m cumple, como se trazaría?

Paso 9: ¿Qué propiedades tienen los lados del cuadrilátero $ABDC$?

Paso 9: ¿Qué tipo de cuadrilátero es $ABDC$? (En caso de que los estudiantes no sepan de qué cuadrilátero se trata, se les da la posibilidad de consultar las tarjetas).

Paso 9: ¿Qué propiedades tienen las diagonales del cuadrilátero $ABDC$?

Paso 9: ¿Por qué las rectas son perpendiculares?

Conceptos y relaciones geométricas que se pusieron en juego

1. Circunferencia: Subconjunto de puntos de un plano, que equidistan de un punto llamado centro.
2. Rectas perpendiculares: Dos rectas l y m son perpendiculares si y solo si las rectas l y m se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos.
3. Cometa: un cuadrilátero es una comenta si y solo si tiene dos pares de lados adyacentes congruentes.
4. Cuadrilátero: *polígono de cuatro lados y cuatro vértices.*
5. Diagonal de un cuadrilátero: Segmento que une dos vértices no adyacentes de un cuadrilátero.

Hechos geométricos que intervienen

1. Las diagonales de una cometa son perpendiculares.

Tarea 3: Mediatriz

Enunciado de la tarea

Dado el segmento AB, construya la recta l mediatriz del segmento AB.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

A partir de un segmento, los estudiantes construyen su mediatriz, por medio de trazos auxiliares como circunferencias que les garantizan la equidistancia de los puntos de la recta a los extremos del segmento.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes vean las relaciones que existen entre los puntos de recta l y los extremos del segmento AB. Además, los estudiantes podrán ver que esta recta es perpendicular al segmento por el punto medio.

El proceso de razonamiento se estimula al pedirles a los estudiantes que relacionen los objetos y relaciones construidas y las propiedades de estos como las equidistancias entre los puntos que pertenecen a una circunferencia con su centro, y la perpendicularidad de la recta l y el segmento AB, para justificar que la recta l es la mediatriz del segmento AB.

Protocolo de construcción

1. En la hoja blanca trace el segmento AB.
2. En la hoja calco, copie el segmento AB.
3. En la hoja blanca trace la circunferencia $C1$, con centro A y radio AB.
4. Trace la circunferencia $C2$, con centro B y radio AB. Con un color distinto a la circunferencia $C1$.

5. Determine los puntos de intersección de la circunferencia $C1$ y $C2$, y nómbrelos D y E
6. Trace una recta l, que contenga los puntos D y E.
7. En la hoja calco, copie la recta l.
8. Determine el punto de intersección del segmento AB y la recta l, y nómbrelo C.

Preguntas de visualización

Paso 4: ¿Cuántos puntos de intersección tienen las circunferencias $C1$ y $C2$?

Paso 8: ¿Qué podemos afirmar de la distancia AC y CB?

Paso 8: ¿Qué podemos afirmar de los ángulos $\angle ACE$ y $\angle BCD$?

Paso 8: ¿Qué podemos afirmar sobre las rectas l y el segmento AB?

Preguntas de Razonamiento

Paso 3: ¿Qué propiedad tienen los puntos que pertenecen a la circunferencia $C1$? Justifique su respuesta

Paso 4: ¿Qué diferencia hay entre los puntos que pertenecen a la circunferencia $C1$ y los que pertenecen a la circunferencia $C2$?

Paso 7: ¿Qué relación hay entre los puntos de la recta l y los extremos del segmento AB?

Paso 8: ¿Que propiedad tiene el punto C, con respecto a los puntos A y B?

Paso 8: ¿Qué relación hay entre los puntos D, B y E con el punto A? Justifique su respuesta

Paso 8: ¿Qué relación hay entre los puntos D, A y E con el punto B? Justifique su respuesta

Paso 8: ¿Cómo podrían justificar que la recta l es la mediatriz del segmento AB?

Hechos geométricos que intervienen

1. Equidistancia: Dos puntos A y B equidistan de un tercero C si y solo si $AC = BC$.
2. Punto medio: C es el punto medio del segmento AB si y solo si A, B y C son colineales, C esta entre A y B $(A - C - B)$ y el segmento AC es congruente con el segmento BC.
3. Recta perpendicular: Dos rectas l y m son perpendiculares si y solo si las rectas l y m se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos.

Tarea 4: Recta perpendicular por punto interno

Enunciado de la tarea

Dada una recta l y un punto A que pertenece a l, construir una recta m perpendicular a l que contenga al punto A.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

Partiendo de una recta l y un punto A que pertenezca a ella, el protocolo contiene los pasos para construir una recta perpendicular a l por el punto A. En esta tarea se utilizan como trazos auxiliares circunferencias que garantizan equidistancias. Por medio de la construcción de un cuadrilátero (rombo), los estudiantes justifican que las rectas son perpendiculares, por ser una propiedad de las diagonales de un rombo.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes vean, las propiedades de equidistancia que las construyen promedio de las circunferencias $C2$ y $C3$, con eso los estudiantes garantiza las congruencias de los lados EB y EC, CD y BD, del cuadrilátero $BDCE$.

El proceso de razonamiento se estimula al pedirles a los estudiantes que garanticen las propiedades del objeto o relación construida, como la relación de congruencia de los lados del cuadrilátero $BDCE$. Esto garantiza que el cuadrilátero es un rombo y a partir de sus propiedades se puede justificar que las rectas son perpendiculares, pues estas contienen las diagonales del rombo.

Protocolo de construcción

1. En la hoja blanca trace la recta l y determine un punto A que este en l.
2. En la hoja calco copie y nombre la recta l y el punto A

3. En la hoja blanca determine un punto en la recta l diferente del punto A y cerca a este punto; nómbrelo como B.

4. Trace la circunferencia $C1$ con centro en A y radio AB.

5. Nombre al punto de intersección de la circunferencia $C1$ y la recta l, diferente de B, con la letra C.

6. Trace la circunferencia $C2$ con centro en C y radio CB, usando un color diferente al usado para C1.

7. Trace la circunferencia $C3$ con centro en B y radio BC, usando un color diferente de $C1$ y de $C2$

8. Trace la recta m que contenga a los puntos de intersección de las circunferencias $C2$ y $C3$.

9. En la hoja calco copie la recta m.

10. En la hoja blanca trace el cuadrilátero $BDCE$

Preguntas de visualización

Paso 5: ¿Hay más de un punto que pertenece a la recta l y a la circunferencia $C1$? Si los hay ¿Cuáles son? Decirles que los puntos B y C son las intersecciones de $C1$ y la recta l.

Paso 5: Si ponemos otro punto en $C1$, por ejemplo, E, ¿cómo se ve en relación con B, A y C?

Paso 6: ¿Qué relación se ve entre el tamaño de las circunferencias?

Paso 6: ¿Qué puntos pertenecen a $C1$ y $C2$?

Paso 7: ¿Qué relación se ve entre el tamaño de las circunferencias $C1, C2$ y $C3$?

Paso 7 ¿Qué puntos pertenecen a $C1$ y $C3$? (3) ¿Hay puntos que pertenezcan a ambas circunferencias? ¿Cuáles? Si no tienen nombre, nómbrelos con D y E.

Paso 8: ¿Qué otro punto pertenece a la recta m diferente de los ya mencionados?

Paso 8: ¿Cómo es la posición de las rectas m y l?

Paso 9: ¿Cómo son las rectas l y m? (S no responden en el paso anterior) ¿Cómo es la posición de las rectas m y l? ¿Cómo son las rectas l y m?

Paso 9: ¿Por qué creen que resultaron perpendiculares? (¿No creemos que contesten, pero el profesor les dice, que se va a averiguar por qué con la siguiente construcción?)

Paso 10: ¿Qué tipo de cuadrilátero creen que es?

Preguntas de Razonamiento

Paso 5: ¿Por qué no hay sino dos puntos de intersección?

Paso 5: ¿Qué relación hay entre las distancias CA y AB? ¿Por qué? (tendrían que mencionar que las distancias son iguales porque B y C están en la circunferencia con centro en A)

Paso 6: ¿Qué propiedad tienen los puntos que pertenecen a la circunferencia $C2$? Justifique su respuesta.

Paso 6: ¿Qué puntos sobre l está a la misma distancia que BC? Nombre la pareja.

Paso 7: ¿Qué propiedad tienen los puntos que pertenecen a la circunferencia $C3$? Justifique su respuesta.

Paso 7: ¿Qué puntos sobre l está a la misma distancia que BC?

Paso 10: Mirando las tarjetas de propiedades busquen la propiedad que permite asegurar que l y m son perpendiculares?

Paso 10: ¿Por qué el cuadrilátero es un rombo? Si no contestan, preguntar: ¿por qué BD y BE son iguales? ¿por qué CD y CE son iguales? ¿por qué BD y CD son iguales.

Paso 10: ¿Por qué las rectas l y m son perpendiculares? Justifique las respuestas.

Hechos geométricos que intervienen

1. Circunferencia: Subconjunto de puntos de un plano, que equidistan de un punto llamado centro.
2. Equidistancia: Dos puntos A y B equidistan de un tercero C si y solo si $AC = BC$
3. Rectas perpendiculares: Dos rectas l y m son perpendiculares si y solo si las rectas l y m se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos.
4. Propiedad de las diagonales del rombo.

Tarea 5: Recta paralela

Enunciado de la tarea

Dada una recta l y un punto A que no pertenece a l, construir una recta m paralela al que contenga a el punto A.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

Esta tarea se plantea para que los estudiantes, siguiendo el protocolo de construcción con apoyo del docente, logren construir una recta paralela a una dada por un punto que no pertenece a la recta, por medio de la construcción de un paralelogramo.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes perciban la relación que existe entre las rectas l y m, por medio de la construcción de circunferencias las cuales sirven de trazos auxiliares para garantizar equidistancias.

El proceso de razonamiento va dirigido a que los estudiantes argumenten que, al tener el mismo radio, las circunferencias $C1$ y $C3$, los segmentos PS y AT son congruentes, de igual forma los segmentos SP y AT son congruentes, al ser radios de la circunferencia $C2$.

Por lo anterior garantizan que el cuadrilátero formado por los puntos S, A, P, T es un paralelogramo, logrando así que los estudiantes justifiquen que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos y por lo tanto que las rectas que contienen estos segmentos también lo son.

Protocolo de construcción

1. En la hoja blanca trace la recta l y determine un punto A que no esté contenido en l.
2. Calque en la hoja calco la recta l y el punto A.
3. En la hoja blanca determine un punto P en la recta l.
4. Trace la circunferencia $C1$ con centro en P y radio AP.
5. Determine una de las intersecciones de la circunferencia $C1$ con la recta l y nómbrela T.
6. Trace la circunferencia $C2$ con centro en P y radio TA.
7. Trace la circunferencia $C3$ con centro en A y radio AP.
8. Determine el punto de intersección de las circunferencias $C2$ y $C3$ que está en el mismo lado que A con respecto a la recta l y nómbrelo S.

9. Trace la recta m que contenga a los puntos A y S.

10. En la hoja calco copie la recta m.

11. Con los puntos que ha trabajado (A, S, P y T) Trace un cuadrilátero.

12. Trace el segmento AP.

Preguntas de visualización

|Paso 10: ¿Qué relación se puede visualizar entre las rectas l y m?

Paso 12: ¿Que se puede decir acerca de los puntos A, P, S?

Paso 12: ¿Que se puede decir acerca de los puntos A, P, T?

Preguntas de Razonamiento

Paso 6: ¿Qué relación tienen el radio de la circunferencia $C1$ y el radio de la circunferencia $C3$? ¿Por qué?

Paso 8: ¿Si escogemos el otro punto de intersección de las circunferencias $C2$ y $C3$, que pasa con las rectas m y l?

Paso 11: ¿Qué propiedades tienen los segmentos AS y PA del cuadrilátero $ASPT$? Justifique su respuesta.

Paso 11: ¿Qué propiedades tienen los segmentos AP y PT del cuadrilátero $ASPT$? Justifique su respuesta.

Paso 11: ¿Qué propiedades tienen los segmentos AS y PT del cuadrilátero $ASPT$? Justifique su respuesta.

Paso 11: ¿Qué propiedades tienen los segmentos PS y AT del cuadrilátero $ASPT$? Justifique su respuesta.

Paso 11: ¿Qué tipo de cuadrilátero es $ASPT$? (En caso de que los estudiantes no sepan de qué cuadrilátero se trata, se les da la posibilidad de consultar las tarjetas).

Paso 9: ¿Por qué pueden justificar que las rectas l y m son paralelas?

Hechos geométricos que intervienen

1. Circunferencia: Subconjunto de puntos de un plano, que equidistan de un punto llamado centro.

2. Intersección: conjunto de puntos que es común a dos o más conjuntos elementos.

3. Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan.

Tarea 6: Perpendicular - Perpendicular - Paralela

Enunciado de la tarea

Dada una recta l, construir una recta k paralela a l.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

Con el protocolo de construcción los estudiantes construyen una recta k paralela a una recta l dada, utilizando las tareas 2 y 3 de rectas perpendiculares.

El proceso de visualización va dirigido a que los estudiantes vean que las rectas l y k perpendiculares a la recta m no se intersecan. El proceso de razonamiento va dirigido a que los estudiantes justifiquen que las rectas l y k son paralelas, ya que al ser perpendiculares a la recta m no se intersecan por que forman dos ángulos alternos internos.

Protocolo de construcción

1. Trace una recta l.
2. Calque la recta l en la hoja calco.
3. Determine un punto en la recta l en la hoja blanca y llámelo A .
4. Trace una recta m perpendicular a l que pase por A. (Si necesita, use el protocolo de construcción número 2)
5. Determine un punto en la recta m diferente a A y nómbrelo B.
6. Trace una recta k perpendicular a m que contenga a B. (Si necesita, use el protocolo de construcción Número 3)
7. Calque la recta k en la hoja calco.

Preguntas de visualización

Paso 7: ¿Qué podemos afirmar sobre las rectas l y k?

Paso 12: ¿Qué tipo de ángulos son los ángulos $\angle CAB$ y $\angle DBA$?

Preguntas de Razonamiento

Paso 12: ¿Cómo se puede justificar que las rectas k y l son paralelas?

Conceptos geométricos que se pusieron en juego

1. Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan.
2. Rectas perpendiculares: Dos rectas l y m son perpendiculares si y solo si las rectas l y m se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos.

Tarea 7: Bisectriz

Enunciado de la tarea

Dados tres puntos A, B y C no alineados, construya la bisectriz del ángulo ABC.

Materiales

- Regla no graduada.
- Compás.
- Hoja calco.
- Hoja blanca.

Descripción de la tarea para docentes

En esta tarea los estudiantes construyen la bisectriz de un ángulo, partiendo de tres puntos no colineales. Los estudiantes determinan en la hoja blanca los tres puntos, a una distancia considerable para que, al trazar los rayos que determinan el ángulo, se puedan visualizar bien el ángulo y las construcciones auxiliares que garantizan que el rayo construido es la bisectriz del ángulo.

El proceso de visualización va dirigido a que los estudiantes vean las equidistancias construidas por medio de una circunferencia y que el punto F, pertenece al interior del ángulo ABC.

El proceso de razonamiento va dirigido a que los estudiantes deduzcan, que los triángulos ABF y BDF son congruentes utilizando el criterio lado-lado-lado, para garantizar que los ángulos $\angle ABF$ y $\angle FBC$, son congruentes y que F pertenece al interior del ángulo $\angle ABC$, por ser el punto medio del segmento AD y de este modo justificar que el rayo BF es bisectriz del ángulo ABC.

Protocolo de construcción

1. Determine tres puntos no colineales en la hoja blanca y nómbrelos A, B y C.
2. Trace el rayo BA y el rayo BC.
3. En la hoja calco, calque el ángulo $\angle ABC$.
4. En la hoja blanca trace la circunferencia C1, con centro en B y radio BA .
5. Determine el punto de intersección de la circunferencia con el rayo BC y nómbrelo D.
6. Trace los segmentos AD.
7. Determine el punto medio del segmento AD y nómbrela F.
8. Trace el rayo BF.
9. Calque el rayo BF.
10. Trace los triángulos ABF y BDF.

Preguntas de visualización

Paso 5: ¿los puntos B, D, C son colineales?

Paso 9: ¿El punto F está en el interior del ángulo ABC?

Preguntas de Razonamiento

Paso 5: ¿Qué relación hay entre BA y BD? ¿Por qué?

Paso 5: ¿Qué relación tiene el ángulo ABC y el ángulo ABD? ¿porque se da esta relación?

Paso 9: ¿Por qué el punto F está en el interior del ángulo ABC? justifique su respuesta.

Paso 7: ¿Qué relación hay entre AF y FD?

Paso 10: ¿Qué relación hay entre los triángulos ABF y BDF? ¿Cómo se puede justificar que existe esta relación?

Paso 10: ¿Por qué los ángulos ABF y FBC son congruentes?

Paso 9: ¿Justifique por qué el ángulo $\angle ABD$ es el mismo ángulo $\angle ABC$?

Paso 13: ¿Por qué el rayo BF es bisectriz del ángulo $\angle EBC$?

Conceptos geométricos que se pusieron en juego

1. Bisectriz: $\overrightarrow{BW}$ es bisectriz del $\angle ABC$ si y solo si: a) $W \in int\angle ABC$, b) $\angle ABW \cong \angle WBC$.

2. Rayo: Un rayo es la unión de un segmento y todos los puntos colineales que están a un lado del segmento $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X|A - B - X\}$.

3. Ángulos adyacentes: $\angle ABC$ y $\angle DBC$ adyacentes si y solo si D Pertenecen al semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y no contiene al punto A

4. Ángulos congruentes: $\angle ABC \cong \angle MNO$ si y solo si $m\angle ABC = m\angle MNO$.

Tarea 8: Triángulo equilátero

Enunciado de la tarea

Dado el segmento AB, construya un triángulo ABC equilátero.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

Partiendo de un segmento, los estudiantes construyen un triángulo equilátero, utilizando circunferencias como trazos auxiliares para garantizar las equidistancias de los vértices del triángulo ABC.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes vean que los puntos B, C, equidistan de A, como A, C, equidistan de B.

El proceso de razonamiento va dirigido a que los estudiantes garanticen la congruencia de los lados del triángulo ABC, para esto primero deben deducir que los segmentos AC y BC son congruentes, puesto que el punto C pertenece a la mediatriz del segmento AB y el segmento AB es congruente con el segmento AC al ser radio de la circunferencia $C1$, por lo tanto, el triángulo. ABC es equilátero.

Protocolo de construcción

1. En la hoja blanca, trace un segmento AB.
2. En la hoja calco copie el segmento AB.

3. Trace la circunferencia $C1$, con centro en A y radio AB.
4. Trace la circunferencia $C2$, con centro en B y radio AB.
5. Determine un punto de intersección de las circunferencias $C1$ y $C2$, y nómbralo C.
6. Trace los segmentos AC y BC.
7. En la hoja calco copie los segmentos AC y BC.

Preguntas de visualización

Paso 4: ¿Tienen puntos en común las circunferencias $C1$ y $C2$? ¿Cuantos?

Paso 4: ¿Qué puede decir de los puntos A, B, C?

Paso 6: ¿Que puede decir del triángulo ABC?

Paso 7: ¿Qué relación hay entre los lados del triángulo ABC?

Preguntas de razonamiento

Paso 5: si se traza la mediatriz ¿C pertenece a esta recta? Justifique su respuesta

Paso 7: ¿Por qué el triángulo ABC, es equilátero?

Hechos geométricos que intervienen

1. Congruencia: dos objetos son congruentes si sus medidas son iguales.
2. Triángulo equilátero: ΔABC equilátero si y solo si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

Tarea 9: Rectángulo

Enunciado de la tarea

Dada un segmento AB, construya un rectángulo $ABCD$.

Materiales

- Regla no graduada
- Compás
- Hoja calco
- Hoja blanca

Descripción de la tarea para docentes

Partiendo de un segmento AB los estudiantes construirán un rectángulo utilizando rectas perpendiculares como trazos auxiliares, para poder garantizar el paralelismo y los cuatro ángulos rectos del rectángulo.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes vean la relación que tiene las rectas l y m, s y k para ver que el cuadrilátero $ABCD$ rectángulo.

El proceso de razonamiento va dirigido a que los estudiantes garanticen el paralelismo de los segmentos AB y CD y los segmentos AC y BD, pues las rectas que los contienen son paralelas, al ser rectas perpendiculares a una misma recta. Se basan en la construcción 2 y 3. Usando la definición de perpendicularidad se garantiza que los cuatro ángulos son rectos, para justificar que el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo.

Protocolo de construcción

1. Trace un segmento AB
2. Trace la recta perpendicular a l que contenga a A, y nómbrela k.
3. Determine un punto C en k que no sea A.
4. Trace la recta perpendicular a k que contenga al punto C, y nómbrela m.
5. Trace la recta perpendicular a m que contenga al punto B, y nómbrela s.
6. Determine el punto de intersección entre m y s, nómbrelo D.
7. Calque el cuadrilátero $ABCD$.

Preguntas de visualización

Paso 4: ¿Qué puede decir de las rectas l y m?

Paso 5: ¿Qué puede decir las rectas k y s?

Paso 5: ¿Qué puede decir las rectas m y s?

Paso 7: ¿Qué puede decir del cuadrilátero $ABCD$?

Preguntas de Razonamiento

Paso 4: ¿Por qué las rectas l y m son paralelas? Describa que construcción le sirve para justificarlo.

Paso 6: ¿Por qué las rectas s y m son perpendiculares?

Paso 7: ¿Por qué los cuatro ángulos del cuadrilátero son rectos?

Paso 7: ¿Qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$?¿por qué?

Conceptos geométricos que se pusieron en juego

1. Rectángulo: es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.
2. Rectas perpendiculares: Dos rectas $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ son perpendiculares si y solo si intersecan en un punto X y el ángulo $\angle CXA$ recto.
3. Ángulo recto: $\angle ABN$ es recto si y solo si $m\angle ABN = 90$.

Tarea 10: Cuadrado

Enunciado de la tarea

Construir un cuadrado a partir de un segmento.

Materiales

- Regla no graduada.
- Compás.
- Hoja calco.
- Hoja blanca.

Descripción de la tarea para docentes

En esta tarea los estudiantes construyen un cuadrado a partir de un segmento. Por medio de la construcción de la mediatriz del segmento AC, se garantizará la congruencia de los cuatro lados del cuadrilátero $ABCD$, también nos permite garantizar que las diagonales del cuadrilátero son congruentes y perpendiculares, para justificar que el cuadrilátera $ABCD$ es un cuadrado.

El proceso de visualización se fomenta mediante preguntas dirigidas a que los estudiantes vean que los segmentos AC y BD son las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ y que A, B, C, D equidistan de E.

El proceso de razonamiento va dirigido a que los estudiantes garanticen que los segmentos AB, BC, CD y AD son congruentes, porque la recta l es mediatriz del segmento AC. Las diagonales son iguales por ser diámetros de una misma circunferencia, por lo que también forman cuatro triángulos congruentes y así se justifica que el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado.

Protocolo de construcción

1. Trace el segmento AC.
2. Determine el punto medio de AC y nómbrelo E.
3. construya la mediatriz del segmento AC.
4. Trace la circunferencia C1 con centro en E y radio EC.
5. Determine los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia y nómbrelos B yD.
6. Calque el cuadrilátero $ABCD$.

Preguntas de visualización

Paso 5: ¿Qué puede decir de los puntos A, B, C, D con respecto al punto E?

Paso 6: ¿Qué relación hay entre el cuadrilátero $ABCD$ y el segmento AC ?

Paso 3: ¿Qué pueden decir del segmento AC y la recta l?

Paso 6: ¿Qué relación hay entre el cuadrilátero $ABCD$ y la recta l?

Preguntas de Razonamiento

Paso 3: ¿Qué propiedad tiene la recta l con relación al segmento AC? Justifique su respuesta.

Paso 6: ¿Qué propiedad tienen los segmentos AB, BC, DC, y DA? Explique su respuesta.

Paso 6: ¿Qué propiedad tienen los segmentos AB y DC y los segmentos AD y BC?

Paso 6: ¿Por qué la figura construida $ABCD$ es un cuadrado?

Paso 6: ¿Qué propiedad tiene los segmentos AC y BD?

Paso 6: ¿Qué propiedad tienen los cuatro triángulos que se forman en el interior del cuadrilátero $ABCD$?

Conceptos geométricos que se pusieron en juego

1. Cuadrado: es un cuadrilátero regular; esto es una figura del plano con sus cuatro lados iguales, y sus cuatro ángulos que son de 90°. Sus dos únicas diagonales son de igual longitud y perpendiculares entre sí.
2. Circunferencia: Subconjunto de puntos de un plano, que equidistan de un punto llamado centro.
3. Diagonal: En un polígono una diagonal es el segmento que une dos vértices no continuos del polígono.

Capítulo 5. Implementación de Algunas Tareas y Evaluación del Funcionamiento de estas con Estudiantes de Grado Sexto y séptimo

5.1. Descripción general de la implementación

La implementación de las primeras dos tareas de construcción propuestas se realizó con cuatro estudiantes con edades que oscilan entre los 11 y los 13 años, de los cuales tres cursan grado sexto en colegios oficiales y una en un colegio privado. Los cuatro estudiantes afirmaron que la geometría que conocen está relacionada con calcular áreas, perímetros y diferenciar figuras geométricas. Solo una estudiante mencionó haber trabajado actividades de geometría usando regla y compás. La implementación se realizó de forma individual y por separado.

La implementación de las tareas de construcción 3 y 4, propuestas en el capítulo cuatro, se realizó con dos estudiantes de grado sexto y una de grado séptimo. Las edades de dichas estudiantes se encuentran entre los 12 y 13 años.

En una conversación informal con las estudiantes mencionadas en el párrafo anterior, ellas manifestaron que tenían muy pocos conocimientos de geometría. Dijeron que lo que habían estudiado se había reducido a los triángulos y a los círculos. También explicaron que sí habían utilizado el compás y la regla, pero no en la clase de geometría sino en la clase de dibujo técnico.

Como resultado de la conversación, se vio necesario hacer dos clases previas con estas estudiantes, para hacer una preparación al trabajo de las tareas de construcción 3 y 4. En estas clases se orientó, paso a paso, la primera tarea del cuadernillo de construcciones. Esto sirvió para hacer un acercamiento al lenguaje geométrico referido a rectas, segmentos, circunferencia, líneas notables de la circunferencia y la notación de triángulo. También se introdujeron las relaciones de equidistancia entre los puntos de la circunferencia y el centro y la relación de congruencia de los radios. Adicionalmente, se hizo un trabajo de reconocimiento de rectas paralelas y rectas perpendiculares por que se previó que lo iban a necesitar en las tareas de construcción.

Una vez implementadas esas clases preparatorias, se les propusieron las tareas de construcción 3 y 4. Cada tarea se desarrolló en aproximadamente dos horas.

5.2. Sobre los resultados obtenidos en la primera tarea "La circunferencia"

La construcción de la circunferencia, que realizaron los cuatro estudiantes, responde a lo que esperábamos. En el papel calco, tres de los estudiantes realizaron el trazo de la circunferencia con centro en P y radio PQ y uno de los estudiantes dejó solamente marcados los puntos que determinó en el proceso de construcción; pero se visualiza que todos ellos están en una circunferencia. La representación que hicieron de una circunferencia responde a la definición de circunferencia que usamos en este trabajo.

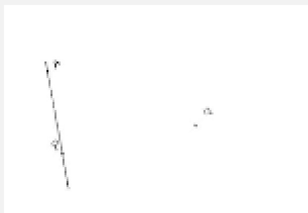
5.2.1. El proceso de construcción de la circunferencia

Tres de los estudiantes tuvieron dificultades para realizar la construcción, al principio, debido a que no estaban acostumbrados a utilizar regla no graduada y compás. La estudiante Juana sí estaba familiarizada con ellos. Después de los primeros dos pasos del proceso de construcción, los cuatro utilizaban los instrumentos de trazo con facilidad. Al ubicar los primeros dos puntos, dos estudiantes los localizaron muy cerca, error que esperábamos sucediera. Por tal motivo, fue acertado que el profesor recomendara utilizar puntos no tan distantes ni tan cercanos entre sí y que los ubicaran hacia el centro de la hoja. A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación con dos estudiantes: Juana y Erik. Los otros dos estudiantes siguieron procesos similares a Erik.

Proceso de construcción de la estudiante Juana (Entrevistador: Andrés)

	Comentarios sobre el proceso de construcción
Al empezar la actividad, Andrés le pregunta a Juana si ha trabajado con regla y compás. Ella responde: *yo se usar el compás y la regla. Si me ponen a medir algo, pongo la regla desde el cero y mido.*	
*Paso 1: En la hoja blanca determine dos puntos **P** y **Q**.*	

<table>
<tr><td>Tras leer la instrucción, Juana pregunta ¿Dónde yo quiera? Andrés le sugiere ubicar los puntos hacia el centro de la hoja, ni muy distantes ni muy cercanos. Ella lo hace.</td><td>Juana realiza la representación solicitada.</td></tr>
<tr><td>Paso: Trace una recta que contenga a $\boldsymbol{P}$ pero no a $\boldsymbol{Q}$.</td><td rowspan="2">Juana realiza la representación solicitada. Andrés no queda satisfecho pues el trazo es muy corto y anticipa que ella va a tener problemas en los siguientes pasos. Pero la estudiante no cambia su representación pues aduce que la instrucción no especifica el tamaño del trazo.</td></tr>
<tr><td>Juana traza una línea relativamente corta, como se muestra en la imagen, y ubica un punto $\boldsymbol{A}$.



Andrés le pregunta si ha dibujado una recta. Ella responde: me dice que trace una recta, pero no me dice que tan largo tiene que ser esta (señala el trazo), es una recta.</td></tr>
<tr><td>Paso 3: Determine dos puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ que pertenezcan a la recta, tales que $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{PQ}$ y $\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{PQ}$.</td><td rowspan="2">En este paso se presentan dos situaciones no previstas: (i) El trazo de la recta es muy corto y no permite ubicar A y B en ella. Juana cae en cuenta de ello al revisar la instrucción.

(ii) Como Juana determina un punto A arbitrariamente, y este no cumple la condición, ella pretende cambiar la posición de Q para forzar a que la condición se cumpla. El entrevistador interviene para hacerle caer en cuenta de la posición de Q está determinada y no se puede cambiar.</td></tr>
<tr><td>Juana decide usar el punto $\boldsymbol{A}$ que ha determinado y dice: este es $\boldsymbol{A}$. Andrés le pregunta si el punto cumple la condición. Juana dice que no y borra el punto $\boldsymbol{Q}$. Andrés les pregunta cuál punto estaba determinado primero. Ella menciona que estaba primero $\boldsymbol{Q}$, vuelve a determinar el punto $\boldsymbol{Q}$ en el mismo lugar, prolonga la recta $\boldsymbol{PA}$ en un sentido, borra el punto $\boldsymbol{A}$ y, usando el compás, determina una nueva posición del punto $\boldsymbol{A}$ tal que se cumpla $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{PQ}$.

El entrevistador le pregunta si la construcción cumple con todas las condiciones del enunciado del paso. La estudiante responde: falta el punto $\boldsymbol{B}$, me toca hacer más grande la recta. Después de prolongar la recta en el otro sentido la estudiante utiliza el compás, como muestran la imagen, para ubicar el punto $\boldsymbol{B}$ que satisface la condición $\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{PQ}$.

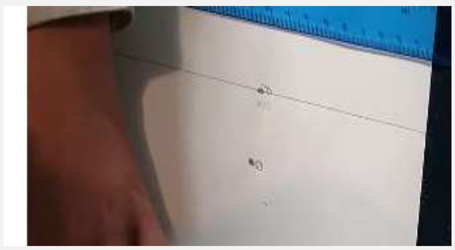
</td></tr>
<tr><td>Paso 4: Calque los puntos $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en la hoja calco. Nombre el punto $\boldsymbol{P}$ en la hoja calco.</td><td>Al momento de realizar este paso, había mucha interferencia auditiva.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>En un primer momento la estudiante dice no entender la instrucción. El entrevistador le sugiere leerla de nuevo con más calma. La estudiante logra realizar lo que se pide en la instrucción obteniendo la siguiente representación.
</td>
<td>Por eso quizás Juana no interpretó la instrucción en la primera lectura.</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso 5: Siga el mismo procedimiento, desde el paso 2 hasta el paso 4, con 5 rectas diferentes que pasen por $\boldsymbol{P}$ para determinar 10 puntos más ($\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$).</td>
<td rowspan="2">Juana sigue la instrucción, aunque no exactamente porque ella hace primero las cinco rectas y luego ubica los puntos solicitados. No replica el procedimiento paso a paso, pero obtiene el mismo resultado.</td>
</tr>
<tr>
<td>La estudiante traza cinco rectas más que contienen a $\boldsymbol{P}$ y pregunta “¿a cada recta tengo que ponerle dos letras?” Andrés le dice que sí, pero teniendo en cuenta la instrucción. Le pide que vuelva a leer el paso 3. Juana replica los pasos 3 y 4, usando el compás.

Al trazar los puntos en la hoja calco, también marca cada punto con su nombre. El entrevistador le pregunta, si la instrucción pide calcar los nombres. Juana dice que no y los borra. Obtiene la siguiente construcción:
</td>
</tr>
</table>

Proceso de construcción del estudiante Erik (Entrevistador: Andrés)

	Comentarios sobre el proceso de construcción
Antes de empezar, Andrés le pregunta a Erik si antes había utilizado regla y compás. Erik menciona que conoce los instrumentos pero que en clase de geometría no los usa con frecuencia. Erik lee la hoja con	

el protocolo de construcción y menciona que la regla sin marcas no le sirve para la actividad; se consigue una regla con medidas para trabajar.	
Paso 1: En la hoja blanca determine dos puntos $\boldsymbol{P}$ *y* $\boldsymbol{Q}$*.* Erik utiliza la regla para ubicar el centro de la hoja y marca un punto que llama $\boldsymbol{P}$. A no más de un centímetro determina el punto $\boldsymbol{Q}$. Andrés comenta *tienes toda la hoja para trabajar y decides dibujar los puntos tan cercanos*. Erik borra al punto $\boldsymbol{Q}$ y lo ubica un poco más distante del punto $\boldsymbol{P}$.	Erik realiza la representación solicitada.
Paso: Trace una recta que contenga a $\boldsymbol{P}$ *pero no a* $\boldsymbol{Q}$*.* Erik traza una recta siguiendo la instrucción, como se muestra en la siguiente figura. 	Erik realiza la representación solicitada.
Paso 3: Determine dos puntos $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *que pertenezcan a la recta, tales que* $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{PQ}$ *y* $\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{PQ}$*.* Tras leer la instrucción Erik menciona que no sabe qué le toca hacer. Señala que no entiende lo que significa $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{PQ}$. Andrés le explica que $\boldsymbol{PA}$ es la distancia entre el punto $\boldsymbol{P}$ y el punto $\boldsymbol{A}$, que es la misma que la distancia entre el punto $\boldsymbol{P}$ y el punto $\boldsymbol{Q}$. Erik menciona que sigue sin entender, de manera que se desarrolla la siguiente conversación: Andrés: *vamos por partes ¿listos?* Erik: *Listo.* Andrés: *¿Dónde estaría el punto* $\boldsymbol{A}$*?* Erik: *En la hoja blanca.* Andrés: *¿En cualquier parte de la hoja blanca?* Erik: *No, Sobre la línea recta.* Andrés: *Ya sabemos que* $\boldsymbol{A}$ *tiene que estar sobre la línea recta, pero además debe cumplir otra condición ¿Cuál condición?* Erik: *tiene que tener la misma distancia que* $\boldsymbol{P}$ *y* $\boldsymbol{Q}$*.* Andrés: *Muéstrame donde está el punto* $\boldsymbol{A}$*.* Erik menciona que ya sabe que tiene que hacer, mide la distancia de $\boldsymbol{PQ}$ y ubica el punto sobre la recta como se muestra a continuación.	En este punto se presenta un imprevisto, pues para Erik no es claro qué quiere decir la expresión $PA = PQ$. Fue un poco difícil que siguiera la instrucción. Luego de que Andrés le da una explicación, paso a paso, Eric logra asociar la expresión con la distancia entre dos puntos y realiza la representación que se pide.

  Erik menciona: *falta poner la* $\boldsymbol{B}$*, que también debe estar en la recta*, seguido a esto Erik ubica el punto $\boldsymbol{B}$ de la siguiente forma 	
Paso 4: Calque los puntos $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *en la hoja calco. Nombre el punto* $\boldsymbol{P}$ *en la hoja calco.*	
El estudiante pregunta si le toca calcar los cuatro nombres. El entrevistador menciona que solo debe calcar los puntos. Erik realiza la instrucción y la representación queda de la siguiente forma 	
Paso 5: Siga el mismo procedimiento, desde el paso 2 hasta el paso 4, con 5 rectas diferentes que pasen por $\boldsymbol{P}$ *para determinar 10 puntos más* ($\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$).	Erik traza las rectas primero y luego ubica los puntos que cumplan con las condiciones indicadas en el paso 3. Así obtiene el resultado esperado.
Erik menciona que le toca hacer diez líneas rectas que traspasen a $\boldsymbol{P}$, luego procede a trazar la primera recta como se muestra en la figura.  Después de realizar este trazo, Erik pregunta si debe ubicar también los puntos. El entrevistador le pregunta *¿Tu qué crees?* Erik menciona que sí y usa la regla para medir. A hacer este proceso, el entrevistador le pregunta si no hay otra forma para determinar dicha	

<table>
<tr>
<td>distancia. Erik dice que se puede usar el compás, utiliza la regla para establecer la apertura adecuada de este y determina los puntos en las otras rectas, como se muestra en la siguiente figura:

Después de realizar la actividad y en respuesta a la pregunta de razonamiento incluida en el Paso 4, Erik decide trazar la circunferencia con centro en $\boldsymbol{P}$ y radio $\boldsymbol{PQ}$, obteniendo el siguiente resultado en la hoja calco.

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

5.2.2. La visualización en la tarea 1

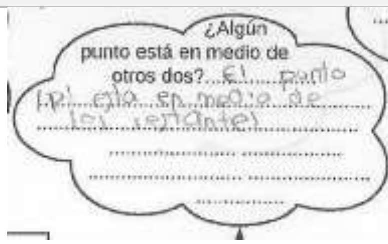
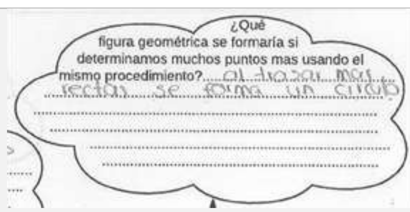
Al responder la primera pregunta de visualización (Paso 4) los estudiantes mencionan que lograron identificar que los puntos $A,\ B$ y P sé en cuentan alineados, debido a que se ven como en la misma recta. Un estudiante responde que el punto Q y el punto P también están alineados, y afirma oralmente que dos puntos siempre están alineados, haciendo referencia implícita al hecho de que en geometría euclidiana por dos puntos pasa una única recta.

En la segunda pregunta (Paso 4) los estudiantes mencionan que identifican que el punto P se encuentra entre los puntos A y B. Una estudiante afirma: *el punto* P *está en medio de* A *y* B, interpretando así la propiedad 'estar entre'.

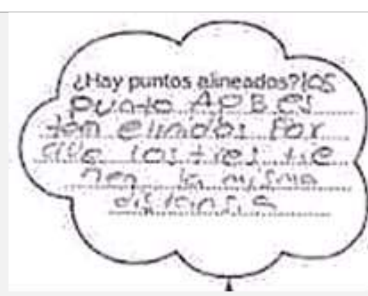
En la tercera pregunta (Paso 5) los cuatro estudiantes afirman que al realizar más veces el mismo proceso y hallar más puntos, la figura que queda en el papel calco es una circunferencia.

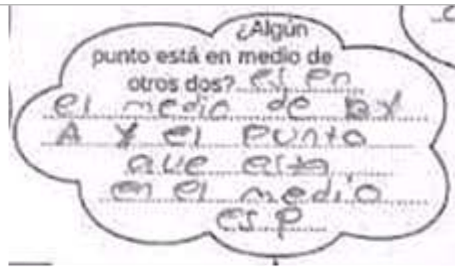
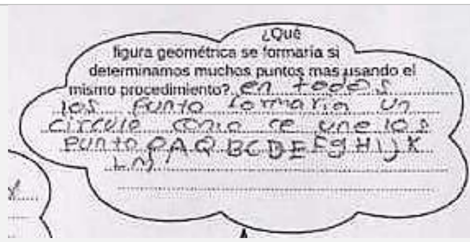
A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación con los estudiantes Juana y Erik.

Proceso de visualización desarrollado por Juana en la tarea 1

Paso	Respuesta	Comentario
4	 Al momento de responder, Juana señala la línea que había trazado en el paso anterior.	Juana visualiza la colinealidad y relaciona esta propiedad con la recta que contiene al punto P.
		Juana visualiza la relación “estar entre”. Identifica que el punto P se encuentra entre los puntos que no estan marcados en la hoja calco.
5		Juana visualiza la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que equidistan a un mismo punto. Ella dice que al trazar más rectas se van a encontrar más puntos.

Proceso de visualización realizado por Erik en la tarea 1

Paso	Respuesta	Comentario
4		Erik parece visualizar la colinealidad, pero la asocia con conservar la distancia entre pares de puntos.

		Erik visualiza la relación “estar entre” asociándola con la expresión “estar en medio de”.
5		Erik visualiza el lugar geométrico de los puntos que construyó asociándolo con una circunferencia, aunque él no la dibujó.

5.2.3. El razonamiento en la tarea 1

Al responder las preguntas de visualización, los estudiantes describen relaciones geométricas que observan. Con las preguntas de razonamiento podemos identificar la alusión a hechos geométricos en las respuestas de los niños. Es así como, ante la primera pregunta, Juana responde *no, puesto que la recta tiene* solo *dos puntos aparte de P* y Erik afirma que si se quiere localizar un punto que esté a la misma distancia a P como A o B, ese punto debe estar en otra recta.

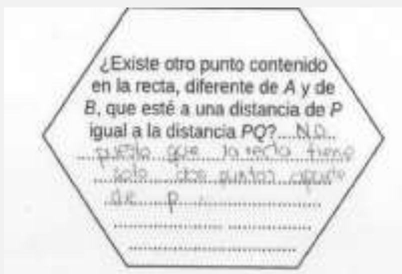
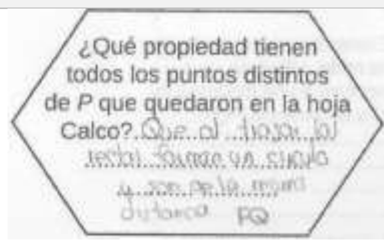
Al responder la segunda pregunta, Juana afirma que la forma de encontrar todos los puntos que cumplen la propiedad de estar a la misma distancia de *P* es usar el compás y trazar la circunferencia. En el caso de Erik, la respuesta a esta pregunta no es clara y nos lleva a pensar desarrolla el razonamiento esperado para esta tarea.

A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación de la tarea 1 con dos estudiantes: Juana y Erik.

El proceso de razonamiento desarrollado por Juana en la tarea 1

<table>
<tr><td>Paso</td><td>Respuesta</td><td>Comentario</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

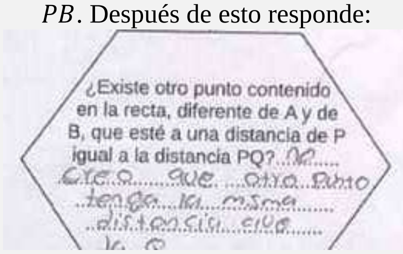
Después de leer la pregunta, Juana mide con sus dedos la distancia PQ y la compara con la distancia PA y PB como se muestra en la figura anterior, después de realizar esto responde:


</td><td>Juana realiza una comparación, con sus dedos y deduce que no existen ningún otro punto sobre la recta l que cumpla la condición de estar a una distancia de P igual a la distancia PQ.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>Juana identifica el invariante que define la circunferencia *[los puntos] son [sic] de la misma distancia* PQ . Relaciona la equidistancia como la condición que deben cumplir los puntos de la circunferencia.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>Juana establece una asociación entre la relación de equidistancia y la abertura del compás. En ese sentido, ella crea un mecanismo para construir pares de puntos equidistantes.</td></tr>
</table>

Proceso de razonamiento realizado por Erik en la tarea 1

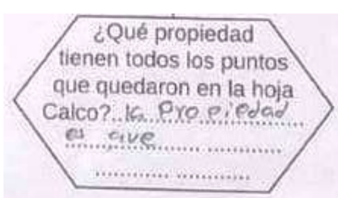
<table>
<tr><td>Paso</td><td>Respuesta</td><td>Comentario</td></tr>
<tr><td>3</td><td>


Erik usa la regla para medir la distancia entre los puntos P y Q, y la compara con las distancias PA y PB. Después de esto responde:

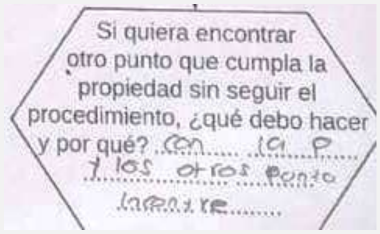


</td><td>Erik compara con la regla, las distancias entre AP, BP y QP y concluye que no existe más puntos en la recta l con esta condición.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Erik usa la hoja calco para comparar los distintos puntos, rotando la hoja calco sobre la hoja blanca como se muestra en la figura

Expresa verbalmente que aparecen al rotar. Después responde:



</td><td>Erik al rotar la hoja verifica que las distancias son iguales, pero no asocia lo visto en el procedimiento, con un hecho geométrico conocido. Su trabajo es netamente perceptual. Quizás si el entrevistador le hubiera hecho preguntas como: ¿…? se aprovecharía mejor la construcción a favor del razonamiento.</td></tr>
</table>

5		Erik no logra establecer una propiedad general que cumplen todos los puntos construidos. Quizás si el entrevistador le hubiera hecho preguntas como: ¿podemos usar otra herramienta para encontrar todos los puntos que cumplan esta propiedad? se aprovecharía mejor la construcción a favor del razonamiento.

5.3. Sobre los resultados obtenidos en la segunda tarea “Rectas perpendiculares”

En esta tarea los estudiantes construyeron en la hoja blanca dos rectas perpendiculares, los trazos auxiliares utilizados para realizar la construcción y el trazo de una cometa para justificar las propiedades que se quieren garantizar en esta construcción. En la hoja calco quedaron representadas las dos rectas perpendiculares.

5.3.1. El proceso de construcción en la tarea 2

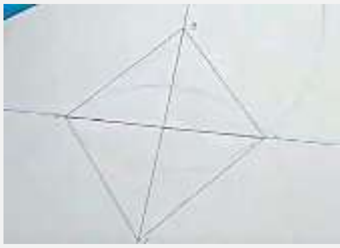
A diferencia de la construcción anterior, los cuatro estudiantes sabían cómo usar la regla no graduada y el compás. Por tal motivo, el proceso de construcción fue para ellos más fácil. Durante este proceso, los estudiantes usaron lo aprendido al hacer la construcción anterior para garantizar equidistancias.

A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación con dos estudiantes: Juana y Sebastián. Los otros dos estudiantes siguieron un proceso similar al de ellos.

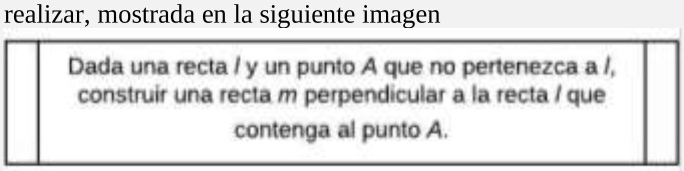
Proceso de Construcción realizado por Juana (Entrevistador: Andrés)

	Comentarios sobre el proceso de construcción
Antes de empezar la interacción, Juana manifiesta a Andrés no recordar las propiedades de los cuadriláteros. En consecuencia, El entrevistador realiza un repaso de los tipos de cuadriláteros y sus propiedades, luego él le entrega a Juana unas fichas que contienen información de algunos tipos de cuadriláteros, sus características y algunas propiedades.	
*Paso 1: Trace la recta **l** en la hoja blanca y determine el punto **A** que no esté **l**.*	Juana realiza la representación solicitada.

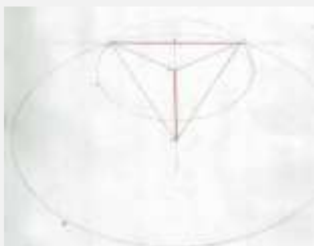
A diferencia de la primera construcción, Juana realiza el trazo de la recta $\boldsymbol{l}$ considerablemente extenso.	
Paso 2: Calque la recta y el punto en la hoja calco. Nombre la recta $\boldsymbol{l}$ *y el punto* $\boldsymbol{A}$.	Juana realiza la representación solicitada.
Juana realiza este paso siguiendo las indicaciones sin ninguna novedad. En ambas hojas tiene la siguiente representación. 	
Paso 3: En la Hoja Blanca determine dos puntos en la recta $\boldsymbol{l}$ *y nómbrelos como* $\boldsymbol{B}$ *y* $\boldsymbol{C}$.	Como Juana ubica al punto C muy cerca al borde de la hoja al trazar la circunferencia $C2$, esta se sale de la hoja. Para solucionar el problema, Juana añade otra hoja blanca ampliando el área de trazo. Andrés no dice nada, esperando que, en los posteriores pasos, Juana se percate que no es necesario trazar la totalidad de la circunferencia $C2$.
Paso 4: Trace la circunferencia $\boldsymbol{C1}$ *con centro en* $\boldsymbol{B}$ *y radio* $\boldsymbol{AB}$	
Paso 5: Trace la circunferencia $\boldsymbol{C2}$ *con centro en* $\boldsymbol{C}$ *y radio* $\boldsymbol{AC}$	
En los pasos 3, 4 y 5 Juana realiza lo indicado en las instrucciones sin ninguna dificultad, siguiendo el procedimiento enunciado en el protocolo y en silencio.	
Paso 6: Nombre con $\boldsymbol{D}$ *el punto de intersección de las dos circunferencias diferente de* $\boldsymbol{A}$	Juana realiza la representación solicitada, percatándose que solo hay dos puntos de interacción entre las dos circunferencias.
Juana marca el punto de intersección de las circunferencias sin ningún inconveniente. Antes de marcar en la hoja dice: *creo que solo aparecen estos dos* (señalando el punto $\boldsymbol{A}$ y la otra intersección de las circunferencias $\boldsymbol{C1}$ y $\boldsymbol{C2}$).	
Paso 7: Trace la recta m que pasa por $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{D}$	Juana realiza la instrucción dada y se da cuenta que la recta m interseca a la recta l.
Antes de realizar el trazo Juana pregunta si no importa que se pase por encima de la otra recta. Luego, realiza un trazo suave de la recta, procurando no marcar mucho la hoja.	
Paso 8: Calque la recta $\boldsymbol{m}$ *en la hoja calco.*	Juana realiza la representación solicitada.
Juana realiza el trazo en la hoja calco empleando la regla.	
Paso 9: En la hoja blanca trace el cuadrilátero $\boldsymbol{ABDC}$.	
Juana antes de realizar el trazo pregunta ¿*importa el orden de las letras*?, Andrés le dice que recuerde cómo habían acordado nombrar los cuadriláteros antes de empezar la actividad, en el repaso. Juana	

traza el cuadrilátero, que a simple vista parece un rombo, como se muestra en la figura. 	
Paso10: Retiña los segmentos $\boldsymbol{BC}$ *y* $\boldsymbol{AD}$.	Juana usa colores, espontáneamente, para diferenciar los segmentos que se le piden reteñir.
Para realizar este trazo Juana decide usar un color distinto para diferenciar los segmentos	

Proceso de Construcción realizado por Sebastián (Entrevistador: Andrés)

	Comentarios sobre el proceso de construcción
Antes de empezar la interacción Andrés le entrega a Sebastián unas fichas con información sobre algunos tipos de cuadriláteros, le explica cómo se clasifican los cuadriláteros y qué características tienen cada uno de estos. Después Sebastián lee la descripción de construcción que se va a realizar, mostrada en la siguiente imagen  Dada una recta *l* y un punto *A* que no pertenezca a *l*, construir una recta *m* perpendicular a la recta *l* que contenga al punto *A*. Sebastián dice, *es decir, me toca hacer una recta, después tengo que dibujar un punto* $\boldsymbol{A}$ *pero después tengo que hacer una línea que toque al punto* $\boldsymbol{A}$ *pero que sea perpendicular a la recta original*. Comienza a trazar las rectas a mano alzada. Andrés lo interrumpe y le explica que debe seguir los pasos de la construcción como lo hizo en la actividad anterior.	Sebastián se anticipa al proceso de construcción que se esperaba que hiciera, pero con un dibujo a mano alzada. De esta manera Andrés se percata de que el estudiante tiene claro a dónde se quiere llegar.
Paso1: Trace la recta $\boldsymbol{l}$ *en la hoja blanca y determine el punto* $\boldsymbol{A}$ *que no esté* $\boldsymbol{l}$.	Sebastián realiza la representación solicitada.
Sebastián realiza el trazo de la recta muy cerca al borde de la hoja. Andrés le sugiere realizar los trazos centrados. Sebastián borra la recta y la traza más o menos centrada en la hoja (dibujando una línea	

relativamente corta). Determina el punto $\boldsymbol{A}$ como se muestra en la figura 	
Paso 2: Calque la recta y el punto en la hoja calco. Nombre la recta $\boldsymbol{l}$ *y el punto* $\boldsymbol{A}$. Sebastián realiza este paso sin ninguna novedad.	Sebastián realiza la representación solicitada.
Paso 3: En la Hoja Blanca determine dos puntos en la recta $\boldsymbol{l}$ *y nómbrelos como* $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$. Sebastián pregunta *¿no hay problema en ubicarlos en casi los extremos de la línea?* Andrés le dice que no. El estudiante ubica los puntos en la recta obteniendo la siguiente representación: 	Sebastián realiza la representación solicitada. Duda de la ubicación de los puntos.
Paso 4: Trace la circunferencia $\boldsymbol{C1}$ *con centro en* $\boldsymbol{B}$ *y radio* $\boldsymbol{AB}$ Sebastián realiza el trazo sin ninguna complicación.	Sebastián realiza la representación solicitada.
Paso 5: Trace la circunferencia $\boldsymbol{C2}$ *con centro en* $\boldsymbol{C}$ *y radio* $\boldsymbol{AB}$ Después de realizar el trazo de la segunda circunferencia Sebastián dice *yo creo que donde se unen es importante*. Andrés le pregunta *¿Por qué?* Sebastián responde: *si se llama* $\boldsymbol{E}$ *(nombra la intersección como* $\boldsymbol{E}$*) ese punto es como* $\boldsymbol{A}$ *pero en otro lado*. Andrés le sugiere leer el otro paso de la construcción.	El estudiante se percata que las circunferencias se intersecan en dos puntos, que uno de ellos es A y que el otro punto tiene características parecidas a las de A.
Paso 6: Nombre con $\boldsymbol{D}$ *el punto de intersección de las dos circunferencias diferente de* $\boldsymbol{A}$ Tras leer la instrucción Sebastián borra la letra $\boldsymbol{E}$ y nombra el punto que había determinado en el paso anterior con $\boldsymbol{D}$.	Sebastián realiza la instrucción solicitada.
Paso 7: Trace la recta m que pasa por $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{D}$ *Paso 8: Calque la recta* $\boldsymbol{m}$ *en la hoja calco.*	Sebastián realiza la representación solicitada.

Paso 9: En la hoja blanca trace el cuadrilátero $\boldsymbol{ABDC}$.	
En los pasos 7, 8 y 9 Sebastián realiza lo indicado sin ninguna complicación.	
Paso 10: Retiña los segmentos $\boldsymbol{BC}$ *y* $\boldsymbol{AD}$.	Sebastián obtiene un cuadrilátero no convexo lo cual no estaba previsto, esto genera un problema al momento de justificar que las rectas son perpendiculares.
Antes de repisar los segmentos, Sebastián pregunta *¿Son las diagonales, ¿verdad?* El entrevistador afirma que sí y Sebastián continúa preguntando *¿hay problema que la diagonal este por fuera del cuadrilátero*? Andrés le dice que no hay ningún inconveniente. Sebastián repisa con rojo las diagonales del cuadrilátero obteniendo en la hoja blanca la siguiente figura. 	

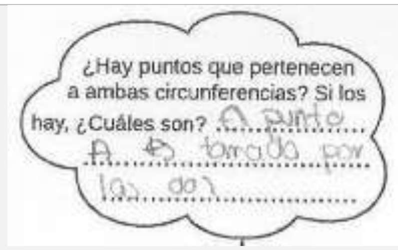
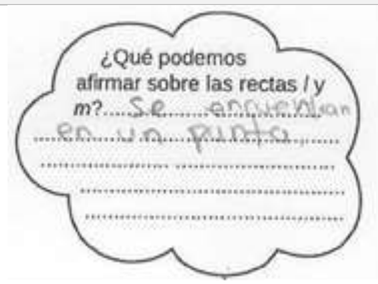
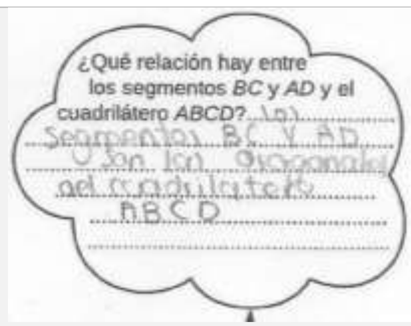
5.3.2. La visualización en la tarea 2

El proceso de visualización, en esta construcción, fue incentivado por medio de tres preguntas. En la primera los estudiantes debían identificar los puntos de intersección de las dos circunferencias $C1$ y $C2$ que construyeron. Efectivamente, los cuatro estudiantes identificaron que había dos puntos de intersección y que uno de esos puntos era el punto A. Inclusive Sebastián percibe que ambos puntos tienen algo en común.

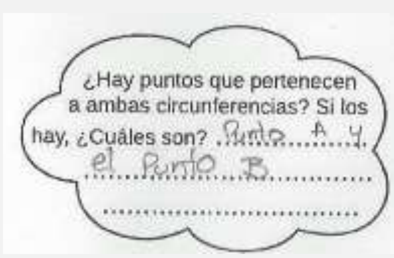
En la segunda pregunta ellos debían identificar que las rectas se intersecaban. Tal como se planeó, los estudiantes identifican que las rectas l y m se intersecan en un punto y dos de ellos afirman que son perpendiculares. Por último, en la tercera pregunta los estudiantes identificaron que los segmentos que habían reteñido eran las diagonales de la cometa $ABDC$.

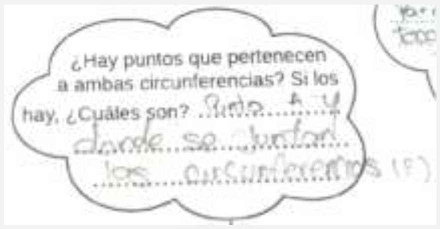
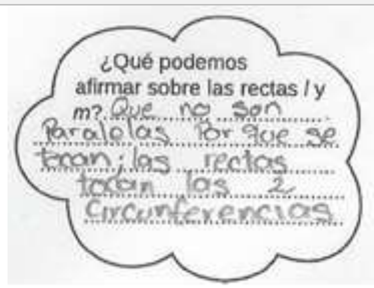
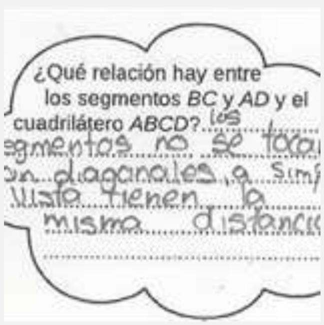
A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación con dos estudiantes: Juana y Sebastián.

Proceso de visualización realizado por Juana

Paso	Respuesta	Respuesta
5		Juana visualiza que el punto A pertenece a las dos circunferencias, pero identifica que existe otro punto, en este momento.
7		Juana visualiza que las dos rectas se intersecan en un punto.
10		Juana visualiza que las diagonales del cuadrilátero $ABCD$, son los segmentos BC y AD.

Proceso de visualización realizado por Sebastián

Paso	Respuesta	Comentario
5	La respuesta intuitiva de Sebastián es la siguiente 	Sebastián visualiza los dos puntos de intersección de las dos circunferencias.

<table>
<tr><td></td><td>Después de realizar la corrección en el Paso 6 Sebastián decide cambiar su respuesta por la presentada a continuación.

</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>Sebastián ve que las rectas se intersecan y descarta que son paralelas.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>
</td><td>Sebastián visualiza que los segmentos son las diagonales del cuadrilátero, además menciona que no se intersecan. Esto genera un problema para que el estudiante pueda justificar la perpendicularidad de las rectas.</td></tr>
</table>

5.3.3. El razonamiento en la tarea 2

En el proceso de razonamiento las preguntas fueron previstas esperando que los estudiantes usaran los objetos y relaciones geométricas trabajados en la primera construcción. Por ejemplo, para responder las primeras dos preguntas (Pasos 4 y 5) deben usar la definición de circunferencia para justificar que los puntos A y D. equidistan de B y C.

En la tercera pregunta se tenía previsto que los estudiantes razonaran que el punto D pertenece a ambas circunferencias y por lo tanto está a la misma distancia de B y C como A. Al responder los Juana y Sebastián describen que los puntos A y D tienen propiedades similares. Juana, por ejemplo, menciona que *es el punto donde se cruzan y es la misma distancia del punto BA o CA.*

En las últimas cuatro preguntas (Paso 9) los estudiantes debían deducir que el cuadrilátero tiene dos pares de lados adyacentes congruentes, por lo tanto, este es una cometa, así usar las propiedades de esta para inferir que las rectas l y m son perpendiculares al contener las diagonales del cuadrilátero $ABDC$. Ellos identifican el cuadrilátero $ABDC$ como una cometa y revisan sus propiedades en las tarjetas que les fueron entregadas. Afirman que las diagonales de la cometa son perpendiculares y por lo tanto las rectas que contienen a estas diagonales son perpendiculares; en consecuencia, justifican por qué las rectas que construyeron son perpendiculares.

Proceso de razonamiento realizado por Juana

Paso	Respuesta	Respuesta
4 y 5	 	Juana se limita a responder lo que ve. No se vale de la definición de circunferencia como estaba previsto. Podemos decir que faltó más acompañamiento del entrevistador para apoyarla en su proceso de razonamiento. Esto restringió la respuesta de Juana solo al proceso de visualización.
6	Juana menciona que el punto D está en ambas circunferencias y concluye que la distancia BA es igual a la distancia BD. También que las distancias CA y CD son iguales. Escribe su informe de la siguiente forma:	Juana relaciona al punto D con las distancias BA y AC. Concluye que las dos circunferencias se intersecan en el punto D por lo tanto la distancia BA y BD son iguales, y las distancias CA y CD son iguales.

9	 Para verificar qué relación hay entre los cuatros lados del cuadrilátero, ella mide con el compás estos y menciona; *parecen medir lo mismo.* Después de esto, Juana responde:  	Su respuesta se basa en lo que midió, pero no pone en juego las propiedades de la circunferencia para sustentar esta afirmación. La conclusión de Juana es errónea. De hecho, la construcción solo permitiría garantizar que el segmento AB es congruente con el segmento BD, y que el segmento AC es congruente con el segmento CD, pero no necesariamente los cuatro. Quizás faltó pedirle que revisara la construcción para corregir su respuesta y así potencializar el proceso de razonamiento.
	El cuadrilátero construido por Juana parece un rombo:  Juana comenta *es un rombo verdad.* Debido a esto Andrés y Juana tienen la siguiente conversación: Andrés: *Estás segura, ¿Por qué crees eso?* Juana: *No sé, parece un rombo.* Andrés: *¿Cómo sabemos que es un rombo?* Juana: *Porque sus lados son iguales.* Andrés: *Pero no podemos decir eso, ¿o sí?*	Juana concluye que el cuadrilátero $ABDC$ es una cometa, porque no cumple las condiciones necesarias para ser otro tipo de cuadrilátero.

<table>
<tr><td></td><td>Juana: Sí, no se (…) es que parecen iguales, pero unos [lados] son más pequeños que otros por poquito.

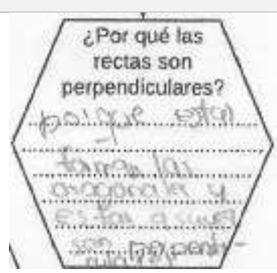
Andrés: Aunque parezcan iguales no lo son ¿o sí?

Juana: No.

Andrés: Entonces qué cuadrilátero es.

Juana revisa las tarjetas y dice: No es un rombo, pero tampoco un cuadrado, y claro no puede ser un rectángulo. Entonces es un cometa. Luego de esto escribe.


</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Juana menciona como es una cometa aquí dice que [las diagonales] son perpendiculares. Luego de esto escribe:


</td><td>Juana responde lo esperado.</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>Juana justifica que las rectas son perpendiculares, porque las diagonales lo son y estas están contenidas en las rectas.</td></tr>
</table>

Proceso de razonamiento realizado por Sebastián

Paso	Respuesta	Respuesta
4	Sebastián comenta: *en la circunferencia los puntos están a la misma distancia, tienen el mismo radio.* 	Sebastián parece usar la definición de circunferencia al aludir que los puntos están a la misma distancia.
6	Sebastián comenta: *es* [el punto D] *como* A *porqué está en ambas circunferencias.* Andrés le pregunta *¿Qué quieres decir?* Sebastián responde: *como* [el punto D] *está en ambas circunferencias tienen los radios iguales a los de* A. (Mientras dice lo anterior señala los segmentos BA y BD y luego señala los segmentos CA y CD). Después de decir lo anterior Sebastián escribe: 	Sebastián interpreta que el punto D pertenece a las dos circunferencias, aludiendo a que el punto D está a la misma distancia de los puntos B y C como el punto A.
9	Sebastián dice: *Vea profe, los segmentos no son paralelos porque se cortan. Y como estos* (señala los puntos A y D) *están en esta circunferencia estos (señala los segmentos AB y AB) son el mismo radio. Y pasa igual con el otro.* Andrés pregunta *¿Qué quiere decir mismo radio?* Pues que miden lo mismo. Después Sebastián responde.	Sebastián utiliza la construcción anterior (circunferencia) para justificar la congruencia entre los segmentos AB y BD y los segmentos AC y CD.

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Sebastián comenta: por lo que le dije ahorita, es una cometa, y como está pintado también es cóncava.

</td><td>Sebastián responde sin justificar, falto preguntas como ¿Por qué es una cometa? O ¿Qué propiedades cumple para ser una cometa? Y así potencializar el razonamiento.</td></tr>
<tr><td></td><td>Sebastián dice: usted me dijo que tienen… son perpendiculares y yo le creo, ¡Ah sí!, mire aquí dice eso (Señala la ficha de la cometa), pero aquí no se unen. Andrés le explica que, según la definición de segmentos perpendiculares, estos deben estar contenidos en rectas que sean perpendiculares.

Luego Sebastián escribe:

</td><td>Sebastián alude a la definición de perpendicularidad al afirmar que las diagonales se intersecan y forman un ángulo 90°.</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>Sebastián relaciona la perpendicularidad de las diagonales con perpendicularidad de las rectas.</td></tr>
</table>

5.4 Sobre los resultados obtenidos en la tercera tarea “La mediatriz”

En esta tarea las tres estudiantes construyeron un segmento con extremos AB. Después, realizaron trazos auxiliares con el compás para lograr los puntos guías con los cuales trazar la recta mediatriz. En la hoja calco quedó representado el segmento AB y la **recta l,su mediatriz.**

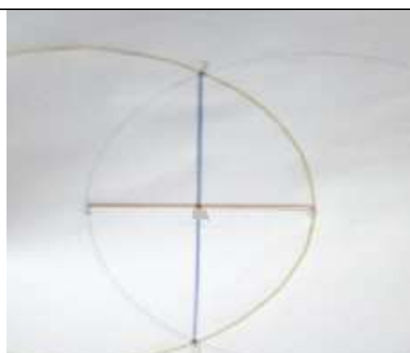
5.4.1 El proceso de construcción de la mediatriz

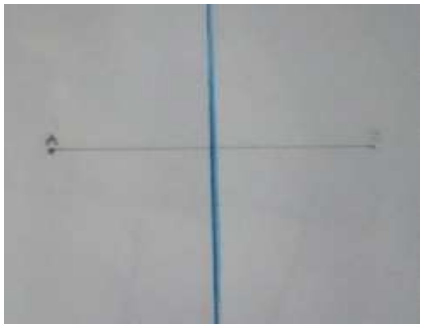
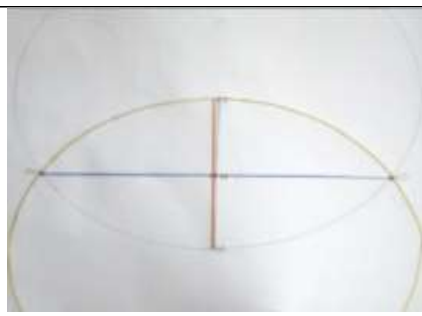
El proceso de construcción de la mediatriz llevado por las tres estudiantes fue óptimo. Esto se debió principalmente a dos razones:

- Primero, al comenzar el trabajo de construcción, la profesora Jenny tomó un buen tiempo para que las estudiantes leyeran el enunciado de lo que tenían que construir e interpretaran qué era lo que tenían como dado y a dónde debían llegar. Esto hizo que las estudiantes orientaran el trabajo de construcción a la meta.
- Segundo, gracias al aprestamiento realizado en las clases previas a la implementacion de las tareas, las estudiantes manejaron con fluidez el lenguaje geométrico y, a medida que lo utilizaban, hacían interpretaciones apropiadas de las relaciones de equidistancia que estaban logrando. Dicho aprestamiento no solo les ayudó a entender el lenguaje en que estaba escrito el protocolo de construcción, sino que también les facilitó la utilización del compás en los pasos de la construcción que lo requerían.

A continuación, se describe el proceso de construcción realizado por Camila. Se optó por describir su trabajo porque en este se hace evidente el papel desempeñado por la actividad constructiva en el desarrollo de los procesos de visualización y razonamiento. Las otras dos niñas asumieron una actitud más pasiva y se expresaron muy poco, por lo que la información de su producción es escasa.

Proceso de construcción de la estudiante Camila (Entrevistadora: Jenny)	Comentarios sobre el proceso de construcción
Jenny solicitó leer e interpretar el enunciado de la tarea: Dado el segmento AB, construya la recta l mediatriz del segmento AB. Después de que Camila leyó el enunciado, Jenny le preguntó si había términos que no conocía. Camila preguntó: *¿Qué es una mediatriz?* Jenny le recordó que la mediatriz era la recta cuyos puntos equidistan de los extremos de un segmento. Le mostró ejemplos y no ejemplos de mediatrices, representados a mano alzada. Camila interpretó así lo dicho por Jenny: *Es una recta… que los puntos… de ella… la medida del punto a A es igual a la medida del punto a B.*	Jenny hizo énfasis en la interpretación del enunciado, para que Camila disipara cualquier duda sobre lo que iba a construir. La estudiante, con su expresión, refleja la interpretación que logró de mediatriz.
Paso 1: En la hoja blanca trace el segmento AB  Camila dibuja un segmento paralelo al borde de la hoja.	Camila realiza la representación solicitada.
Paso 2: En la hoja calco, copie el segmento AB.	Camila realiza la representación solicitada.
Paso 3: En la hoja blanca trace la circunferencia $C1$, con centro A y radio AB.  Camila lee la instrucción y dice que no tiene claro cómo hacer la circunferencia. Jenny le pide que señale el centro y Camila coloca la punta del compás en el punto A. Y pregunta *¿Para medir el radio abro el compás de A hasta B?* Jenny le dice que sí y la estudiante traza la circunferencia correctamente.	La identificación sobre cuál era el centro y cuál era el radio de la circunferencia fue determinante para que la estudiante hiciera bien la circunferencia.

<table>
<tr><td>Paso 4: Trace la circunferencia $C2$, con centro B y radio AB, con un color diferente a la circunferencia $C1$.</td><td rowspan="2">La expresión de Camila refleja que ha mecanizado el proceso de construcción de una circunferencia.</td></tr>
<tr><td>Camila dice: es de la misma forma que hice la circunferencia C1.
</td></tr>
<tr><td>Paso 5: Determine los puntos de intersección de la circunferencia $C1$ y $C2$, y nómbrelos D y E.</td><td rowspan="2">Camila interpreta correctamente lo que significa la intersección de dos objetos, aunque usa la expresión “se unen” en lugar de “tienen puntos comunes”. Se observa que interpreta bien, porque señala los puntos que se solicitan.</td></tr>
<tr><td>
Camila dice: ¿los puntos que tengo que marcar son los que cortan a las dos circunferencias? Jenny le pregunta qué quiere decir con “cortar”. La estudiante responde: las dos circunferencias se unen, entonces que ahí estarían los puntos. Señala las intersecciones de las dos circunferencias. Jenny le dice que sí. Camila marca los puntos bien oscuros para que sobresalgan en la construcción.</td></tr>
<tr><td>Paso 6: Trace una recta l, que contenga los puntos D y E.</td><td rowspan="2">Camila se resiste a representar la recta de forma tal que los puntos no queden en los extremos, porque en la clase de geometría les han enseñado que deben dibujar las</td></tr>
<tr><td>
Camila traza el segmento DE. Jenny pregunta ¿Y esa recta? Poniendo en duda la representación. Camila dice ¿la recta qué tan larga [la hago]? Jenny le dice que debe contener los puntos D y E, y que recuerde que las rectas no tienen extremos. Camila decide dejarla así en la hoja blanca, pero alargarla en la hoja calco.</td></tr>
</table>

Paso **7:** En la hoja calco, copie la recta l.  Camila realiza lo solicitado y usa el mismo color con el que trazó la recta l en la hoja blanca, pues para ella es importante que sea del mismo color.	A Camila no le preocupa que las representaciones no sean iguales, pero sí que no sean del mismo color.
Paso 8: Determine el punto de intersección del segmento AB y la recta l, y nómbrelo C.  Camila dice *ese punto es el punto medio del segmento.* Jenny le pregunta por qué cree que C es punto medio del segmento. Camila le dice: *si coloco el compás en C y lo abro hasta A y hago lo mismo con B, miden lo mismo.*	Camila realiza la representación solicitada.

5.4.2 Proceso de visualización en la tarea de la mediatriz

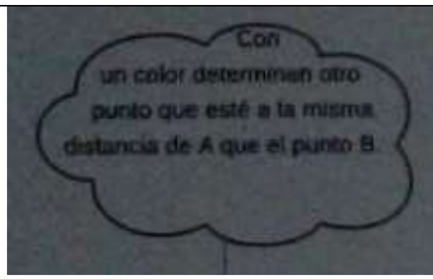
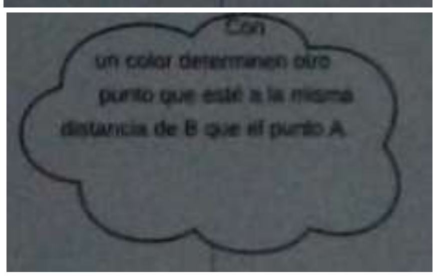
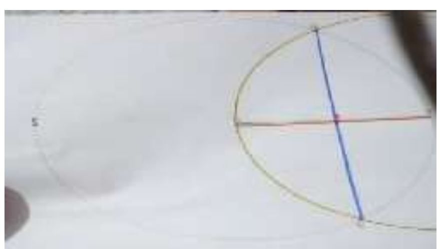
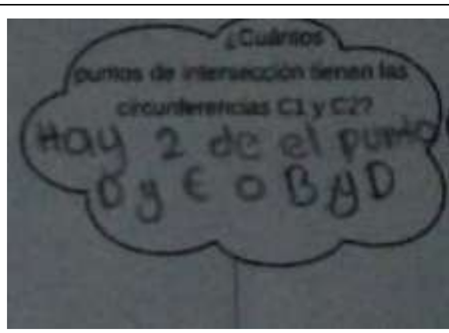
La visualización

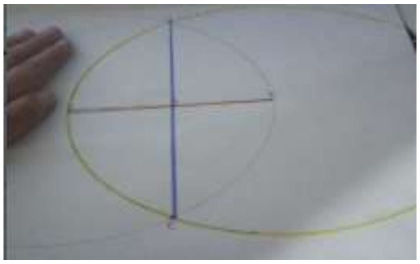
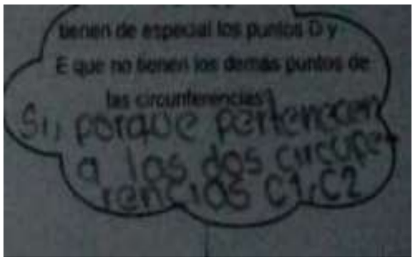
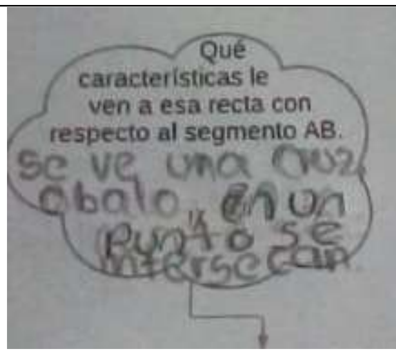
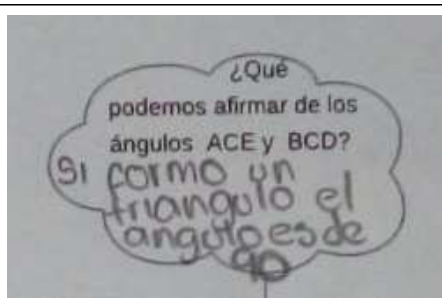
Al comenzar a responder las preguntas de visualización (paso 3 y 4), las estudiantes recuerdan la Tarea 1 de la circunferencia y asocian la distancia que hay entre el centro y los puntos de la circunferencia con la relación de equidistancia. Afirman que la distancia de los puntos de la circunferencia al centro de esta es igual. Además, asocian la intersección (paso 5) de dos representaciones geométricas con que dicha intersección son puntos, que pertenecen a las dos representaciones.

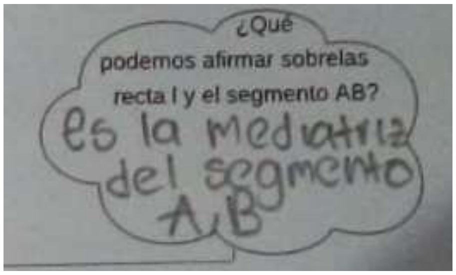
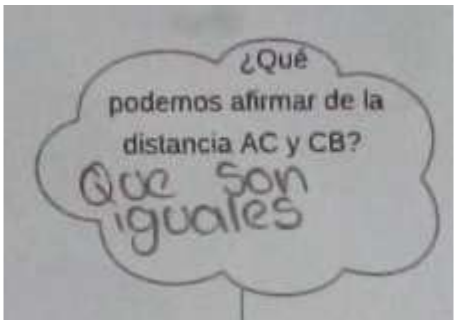
Las estudiantes afirman que la recta l se interseca con el segmento AB y que, al parecer, forman una recta perpendicular al segmento AB que pasa por el punto de intersección y que los ángulos formados por la recta y el segmento son rectos. Además, interpretan que esa recta es la mediatriz que se les pidió construir.

A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación, con la estudiante Camila.

Proceso de visualización desarrollado por Camila

Paso	Respuesta	Comentario
3	  	Camila toma el compás para determinar un punto que llama G en la circunferencia, dejando a A entre G y B. Y responde, verbalmente que hay muchos puntos que cumplen con esta condición. Por la respuesta de Camila, se puede decir que ella vio que los puntos de la circunferencia equidistan del centro.
4 y 5		Antes de responder, Camila tapa la circunferencia que trazó con lápiz y dice *los puntos D y E, están en está circunferencia* [señala la amarilla]. Luego hace lo mismo con la circunferencia amarilla, la tapa, *y dice: los puntos D y E, están en la circunferencia de lápiz.* Por su respuesta, podemos decir que Camila visualiza que estos dos puntos pertenecen a ambas circunferencias. Además, ve que B pertenece a $C1$ y a $C2$, pero no menciona que B es el centro de la circunferencia $C2$.

	 	
6		Camila visualiza que la recta interseca al segmento en un punto, formando una cruz. Además, dice: *la recta esta derecha y el punto de intersección parece que es el punto medio del segmento AB.* Esta respuesta nos indica que la estudiante ve que la recta tiene ciertas características con respecto al segmento. En lo que escribe también dice que ve un óvalo, en referencia a los trazos del compás e identifica un punto en el que se intersecan.
7		Camila compara los ángulos visualizando triángulos rectángulos para afirmar que los ángulos son de 90°. Además, afirma que el ángulo ACB es de 180° porque forman un segmento y dice que *como la recta lo parte entonces los dos son de* 90°. Además de expresar lo que ve, Camila intenta justificarlo.

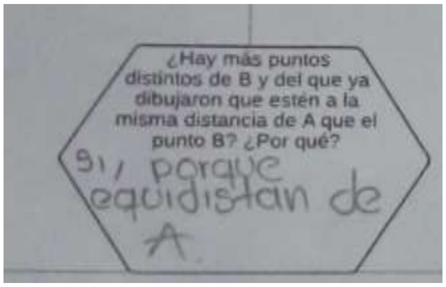
	 	Camila asocia la definición que se dio de mediatriz de un segmento con la construcción que realizó y, antes de contestar la pregunta, mira la hoja calco y la sobrepone en la hoja blanca, y dice: *se ve como la mediatriz del segmento.*
	 	Camila desde un inicio afirma que C es punto medio del segmento AB, y por esto su respuesta. Además, comprueba nuevamente con el compás si efectivamente las dos medidas son iguales. Con estas repuestas podemos decir que Camila logra ver lo esperado para que posteriormente afirme que la recta l es la mediatriz del segmento A

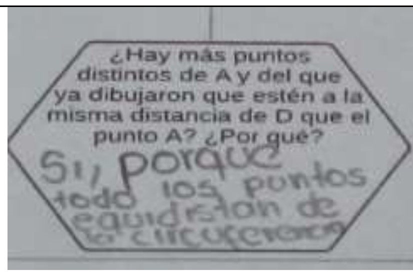
5.4.3. El razonamiento

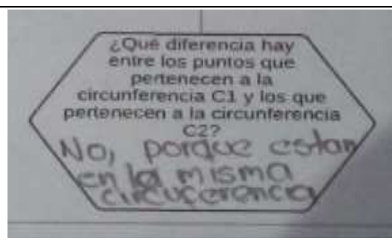
Sobre el proceso de razonamiento, se puede decir que las tres estudiantes utilizaron conceptos geométricos trabajados en el aprestamiento y en la tarea uno. Por esto, las estudiantes en las preguntas de los pasos 3 y 4, hablan de equidistancia, cuando se refirieron a las distancias del centro a cualquier punto de la circunferencia. Además, reconocieron cuáles segmentos son radios de circunferencias y la propiedad de congruencia de los radios de una circunferencia. También reconocieron que en un diámetro de la circunferencia el punto medio de este es su centro, aunque no usan el término “diámetro”. De esta forma lograron justificar que la recta l es la mediatriz del segmento AB.

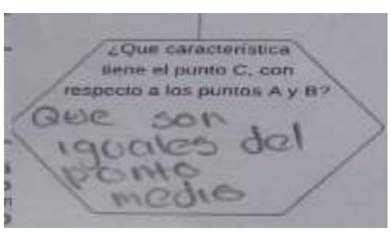
A continuación, se presentan las respuestas de Camila.

El proceso de razonamiento desarrollado por Camila (entrevistador Jenny)

<table>
<tr><th>Paso</th><th>Respuesta</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><td>3</td><td>


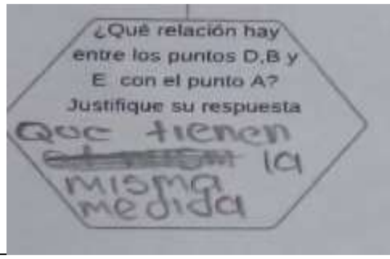
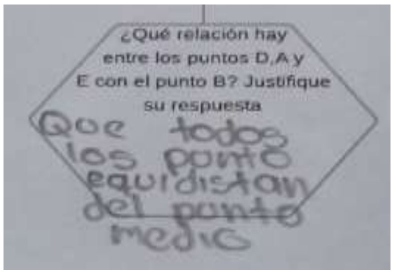
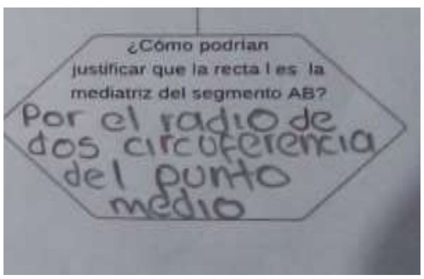
</td><td>Camila utiliza la definición de circunferencia para explicar por qué otros puntos de esta equidistan de A. Lo ratifica con el compás.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>


</td><td rowspan="2">Las respuestas de Camila no son las esperadas, aunque ella oralmente dice: el radio AB está en las circunferencias por lo que B equidista de D. La medida DB y la medida BE son iguales. Además, afirma que los centros no son los mismos pero que el centro de una pertenece a la otra. Se aprecia el uso de la definición de circunferencia en su razonamiento.</td></tr>
<tr><td>


</td></tr>
<tr><td>8</td><td>


</td><td>La expresión escrita de Camila no coincide con la expresión oral. Al responder a Jenny afirma: C es el punto medio del segmento AB, porque la medida de A a C es la misma, que de B a C.
Camila usa la definición de punto medio de un segmento para dar una justificación de por qué C equidista de A y de B.

Para justificar que la recta l es mediatriz del segmento AB, Camila hace uso de la construcción. Ella dice: los radios AD y AE son iguales, de la circunferencia con centro A. BD y BE son iguales porque son con centro en B. Como los cuatro son radios, equidistan D y E de los puntos A y B.</td></tr>
</table>

		Jenny le pregunta si solo D y E equidistan de A y B. Camila dice: si pongo otro punto de la recta y hago una circunferencia con centro en ese punto y hasta A el punto B también va a equidistar de ese punto.
		
		

5.5. Sobre los resultados obtenidos en la cuarta tarea "Rectas perpendiculares punto interno"

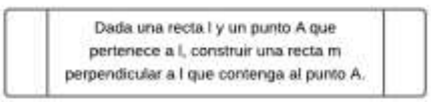
Las tres estudiantes construyeron en la hoja blanca dos rectas perpendiculares, por medio de trazos auxiliares de circunferencias. Además, dibujaron un rombo, para justificar la perpendicularidad de las dos rectas haciendo uso de la propiedad de la perpendicularidad de las diagonales. En la hoja calco quedaron representadas las dos rectas perpendiculares.

5.5.1. El proceso de construcción en la Tarea 4

Gracias a la tarea tres, y al aprestamiento, las tres estudiantes sabían cómo construir los trazos auxiliares. Por lo que el proceso de construcción fue para ellas más fácil. Durante este proceso, las estudiantes usaron lo aprendido para garantizar equidistancias.

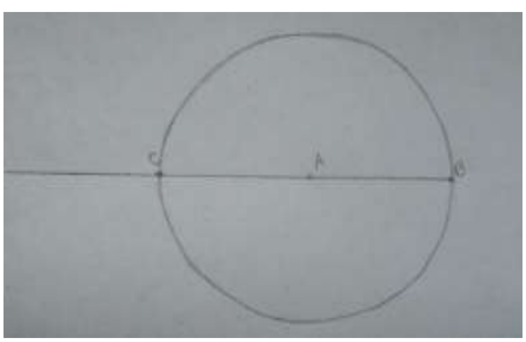
A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación que hizo Camila.

Proceso de Construcción realizado por Camila (Entrevistador: Jenny)

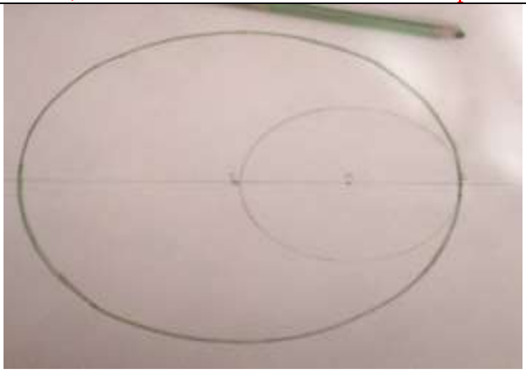
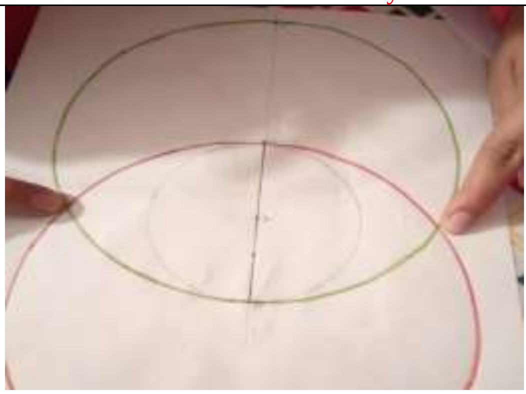
Proceso de construcción de la estudiante Camila (Entrevistadora: Jenny)	Comentarios sobre el proceso de construcción
Jenny solicitó leer e interpretar el enunciado de la tarea.  Dada una recta l y un punto A que pertenece a l, construir una recta m perpendicular a l que contenga al punto A. Camila, después de leer el enunciado, afirma que ya sabe qué debe construir y pregunta: *¿es necesario hacer todos los pasos para construir la perpendicular o la puedo dibujar que pase por A?* Jenny le responde que si solo la traza considerando el punto A qué le garantiza que esa recta es perpendicular a la recta l. Camila dice: *nada porque en el dibujo solo va a parecer perpendicular*. Entonces comienza a realizar los pasos de la construcción.	La interpretación del enunciado al inicio de la tarea fue clave para que Camila siguiera los pasos de la construcción.
Paso 1: En la hoja blanca trace la recta l y determine un punto A que este en l.	Camila realiza la representación solicitada. Algo que destacar es que por primera vez ubica el punto A en un lugar diferente al extremo del trazo. Esto se puede deber a dos cosas: la primera, que memorizó que no está bien colocar los puntos como si la recta tuviera extremos; y la segunda, que comprendió que las rectas no tienen extremos.
	
Paso 2: En la hoja calco copie y nombre la recta l y el punto A.	
	Camila realiza la representación solicitada.
Paso3: En la hoja blanca determine un punto en la recta l diferente del punto A y cerca a este punto; nómbrelo como B.	

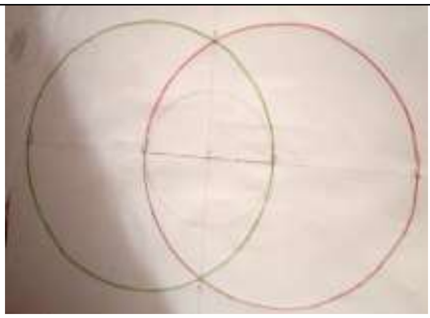
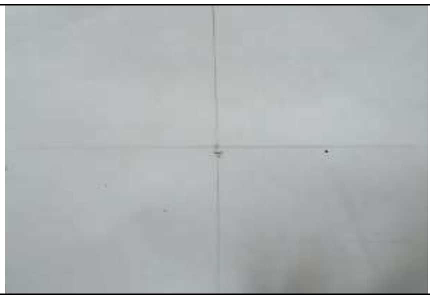
<table>
<tr>
<td>

Jenny le pregunta a Camila por qué determinó el punto B como si fuera extremo de la línea aun cuando sabemos que la recta no tiene extremos.
Camila dice: profe la recta es infinita yo lo sé, pero es la costumbre de siempre hacerlo así., Le pregunta a Jenny: ¿si dejo la recta así me va a complicar la construcción más adelante?
Jenny responde que la deje así y cuando terminen la construcción ella misma va a dar respuesta a su pregunta.</td>
<td>A Camila, a pesar de que intenta corregir el error de representar una recta con extremos, aun le cuesta romper con esta costumbre.</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso 4: Trace la circunferencia $\boldsymbol{C1}$ con centro en $\boldsymbol{A}$ y radio $\boldsymbol{AB}$</td>
<td rowspan="2">Camila traza a circunferencia sin ningún problema, pues recuerda cómo hizo construcciones previas.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Camila señala con el dedo al punto A y coloca la punta del compás allí y abre el compás hasta el punto B y traza la circunferencia.</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso 5: Nombre al punto de intersección de la circunferencia $\boldsymbol{C1}$ y la recta $\boldsymbol{l}$, diferente de $\boldsymbol{B}$, con la letra $\boldsymbol{C}$.</td>
<td>Camila señala rápidamente la intersección de la circunferencia con la recta y lo nombra C.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Camila señala con el dedo la intersección y marca el punto y lo nombra.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Paso 6: Trace la circunferencia $C2$ con centro en C y radio CB, usando un color diferente al usado para C1. 	Camila realiza la representación solicitada.
Paso 7: Trace la circunferencia $C3$ con centro en B y radio BC, usando un color diferente de $C1$ y de $C2$. 	Camila realiza la representación solicitada.
Paso 8: Trace la recta m que contenga a los puntos de intersección de las circunferencias $C2$ y $C3$. 	Camila muestra que tiene claro cuál es la intersección de dos objetos geométricos.

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Paso 9: En la hoja calco copie la recta m.</td><td rowspan="2">Camila realiza la representación solicitada.</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Paso10: En la hoja blanca trace el cuadrilátero $BDCE$</td><td rowspan="2">Camila une los puntos formando el cuadrilátero.</td></tr>
<tr><td>
Camila pregunta ¿qué es un cuadrilátero? Jenny le responde que es un polígono de cuatro lados.
Al preguntarle por la justificación de la perpendicularidad, Camila se vale de una propiedad del rombo (ver sección 5.4.3).</td></tr>
</table>

5.5.2 Proceso de visualización en la tarea de la "recta perpendicular punto interno"

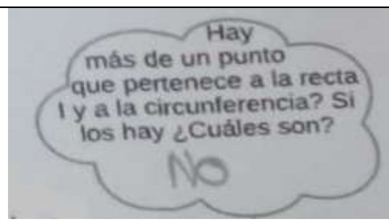
La visualización

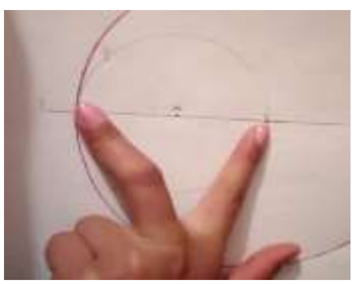
El proceso de visualización, en la Tarea 4, fue incentivado con preguntas para que las estudiantes identificarán equidistancias. En la pregunta del Paso 5 las estudiantes debían identificar los puntos que pertenecían tanto a la circunferencia $C1$ como a la recta l. Las tres estudiantes visualizaron que hay solo dos puntos de intersección y que uno de esos puntos es B.

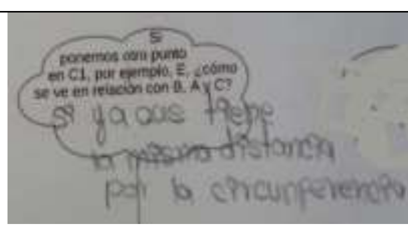
En la segunda pregunta, Paso 6, las estudiantes debían identificar qué puntos pertenecían tanto a la circunferencia $C1$, como a la circunferencia $C2$, además la relación que había entre las dos. Tal como se esperaba, las estudiantes identificaron que el radio de la circunferencia $C1$ mide la mitad del radio de la circunferencia $C2$ y que la circunferencia $C3$ es igual a la circunferencia $C2$ porque el radio mide lo mismo. Por último, en la pregunta del Paso 10, las estudiantes identificaron que el cuadrilátero $BDCE$ es un rombo.

A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación, con la estudiante Camila.

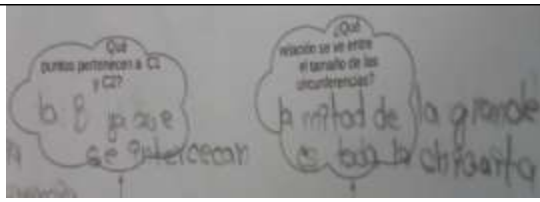
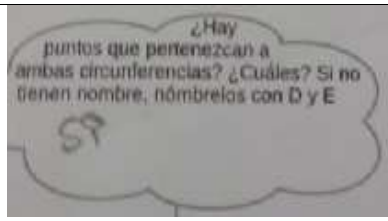
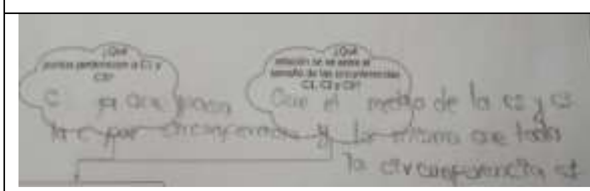
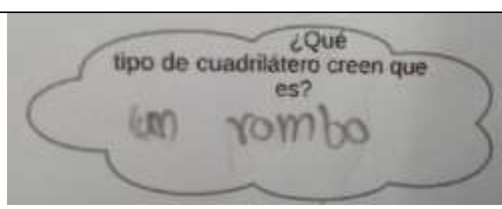
El proceso de visualización desarrollado por Camila

<table>
<tr><td>Paso</td><td>Respuesta</td><td>Comentario</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>

</td><td rowspan="2">A pesar de que su respuesta escrita es negativa, verbalmente y con gestos de las manos, su respuesta su respuesta es positiva. Denota que visualiza que la recta l y la circunferencia $C1$, se intersecan en dos puntos.

También identifica que cualquier punto que esté en la circunferencia equidista del centro.</td></tr>
<tr><td>

Camila coloca el dedo para señalar que el punto solicitado está en la circunferencia. Y dice: *se relacionan porque las distancias son las mismas, porque los puntos están en la circunferencia.*</td></tr>
</table>

6	 Camila dice: *la circunferencia $C1$ se ve más pequeña que la circunferencia $C2$ y parece que la grande es dos veces la pequeña.*	Camila ve que la circunferencia $C1$ tiene un tamaño que es la mitad de la circunferencia $C2$. Lo expresa de manera verbal con mayor fluidez, que de manera escrita. Además, reconoce que las circunferencias se intersecan en el punto B *y* C, pero en su respuesta solo anota al punto B.
7	  Camila señala con el dedo las intersecciones de las dos circunferencias y las nombra D *y* E.  Camila dice: las *circunferencias $C1$ y $C3$ se cortan en el punto C, además que la circunferencia C2 y C3 son iguales y C1 es la mitad de las otras dos. También que C1 está en la mitad de $C2$ y $C3$.*	Camila visualiza que las circunferencias $C2$ *y* $C3$ se intersecan en dos puntos, lo ratifica tapando una de las circunferencias y luego la otra. Podemos decir que Camila visualiza tanto intersecciones entre circunferencias, como relaciones de tamaño entre las circunferencias e intenta dar una descripción de lo que está viendo.
10	 Camila dice: *es un rombo porque sus lados son iguales*	Camila identifica al cuadrilátero como un rombo.

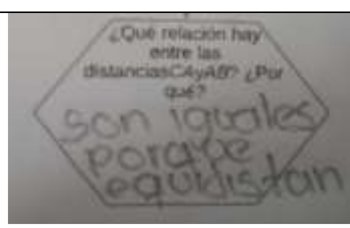
5.5.3 El razonamiento tarea cuatro “Restas perpendiculares punto interno”

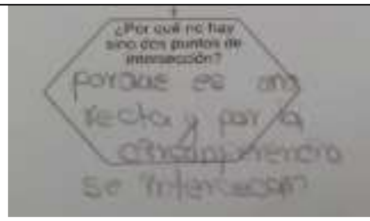
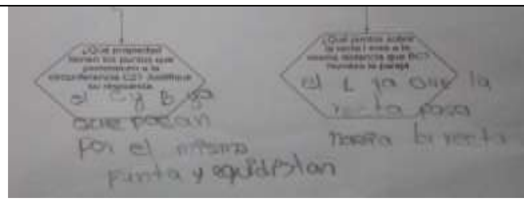
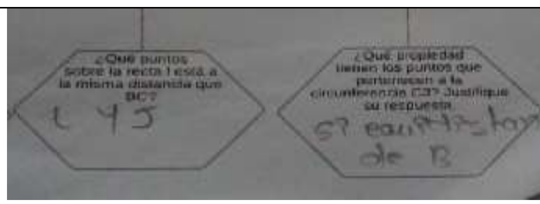
En el proceso de razonamiento, las preguntas fueron formuladas esperando que las estudiantes usaran las figuras y relaciones geométricas trabajadas en la primera y tercera tarea de construcción. Por ejemplo, para responder las preguntas de los Pasos 5 y 6 debían usar la definición de circunferencia para justificar que la distancia de AC, es igual a la distancia AB porque equidistan los puntos B y C de A.

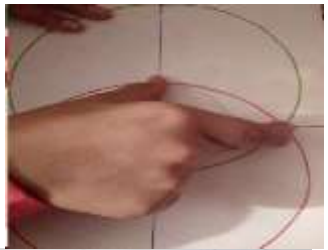
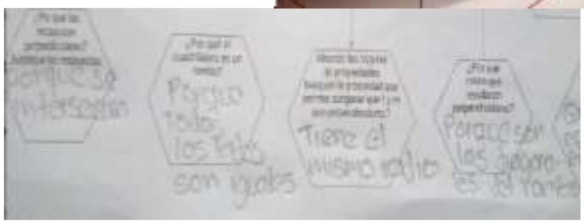
En las preguntas de los Pasos 7 y 8 se tenía previsto que las estudiantes razonaran que los puntos D y E pertenecían a ambas circunferencias y que, por lo tanto, la distancia de DB era la misma que DC como BE de EC. Las tres estudiantes logran justificar esta relación con la definición de circunferencia y de intersección de dos objetos geométricos.

En las últimas preguntas (Pasos 8 y 10) las estudiantes debían deducir que el cuadrilátero $BDCE$, era un rombo, porque sus cuatro lados eran congruentes. Así, debían usar las propiedades de este para inferir que las rectas l y m son perpendiculares al contener las diagonales del cuadrilátero $BDCE$. Ellas identifican el cuadrilátero $BDCE$ como un rombo y en el Paso 9 revisan las propiedades en las tarjetas que les fueron entregadas. Por tanto, afirman que las rectas l y m son perpendiculares, por qué contienen a las diagonales del rombo y estas son perpendiculares; en consecuencia, justifican por qué las rectas que construyeron son perpendiculares.

A continuación, se analizan con más detalle los resultados obtenidos en la implementación con la estudiante Camila.

Paso	Respuestas	Comentario
5	 Camila dice*: A es el punto medio de BC y eso hace que las distancias sean iguales.* Jenny le pregunta por qué	Camila parece usar la definición de circunferencia para aludir que las distancia AB y AC son iguales. Además, concluye que la intersección entre una recta y una circunferencia son dos puntos.

	cree que se ven iguales, Camila responde: *porque están en la circunferencia.*  Camila dice: *al intersecarse una recta con una circunferencia solo se puede intersecar en dos puntos.*	
6	 Camila identifica los puntos C y B que pertenecen a la circunferencia $C2$ y dice: *todos esos puntos miden igual del punto C a cualquiera.*	Camila utiliza la definición de circunferencia para justificar la equidistancia entre los puntos de la circunferencia con centro en C.
7		Camila utiliza nuevamente la definición de circunferencia para justificar la equidistancia a B, de los puntos de la circunferencia con centro en B.
8	 Camila dice: *las rectas forman una cruz, la recta m pasa por el punto medio que es A. La reta parese la mediatriz del segmento CB.*	Camila relaciona la construcción de la tarea tres, con esta construcción para intentar justificar como son las rectas m y l

10	   Camila dice: *como es un rombo y la recta l y m son las diagonales del rombo, y en una de las propiedades de las tarjetas dice que las diagonales son perpendiculares, entonces las dos rectas son perpendiculares*	Camila justifica que las rectas son perpendiculares, porque se intersecan y son las diagonales del rombo. Por lo tanto, usando las propiedades del rombo, justifica que las rectas l y m son perpendiculares.

Capítulo 6. Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones de nuestro trabajo. Las organizamos refiriéndonos a: el cumplimiento de los objetivos, general y específicos, los aprendizajes logrados por los estudiantes con la implementación de la cartilla, el aporte del desarrollo del estudio a nuestra formación como licenciados, el aporte del trabajo a la comunidad de educación matemática y las proyecciones del trabajo.

6.1. Sobre el cumplimiento del objetivo general del trabajo

El objetivo general del trabajo de grado era diseñar un cuadernillo para hacer construcciones geométricas con regla y compás e implementar algunas tareas propuestas con estudiantes de grado sexto para evaluar su potencial para desarrollar procesos de visualización y razonamiento. Consideramos que este objetivo se cumplió, aunque parcialmente. Se cumplió porque, como lo evidencian los capítulos 2, 3 y 4 logramos diseñar un cuadernillo de construcciones geométricas.

Pero decimos que el cumplimiento es parcial, porque nos faltó implementar todas las tareas y con más estudiantes, para tener una visión más amplia de la efectividad del cuadernillo de construcciones. Aun cuando en el segundo semestre de 2020 pudimos hacer dos implementaciones más, infortunadamente, en el momento de la aplicación de las tareas, por las irregularidades del sistema educativo, y por la pandemia, no fue posible contar con más estudiantes.

6.2. Sobre los objetivos específicos

El primer objetivo específico era elaborar un marco de referencia sobre el uso de la construcción geométrica con regla y compás, utilizando papel calco en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Consideramos que se cumplió, como puede apreciarse en el Capítulo dos. Los referentes teóricos que sustentan nuestra tesis se encuentran presentados de forma tal, que contribuyen a la fundamentación en didáctica de la geometría, sobre los asuntos que versa el trabajo de grado.

El segundo y tercer objetivo era recopilar un conjunto de construcciones de geometría plana adaptables a los contenidos curriculares de grado sexto y diseñar el cuadernillo de construcciones geométricas. Consideramos que ambos objetivos se cumplieron. Lo anterior porque logramos recopilar diez construcciones, que cumplían con el contenido curricular para grado sexto, de las cuales escogimos diez construcciones que son las que aparecen el Capítulo 4 de este trabajo. Con estas diseñamos el cuadernillo de construcciones geométricas.

El último objetivo específico era implementar algunas tareas del cuadernillo de construcciones con estudiantes de grado sexto y evaluar el funcionamiento del material para desarrollar los procesos de visualización y razonamiento. Consideramos que se cumplió parcialmente. Lo anterior porque nos faltó implementar todas las tareas con más estudiantes. Adicionalmente, la implementación de las construcciones 3 y 4, que se hizo en 2020-2, no se hizo con tres estudiantes de grado sexto, sino con una estudiante de grado séptimo y dos de sextos. Sin embargo, la estudiante de grado séptimo tenía conocimientos muy similares a los de sus compañeras al empezar el trabajo. Cabe aclarar que quizás, por su edad, respondió mejor a las preguntas que sus compañeras.

6.3. Sobre los aprendizajes logrados al implementar las tareas

Con el proceso de estudio y elaboración del presente trabajo pudimos poner en evidencia que, en efecto, la construcción geométrica es un puente entre la visualización y el razonamiento. Vimos que, al realizar cuatro tareas de construcción geométrica propuestas en el cuadernillo, algunos estudiantes lograron relacionar lo que veían con los conceptos que conocían previamente y podían establecer relaciones geométricas. Por ejemplo, en la Tarea 1, Juana justificó que había pares de puntos equidistantes, con la definición de circunferencia. Sin embargo, no todos los estudiantes lograron llegar a un razonamiento como el que esperábamos. Algunos factores influyeron en ello. Por ejemplo, en algunas ocasiones el entrevistador no encaminó a los estudiantes, para que llevaran un proceso de razonamiento en el que justificaran sus afirmaciones. Esto pasó en la Tarea dos porque el entrevistador no les solicitó a los niños que justificaran su respuesta, quedándose de este modo netamente en lo visual. También vimos que los estudiantes no estaban acostumbrados al tipo de trabajo que les propusimos y les costaba responder las tareas. Y algunos otros se desconcentraban por situaciones del ambiente en el que se encontraban.

Vale la pena comentar que, en la implementación de las Tareas 3 y 4 tomamos en cuenta un error cometido en la implementación de las Tareas 1 y 2. A diferencia de la implementación hecha en 2020-1, en 2020-2 dedicamos más tiempo a la interpretación del enunciado de la tarea por parte de las estudiantes. Esto permitió que las estudiantes entendieran desde un principio, qué era lo que se pretendía construir y orientaran el trabajo hacia esa meta. Creemos que este espacio de interpretación inicial fue fundamental y debemos considerarlo en nuestro quehacer docente.

La preparación de la implementación hecha en 2020-2 llevó a hacer dos cambios en el cuadernillo. Uno, intercambiamos las Tareas 3 y 4 para ganar mayor coherencia en la secuencia y lograr que efectivamente los aprendizajes de una Tarea se usen en el desarrollo de la siguiente. Dos, incluimos más preguntas relacionadas con la visualización y el razonamiento, previendo más apoyo para los estudiantes. Sin embargo, pensamos que el cuadernillo aún puede mejorarse. Por ejemplo, si incluimos más preguntas que lleven a los estudiantes a relacionar las propiedades de las representaciones con relaciones geométricas, quizás ellos podrían reflexionar acerca de sus construcciones y sobre la teoría que conocen para llegar a una conclusión sobre la representación o relación construida. Ratificamos que la hoja calco jugó un papel determinante en la visualización de los estudiantes, pues al ocultar los trazos auxiliares de la construcción geométrica y resaltar los trazos fundamentales del objeto representado, los estudiantes logran diferencian la construcción del proceso de construcción del objeto o la relación geométrica.

Una sugerencia para la aplicación de estas tareas de construcción es trabajarlas en grupo, para que los estudiantes discutan sus respuestas y así apoyar el razonamiento que se quiere desarrollar

6.4. Sobre el aporte del desarrollo del estudio a nuestra formación como licenciados

Lo primero que queremos mencionar es que hemos aprendido que debemos escoger con sumo cuidado las preguntas que hagamos a nuestros estudiantes y pensar bien en cómo las vamos a formular. De la forma como lo hagamos depende que los estudiantes describan y justifiquen de forma completa y claro lo que esperamos, evidenciando de este modo cómo están razonando.

Lo segundo que señalamos es que al momento de diseñar tareas para los estudiantes debemos tener claro qué conceptos tienen, y así proponer las tareas acordes a ello o hacer un aprestamiento previo para que los estudiantes ganen en herramientas conceptuales con las cuales enfrentar la construcción y, por esa vía, desarrollar visualización y razonamiento. Esto permitirá optimizar el potencial de la actividad, aunque exista limitantes en los recursos con los que se cuentan.

Lo tercero que queremos señalar es la importancia de dejar tiempo al finalizar cada interacción con estudiantes para que ellos expresen sus aprendizajes. Por ejemplo, Camila, al terminar la Tarea 4 se expresó de la siguiente manera: *Ahora digamos lo que aprendimos. Aprendí qué era una circunferencia, qué era un radio, qué era una mediatriz. Y ya aprendí a usar el compás para hacer equidistancias.*

6.5. Sobre el aporte del trabajo a la comunidad de educación matemática

Nuestro aporte a la comunidad de educación matemática va dirigido a que en las instituciones educativas se rescate la importancia de las construcciones geométricas con regla y compás, en la clase de geometría. Esperamos divulgar la cartilla en las instituciones donde trabajamos y recibir realimentación de nuestros colegas

6.6. Sobre las proyecciones del trabajo

Quedan más construcciones que se puedan adaptar al cuadernillo. Las presentadas en este documento son una pequeña parte del sin número de construcciones que hay en geometría plana y del espacio que se pueden realizar utilizando la hoja calco y llevando la cartilla a tareas para grados superiores.

Referencias Bibliográficas

Araya, R. G., y Alfaro, E. B. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 4(5), 113-136.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Ayala, N. (2008). Construcciones geométricas con regla y compás: pasos. *Revista Argentina de Psicopedagogía, 62*, 4.

Acosta, M., y Fiallo, J. (2017). Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas. Bogotá D.C.; Servicio de publicaciones de Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Baldor, A. (1966). *Geometría y trigonometría plana y del espacio*. México D.F.; Ediciones Culturales.

Barrantes, M., y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, *8*(1), 25.

Barrantes, M., Balletbo, I., y Fernández, M. (2014). Enseñar geometría en secundaria. En *Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación,* 1-14.

Bello, J. H.; Forero, A. (2014). Prácticas matemáticas en la geometría de Descartes: aportes a la formación de profesores. Taller realizado en Encuentro Distrital de Educación Matemática (11-13 Sept 2014). Bogotá, Colombia

Burguete, F. V. (2007). Software de geometría dinámica. En *Dibujo técnico y matemáticas: Una consideración interdisciplinar*, 317.

Caldas, G. B. (2006). Breve historia del currículo y la formación de maestros en Colombia. *Praxis pedagógica*, *6*(7), 6-21.

Cantoral, R., y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *16*(2), 694-701.

Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de II de Magisterio de la ENMPN. *Recuperado el 2 de mayo de* 2010 en: http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcc25h7

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. *Bogotá (Colombia): Ministerio de Educación Nacional*.

Cisternas, G., y Rigoberto, D. (2015). Geometría no euclidiana. Chillán. Servicio de publicaciones de Universidad del Bío-Bío. Escuela de Pedagogía en Educación Matemática.

Clements, D. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420-459). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51.

Duval, R. (2003): Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. En M. del C. Chamorro Plaza (ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Secretaría General de Educación / Instituto Superior de Formación del Profesorado. Colección Aulas de Verano.

Fernández, J. C. M., Peñalba, M., y de Mora, C. M. (2008). Los tres problemas clásicos de la antigüedad. La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. En *La historia de la ciencia y de la técnica: un arma cargada de futuro: ensayos en homenaje a Mariano Hormigón* (pp. 359-368). Cádiz, Servicio de Publicaciones de Diputación Provincial de Cádiz.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, *74*(1), 11-18.

López, M. B., Fernández, I. B., y Leno, M. Á. F. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación,14(54)*, 1-14.

Marmolejo, G. A., y González A., M. T. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(3), 301-328.

Marmolejo A., G. A., y Vega R., M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática, 24*(3), 7-32.

MEN (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.

Orozco, L. (2012). Aprender geometría a través de las construcciones circunferencia y círculo. En *Que hacer Educativo, 22(115)*,15-20.

PELÁEZ CEDRÉS, Á. J. (2009). Construcción, necesidad e intuición de esencias en geometría. Scientiae Studia, 7(4), 595-617.

Portillo, M. C. (2017). Construcción y comprensión de figuras geométricas. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, *4*(8), 14.

Puig, A., Pedro. (1947). *Curso de geometría métrica. Tomo l. Fundamentos.* Novena Edición. Madrid: Biblioteca Matemática.

Radford, L. (1998). On signs and representations. *Scientia Pedagogica Experimentalis*, *35*(1), 277-302.

Samper, C., Molina, O., y Echevery, A. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Leguizamón, C., y Camargo, L. (2001). Razonamiento en geometría. *Revista EMA*, *6*(2), 141-158.

Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En *Investigación en Educación Matemática*, 17, 43-65.

Smogorzhevski, A.S. (s.f.). *Acerca de la geometría de Lobachevski*. Moscú: MIR.

Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 275-300.