¿CAMBIÓ EL CONCEPTO DE NÚMERO CON LA CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS?

Jose Luis Guevara Rodriguez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2020

¿CAMBIÓ EL CONCEPTO DE NÚMERO CON LA CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS?

Jose Luis Guevara Rodriguez
Cédula de ciudadanía: 1013659154
Código estudiantil: 2014140052

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el
Título de Licenciado en Matemáticas

Director: Edgar Alberto Guacaneme Suaréz

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2020

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"¿CAMBIÓ EL CONCEPTO DE NÚMERO CON LA CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS?"**, elaborado por el estudiante **JOSÉ LUIS GUEVARA RODRÍGUEZ**, identificado con el Código 2014140052 y Cédula 1013659154, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cuatro** (44) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☐ Meritoria ☒ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de febrero de 2021.

Edgar A. Guacaneme S.

Dr. EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ
Director del Trabajo de grado

Mg. LUIS FRANCISCO GUAYAMBUCO QUINTERO
Jurado del Trabajo de grado

Mg. YADIRA MARCELA MESA
Jurado del Trabajo de grado

Tabla de contenido

Índice de figuras V

Agradecimientos VI

Dedicatoria X

Resumen 1

Introducción 2

1. Concepto de número antes del siglo XIX 6

1.1. Los pitagóricos. ¿Número, el origen de las cosas? 10

1.1.1. La primera crisis de los fundamentos de la matemática. Sin razón. . . 17

1.1.1.1. Demostración clásica. Perspectiva moderna o Aritmética . 19

1.1.1.2. Argumento Geométrico 21

1.2. Época de Oro. Lo ideal, la categoría y una teoría trascendental 23

1.2.1. Platón. ¿Es el número una idea? 23

1.2.2. Aristóteles. ¿Número es un predicado? 27

1.2.2.1. Hacia la "cantidad" 28

1.2.2.2. Categoría cantidad 30

1.2.3. Euclides. ¿El número es un objeto deductivo? 31

1.3. ¿La nulidad es número? 33

1.4. Una reconciliación desde adentro 35

1.4.1. Diofanto 35

1.4.2. Concepto de número de Stevin 37

1.5. ¿Lo opuesto puede ser un número? 41

1.6. ¿Un imaginario puede ser número? 44

1.6.1. Los cuaterniones 48

1.7. ¿Un número es una cortadura (es un conjunto)? 50

1.7.1. El número irracional 52

1.8. ¿Es el infinito un número? 52

1.8.1. El infinito actual 54

1.8.1.1. Los *Aleph* 55

2. Segunda Crisis de los Fundamentos de la Matemática **58**

2.1. El Problema del rigor y la verdad 60

2.1.1. El dilema de la verdad contra la intuición 60

2.1.2. Las paradojas y el golpe del infinito actual contra la intuición 68

2.1.3. Aritmetización del análisis y la geometría 73

2.2. Las respuestas filosóficas a la segunda crisis y sus consecuencias 76

2.2.1. La escuela logicista 77

2.2.1.1. Concepto de número de Frege 81

2.2.1.2. La paradoja de Russell 83

2.2.1.3. El Logicismo de Russell 84
2.2.2. La escuela Formalista 86
2.2.2.1. Axiomas de Peano 87
2.2.2.2. Concepto de número de Hilbert 90
2.2.2.3. Teoría del signo 93
2.2.3. La escuela Intuicionista 94
2.2.3.1. Herramientas intuicionistas 97

Conclusiones **102**

Referencias **106**

Índice de figuras

1.1. Imagen de la demostración con perspectiva aritmética. 20

1.2. Argumento geométrico de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado. 22

1.3. Imagen del libro *L' Arithmétique* de Simon Stevin, tomada de (Stevin, 1985). 39

1.4. Imagen de la segunda página del libro *L' Arithmétique* de Simon Stevin, tomada de (Stevin, 1985). 39

1.5. Portada del libro "Teoría del sistema de números complejos" (1867) de Herman Haenkel, tomada de (Haenkel, 1867). 43

1.6. Fascímil del Libro: "Teoría de funciones conjugadas o pares algebraicos, con un ensayo preliminar sobre el álgebra como una ciencia del tiempo puro" de Hamilton, tomada de (Hamilton, 1831). 49

2.1. Imagen ilustrativa del quinto V postulado de *Elementos* de Euclides. 61

2.2. Imagen de la prueba de la proposición del ángulo externo de un triángulo, tomado de (Torres, 2018) 63

2.3. Representación de la construcción de la paradoja de Galileo. 70

2.4. Paradoja de Galileo. 71

2.5. Representación de la construcción de la paradoja de las rectas paralelas. . . . 72

2.6. Paradoja de las rectas paralelas. 72

2.7. Imagen del libro Fundamentos de la Aritmética de Frege, tomada de (Frege, 1884) 79

Agradecimientos

A los profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) en particular a quienes me dieron la oportunidad de ingresar a la universidad, los profesores: Lyda Constanza Mora, Oscar Molina y Camilo Sua.

Al profesor Carlos Julio Luque por mostrarme quizás para mí, la mejor perspectiva de las matemáticas “La única manera de aprender matemáticas es hacer matemáticas[1]”.

A la profesora Carmen Samper de Caicedo, por mostrarme lo fascinante que es la geometría y su enseñanza, en las oportunidades que nos fue posible encontrarnos en el salón de clases.

A la profesora María Nubia Soler, quien siempre tuvo fé en mi proceso académico.

Al profesor Luis Francisco Guayambuco, quien no solo me orientó, sino que me proporcionó información matemática, la cual contribuyó a mi formación académica.

Al profesor Luis Eduardo Espitía, Alberto Donado, Jorge Paéz, por compartir en sus tiempos *libres* algunos de sus conocimientos en matemáticas, exhibiéndome el panorama amplio de este cuerpo de saberes.

Al profesor Alejandro Sánchez, quien proyectó su carisma y su humanidad como docente. Y mostrarme que ser docente es una labor de todo momento y a toda hora.

A la profesora Leonor Camargo, quien me colaboró en muchas oportunidades con

[1] Paul Halmos.

bibliografía de didáctica de la geometría.

Al profesor Orlando Aya, que en los ratos posibles de contacto, me mostró su pasión por la lectura y crítica ante la sociedad.

A la profesora Yadira Mesa, quien fue jurado de este trabajo y con sus observaciones, este trabajo finalmente llega a los lectores ansiosos por su publicación y lectura.

Al grupo de Historia de la Universidad del Valle, que me permitieron dar mi primera ponencia por fuera de la Universidad Pedagógica Nacional.

Al profesor Alejandro Garciadiego de la UNAM, por facilitarme una copia de la tesis de Jones, la cual fue fundamental para el desarrollo de la primera parte de este escrito.

Sin duda alguna al profesor Leonardo Favio[2], por colaborarme en un momento crucial de mi carrera.

¿Qué sería de este documento sin una gran orientación? Para mi es un gusto y un honor que este documento sea leído y revisado de forma constructiva y crítica por el profesor Edgar Alberto Guacaneme, al cual estoy sinceramente agradecido.

Al señor Sensei Baronio Cifuentes Medina, por poseer la inmensa paciencia de acompañarme en mi proceso formativo en el Karate Do.

A Aura María Espinosa Romo, por mostrarme lo espectaculares que son los fractales y el gusto que tiene por ellos.

A Gerelsy Figueroa y su amada familia, por alegrarme los días y tardes con su música.

[2]En su momento, decano de la facultad de Ciencia y Tecnología, y rector de la Universidad Pedagógica Nacional, mientras fue escrito este documento (2016-?)

A María Camila Pérez Zambrano y su amada madre, por haber compartido un poco de su tiempo, cuando lo necesité.

A las profesoras Luz Marina Casallas, Eliana Paola Carrión, Carmen Rosa Pedraza y Claudia Patricia Mancipe, por colaborarme y aportarme en mi proceso académico en el tiempo de prácticas de inmersión.

Los siguientes fueron compañeros que compartieron su tiempo y me aportaron en mi pregrado: Diana Marcela Martínez, Cielo Vanessa Escobar, Luisa Fernanda Bobadilla, Brigitte Viviana Ibáñez, Diana Carolina del Rio, Tatiana Espitia, Eliana Katherine Rincón, Sandra Jackeline Baquero, Dorían Elissa Rodriguez, Johanna Marcela Hernández, Maria Camila Paris, Natalia Ivonne Sierra, Laura Paola Nuñez, Jenyffer Alejandra Lozano, Ana María Cruz Rodríguez, Lincey Isbelia Sanchez, Jenny Andrea Ramirez, Katherine Barreto, Jeimmy Andrea Amado, Valentina Esperanza Quintero, Nestor Alfredo Garzón, Carlos Andres Ospina, Ivan Hernandez, Michael Barbosa, Jhon Ferney Quitian González, Jhon Cristian Mina, Jhon Mojica, Wilson Cruz, Manuel Alejandro Ordoñez, María Fernanda Romero, Sofía Alexandra León, Daniel Aveces, Duver Barrios, María Fernanda Heredia, Claudia Patricia Rodríguez, Loren Dahana Limas, Laura Camila Heredia, Sonia Marisol Martínez, Tania Daniela Hernández, Tania Alexandra Robledo, Astrid Carolina Hernández, Lisney Tatiana Novoa, Nicole Yuriana Novoa, Haiden Llanos, Etna Jenisel Forero, María Mónica Barrera, Darly Martiza Melo, Jefferson Arias, Anamaría Flechas Umaña, Diana Katherin Quintero, Dayan Liseth Rubiano, Karen Rodriguez Dallos, Cesar Gonzalez, Joan Sebastian Parra, Willian Nemeguen, Paula Andrea Garcia, Elsy Catalina Rincón, Leidy Tatiana Flores, Andrés Rolando Garcia, Juan Carlos Martínez, Lina Paola Ómbita, Lennyx Coraima Camacho, Francy Tatiana Garcia, Diana Katherine Huertas, Cindy Ferrucho, Alejandra Malagón Velásquez, Rubiela Sánchez, Gissed Alexa Villada, Wilmar Cortes, Angie Lorena Cortes, Erika Paola Flechas y Luisa María Romero.

Finalmente a María Daseira Ñañez Muñoz, Katherin Briggette García, Catalina Sayari Ortiz, Harol Esteban Rodríguez, Angie Alejandra Olarte, Daniela Gámez Cuevas, Laura Alejandra Suárez, Yeruska Sabrina Rincón, Cindy Vanesa Amarillo, Angélica María Sánchez, Angie Paola Aldana, Leidy Paola Martinez y Jenmy Mayerly Bejarano, quienes me ofrecieron su compañía, su confianza, su tiempo y amistad en mis últimos épocas de pregrado.

Dedicatoria

A mi madre Lucy Esperanza Rodríguez, mi padre Luis Miguel Guevara, mi tías: Martha Rodríguez, Mireya Stella Rodríguez, Myriam Margarita Guevara y mi amado primo Diego Alejandro Cotrino. Ya que sin ustedes yo no estaría escribiendo este documento y logrado este proceso de mi vida.

A Jesús David Ramírez, Miguel Angel Neira, Diego Alexander Viafara y Andrés Eduardo Martín con su amada familia. Por todo lo que influenciaron y trascendieron en mí vida personal y académica.

A Johan Nicolas Molina, compañero de debates de día y noche y que siempre estuvo al pendiente de este trabajo hasta su culminación.

A Gina Alexandra Soler, mi amiga de infancia que a pesar de la distancia, siempre me ha estado acompañando.

A Daniela María Rodríguez, que ha sido esa voz que ha llegado en los momentos más difíciles en mi vida, para reconfortarme y ayudarme a ser mejor persona.

A Lizeth Carolina Alba, quien fue mi primera lectora crítica de este documento, y que ha proyectado en mí un inmenso amor hacia la humanidad.

A Laura Cristina Velandia, que ha sido un ejemplo a seguir con su forma trascendental-armónica de ser, y que proyecta para mí una imagen maravillosa de un ser lleno de luz y prosperidad.

A Keidy Katherine Russi Rodriguez, quien influenció en mí la utopía de que el amor a la antigua, todavía puede ser posible socialmente. A Keidy y su familia, mi agradecimiento por prestarme su residencia para esos momentos de canto e inspiración.

A María Verónica Rodríguez Pulido y su hermano Ángel Custiodio Rodríguez, quienes son parte fundamental de mi transcurrir por Choachi.

Al profesor Leonardo Amado, que además de ser lector de este documento, debatió conmigo su contenido.

Y finalmente a la memoria de mi única hermana Ingrid Melissa Guevara Rodríguez (1992-2020), una víctima más del sistema de salud precario de este país.

Resumen

¡Debemos saber, Sabremos!

David Hilbert

El propósito que persigue este trabajo de grado consiste en aprovechar el uso de la Historia de las Matemáticas; para reconocer cambios conceptuales; en particular, se busca detectar cambios en el concepto de número antes y después de la segunda crisis de los fundamentos de las Matemáticas. Por lo tanto, en este trabajo de grado, encontrarán varias transformaciones de carácter epistemológico u ontológico, que ejemplifican el estado dinámico respecto del número en los momentos referidos.

También se cuestiona si con la segunda crisis de los fundamentos de las Matemáticas, este concepto se preservó o presentó algún cambio, ya que, el hecho de que exista una segunda crisis (en la cual la noción de verdad cambia), puede incentivar la pregunta ¿qué es el número?, pues, si el concepto de verdad cambió, el concepto de número se espera que cambiase también, lo cual este trabajo pretende sustentar.

Introducción

Gran parte de las dificultades por las que atraviesa el mundo se deben a que los ignorantes están completamente seguros y los inteligentes llenos de dudas.

Bertrand Russell

Quizá exista la certeza social que se conoce del número lo suficiente, como para evitar hacer la pregunta ¿qué es el número? Esta certeza se puede basar en el hecho que el número se manifiesta en el diario vivir, por ejemplo, cuando se realizan conteos; esto seguramente sustenta la respuesta usual "el número es aquello que sirve para contar".

A propósito de la pregunta en cuestión, Russell afirma: "La pregunta ¿qué es un número? se ha planteado con frecuencia, pero solo en nuestros días se le ha dado una respuesta correcta. La respondió Frege, en 1884, en sus *Grundlagen der Arithmetik*" (Russell, 1956, p.19)[3]. Al respecto, precisamente Frege señala la aparente ingenuidad de la pregunta al decir que "muchos considerarán que esto [la pregunta] no merece dedicarle esfuerzo alguno. Este concepto está ya tratado suficientemente, opinan ellos, en los libros de textos elementales, en los que se despacha la cuestión para toda la vida" (Frege & Imbert, 1972, p. 14)[4].

[3]Se aclara, que esta es la fecha de publicación de la traducción en español, la obra original data del año 1919, publicado por George Allen y Unwin en Londres.

[4]La obra de Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, fue publicada en 1884 por la editorial Max und Mascus, en Breslau. Esta edición del libro de Frege viene acompañada del estudio de Claude Lambert, el cual fue publicado en 1969 y cuya traducción al español es la que está aquí referenciada.

Pero, incluso en el diario vivir, el número no solo está presente en el conteo; también, se usa para medir o, de manera más precisa, para presentar el resultado de una medición física. Ahora bien, los números que sirven para medir no son los mismos que los que se emplean para hacer el conteo, ya que, en el proceso de medir, necesitamos: (1) que estos números tengan la propiedad de “quebrarse” o “dividirse” y (2) considerar estas partes como números. Sin embargo, estas dos condiciones tardaron bastante en darse y ser aceptadas. Justamente, tuvo que pasar mucho tiempo para aceptar esta nueva ontología del número y, por ende, un cambio conceptual del mismo, cambio que expondremos más adelante a la hora de abordar el trabajo de Stevin.

Por otro lado, una faceta interesante de los números son sus formas de representación, a tal punto que hay situaciones en las que el número es entendido como un símbolo. Por ejemplo, Kline (1976) reporta un diálogo entre un estudiante y su maestra, quien le pregunta a su estudiante si el siete escrito en el tablero (“7”) es un número, a lo que el estudiante contesta de manera afirmativa; verificando que, para el estudiante, el numeral (símbolo) y el número son lo mismo. Sin embargo, considerar los numerales como números no es un caso aislado, pues esta confusión se presenta a la hora de enseñar y aprender matemáticas, confusión que existe, desde los inicios de la numeración (Smith & Ginsburg, 1979). Aunque autores como Alfonso (1968) señalan que esto cambió hace menos de un siglo en el contexto de la enseñanza de los números: “Las ideas referentes a la numeración y a los números suelen confundirse y no fueron objetos diferenciados de estudio de los currículos escolares hasta entrados los años setenta” (p. 17).

Otro ejemplo, que destaca esta relación entre número y numeral proviene del curso “Aritmética” de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) cuando los futuros profesores de Matemáticas construyen distintos numerales para un mismo número. Aunque la culminación del curso es lograr el concepto de número natural con axiomas de Peano, este curso es complementado con el de "Sistemas Numéricos", el cual trabaja la construcción geométrica de algunos números y en la imposibilidad de la construcción para otros, procurando un ambiente de reflexión para discutir el carácter abstracto de los números, llegando a establecer que "el número es un objeto abstracto" (Luque, Mora & Páez, 2013, p. 19).

Pero más allá de la realidad del conteo, la medición y la simbolización, el número presenta otras dimensiones. Por ejemplo, al estudiar los números transfinitos se advierte que los números (*aleph*) también cumplen otras propiedades, como asociarse a la cantidad de elementos de conjuntos que son infinitos, encontrándose para el número una dimensión no tan intuitiva y quizás desconocida para muchos. Por lo que nuevamente se hace la pregunta ¿qué es el número?

Ahora bien, responder la pregunta ¿qué es el número? con la expresión "el número es un objeto abstracto", no pretende ser la única caracterización que se logre en una aproximación a este. Es claro que existen otras aproximaciones ($v.g.$, semántica, epistemológica, histórica, ontológica, semiótica, fenomenológica o didáctica) que pueden generar mayores y mejores caracterizaciones. Admito que el conjunto de estas podría dar más elementos para comprender la polémica idea de número, pues "casi no hay noción que en nuestros días haya provocado más discusiones y se haya prestado a más diversas interpretaciones que la noción de número" (Brunschvicg, 1945, p. 21).

No obstante, el objetivo de este trabajo no es dar una definición de número como respuesta a la pregunta, pues ello requeriría el estudio de todas las dimensiones comentadas y estas desbordarían las posibilidades de un trabajo de grado de pregrado. Incluso, estudiar todas las dimensiones podría ofrecer tan solo aproximaciones de este objeto matemático. Más bien, me interesa reconocer los cambios conceptuales del número en momentos históricos del desarrollo de las Matemáticas. Más específicamente, este trabajo pretende responder la pregunta ¿cambió el concepto de número en la segunda crisis de los fundamentos?

Para comenzar a abordar esta pregunta, y debido a que el número ocupa un protagonismo en la primera y segunda crisis de las matemáticas, se procura establecer cuál era la idea de número antes y después de la segunda crisis, exponiendo algunas de las causas que produjeron tal crisis. Esto se realiza, acudiendo a la Historia de las Matemáticas. En otras palabras, se accede a la naturaleza de este objeto (número) y se detectan sus cambios, con base en perspectivas históricas, las cuales permiten encontrar sus rasgos epistemológicos y ontológicos.

Para ambos momentos (antes y después de la crisis) se referencian algunos acontecimientos o hitos históricos que develan cambios conceptuales de la idea de número. Los acontecimientos acaecidos antes de la crisis de los fundamentos son reportados en el primer capítulo; los sucedidos después de la crisis, y específicamente las respuestas de tres apuestas filosóficas que dieron a la problemática de la segunda crisis de los fundamentos ($v.g.$, logicismo, intuicionismo y formalismo), constituyen en esencia el contenido del segundo capítulo.

Capítulo 1

ACONTECIMIENTOS ACERCA DEL CONCEPTO DE NÚMERO

> *Todo buen matemático es mitad filósofo, y todo buen filósofo es al menos mitad matemático.*
>
> Gottlob Frege

En este capítulo se encontrarán varios sucesos históricos en los cuales se pueden encontrar cambios conceptuales del número, comenzando con la escuela pitagórica. Esta consideró al número como principio de todas las cosas, y, en su misma actividad de hacer matemáticas, encontró en la Geometría la existencia de magnitudes inconmensurables (detonante de la primera crisis de los fundamentos[5]), ocasionando una profunda anomalía a las matemáticas.

El siguiente acontecimiento refiere a las ideas de Platón, quien formula su concepto de número basado en su teoría de las ideas, colocando al número como perteneciente al mundo basado en dicha teoría y no como un principio, tal y como lo hicieron ver los pitagóricos.

[5]La Real Academia Española de la Lengua define el término "fundamento" como "Principio y cimiento en que estriba y sobre el que se apoya un edificio u otra cosa" (REAL ACADEMIA ESPAÑOLA, s.f.). No obstante, hay tres connotaciones del término "fundamento" planteados por el profesor Carlos Torres, véase (Torres, 2018, pp. 36-38).

Se procede entonces con Aristóteles (alumno de Platón), el cual se aleja de la teoría de las ideas y estandariza al número junto a la magnitud, separándolos en dos subcategorías (predicados): discreta y continua. Con Aristóteles, hay otra puesta conceptual de número que va a ser decisiva, pues está influenciará a Euclides en su obra Elementos.

En *Elementos*, Euclides mantiene esta separación y el número pasa a formar parte de una teoría matemática, teoría que seguirá vigente hasta la aceptación de la creación de las geometrías no euclidianas, que son una motivación a la segunda crisis de los fundamentos de las Matemáticas.

Así mismo, se presentan otros eventos en los que se encuentran otros acontecimientos respecto al concepto de número, como el reconocimiento de las fracciones como números, logrado por Simon Stevin (1548-1620). Stevin reconoce (debido a su actividad como ingeniero), que lo continuo y lo discreto no deberían estar separados; así, con Stevin, hay un rompimiento con la propuesta de Aristóteles. Además, para complementar la tarea de Stevin, llega Descartes (contemporáneo de Stevin), y logra un hito en la Geometría que consiste en extender las operaciones aritméticas con los segmentos, como él mismo lo afirma:

> Así como la Aritmética se basa en cuatro o cinco operaciones, a saber, la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces (que puede ser considerada como una especie de división), de igual forma no es necesario en Geometría para llegar a conocer las líneas que se buscan y para disponerlas a ser conocidas, sino añadir o sustraer otras, o bien tomando una línea que consideraré como unidad, para relacionarla tanto más fácilmente con los números. (Descartes, 1987, p. 279)[6]

Así en *Geometría*, de Descartes, se completa finalmente la multiplicación entre seg-

[6]La obra *La Geometría* de Descartes aparece en 1637. Aquí se consultó la obra traducida, cuya fecha de publicación es la que está referenciada. Además, esa forma de ver el número como un doble uso, entre magnitud y discreto, se puede encontrar en Recalde (2011).

mentos, labor que era imposible en *Elementos* de Euclides. Esto permite desde una óptica posterior, una especie de clausura en la operación de multiplicación de segmentos; es decir, un álgebra entre segmentos, y relacionarla con la proposición V del libro de *Elementos*: "Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número" (Euclides, 2015a, p. 95)[7]. Con esta idea de establecer ese isomorfismo entre los números y magnitudes (en cómo se operan), muestra que las operaciones contar y medir se funden y no están separadas, contrario a lo establecido por Aristóteles. Esta perspectiva da solidez a la visión del número estrechamente relacionado con la magnitud.

El siguiente acontecimiento que se da, es el paso del concepto de número incluyendo los números negativos, que ocurrió en el *siglo XIX*. En esa época, los números positivos eran los únicos en existencia y con sentido. Ahora bien, con Hermann Hankel (1839-1873), buscando un álgebra universal (Luque, Mora & Torres, 2013), permite aceptar a estos entes (números negativos) como números, de tal modo que el cero se convierte en número, ya que este objeto matemático no lo era desde sus primeras apariciones (como lo haré explícito en su momento).

Sin embargo, la contribución de Hankel solo es posible después de los trabajos acerca de los cuaterniones de William Hamilton (1805-1865), que son el germen de los números complejos; y que comparten la existencia en las ecuaciones, como tambíen sucedió con los números negativos. Hamilton dota a los complejos de estructura algebraica, concibiéndolos como parejas ordenadas de números reales, produciendo otra conceptualización de número.

Ya que; los complejos estaban sustentados con los números reales en su interior, no se puede asegurar que su definición esté "completa", pues todavía en *siglo XIX* los números reales no estaban bien definidos; aunque muchos matemáticos los usaban, faltaba definirlos

[7]Es claro que Euclides existió entre 325 y 265 a.C., por lo tanto, aquí la obra citada es la traducción de María Luisa Puentes publicada por la Editorial Gredos y RBA, que corresponde a la fecha 2015a.

apropiadamente. Esta labor fue abordada por Richard Dedekind (1831-1916); y por matemáticos, como George Cantor (1815-1918), y Karl Weierstrass (1815-1897), quienes también participan en la tarea de tratar de caracterizar el continuo, exponiendo sus construcciones para la misma época[8].

Dedekind, fue un matemático que estaba empezando a emerger en el ámbito académico de la época y por su lado "definió" los números reales usando un objeto matemático que denominó cortadura (de la cual se hablará en su momento). Además, Dedekind, con el supuesto que los números racionales son densos[9]; pero no continuos (propiedad que caracteriza a los números reales como un campo[10] diferente a los racionales), logra finalmente con sus cortaduras "caracterizar el continuo" de los números reales.

Cantor, buscando caracterizar el continuo paralelamente, logra otra hazaña en las Matemáticas: crear la Teoría de Conjuntos. Esta trató de capturar al infinito, convirtiéndolo también en número. Con ello el número tiene dos cualidades: ser átomo[11] de un conjunto y ser el conjunto mismo, lo que denomina Cantor "doble abstracción".

Finalmente, el ingreso del infinito en las Matemáticas produce otra motivación a la segunda crisis de los fundamentos de las Matemáticas: la existencia de paradojas. Encontrándose las Matemáticas de nuevo en estado de revisar sus fundamentos.

Desarrollemos ahora, con mayor extensión y profundidad, la anterior trayectoria histórica del número. Para ello, revisitemos algunos acontecimientos.

[8]Los trabajos de Cantor y Weirstrass son mencionados por la importancia histórica que tienen en relación con fundamentar el continuo. Se recomienda ver (Mora & Torres, 2004), para profundizar en sus construcciones.

[9]Es decir, que dados dos racionales, se puede encontrar al menos uno entre.

[10]Un campo es una tripla en la que $(F, +, \cdot)$ donde $(F, +)$ y $(F^*, \cdot)$, son grupos abelianos con $F^* = F - \{0\}$, siendo 0 el elemento identidad de $(F, +)$ y 1 el elemento identidad de $(F^*, \cdot)$ con $1 \neq 0$. Además $(F, +)$ y $(F^*, \cdot)$, son ensamblados vía propiedad distributiva del $\cdot$ respecto a la $+$ (Luque y col., 2018). Sin embargo, cuando se aborde el concepto de número de Hilbert, será más explícita la estructura.

[11]Como sinonimo de ser elemento.

1.1. Los pitagóricos. ¿Número, el origen de las cosas?

El hombre, como ser dinámico, se ha inquietado bastante por reconocer su origen, el comportamiento de la naturaleza que lo rodea, encontrar la verdad, etc. Responder preguntas de esta índole le llevó a empezar a crear sus propias teorías y creencias, como la existencia de dioses y la creencia de que estos dioses lo influenciaban (Penrose, 2006).

A partir de ello, los hombres, como civilización, creyeron que si adoraban a estos seres iban a encontrar respuestas, es decir, a hallar la verdad y comprender lo que les rodeaba. Pero, al parecer solo hubo un grupo de hombres que planteó la situación al revés, es decir: si entendían y comprendían a profundidad la naturaleza, encontrarían la verdad; y, por lo tanto, se acercarían a estos dioses. Este grupo fue la civilización griega[12].

Aunque la civilización griega tuvo intelectuales destacados como Thales de Mileto. Me interesa un estudiante de él, Pitágoras. Esto debido a que él propuso hallar la verdad en la naturaleza mediante las Matemáticas.

Pitágoras (569 a.C.- 475 a. C.)[13] en esa búsqueda de la verdad, hizo algunos viajes, aprendiendo de personas como Thales de Mileto y Anaximandro (Luque y col., 2015)[14]. De regreso a su ciudad natal, Samos, crea su famosa escuela o secta distinguida como “los pitagóricos”. En esta escuela, los miembros eran separados en tres grupos: los acusmáticos,

[12]Otras civilizaciones como los caldeos, hicieron actividades como la Astronomía, o los sumerios con la Metrología. Esto es una muestra de algunas civilizaciones que desarrollaron actividades científicas. Pero desde una óptica basada en el rigor, no tienen el mismo carácter que la civilización griega (Vera, 1970a).

[13]De Pitágoras se tienen muchas referencias; sin embargo, no hay una que satisfaga las necesidades inmediatas para un lector no especializado (Gorman, 1988).

[14]Al parecer, el rumor que Pitágoras fue alumno de Thales, es poco probable de ser cierta, por la diferencia de edades entre ambos (Boyer, 1987).

matemáticos[15] y físicos (García, 2011)[16]. La escuela fue tan influyente, que perduraron alrededor de cinco generaciones, según informa De Guzmán (2001):

- Pitágoras (530-500)
- Hipaso de Metaponto, Alcmeon (520-480)
- Matemáticos anónimos (480-430)
- Filolao, Teodoro (440-400)
- Arquitas de Tarento (400-360) (p. 67).

Esta escuela y su creador Pitágoras, promulgaban que la naturaleza estaba regida por leyes matemáticas (Vera, 1970a), porque bajo ciertas relaciones o propiedades matemáticas se podía explicar los fenómenos más diversos en la naturaleza y encontrar la verdad. Por ejemplo, los pitagóricos afirmaban que los cuerpos que se mueven en el universo producen sonidos[17]. Por eso, es común encontrar que Pitágoras[18] desarrolló una teoría musical con base en las Matemáticas, describiendo relaciones numéricas que existen entre las notas musicales, como una cuarta, una quinta y una octava, entre otras.

Ahora bien, como el plan es encontrar la verdad y comprender la naturaleza, que se manifestaba mediante el número, este último se postulaba como medio para dar cuenta y razón de la verdad, testimonio que Aristóteles (1994) comparte:

[15] Los matemáticos eran quienes seguían los lineamientos de Pitágoras, los verdaderos filósofos y eran los que recibían la doctrina con toda profundidad. Mientras que los acusmáticos eran otros miembros de segundo rango o filósofos menores: ellos, solo recibían la doctrina de manera muy superficial (Porfirio, 1987).

[16] Ellos reducían la Astronomía y la Música a números y Geometría, dejando desde una perspectiva Aristotélica, las matemáticas como el estudio entre lo discreto (Aritmética) y lo continuo (Geometría), lo anterior se puede resumir como propone Campos (2006): "Lo discreto puede ser absoluto o relativo, lo absoluto estudia la Aritmética, lo relativo estudia la Música, lo continuo es o estable o inmóvil, lo estable lo estudia la Geometría y lo móvil lo estudia la Astronomía" (p. 73).

[17] Esta hipótesis se fundamenta en el experimento de atar piedras al extremo de una cuerda y hacerla girar. Debido a este experimento, creyeron también que los planetas también hacían sonidos, es decir, estaban regidos por el fenómeno musical (Kline, 1985).

[18] Los pitagóricos le cedían la autoría de sus descubrimientos a su maestro Pitágoras (Boyer, 1987).

> Puesto que las demás cosas en su naturaleza toda parecían asemejarse a los números, y los números parecían lo primero de toda la naturaleza, supusieron que los elementos de los números son elementos de todas las cosas que son, y que el firmamento entero es armonía y número. Y cuantas correspondencias encontraban entre los números y armonías, de una parte, y las peculiaridades del firmamento y la ordenación del Universo, de otra, las relacionaban entre sí sistemáticamente. (pp. 89-90)[19]

Al parecer, en relación con orden cosmológico que menciona Aristóteles, según Jones (1978), es que los pitagóricos iban tratando de poner o encontrar orden en los fenómenos que ocurrían en el firmamento, logrando reconocer por medio de este, su "unicidad" (pues, si se quiere ordenar algo, dependerá siempre de la identificación de las semejanzas y sus diferencias). Así que, a través de la búsqueda en el establecer ese orden, aparece la tesis filosófica de Pitágoras: "todo es número"[20]. En otras palabras, equivale a afirmar que el número es el principio que explica naturaleza (Campos, 2006), el que revela la verdad[21].

Sin embargo, no sólo el número tiene un carácter de principio como dice Aristóteles, el número también era un medio para acercarse a los dioses; es más, generaba a los dioses:

> ¡Bendícenos, número divino, tú que generaste a los dioses y a los hombres! ¡Oh santo, santo *tetraktys*, tú que contienes la fuente y la raíz del eterno fluir de la creación! Porque el número divino comienza con la unidad pura y profunda hasta alcanzar el sagrado cuatro; entonces engendra la madre de todo, el que comprende todo, el que limita todo, el primogénito, el invariable, el inalcanzable diez sagrado, que guarda la llave de todas las cosas. (Dantzig, 1971, p. 54)[22]

[19] La obra aquí citada es la traducción de la obra de Metafísica de Aristóteles de la editorial Gredos, ya que como se sabe, Aristóteles data de (385 a.C. - 322. a.C.).

[20] Número significaba las cosas contadas en sí mismas, ya que el acto de contar precede al número y el número está relacionado con las cosas, en otras palabras contar es juntar la relación número-objeto (Jones, 1978).

[21] Todos los objetos estaban hechos de partículas elementales de materia o unidades de existencia combinadas de acuerdo con las distintas figuras geométricas. El número total de unidades representaba, de hecho, el objeto material. El número era la materia y forma del universo. (Kline, 1985, p. 11).

[22] Para comprender porque el diez era la llave de todas las cosas, existe una anécdota de un discurso de

Es decir, el número también tiene propiedades metafísicas, ya que está por encima de los hombres, y solo por medio de este podemos llegar a comprender a los dioses. Desde esa postura metafísica, los pitagóricos también creían que los números tenían otro tipo de vida y existencia independiente del hombre (Gorman, 1988), por eso el número está a un nivel superior.

Aunque el testimonio de Aristóteles expone la filosofía Pitagórica, existen algunos testimonios aparte del ofrecido por Aristóteles, proporcionados por miembros de la misma comunidad pitagórica. Por ejemplo, según Brunschvicg (1945), Filolao dijo "Y en verdad, todas las cosas que se conocen poseen número, pues ninguna cosa podría ser percibida ni conocida sin éste" (p. 54).

Es decir, el número es el medio para poder reconocer las cosas sensibles, y sin este no podemos conocer y estudiar el mundo. Otro testimonio es dado por Nicómaco que según Dantzig (1971) dijo:

> Todas las cosas que han sido ordenadas por la naturaleza según algo que parezca a un plan humano, así se les considere individualmente y como un todo, o separadas y puestas en orden por la Presencia y la Razón, las cuales han creado todo según el número, resultan concebibles solamente por el espíritu y por consiguiente enteramente inmateriales y sin embargo son reales; son enteramente real, lo eterno. (p. 56)

Con Nicómaco, el número es creador y por medio del espíritu, se reconoce lo real y lo sensible, teniendo relación con la afirmación de Filolao, es decir, el número está por encima de lo sensorial.

Para poder entender por qué los pitagóricos relacionaban así el número con la na-

Pitágoras y un alumno: "*Mira, lo que tu pienses que es cuatro es en realidad diez, y es también un triángulo completo y nuestro santo y seña*" (Dantzig, 1971, p. 54). Más adelante se habla de la *"aritmogeometría"*, que es lo que está implícito en dicha frase citada.

turaleza, es decir, con lo sensible, dotándolo de carácter de principio, Brunschvicg (1945) sostiene que, los pitagóricos primero se fueron de lo concreto hacia la naturaleza, así:

> En resumen, antes de decir que las cosas son números habían comenzado por concebir los números como cosas; las expresiones números cuadrados o números triangulares no son metáforas; esos números son efectivamente, ante los ojos y ante el espíritu, cuadrados y triángulos. (p.54)

Esta concepción, dice Brunschvicg, constituye lo que se conoce como *"aritmogeometría"* o números figurados, que desde una perspectiva actual se puede concebir como una teoría de números (Brunschvicg, 1945).

Esta perspectiva permite entender que los números no son "medios de cálculo" sino entidades que después de ciertas propiedades encontradas en ellos, se le atribuyen a la naturaleza. Propiedades que, los pitagóricos dieron de manera mística, ya que, les atribuyeron a los números cualidades como el bien, el mal, lo finito, lo infinito, lo par e impar; algunas propiedades que son opuestas en ser a otros. Sin embargo, esto no quiere decir que existan números negativos.

Hasta este punto se reconoció el concepto de número para los pitagóricos; este está implícito en la tesis pitagórica y expresada en los testimonios ya citados. Pero, no deja de ser curioso que el concepto de número para los pitagóricos hace que los números inicien desde el tres, porque son tres las dimensiones de la realidad, que es el resultado de la suma del uno (forma) y del dos (materia) (Gorman, 1988); solamente hasta Euclides, el dos puede ser considerado como número (Campos, 2006).

¿Qué pasa con el uno de los pitagóricos?, en otras palabras ¿cuál es el concepto del uno pitagórico?; En relación con ello, dice Gorman (1988):

> El nombre griego para el Uno, o mónada, es *monas*, que los pitagóricos creían que derivada de la palabra *menein*, 'permanecer'. El uno se convirtió en el símbolo del origen de la permanencia en el cosmos. Se identificó con el fuego central u hogar del universo alrededor del cual giraban los diez planetas. Muchos de los nombres del Uno revelan que se le identificaba con el origen del fuego, el sol o fuego central. Para los primeros pitagóricos el sol no era el centro del cosmos, ni era el creador de su propio calor y fuego, sino que era una especie de cristal reflector que recogía la luz y el calor del fuego central. Los nombres de *Apollon* e *Hyperion* indicaban para el Uno su identidad con el dios sol como origen de la vida en el cosmos. Pero estos nombres pueden no referirse al sol en absoluto, existe la posibilidad de que el fuego central sea simplemente un símbolo del sol que desplaza a la tierra como centro del cosmos. El sol y el Uno llegaron a relacionarse con la mente o *nous* que se extendía por el universo. Puesto que el orden en el universo revelaba su origen divino, la mente que lo planeó debía ser la más inteligente de todas, por lo tanto, se identificaba con el Uno.
>
> Del Uno procede todo lo que es bueno en el universo, puesto que es el origen de los números impares. Dichos números se denominan buenos porque en el sistema de la aritmética pitagórica los lados que rodean los números o *gnomon* siempre forman cuadrados alrededor de los números impares. El cuadrado es símbolo de igualdad y regularidad. En esto, el cuadrado se parece al Uno, mientras que la diada, o dos, es el origen de la desigualdad e irregularidad en el cosmos; por lo tanto, la diada es el principio del mal. Esta es también la razón por la que el Uno se denomina «amigo» porque Pitágoras define al amigo como un *alter ego*. (pp. 151-152)

Como afirma Gorman, el carácter místico del número es lo que lo define en su ser, mostrando su latente relación con la aritmogenia, ya que alude a los números impares y al gnomon como lo había destacado Brunschvicg. Y como ya fue dicho, es mediante las relaciones encontradas en los números de manera concreta, que los pitagóricos elevan al "número", para justificar relaciones en la naturaleza, sin dejar de lado su carácter místico.

Por otro lado, Aristóteles (1994) también ofrece una respuesta más específica acerca del uno:

> Pues bien, también ellos parece que piensan que el número es principio que constituye no sólo la materia de las cosas que son, sino también sus propiedades y disposiciones, y que los elementos del número son lo Par e Impar, limitado aquél e ilimitado éste, y que el Uno se compone de ambos (en efecto, es par e impar), y que el Número deriva del Uno, y que los números, como queda dicho, constituyen el firmamento entero. (p. 90)

Aristóteles, proporciona un dato adicional respecto a Gorman, que el "uno" es par e impar a la vez; esto va a ser muy importante, porque es la causa contradictoria encontrada en el surgimiento de las magnitudes inconmensurables o primera crisis de los fundamentos de la matemática.

Antes de abordar la primera crisis, surge la siguiente inquietud: ¿por qué los pitagóricos no consideraron al uno como número, como es concebido en la actualidad?; A este respecto se ha encontrado la siguiente respuesta, dada por Klein (1992):

> Sólo se puede "contar" lo que no es uno, que está ante nosotros en un cierto número: ni un objeto de sentido ni una unidad "pura" es un número de cosas o unidades. La "unidad" como tal no es aritmos, un hecho que parece extraño sólo si presuponemos la noción de la "serie de números naturales". (p. 42)[23]

A pesar de que el uno no es un número, tiene su parte mística, pues, el uno era considerado lo bueno, el orden lo finito y el dos, un carácter negativo, lo infinito lo caótico, y el tres

[23]La palabra Aritmética proviene del griego *artihmos* que traduce número y que según Dantzig, es con la letra griega ς que acepta Diofanto para representar la incógnita *(arithmo)*, por ser la primera letra del alfabeto griego (Dantzig, 1971); volveremos a esto más adelante. No obstante, la cita fue traducida, dado que el libro está en Inglés.

es el primer número (Gorman, 1988). ¿Y qué pasa con el cero y los negativos? Al respecto Gorman (1988) dice:

> De modo similar especulaban sobre cantidades negativas por que la negación era también el mal. Naturalmente conocían el concepto cero que Jámblico y Plotino (III 8,10,28, H.S., Vol. 1, 1964: ¡Los editores de Plotino (p.375) alegan que el cero se refiere a la "nada" de los místicos cristianos posteriores!) llaman *meden*, pero la nada absoluta no se considera como atributo de los dioses. (p. 149)

Entonces, sustentados en lo planteado por Gorman, no existía el cero. No tenía sentido que el cero existiera, ya que la monada (uno) permite inferir que el cosmos siempre ha existido, quitando su posibilidad de existencia. Y con respecto a los negativos, solo hace referencia a opuestos, pero no se les da una concepción numérica como la moderna, es decir los negativos son cualidad de opuestos como el mal, pero en su ser no son números negativos.

Ahora sí, se puede abordar la primera crisis de los fundamentos de la matemática, la cual consiste en exponer que, la tesis sostenida por los primeros pitagóricos desde adentro de la matemática no puede darse, en otros términos, el número no siempre es compatible con la medida, es decir, algunas veces no existe una razón[24] numérica que los relacione con las magnitudes.

1.1.1. La primera crisis de los fundamentos de la matemática. Sin razón.

En la escuela pitagórica se hizo la primera teoría de la medida (Recalde, 2011), la cual iba acorde con su postulado "todo es número" y fue desarrollada por los matemáticos;

[24] Como sinónimo de relación.

era claro que el número tenía magnitud (Campos, 2006), y, además, esta es la más exacta como (Aristóteles, 1994) dice:

> Medida y principio es, en todas las cosas, algo e indivisible, pues también, en las lineas se utiliza la de un pie como algo indivisible, ya que se pretende que en todos los casos la medida sea algo uno e indivisible, y es tal lo que es simple, ya sea según la cantidad, ya según la cualidad. Y la medida exacta es aquello a lo que no se puede añadir ni quitar nada. Por eso la del número es la más exacta, pues se establece como tal la mónada absolutamente indivisible. En el resto de los casos se imita a ésta. (p. 396)

Ahora bien, para medir, dos magnitudes X y Y, basta encontrar dos números naturales m, n tal que

$$Xm = Yn \tag{1.1}$$

Cuando las dos magnitudes X y Y, satisfacen la ecuación (1.1), se afirma que son magnitudes conmensurables; en caso contrario se dice que son inconmensurables[25].

Los pitagóricos encontraron algunos escenarios en los cuales la conmensurabilidad no se cumple, es decir, escenarios donde aparece la inconmensurabilidad. Esta inconmensurabilidad puede apreciarse en los escenarios: lado y diagonal del pentágono o lado y diagonal del cuadrado[26]. Es posible concebir su aparición con el método de *antiphairesis*[27], como al parecer lo hizo Hipaso de Metaponto (o Hippasus of Metapontum)[28]. Así, encontrará efecti-

[25] Aquí cabe mencionar que se deben entender como secuencia de copias concatenadas y no como una multiplicación, ya que son dos entidades diferentes.

[26] Según Recalde (2011), aparece otro evento de la inconmensurabilidad pero desde un contexto musical, véase (Recalde, 2011, p. 46).

[27] El método de *antiphairesis*, consiste en encontrar la magnitud mayor que sea conmensurable a magnitudes cuales quiera, en otras palabras, aplicar el algoritmo de Euclides. Al aplicar el método en la diagonal del pentágono, lo que se obtiene es la proporción áurea, es decir que el termino de división nunca termina, por ende, no es posible que se encuentre la conmensurabilidad.

[28] Desde una perspectiva netamente aritmética, Hipaso descubre el primer "número inconmensurable", el cual surge de la relación entre el lado y la diagonal del *pentalfa*, símbolo característico de los pitagóricos (García, 2011) y que, desde una perspectiva actual, estaría relacionado con $\sqrt{5}$.

vamente el choque entre lo discreto y lo continuo; es decir, entre número y magnitud.

A modo de ilustración, solo me centraré en la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado y su lado, qué es la más difundida y no requiere demasiados prerrequisitos.

Ahora bien, la demostración de la inconmensurabilidad entre el lado del cuadrado y su diagonal es muy difundida, este problema tiene dos perspectivas: la aritmética y la geométrica (Recalde, 2011).

1.1.1.1. Demostración clásica. Perspectiva moderna o Aritmética

En primer lugar, la perspectiva numérica consiste efectivamente, en mostrar usando el Teorema de Pitágoras, que no hay una razón común: no existe la unidad que los pueda medir. En segundo lugar, la geométrica visualiza que, mediante el proceso de medición, siempre va a sobrar parte de la unidad de medida, usando la *antiphairesis* y además mostrando en efecto que el proceso tiende hacia el infinito, pues se regresa al problema inicial, en otras palabras, se crea un bucle.

Como ya se había comentado, el Teorema de Pitágoras es el protagonista de la perspectiva moderna, ya que, desde una óptica actual, es quizá el primer puente que permite el vínculo entre lo numérico y lo geométrico.

Ahora bien, este vínculo entre lo numérico y lo geométrico (por el Teorema de Pitágoras), muestra que los opuestos existen simultáneamente, ya que, si existiese un número cuadrado que fuese dos, este debería ser el par-impar, es decir la unidad, como Aristóteles había dicho:

Considere un cuadrado de lado u y su diagonal h conmensurables, véase (Figura 1.1).

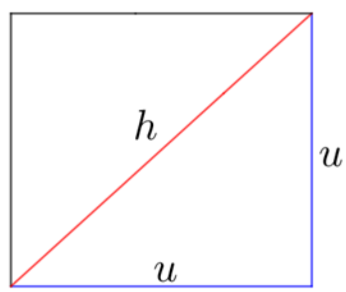


Figura 1.1: Imagen de la demostración con perspectiva aritmética.

Luego por el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se determina se tiene:

$$h^2 = u^2 + u^2 = 2u^2 \tag{1.2}$$

Se usarán las siguientes proposiciones de teoría de números[29] y la definición de número par:

1. Si el cuadrado de un número es par, entonces el número es par.
2. Si el número es impar, entonces su cuadrado es impar.
3. Un número x es par si y solo sí, existe un número y tal que $x = 2y$.

Además se usara el hecho que la *aritmogenia* de los pitagóricos se desarrolla en los opuestos como el par e impar (Recalde, 2011), se obtienen cuatro opciones para u y h, es decir:

[29]Para esta perspectiva se considera únicamente números naturales y sus propiedades, como la cancelativa respecto a la suma.

a. h par y u impar.

b. h par y u par.

c. h impar y u impar.

d. h impar y u impar.

Demostración:

Suponiendo el caso c o d: por un lado se tiene que si h impar, entonces h^2 es impar por (2). Por otro lado h^2 es par por (1.2).

Suponiendo el caso a: Si h par, entonces $h = 2t$ por (3), por ende $h^2 = 4t^2$ es decir $u^2 = 2t^2$ por (1.2). Pero u es impar por hipótesis, luego u^2 es impar por (2), por lo tanto u^2 es par-impar a la vez.

Suponiendo b: Tenemos que $h^2 = 2u^2$ por (1.2), al ser h par, entonces $h = 2t$ por (1), por ende $h^2 = 4t^2$, es decir, $4t^2 = 2u^2$ por (1.2). Como u es par por hipótesis, luego $u = 2p$ por (1), entonces $u^2 = 4p^2$, es decir que $4t^2 = 2(4p^2)$, luego $t^2 = 2p^2$, por lo que se regresa a que t es par, y así mismo p es par; regresando al problema inicial. Se puede repetir el razonamiento *ad infinitum*. Por lo tanto, no son conmensurables, ya que de entrada partimos del supuesto de que eran conmensurables.

Ahora sí, el argumento geométrico (el cual, desde mi perspectiva, fue el acontecido).

1.1.1.2. Argumento Geométrico

En la siguiente demostración visual, se puede evidenciar que no existe la razón que relaciona la diagonal del cuadrado con su lado, y, por lo tanto, ambas magnitudes no son conmensurables; en otras palabras, no existen los números naturales que satisfagan la propiedad (1.1), o que se le puedan atribuir a dicha relación o razón.

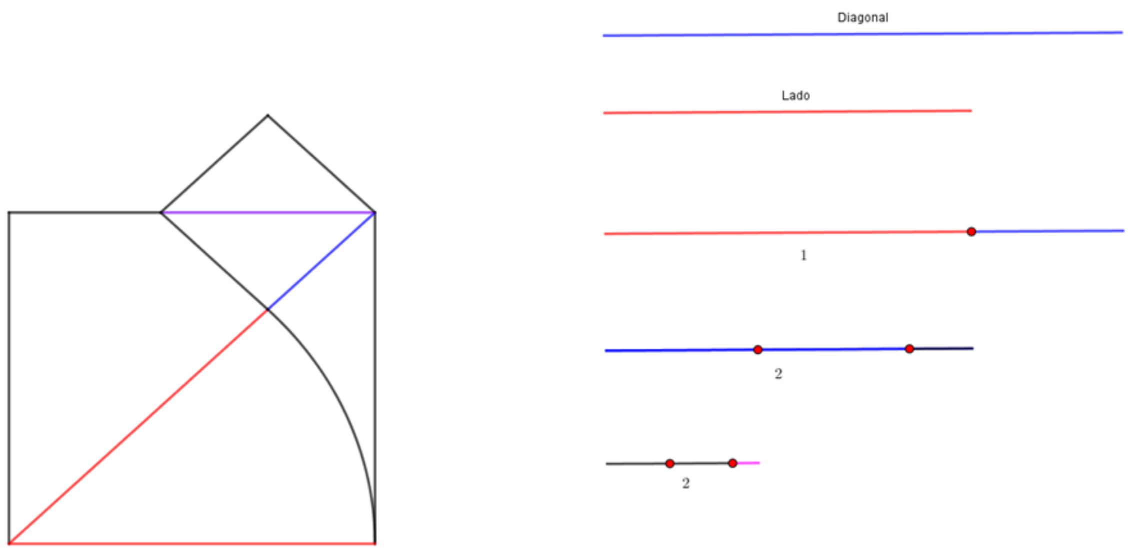


Figura 1.2: Argumento geométrico de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado.

En el cuadrado de la izquierda (véase Figura 1.2) podemos observar que, al tratar de construir el cuadrado de lado, con lo que sobra (color azul), se regresa al problema original (surge un cuadrado con diagonal morada y de lado color azul), que se tenía planteado y repitiendo el proceso, se puede tender *ad infinitum*. Mientras que, a la derecha (Figura 1.2) vemos paralelamente el proceso de *antiphairesis*, que va surgiendo simultáneamente. Si seguimos el proceso no existirá la relación entre la diagonal y el cuadrado, pues el proceso tiende hacia el infinito y, por lo tanto, el cuadrado y su diagonal no son conmensurables.[30]

Quizá este descubrimiento junto con la creencia, de que el cuadrado es bueno como un símbolo de igualdad (Gorman, 1988) y que la relación entre la diagonal y su lado no captura-

[30]Observe que los números que van surgiendo, resultan ser las reductas de $\sqrt{2} = [1; 2; 2; 2; \ldots]$, esto permitiría afirmar que las fracciones continuas hubieran surgido también en dicha escuela. Ahora esto es solo un comentario desde una perspectiva actual, pues se tiene conocido que ellos no disponían de conceptos para los números irracionales. Solo se puede afirmar que en el "infinito", el proceso determina este número.

ble en una razón ($i.e.$, el doble, la cuarta parte, etc.), para los pitagóricos representó, su mayor decepción. Esta decepción no es más que el resultado del choque entre lo discreto y lo continuo, es decir, lo finito y lo infinito, pues el uno y el dos resultan ser iguales contradiciendo la teoría.

Ahora sí, se puede iniciar el siguiente suceso histórico, en el que la forma de entender los números es otra, ofreciendo una nueva concepción del número. Esta es dada por Platón. Pues como Aristóteles (1994) afirma: "mientras que, para los pitagóricos, la naturaleza "imita" a los números, para Platón son los números quienes "participan" en la naturaleza, es decir solo hubo un cambio de palabra" (p. 95).

1.2. Época de Oro. Lo ideal, la categoría y una teoría trascendental

1.2.1. Platón. ¿Es el número una idea?

Después de aceptar la tesis pitagórica "todo es número", de la cual se desarrolló la gran apuesta matemática pitagórica, y de su posterior, derrumbe con el descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables (primera crisis de los fundamentos de la matemática), surgen la preguntas: ¿qué sigue? o ¿cómo mejorar la situación?

Lo que continuó fue intentar entender estas desconocidas entidades que habían surgido. Estas empezaron a ser tratadas y estudiadas por algunos pitagóricos como Teodoro de Cirene y Arquitas de Tarento, quienes fueron maestros de Platón.

Platón (387 a.C.-347 a.C.), a quien se le dedica esta sección, tuvo sus comienzos en el estudio de las matemáticas, con las matemáticas preexistentes de la escuela pitagórica hasta ese momento, es decir, el legado que sus maestros le impartieron (Vera, 1970a). Debido a las ideas transmitidas de sus maestros, y reconociendo muchos de los avances que los pitagóricos habían realizado en su actividad matemática, Platón conocía el tema de los inconmensurables como lo hace ver Brunschvicg (1945):

> A través de los diálogos de Platón, hay más de un testimonio de que el descubrimiento de los irracionales no es extraño a la doctrina platónica de la ciencia. En la introducción al *Teeteto*, diálogo destinado a señalar los primeros grados del análisis que va desde la apariencia sensible a la verdad, Platón recuerda los escritos de su maestro Teodoro, que estableció la irracionalidad de $\sqrt{5}$, de $\sqrt{7}$, y prosiguió hasta $\sqrt{17}$ la investigación de las raíces cuadradas irracionales. (p. 70)[31]

Así, Platón estuvo influenciado por el trabajo de sus maestros. Seguramente esto lo motivó a tener una actitud rigurosa hacia la doctrina pitagórica (Kline, 1985). Esta actitud le hace retomar de nuevo la postura de los pitagóricos, es decir, usar las matemáticas para encontrar la verdad en la naturaleza y poder explicarla, como afirma Kline (1985):

> Platón fue más allá que los pitagóricos por el hecho de que deseaba no solamente comprender la naturaleza por medio de las matemáticas, sino sustituir la naturaleza misma por las matemáticas. Creía que unas pocas miradas penetrantes al mundo físico sugerirían verdades básicas, con las que la razón podría después caminar sin ayuda, A partir de este momento solo habrá matemáticas. Las matemáticas sustituirían a las investigaciones físicas. (p. 17)

[31] Por eso no es extraño que, en la academia de Platón, haya logrado Eudoxio, desarrollar el tratamiento de las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Tema que finalmente fue expuesto por Euclides en sus *Elementos*. Aunque, el interés de Platón no fue demasiado en Geometría, ni en las magnitudes inconmensurables, si lo fue en la Aritmética (Jones, 1978), lo cual resulta muy curioso, pues recuerde que el coloca en la entrada de su academia "Aquí no entre si no sabe de geometría". No obstante, en esta frase está implícita su planteamiento de su filosofía, la cual será hará explícita en esta sección.

Entonces, para Platón es necesario retomar el aporte matemático heredado por los pitagóricos; ampliando los elementos filosóficos de la cosmovisión pitagórica documentada hasta ese momento, mediante una nueva filosofía: el planteamiento del mundo de las ideas (Pérez, 2017)[32] y no referida al mundo sensible de los pitagóricos (Jones, 1978)[33].

Platón desarrolla su filosofía de las ideas, usando los conceptos: "formas" y "realidad", bajo la tesis de que el hombre puede diferenciar entre la apariencia de un objeto respecto a la idea de la cual el objeto participa (Körner, 1967). Por esto es común encontrar que, para Platón "Los números son ideas" (Brunschvicg, 1945, p. 79). Pues, los objetos sensibles son cambiantes, mientras que los números a los cuales se cuantifica no lo son[34]. Como consecuencia de esta tesis, le permitió señalar tres tipos de números: los sensibles, los matemáticos y los ideales (Jones (1978); Klein (1992))[35].

Los tres tipos de números, aunque parecen ser semejantes en sí, se diferencian en como "participan". Los números matemáticos son quienes participan a la hora de hacer cuentas u operaciones; cuando enumeramos, están en lo sensible[36]. Cuando queremos salir del mundo sensible, están los ideales; los que comunican la verdad. Su diferencia se hace latente a la hora del paso de lo sensible a lo ideal, ya que en el proceso subyacente de contar y la abstracción, se reconoce su participación, así como su diferencia. En el siguiente ejemplo se verá su diferencia "participativa":

Supongamos que tenemos diez sillas, estas son diferentes, ya sea en su forma o en

[32]Reconociendo también que, estudiar las matemáticas es muy importante para poder entender la filosofía (Pérez, 2007).

[33]"Despojada de su misticismo religioso, la filosofía pitagórica contenía la idea fundamental de que solo el número y la forma nos permiten entender la naturaleza del universo" (Dantzig, 1971, p. 55).

[34]Según Recalde (2018) para Platón hay dos especies de número: el ideal o aritmético y el numerado. El numerado corresponde con la realidad o lo sensible.

[35]No parece que Platón no constituya un nuevo concepto de número (Jones (1987a); Pérez, (2007)).

[36]El que podamos enumerar, es porque conocemos al número y reconocemos su diferencia en casos simples a conjuntos grandes de números y así proporcionar el número exacto (Klein, 1992). Esto es lo que Platón denomina "arte del número o aritmética" (Klein, 1992, p. 18).

su tamaño. Ahora bien, cuando empezamos a contar las sillas, lo primero que hacemos es enumerar las sillas, haciéndole corresponder a cada silla una unidad (abstraemos su monada), haciendo como si fueran todas iguales u homogéneas (la unidad de conteo es homogénea)[37]. Aquí el número "participa" como entidad sensible (vemos que existe la relación con el número pitagórico). Seguidamente empezamos a hacer el conteo de las unidades correspondidas por cada silla, aquí el número "participa" como número matemático, pues el conteo es el resultado inductivo de operar con números sensibles o concretos (Jones, 1978). Finalmente, después del conteo nos arroja el resultado diez. Este diez, tiene dos características: la primera es que el resultado participa de la idea de "diez", el segundo es el número numerado, pues el resultado del conteo alude a la realidad. Sin embargo, el resultado de calcular; es diez en el sentido puro, que existe solo en el mundo ideal, ya que, en el ejemplo propuesto hemos atribuido a cada silla una unidad pura o monada. Pero justificar que esto se conserva y que al operar la monada preserve su "ser", hace que se postule en el resultado final del conteo el número como idea (Jones, 1978).

Obsérvese que, en el ejemplo se ha usado un grupo finito; sin embargo, esta dualidad entre lo aritmético y lo numerado, se pierde cuando tratamos con cantidades infinitas, pues en la realidad, no es posible observar y contar estas cantidades. Esto produce la distinción entre los números naturales y los números para contar, pues una es la extensión de la otra, quedando clara la relación entre el mundo sensible y el mundo de las ideas.

Ya conociendo el concepto de número de Platón, se prosigue con Aristóteles, quien fue su alumno. Aristóteles al parecer se separa de las ideas de su maestro y expone otro concepto de número,[38] el cual, según Mié (2008), es una versión anticipada del concepto

[37]Esto es producto de nuestro pensamiento, o, en otras palabras, gracias a la *Diaonia*. La *Diaonia*, es la que nos permite, separar y reconocer la unidad en sí.

[38]Según (Jones, 1978), Aristóteles rechaza la postura de los números ideales de Platón y a su vez, la concepción atomista de los pitagóricos. Para más información, se puede consultar Hopkins (2010) o Aristóteles (1994).

numérico de Frege.

1.2.2. Aristóteles. ¿Número es un predicado?

Aristóteles (385 a.C.-322 a.C.)[39] mantiene la separación que no puede sostenerse en la escuela pitagórica, esta es: el número y la magnitud no pueden estar juntos; esta es la misma que Nicómaco mantiene en su Aritmética[40]. Aristóteles, hace visible dicha separación en la categoría cantidad que se encuentra en el *Órganon*[41]. Él reconoce que hay un problema con respecto a la monada (uno)[42] y está en el proceso de "divisibilidad" (Jones, 1978). No obstante, este proceso no es el único al cual influencia el número; también a la adición de monadas indiferenciadas (Mié, 2008). Ellas, con el proceso de abstracción, van a permitir llegar al concepto de número que se plantea establecer en esta sección.

Para lograr instaurar el concepto de número de Aristóteles, se va a seguir en parte a Egger (1972). Egger encontró varias definiciones de número y su relación con el uno (en algunas, se puede ver al número en forma de acto y potencia)[43], las cuales guardan una relación estrecha con las operaciones aritméticas mencionadas; estas definiciones pueden ser semejantes (Egger, 1972):

(1) La cantidad limitada es el número.

(2) El número es una combinación de unos.

(3) El número es un conjunto de unos.

[39]De la personalidad de Aristóteles se puede decir que no era matemático ni filosofo experto, pero debido a su cercanía con su maestro Platón, andaba al tanto de los desarrollos matemáticos de su época y como buen pensador investigó sobre Lógica y Biología (Martí, 2017).

[40]Puede verse en Vera (1970b).

[41]En breve, se mostrará también que aparece la misma separación en el libro *Metafísica* de Aristóteles.

[42]Reflexión que hará Simon Stevin para establecer su concepto de número (Klein, 1992).

[43]Véase las definiciones (2) y (3) citadas, ello; es un ejemplo del número como potencia y acto. Además, esta perspectiva tiene que ver con su unicidad, véase Gambra (1996).

(4) El número es un conjunto medible por uno.

(5) El conjunto de lo indivisible es número.

(6) El número es una cantidad medida y una cantidad de medidas. (La medida es la que está aquí).

(7) El número consta de varios unos y (por tanto) determinadas cantidades individuales (Egger, 1972, p. 146)[44].

Las definiciones encontradas por Egger, ponen entredicho la relación entre el número y el uno. Por lo que, si se desea lograr reconocer efectivamente la relación entre dichas concepciones de número con el uno, y; a su vez establecer el número como una categoría (predicado), hay que profundizar un poco en la filosofía matemática de Aristóteles, o en otras palabras, en el proceso de abstracción (Martí, 2017)[45]. Así, al reflexionar sobre las definiciones citadas anteriormente, se puede concluir que son consecuencia del mismo proceso de abstracción.

1.2.2.1. Hacia la "cantidad"

El proceso de abstracción tiene dos características según Körner (1967): (1) el que los objetos matemáticos pertenecen a lo que es abstraído y (2) hay una pluralidad de ellos. Si el número es considerado como objeto matemático, ¿cómo protagoniza el proceso de abstracción?

Ahora bien, los objetos matemáticos se abstraen de lo sensible dejando solo la característica continua o discreta (Aristóteles, 1994)[46] y tratadas con invariables temporales, debido

[44] El documento está en Alemán; aquí se hace una traducción. Además, estas son tomadas de la *Metafísica* de Aristóteles, (véase las notas de pie de página de Egger, 1972, p. 146).

[45] Abstracción o "Separar" (Körner, 1967, p. 16).

[46] Aristóteles (1985) dice: "Y si uno investiga por qué un muchacho puede llegar a ser matemático, pero no

a que la facultad de contar y enumerar depende del tiempo (Aristóteles, 1995)[47]. Como se puede considerar, ya se ha abordó el ítem (1) pero el que convoca y es más interesante es el (2).

Para abordar el ítem (2), Aristóteles en su libro *Metafísica*[48] menciona:

> Se dice que posee «cantidad» lo que es divisible en partes internas, cada una de las cuales —sean dos o más de dos— son por naturaleza algo uno, y algo determinado. Una pluralidad es una cantidad si es numerable y también lo es una magnitud si es mensurable. Se llama «pluralidad» lo potencialmente divisible en partes discontinuas, y «magnitud» lo divisible en partes continuas. A su vez, la magnitud que es continua en una dimensión es longitud, la que lo es en dos es latitud, y la que lo es en tres es profundidad. De éstas, la pluralidad limitada es número, la longitud es línea, la latitud es superficie y la profundidad es cuerpo. (Aristóteles, 1994, pp. 237-238)

Con la cita de Aristóteles, es claro que se va estableciendo que el número es una cantidad discreta, mientras que hay otra cantidad, la continua que va ligada a la medida. Este comentario ya se había realizado al comienzo de esta sección, sin embargo, hay que recordar de nuevo que la posibilidad de enumerar depende del tiempo, para poder entablar una posible pluralidad y así establecer su existencia. En otras palabras, la pluralidad discreta da la posibilidad de la existencia del número (Gambra, 1996) y, a su vez se satisface (2) que era lo se buscaba.

Sin embargo, en ningún momento de la cita de Aristóteles, se afirman las demás definiciones encontrada por Egger, por lo que hay que encontrar el vínculo entre el número y el uno. Por fortuna, esto fue tratado de manera indirecta, pues en la sección de la primera crisis

sabio, ni físico, la respuesta es ésta: los objetos matemáticos existen por abstracción, mientras que los principios de las otras ciencias proceden de la experiencia" (p. 278).

[47]Para ello puede verse (Aristóteles, 1994, p. 287).

[48]Este libro, es el que caracteriza a las matemáticas aristotélicas desde su ámbito ontológico (Recalde, 2018).

de los fundamentos, se hizo una cita de Aristóteles, en la cual se declara que el número tenía la medida más exacta[49], en otras palabras: la monada es la unidad del número y con la anterior cita se infiere que el número está compuesto de monadas, abordando simultáneamente las definiciones de Egger.

Ya con la cita de Aristóteles, se tiene caracterizado al número como cantidad, sin embargo, en el comienzo de esta sección se afirmó que Aristóteles lo establece en una categoría.[50]

1.2.2.2. Categoría cantidad

Aristóteles (1982) dice: "De lo cuanto, por su parte lo hay discreto y lo hay continuo; y lo hay que consta de partes componentes que mantienen una posición mutua, como también lo hay que no consta de partes que mantengan una posición" (p. 42)[51].

Es decir, cuando nos referimos a la cantidad, Aristóteles establece dos: las discretas y las continuas, como se encontró en la cita de *Metafísica*. Sobre estas, Aristóteles hará una aclaración posteriormente, concluyendo que el número es una cantidad discreta, en tanto que la recta (o mejor, el segmento) es una cantidad continua, como ya se tenía dicho, pero no explicitado:

> En efecto, no hay ningún límite común a las partes del número, en el que coincidan dichas partes, v.g.: si el cinco es una parte del diez, no hay ningún límite común en el que coincidan el cinco y el cinco, sino que están separados; y el tres y el siete tampoco coinciden en ningún límite común; y en general, en ningún número podrás tomar un

[49] Véase la página 18.

[50] Se recomienda leer los documentos de Gambra (1996) y Mié (2008), para entender lo que Aristóteles, concibe como categoría, ya que en el *Órganon*, Aristóteles establece diez categorías (Kneale & Kneale, 1980).

[51] Vale la pena recordar que se está referenciando la traducción del *Órganon* de la editoria Gredos.

> límite común entre sus partes, sino que siempre están separadas. (Aristóteles, 1982, p. 42)

Cuando Aristóteles habla de un límite común refiere a que las monadas están separadas, es decir que no pueden ser continuas; pues en caso de serlo, se dividirían, encontrando entonces que la monada no es indivisible.

Ya que los números son pluralidad, es claro que no pueden empezar desde la unidad. Pero ¿por qué Aristóteles no concibe la unidad como número? Jones (1987b) da la respuesta a ello:

> La respuesta es que la unidad era considerada como la fuente de los números. Por eso se entiende que número, como una colección de unidades, está hecho de unidades. Pero una colección no puede ser lo mismo que una cosa colectada; en otras palabras, una unidad no puede ser lo mismo que una colección de unidades o un número no puede ser lo mismo que la unidad. De aquí que la unidad, o uno no es un número. (p. 8)

Aun así, Aristóteles mantiene el espíritu pitagórico de que la unidad es la génesis de los números, postura que entra a adoptar Euclides en su libro *Elementos* como se verá posteriormente, y que recupera el trabajo de los pitagóricos y de la Academia de Platón. Ahora se puede proceder con el concepto de número de Euclides, que no es sino ver al número como elemento de una teoría matemática siguiendo la concepción aristotélica.

1.2.3. Euclides. ¿El número es un objeto deductivo?

Como se había comentado anteriormente, Euclides (325 a.C.-265 a.C.) sigue los lineamientos de Aristóteles en sus *Elementos*[52]. En esta obra, hace una compilación de contenido

[52] Para entender más a fondo esta afirmación véase Jones (1987a).

geométrico y aritmético, por lo que interesa observar, en qué parte de dicha compilación se ubica el número.

El contenido aritmético se puede encontrar en los Libros VII, VIII, IX, X, de los cuales, en el Libro VII, hay 22 definiciones y 39 proposiciones referidas al número (Ochoa, 2002). En el libro VII, se encuentra la definición de número: "Un número es una pluralidad compuesta de unidades" (Euclides, 2015a, p. 284)[53] y, para complementarla Euclides enuncia: "Una unidad es aquello por lo cual cada cosa que existe puede ser llamada una" (Euclides, 2015a, p. 283).

Se reconoce el espíritu aristotélico en la obra de Euclides con esta definición, y que en la misma *Metafísica de Aristóteles*[54], el término "pluralidad" hace énfasis en la definición de número de Thales: "Un número es una colección de unidades" (Campos, 2006, p.77)[55], y, es la que muy seguramente sirvió como modelo a Aristóteles, basándose quizás en la Aritmética de Nicómaco[56].

Con estas definiciones, Euclides desarrolla la Aritmética de manera deductiva. Así, en *Elementos*[57] condensa toda (o casi toda) la matemática pitagórica y platónica que existía en ese momento.

Ahora, ¿qué pasa con el cero?, de los pitagóricos ya se mencionó algo respecto al cero, pero como Euclides y Aristóteles siguen considerando que el número es pluralidad, hay que buscar si en la época del apogeo griego hubo algún tratamiento para el cero.

[53]Claramente la versión que se referencia es la célebre traducción de la editorial Gredos, ya que históricamente, Euclides es veintidós siglos antes.

[54]Véase página 29.

[55]También se puede encontrar en el libro VII de la Aritmética de Nicómaco. ¿Coincidencia?

[56]Euclides, toma esta afirmación teniendo en cuenta los estudios tratados de Aristóteles, pero Ochoa (citando a Jámblico, uno de los estudiadores de Pitágoras) afirma: "dice que la definición de Euclides de unidad o mónada fue dada por autores más recientes, y que le faltaron algunas palabras" (Ochoa, 2002, p. 88).

[57]Pero no solo Euclides hizo una compilación como Elementos, Hipocrates de Quios quien vivió entre 470 a 410 antes de cristo: "compuso los primeros Elementos de Geometría" (Dou, 1974, p. 14).

1.3. ¿La nulidad es número?

¿Es el cero un número?, la respuesta, por ahora, es No.

Al tratar de buscar su nacimiento, hay el reconocimiento de que el cero, nace como una necesidad de un indicador posicional para referir ausencia. Este hallazgo se encuentra en las tablas de cuerdas de Hiparco de Niccea, tablas que además de establecer una relación con el círculo de $360°$ y sus divisiones (legado babilónico), aparece la letra griega *ómicron* (O) (Collete, 1986). Al parecer, esta letra es la precursora del símbolo para referirnos al cero, el cual se usaba como referente para denotar ausencia *(ouden)* (Seife, 2000). Es decir, el cero nace como un indicador, más no como un número.

Sin embargo, es usual asignar el símbolo 0 o (O), con el número cero, Seife (2000) dice al respecto:

> La marca 0 no tenía un lugar en la recta numérica al principio. Era solo un símbolo; no tenía un lugar en la jerarquía de números. Incluso hoy, a veces tratamos cero como un no número a pesar de que todos sabemos que cero tiene un valor numérico propio, utilizando el dígito 0 como marcador de posición sin conectarlo al número cero. (p. 31)[58]

Por lo tanto, el cero no es un número, es un indicador posicional. Pero ¿en qué momento el cero pasa a ser un número?

Recuérdese, que históricamente los babilonios emplearon el sistema posicional (base 60), y, el sistema posicional que utilizamos actualmente es de diez símbolos, los cuales son: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$[59].

[58] Es una traducción adaptada al Español, pues el libro está en Inglés.
[59] Resultado histórico de los aportes matemáticos de los hindúes.

Ahora bien, para entender al cero como un número, hubo que transcurrir cierto tiempo, como Recalde (2018) dice: “La incorporación del cero con carácter de número, tuvo que esperar dos siglos más” (p. 136). ¿Cómo fue esta incorporación que menciona el profesor Recalde?

Recalde (2018) menciona que: “En la aritmética hindú, el cero aparece como un número en toda su dimensión” (p. 136). ¿Por qué? Recordemos que Brahmagupta, Baskara y Mahavira proporcionaron reglas de manipulación del cero:

- Cero dividido por cero es nada (Brahmagupta).
- Multiplicación de un número por cero es cero (Mahavira).
- La sustracción del cero no disminuye el valor del número (Mahavira) (Recalde, 2018, p. 137)[60].

Estas reglas que se pueden considerar como postulados, no arrojan luz acerca de la epistemología y ontología del cero. Sin embargo, proporcionan una guía para afirmar que, si el cero es considerado número, debería comportarse de esta manera respetando estos postulados. Aquí ya hay un indicio, pues si esta entidad es vista de manera grupal con todos los números, resultaría ser un número. Puesto que, si se consideran la multiplicación y la sustracción como operaciones, se puede detallar que con los anteriores postulados, al tomar los números incluyendo al cero, el resultado es un número, es decir, todos estos entes en conjunto poseen la misma naturaleza.

Por consiguiente, al cero hay que estudiársele con mucha prudencia, ya que de manera aislada no es un número, es un indicador posicional, pero cuando se le mezcla con el grupo

[60] Según Dantzig (1971) los hindúes trataron de manipular al cero y al infinito. Y atribuyeron a la palabra *Sunya*, la representación de vació y las incógnitas. De ahí también deriva el origen de nuestro símbolo para el cero.

cuyos elementos son número y se asignan postulados a este como los dados por los matemáticos hindúes citados anteriormente, se puede comportar como número, pues el postulado lo especifica.

Ahora, ¿cuándo el uno es número?

1.4. Una reconciliación desde adentro

A veces se olvida que existen muchos episodios en los que la matemática práctica inspiró a la matemática abstracta; varios de ellos se ubican en la escuela pitagórica. Esta relación ocurrió de manera singular en el trabajo de Simon Stevin (1548-1620). El trabajo de Stevin consiste en reconceptualizar el concepto de número; como consecuencia de ello, introduce al uno como número y los fraccionarios entran finalmente a ser números (las partes de la unidad).

Pero, antes de abordar la conceptualización de Stevin, hay que reconocer que antes de este autor ya existían los fraccionarios en la obra de Diofanto de Alejandría.

1.4.1. Diofanto

Ante la pregunta ¿son los fraccionarios números?, Dantzig (1971) responde afirmativamente: "Diofanto fue el primer matemático griego que reconoció francamente a las fracciones como números" (p. 92).

Sin embargo, esta afirmación tiene un problema: la respuesta dada por Dantzig obedece a una perspectiva moderna, en la que los fraccionarios son ya aceptados como números, cosa que, en la época griega ni se pensaba, pues el uno no era un número, mucho menos los podrían ser sus partes.

Aun así, la aparición de los fraccionarios en Diofanto se halla en su obra *Arithmetica*. En ella, se definen unos ciertos "números" y para poder manipularlos se proponen reglas, como también lo hizo Bhaskara en el primer tomo de su obra *Arithmetica*, las cuales se encuentran documentadas en Vera (1970b, pp. 1034-1035):

- Todo número multiplicado por una fracción que tenga por denominador el mismo número es la unidad.
- Los divisores de un número, diferentes a él, multiplicados entre sí son divisores del número.
- El producto del inverso del $aritmo$ por el inverso del $aritmo$ es el inverso de cuadrado del $aritmo$.

Es claro que, estas reglas son solo cuestiones operativas; no tratan de definir el número fraccionario. Sin embargo, aparece el ente fraccionario en cuestiones operativas sin tener una definición concreta de lo que realmente es[61], aludiendo al hecho de que con manipular un objeto sin saber qué es, este es caracterizado. Quizá que esto sirvió de inspiración a los hindúes a postular reglas para manipular cantidades, como se evidenció en la sección anterior, donde se señalo que Bramagupta propuso también reglas para poder manipular al cero, sin tener en cuenta su origen ni su representación.

Ahora bien, ¿cómo se consolidaron los números fraccionarios?, Recalde y Vargas (2013) afirman: "el estatuto numérico de las fracciones se va configurando desde su representatividad y funcionalidad" (p. 136). Es decir, esta forma de ver cómo se manipulan. Es decir, esta forma de ver como se manipulan y se representan estos "números", son los ingre-

[61] Parecido al cero. ¿Coincidencia?

dientes que consolidan el concepto de número de Stevin[62].

1.4.2. Concepto de número de Stevin

Para poder cumplir con el objetivo, es decir, aceptar los fraccionarios con el carácter de número, Stevin modificó la concepción griega, dotando al número con la referencia de cantidad discretas a continuas (Waldegg (1996); Neal (2002))[63].

¿Cómo lo logró? Para trasformar la concepción griega, Stevin aprovechó el legado de la notación hindú y realizó una crítica fundamental a los conceptos tradicionales de *arithmos* (Armella, 1991) y del uno (Klein, 1992) que estaban instaurado por los griegos. Esta crítica se fundamenta en las definiciones de la Aritmética como la ciencia del número, y del número como aquello mediante lo cual se revela lo cuantitativo de cada cosa sensible (Armella, 1991).

Aquí, va a jugar un rol fundamental la relación entre el mundo real y el pensamiento con el concepto de número de Stevin, pues Armella (1991) afirma:

> El ser cuantitativo es parte del objeto físico. La noción de número de Stevin indica que es este carácter cuantitativo lo que es el objeto de la aritmética, con lo cual se resuelve el problema epistemológico de la relación entre el objeto físico y el pensamiento. Lo anterior propicia que el número adquiera a través de la notación decimal un carácter simbólico y que la realidad del nuevo concepto habite en el lenguaje matemático. (p. 200)

Precisando esto, la crítica que usa Stevin para dar con su concepto de número es

[62]Observe de nuevo, que a partir de, cómo se comporta “el número” es como se cataloga como número, independientemente del surgimiento de la representación.

[63]Según Klein (1992) esta unión que quiere establecer Stevin, es consecuencia de los trabajos de Viete. Ya que, con la contribución de Viete en la representación simbólica de información conocida y desconocidas con letras, es la que hace posible los desarrollos de Stevin y Descartes. (véase Neal (2002)).

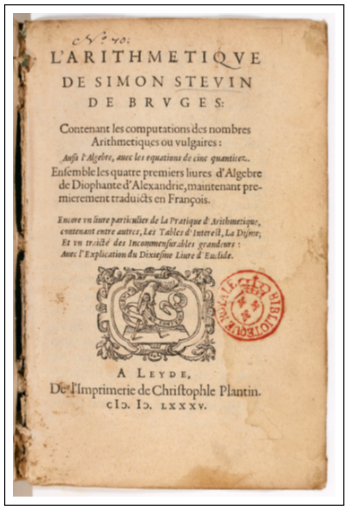
reconocer que las partes de un objeto hacen parte del objeto, cosa que en los griegos no se sostenía, puesto que en la conceptualización griega los números están construidos por la monada, pero la monada no es número, su naturaleza ontológica está por encima de los números como ya se comentó. Con Stevin, se ubica esa monada al mismo nivel ontológico de los números, al afirmar que el uno es un número, pues según Stevin: "negar esto es negar que un pedazo de pan es pan" (Waldegg, 1996, p. 14). Con esta afirmación defiende naturalmente que, el uno debe tener la misma naturaleza que el mismo engendra vía adición de este.

Ahora, para poder vincular al número con la magnitud, usa un argumento similar al del pan, como lo dice Malet (2006) citando a Stevin:

> El número es en magnitud como la humedad en el agua, ya que ocurre con el número como ocurre con la humedad, que, así como la humedad impregna toda y cada parte del agua, así el número asignado *(destiné)* a cualquier magnitud impregna toda y cada parte de su magnitud [Stevin, 1585, 3] (p. 76)[64].

El concepto de número, como se ha expuesto, cambia de ontología respecto del que existía en la época griega, generando una ruptura con la establecida por Aristóteles. Este nuevo concepto lo propuso Stevin en su obra *L' Arithmétique* (ver Figura 1.3). Así, a partir de concebir la magnitud y el número "iguales en cómo se comportan", encuentra relación en las propiedades discretas pensándolas como cantidades continuas y viceversa (Waldegg, 1996), quebrando la separación aristotélica. Pero, ¿cómo es que establece estas propiedades Stevin?

[64] El número de Stevin como afirma Waldegg (1996), viene de su formación como ingeniero, pues desde el proceso de medir, lo considera una extensión de este. No obstante, Armella (1991) dice "los problemas de notación conlleva la proposición de un nuevo concepto de número" (p. 199).



No. 40:

L'ARITHMETIQVE
DE SIMON STEVIN
DE BRVGES:

Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires:

Aussi l'Algebre, auec les equations de cinc quantitez.

Ensemble les quatre premiers liures d'Algebre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premierement traduicts en François.

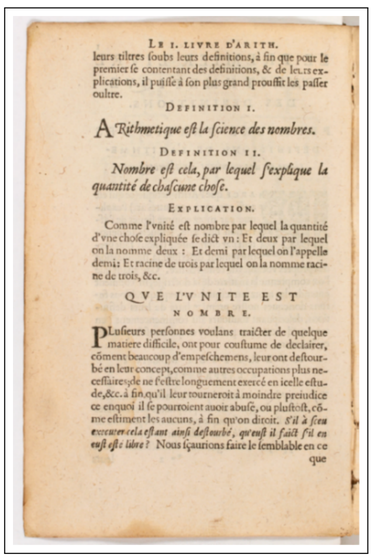
Encore vn liure particulier de la Pratique d'Arithmetique, contenant entre autres, Les Tables d'Interest, La Disme; Et vn traicté des Incommensurables grandeurs: Auec l'Explication du Dixiesme Liure d'Euclide.

BIBLIOTEQUE ROIALE

A LEYDE,
De l'Imprimerie de Christophle Plantin.
cIↃ. IↃ. LXXXV.

Figura 1.3: Imagen del libro *L' Arithmétique* de Simon Stevin, tomada de (Stevin, 1985).

Stevin escribió *L' Arithmétique* siguiendo la estructura y estilo de *Elementos* de Euclides, es decir con definiciones al principio de la obra, así establece las siguientes definiciones encontradas es la segunda página de su obra (ver Figura 1.4):



LE I. LIVRE D'ARITH.

leurs tiltres soubs leurs definitions, à fin que pour le premier se contentant des definitions, & de leurs explications, il puisse à son plus grand prouffit les passer oultre.

DEFINITION I.

A*Rithmetique est la science des nombres.*

DEFINITION II.

Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chascune chose.

EXPLICATION.

Comme l'vnité est nombre par lequel la quantité d'vne chose expliquée se dict vn: Et deux par lequel on la nomme deux: Et demi par lequel on l'appelle demi: Et racine de trois par lequel on la nomme racine de trois, &c.

QVE L'VNITE EST NOMBRE.

PLusieurs personnes voulans traicter de quelque matiere difficile, ont pour coustume de declairer, cõment beaucoup d'empeschemens, leur ont destourbé en leur concept, comme autres occupations plus necessaires; de ne s'estre longuement exercé en icelle estude, &c. à fin qu'il leur tourneroit à moindre preiudice ce enquoi il se pourroient auoir abusé, ou plustost, cõme estiment les aucuns, à fin qu'on diroit. *S'il à sceu executer cela estant ainsi destourbé, qu'eust il faict s'il en eust esté libre?* Nous sçaurions faire le semblable en ce que

Figura 1.4: Imagen de la segunda página del libro *L' Arithmétique* de Simon Stevin, tomada de (Stevin, 1985).

1. La Aritmética es la ciencia de los números.

2. El número explica la cantidad de cada cosa.

Con la definición (2) Stevin rompe la concepción griega, pues al afirmar que el número explica la cantidad de cada cosa, muestra que independientemente de cómo se haya obtenido un resultado (por ejemplo, el 5), este puede ser atribuido a una magnitud o a una cantidad discreta. Si estuviéramos pensando en Aristóteles, se observaría que el 5 es solo una clase de cantidad, la discreta (categoría)[65]. Es decir, no se podría establecer que fuera continua (ver el ejemplo citado en Aristóteles). Sin embargo, en ambos el espíritu de ser cuantitativo[66] se sostiene, a raíz de esta definición. Ello pues, Stevin se permite afirmar que: "el número no es una cantidad discontinua" (Waldegg, 1996, p. 9).

Ahora bien, Waldegg (1996) dice: "Stevin afirma también que la unidad es número" (p. 11), y **como es una cantidad continua, se le atribuye la propiedad de ser divisible indefinidamente haciendo que las partes de la unidad también sean números, por la misma razón**[67].

No obstante, este concepto de número, según Waldegg (1996), lo establece Stevin al reconocer que las categorías número y magnitud se comportan parecido cuando se operan de la misma manera siguiendo la proposición V del Libro X de *Elementos* de Euclides[68], la cual hace explicita dicha relación[69].

Sin embargo, hay que recordar que aún hay un dilema: a Euclides le hace falta establecer la multiplicación entre segmentos, por lo tanto, su isomorfismo operatorio como lo

[65] Observe la correspondencia del comentario de Klein (1992), respecto a la contribución de Vieta.

[66] A raíz de ello, Stevin, muestra vía definición que el número aritmético es aquel que no se le atribuye magnitud, es decir una cantidad discreta (Waldegg, 1996).

[67] La negrilla es puesta por mi. Ya que, aquí aparecen por fin los números fraccionarios.

[68] "Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número" (Euclides, 2015b, p. 95).

[69] El acercamiento formal entre número y magnitud (Recalde, 2011).

establece (Waldegg, 1996) es débil; esta tarea la completa finalmente Descartes[70].

Con Stevin podemos afirmar ahora que existen los fraccionarios como números, pues ya existían como entidades operatorias (ver 1.4.1). Además, en su obra, según Waldegg (1996), Stevin extiende las operaciones de potenciación y extracción de raíces, generando una especie de cerradura entre estas entidades positivas.

Finalmente, se puede considerar que Stevin es el precursor de una forma estructuralista del dominio numérico, ya que, tratará de mostrar que los números, como se operan, preservan la homogeneidad independientemente de su origen (Waldegg, 1996).

Hasta acá se tiene concluido que, el uno es número y el cero, bajo esa forma de atribuirle propiedades, también cumple con ser número. Sin embargo, queda pendiente el asunto de los números negativos. En lo que sigue se inicia esta discusión.

1.5. ¿Lo opuesto puede ser un número?

Ya se había comentado, que en la escuela pitagórica los opuestos no son números negativos en el sentido moderno. Pero, ¿cómo aparecieron los números negativos?

Una de las apariciones del número negativo (sin serlo) es encontrada en los chinos. Según Collete (1986), los chinos usaban las palabras “cheng” (positivo) y “fu” (negativo), para diferenciarlos en el ábaco, y para representarlos usaban colores rojo y negro respectivamente.

Aunque, el reconocimiento de estas entidades siempre fue una de las cosas atractivas de la historia de la matemática, muchos reconocen que estas surgen de la solución de ecuaciones como entidades sin caracterizarlas como números. Y como es bien sabido, muchos

[70]Véase página 6.

aficionados o matemáticos, estaban dedicados a resolver ecuaciones y a tratar de encontrar fórmulas para resolverlas, cuestión que finalmente termina con Abel y Galois al demostrar que la quíntica no puede tener solución por radicales.

No obstante, la aceptación de los números negativos fue tema de muchas discusiones, pese a que algunos los manipulaban, como el caso de Cardano. Otros, como Descartes, los representaban al lado izquierdo del cero en una recta para simbolizar que antes de la nada[71] ocurren estos fenómenos y, otros los consideraban como algo absurdo.

Para aceptar los números negativos como números, transcurrió un buen tiempo. Finalmente a través del trabajo del matemático Albert Girard (1595-1632) se llego a aceptar su existencia desde las ecuaciones (Maz Machado, 2005); pero aceptar su existencia no implica necesariamente considerarlos como números.

Quien tuvo la idea de darles el estatus de números negativos, usando los positivos fue Peacock. Según Kline (1985), George Peacock (1791-1858) fue el primero en establecer el isomorfismo entre los positivos y los negativos, mediante la separación entre álgebra aritmética y álgebra simbólica; la que la primera de estas trataba a los positivos y Peacock la extiende a la segunda. Dicha extensión iba dirigida a los números complejos, exponiendo su "principio de permanencia" o lo que comúnmente se distingue como "propiedad clausurativa". Esta idea fue influyente para la época, pues Herman Hankel (1839-1873), en su obra Teoría del sistema de números complejos (1867) (ver Figura 1.5), expone las ideas de Peacock con algunas modificaciones (Kline, 1976)[72].

[71] Véase (Recalde, 2011, p. 122).

[72] Según Kline (1976), el principio de permanencia de Peacock, fue propuesto como axioma en el libro titulado "Tratado de álgebra". Aquí Peacock, empieza a hacer su desarrollo del álgebra, como un sistema lógico deductivo; en otras palabras, siguiendo la estructura de *Elementos de Euclides*.

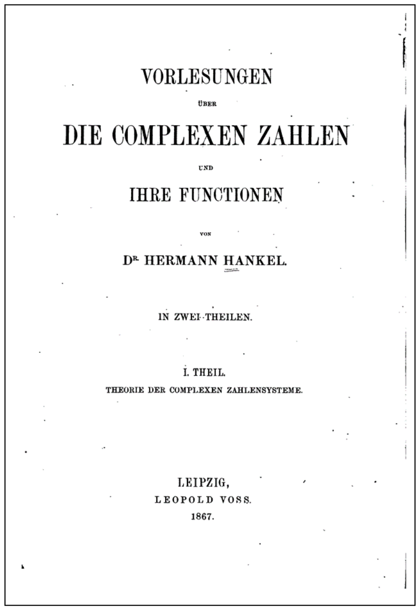

VORLESUNGEN
ÜBER
DIE COMPLEXEN ZAHLEN
UND
IHRE FUNCTIONEN
VON
DR. HERMANN HANKEL.
IN ZWEI THEILEN.
I. THEIL.
THEORIE DER COMPLEXEN ZAHLENSYSTEME.
LEIPZIG,
LEOPOLD VOSS.
1867.

Figura 1.5: Portada del libro “Teoría del sistema de números complejos” (1867) de Herman Haenkel, tomada de (Haenkel, 1867).

Al respecto dice Hankel:

> La palabra número responderá a símbolos o agregados de símbolos que no necesariamente representan números del campo numérico previamente dado o conocido, sino que su significado puede ser cualquiera. Se definirán para el nuevo campo numérico las operaciones fundamentales de la aritmética (adición y multiplicación) y el concepto de igualdad, de manera, que se conserven las definiciones en el campo menos amplio como caso particular de las nuevas definiciones y que subsistan las leyes fundamentales de uniformidad, asociatividad, conmutatividad, distributividad y conservación del elemento neutro. (Luque, Mora & Torres, 2013, p. 336)

Con la apuesta de Hankel es que la matemática, como actividad, no está en la naturaleza como lo proponían los pitagóricos, sino en la mente. Aquí se rompe la propuesta de los pitagóricos, pues los números pueden explicar la verdad, pero no están en la naturaleza, son creación de nuestra mente (Luque, Mora & Torres, 2013).

Sin embargo, con la propuesta de Hankel una vez más aparece el hecho de que no importa la naturaleza de los números, sino como estos son operados[73], mostrando esa estrategia que usaban los árabes y que tanto Diofanto como Stevin propusieron.

Con la intervención de Hankel buscando el cierre algebraico, entran los negativos a la misma categoría de los positivos como Maz Machado (2005) afirma:

> Esta construcción del sistema numérico tiene un carácter genético pues parte de la ampliación de un campo numérico a otro y, en cada ampliación, las leyes válidas en uno se trasladan también al nuevo campo ampliado; de esta forma las leyes y operaciones válidas para cantidades positivas también lo son para cantidades negativas. (p. 14)

Resumiendo: establecer un isomorfismo entre los números positivos y negativos es lo que permite ampliar el concepto de número y dota a los negativos de ese estatus ontológico[74].

Sin embargo, no solo desde las ecuaciones surgen los números negativos, también lo hacen los imaginarios, que se suelen introducir como el resultado de la imposibilidad de la operación raíz cuadrada sobre los números negativos. Entonces, ¿cómo existieron y fueron aceptados estos números?

1.6. ¿Un imaginario puede ser número?

Como se mencionó con anterioridad, durante muchos años las ecuaciones eran algo que apasionaba a matemáticos y fanáticos, pues las ecuaciones siempre han estado desde las primeras civilizaciones y tuvieron su mayor importancia en la época de Cardano. Uno

[73]Lo que Peacock decía para hacer hincapié a su principio "cuando los símbolos son generales en su forma" (Kline, 1985).

[74]Para profundizar en el asunto, véase el trabajo de Maz Machado (2005).

de los problemas que anduvo mucho tiempo en la comunidad académica (desde la época de Cardano) era encontrar la fórmula para resolver la ecuación de quinto grado, conocido como la quíntica. Pero este problema surge del intento de generalización, ya que se habían encontrado las fórmulas generales para las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, y era entonces razonable pensar que existía la de grado quinto. No obstante, se nos ha informado que es en la solución a la ecuación de tercer grado, el ámbito en el que aparecen por primera vez los números complejos y que Descartes, denominó imaginarios.

Sin embargo, al parecer, estos se manifestaron muchos años antes. La hipótesis es que Herón de Alejandría, fue quien los encontró en el problema de la pirámide truncada de base cuadrada. Como Nahin (2008) enuncia:

> Encontramos que la raíz cuadrada de una cantidad negativa aparece por primera vez en la geometría de Herón de Alejandría [...] Tras dar con una fórmula correcta para determinar el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada y tras aplicarla con éxito al caso en el que el lado de la base inferior es 10, el de la superior es 2 y la arista es 9, el autor intenta resolver el problema en el que el lado de la base inferior es 28, el de la superior es 4, y la arista es 15. En lugar de la raíz cuadrada de $81 - 144$ requerida por la fórmula, tomó la raíz de $144 - 81$..., esto es, reemplazó $\sqrt{-1}$ por 1, y no notó que el problema tal como estaba planteado era imposible. No podemos determinar si este error se debe a Herón o a la ignorancia de algún replicador. (p. 28)

La fórmula a la que hacen mención en la anterior cita es: $h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$, haciendo $a = 28$, $b = 4$ y $c = 15$, se encuentra que $h = \sqrt{-63}$, si manipulamos la expresión queda entonces, $h = \sqrt{63}\sqrt{-1}$.

Por lo que se perdió esa oportunidad Herón, de atribuírsele enorme descubrimiento como sí lo fue para Hipaso de Metaponto el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Naturalmente, como en esa época los números negativos no tenían sentido, menos lo iban a tener expresiones como $\sqrt{-63}$.

Se suele creer que la fórmula general de tercer grado es originada por Gerolamo Cardano (1501-1576), la cual es encontrada en su obra *Ars magna*. Sin embargo, al parecer no es del todo cierto, pues la Historia de las Matemáticas nos ha declarado que hay más personas involucradas en el descubrimiento de la fórmula[75].

Ahora bien, Cardano en su obra planteó el siguiente problema: Dividir 10 en dos partes cuyo producto fuese 40, el cual conduce a la ecuación $x^2 - 10x + 40 = 0$, la cuale tienen dos soluciones ($5 + \sqrt{15}$ y $5 - \sqrt{-15}$), que al sumarse efectivamente dan 10. Pero cuando Cardano se pregunta, ¿qué sucede si multiplicamos las raíces?, encuentra el 40. Nahin (2008) dice al respecto:

> Como dijo Cardano de este cálculo "Dejando de lado la tortura mental implicada" en hacer eso, es decir, en manipular $\sqrt{-15}$ como si fuera cualquier otro número, todo lo demás funcionaba bien. Pese a todo, aunque no tenía miedo de manejar estos números, está claro, a partir de la lectura de sus siguientes palabras, que tenía algunas reticencias: "Así progresa con argucias la aritmética, cuyo fin, como ya se ha dicho, es tan refinado como inútil." Pero lo que realmente lo dejó perplejo fue el caso en el que aparecían tales raíces cuadradas de números negativos en la fórmula para ecuaciones cúbicas que sólo tenían raíces reales (p. 42).

Ahora bien, ¿cómo es que estos números fueron aceptados? Falk (2012) dice:

> Pero, por otra parte, la correspondencia neo pitagórica entre la ley matemática y la ley de la ciencia física, la relación inextricable entre los "objetos" del estudio matemático y

[75] Puede leerse el trabajo de Luque, Mora y Torres (2013, p. 472).

los del mundo real que ellos idealizan, había generado un criterio de existencia esencialmente geométrico. Según este criterio, un ente matemático existe si y solo si se le puede dar una interpretación geométrica. (p. 20)

La tarea de la interpretación geométrica para estos números, la logró el topógrafo, Caspar (1745-1818), quien logró publicar dichos resultados a sus 57 años con el título "Sobre la representación analítica de la dirección: un acercamiento", pero como suele pasar en vida de algunos matemáticos, solo se reconoce lo importante de la obra, una vez el autor ha fallecido.

La interpretación geométrica que dejo Wessel, es la que conocemos en los cursos de Análisis, es decir, un número complejo es la pareja $a + bi$ que corresponde a un segmento en el plano complejo y a, b son números reales. Pero ¿cómo llegó Wessel a tal representación? Al parecer se basó en observar los números complejos como vectores, pues los vectores eran ya conocidos desde la época de Aristóteles (como idea). Sin embargo, el ingrediente fuerte de la obra de Wessel es la multiplicación y el sentido vectorial como lo comenta Nahin (2008):

> Descubrió cómo multiplicarlos haciendo una ingeniosa generalización del comporta miento de los números reales. Se dio cuenta de que el producto de dos números digamos 3 y -2, cuyo producto es (-6) tenía la misma razón a cada factor como el otro factor lo tenía con el 1. Esto es $-\frac{6}{3} = -2 = -\frac{2}{1}$, y $\frac{-6}{-2} = 3 = \frac{3}{1}$. Por tanto, asumiendo que existe un segmento unitario dirigido, Wessel argumentó que el producto de dos segmentos dirigidos debía tener dos propiedades. Primero, una analogía directa con los números reales, que consiste en que la longitud del producto debía ser el producto de las longitudes de cada segmento. ¿Pero qué ocurre con la dirección del producto? Esta segunda propiedad es la contribución seminal de Wessel: por analogía con todo lo que había hecho, dijo que el segmento producto debía diferir en la dirección de cada segmento factor por la misma cantidad angular que el otro segmento factor difería en dirección al compararlo con el

segmento unidad (p. 42).

Sin embargo, el hecho de que la interpretación geométrica de Wessel sea la que empleamos, no significa que no hubieran existido otras. Matemáticos como Wallis, Gauss y Argand, también trataron de darle una interpretación geométrica (Sánchez, 2011).

Pero bueno, ya se tiene reconocido su existencia, pero ¿de dónde surgen?, ¿quién bautizo a la unidad imaginaria como i? Esto, se debe al matemático Leonard Euler, como lo expone Sánchez (2011): "En su memoria, De Formulis Differentialibus Angularibus, presentada en la Academia de San Petersburgo en 1777, escribió: "En adelante, denotaré la expresión $\sqrt{-1}$ como i resultado que $ii = -1$" (p.3).

Pero y el álgebra que guardan los números imaginarios ¿cómo se respalda? Esta es la contribución de Hamilton, conocida como los cuaterniones.

1.6.1. Los cuaterniones

Con la asociación de los números complejos a una interpretación geométrica de los mismos, se crea la necesidad de expandir el concepto de número de la aritmética existente hasta entonces. Pero ¿qué hacer? y ¿cómo hacerlo?

Al respecto William Hamilton (1805-1865), inspirándose en que $\sqrt{-1}$ debe tener una noción temporal, escribió una obra titulada "Teoría de funciones conjugadas o pares algebraicos, con un ensayo preliminar sobre el álgebra como una ciencia del tiempo puro" en (1831) (véase Figura 1.6)

Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time.

By WILLIAM ROWAN HAMILTON,

M.R.I.A., F.R.A.S., Hon. M.R.S. Ed. and Dub., Fellow of the American Academy of Arts and Sciences, and of the Royal Northern Antiquarian Society at Copenhagen, Andrews' Professor of Astronomy in the University of Dublin, and Royal Astronomer of Ireland.

Read November 4th, 1833, and June 1st, 1835.

General Introductory Remarks.

THE Study of Algebra may be pursued in three very different schools, the Practical, the Philological, or the Theoretical, according as Algebra itself is accounted an Instrument, or a Language, or a Contemplation; according as ease of operation, or symmetry of expression, or clearness of thought, (the *agere*, the *fari*, or the *sapere*,) is eminently prized and sought for. The Practical person seeks a Rule which he may apply, the Philological person seeks a Formula which he may write, the Theoretical person seeks a Theorem on which he may meditate. The felt imperfections of Algebra are of three answering kinds. The Practical Algebraist complains of imperfection when he finds his Instrument limited in power; when a rule, which he could happily apply to many cases, can be hardly or not at all applied by him to some new case; when it fails to enable him to do or to discover something else, in some other Art, or in some other Science, to which Algebra with him was but subordinate, and for the sake of which and not for its own sake, he studied Algebra. The Philological Algebraist complains of imperfection, when his Language presents him with an Anomaly; when he finds an Exception disturb the simplicity of his Notation, or the symmetrical structure of his Syntax; when a Formula must be written with precaution, and a Symbolism is not universal. The Theoretical Algebraist complains of imperfection, when the clearness of his Contemplation is obscured; when the Reasonings of his Science seem anywhere to oppose each other, or become in any part too complex or too little valid for his belief to rest firmly upon them; or when, though trial may have taught him that a rule is useful, or that a formula gives true results, he cannot prove that rule, nor understand that formula: when he cannot rise to intuition from induction, or cannot look beyond the signs to the things signified.

Figura 1.6: Fascímil del Libro: “Teoría de funciones conjugadas o pares algebraicos, con un ensayo preliminar sobre el álgebra como una ciencia del tiempo puro” de Hamilton, tomada de (Hamilton, 1831).

En dicha obra, definió pares ordenados de números reales escritos como (a, b) con las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd)(ad + bc)$$

Generando un cambio de representación de $a + bi$ por (a, b), por ejemplo $(0, 1) = i$. Sin embargo, Hamilton, leyendo el artículo de Argand sobre la relación entre las rotaciones en el plano, contempla la pregunta ¿qué es lo que se esconde tras las rotaciones?, encontrando en su respuesta unos números llamados cuaterniones o hipercomplejos.

Un número hipercomplejo es de la forma $q = a + bi + cj + dk$, en el que a, b, c y d son números reales e i, j, k satisfacen: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, surgiendo así la primera álgebra no conmutativa[76]. Con los cuaterniones se tiene ya aceptados a los números complejos como números. Pero, en la historia, aún queda abierta la inquietud respecto de los números reales; esta es: ¿cómo garantizar su existencia? Con Dedekind, se ofrecerá la respuesta.

1.7. ¿Un número es una cortadura (es un conjunto)?

Para la época había un matemático interesado en construir nuevas estructuras matemáticas, y paralelamente estaba interesado en la búsqueda de una fundamentación que saliera del conjunto de los números naturales hasta los complejos. Este matemático en mención es Richard Dedekind (1831-1916).

Dedekind encuentra, según Ferreiros Dedekind (2014)[77], el documento de Hamilton, donde halla la definición de número complejo como pareja ordenada de números reales[78]. Esta forma de observar parejas de números reales al número complejo, es la que le permite a Dedekind construir lo que actualmente se denomina "método genético", este es, pasar de los naturales[79] a los números enteros como clases de equivalencia bajo una relación de equivalencia y de manera similar hacia los números racionales[80].

Sin embargo, esta construcción le generó a Dedekind un fuerte problema pues, como afirma Ferreiros: "mientras que a cada número imaginario le corresponde un y sólo un

[76]Téngase esto muy presente para el segundo capítulo

[77]La obra de Dedekind a la que hacemos mención data (1872), aquí se está referenciando la traducción hecha por José Ferreirós.

[78]Según Mora y Torres (2004), Hamilton definió los números irracionales como partición de los racionales pero no culmino su trabajo.

[79]Según Castro Chadid y Pérez (2007), Dedekind no da una definición explícita de número natural, sino que expone una perspectiva conjuntista, la cual tiene las propiedades de los números naturales.

[80]El método genético se puede encontrar fácilmente en varios textos de Teoría de Conjuntos, por ejemplo, el José María Muñoz de la editorial de la Universidad Nacional de Colombia.

par de números reales, a cada entero le corresponden infinitos pares de números naturales" (Dedekind, 2014, p. 42). A pesar de ello, él veía que el método era el que él buscaba para la construcción de entidades.

Pero el método tiene un problema, expresado en la pregunta: ¿cómo construir los números irracionales? Para responderla, Dedekind no se enfoca en una cerradura algebraica, sino en una cerradura topológica[81], aprovechándose, que los números racionales son densos, pero no continuos. La idea es completar esa "continuidad" a través de una especie de conjuntos infinitos que luego él llamará cortaduras y que dicha propiedad a la que le atribuirá se llamará completitud o completez.

Mientras Dedekind iba haciendo su construcción, de manera paralela emergieron otras construcciones que trataban de fundamentar a los números reales: las construcciones de Cantor y Weierstrass, las cuales según Ferreiros, en su comienzo eran parecidas, pero cambian en la forma de concebir el número irracional (Dedekind, 2014).

Ahora bien, ambas construcciones se basan en elementos de análisis como convergencia de series y sucesiones[82]. El *plus* de la construcción de Dedekind es que usa las cortaduras, es decir, conjuntos sin necesidad de usar herramientas del Ánálisis.

Una cortadura no es más que una partición o "corte" en el conjunto de los racionales, el cual genera dos subconjuntos de racionales Q_1 y Q_2 que satisface: "Todo elemento de Q_1 es menor que todo elemento de Q_2" (Dedekind, 2014, p. 49). Ahora sí, se puede entonces exponer el *plus* del número irracional.

[81]La propiedad de que un conjunto sea denso es topológica (Dedekind, 2014).
[82]Puede verse (Mora & Torres, 2004).

1.7.1. El número irracional

Dedekind afirma que no todo número racional produce cortaduras y que esto se debe a que el mismo conjunto de los números racionales no es continuo (Dedekind, 2014). Por ello se hace necesario ejemplificar la anterior afirmación, es decir: Obsérvese que si se define $A = \{a \in \mathbb{Q} | a \leq 0\}$ y $B = \{b \in \mathbb{Q} | b > 0\}$, en el cual $0 \in \mathbb{Q}$, entonces se obtiene $\alpha = (A, B)$ es la cortadura que define al número real cero[83]. Pero si se define $A = \{a \in \mathbb{Q} | a^2 < 5\}$ y $B = \{b \in \mathbb{Q} | b^5 > 5\}$, con $5 \in \mathbb{Q}$ entonces $\alpha = (A, B)$[84], ¿qué tipo de número es? Por lo que en esta cortadura existirá un número irracional, el cual estará definido por dicha cortadura.

Con esto resuelve el problema anteriormente mencionado, esto es: cada número racional o irracional estará determinado por una y solo una cortadura[85] y como la cortadura es una pareja ordenada, queda terminada la idea que intentaba desarrollar Dedekind, al ver los números como parejas ordenadas.

Retomando lo anterior, se vio que se define la cortadura como un conjunto infinito, pero no se ha hecho explícito que los números racionales son infinitos. Pero ¿cómo es un conjunto infinito? ¿Esto cambia el concepto de número?

1.8. ¿Es el infinito un número?

Anteriormente, se dijo que para los griegos el número era pluralidad, sin embargo, ¿qué tanto puede ser la pluralidad?, ¿hay algún límite? Aristóteles afirma en su *Metafísica*

[83] Los detalles de que sea una cortadura y la inexistencia del racional, pueden verse en (Recalde, 2018, pp. 364-366).

[84] Vale la pena recordar que no hay que confundir los numerales con el número.

[85] En palabras de Dedekind: “dos números son diferentes si están definidos por dos cortaduras diferentes” (Dedekind, 2014, p. 95).

que el infinito también puede ser pluralidad, pero ilimitada, mostrando que pluralidad y el uno son opuestos[86]:

> Desde luego, es imposible que la unidad, siendo indivisible, sea cierta pluralidad. Pero que proceda de una parte de una Pluralidad comporta otras muchas dificultades. Y es que cada una de las partes habrá de ser necesariamente indivisible (en caso contrario sería una pluralidad y la unidad sería divisible), con lo cual el Uno y la Pluralidad no serían ya elementos (puesto que cada una de las unidades no derivaría ya de lo Uno y de la Pluralidad). Además, quien dice esto no hace otra cosa que añadir otro número, puesto que el número es la «pluralidad de indivisibles».
>
> (9) A los que ofrecen esta explicación hay que preguntarles, además, si el número es infinito o finito. Pues, según parece, ha de haber, además, una pluralidad finita, de la cual y del Uno derivan unidades finitas. Pero hay también otra, la Pluralidad Misma, la cual es Pluralidad infinita. (Aristóteles, 1994, p. 545).

Es decir, se reconoce aquí que Aristóteles[87] establece que la infinitud es una suma de unos[88], pero esto matemáticamente no es formalmente fácil de expresar. De hecho, se considera esta afirmación actualmente como un "axioma", el axioma que permite la construcción de los números naturales por medio de la función sucesor.

No obstante, se podría creer que no hubo trabajos acerca del infinito, pero esto no es cierto, pues dice Dantzig (1971):

> En 1820 apareció un pequeño folleto, escrito en alemán por un tal Bolzano, titulado: *Las paradojas del infinito*. Este folleto también despertó poco interés, tan poco que,

[86]Refiriéndose a los pitagóricos, véase (Aristóteles, 1994, p. 90).
[87]Conocido por ser "el primer teórico del infinito" (Castro Chadid & Pérez, 2007, p. 16).
[88]Lo que puede denominar "infinito en potencia", dado que, existe también el infinito en acto.

> cuando cincuenta años después la teoría de los conjuntos fue el tema de cada día, pocos matemáticos sabían quién era ese hombre. (p. 219)[89]

Si se retoma la consideración de que Stevin quebró la concepción aristotélica, llegó después otro personaje trascendental en las matemáticas, que se atrevió a cambiar el paradigma del infinito que Aristóteles había estudiado y expuesto en su Física, es decir, George Cantor (1845-1918).

1.8.1. El infinito actual

Ha quedado establecido antes que la perspectiva de Dedekind, usa los conjuntos, precisamente, el uso de esta entidad matemática es compartida también en el trabajo de George Cantor[90]. Cantor trabajó en un problema de representación de funciones con series de Fourier y dedicó una serie de tratados en los cuales apareció el término "conjunto" (Torreti, 1998). En estos tratados aparece la noción de transfinito, específicamente en un artículo de 1880, pero en dicho artículo solo aparecían como símbolos de representar infinitud (Recalde (2018); Castro Chadid y Pérez (2007)). Ya en 1882, Cantor publica su célebre documento *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, en el que los transfinitos entran ya como números, y así da la teoría que sustenta al infinito actual (Recalde, 2018). Como muestra de ello, aquí una parte de la introducción de la obra:

> La precedente exposición de mis investigaciones en teoría de conjuntos ha llegado a un punto en el que su continuación depende de una extensión del verdadero concepto de

[89]Ese tal Bolzano que menciona Dantzig es Bernard Bolzano (1781-1848), quien fue el primero en trabajar el infinito "actual", no lo hizo de manera exhaustiva y creó el concepto de potencia de un conjunto (Dantzig, 1971). También, Galileo Galilei (1564-1642) abordó el infinito, véase Dantzig (1971, pp. 218-219).

[90]¿Acaso no es similar con Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) con la creación del Cálculo?, sin embargo, lo que importa es la teoría en sí, entrar en debates de quien o no el creador, es una pérdida de tiempo.

número más allá de los límites conocidos, y esta extensión va en una dirección que hasta donde yo sé no había sido explorada antes por nadie. (Cantor, 2006, p. 84)

Y más adelante afirma:

> Bajo su primera forma, el infinito impropio, se presenta como algo finito variable; en la otra forma, lo que yo llamo el infinito propio, aparece como un infinito completamente determinado. Los verdaderos números infinitos, que definiré en lo que sigue (y a los que me vi llevado hace muchos años, sin llegar a ser claramente consciente de que se trataba de números concretos con significado real) no tienen absolutamente nada en común con la primera de estas dos formas, con el infinito impropio. (Cantor, 2006, p. 86)

Es decir, en palabras del mismo Cantor, el número es una infinitud[91]. Sin embargo, esta concepción, permitirá la entrada del infinito actual a las matemáticas mostrando después, una matemática para este tipo de nuevo número que llamó *Aleph*[92].

1.8.1.1. Los *Aleph*

¿Cómo surgen los *Aleph*? y ¿qué relación tienen con el infinito? Pues bien, contestar estas preguntas; está en relación de formalizar los números naturales como conjuntos, ya que este conjunto le permite introducir conjuntos infinitos y luego conjuntos transfinitos (Recalde, 2018).

Como el primer conjunto infinito es el de los números naturales[93], el cual, se puede ver como una colección de conjuntos, sus elementos resultan ser conjuntos con cardinalidad

[91] Tanto propia como impropia.

[92] Dice Ferreirós: "Una cuestión que se ha discutido a menudo acerca del matemático es si era de origen judío, y el hecho de que empleara la primera letra hebrea, alef ($\aleph$), para los cardinales transfinitos ciertamente ha estimulado el debate" (Cantor, 2006, p. 18).

[93] Lo que Cantor denomina primera clase numérica (Cantor, 2006).

finita; a este conjunto le asigna la letra $\aleph_0$, el cual se le conoce como el cardinal del conjunto de los números naturales[94]. Recordemos que, el cardinal es el número que le asignamos a la cantidad de elementos de un conjunto. Luego se está diciendo que hay un número al cual le establecemos un infinito, pues el conjunto de los naturales es infinito. Además, resulta curioso cómo la intuición nos juega bromas, como creer que el conjunto de los números enteros se puede ver como el doble de los números naturales, pero en realidad tienen la misma cantidad de elementos, es decir, que tienen el mismo cardinal, lo mismo sucede con los números racionales. Lo exótico es que, siendo los números racionales densos, tiene la misma cantidad de elementos de los números naturales (que no son densos), es decir, comparten la misma cardinalidad o tamaño. En resumen, el infinito "actual", el creado por Cantor, choca con la intuición[95]. Finalmente, Cantor crea otros *Aleph* como: $\aleph_1, \aleph_2, \ldots,$ etc. Y así una especie de aritmética que cumple que:

para cualquier cardinal finito n se tiene:

1. $\aleph_0 + n = \aleph_0$
2. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
3. $\aleph_0 \cdot n = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
4. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (Recalde, 2018, p. 386)[96]

Dotándolos además de estructura de orden.

Sin embargo, después iban a llegar las famosas paradojas, que hace que esta teoría tenga que volver a tener que revisar su fundamentación.

[94]Debido a que la potencia del conjunto coincide con la enumeración de los elementos de este conjunto (Cantor, 2006).

[95]En el siguiente capítulo se volverá a el tema de dicho choque.

[96]Vease, (Cantor, 2006, p. 96), (Luque, Mora & Páez, 2013, pp. 282-286) y (Castro Chadid & Pérez, 2007, pp. 141-186).

Capítulo 2

LA SEGUNDA CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA Y SUS CONSECUENCIAS EN RELACIÓN CON EL NÚMERO

> Las matemáticas son un campo de estudio donde no sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad.
>
> Bertrand Russell

Durante mucho tiempo los matemáticos tenían la creencia de que las matemáticas eran un cuerpo de verdades inquebrantables. Sin embargo, con el paso del tiempo emerge una época en la cual dicha creencia se fue perdiendo paulatinamente, hasta el punto de cuestionar los fundamentos del edificio, que durante más de veintidós siglos *(siglo III a.C.-siglo IX* *d.C.)* no se objetaban, esto debido a la influencia de la filosofía aristotélica y la geometría de Euclides. En otras palabras, se creyó a ciegas la noción de verdad que guardaban los postulados de la Geometría y Aritmética euclidianas y los principios de deducción Lógica aristótelica.

Con la llegada de las geometrías no euclidianas, resultado de muchos intentos de probar el quinto postulado de *Elementos* de Euclides, se da la entrada a la posibilidad de controvertir la certeza de los fundamentos, sustentada en la intuición, postura que, en el *siglo XVIII*, Imannuel Kant[97] sostuvo respecto de las verdades matemáticas, y que tuvo influencia por ser un referente del pensamiento de la época.

En este capítulo se encuentra, cómo se fue perdiendo la credibilidad de los fundamentos de las matemáticas y cómo estos fueron revisados por matemáticos contemporáneos (como Frege, Hilbert o Brouwer) a la crisis que se relata. Estos procuran solventar la crisis en un intento de restablecer el edificio, que se había construido durante veinticuatro siglos, proponiendo sus posturas logicista, formalista o intuicionista, respectivamente.

Por lo tanto, al entrar en desconfianza con la intuición espacial, llega el momento de que la Aritmética sustituya el lugar que la Geometría que ocupó durante veinticuatro siglos.

Y como el número natural es el pilar de la Aritmética, se requiere entender de nuevo ¿qué es un número? En la segunda parte de este capítulo se expondrán las tres escuelas que surgen como respuesta a la segunda crisis de los fundamentos de la matemática y que pusieron la Aritmética como sustento de verdad, a pesar de que haya autores como Javier de Lorenzo que afirme que no hubo como tal una crisis (De Lorenzo, 1998).

Se inicia con Frege, quien reflexiona en torno al número encontrando que: “una inves-

[97] Uno de filósofos más extraordinarios que ha dejado la humanidad, su obra celebre *Critica de la razón pura*, será referenciada más adelante.

tigación del concepto de número resultará siempre algo filosófica" (Frege & Imbert, 1972, p. 16), y a través de su concepción de número, se encuentran paradojas descubiertas por Russell, aunque ya en el trabajo de Cantor estaban[98].

En vista de las paradojas encontradas, simultáneamente aparecieron alternativas como el formalismo de Hilbert y el intuicionismo de Brouwer, en el que se construyen matemáticas esperando salir de esa crisis.

Finalmente se observará, cómo estas escuelas ofrecieron otras conceptualizaciones de número que contrastan con las previas (capítulo 1 de esta monografía) para concluir la tesis que pretende sustentar este trabajo de grado.

Pero antes hay que detallar algunas partes históricas de la crisis en mención, la cual está en este documento en tres partes: (1) El dilema de la verdad contra la intuición; (2) Las paradojas y el golpe del infinito a la intuición; y (3) La aritmetización del Análisis y la Geometría. Ello permitirá dar ingreso a las escuelas filosóficas ya mencionadas.

2.1. El Problema del rigor y la verdad

2.1.1. El dilema de la verdad contra la intuición

Ahora bien, como pasó en la escuela pitagórica con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, nuevamente recayó sobre la Geometría; no un descubrimiento, sino una instauración que tuvo que esperar hasta los *siglos XIX* y *XX*; esta fue la aparición de las geometrías no euclidianas.

[98]Esto se verá en la siguiente sección.

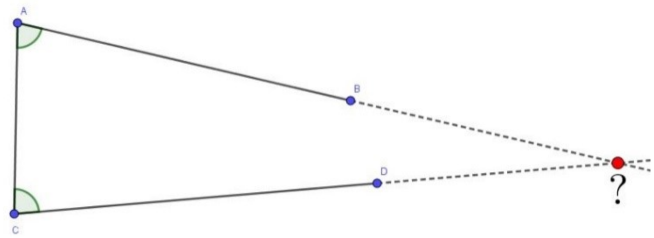


Figura 2.1: Imagen ilustrativa del quinto V postulado de *Elementos* de Euclides.

El surgimiento se debe al resultado de veinticuatro siglos de trabajo entre amateurs y matemáticos[99], respecto al quinto postulado de *Elementos* de Euclides que dice:

> Y que si una recta al incidir sobre otras dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos. (Euclides, 2015a, pp. 11-12).

Algunos trataron de probarlo, aunque en su prueba encontraban versiones equivalentes del mismo postulado, creyendo que ya lo habían probado. Iban discutiendo también que el postulado para ser aceptado, no era simple respecto de los otros cuatro, por lo tanto, cuestionaban su naturaleza, que evidenciaba la necesidad de ser demostrado. Finalmente se llegó a la versión de John Playfair (1748-1819), la cual para muchos es la versión más sencilla del quinto postulado. Esta versión reza: "se acepta que la paralela por un punto exterior es única" (Kline, 1985).

De manera paralela a la que se iba llevando a la necesidad de encontrar la "demostración" del quinto postulado, emergió una especie de escepticismo cuyo representante fue David Hume (1711-1776), que en su libro *Tratado de naturaleza humana* en el cual, sostenía que el hombre no puede conocer la materia ni acceder a la mente (Kline, 1985). Dice Kline

[99]Ejemplo de matemáticos que se dedicaron al enigma del quinto postulado, fueron: Proclo (412-485), Omar Kkayyam (1048-1113), John Wallis (1616-1703) (Torres, 2018). Para más información se recomienda leer el primer capítulo de (Efímov, 1984) o el segundo de (Dou, 1974) y consultar (Recalde, 2018, pp. 323-355).

(1985) "¿quién nos garantiza que existe un mundo permanente de objetos solidos?" (p. 86). Dado que, todo lo que nos rodean ha sido objetos físicos en este mundo sensible, el que tengamos la sensación de que la misma mesa siempre está en el mismo lugar, no prueba que ella esté ahí (Kline, 1985). En otras palabras, se instauraba un escepticismo radical.
Puesto que, en la época *(siglo XVIII)*, perduraba aún la creencia del plan matemático que rige el universo, ¿por qué no cuestionar las matemáticas?

Immanuel Kant (1724-1804), uno de los filósofos de mayor trascendencia y contemporáneo con Hume, se pone a reflexionar sobre el asunto tratando de evitar echar a la caneca todos los progresos científicos del hombre, es decir procurando; no hacer todo el progreso algo inservible (Kline, 1985)[100]. Por ende, se tomó el trabajo en serio y le permitió afirmar que la única Geometría existente era la euclidiana, ya que la seguridad de los axiomas de la geometría se justificaba con afirmar que el tiempo y el espacio son intuiciones, obteniendo también que las matemáticas son sintéticas y a priori[101] (Kline, 1985)[102].

Lo anterior requiere una explicación, la cual se va hacer siguiendo a Torres (2018).

Considere la proposición del ángulo externo de un triángulo: "En todo triángulo, si se prolonga uno de los dos lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos opuestos y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos" (Euclides, 2015a, p. 52), la cual corresponde a la proposición 32 del Libro I (véase Figura 2.2).

[100]Según Körner (1967) la filosofía matemática de Kant se dirigirá contra Leibniz, pues este considera las proposiciones matemáticas analíticas. Esto deberá mirarse en el logicismo, pues Leibniz tiene pretensiones de mejorar la Lógica; sin embargo, su filosofía había sido motivada por el empirismo de Hume y el racionalismo de Leibniz.
[101]Esto se verá más adelante, cuando se aborde a Frege.
[102]Las intuiciones son modos de percepción de cómo la mente concibe la experiencia (Kline, 1985).

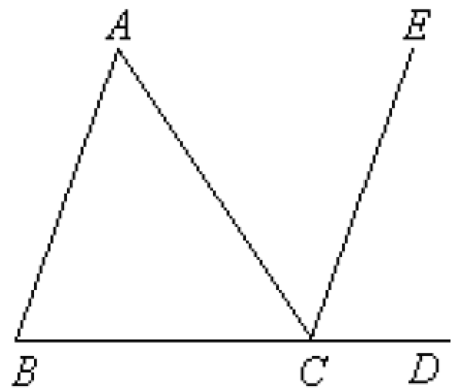


Figura 2.2: Imagen de la prueba de la proposición del ángulo externo de un triángulo, tomado de (Torres, 2018)

Reformulando la proposición: dado el[103] $\triangle ABC$, trácese $\overline{BC}$ hasta el punto D. Se afirma que el $\angle ACD$ es externo es igual a los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ABC$ internos y opuestos del $\triangle ABC$ y que los tres $\angle ABC, \angle CBA$ y $\angle CAB$ son igual a dos rectos.

Esto se puede probar como se sigue[104]:

1. Por el punto C trácese $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ (I.31).
2. Como $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, y $\overline{AC}$ es incidente con las dos, los ángulos alternos internos $\angle BAC$ y $\angle ACE$ son iguales entre sí (I.29).
3. Además, como $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, y $\overline{BC}$ es incidente con las dos, el ángulo externo $\angle ECD$ es igual al interno y opuesto $\angle ABC$ (I.29).
4. Pero ya se tiene demostrado, que el $\angle ACE$ es igual al $\angle BAC$.
5. Luego $\angle ACD$ es igual a los internos y opuestos $\angle BAC$ y $\angle ABC$.

[103] Usaré las siguientes notaciones: $\triangle$ para denotar triángulo, $\angle$ para ángulo, $\parallel$ para rectas paralelas, $\perp$ para rectas perpendiculares y $\overline{AB}$ para denotar recta AB. Además vale la pena recordar que, para Euclides las rectas son segmentos.

[104] Se están asumiendo las proposiciones, nociones comunes y postulados del Libro I de los Elementos de Euclides. Además de ello, considero, que se deben tener en cuenta, las sutiles diferencias entre prueba y demostración, las cuales se encuentran explicadas en la nota de pie de página 6 de (Torres, 2018, p. 6).

6. Añádase el ángulo común $\angle ACB$.
7. Por los anterior se tiene que, $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$ igual a $\angle ACD$ y $\angle ACB$ (NC1).
8. Pero $\angle ACD$ y $\angle ACB$ son iguales a dos rectos (I.13).
9. Por lo tanto $\angle ABC, \angle CBA$ y $\angle CAB$ son igual a dos rectos. (Torres, 2018)

Ahora bien, ¿qué relación tiene Kant con las demostraciones de Euclides? Kant (2007) dice:

> El conocimiento filosófico sólo considera lo particular en lo universal; las matemáticas, lo universal en lo particular, e incluso en lo singular, **pero sólo a priori y por medio de la razón**, de manera que tal como esté determinado esto singular bajo ciertas condiciones universales de la construcción, así debe ser pensado, como universalmente determinado del objeto del concepto al cual eso singular le corresponde sólo como esquema de él. (pp. 744-745)[105]

Y es clara la afirmación de Kant, pues cuando Euclides dice en su proposición "todo un triángulo" está exponiendo que esta propiedad que va a demostrar, la cumplen todos los triángulos, de ahí que sea de lo universal a lo particular. Pues, en su representación, escoge un representante de "todos los triángulos"[106], y la construcción naturalmente se sustenta por los postulados y proposiciones ya demostradas con anterioridad.

Con la cita de Kant, hay dos cosas que ameritan atención: (1) lo a priori del conocimiento y (2) la construcción del objeto por medio del concepto. Lo primero acaba de ser abordado. Ante lo segundo Kant dice:

[105]La negrilla es puesta por mí para destacar, la relación a priori con la demostración. Sin embargo, aclaro que, a priori se entiende como conocimiento que no depende de la experiencia (Torres, 2018).

[106]Los que cumplen la definición dada por él.

> El conocimiento filosófico es el conocimiento racional por conceptos; el matemático [es el conocimiento] por construcción de conceptos. Construir un concepto significa: exhibir a priori la intuición que le corresponde. Para la construcción se requiere, pues, una intuición no empírica, que por consiguiente, como intuición, es un objeto singular, pero que sin embargo, como construcción de un concepto ([como construcción] de una representación universal) debe expresar, la representación, validez universal con respecto a todas las intuiciones posibles que hayan de estar bajo ese concepto. (Kant, 2007, p. 744)

De ahí que Kant concluya que las proposiciones matemáticas son sintéticas, es decir, por construcción. Y para complementar dice Torres (2018):

> Es más, la sinteticidad también se debe a que muchas propiedades de los objetos geométricos resultan de su construcción, donde se tornan evidentes, sin que las mismas resulten de las definiciones, axiomas y postulados. La construcción es, en este sentido, indispensable. (p. 27)[107]

Pero, algo que se le crítica a Euclides de sus demostraciones es el uso de la representación. Por ejemplo, dice Blanché (1965):

> En un sentido, nada era sin embargo más manifiesto: las figuras lo declaran. Pero el texto lo dice expresamente en modo alguno; hace creer que las figuras no están ahí sino como simples auxiliares del razonamiento, las cuales duplican en cierta forma la demostración lógica mediante una ilustración sensible, sin serle indispensables. No hay nada de ello: suprimid la figura, trazada o imaginada, y la demostración se viene abajo. (pp. 11-12)

Aunque destaca Torres (2018) que Kant no lo considera tanto un defecto, sino que esto es algo que caracteriza a la demostración matemática, pues sin este no habría conoci-

[107] Para más información véase (Torres, 2018, pp. 28-31).

miento general (Torres, 2018)[108]. Así pues Kant (2007) afirma "De esta manera por medio de una [A717][B745] cadena de razonamientos, guiado siempre por la intuición el geómetra consigue así una solución evidente y, a la vez, universal de la cuestión" (p. 747). Es decir, el diagrama es un medio para guiar la intuición[109] y así concluir lo que la proposición establece.

Sin embargo, la afirmación que iba a cambiar en parte la perspectiva kantiana la ofreció Simon Kügel (1739-1812), contemporáneo a Kant, declarando que el quinto postulado de la geometría euclidiana se debe a la experiencia y no a la intuición como Kant afirmaba (Kline, 1985)[110].

Claramente, el hacer afirmaciones de esta índole en contra de la postura filosófica instaurada por Kant, debía tener un espectacular sustento. El sustentar este tipo de ideas emergentes trajo consigo el surgimiento de maneras distintas de afrontar el problema del quinto postulado. Por ejemplo, Carl Gauss (1777-1885), uno de los precursores de la creación de las geometrías no euclidianas, iba en esa dirección; en virtud de su prudencia frente a la tradición matemática del momento, optó por no publicar los hallazgos de esta nueva geometría encontrada, eludiendo posibles conflictos, como no ser tomado en serio o no ser comprendido, que era una manera de evitar quedar mal ante la presión académica que Kant influía. Por fortuna, quedan cartas de Gauss que ayudan a ver el estado del arte del momento, por ejemplo, la que envió a su amigo Franz Taurinus (1794-1874) en la que escribe:

> La suposición de que la suma de los ángulos [de un triángulo] es menor que $180°$conduce a una curiosa geometría, bastante diferente de la nuestra [la euclídea] pero plenamente consistente, que he desarrollado a mi entera satisfacción. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos, y, para los no iniciados, absurdos; no obstante, una reflexión tran-

[108]Recuérdese que los objetos matemáticos se les daba existencia si tenían una interpretación geométrica.

[109]Dice Torres (2018): "Por intuición Kant entiende el modo por el cual el conocimiento se refiere de manera directa e inmediata a su objeto, y que sólo tiene lugar en la medida en que dicho objeto afecte de alguna manera a nuestro psiquismo (comúnmente a través de nuestros sentidos)". (p. 27)

[110]Recuerde que las matemáticas para Kant son sintéticas y a priori.

quila y sosegada revela que no contienen en absoluto nada imposible. (Kline, 1985, p. 96)

Con esta nueva perspectiva de la geometría, la creencia de que las matemáticas son una forma de explicar el mundo real, y su independencia de nuestras intuiciones (pues el espacio y el tiempo son intuiciones), se generó el choque con el marco conceptual de que las matemáticas eran descubiertas por el hombre como plan de entender el universo exterior, al ser una construcción del hombre (Falk, 2012). En resumen, la geometría euclidiana ya no sirve de modelo para poder justificar la realidad con las matemáticas y por ende se cae esa creencia que lo único que mantenía el estatus de verdadero eran las matemáticas, como verdad a priori.

Ahora bien, mientras se iba aceptando entre la comunidad matemática la creación de las geometrías no euclidianas y se buscaba la geometría que sí explicara el mundo sensible[111], muchos matemáticos como Gauss apostaron a sustentar las verdades de la matemática sobre los números, es decir sobre la Aritmética. Evidencia de ello, está en un fragmento de la carta a su amigo Friedrich Bessel (1784-1846):

> De acuerdo con mi más sincera opinión, la teoría del espacio ocupa un lugar en el conocimiento completamente distinto del que se ocupan las matemáticas puras. Carecemos en nuestro conocimiento del espacio, de la completa convicción de la necesidad de nuestra geometría y también de su absoluta verdad, qué es común a las matemáticas puras; debemos añadir, humildemente, que si el número es exclusivamente un producto de nuestra mente, el espacio tiene una realidad fuera de ella y no podemos prescribir completamente de sus leyes. (Kline, 1985, p. 103)

En otras palabras, al parecer la Aritmética puede dar con la verdad en las matemáticas.

[111]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), alumno de Gauss, se propone a averiguar tal geometría, véase (Dou, 1974, pp. 40-47).

Por ende, retomando el final del capítulo anterior, se vio el aporte final del momento respecto al número, este es, la creación de la teoría de conjuntos y los números *aleph*, permitiendo el ingreso al infinito en matemáticas. No obstante, su creador Cantor al definir "conjunto" de una manera tan libre, no fue consciente de que tales libertades iban a conducir a paradojas.

2.1.2. Las paradojas y el golpe del infinito actual contra la intuición

Cantor en su teoría de conjuntos define un conjunto como: "cualquier reunión en un todo M de determinados objetos bien distinguidos m de nuestra intuición o nuestro pensamiento (llamados 'elementos' de M)" (Torreti, 1998, p. 8). Esta definición aunque parezca muy sencilla, acrecentó el problema de la fundamentación (Cavaillés, 1922), pues iba a traer consecuencias desastrosas, es decir, permitir que la intuición entre a tener un papel activo; igualmente, la formación de ciertos conjuntos, generará fluctuaciones en la teoría.

La primera paradoja en aparecer frente a la teoría es la de Cesare Burali-Forti (1861-1931) en 1895. La contradicción de esta paradoja es sencilla como expone Torres (2018):

> Dado que todo conjunto de números ordinales está bien ordenado, al conjunto Ω le corresponde un número ordinal α. Dicho ordinal tiene dos propiedades: es un elemento de Ω (pues Ω contiene a todos los ordinales) y es mayor que cualquier elemento de Ω donde se infiere que él es mayor que él mismo: $\alpha < \alpha$. Esto contradice el hecho de que $\alpha \nless \alpha$, algo que se demuestra en la teoría. (p. 174)

Esto es solo una muestra, que efectivamente la teoría tendría problemas desde el comienzo, pues la definición de conjunto tiene demasiadas libertades que permiten la formulación de conjuntos inconcebibles desde la lógica, así como la famosa paradoja de Russell, que es una de las más atractivas y que hará su aparición después. Otra paradoja la encontró Cantor en 1899, la cual tiene que ver con los cardinales; esta, enunciada en palabras de Torres (2018) dice:

> Considérese el conjunto de todos los conjuntos, digamos M. Por el teorema de Cantor, $\overline{\overline{\mathcal{P}(M)}} > \overline{\overline{M}}$. No obstante, como todos los conjuntos pertenecen a M y $\mathcal{P}(M)$ es un conjunto de conjuntos, $\mathcal{P}(M) \subset M$, de donde se sigue que $\overline{\overline{\mathcal{P}(M)}} \leq \overline{\overline{M}}$. Esto último contradice el hecho demostrado en la teoría de que si $A \subset B$ entonces no $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$. Por lo tanto, se tiene que $\overline{\overline{\mathcal{P}(M)}} > \overline{\overline{M}}$ y no $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, una contradicción. (p. 141)

De ahí que Cavaillés (1922), comente cierta preocupación por la teoría:

> Por el contrario, con las paradojas descubiertas entre 1890 y 1904 se debía enfrentar un peligro que amenazaba la técnica: la teoría de conjuntos, nacida de un tronco común y con la misma necesidad natural que las otras teorías sólo utilizaba para su desarrollo los instrumentos normales de las matemáticas clásicas. Inversamente, sus resultados se revelaban cada día más valiosos en el análisis y dominios cercanos. (p. 13)

Por lo tanto, si la teoría es buena ¿cómo evitar que la Teoría de conjuntos se derrumbe?, ya que, con ella se pudo crear los números “reales”, y ¿cómo poder justificar las matemáticas con base en la teoría de conjuntos? Entonces es necesario ver, que si la teoría tiene fallas lo importante es cómo resolverlas. Pero antes de entrar en materia, se van a mostrar unos ejemplos en los que el infinito actual choca contra la intuición, empezando por la siguiente paradoja, conocida como paradoja de Galileo, en la que se expone el choque contra la intuición geométrica (Northrop, 1991):

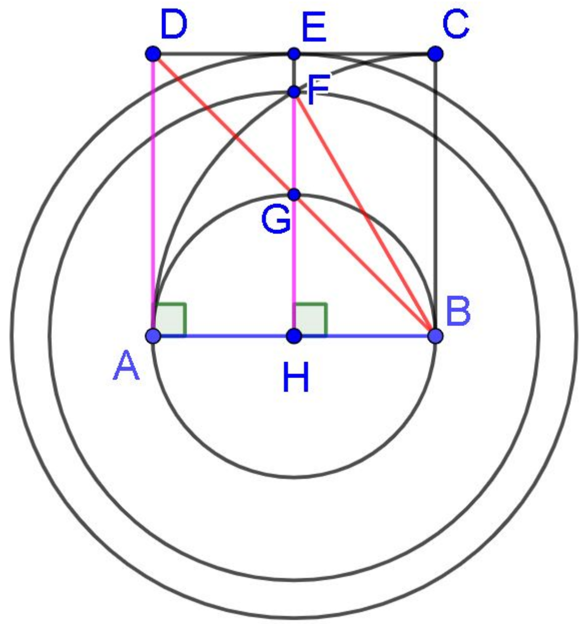


Figura 2.3: Representación de la construcción de la paradoja de Galileo.

Se tienen tres circunferencias concéntricas en H, en las cuales H es un punto de la $\overline{AB}$ y $\overline{HE} \perp \overline{AB}$, con E punto de la $\overline{CD}$. Los puntos F y G son puntos del arco de circunferencia AC y centro B y ircunferencia con centro B y radio HB (véase la Figura 2.3). Pero ¿qué sucede si hacemos que H *se acerque a* ***B*** *lo suficientemente cerca*? (véase Figura 2.4).

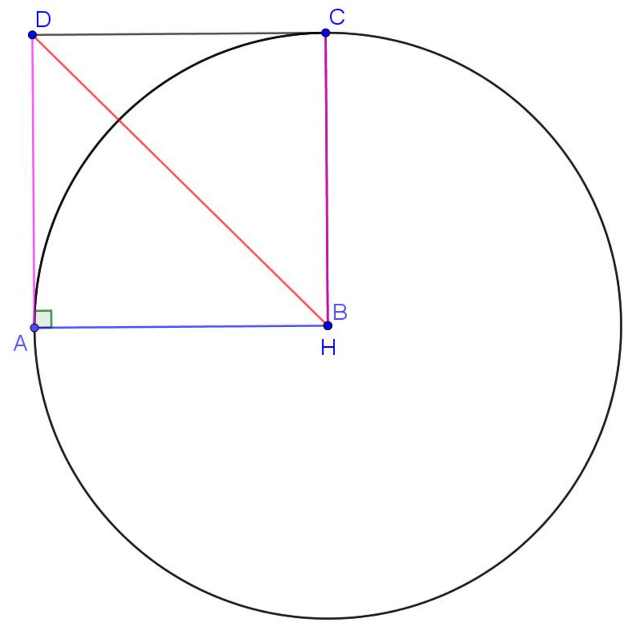


Figura 2.4: Paradoja de Galileo.

Es decir **¡una circunferencia es igual a un punto!**, pero no nos dejemos llevar por el asombro, pues realmente se está encontrando que el área de una circunferencia es cero “en el infinito actual”. Ello, por cuanto dicha circunferencia es un punto “en el infinito actual”, (he aquí el golpe contra la intuición). Por otro lado, el área de la corona circular que se está determinando, se va aproximado a cero, llegándose a transformar en el área de la circunferencia de radio HA, de nuevo “en el infinito actual”. Pero esto es una muestra de cómo el infinito en potencia hacia el actual, trae cosas que para los griegos clásicos no tendrían sentido. De ahí, que siempre hubiera un rechazo a él. No obstante, este ejemplo da la ganancia que finalmente hay que buscar de nuevo cómo fundamentar el concepto de área, pues la intuición geométrica que existía en *Elementos* no concibe la idea anteriormente expuesta. En otras palabras, hay que fundamentar de nuevo la Geometría y ver cómo introducir el infinito para que deas como la anterior tengan cabida dentro de una teoría matemática.

A través del siguiente ejemplo, adaptado de (Northrop, 1991), se verá el infinito “actual” atacando a las rectas paralelas; en otras palabras, se establecerá que no pueden existir dichas rectas.

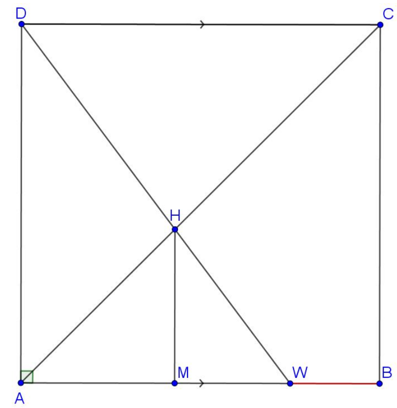


Figura 2.5: Representación de la construcción de la paradoja de las rectas paralelas.

Se ha construido un cuadrado euclidiano $ABCD$, con diagonal AC. Y se ha creado un punto M que esté en la $\overline{AB}$ y $\overline{MH} \perp \overline{AB}$, con H en la diagonal AC. Y un punto W que pertenece a la $\overline{DH}$ (véase la Figura 2.5). Si acercamos a M *lo suficiente a* B se obtiene la paradoja (véase la Figura 2.6).

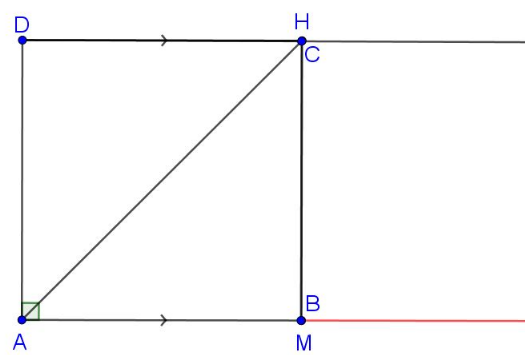


Figura 2.6: Paradoja de las rectas paralelas.

En otras palabras W está en el infinito y la $\overline{DH}$ es ahora la recta $\overline{DC}$, pero la $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. En consecuencia $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$, pero esto no puede ser cierto, porque W pertenece a la prolongación de $\overline{AB}$ con $\overline{DH}$ por el quinto postulado de *Elementos* de Euclides. Por ende $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$ y por otro lado $\overline{DH} \nparallel \overline{AB}$, llegándose a una contradicción que radica en la intuición que la $\overline{DH}$ es la $\overline{DC}$ pero en el "infinito actual", pues se van a cortar siempre en el infinito. Obsérvese que el quinto postulado afirma que, si se prologan al infinito, deben tener un punto en común, en ningún momento afirmó que dicho tuviera que estar en el infinito.

Aunque todo esto empezó con el infinito actual de Cantor, concibiendo un conjunto infinito como una totalidad acabada (el infinito actual), la definición que quizá popularizó al infinito fue la dada por Dedekind (2014): "Un sistema S se llama infinito cuando es similar (32) a una propia parte de sí mismo; en caso contrario se llama S sistema finito" (p. 126)"[112]; es decir otro golpe a la intuición, ya que, Euclides había propuesto como noción común "Y todo es mayor que la parte" (Euclides, 2015a, p. 15), por lo que con Dedekind, se está afirmando "La parte es equivalente a todo" pero en tamaño. Esta idea de Dedekind de definir conjunto infinito[113], es lo que posiblemente da el golpe contundente a la intuición y quizás el más demoledor.

2.1.3. Aritmetización del análisis y la geometría

En los ejemplos paradójicos se empleó la afirmación "lo suficientemente cerca de"; esta noción sigue estando, y esta regida, por la intuición, por lo que una vez más hay que fundamentar tal noción, que se basa en el concepto de infinitesimal (que guarda intuicionalmente el concepto de límite). Este concepto emergió desde la creación del Cálculo, con Leibniz y Newton, que definitivamente se apoya en una idea de número real, pues implícitamente estaba el continuo en acto. En otras palabras hay que "aritmetizar el análisis" (Falk, 2012)[114].

[112]El 32 de la definición dada por Dedekind, corresponde a lo que denominamos función biyectiva en terminología actual. Véase (Dedekind, 2014, p. 122).

[113]Hubo cierta rivalidad entre Dedekind y Cantor por la forma de definir el infinito (Recalde, 2018).

[114]Hay que fundamentar el Análisis con el número

Por fortuna, ya en los *siglos XVII* y *XIII* surgía la necesidad de sustentar más rigurosamente el Análisis, pues se encontraban ejemplos matemáticos como funciones continuas, pero no diferenciables en ningún punto, o funciones como la propuesta por Lejeune Dirichlet (1805-1859):

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{Si } x \text{ es racional.} \\ d & \text{Si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Ello dado que muchas de las funciones se apoyaban en (1) La intuición geométrica de continuidad, la cual visualmente es: aquella curva que se puede trazar con el lápiz sin ninguna interrupción, o (2) que las funciones eran definibles algebraicamente.

Lo anterior incentivó a preguntarse ¿qué es una función? o ¿qué significa que una gráfica sea continua? La respuesta a estos interrogantes la dieron (1): Dirichlet, en 1837, con la definición de que cada valor de x le corresponde un único valor de y en el dominio; y, (2) Cauchy, con la definición de límite de épsilon (ϵ)-delta (δ), propuesta que después fue mejorada por Weirstrass y que es la que se usa habitualmente en los cursos de Cálculo Diferencial: "Una función $f(x)$ tiene un límite L en $x = x_0$ si dado cualquier número positivo ϵ, existe un número positivo δ tal que, para todo x se cumple $|x - x_0| < \delta$, se tiene que $|f(x) - L| < \epsilon$" (Falk, 2012, p. 25).

No obstante, la intuición seguía dando problemas como Falk (2012) dice:

> Así se logró tempranamente una definición adecuada de contunuidad (pues la de Weirstrass es apenas un refinamiento de la de Bolzano); no obstante, a lo largo del siglo XIX se encontraron ejemplos que mostraron ejemplos que otras propiedades, que intuitivamente aparentan ser equivalentes a la continuidad, en efecto no solo lógicamente equivalentes a ella. Por ejemplo, se exhibió una función $(f(x) = sen(1/x))$ que asume todos los valores intermedios entre dos valores determinados al pasar de $x = a$ a $x = b$, pero no

> es continua en ese intervalo. (p. 25)

Esto muestra que a pesar de que se haya logrado definir el límite y por ende la continuidad en el siglo XIX, aún abundaban funciones que impulsan cada vez más alejarse de la intuición geométrica (Falk, 2012), y fundamentar esto sobre el número real, que fue lo que llegó con las construcciones de Dedekind y Cantor.

Ahora bien, si eso sucedió en el Análisis, ¿qué pasa con el Álgebra? Recuérdese que Hamilton desde el álgebra, encontró la primera álgebra no conmutativa:

> Lo que hizo Peacock y sus seguidores no advirtieron, y que pronto se hizo evidente después de la introducción de los cuaterniones, es que no hay una sola álgebra, si no muchas, y que el álgebra construida sobre los números reales y complejos sólo podía ser justificada probado que **los números a los que las letras representaban tenían todas las propiedades atribuidas en las letras representaban tenían todas las propiedades atribuidas a las letras**. (Kline, 1985, p. 191)[115]

Luego, surge esta pregunta: ¿la construcción de Hamilton se debe a la intuición? Pero esto no es cierto[116]. Puesto que los cuaterniones fueron encontrados desde el Álgebra y sustentan las rotaciones del espacio, no fueron obtenidos de manera sintética sino analítica en el plano cartesiano. Sin embargo, la Geometría de Descartes se puede considerar mejora de la de Euclides, pero ella en sí, está arraigada un pensamiento euclidiano. Entonces, ¿cómo introducir el infinito actual en ese plano, ya que, el infinito actual es el pilar de la Teoría de Conjuntos?. La respuesta la encontró Dedekind y Cantor, haciendo un esfuerzo lógico no intuicional: "«Es posible asignar a cualquier punto de una recta un número real único, y recíprocamente, cualquier número real puede ser representado por un punto en la recta y solo

[115]Aquí se refiere al concepto de número de Peacock-Haenkel, la negrilla es puesta por mí, puesto que contiene uno de los fines secundarios de este trabajo.

[116]La discusión netamente algebraica se puede encontrar en (Kline, 1985).

uno». Este es el famoso axioma de Dedekind-Cantor" (Dantzig, 1971, p. 188)[117]. Con este axioma, ya la Geometría analítica pasa a de reposar en el número real; en otras palabras, la recta, el plano y el espacio, ya no son nociones intuitivas sino aportadores de números reales, consiguiéndose un hecho fundamental: la "aritmetización de la geometría" (Dantzig, 1971, p. 189)[118].

2.2. Las respuestas filosóficas a la segunda crisis y sus consecuencias

Recuérdese que la segunda crisis, emergió porque se suponía que la Geometría euclidiana daba sustento a la existencia de los objetos matemáticos y servía para sustentar los modelos físicos. Sin embargo, la creación de las geometrías no euclidianas acabó con dicha creencia, motivando a personas como Gauss a buscar ramas de la matemática, en que la verdad sea más segura inclinándose entonces por la Aritmética:

> En el transcurso de la primera mitad del siglo XIX Carl Gustav Jacobi (1804-51) y Carl Friederich Gauss (1775-1855) habían intentado establecer que la aritmética tiene una posición más sólida en tanto sea intrínsecamente autocontenida, desarrolle sus conceptos básicos con rigor lógico y prescinda de referencia a la intuición. (Falk, 2012, p. 71)

Mientras la comunidad de matemáticos empezaba a dirigirse a esta nueva dirección de la matemática, apareció la Teoría de Conjuntos de Cantor y Dedekind, que serviría para dar la existencia de entidades matemáticas (Recalde, 2018), las cuales se apoyaban en la

[117] Según Dantzig (1971) este postulado solo es una mera conveniencia que ayuda evitar la intuición del espacio euclídeo, estableciéndose así el continuo de los reales de manera lineal, que en sí es toda la discusión sobre la fundamentación de los números reales: el continuo.

[118] Hay detalles y protagonistas que no fueron mencionados aquí, para una mejor comprensión de la crisis del Análisis, vease Epple (2003).

Geometría. Sin embargo, debido a la intuición nuevamente, la teoría empezó a derrumbarse, y si esta llegase a tal punto, se perdería el logro de haber fundamentado por fin los números irracionales, que emergieron con los pitagóricos. Por lo tanto, en vista de no sacrificar los veinticuatro siglos que se tardó en solucionar la primera crisis de los fundamentos, hay que buscar cómo solucionar el ingreso del infinito actual en las matemáticas: la Teoría de Conjuntos; teoría que permitió ingresar el continuo de los números reales y que llevó a salir de la primera crisis para entrar en otra. Surgen entonces, las siguientes escuelas, que tratarán de dar el sustento a resolver las paradojas y fundamentar los números naturales, y por ende, a su manera los números reales.

2.2.1. La escuela logicista

Comparo la Aritmética con un árbol que se desarrolla hacia arriba en una multitud de técnicas y teoremas mientras que la raíz se adentra en las profundidades.

Gottlob Frege

Como se mencionó en la introducción, Kant estaba tratando de justificar la necesidad de las verdades matemáticas, las cuales eran dependientes de la geometría. Sin embargo, había otra corriente filosófica, el empirismo, cuyo representante era Jhon Stuart Mill (1806-1873), quien afirmaba que las verdades matemáticas son a posteriori; a todas luces, la contra parte de Kant.

Precisamente así es como Gottlob Frege (1848-1925) encuentra el ambiente de discusuón sobre las verdades matemáticas (Kenny, 1997).

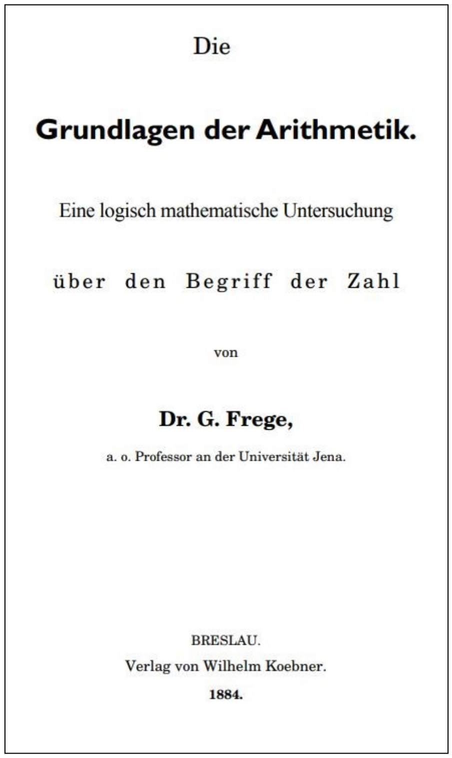
A raíz de los comentarios entre Mill y Kant, Frege encuentra que ya para su época los matemáticos no comprenden algo a nivel básico (Kenny, 1997). Por ende, para Frege, algo a nivel básico es preguntarse lo más "elemental": ¿qué es el número?[119]. Escribe así un documento titulado "*Die Grundlagen der Arithmetik* (véase Figura 2.7)"[120], mejor conocido como "*Los fundamentos de la Aritmética*", en el que su meta es sustentar la tesis logicista "la Aritmética es reducible a la Lógica" (Frege & Imbert, 1972)[121], es decir, definir los números naturales en términos lógicos, ya que las demás construcciones matemáticas se podrían fundamentar con base en los números naturales[122].

[119]Sin embargo, hay autores, como Brunschvicg (1945), que afirman que la filosofía de las matemáticas surge desde la escuela pitagórica. Pero hay autores, como el profesor Javier de Lorenzo, que afirman que la filosofía de la matemática empieza con Frege.

[120]Una espectacular biografía de Frege, se puede encontrar en Mosterín (2000). Para profundizar más en el logicismo, véase Heijenoort (1967).

[121]Dicha tesis ya venía siendo motivada por anteriores trabajos como *conceptografía*, trabajo que permite el salto de la forma lógica de Aristóteles (sujeto-predicado) a la función y argumento. En dicha obra se encuentra la mejora de un lenguaje de primer orden a uno de segundo orden, pues ya se puede "cuantificar sobre objetos". De allí que se le puede dar el título a Frege como el "segundo padre de la Lógica", ya que el primero fue Aristóteles.

[122]Para hacer énfaticos en la importancia de la obra de Frege, dice Pérez (2002): "y que todo profesor de matemáticas debería leer una y otra vez como si se tratara de un clásico de la música, tipo la 9ª sinfonía de Beethoven" (p. 24).



Die

Grundlagen der Arithmetik.

Eine logisch mathematische Untersuchung

über den Begriff der Zahl

von

Dr. G. Frege,

a. o. Professor an der Universität Jena.

BRESLAU.

Verlag von Wilhelm Koebner.

1884.

Figura 2.7: Imagen del libro Fundamentos de la Aritmética de Frege, tomada de (Frege, 1884)

Retomando, en los comentarios de Kant y Mill sobre las verdades de matemáticas, encuentra Frege que son analíticas a priori y no sintéticas, como afirmaba Kant, no sin criticar la postura de Mill. No obstante, según Rossi (2015), Frege rediseño los términos analítico y sintético: el que una afirmación es analítica si se puede probar acudiendo a principios lógicos (es decir a priori), mientras que es sintética, si requiere verificación empírica. De ahí, la cercanía Frege con Leibinz, en la postura analítica, pues la negación de una proposición analítica implica contradicción (Körner, 1967).

El que Frege se haya motivado a hacer ese cambio afirmado por Rossi, se debe a que Frege se pregunta ¿son demostrables las fórmulas numéricas? Y pone el ejemplo: "135664+37863=173527"?, preguntándose inmediatamente si tal afirmación es evidente (Frege & Imbert, 1972, Capítulo 1)[123]. Sin embargo, según Frege, ante la negativa respuesta de la pregunta propuesta, Kant se ve forzado a denominarlas indemostrables y sintéticas, pero sin el rótulo de "axiomas" por la infinitud que hay de ellas. ¿Pero por qué la indemostrabilidad? A lo que Frege responde:

> Kant quiere ayudarse con la intuición de dedos o puntos, con lo cual cae en el peligro de hacer que estos enunciados aparezcan como empíricos, en contra de su propia opinión; pues la intuición de 37 863 dedos no es, en caso, una intuición pura. La expresión «intuición» tampoco aparece apropiada, pues ya solo 10 dedos, según las posiciones relativas que ocupen entre sí, pueden producir las más diversas intuiciones. (Frege & Imbert, 1972, pp. 29-30)

Y añade Frege: "que Kant pensaba sólo en números pequeños. Entonces las fórmulas para grandes números serían demostrables, mientras que para números pequeños resultarían inmediatamente evidentes para la intuición" (Frege & Imbert, 1972, p. 30).

Ahora, respecto a Mill, un simple comentario de Frege acaba con el enunciado de que el número es sintético. Mill apoyaba que el conocimiento matemático fuera por definiciones; la propuesta de Leibniz[124]:

> Parece que Mill opina que las definiciones $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, etc., no deberían hacerse mientras no se hubiesen observado los hechos mencionados por él. Es verdad que no se debe definir 3 como $(2+1)$, si previamente no se ha asociado a $(2+1)$ algún sentido. Pero la cuestión es saber si para ello es necesario observar esa colección y su descomposición. El número 0 sería entonces enigmático; pues hasta ahora nadie ha visto o a tocado 0 guijarros. Sin duda, Mill explicaría el 0 como algo sin sentido, como

[123]Pues apunta Frege a mantener la separación entre hechos concretos que cumplen los números que las leyes generales que los mismos satisfacen; por ejemplo, la propiedad asociativa de la suma.

[124]La intención de Leibniz es "fundamentar la ciencia en definiciones" (Frege & Imbert, 1972, p. 32); sin embargo, la crítica de Frege a Leibniz se puede encontrar en (Frege & Imbert, 1972, pp. 29-31).

> un mero modo de hablar; los cálculos con 0 serían un mero juego con signos vacíos, y única maravilla sería que de esto resultase algo razonable. Pero si estos cálculos tienen un significado en serio, el propio signo 0 no puede ser totalmente sin sentido. Y surge la posibilidad de que $2 + 1$, de manera análoga al 0, pudiera tener algún sentido, incluso si no se observará el hecho mencionado por Mill. (Frege & Imbert, 1972, pp. 33-34)

Ahora bien, la construcción del concepto de número, lo va hacer siguiendo las siguientes tres directrices, que es como se desenvuelve su obra:

- Hay que separar lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo.
- El significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo enunciado, nunca en las palabras aisladas.
- Siempre tener presente la diferencia entre concepto y objeto (Frege & Imbert, 1972, p. 20)[125].

2.2.1.1. Concepto de número de Frege

Para empezar a establecer el concepto de número de Frege, hay que empezar por considerar el lugar de su aparición frente a un contexto:

> Cuando frente al mismo fenómeno exterior puedo decir, con igual verdad: «esto es un grupo de árboles» y «esto son cinco arboles», o bien «aquí hay cuatro compañías» y «aquí hay 500 hombres», en tal caso, no se modifica ni lo individual ni la totalidad, el agregado, sino solo mi denominación. Pero esto sólo es un síntoma de que se ha remplazado un concepto por otro. Con ello se nos sugiere, responder la pregunta del parágrafo anterior, que al asignar un número se afirma algo sobre un concepto. Cuando

[125] Las conclusiones de esto se puede encontrar en (Frege & Imbert, 1972, pp. 72-79).

> digo: «Venus tienes 0 lunas», no es que haya allí ninguna luna o agregado de lunas del que se pudiera afirmarse algo; pero al concepto «luna de Venus» se le atribuye una propiedad, a saber, la de que nada cae bajo el. Si digo: «del coche del Kaiser tiran cuatro caballos», atribuyo en número cuatro al concepto «caballo que tira del coche del Kaiser» (Frege & Imbert, 1972, pp. 72-73)[126].

Al respecto del ejemplo propuesto por Frege, dice Falk (2012):

> Por medio de este enfoque se establece que es consecuente decir 'el número 0 pertenece a un concepto' o 'el número cuatro pertenece a tal concepto', se ha dilucidado el uso de la frase 'número que pertenece a' pero no se ha logrado establecer, en efecto, los números como objetos autosuficientes que se pondrían volver a reconocer en otro contexto. (p. 78)

Sin embargo, "pertenecer a un concepto" puede traer ciertas dificultades, por ejemplo: "cuatro corceles tiran del carruaje del Kaiser", es el mismo concepto de "cuatro caballos tiran del coche del Kaiser". Entonces se reconoce que el "mismo número" es decir cuatro, pertenece al mismo concepto: "caballo que tiran del coche del Kaiser", y es el mismo concepto de "corcel que lleva el carruaje del Kaiser". Por lo que hay que definir esa "igualdad entre conceptos"; así se llega al concepto de número de Frege. Para empezar, lo hace estableciendo una función biyectiva en "la clase[127] de los conceptos" (Frege & Imbert, 1972, p. 7).

Dicha relación biyectiva es "El concepto P es *equinumerable* (similarmente numerado) con el concepto Q si y solo sí hay una biyección[128] entre los objetos que caen bajo P y los elementos que caen bajo Q". Cuando afirma que son los objetos que caen bajo P se refiere a "pertenecen o satisfacen al concepto P".

[126] La pregunta en cuestión es ¿de que decimos algo cuando damos un número? (Frege & Imbert, 1972).
[127] Para evitar confusiones se acuerda el término "clase" análogo al de "conjunto".
[128] Advierto que se usa la terminología actual, pues en la época de Frege, no se disponía del término biyectivo.

Ahora aprovechando que la función biyectiva; es en realidad una relación de equivalencia, esta genera una partición en la clase de los conceptos, resultando que cada clase de equivalencia es el cardinal que le corresponde a dicho concepto (Frege & Imbert, 1972); cada clase de equivalencia se debe entender como "El número que corresponde a un concepto P es la extensión del concepto equinumerable con P"[129]. De ahí que Russell afirme que él encontró una definición equivalente: "Un número es todo aquello que sea el número de alguna clase" (Russell, 1956, p. 25).

2.2.1.2. La paradoja de Russell

Si se observa de lejos las definiciones de número de Russell y Frege, no parecen ser similares, dado que una clase y un concepto son objetos diferentes (por ahora). Pero después las construcciones coinciden "y más tarde en el *Grungesetze* Frege remplazará concepto por conjunto" (Falk, 2012, p. 81). Es ahí, en esta época, cuando Russell encuentra en el segundo volumen de *Grungesetze* de Frege su famosa paradoja, y se la comunica a Frege mediante una carta poniéndole fin a la obra de Frege[130]. Pero hay que profundizar esto, ya que, marcó una pauta para influenciar a Ernest Zermelo (1861-1953) a depurar el principio de comprensión o más conocido como axioma de separación (Recalde, 2018)[131], que fue el talón de Aquiles de la obra de Frege.

Ese talón o punto de quiebre de la obra de Frege, no es más que su quinto axioma o axioma de extensionalidad, que asegura la existencia de clases apartir de la *extensión de un*

[129]O si desea otra definición equivalente es "n es número significa lo mismo que existe un concepto tal que n es el número que pertenece al concepto" (Falk, 2012, p. 79).

[130]Puede leer esta correspondencia en (Falk, 2012, pp. 80-81). No obstante, para comprender el contexto y profundizar más en el tema, véase Heijenoort (1967).

[131]En otras palabras, hay que buscar un fundamento que evite este tipo de eventos u aparición de paradojas. Como el formalismo de Hilbert, generaba la apariencia de ser la teoría que fundamenta las matemáticas, el camino a mejorar la teoría de conjuntos debía ser este. Así logrando poder admitir el infinito de cantor dentro de una teoría matemática.

concepto, es decir, “Toda función proposicional $\alpha(x)$ determina una clase $\hat{x}\alpha(x)$ que es su extensión (en la actualidad dicha clase se denota $\{x|\alpha(x)\}$)” (Torres, 2018, p. 136). Pero no es suficiente para llegar a lo que se desea; establecer la paradoja de Russell. Así que, hay que extender la relación entre individuos (elementos) y clases, por lo que se introduce la siguiente definición: “$y \in z =_{def} \exists P(z = \hat{x}P(x)\&P(y))$” (Torres, 2018, p. 136). Ya con la anterior definición, por fin se puede llegar al axioma de comprensión de clases “$y \in \hat{x}\alpha(x) \leftrightarrow \alpha(y)$” (Torres, 2018, p. 137). Con esto se puede introducir la paradoja esperada como se sigue: por el axioma de extensionalidad, se puede armar la clase $\hat{x}\alpha(x) = x \notin x$. Usando el axioma de comprensión de clases se tiene $y \in \hat{x}\alpha(x) \leftrightarrow \alpha(y)$, en otras palabras $y \in \hat{x}\alpha(x)$ es verdadero, si $y \notin y$ es verdadero, contradiciendo el axioma de comprensión y por ende, no tiene sentido la definición establecida. En otras palabras, el edificio se empezó a derrumbar desde adentro.

Como el trabajo de Frege se vio derrumbado por la paradoja de Russell, debido a la paradoja encontrada en sus *Grungesetze*, el mismo Russell con su director de tesis de doctorado Alfred Whithead (1861-1947), crean *Los Principia Matemática*[132], una obra en tres volúmenes, en la que tratan de corregir la falla de Frege y desarrollar aún más el logicismo[133]. Esta obra, iba a servirle en parte a Hilbert con su propuesta Formalista.

Pero antes de abordar a Hilbert, es interesante ver cómo Russell aborda al número como un objeto lógico, esto es.

2.2.1.3. El Logicismo de Russell

La idea que hay detrás de la propuesta de Russell será pues hacer una especie de esfuerzo lógico de debilitar en parte la axiomática de Peano. Para ello, Russell reflexiona en

[132]En el libro de Russell aquí referenciado, se pueden ver las definiciones de número racional y entero. Que en sí son muy semejantes al método genético, claro, con otras definiciones.

[133]Esto se puede entender como: “hay una falla en la lógica hay que mejorarla, y así proteger la teoría de conjuntos”.

parte de los términos “0” y “sucesor”, concluyendo que en esencia la “inducción matemática” es la clave de todo:

> ¿Qué números pueden alcanzarse dando los términos «0» y «sucesor»? ¿Es posible definir de algún modo toda clase de números? Obtenemos 1 como el sucesor de 0; 2 como el sucesor de 1; 3, como el sucesor de 2; y así sucesivamente.
> Ahora se trata de sustituir este «y así sucesivamente» por algo menos vago e indefinido. Podríamos tener la tentación de decir que «y así sucesivamente» significa que el proceso de pasar al sucesor puede repetirse *cualquier número finito* de veces; pero el problema que nos ocupa es dar una definición de «número finito», y por tanto, no debemos incluir esta noción en nuestra definición. Esta no debe presuponer que sabemos qué es un número finito.
> La clave de este problema está en la inducción matemática. (Russell, 1956, pp. 27-28)

Como la clave de todo está en la inducción matemática, Russell se pone a plantearla en términos lógicos y la reduce a una definición. Y para complementarla va estableciendo algunas propiedades mediadas por definiciones (ser hereditaria, inductiva, posterioridad) y llega a la definición: “Los «números naturales» son la posterioridad de 0 con respecto a la relación «antecesor inmediato» (que es la inversa de «sucesor»)” (Russell, 1956, p. 29).

Y, finalmente, con la definición dada por él de número, define al cero como “0 es la clase cuyo único miembro es la clase nula o vacía” (Russell, 1956, p. 29). Por lo que ya tiene la noción de número natural, que está implícita en su definición de número, el cero y la inducción matemática, reducidas a definiciones logra definir el sucesor[134]. Con ello, hace un esfuerzo para traer la axiomática de Peano y reducirla lógicamente; en otras palabras, logra seguir con la tesis logicista.[135].

[134]Ver (Russell, 1956, p. 29).

[135]Para profundizar más en el tema, véase (Falk, 2012, Capítulo 4). Ahí encontrará un análisis de las fallas

Ahora sí la puesta de Hilbert, es decir una postura axiomática, que evoluciona en Formalismo.

2.2.2. La escuela Formalista

Nadie podrá expulsarnos nunca del paraíso que Cantor creó para nosotros.

David Hilbert

La escuela formalista tiene su representante en David Hilbert (1862-1943). Al igual que el logicismo, busca sustentar las matemáticas desde la Aritmética (Falk, 2012). Si para los logicistas, la idea es reducir los números naturales a nociones lógicas y así poder construir las demás aritmética con base en ellos, para Hilbert la idea es escribir axiomáticamente las matemáticas. Como es bien sabido, en esa búsqueda para fundamentar las matemáticas, logra hacer la hazaña de fundamentar la Geometría mediante cinco grupos de axiomas. Según Recalde (2018) Los *Fundamentos de la geometría* son el comienzo de entender la axiomática matemática en la época contemporánea. Sin embargo, ¿qué es la axiomática?, ¿cómo surgió?[136]

Al parecer quien tenía la idea clara de empezar a axiomatizar la Geometría fue Moritz Pasch (1843-1930), de la escuela italiana, a la cual también algunos matemáticos pertenecieron ($v.g.$ Mario Pieri (1860-1913) y Giuseppe Peano (1858-1932)). Pash es quien aclara las primeras nociones de una axiomática; en el caso de la geometría dice:

de esta puesta filosofía, con eso se hará el "acuerdo" que el logicismo no es suficiente para fundamentar la Aritmética.

[136]Una espectacular introducción se puede encontrar en Blanché (1965) y para profundizar ver Cavaillés (1922).

> Por otra parte, si la Geometría ha de ser realmente deductiva, el proceso de deducción debe ser, en efecto, independiente del *carácter* del concepto geométrico, como debe serlo de las figuras; solamente pueden tenerse en cuenta las *relaciones* entre los conceptos geométricos establecidas a modo de definiciones en los teoremas utilizados. En el curso de la deducción es lícito y útil, pero en modo alguno necesario, pensar en la significación de los conceptos geométricos que se presentan; de tal modo, que precisamente cuando esto se hace necesario, de ello resulta lo defectuoso de la deducción y (si los defectos no desaparecen por modificación del razonamiento) la insuficiencia de los teoremas que, como medio de demostración, se habían antepuesto. (Pash, 1913, p. 139)

Continuando con las preguntas mencionadas anteriormente, Recalde (2018) afirma que hay cuatro tipos de axiomática: intuitiva[137], abstracta[138], formal[139] y formal-abstracta[140] (Recalde, 2018, pp. 401-402).

Pero antes de abordar el concepto de número de Hilbert, se expondrán los cinco axiomas de Peano, y el dilema que encontró Russell en ellos.

2.2.2.1. Axiomas de Peano

Los axiomas de Peano, están expuestos en su obra *Arithmetices Principia Nova Método Exposita en 1889*, pero la versión completa la desarrolló Edmund Landau (1877-1939), en 1929 (Luque, Jiménez y col., 2013)[141]. La axiomática en terminología actual es 0 sucesor,

[137]La axiomática intuitiva es aquella en la que la intuición juega un rol muy activo; sus definiciones y axiomas son también de este estilo. El ejemplo más claro es *Elementos* de Euclides.

[138]Un ejemplo de ello es la axiomática que propone Apostol en su libro de Cálculo, en el que claramente, los números reales son definidos como elementos de un conjunto que satisface unos axiomas, como campo u orden o la axiomática de Hilbert de los números reales que se expondrá.

[139]Un ejemplo de ello es la Geometría de Hilbert, en la que los objetos, aunque tienen un comportamiento intuitivo, como se relacionan, se sigue por los axiomas.

[140]En esta axiomática, lo que prima es el cálculo simbólico, en el que los símbolos de dicho cálculo no tienen algún significado intuitivo.

[141]Hay un gran tratamiento de esta axiomática en (Luque, Jiménez y col., 2013, pp. 213-227).

y número natural como términos primitivos y axiomas:

1. 0 es número natural.
2. El sucesor de cualquier número natural n es un único número natural n^+.
3. Dos números naturales diferentes no tienen el mismo sucesor; en símbolos, si $k \neq n$, entonces $k^+ \neq n^+$.
4. 0 no es el sucesor de algún número.
5. Si A es una propiedad tal que
   i. 0 tiene la propiedad A.
   ii. Siempre que un número natural n tiene la propiedad A, entonces n^+ también cumple la propiedad A. (Luque, Mora & Páez, 2013)

Esta forma de definir los números naturales, tiene un problema, dice Russell (1956): "En primer lugar, las tres ideas primitivas de Peano-a saber, «0», «número» y «sucesor»-admiten un número infinito de interpretaciones distintas, todas las cuales satisfarían las cinco proposiciones primitivas" (p. 15)[142]. Se pierde la unicidad de la interpretación de los números naturales.

Como ejemplo para ver lo exótico del asunto, se puede definir como "0" al signo 8, número natural, por su significado natural y "sucesor" de manera igual, haciendo que el sucesor de $8^+ = 14$, $14^+ = 20$ y así sucesivamente. De esta manera, se tienen cosas como: $14 + 14 = 14 + 8^+ = (14 + 8)^+ = 14^+ = 20$[143], que para alguien que no distingue la teoría afirmaría que se está equivocado, porque les atribuye a los signos su significado usual[144]. Claramente este ejemplo satisface los axiomas de Peano. Lo genial de esto es que, se puede entretener haciendo juegos de símbolos y probar nuevas cosas en matemáticas.

[142]"la axiomatización de Peano no es adecuada, a no ser que se atribuya por fuera del sistema formal los significados usuales a los términos primitivos" (Falk, 2012, p. 105).

[143]Se define la suma de manera recursiva: $n + 8 = n$ y $n + k^+ = (n + k)^+$.

[144]Véase (Luque, 2002), para mayor información.

Sin embargo, el comentario de Russell a Peano, desde una perspectiva personal, es que Russell consideraba todavía para su época a aquel conjunto que se enseña en primaria, aquel que siempre iba a tener la misma cara toda la vida. No obstante el mismo Russell encuentra que toda progresión verifica los axiomas de Peano y viceversa, cualquier serie que satisfaga los axiomas es una progresión (Russell, 1956). En otras palabras, las progresiones son un modelo de la axiomática de Peano (Blanché, 1965)[145].

Ahora bien, Hilbert luego de fundamentar de manera rigurosa la Geometría, se pregunta sobre los fundamentos de la matemática y de la Lógica (Hilbert, 1996)[146]. Al respecto, Hilbert, quien conocía el trabajo de Frege, responde que efectivamente la fundamentación de la matemática no puede ser únicamente con la Lógica, sino que debe hacerse por el método axiomático para tratar de evitar las paradojas que se habían descubierto en la Teoría de Conjuntos.

Hilbert, como se comentó, trata de incentivar la axiomática, y reconociendo su logro con la Geometría, empieza a cuestionar sobre el método genético; reconoce que el infinito del método genético puede traerle problemas, al no estar bien fundamentado (Cavaillés, 1922) y decide finalmente proponer una axiomática de los números reales como el mismo afirma: "A pesar del gran valor pedagógico y heurístico que el método genético pueda tener, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento" (Hilbert, 2010, p. 64).

[145] Véase (Blanché, 1965, pp. 35-37).

[146] Según Torres (2018), Hilbert menciona que debe trabajar conjuntamente en las dos para poder dar el sustento a los fundamentos. Véase, además el trabajo espectacular sobre los fundamentos de la geometría en (Giovannini, 2015).

2.2.2.2. Concepto de número de Hilbert

A raíz de lo anterior, Hilbert, proporciona el concepto de número, suponiendo que hay unas entidades que cumplen unos ciertos axiomas[147], los de enlace, cálculo, orden y continuidad. Estos son:

I AXIOMAS DE CONEXIÓN

I.1 A partir de dos números a y b podemos obtener por "adición" otro número c. Simbólicamente, $a + b = c$ o bien $c = b + a$

I.2 Dados dos números a y b cualesquiera, existe un único número x y existe un único número y tales que $a + x = b$ y $y + a = b$

I.3 Existe un número definido por 0 con la propiedad de que, para todo a, $a+0 = a$ y $0 + a = a$

I.4 Dados a y b cualesquiera, podemos obtener por "multiplicación" otro número c. En símbolos $ab = c$ o bien $c = ab$

I.5 Si a y b son números y a es distinto de 0, existen un único número x y un único número y tales que $ax = b$ y $ya = b$

I.6 Existe un número definido 1 con la propiedad de que, para todo a, $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$

II AXIOMAS PARA LAS OPERACIONES

Las siguientes fórmulas son válidas para cualesquiera números a, b y c:

II.1 $a + (b + c) = (a + b) + c$

II.2 $a + b = b + a$

II.3 $a(bc) = (ab)c$

II.4 $a(b + c) = ab + ac$

[147] Según Torres (2018), el método genético no era seguro, pues para esa época, la Teoría de Conjuntos estaba siendo atacada por las paradojas. Por lo tanto, no era confiable aceptar el método genético

II.5 $(a+b)c = ac + bc$

II.6 $ab = ba$

III AXIOMAS DEL ORDEN

III.1 Si a y b son dos números distintos cualesquiera, uno de ellos (por ejemplo, a) es mayor ($>$) que el otro; este último es menor que el primero. En símbolos $a > b$ y $b < a$

III.2 Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

III.3 Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a + c > b + c$ y $c + a > c + b$

III.4 Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $ca > cb$

IV AXIOMAS DE CONTINUIDAD

IV.1 (Axioma de Arquímedes) Sean a y b dos números cualesquiera, $a > 0$ y $b > 0$. Sumando a consecutivamente, puede obtenerse una suma con la propiedad de que $a + a + \cdots + a > b$

IV.2 (Axioma de Completitud) Si al sistema de números se añade otro de sistema objetos, entonces en el nuevo en el nuevo sistema no pueden ser válidos los axiomas I, II, III, IV. En otras palabras, los números conforman un sistema de objetos que tiene la propiedad de hacer imposible una extensión [propia] del mismo, conservando la validez de la totalidad de sus axiomas. (Hilbert, 2010, pp. 65-67)[148]

Pero recuérdese que una axiomática pide tres exigencias a cumplir:

- Ser completa[149]
- Ser consistente[150]
- Ser independiente[151](Luque, Avila y col., 2013, p. 22)

[148]La misma axiomática se puede encontrar en (Hilbert, 1996).
[149]Toda proposición que se realice en el sistema pueda ser demostrada o contradicha.
[150]No se puede inferir una proposición sea verdadera y concluir posteriormente su negación.
[151]No se debe poder inferir un axioma a partir del resto de axiomas del sistema.

En relación con la cuestión de independencia, Hilbert que hay algunos axiomas que son independientes de otros; por ejemplo, la conmutatividad de la suma depende de los axiomas de la asociatividad y de la propiedad distributiva[152].

Respecto a la consistencia Hilbert afirma:

> La demostración de la consistencia del sistema de axiomas no requiere sino de una modificación apropiada de los métodos de deducción usuales. En esta prueba me parece vislumbrar igualmente la demostración de la existencia del agregado *[Inbegriff]* de los números reales o, para servirnos de la terminología de G. Cantor, la demostración de que el sistema de los números reales constituye un conjunto consistente (acabado). (Hilbert, 2010, p. 68)

Además, lo que pretende con esta axiomática Hilbert, es que "cualquier conjunto de entes que satisfaga los axiomas I, II, III y IV es el conjunto de número reales" y, así justificar la expresión "salvo isomorfismo":

> De acuerdo con lo dicho, por conjunto de los números reales no tenemos que entender la totalidad de las leyes posibles según las cuales pueden avanzar los elementos de una sucesión fundamental, sino más bien, como acabamos de decir, un sistema de objetos finito y cerrado de los axiomas I-IV, y con relación al cual ninguna afirmación puede ser válida sino puede deducirse a partir de esos axiomas por medio de un número finito de inferencias lógicas. (Hilbert, 2010, p. 69)[153]

En respuesta a la cita, el mismo Hilbert dice que la consistencia del sistema requiere nuevos métodos de demostración aludiendo a su "metamatemática o teoría de la demostración", por métodos finitos como dice en la última cita hecha en esta sección.

[152]La demostración de este acierto está en (Hilbert, 2010, pp. 67-68).

[153]La independencia de los axiomas de continuidad, permiten establecer la relación con el continuo de Cantor. Al respecto véase (Efímov, 1984, Capítulo 4).

2.2.2.3. Teoría del signo

La teoría de la demostración surge con la necesidad de respaldar los fundamentos de la matemática desde la perspectiva axiomática, ya que la Lógica no está siendo segura al encontrarse paradojas en la Teoría de Conjuntos. El mismo Hilbert promociona la teoría del signo así:

> Si la inferencia lógica ha de tener la seguridad que deseamos, estos objetos deben ser susceptibles de una visión global y completa de todas sus partes, y su postulación, distinción y sucesión debe presentarse ante nosotros de inmediato con los objetos mismos de manera intuitiva, como algo irreductible. Este enfoque, en clara y explícita exposición a Frege y Dedekind, son los signos mismos los objetos de la teoría de los números. Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de manera más segura, puede ser identificado. En el enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no solo de las matemáticas puras, sino de todo el pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: en un principio todo era el signo. (Hilbert, 2010, pp. 99-10)

Hilbert promueve que, con esta teoría, no solo abarcará a las matemáticas, sino a toda actividad humana. Por ejemplo, Hilbert define número 1 como signo y expresiones como $1 + 1$; y establece que estos tienen el carácter de números, para luego usarlos en hacer una axiomática de la teoría de números[154]. Sin embargo, el mismo Hilbert, afirma también que estos numerales carecen de significado si se le atribuye otro significado a este signo (Hilbert, 2010).

[154]Véase (Hilbert, 2010, pp. 89-122).

Infortunadamente, al preguntarse por la completitud de los axiomas, aparece Kurt Gödel, demostrando que todo sistema formal que describa a los números naturales, si es consistente, entonces no es completo. En otras palabras, no puede demostrarse dentro de la misma matemática su propia consistencia; una consecuencia de los teoremas de incompletitud que él mismo desarrolló. Este es el golpe que finaliza el sueño de Hilbert y como consecuencia también prueba que ya no hay verdades absolutas que se puedan justificar lógicamente (Recalde, 2018).

Ahora bien, las escuelas formalistas y logicista[155], trataron de recuperar toda la matemática que existía; sin embargo, esto no tiene que ser la solución a los fundamentos. Brouwer, un matemático que también estaba entrando al mundo del reconocimiento matemático, propuso otra forma de hacer matemáticas que el mismo denomina intuicionista, en el que, se reconoce que hay que objetar el principio lógico del tercio excluido y el infinito actual, para evitar las paradojas.

2.2.3. La escuela Intuicionista

Es por la lógica que demostramos
pero por la intuición que
descubrimos.

Henri Poincaré

La escuela intuicionista tiene como exponente a Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) y que fue desarrollada después, por Hermann Weyl (1885-1955) y Arend Heyting

[155] Se esperaría que se discutiese la construcción por conjuntos de los números naturales; por vía teoría de conjuntos con la axiomática de Zermelo-Fraenkel-Skolem, pues esta es la respuesta vía axiomática a recuperar el edificio matemático creado por Cantor (Recalde, 2018), pero en vista del gran logro de Gödel, no aborde dicha construcción que se puede encontrar en libros de teoría de conjuntos.

(1898-1980). Según Torres (2018) la escuela se basa en las siguientes tesis "radicales":

- Los objetos matemáticos se construyen directamente en la intuición pura, siendo por ello previos al lenguaje y a la lógica.
- Las leyes que rigen el comportamiento de dichos objetos se derivan de su construcción, no de la lógica, como pretenden Russell y los logicistas.
- En la matemática no es admisible ninguna teoría que rebase el marco de lo dable en la intuición, como sostienen Hilbert y los cantorianos. (Torres, 2018, p. 185)

Además de estos principios que caracterizan el intuicionismo, Martínez de la Fuente (1977) agrega otros de carácter filosófico; los cuales están relacionados con el tiempo, y que servirán para entender el continuo intuicionista que se expondrá después:

1) El reconocimiento de una intuición básica como actividad creadora de la mente.
2) Su independencia de la lógica.
3) Su independencia del lenguaje;
4) El reconocimiento de que la matemática intuicionista tiene realidad objetiva, en el sentido de que ella es igual en todos los seres pensantes.
5) La relación de la intuición básica del tiempo. (Martínez de la Fuente, 1977, pp. 4-5)[156]

Aquí con las tesis anteriores descritas, se denota la incompatibilidad de la lógica y de la escuela y el rechazo a los *Aleph* de Cantor. Sin embargo, el que el intuicionista no acepte al infinito actual de cantor, sí acepta el quinto axioma de Peano, es decir, el axioma de inducción. Ello, Ya que este es "intuicional" y su esencia guarda los procesos constructivistas que es la

[156] Véase (Körner, 1967, Capítulo 6).

forma de existencia de los objetos matemáticos de esta escuela[157]; en otras palabras, es un teorema de dicha escuela. Es decir, para los intuicionistas un objeto matemático se construye si solo se puede demostrar en finitos pasos su existencia. Y como consecuencia de ello, tiene el *plus* que los axiomas de Peano, son teoremas (Dou, 1974). En otras palabras, los números naturales existen a la intuición propia del matemático.

Sin embargo, esto genera un dilema, pues plantea el siguiente interrogante: ¿cómo pueden hacer de manera constructiva los números irracionales?, o mejor aún ¿qué pasa con el continuo?, ya que, el sucesor permite crear los enteros y un número racional es el cociente entre dos enteros (Heyting, 2020)[158].

Respecto a los números irracionales, la idea es que las cortaduras de Dedekind va a servir de guía para establecer por medios constructivos a los números irracionales intuicionistas, por medio de acotamientos de números racionales. Pero Brouwer tuvo que mejorar la idea, ya que, al establecer el corte, no hay un argumento o criterio para decidir en qué parte de las tres que establece el corte está el número irracional a encontrar (Heyting, 2020).

Respecto al continuo, la respuesta es que como los intuicionistas no aceptan el infinito actual de Cantor, pues su constructividad al infinito no se puede controlar. Solo se puede aceptar el infinito si se puede controlar de manera constructiva cada miembro creciente de la sucesión en potencia (Martínez de la Fuente, 1977). Y como para Cantor el infinito actual es una totalidad acabada, esto va en contra de los lineamientos de la escuela. Y dado que no se sabe cómo construyó la totalidad de manera finita, hay un choque contra la intuición.

Sin embargo, esto no significa que no exista un continuo intuicionista; es más, Brou-

[157]Esto se puede reconocer en la frase célebre de Leopold Kronecker (1823-1891) "Dios ha creado los números naturales, el resto es obra del hombre", y como los números naturales su esencia es el axioma de inducción que le da la seguridad de sus afirmaciones, por ende, es aceptado en los intuicionistas. A pesar de que para Brouwer, Kronecker era un semiituicionista (De Lorenzo, 2017).

[158]Esta es la traducción del articulo encontrado en (Benacerraf & Putnam, 1983, pp. 52-61), el cual es un documento clásico de la filosofía matemática analítica.

wer va a crear también su propia Teoría de Conjuntos Intuicionista con un toque diferente a la clásica y lograr construir un Análisis Matemático, en el que no intervenga el infinito actual, como dice De Lorenzo (2017):

> Lo que Brouwer pretende es reconstruir de modo intuicionista la matemática, pero una matemática diferente a la considerada clásica. Para ello, y desde el inicio, ha de construir una teoría de conjuntos intuicionista y, a partir de la misma, un verdadero análisis real intuicionista. (p. 62)

Como el principio de los intuicionistas son los procesos constructivistas, veamos las herramientas que Brouwer utilizó para el abordaje del continuo intuicionista, en el que estará en parte el concepto numérico intuicionista.

2.2.3.1. Herramientas intuicionistas

Como se comentó, el principio de inducción matemática es uno de los principios matemáticos aceptados por los intuicionistas; esta es la primera herramienta. Los principios surgen de la experiencia intuitiva, este no puede ser lógico ni formal (Torres, 2018).

Con esto, es claro que, la Aritmética no se puede sustentar axiomáticamente, ya que la intuición existía antes de la formalización. En otras palabras, los números naturales son objetos del pensamiento puro o hacen parte de la intuición (Martínez de la Fuente, 1977); además, hay que recordar que es con base en la Aritmética que se da la reconstrucción del edificio matemático. Esa es la tesis que se quiere desarrollar para evitar la intuición geométrica, consecuencia de la creación de las geometrías no euclidianas.

Ahora bien, para poder construir el continuo, Brouwer instaura lo que se denomina "sucesiones de progresión infinita" (Martínez de la Fuente, 1977) o en otros términos "sucesiones de elección libre" (De Lorenzo, 2017), usando el esquema o prototipo en que va a basar la creación de sus números reales. Es en base a la construcción de números racionales de Cauchy, donde surgen los "generadores de un número real".

Antes de abordar dicha construcción, dice Martínez de la Fuente (1977) respecto a las observaciones de Brouwer, basandose en Heyting[159]: "Brouwer parte de la serie de Cauchy de números racionales. Esta serie representa el continuo de números generadores reales, correspondientemente al concepto intuitivo del continuo, como la posibilidad de una gradual determinación de puntos" (p. 39).

De la afirmación de Martínez de la Fuente respecto a las observaciones de Brouwer de los generadores de números reales, se infiere que esta construcción de los números reales, se apoya en que los números reales "serían creados a la par que transcurre el tiempo, y por ende, no son construidos como una totalidad acabada", sino como un infinito potencial (De Lorenzo, 2017), dada la "posibilidad gradual" que depende del tiempo.

Dada la caracterización del concepto de número real anteriormente descrita, y como la construcción como se apoya en las series de Cauchy, así empieza con su primera definición Heyting: "*Definition 1. A Cauchy sequence of rational numbers is a real number-generator. Where no confusion is possible, we shall spread briefly of a number-generator*" (Heyting, 1971, p. 16). Posteriormente Heyting (1971), hace el tratamiento matemático, encontrando relaciones de orden y relaciones de cerradura[160].

No obstante, este tratamiento es insuficiente para abordar el continuo de los números reales, visto como entidades crecientes potencialmente. Así que Brouwer tiene que incluir más elementos al intuicionismo; por ello, va a introducir la concepción conjuntista intuicionista, para lo cual Martínez de la Fuente (1977) dice: "Un conjunto es una ley que conforme

[159]Obsérvese (Valencia, 2010, p. 596).
[160]Véase (Heyting, 1971, pp. 21-25).

al pensamiento fundamental del intuicionismo permite construir un elemento arbitrario del conjunto (en el sentido de Cantor) con la precisión que se desee." (p. 10). Martínez de la Fuente (1977) aclara y De Lorenzo (2017) que la obtención de conjuntos intuicionistas se da por medio de desarrollos y especies matemáticas.

Esbozaremos la construcción de los generadores de los números reales, que expone Heyting (1971), el cual se hace por el método de desarrollo *(spread)*, en la cual se hacen explícitas las sucesiones de elección, las cuales están regidas por dos reglas o leyes; la primera ley es la que da existencia (posibilidad de construcción) y la segunda la que nominaliza la existencia, permitiendo finalmente nominar a los elementos construidos como "elementos de un conjunto". Estas leyes según Martínez de la Fuente (1977)[161] son:

> 1) Una ley L_1, que permita construir "series de elección" $n_1, n_2, n_3, \ldots$ limitadas o ilimitadas, cuyos términos son números naturales n.
>
> Según la L_1, para cualquier número natural n arbitrariamente elegido, debe poderse verificar si n puede ser elegido como primer elemento de una serie de elección; además la ley debe indicar si el proceso de elección se ha terminado o si puede continuarse. En este caso, nuevamente, debe poderse verificar según L_1, para todo número natural, si puede ser elegido como segundo elemento de la serie de elección y así sucesivamente.
> Se requiere, además:
>
> 2) Una segunda ley L_2, que haga corresponder a todo elemento $n_1, n_2, n_3,\ldots$ un símbolo $S_n, \ldots, S_{n_n}$.
>
> Toda serie de símbolos que responda a ese esquema se llama elemento del "conjunto" obtenido a partir de una serie de elección. (p. 41)

[161] La primera ley de desarrollo, la denota Heyting (1971) por Λ, esta regla tiene la particularidad de particionar las sucesiones de números naturales en sucesiones admisibles o inadmisibles. Mientras que la segunda ley la denota Heyting (1971) por Γ, conocida como la ley complementaria, que es la que permite nominar a los elementos del conjunto, puede verse esto en (Heyting, 1971, pp. 34-35), en (Körner, 1967, Capítulo 6), también hay una explicación detallada del asunto.

Veamos ahora sí, la construcción de los generadores de números reales, encontrada en Heyting (1971)[162]:

> Let $r_1, r_2, \ldots$ designate an enumeration of the rational numbers.
>
> Λ_M: Every natural number forms an admissible one-member sequence; if $a_1, \ldots, a_n$ is an admissible sequence, then $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ is an admissible sequence if and only if $|r_{a_n} - r_{a_{n+1}}| < 2^{-n}$.
>
> Γ_M: To the sequence $a_1, \ldots, a_n (if admissible)$ is assigned the rational number r_{a_n}.
>
> The elements M are number-generators $r_{a_1}, r_{a_2}, \ldots,$ To any real number-generator c a member m of M can be found so that $c = m$; in this sense M represents the continuum of real numbers-generators. (p. 36)[163]

Es decir, esa sucesión de números naturales va a representar un generador de un número real si la sucesión dada por Λ_M con la condición impuesta $|r_{a_n} - r_{a_{n+1}}| < 2^{-n}$, es convergente. Claramente, Heyting (1971) afirma que esta llegase a ser admisible es porque es construible, en otras palabras, que verifique la ley 1 comentada anteriormente.

Con esto solo queda una muestra de los interesantes planteamientos de la escuela intuicionista. Además, esta rechaza el principio lógico del tercio excluido como fue ya dicho, porque este en el infinito no puede dar afirmaciones de certeza verdadera o falsa. Un ejemplo de ello es ¿1234567891011121314151617181920212223 aparece en alguna parte en el desarrollo decimal de π^π? (Cañón, 1993 citado en Castro Chadid y Pérez, 2007, p. 213).

Y la respuesta es clara, pues ¡no!, ya que, ¿existe un proceso constructivo para abordar

[162]Como Heyting (1971) propone como sucesiones de Cauchy a los generadores de los números reales, debe establecer el criterio de convergencia para las sucesiones, el cual es: "Definitión 1: The sequence $\{a_n\}$ of real number-generators is (positively) convergent to limit a, if give any natural number k can be found such that every natural number p, $|a - a_{n+p}| < 2^{-k}$" (p. 30). La misma construcción se encuentra en (Valencia, 2010) en español. Pero he optado por colocarla en el idioma del ingles, por motivos de fidelidad a Heyting.

[163]Dice Heyting (1971) que "si además se coloca a la condición Λ_M cumpla que $0 < r_{a_n} < 1$, entonces los generadores reales x son los $0 < x < 1$" (p. 36).

las cifras de π^{π}? Por lo que no hay seguridad en afirmar que dicha afirmación sea verdadera o falsa.

Con esto se espera haber concluido el trabajo, el cual es el resultado de un largo recorrido histórico de veinticuatro siglos. Se espera que el lector de esta monografía saque sus propias conclusiones. Y se pregunte de nuevo ahora desde la perspectiva de las matemáticas contemporáneas, ¿cambio el concepto de número? o considere de nuevo la pregunta ¿qué es el número?

Conclusiones

Esta monografía permite sustentar que el concepto de número que se mantiene en la actualidad puede llegar a ser la mezcla entre Hilbert-Dedekind-Cantor; método genético y axiomático. La causa se puede ver en la práctica académica y el interés de las personas. Para muchos, las matemáticas pueden ser solo un mero juego de símbolos, que es como se "ridiculiza" la postura de Hilbert (Giovannini, 2015). Pero una cosa no tiene que ver con la otra; la postura de Hilbert se basa, en el que los objetos no interesan, pero sí las relaciones lógicas que hay en ellos. Es por ello que realmente interesa el fundamento de la teoría, independientemente de su implicación material (Torres, 2018). Mientras, que el otro caso solo es favorecer el "proceso mecánico" de hacer operaciones (como suele ser visto usualmente en el aula de clase). Sin embargo, ambas perspectivas tienen algo en común, no interesa la implicación material a la cual se le pueda atribuir. No obstante, sería un ejercicio interesante ver la equivalencia entre la axiomática de Hilbert y Bourbaki que es la que en la actualidad se encuentra en libros de Cálculo como Apostol o Spivak.

En el concepto de Hilbert, los numerales se definen en sumas de 1, pero ontológicamente son diferentes. Pues los únicos que tienen carácter de número son el 1 y el 0, que así lo estipulan los axiomas de conexión; no obstante, este es quizá el medio que permite que confundan el numeral con el número. Pero no hay que olvidar, que el número satisface esos axiomas; del numeral solo se puede afirmar que es un signo, no hay nada más. Por eso advierte Hilbert que cualquier significación diferente a esta otorgada por los axiomas pierden el concepto de número. En otras palabras, el que 1 sea número por axioma, en otro contexto en el que no trate de hacer operaciones con él, su ontología de ser número se pierde.

Por otro lado, el concepto de número de Frege, que alude a "conceptos", naturalmente es diferente al de Hilbert, puesto que ontológicamente el de Hilbert, puede dar una posibilidad sin fin de interpretaciones de los axiomas que él impone, mientras que el concepto de Frege , solo satisfacen un modelo. En otras palabras, se pierde la unicidad del discurso en que habitan dichas concepciones, aunque en ambos exista una lógica que los respalde. Además, el concepto de número Frege, también difiere epistemológicamente del de Brouwer, pues mientras que para Frege el número es un objeto lógico, para Brouwer, dichos números son debidos a nuestra intuición del tiempo (recuerde que contar depende del tiempo). Ahora, el concepto de Hilbert permite introducir al infinito de Cantor, por vía axiomas de continuidad, mientras que la puesta de Brouwer es el total rechazo a la continuidad de Cantor, pues esta continuidad no se puede controlar por la intuición.

Otras consecuencias de esta monografía son:
El proceso de contar permite un vínculo entre el número y la realidad sensible. No obstante, vale la pena reiterar, que estos procesos son "finitos", y sin embargo se afirma que los números naturales sirven para contar. Pero el concepto de número natural abarca como caso particular al "finito", debido a que, por cuestiones o facultades mentales, se puede extender lo finito a lo infinito. Pero esto es, bajo el supuesto que en el infinito numerable debe comportarse así y es lo que Cantor con su Teoría de Conjuntos respecto a ello trata de sustentar.

Es claro que también, en el proceso de contar hay intuiciones o procesos que no se hacen explícitos, como el hecho por Platón en la necesidad de postular como homogéneas las monadas asignadas a lo sensible y así ascender, mediante el número matemático al ideal de número. Sin embargo, hay que tener en cuenta que esto solo es posible debido al tiempo, que es una de las observaciones grandiosas de Aristóteles, cosa que tampoco se tiene en cuenta en el mismo proceso. En otras palabras, se ignora o parece superfluo para ser mencionados e igual el proceso de abstracción.

No obstante, parece ser estos los dos procesos que se empiezan a tener, cuando se inicia a conocer el número. Pero hasta en ese entonces solo tenemos los numerales, que es el medio que nos permite referirnos a la cosa en sí, pero sin ser la cosa (abstracción); hasta ahí, no es número. Cuando empieza la enumeración, que es distinto al conteo (procesos que se pueden confundir porque en acto se hacen de manera simultánea), y se termina de enumerar, es cuando se puede hacer la adición de monadas y construir el concepto de número de Platón y por ende el de Aristóteles. Además, en este proceso se puede detallar el número en acto y en potencia, que son dos concepciones de número que por intuición ignoramos.

Por otro lado, el infinito como concepto ha sido el protagonista en ambas crisis de los fundamentos; primero lo infinitamente pequeño y posteriormente lo infinitamente grande. En ambos momentos se ha tenido la ruptura entre los procesos de contar y medir, generando en el primero la ruptura ontológica que llevó a la consecuencia de la destrucción de la escuela pitagórica. Y es una ruptura ontológica por el hecho que, si todo era número, esa libertad entre el mundo sensible y el mundo abstracto trajo consigo el acierto de que, en la Geometría, hay relaciones geométricas que no son medibles y, por tanto, no son expresables en números. Por lo tanto, el número pierde en su ser, la característica de poder medir todo, ya que hay medidas que no son comprensibles con el número, en contradicción al postulado pitagórico. Y solo el problema iba a estar solucionado por dos factores: el primero, Stevin cuando de nuevo restablece esta ontología (número con magnitud) y, el segundo, cuando Descartes crea "el segmento unidad", permitiendo en el *siglo XIX* la "aritmetización de la Geometría".

Posteriormente con Platón, se entiende que el proceso de contar es muy complejo, pues el establece tres conceptos de número a raíz del proceso de contar: el sensible, el matemático y el ideal. En el ideal, tuvo que postular que las monadas asignadas del sensible al ser operadas por el concepto matemático son homogéneas (de ahí parte lo complejo), pues en caso de no hacerlo, no puede surgir la diferencia de participación del número entre lo sensible y lo ideal. Además, con estos conceptos de números, ofrece cambios epistemológicos y no ontológicos, ya que, para los pitagóricos es con la monada que el uno aparece y en consecuencia los números, es decir, su ontología no cambia. Sin embargo, el cambio es epistemológico porque ya los números no son quienes "participan" de los objetos, si no al revés. Pero mientras que se restablece esta ontología, Platón hace una reflexión del proceso de contar y postulando su universo de ideas.

Un corolario no tan inmediato de este trabajo es que no solo el concepto de número cambió con la segunda crisis de los fundamentos, también el concepto de las matemáticas. Ello, ya que las matemáticas como actividad del hombre han proyectado el dilema: si las matemáticas son construidas por el hombre o son descubiertas por el hombre, es decir el choque entre el empirismo y la intuición, las cuales están reflejadas en las escuelas formalistas e intuicionistas. Esto se debe al hecho de buscar la verdad, algo que se lleva haciendo desde que el hombre empezó a reflexionar.

Referencias

Alfonso, B. (1968). *Númeración y Cálculo* (Vol. 3-34). Síntesis.

Aristóteles. (1985). *ÉTICA NICOMAQUEA ÉTICA EUDEMIA* (J. Bonnet, Trad.). Gredos S.A.

Aristóteles. (1995). *Física* (G. De Echandía, Trad.). Gredos S.A.

Aristóteles. (1994). *Metafásica* (T. Martínez, Trad.). Gredos S.A.

Aristóteles. (1982). *Tratados de Lógica (Órganon)* (M. San Martín, Trad.). Gredos S.A.

Armella, L. (1991). En torno a las nociones de número y variación. *Mathesis*, *7*(2), 189-204. http://mathesis.digital/wp-content/uploads/2018/12/Vol.-VII-No.-2-Mayo-1991.pdf

Benacerraf, P. & Putnam, H. (Eds.). (1983). *Philosophy of mathematics Selected readings* (2.ª ed.). Cambridge, University Press.

Blanché, R. (1965). *La Axiomática* (F. Osorio Altúzar, Trad.). Centro de Estudios Filosóficos Universidad Nacional Autónoma de México.

Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática* (Ciencia y Tecnología Alianza Editorial, Ed.; M. Martínez, Trad.). Alianza Editorial.

Brunschvicg, L. (1945). *Las Etapas De La Filosofía Matemática* (C. R. De Sadoski, Trad.). Lauraro.

Campos, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática* (Vol. 1-2). Universidad Nacional de Colombia.

Cantor, G. (2006). *Fundamentos Para Una Teoría General De Conjuntos Escritos y Correspondencia Selecta* (J. Ferreirós & E. Goméz-Caminero, Trad.). Crítica.

Castro Chadid, I. & Pérez, J. (2007). *Un paseo finito por lo infinito: el infinito en matemáticas*. Pontificia Univiersidad Javeriana.

Cavaillés, J. (1922). *Método Axiomático y Formalismo* (C. Álvarez & S. Ramírez, Trad.). Facultad de Ciencias UNAM.

Collete, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas* (Vol. 1-2). Siglo XXI.

Dantzig, T. (1971). *El número el lenguaje de la ciencia* (F. Lida García, Trad.; 4.ª ed.). Hobbs-Sudamericana S.A.

De Guzmán, M. (2001). Lecciones pitagóricas para el siglo XXI. *Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales: Horizontes culturales*, (1999), 63-72. https://rac.es/ficheros/doc/00326.pdf

De Lorenzo, J. (1998). *La matemática: De sus fundamentos y crisis*. Tecnos.

De Lorenzo, J. (2017). *Matemática e Ideología Fundamentalismos matemáticos del siglo XX*. Plaza y Valdés.

Dedekind, R. (2014). *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la Matemática* (J. Ferreirós, Trad.). Alianza Editorial.

Descartes, R. (1987). *Discurso del método, Diótropica, Meteoros y Geometría* (G. Quintás Alonso, Trad.; 2.ª ed.). Ediciones Alfaguara.

Dou, A. (1974). *Fundamentos de la matemática* (2.ª ed.). Editorial Labor S.A.

Efímov, N. (1984). *Geometría Superior* (J. Tolosa & Y. Murzín, Trad.). Mir Moscú.

Egger, P. (1972). Über die Zahlen bei Aristoteles: Ihr Bau und ihre Bedeutung. *Kant-Studien*, (63), 143-162.

Epple, M. (2003). The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1860-1910. En H. N. Jahnke (Ed.), *A History of Analysis*. American Mathematical Society.

Euclides. (2015a). *Elementos I* (L. Vega, Ed.; M. L. Puertas Castaños, Trad.; Vol. 1-2). RBA Coleccionables S.A.

Euclides. (2015b). *Elementos II* (L. Vega, Ed.; M. L. Puertas Castaños, Trad.; Vol. 2-2). RBA Coleccionables S.A.

Falk, M. (2012). *Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX* (Vol. 1-2). Universidad Antonio Nariño.

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. BRESLAU.

Frege, G. & Imbert, C. (1972). *Los Fundamentos de la aritmética:investigación lógico-matemática sobre el concepto de número* (U. Moulines, Trad.). Editorial Laia, S. A.

Gambra, J. M. (1996). EL NÚMERO EN ARISTÓTELES. *Thémata*, *17*, 45-74.

García, G. (2011). Hipaso de Metaponto: Traducción, exposición y comentario de sus ideas. http://www.inif.ucr.ac.cr/recursos/docs/Revista%20de%20Filosof%c3%ada%20UCR/Vol.%20VII/No.24/Hipaso%20de%20Metaponto%20Traducci%c3%b3n.%20exposici%c3%b3n%20y%20an%c3%a1lisis%20de%20sus%20ideas..pdf

Giovannini, E. (2015). *David Hilbert y los fundamentos de la geometría (1891-1905)*. College Publications.

Gorman, P. (1988). *Pitágoras* (D. Álvarez, Trad.). Crítica.

Haenkel, H. (1867). *Vorlesungen uber die complexen Zahlen und ihre Functionen von Hermann Hankel Theorie der complexen Zahlensysteme*. Leopold Voss. https://archive.org/details/bub%5C_gb%5C_bU9rkSdWlFAC

Hamilton, W. (1831). Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. *17*, 293-423. http://www.jstor.org/stable/30078796

Heijenoort, J. V. (1967). *From Frege To Gödel A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (H. U. P. Cambridge, Ed.). Oxford University, Press, London.

Heyting, A. (1971). *Intuicionism An Introduction* (3.ª ed.). North-Holland Publishing Company.

Heyting, A. (2020). La fundamentación intuicionista de la matemática. (M. G. Fulgonio, Trad.). *Metatheoria*, *10*(2), 73-78. https://www.metatheoria.com.ar/index.php/m/article/download/212/233

Hilbert, D. (1996). *Fundamentos De La Geometría* (F. Cebrían, Trad.; 2.ª ed.). Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Hilbert, D. (2010). *Fundamentos De La Matemáticas* (L. F. Segura, Trad.; 2.ª ed.). Facultad de Ciencias UNAM.

Hopkins, B. (2010). De regreso a la fuente del platonismo en la filosofía de las matemáticas: la crítica de Aristóteles a los números eidéticos. *Areté*, *22*(1), 27-50.

Jones, C. (1987a). La influencia de Arístóteles en el fundamento de Los Elementos de Euclides. *Mathesis*, *3*(1), 375-389.

Jones, C. (1987b). Las paradojas de Zenón y los primeros principios de las matemáticas. *Mathesis*, *3*(1), 3-15.

Jones, C. (1978). *On the Concept Of One As a Number* (Tesis doctoral). University of Toronto.

Kant, I. (2007). *Crítica de la razón pura* (M. Caimi, Trad.). ColihueClásica.

Kenny, A. (1997). *Introducción a Frege* (C. García Trevijano, Trad.). Cátedra.

Klein, J. (1992). *Geek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (E. Brann, Trad.). Dover Publications, Inc.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna: por qué Juanito no sabe sumar* (S. Garma, Trad.). Siglo xxi de españa editores S.A.

Kline, M. (1985). *Matemáticas La perdida de la Certidumbre* (A. Ruiz Merino, Trad.). Siglo xxi de españa editores S.A.

Kneale, W. & Kneale, M. (1980). *El Desarrollo de la lógica*. Tecnos.

Körner, S. (1967). *Introducción a la filosofía de la matemática* (C. Gerhard, Trad.). Siglo XXI.

Luque, C. (2002). EL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL SEGÚN GIUSSEPPE PEANO (C. Luque, Ed.). *Memorias XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética*, 45-85. http://funes.uniandes.edu.co/9114/1/Concepto2002Luque.pdf

Luque, C., Avila, J. & Soler, M. (2013). *Actividades matemáticas para procesos lógicos:razonar*. Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Jiménez, H. & Ángel, J. (2013). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables* (2.ª ed.). Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Mora, L. & Páez, J. (2013). *Actividades matemáticas para procesos lógicos:contar e inducir* (2.ª ed.). Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Mora, L. & Torres, J. (2013). *Actividades matemáticas para procesos lógicos:clasificar, medir e invertir* (2.ª ed.). Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Pérez, J. & Núñez, R. (2015). *Pitágoras y el Pitagorismo (Didáctica Pitagórica)*. Universidad Sergio Arboleda. https://www.usergioarboleda.edu.co/wp-content/uploads/2015/11/13.-Pit%7B%5C'%7Ba%7D%7Dgoras-y-el-Pitagorismo-Did%7B%5C'%7Ba%7D%7Dctica-Pitag%7B%5C'%7Bo%7D%7Drica.pdf

Luque, C., Sánchez, Y. & Jiménez, H. (2018). *De los grupos abelianos al álgebra lineal abstracta* (C. E. Magisterio, Ed.). Universidad Pedagógica Nacional.

Malet, A. (2006). Renaissance notions of number and magnitude. *Historia Mathematica*, *33*(1), 63-81. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086004000928

Martí, M. (2017). La Filosofía De Las Matemáticas De Aristóteles. *Tópicos, Revista de Filosofía*, *52*, 43-66.

Martínez de la Fuente, M. (1977). *El intuicionismo matemático Una fílosofía constructivista*. Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Maz Machado, A. (2005). *Los números negativos en españa en los siglos XVIII Y XIV* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/556/15378184.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Mié, F. (2008). ARISTÓTELES Y EL PROBLEMA DEL CONCEPTO Y LA UNIDAD DEL NÚMERO. *Méthexis*, *21*(1), 81-109. https://doi.org/10.1163/24680974-90000532

Mora, L. & Torres, J. (2004). Concepciones De Estudiantes De Licenciatura En Matemáticas Sobre Números Reales[tesis de maestría]. http://funes.uniandes.edu.co/11142/1/Mora2004Concepciones.pdf

Mosterín, J. (2000). *Los Lógicos* (S. Espasa Calpe, Ed.). ESPASA.

Nahin, P. (2008). *Esto no es real. La historia de i* (J. P. Pinasco, Trad.). Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

Neal, K. (2002). *From Discrete to Continuous The Broadening of Number Concepts in Early Modern England*. Springer.

Northrop, E. (1991). *Paradojas Matemáticas* (R. Ortiz Vázquez, Trad.). Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Ochoa, C. (2002). Del concepto del número en la obra de Euclides (C. Luque, Ed.). *Memorias XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética*, 87-94. http://funes.uniandes.edu.co/9123/1/Concepto2002Ochoa.pdf

Pash, M. (1913). *Lecciones de geometría moderna con adiciones del autor* (J. R. Pastor & J. Álvarez, Trad.). Junta para Ampliación de estudios é investigaciones científicas.

Penrose, R. (2006). *El Camino a la realidad:Una guía completa de las leyes del universo* (J. García Sáenz, Trad.). Debate.

Pérez, A. (2017). *De la influencia del pitagorismo en Platón, o de la influencia de Platón en el pitagorismo* (Tesis doctoral). Universitat De Barcelona. http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/126750/3/AMPG_TESIS.pdf

Pérez, F. (2007). La eliminación de la subjetividad de los fines. Platón y las matemáticas. *Eikasia. Revista de Filosofía*, *12*, 203-236.

Pérez, J. (2002). La aritmetica según Gottlob Frege. Un ejemplo de matemáticas elementales. http://funes.uniandes.edu.co/9104/1/Aritmetica2002Perez.pdf

Porfirio. (1987). *Vida de Pitágoras* (M. Periago Lorente, Trad.). Gredos S.A.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. (s.f.). Diccionario de la lengua española (23.ª ed.). https://dle.rae.es

Recalde, L. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas*. Universidad del Valle.

Recalde, L. (2011). *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica* (G. Arbeláez, Ed.). Universidad del Valle.

Recalde, L. & Vargas, L. (2013). Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales. *Lecturas Matemáticas*, *34*, 131-148. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7177315.pdf

Rossi, J. (2015). Consideraciones generales sobre el concepto de número en los Fundamentos de la Aritmética de Gottlob Frege [tesis de pregrado].

Russell, B. (1956). *Introducción a la filosofía matemática* (M. Bofill, Trad.). Paidós.

Sánchez, J. (2011). Historias de Matemáticas Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones. *G.I.E Pensamiento Matemático*, *1*(2), 1-27. http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/hamilton_y_el_descubrimiento_de_los_cuaterniones.pdf

Seife, C. (2000). *Zero: The Biography of a Dangerous Idea.* Penguin Books.

Smith, D. & Ginsburg, J. (1979). De los números a los numerales y de los númerales al cálculo. (J. Newman, Ed.).

Stevin, S. (1985). *L'Arithmétique*. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1521833c#

Torres, C. (2018). *Hilbert y Gödel: Dos perspectivas de la matemática*. Prensas de Ciencias.

Torreti, R. (1998). *El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía matemática*. Universidad Andres Bello.

Valencia, A. (2010). Una Construcción Alternativa al Continuo de Cantor: El Continuo Intuicionista. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 591-599. http://funes.uniandes.edu.co/1134/1/591%7B%5C_%7DUna%7B%5C_%7DConstruccin%7B%5C_%7DAlternativa%7B%5C_%7Dal%7B%5C_%7DContinuo%7B%5C_%7Dde%7B%5C_%7DCantor%7B%5C_%7DAsocolme2010.pdf

Vera, F. (1970a). *Científicos Griegos* (Vol. 1-2). Aguilar.

Vera, F. (1970b). *Científicos Griegos* (Vol. 2-2). Aguilar.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de Número. *Educación Matemática*, *8*(2), 6-17. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/2/02Waldegg.pdf