

MÚSICA PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

La Música Como Herramienta Para La Enseñanza De Las Matemáticas

Trabajo de Grado

Miguel Angel Villamil Bustos

Modalidad 2: Asociada al estudio de un tema específico

Jorge Edgar Páez Ortegón

Tutor de Investigación

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá 2020

Contenido

Introducción	6
1. Capítulo 1: Contextualización	9
1.1. Descripción del problema.	9
1.2. Pregunta problema	9
1.3. Justificación	10
1.4. Objetivos	12
<i>1.4.1. Objetivo general</i>	12
<i>1.4.2. Objetivos específicos</i>	12
2. Capítulo 2: Marco referencial-teórico	13
2.1. Marco de referencia matemático algebraico	13
<i>2.1.1. Diagrama referencial algebraico</i>	13
<i>2.1.2. Definiciones y propiedades relevantes</i>	14
2.2. Marco referencial Musical	24
<i>2.2.1. Diagrama de referencia musical</i>	24
<i>2.2.2. Definiciones y propiedades relevantes</i>	25
2.3. Relaciones entre los marcos teóricos musical y algebraico.	34
<i>2.3.1. Marco comparativo entre los marcos referenciales de álgebra y música.</i>	34
<i>2.3.2. Marco de teórico musical – algebraico</i>	35
3. Capítulo 3: Metodología	58
3.1. Método de investigación	58
3.2. Población Participante	59
<i>3.2.1. Población estudiantil</i>	59
3.3. Instrumentos y recursos	60
<i>3.3.1. Instrumentos de investigación</i>	60
<i>3.3.2. Herramientas tecnológicas de trabajo</i>	65
3.4. Técnicas y métodos de aplicación de los talleres	68
3.5. Métodos de evaluación	70
<i>3.5.1. Evaluación inicial</i>	70

3.5.2. <i>Evaluación final</i>	71
3.6. Procesamiento de datos	72
3.7. Implementación y desarrollo	73
3.7.1. <i>Evaluación inicial</i>	74
3.7.2. <i>Talleres</i>	74
3.7.3. <i>Evaluación final</i>	77
4. Capítulo 4: Análisis de resultados y conclusiones	78
4.1. Análisis de la construcción de material	78
4.1.1. <i>Estructura</i>	79
4.1.2. <i>Herramientas tecnológicas de experimentación y recolección de información</i>	79
4.1.3. <i>Discusión</i>	80
4.2. Análisis de la información recolectada en la investigación	80
4.2.1. <i>Procesamiento de datos</i>	81
4.2.2. <i>Discusión</i>	86
4.3. Conclusiones	88
4.3.1. <i>Conclusiones de construcción</i>	88
4.3.2. <i>Conclusiones de la investigación</i>	88
5. Anexos y bibliografía	90

Lista de imágenes

<i>Figura 1:</i> Esquema de trabajo algebraico.....	14
<i>Figura 2:</i> Representación algebraica de los coeficientes	23
<i>Figura 3:</i> <i>Esquema teórico musical</i>	25
<i>Figura 4:</i> Símbolo de representación de la velocidad en música.....	27
<i>Figura 5:</i> Representación del conjunto de sonidos en general.....	36
<i>Figura 6:</i> representación musical de la plataforma learningmusic	41

<i>Figura 7:</i> imágenes físicas de una batería	42
<i>Figura 8:</i> Representación gráfica de armónicos y octavas	51
<i>Figura 9:</i> representación gráfica de armónicos sonantes.....	52
<i>Figura 10:</i> Descripción de la relación de frecuencias y notas que registra el oído humano.	55

Lista de tablas

<i>Tabla 1:</i> DBA álgebra grado octavo.....	17
<i>Tabla 2:</i> Niveles de generalización	18
<i>Tabla 3</i> Usos de la variable	22
<i>Tabla 4:</i> Relación de las ocho notas con sus distintas representaciones.....	30
<i>Tabla 5:</i> Relación de las doce notas con sus distintas representaciones.....	30
<i>Tabla 6:</i> Descripción de las escalas.....	31
<i>Tabla 7:</i> Tabla comparativa entre los marcos referenciales de álgebra y música	34
<i>Tabla 8:</i> Parte de la batería.....	43
<i>Tabla 9:</i> Ejemplos de conjuntos rítmicos.....	49
<i>Tabla 10:</i> Escalas y sus relaciones de distancias.....	54
<i>Tabla 11:</i> Sesión 1 Material rítmico de estudio.....	62
<i>Tabla 12:</i> Sesión 2 Material rítmico de estudio	63
<i>Tabla 13:</i> Sesión 1 material armónico de estudio	63
<i>Tabla 14</i> Sesión 2 material armónico de estudio.....	64
<i>Tabla 15:</i> Sesión material melódico de estudio.....	65
<i>Tabla 16:</i> Descripción de la aplicación DaTuner.....	67
<i>Tabla 17:</i> Estructura de la evaluación	71
<i>Tabla 18:</i> Estructura de la evaluación final.....	71

<i>Tabla 19: Relación de gráficas de respuestas con respecto a los conceptos básicos en la evaluación del grupo de control.....</i>	81
<i>Tabla 20: Descripción global de la evaluación inicial del grupo de control.....</i>	82
<i>Tabla 21: Descripción global de la evaluación final del grupo de control.....</i>	83
<i>Tabla 22: Relación de gráficas de respuestas con respecto a los conceptos básicos en la evaluación del grupo de experimentación</i>	84
<i>Tabla 23: Descripción global de la evaluación inicial del grupo de experimentación.....</i>	85
<i>Tabla 24: Descripción global de la evaluación final del grupo de experimentación</i>	86

Dedicado a mi padre por apoyar mi proceso de educación y estudio

A mis amigos que han logrado levantarme con su apoyo

A la música por estar presente como un ente motivacional para el diario vivir.

A las matemáticas por ser un lenguaje de análisis del mundo físico y dar una razón más a esta existencia

A los autores citados en este trabajo por su ardua labor en la construcción de nuevos conocimientos

A mi asesor por guiarme y corregirme en los momentos importantes durante este trabajo

A la Unidad Educativa El Futuro del Mañana por su disposición y apoyo a este trabajo

Y por último a cada una de las personas que han hecho posible que me encuentre Culminando este trabajo.

Introducción

Desde el comienzo de la humanidad, las matemáticas han estado presentes como un lenguaje para comprender el mundo; se les ha relacionado tanto con la manera de entender y organizar ideas como con la interpretación de distintos tipos de fenómenos del mundo físico. A partir de esto, se generan abstracciones que permiten evolucionar las posibilidades del razonamiento humano con el fin de desarrollar habilidades del pensamiento y distintas competencias matemáticas en los estudiantes, teniendo en cuenta la capacidad del análisis de generalizaciones, patrones y regularidades en diversidad de contextos.

Muchos pedagogos en matemáticas han hablado acerca de la necesidad de unir varias disciplinas con el fin de crear nuevas formas de enseñar el área y, de ese modo, tener en cuenta las falencias, errores de entendimiento y los problemas con el aprendizaje de ésta, lo que, a su vez, mejora su desarrollo en la labor docente (Lores, 2011). Estas ideas permiten identificar varias formas de ver el mundo, las cuales, se pueden asociar para construir los conocimientos creados actualmente, en efecto, se puede considerar el hecho que conocimientos mentales -como las matemáticas- y contextos físicos -como la música- tengan alguna relación.

El presente proyecto de grado se realiza a partir del diseño de una secuencia de actividades pedagógicas orientadas a mejorar y favorecer el aprendizaje y análisis de la relación existente entre matemática y música; se aplica en la Unidad Educativa El Futuro del Mañana (UEFM)¹,

¹ El colegio Unidad Educativa El Futuro Del Mañana busca la formación integral del hombre desde su temprana edad. Fundamentalmente en la recuperación y formación de los valores humanos, además de la conservación del medio ambiente. Ubicado en la localidad de Kennedy en la ciudad de Bogotá, enfocándose en el desarrollo de la educación básica y media con el fin de egresar bachilleres que cumplan con los fines de la educación en Colombia.

junto con estudiantes de grado octavo, en los cuales se evidencia especial dificultad para trascender de la aritmética al álgebra.

Se selecciona la UEFM gracias a su propuesta institucional educativa dirigida a la formación integral, haciendo énfasis en el manejo de múltiples disciplinas, como las matemáticas y la música. Precisamente, con la intención de analizar aquellos procesos que permiten la transición de la aritmética al álgebra, se utilizan algunas herramientas propias de la *Investigación Experimental* descrita por Lerma (2009), la cual potencia el desarrollo del pensamiento matemático como estrategia para facilitar dicha transición. A la vez, se propone encontrar nuevos campos de estudio que permitan mejorar la enseñanza de las matemáticas dentro del país, aportando académica y culturalmente con los conocimientos básicos escolares.

Debido a que la música se encuentra presente dentro de la vida humana (Barbosa, 2019), se muestran las relaciones entre ambas disciplinas en un contexto de aprendizaje significativo, lo que permite una aproximación al desarrollo de habilidades del pensamiento variacional. Por lo mismo, se propende por experimentar nuevas herramientas para enseñar las matemáticas y utilizar la música como campo de aprendizaje para aportar nuevas dinámicas que permitan desarrollar habilidades de *generalización* y apropiación de conceptos algebraicos.

En concordancia, es necesario aprovechar las propiedades cíclicas del *ritmo* musical con el fin de crear herramientas para enseñar procesos algebraicos como *la generalización*, el uso de *variables*, *la relación funcional* y *la proporcionalidad* por medio de la abstracción del sentido del oído. Adicionalmente, por medio de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), se utiliza la *armonía* (relación entre frecuencia y sonido) para encontrar algunas de las interacciones que existen dentro del conjunto de las notas musicales. Por último, con el fin de

analizar sonidos físicos, recopilar información de éstos y obtener expresiones algebraicas y generalidades, se implementa un ambiente de experimentación musical² que permite explorar *la frecuencia* (cantidad de ondas generadas por un sonido) con una fuerza cuya magnitud se describe en *decibelios* (db), lo que promueve el uso del oído y el análisis de los sonidos para poder describir las características generales de las canciones.

Finalmente, este documento se encuentra organizado en cinco capítulos: el primero de ellos, se titula *Contextualización*, allí se delimita y justifica la problemática, se define la pregunta central y los objetivos de la investigación. El segundo apartado es el *Marco teórico de referencia*, que describe la construcción de la teoría que permite sustentar la información; la tercera parte, es el diseño de la *Metodología*, que incluye la selección de herramientas de recolección de datos, la población y las técnicas a aplicar dentro de la institución. El cuarto capítulo, se dedica al *Análisis y Conclusiones* en donde se describen los análisis de los datos recolectados, el contraste de la información y argumentos relevantes que se evidenciaron en medio de la investigación.

² <https://learningmusic.ableton.com/> es un ambiente de experimentación virtual que permite crear pistas o sonidos a partir de unos sonidos básicos y cumple con los conceptos generales de teoría musical.

1. Capítulo 1: Contextualización

1.1.Descripción del problema.

Dentro del estudio de la enseñanza en matemáticas, se ha evidenciado un problema muy común en las aulas de clases: el proceso de generalización y su complejidad al dejar de trabajar el manejo numérico y pasar a expresiones con el uso de variables e incógnitas para establecer relaciones matemáticas propias de la transición que el estudiante realiza desde la aritmética al álgebra, pues se encuentran dificultades y errores epistemológicos que impiden su crecimiento intelectual dentro de las ramas de la matemáticas (Castellanos, 2009). Con el fin de impedir tales errores epistemológicos es necesario encontrar nuevas herramientas pedagógicas que permitan abordar el álgebra y conlleven a mejorar el pensamiento variacional descrito por los “*Lineamientos Curriculares*” (MEN, 1998), planteados en los “*Estándares Básicos de competencia*” (MEN, 2006) y desarrollando las evidencias de aprendizaje de los “*Derechos Básicos de aprendizaje*” (MEN, 2016) para el grado octavo.

En consecuencia, este proyecto se enfoca en crear una secuencia de actividades como mediador para identificar generalidades, mostrar y definir conceptos, analizar variables y ecuaciones con un contexto de relación física como lo es la música. Adicional a lo anterior, se pretende usar las TIC como medio de análisis y potenciador de conceptos para el entendimiento del álgebra escolar. Por último, aplicó tal secuencia de actividades y se generó un análisis detallado de lo encontrado en esta experimentación.

1.2.Pregunta problema

¿Cómo diseñar una secuencia de actividades basadas en la música para iniciar con la enseñanza del álgebra a estudiantes de grado octavo de la UEFM de la ciudad Bogotá?

1.3. Justificación

Para el campo de la enseñanza de las matemáticas, es importante resaltar la conexión que existe entre éstas y el mundo físico, puesto que, como señala Sánchez (2015), el hecho de no entender esto genera mayor dificultad para comprender los problemas desde “diferentes puntos de vista” (pág. 16) teniendo en cuenta que la modelación matemática lleva a describir partes del mundo real en términos matemáticos. En este sentido, la música, al ser parte de la realidad, muestra algunas características en momentos reales tales como ritmo, melodía y armonía, los cuales pueden ser descritos en términos matemáticos. En la historia, grandes pensadores de las matemáticas han manifestado conexiones entre esta ciencia y la música, además de una gran influencia de la una sobre la otra. Al respecto, Blázquez (2012), describe algunos argumentos históricos importantes que evidencian la relación que ha existido entre estas dos disciplinas:

«La música es un ejercicio de aritmética secreta, y el que se entrega a ella ignora que maneja números» (Leibniz), «La geometría es una música inmóvil» (Goethe), «La música es un arte terriblemente euclidiano» (Alejo Carpentier), «Tal vez sea la música la matemática del sentido y la matemática la música de la razón» (Puig Adam). (pág. 4 y 5).

Por su parte, Godino (2002), describe el álgebra como una herramienta de generalización que permite encontrar relaciones en el mundo físico y describirlas con un lenguaje matemático. Por lo mismo, la música, al ser un conjunto de sonidos ordenados cuyos elementos están relacionados funcionalmente con respecto al tiempo y poseen características que puede servir de herramienta para describir generalidades, para entregar mensajes y para entender las relaciones físicas del mundo. Cualidades como el ritmo y la melodía son cíclicas, por lo que permiten expresarse en términos algebraicos (de generalización).

De acuerdo con lo anterior, Pachón (2015), resalta la gran importancia que, desde la edad antigua, le dieron los Pitagóricos³ a la música como elemento de análisis y generalización del mundo, para lo que crearon una forma de escritura cíclica y legible compuesta por varios elementos algebraicos, a la cual llamaron *Pentagrama*.

Por otro lado, Contreras (2017), afirma que, en la edad media, cuando se produjo el estancamiento académico en Europa, la música formaba parte importante de la sociedad debido a que era la herramienta básica para enseñar al mundo sobre las matemáticas; puesto que en las iglesias se utilizaban para los cantos gregorianos y los coros con acólitos, aspectos que se consideran la base de la educación en ese tiempo, dado que la iglesia estaba ligada a la educación.

Este trabajo de grado pretende utilizar la música en general como herramienta para instruir temas como ecuaciones, variables, incógnitas, relaciones entre conjuntos y demás. Para ello, a partir de las propiedades físicas de la música (armonía, melodía y ritmo), las cuales, según Merino de la Fuente (2008), derivan del arte combinado entre sonidos en una sucesión temporal y propiedades sensibles de tipo humano (sentimientos), lo que permite crear un conocimiento significativo, relevante y útil para los estudiantes en el momento de solucionar problemas que involucren el álgebra.

Por último, el proyecto funciona como antecedente teórico/práctico para posibles trabajos de grado con respecto al uso de la música como herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas en general.

³ Los pitagóricos fueron los primeros teóricos en describir la relación de los sonidos en el mundo físico.

1.4.Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar una secuencia de actividades basadas en la música para iniciar la enseñanza del álgebra a estudiantes de grado octavo de la UEFM de la ciudad de Bogotá.

1.4.2. Objetivos específicos

- Construir una secuencia de actividades a partir de las propiedades del ritmo, la melodía y la armonía de la música para iniciar el estudio del álgebra.
- Diseñar ciertas herramientas (dentro de las actividades) que permitan potenciar el desarrollo de conceptos tales como la generalización, la relación funcional y la proporcionalidad a partir de las propiedades la armonía, la melodía y el ritmo de la musical.
- Identificar el desarrollo de los conceptos de generalización, variable, relación funcional y proporcionalidad por medio de las actividades construidas con el fin de mostrar la música para enseñar distintos elementos del álgebra.

2. Capítulo 2: Marco referencial-teórico

Este capítulo tiene como objetivo estructurar y recopilar un marco teórico-referencial que permita articular la teoría musical y la matemática con el fin de favorecer el proceso de aprendizaje del álgebra a estudiantes de grado octavo de la UEFM. Se organiza en tres partes con el fin de identificar relaciones entre estas y así potencializar la enseñanza.

2.1.Marco de referencia matemático algebraico

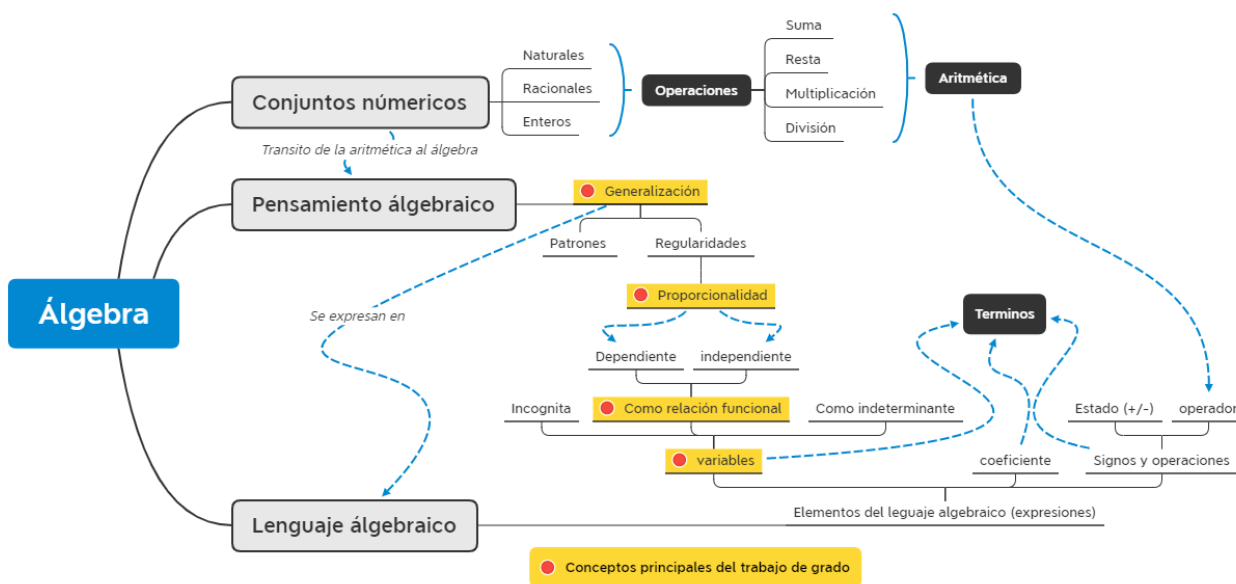
Para el presente proyecto, el campo estudio es la introducción al álgebra, por ende, se pretende recopilar información desde distintas perspectivas que conlleven a desarrollar esta teoría en los estudiantes de grado octavo.

2.1.1. Diagrama referencial algebraico

Con el fin de estructurar las referencias de la teoría algebraica que se tuvo en cuenta para la elaboración de este trabajo se construye un esquema (ver Figura 1) que describe la introducción del álgebra como un proceso trabajado dentro de un conjunto numérico y sus respectivas operaciones.

A partir de lo dicho, se tiene en cuenta la transición de la aritmética al álgebra y se muestra la descripción del pensamiento algebraico haciendo énfasis en el trabajo de generalización realizado analizando regularidades y patrones, continuando con su forma de representación, teniendo en cuenta las expresiones algebraicas como son: los tipos de variables, coeficientes, signos y operaciones, además de términos y herramientas importantes dentro del lenguaje de comunicación algebraico. El esquema realizado se muestra a continuación:

Figura 1: Esquema de trabajo algebraico.



En este esquema se evidencian los temas a trabajar y su estructura teórica referencial. Fuente: Elaboración propia.

2.1.2. Definiciones y propiedades relevantes

En el mundo de las matemáticas, dentro del estudio de la generalización, se debe tener en cuenta el manejo de distintos conjuntos numéricos y la manera en que éstos se desenvuelven en el mundo real y en la vida cotidiana. Por otro lado, en la música, se puede trabajar con todos los conjuntos numéricos que se aprenden en la escuela, sin embargo, el presente proyecto se centra en los conjuntos numéricos naturales, enteros y racionales.

En este punto, cabe recordar a Fernández (1998), quien resalta la diferencia entre los lenguajes matemático y algebraico, así como la importancia de conocer uno a partir del otro. En ese orden de ideas, es necesario definir los *Conjuntos numéricos*, los cuales, según el “Algebra abstracta” de Fraleigh (1987), son una agrupación de elementos bien formada, en caso de que esta agrupación no tenga elementos se dice que es vacía.

Ahora bien, supongamos que se trabaja con el conjunto de todos los números, entonces el texto describirá como clasificar ciertos números por sus propiedades, es decir: los números naturales, como cualquier sistema de objetos perceptibles que se usan para informar del cardinal de un conjunto y para ordenar sus elementos (Godino, 2002). Estos números son los que percibimos en la naturaleza sin particiones y permiten abstraer las cosas como un todo; los *números enteros* se entienden como el conjunto simétrico determinado por ciertos elementos y sus elementos contrarios, se simbolizan por el signo más (+) o menos (-) según corresponda.

En ese sentido, Luque (2014), se refiere a los *números racionales* como todo número que se pueda escribir de la forma $\frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$, además este conjunto está formado por todas sus clases de equivalencia y sustenta las operaciones de adición sustracción, multiplicación y división a la vez que describe el conjunto de los números que no se pueden describir de esta forma, los cuales se han denominado *irracionales*. Por último, el texto “Campo ordenado” (Yañez, 2011), define el conjunto de los *números reales* como un espacio ordenado completo que cumple con las distintas propiedades de un campo⁴ y este conjunto, a su vez, es la unión de los conjuntos nombrados antes (Naturales, enteros, racionales e irracionales).

Siguiendo los “Estándares básicos de competencia en matemáticas” (MEN, 2006, pág. 86), un estudiante de grado octavo debe manejar hasta los números racionales y sus respectivas operaciones, esto implica que se tiene el conocimiento de números enteros y naturales. Se elige este conjunto numérico debido a que permite identificar fraccionamientos en el mundo físico y así obtener algún tipo de regularidad presente en este. También se tiene en cuenta el conjunto de los enteros encontrados en conjuntos simétricos o con elementos inversos.

⁴ Un Campo es un conjunto con sus respectivas operaciones y características.

Esta parte de conjuntos numéricos pertenece a lo aprendido en los cursos anteriores en la educación básica, también se considera como la parte aritmética que se enfoca en estos conjuntos y sus operaciones; según Martínez (2019), la transición de la aritmética al álgebra genera bastante problemas en la educación básica debido a que no se comprende bien el concepto de generalización, las relaciones funcionales y la utilización de números con letras como un sistema de representación del mundo cotidiano con respecto a generalidades o patrones habituales.

Teniendo claro el significado de los conjuntos a trabajar, es necesario definir *Álgebra y pensamiento algebraico*; en palabras de Godino (2003), “El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas” (pág. 774). La parte de generalización de patrones es de vital importancia para el entendimiento del mundo físico debido a que se encuentran presentes en todo contexto, la música en los distintos aspectos de la armonía, melodía y ritmo posee características de generalización.

En concordancia, Fernández (1998), complementa la anterior definición añadiendo la parte simbólica del álgebra de la siguiente forma: “El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades y, para ello, el uso de símbolos y de expresiones literales se convierte en una herramienta necesaria para la resolución de problemas y la modelización de situaciones diversas” (pág. 1), lo que otorga a la definición un contexto simbólico para su operabilidad.

No obstante, los “Estándares básicos de competencias” (MEN, 2006), definen el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos como el reconocimiento, la percepción, la identificación, la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, este apartado es de vital importancia puesto que es un argumento legal en torno al por qué se le debe

enseñar a los estudiantes a generalizar en el aula e indica una idea intuitiva del tema. Además, en el “Encuentro Distrital de Educación Matemática” del año 2016, se expone el pensamiento algebraico por niveles de generalización, permitiendo así identificar distintas características y formas de generalizar. Por último, los derechos básicos de aprendizaje (DBA) dispuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016) se exponen en la siguiente tabla, que muestra los conocimientos que deben adquirir los estudiantes de grado octavo y cuál debe ser la evidencia del aprendizaje de cada uno:

Tabla 1: DBA álgebra grado octavo

Derecho básico de aprendizaje	Evidencia de aprendizaje
Identifica y analiza relaciones entre propiedades gráficas y expresiones algebraicas, también relaciona la variación y la covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en distintas situaciones de modelado. En este caso se tienen en cuenta un modelo matemático musical.	El estudiante opera con formas simbólicas y las interpreta; relaciona los cambios de variables con respecto a dependiente e independiente; encuentra valores desconocidos en ecuaciones algebraicas; reconoce y representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función del contexto.
El estudiante también propone, compara y usa procedimientos inductivos y de lenguaje algebraica para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones y contextos.	El estudiante opera con formas simbólicas que representan números y encuentran valores desconocidos en ecuaciones numéricas; también cuando reconoce patrones y los describe verbalmente; así mismo, cuando representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas, opera con y sobre valores y además utiliza las propiedades de los conjuntos numéricos para resolver problemas.
Propone las relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza las propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante graficas	Donde el estudiante debe tomar decisiones informadas en exploraciones algebraicas y numéricas o graficas de los modelos usados; y también, relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación

Todos los conocimientos relacionados arriba, se tendrán en cuenta para efectos de este trabajo de grado y se desarrollarán en la relación funcional del sonido con respecto al tiempo y los valores de proporcionalidad del ritmo, armonía y melodía para la comprensión musical.

Los autores mencionados antes, comprenden la generalización como un elemento principal del álgebra, sin embargo, esta labor de generalizar no es tan sencilla; de acuerdo con Corona (2004) “la generalización consiste en transferir y aplicar en otras situaciones la síntesis elaborada, de

manera que sea posible consultar, ampliar y enriquecer el conocimiento adquirido” (pág. 1), a lo que Moreno (2012), agrega “La generalización se contempla como un proceso (no como producto) ante alguna interacción patronal.” (pág. 492). Lo dicho permite identificar que las generalizaciones son expresiones directas de patrones, estos patrones se encuentran dentro de cualquier contexto físico, la tarea de la generalización es reducir estos patrones a un símbolo con el fin de disminuir el campo de análisis y, así, observar otros detalles relevantes que tengan que ver con el contexto.

Respecto a lo anterior, Radford (2006), menciona tres tipos de generalización: la *factual*, que hace referencia a los gestos creados por una persona; la *contextual*, que pretende reemplazar situaciones por palabras clave que permitan sintetizar la información y; la *simbólica*, la cual tiene relevancia en el álgebra. Además, dentro del “Encuentro Distrital de Educación Matemática” (EDEM, 2016) se describen las características anteriormente nombradas y se expone una idea de generalización en niveles de algebrización del 0 al 3 de la siguiente forma:

Tabla 2: Niveles de generalización

Nivel	Características
0	“Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual”
1	“Intervienen objetos intensivos (reglas generales) cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante el lenguaje natural, numérico, icónico o gestual”
2	“Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-litera para referir a los intensivos reconocidos. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.”;
3	Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica litera y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones”
Fuente: Hablando de Generalización (Radford, 2006)	

Esta información es de alta relevancia porque permite identificar distintos niveles para la creación de los talleres y como desarrollar la habilidad de generalización por medio de estos.

Para finalizar, Peña (2005) señala que:

La generalización es la esencia de la matemática y se podría decir que, de las ciencias, desde que el hombre empezó a observar los fenómenos de la naturaleza no se contentó con estudiar solamente casos particulares, su deseo fue mucho más allá, intentar expresar un conjunto de experiencias bajo un modelo, esto es generalizar lo hallado en un caso especial, para un conjunto de casos con características similares. (pág. 37).

Esta definición amplía el concepto dado que indica la relación directa entre la generalización y las ciencias construidas. Es necesario desarrollar esta idea de generalizar con respecto al comportamiento de los elementos de cada conjunto determinado; para ello, se deben identificar *Patrones*, los cuales son definidos por Castro (2010) como aquello que se repite con regularidad en diferentes contextos y que previene que se repita de nuevo.

Adicionalmente, Gelabert (1996), indica que los patrones son sucesiones de signos que se constituyen siguiendo una serie de algoritmos ya sea de repetición o recurrencia. Esta definición es importante puesto que en la música se evidencian los patrones de esta forma, haciendo más fácil que el intérprete logre sintetizar la información y pueda tocar largas sonatas. Así mismo, Merino (2012), indica que los patrones matemáticos están relacionados con una regla general, no solo con casos particulares, por ende, los estudiantes deben tener primero conjeturas básicas y luego probarlas con otros elementos para llegar a las generalidades.

De acuerdo con lo anterior, Pólya (1966, citado en: Merino, 2012) señala que “el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. La idea básica de la noción de patrón es que surgen a partir de la repetición de una situación con regularidad” (pág. 27). Por su parte, Álvarez (2012), entiende la relación de los patrones como un tipo de regularidad que está presente en eventos repetitivos, como son los conjuntos, tablas de

operaciones aritméticas, mosaicos, sucesiones y series de números especiales. Por último, “Los estándares básicos de competencia” (MEN, 2006) indican la importancia entre la regularidad y los patrones de la siguiente forma:

...El estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón. (Pág. 5).

El MEN (2006), en esta descripción, permite dar camino a la definición de *Regularidades*, que, según Gelabert, son un conjunto de procedimientos generales que tienen carácter transversal de los contenidos matemáticos y de otras disciplinas (sinfonías y pasos de danzas). El mismo autor argumenta que, en la gran mayoría de los casos se tiene que el término *Regularidad* es directamente asociado con el término de *Patrón* debido a que en ambos casos existen relaciones de repetición cíclicas; el álgebra se encarga de identificar dichos patrones con letras o símbolos que permitan generalizar estos elementos, además de ser también patrones de comportamiento que permitan el análisis de estos elementos ya generalizados.

Dentro de los estándares de competencia descritos por el MEN (2006), se habla por primera vez de regularidades al tocar el tema del razonamiento lógico, la forma en que éste se encuentra relacionado con la vida humana y como éste se debe potencializar para mejorar los distintos tipos de pensamientos, específicamente, el pensamiento variacional, los sistemas algebraicos y los analíticos. Por su parte, en los DBA planteados por el MEN (2018), se habla por primera vez de este enfoque en el grado cuarto, pero se profundiza en torno a él en los grados octavos y noveno.

El álgebra maneja su propio lenguaje, el cual cumple con ciertas reglas, por lo mismo, es necesario definir las *Expresiones algebraicas* que según Corral (2001), son aquellas que presentan combinación de letras y números con signos y operaciones, al respecto, Sánchez (2010)

añade que son un conjunto de números reales que se combinan con un conjunto de variables representadas por letras más las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Para Godino (2002), las expresiones numéricas (solo con números) y las algebraicas (combinación de letras, operaciones y números), son conjuntos que actúan parecido, sin embargo, el contexto en donde se encuentra cada uno es diferente. Cabe resaltar que, para efectos de la presente investigación, se trabajan las expresiones algebraicas en relación con la música, retomando sus características propias: melodía, armonía y ritmo.

Dentro de este lenguaje algebraico, es importante desarrollar los roles de cada elemento de la aritmética; ya se conoce cómo se comportan los valores numéricos y las operaciones, ahora, es necesario definir el papel de las letras dentro del álgebra, pues de allí surgen y se denominan las *Variables*, para Diez (1998), la variable es un elemento del lenguaje algebraico que comúnmente es una letra y que representa a un número cualquiera. Por otro lado, Godino (2003), afirma que las variables son símbolos que se ponen en lugar de un número en específico o de cierto rango de números.

Así mismo, López (2016), indica que la definición de variable es multifacética (la fase depende de su contexto de uso), por lo tanto, el concepto de variable depende contextualmente de tres perspectivas: la incógnita específica, el número en general y como variable en una relación funcional. De acuerdo con lo anterior, Juárez (2010) recalca la importancia del concepto de variable relacionado con definiciones tales como: símbolo, parámetro, argumento y espacio vacío, entre otros. Por último, “Los estándares básicos de competencia” (MEN, 2006) describen la palabra variable como otro proceso ligado a la generalización y el cuál tiene fundamentos de profundización con respecto a su enseñanza a partir de grado séptimo.

Usos de la variable y su contraste

Dentro del uso de la variable, su representación depende del contexto en cuál se esté usando. Así, varios matemáticos han encontrado distintas maneras de identificar este papel de la variable, según López (2016), se puede establecer la siguiente tabla, en la que se comparan los roles de esta definición, su modo de representación y una ejemplificación de su uso en la vida cotidiana:

Tabla 3 Usos de la variable

Uso de la variable	Definición	Representación algebraica
Incógnita	“Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido, que debe ser determinado considerando las restricciones del problema. Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos. Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas o aritméticas. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.”	¿Pregunta? $\leftarrow x$
Como indeterminadas	“El número general. Requiere que el alumno que sea capaz de: Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas. Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor. Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.”	$3x + x = 0$
Relación funcional	“Las variables en relación funcional. Exigen capacidades para: Reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la variable independiente. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional. Determinar el intervalo de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra. Simbolizar la relación funcional, basado en el análisis de los datos de un problema.”	$y = 3x$
Esta tabla se realiza teniendo en cuenta el texto El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato (López, 2016, pág. 219).		

En ese sentido, Godino (2003) comprende la *Incógnita* como el tipo de variable que se utiliza en álgebra cuyos valores son desconocidos, donde se utiliza el número como si fuera un elemento o argumento conocido, también, delimita las *variables como indeterminadas* cuando se usan en un enunciado en el que son ciertas para todos los números; a su vez, el autor señala que la *variable como relación funcional* sirve para expresar cantidades que varían conjuntamente, lo que

ocurre cuando el cambio en una variable genera un cambio en la otra. Así, el uso de la variable como incógnita, como indeterminadas o como relación funcional permite explorar distintos contextos para abordar el tema de las variables en las aulas de clases.

Adicional a lo dicho, están los elementos numéricos que acompañan directamente a las variables (o letras) dentro de las expresiones algebraicas, éstos se denominan *Coefficientes*, cabe recordar que, el término independiente (el que no se multiplica por alguna variable) es un coeficiente. Según el diccionario de Apolinar (2011), el coeficiente es el número que multiplica a un literal.

Figura 2: Representación algebraica de los coeficientes

$$2x + 3y \leftarrow 2 \text{ y } 3 \text{ son coeficientes de } x \text{ y } y \text{ respectivamente}$$

Fuente: elaboración propia

Por otro lado, en el álgebra de Baldor (1941), se explica el *Factor* como el elemento de repetición de una suma de una variable como, por ejemplo $3p = p + p + p$. También aclara que cuando una cantidad no lleva unidad el valor de este coeficiente es uno.

Godino (2002), resalta la importancia del uso de los símbolos de *operación* (+, -, * y /); el autor afirma que existen dos tipos de contextos en donde están presentes estos “signos” dentro del álgebra: los que describen el *estado* del número (negativo o positivo) y los que describen la *operabilidad* de estos (Suma, resta, multiplicación, división, potencia y radical), debido a la existencia de la repetición de símbolos para la suma y la resta con respecto a el positivo y negativo, se encuentra una relación entre los signos y esta es de tipo multiplicativa. También, es necesario tener en cuenta que se cumple la jerarquía de las operaciones y las leyes distributivas dentro de las operaciones suma y multiplicación.

Finalmente, es importante hablar de *Proporcionalidad* que es descrita por Godino (2003) como una función entre dos variables donde una de las variables está multiplicada por un valor en específico, dichas variables reciben el nombre de *variable independiente* (la que no está multiplicada por el valor específico) y *variable dependiente* (que depende de los valores que posea la variable independiente). El autor es específico al diferenciar si tal proporcionalidad es directa o inversa; cuando es directa muestra que, a medida que la variable independiente crece o decrece (cambia) la variable dependiente recibe este mismo cambio (crece o decrece). Esta definición es de vital importancia para el uso de la armonía en la música, dado que, los sonidos son “sonantes” porque son proporcionales, sin embargo, sobre ello se hablará más adelante en el texto.

2.2. Marco referencial Musical

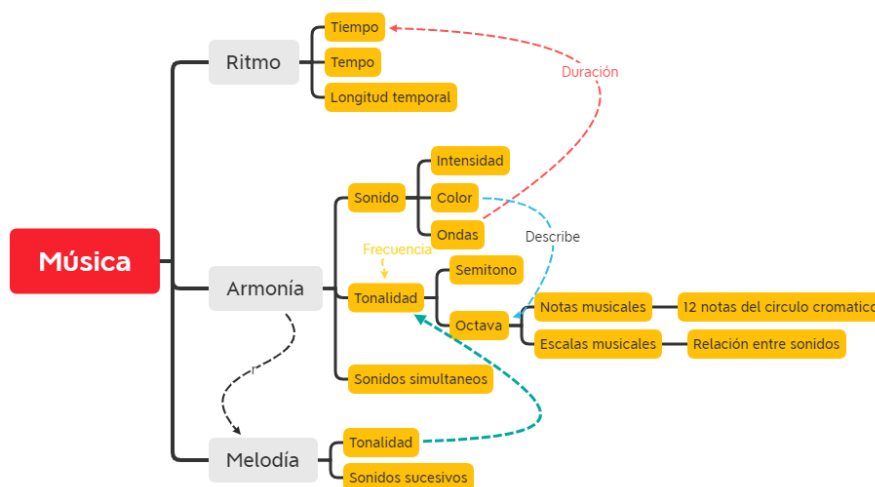
En este punto de la investigación, se recopila información de la teoría musical con el fin de identificar relaciones con las teorías algebraicas y permitir el diseño de una nueva teoría que junte las dos con el fin de implementarlas como insumos para la creación de actividades que desarrollen el pensamiento algebraico utilizando la música como herramienta de enseñanza.

2.2.1. Diagrama de referencia musical

A continuación, se enuncia el diseño del diagrama (ver figura 3) que describe la teoría musical teniendo en cuenta la relación entre ritmo, melodía y armonía, permitiendo la transmisión de sentimientos. A su vez, el esquema muestra las relaciones entre los tres conceptos: el ritmo, basados en sonidos básicos, velocidades y relaciones temporales; la armonía, como las relaciones encontradas con distintas clases de sonidos tales como la intensidad o el color y la melodía, que

es la duración de forma sucesiva y simultánea. Además de la generalización de estas relaciones (conocidas como escalas), las cuales permitieron describir las teorías de la música de hoy en día:

Figura 3: Esquema teórico musical



El esquema evidencia los temas a trabajar y su estructura teórica referencial. Fuente: construcción propia.

2.2.2. Definiciones y propiedades relevantes

Dentro de la vida cotidiana del humano promedio, la música forma parte esencial del ambiente de supervivencia, ya sea en la selva de cemento o en la vida agrícola. Los sonidos musicales y la música provienen de distintas culturas, cada una con sus sonidos peculiares y sus respectivas características. Sin embargo, según Cordantonopulos (2002), la *Música* en general, es el arte de combinar sonidos sucesiva y simultáneamente con el fin de transmitir sentimientos; en donde tales sonidos se representan bajo distintos estilos de composición; además indica varios elementos fundamentales de la música como lo son el *ritmo*, la *armonía* y la *melodía*.

La música contemporánea, en especial, la de tipo comercial, cumple ciertos tipos de estructuras que permiten su clasificación; una de estas características es el ritmo, el cual se compone por los golpes marcados que se encuentran en la música regularmente y reciben el nombre de *Pulso o tiempo* si son intervalos constantes y regulares (Cordantonopulos, 2002). Así

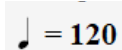
mismo, el documento titulado “Nociones Básicas de Elementos Del Lenguaje musical” publicado por la Universitat Per a Majors (2018), define el ritmo como la característica básica de todas las artes, también afirma que el ritmo es la organización del tiempo en pulsos y acentos que se perciben en alguna estructura, dotando a la estructura musical de un orden.

Por otro lado, Riemann (citado en Sans, 2012), describe que “El ritmo determina el modo de sucesión de las duraciones por medio de unidades de tiempo suficientemente perceptibles y donde los agrupamientos diversos dan nacimiento a fórmulas de orden superior” (pág. 2). Lo anterior evidencia una definición de ritmo generada por uno de los matemáticos más relevantes en la historia, describiendo la relación funcional que existe entre los sonidos y el tiempo. Por su parte, Pérez (2013), define el ritmo como una sucesión y reiteración de acontecimientos, también indica que “El ritmo, en su estructura y combinación es cálculo matemático” (pág. 23 y 13), lo que permite encontrar una relación directa entre la música y la matemática. Para ser más claro, según lo dicho, el ritmo está presente en toda la naturaleza y se describe como una orden de elementos que tienen una relación cíclica.

Anteriormente, se habló del *Tiempo en la música o pulso*, para Mateos (2012), el *pulso* es aquel ritmo constante y regular sobre el que está construida la música. Con relación a esto, Florencio (2016), nos lleva a la existencia de distintas maneras de hallar el pulso de la música construida desde elementos tecnológicos como el “metrónomo a la inversa”, además de otras formas de su cálculo utilizando elementos de la matemática, también, entrega una definición relacionando el pulso como una función que extrae instantes de tiempo que corresponden a instantes graduados periódicamente.

Ahora bien, es necesario definir la *Velocidad de la música o Tempo*, el cual se entiende como la velocidad en la que una obra debe ser interpretada (Mateos, 2012). Vela (2017), por su lado, argumenta que el término *Tempo*, tiene origen italiano y que éste tiene varias velocidades descritas en la época, el autor lo define como la velocidad con la que una pieza musical debe ser interpretada. Por último, Meneses (2010), afirma que la notación más reciente para medir esta velocidad son los beats o pulsos por minuto y se les llama *notación metronómica*, para no utilizar la expresión italiana.

Figura 4: Símbolo de representación de la velocidad en música



Se representa con el símbolo de la negra e indica la cantidad de negras que debe haber en un minuto. *Fuente: software Guitar pro.*

En la representación gráfica musical de la velocidad, se destaca el símbolo de la “negra”, además de éste, existen varios más, los cuales representan sonidos y se utilizan conjuntamente para escribir la música; éste escrito musical, se denomina partitura. Es preciso aclarar que, dentro de este trabajo de grado no se tendrá en cuenta la partitura dado que, su trabajo lo realiza la graficadora *Learning*⁵, que muestra la relación de distintos sonidos musicales dentro de una rúbrica de rectas horizontales que simbolizan espacios en el tiempo de derecha a izquierda.

No obstante, la *Armonía musical* que, según Contreras (2017), surge del entendimiento de los Pitagóricos, quienes percibían el mundo con una armonía observable en la naturaleza, el arte y, en especial, en la música; gracias al estudio del monocordio lograron identificar siete de las doce notas musicales estándares que se utilizan en la actualidad, además, denominaron las relaciones entre estas notas como *Escalas*.

⁵ Se profundiza sobre la plataforma en el siguiente apartado, titulado: *Modos de representación*.

En ese sentido, la profesora Cordantonopulos (2002), ilustra la armonía como la forma de combinar sonidos de manera sucesiva y la postula como generador de ambientes, ya sean de tristeza, tensión, alegría o calma, entre otros sentidos. Además, entrega definiciones como las de sonido musical y ruido.

El estudio de la armonía está implementado en instrumentos musicales que puedan interpretar un solo sonido a la vez y la manera en que éstos interactúan sucesivamente, estos instrumentos se denominan *armónicos*. Para realizar un análisis más profundo de estos elementos, es necesario definir el *Sonido musical* que, de acuerdo con Pérez (2013) es la vibración que se propaga en un medio elástico; si se refiere al sonido escuchado por el oído humano, se define como la sensación producida por la vibración que se propaga en forma de ondas.

Por su parte, Cordantonopulos (2002) indica que los sonidos musicales son aquellos emitidos precisamente, por los instrumentos musicales. Así mismo, la autora define el ruido como los sonidos que no poseen armonía; esta *no-armonía* se puede producir por conformar un conjunto de ondas dispares y con más picos que los sonidos musicales⁶. Además, aclara que el oído humano no puede percibir cualquier tipo de onda, sino que existe sólo un rango de ondas específico que es perceptible. Define el sonido musical como el elemento principal del que se sirve la música, del cual, los silencios (ausencia de sonidos) también forman parte. Resalta que los sonidos musicales son las vibraciones en el aire ordenadas por repetición en constantes periodos de tiempo.

Una de las características principales del sonido es la *Tonalidad*. Según Carrión (2008), la primera noción de tono nace desde los pitagóricos y el trabajo con el monocordio, la nota en la cual se encontraba de base la cuerda era la nota tónica y a partir de ellas se construían distintas

⁶ Los sonidos musicales también se definen como ondas senoidales.

notas. Adicional a ello, Pérez (2013), define la *Tonalidad* como la personalidad generada por cada instrumento y ésta, está determinada por el timbre de ese instrumento en cuestión. Por otro lado, Gonzáles (2006), muestra la *Tonalidad* como la organización de la música alrededor de una nota llamada tónica; también describe el ordenamiento jerárquico dependiendo de los grados de la escala y tomando en cuenta la tónica.

Con el fin de identificar la organización mencionada, es necesario tener en cuenta la distancia entre notas (Pachon, 2015), se denomina *Semitono* a la mínima distancia entre dos notas. Al respecto, Florencio (2016), ilustra el semitono como el “ratio” de altura entre dos notas y se estima por $\sqrt[12]{2}$. Por su parte, Cordantonopulos (2002), indica que el semitono es la menor distancia entre dos notas y es la mitad de un tono.

A medida que se comienza a trabajar con la longitud de la cuerda se evidencia una regularidad de repetición de patrones con respecto al movimiento de la onda, ésta se denomina *la Octava*, que es un ciclo independiente y cerrado entre un conjunto de notas, donde se puede partir de una nota y llegar a ella misma utilizando la misma noción de proporcionalidad musical, tal proporcionalidad es con respecto al doble o a la exacta mitad (Pachon, 2015).

Existe un orden natural con respecto al análisis del sonido, al tiempo que a las notas se les van agregando semitonos, se llega al momento donde la nota se repite con la diferencia que se encuentra en una “octava” mayor⁷. Según Pérez (2013), la *Octava* se describe como la duplicidad o reducción de la cuerda a escuchar y Florencio (2016), por su lado, la define como la diferencia

⁷ El intervalo de notas que comprende una nota hasta su repetición es conocido como octava.

de doce semitonos musicales entre dos sonidos. Además, especifica también la relación con la frecuencia expresado como $f_1 \leftrightarrow 2 * f_2$ entonces f_1 es octava de f_2 .

Dentro de cada una de las octavas se encuentran distintos elementos marcados según su frecuencia y algunos tomaron roles característicos de cada cultura de donde provienen debido a la alta variedad de instrumentos musicales, de ese modo, se lograron estandarizar algunos y se les denominaron *Notas musicales*, las cuales, fueron definidas por los Pitagóricos, según Blázquez (2012), al encontrar relaciones entre los distintos sonidos, a partir de la longitud de las cuerdas, sin embargo, hoy en día, se definen a partir de la frecuencia de la vibración de la onda de un sonido musical.

Tabla 4: Relación de las ocho notas con sus distintas representaciones

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
Cifrado americano	C	D	E	F	G	A	B

Es importante resaltar que si se percibieron estas notas musicales cuando se comenzó a experimentar más a fondo sobre estas regularidades se encontraron muchas más notas. Respecto a ello, Cordantonopulos (2002), afirma que el término *Nota* viene de la música occidental, donde existen siete sonidos naturales y cinco alterados. La distancia entre cada uno de estos sonidos es de un semitono consecutivamente.

Tabla 5: Relación de las doce notas con sus distintas representaciones

Nota	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Cifrado americano	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

En concordancia, el texto titulado *Nociones Básicas de Elementos Del Lenguaje musical* (Universitat per a majors, 2018), define las notas como la representación de las alturas del sonido, también indica que Guido d'Arezzo ideó el sistema para conocer los sonidos llamados Do, Re, Mi, Fa, Sol, La y Sí.

Una vez definidos estos conjuntos de notas -que son los que se utilizan en los talleres- se pretende identificar las relaciones existentes entre las notas en una octava; estas relaciones permiten que un sonido sea contundente o agradable y se pueda entender, de manera que, si los sonidos se eligen al azar no siempre se va a obtener lo que se espera en el momento de crear la música. Estas relaciones entre notas se denominan *Escalas*, como señala Pérez (2013), existen varios tipos y nacen a partir de seleccionar sonidos; la escala permite que estos sonidos sean agradables y tengan relación entre sí. Para Cordantonopulos (2002), la escala musical es un conjunto de notas que poseen un orden natural. Por lo mismo, la proporcionalidad entre sonidos adquiere vital importancia pues, a partir de ésta, se encuentran las escalas más conocidas:

Probablemente, la escala más importante y de la cual se habló en la definición anterior es la *Escala cromática o temperada* que, según Pachón (2015), es aquella donde se describen los doce sonidos que componen una octava; la regularidad o proporcionalidad encontrada de un sonido al siguiente debe ser igual a un semitono. Así mismo, Cordantonopulos (2002), la define como el conjunto formado por doce sonidos separados entre sí por semitonos.

Otra escala importante es la *Escala natural*, ésta es un conjunto que consta de ocho sonidos, incluyendo cuatro sonidos tetracordios, los cuales tienen una estructura de distancias concretas; la unión de dos conjuntos de este tipo genera la escala de los ocho sonidos o notas más conocidas (Do Re Mi Fa Sol La Si Do) y repitiendo uno (Pérez, 2013). Al realizar este análisis se hallan más escalas que permiten emitir sonidos sucesivos de forma agradable, éstas se describen en la siguiente tabla:

Tabla 6: Descripción de las escalas

Escala	Estructura	Sentimiento
Mayor	<i>Tono – Tono – semitono – Tono – Tono – Tono – semitono</i>	Positivo

Menor	<i>Tono – semitono – Tono – Tono – Tono – semitono – Tono</i>	Negativo
Esta información se extrajo de (Pachon, 2015, pág. 15)		

Por último, y no menos importante, se habla de la *Escala pentatónica*, ésta es, posiblemente, la escala más antigua que se conoce está conformada por cinco sonidos, es una escala muy utilizada en la edad antigua por la iglesia y aún hoy en día en música comercial (Pérez, 2013).

Otra propiedad que se pueden tener en cuenta con respecto a el sonido son las generadas por las *Ondas* cuyo estudio por parte de Marín Merssene, investigador del siglo XVII perfecciona el análisis de dichas notas musicales basándose en la relación de la onda con la longitud de la cuerda, encontrando una ecuación general que describa todas las notas y su frecuencia exacta con el fin de evitar cualquier error mínimo para afinar distintos instrumentos y que se había implantado desde la construcción de los Pitagóricos, que impedía que varios instrumentos tocaran al mismo tiempo (Blázquez, 2012).

De acuerdo con Contreras (2017), las ondas son ciclos que no se mueven en línea recta, sino que, oscilan ascendiendo hacia un punto más alto que el inicial y descendiendo más bajo que el punto anterior. Dado que esta relación es repetitiva, se define la *Frecuencia* como una medida única que contiene cada nota (Pachon, 2015), adicional a ello, Pérez (2013), muestra la frecuencia como la proporción que existe entre la cantidad de oscilaciones de una onda por segundo, el autor también establece que el oído humano capta vibraciones entre los 20 y los 20.000 hercios. El *Hercio* es la unidad de medida de oscilaciones con respecto al tiempo. Para Gonzáles (2006), la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

Para ser más concreto, es necesario aclarar las *Propiedades del sonido*, puesto que existen diversas propiedades de los sonidos que se pueden describir a partir de comparaciones y relaciones entre ellos mismos: en primera instancia, encontramos la *Altura*, que hace referencia a

la afinación de un sonido, ésta puede ser baja o alta dependiendo la relación del sonido de partida (Cordantonopulos, 2002). Pachón (2015), define la *Altura* como la comparación de dos sonidos, además, señala que a los sonidos altos se le llaman *Agudos* y que los sonidos bajos son *Graves*.

Por último, cabe aclarar que esta *Altura* puede estar determinada por los valores de frecuencia; donde a mayor frecuencia, es más aguda y a menor frecuencia, más grave. Respecto a la *Intensidad*, también conocida como *Amplitud*, está determinada por la potencia impresa en las vibraciones del aire (Anonimo, 2008). Desde un primer punto de vista, Cordantonopulos (2002), ilustra que la *Intensidad*, es equivalente al volumen del sonido. Según Contreras (2017), la *Intensidad del sonido* es la fuerza de presión que emiten las ondas, ésta se mide en decibeles (db).

Adicional a lo anterior, también está el *Timbre*, que es el color del sonido y es lo que permite diferenciar un instrumento del otro (Cordantonopulos, 2002). Se determina por la mezcla de frecuencias que pueden estar contenidas en las ondas sonoras y delimita el nivel de complejidad de ésta (Contreras, 2017, pág. 15). También se describe el timbre como las vibraciones armónicas emitidas en la fuente sonora (Anonimo, 2008).

Existe también la propiedad de *Duración* que, según Carrión (2016), es la persistencia de la onda o el tiempo en el que tarda en percibirse la duración. Para la profesora Cordantonopulos (2002), la duración del sonido es el tiempo durante el cual se mantiene dicho sonido; añade que un sonido puede sonar por un tiempo indefinido si éste es por un instrumento acústico de cuerda, contrario a un sonido producido por la capacidad pulmonar (instrumentos de viento) o golpes (instrumentos de percusión).

Por último, se entiende la *Melodía* como la manera de combinar sonidos de forma simultánea. Los instrumentos melódicos son aquellos que interpretan varios sonidos a la vez, como el piano o

la guitarra, entre otros (Cordantonopulos, 2002). Estos sonidos cumplen las mismas reglas de la *Armonía* con respecto a la tonalidad, relaciones entre sonidos y escalas, de allí, se construyen los acordes.

2.3.Relaciones entre los marcos teóricos musical y algebraico.

Con el fin de identificar los elementos en común entre la teoría musical y la algebraica, se pretende relacionar estos dos marcos referenciales, lo que permite explorar un panorama entre los componentes matemáticos y los musicales.

2.3.1. Marco comparativo entre los marcos referenciales de álgebra y música.

Este apartado muestra las relaciones existentes entre la música y el álgebra, permitiendo encontrar distintos elementos de trabajo que brinden herramientas para crear ambientes de aprendizaje del componente (álgebra):

Tabla 7:Tabla comparativa entre los marcos referenciales de álgebra y música

Componente matemático	Ritmo	Armonía	Melodía
Conjunto numérico	Números naturales Números racionales	Números Racionales Números Reales	Números Racionales Números Reales
Generalizar	Regularidades cíclicas entre ritmos	Regularidades de frecuencias descrita por los pitagóricos Regularidades en escalas	Regularidades con sonidos sucesivos cíclicos
Patrones	Ritmos básicos ya conocidos	Relaciones de notas musicales entre escalas y octavas	Relaciones entre escalas musicales de forma simultanea
Regularidades	Ritmos semejantes y equivalencia entre ritmos	Equivalencia entre notas y notas relacionadas regularmente de forma sucesiva.	Equivalencia entre notas y notas relacionadas de forma simultanea
Expresiones algebraicas	Descripción del ritmo teniendo en cuenta la estructura del ritmo asociada	Descripción de la armonía teniendo en cuenta la frecuencia de uno o más sonido de un fragmento musical	Descripción de relaciones sucesivas entre sonidos y como se encuentran estos en una canción.
Variable	Permite describir los distintos tipos de ritmos o sus componentes.	Permite describir los distintos tipos de notas existentes y mostrar regularidades con otras.	Permite describir la relación entre sonidos simultáneos que se repiten constantemente en una canción.
Incógnita	Se presenta como la fracción de un ritmo que hace falta y que toca identificar, también puede ser la pregunta de qué ritmo iría en este apartado o que ritmo sigue después de escuchar una parte o tener una noción de dicha pieza.	Se presenta como la pregunta a que sonido se empataría con uno ya sonado. O que sonido puede sonar al tiempo con uno que ya sonó.	Se presenta como la fracción de la canción que iría después de tener una noción de dicha pieza musical.

Variable como indeterminada o expresiones de patrones generales	Se puede mostrar como la relación general de un ritmo en música	Se puede identificar como la relación general entre notas de una escala.	Se puede identificar como la variable general presente en toda la canción
Variable con relación funcional	Se puede identificar como el ritmo vario con respecto a algo, ya sea el tiempo o el ambiente.	Permite describir las relaciones existentes entre tipos de alturas y sus respectivas octavas	Permite describir la relación entre los sonidos, como estos cambian con respecto al tiempo, o si existen sonidos relacionados sucesivamente.
Coefficiente	Permite describir y analizar la cantidad de distintos tipos de pulsos e identificar cuando alguno se repite.	Permite describir, analizar e identificar la octava en la que se encuentra cada sonido.	Permite describir, analizar e identificar las veces de repetición de un sonido en una canción
Tipos de expresiones algebraicas	Se evidencian como expresiones fraccionarias que se pueden expresar de operaciones entre distintos tipos de ritmos	Se evidencia como expresiones relacionales entre distintos tipos de notas en la escala cromática.	Se evidencia como expresiones relacionales entre distintos tipos de sonidos sucesivos
Operaciones entre expresiones algebraicas	Relaciones que existen entre distintos tipos de ritmo para hacer una obra musical.	Relaciones que existen entre distintos sonidos musicales para crear nuevos sonidos simultáneos	Relaciones que existen entre distintos sonidos sucesivos.
Suma y resta	Adición o sustracción de ritmos musicales	Adición y sustracción de sonidos sucesivamente	Adición o sustracción de sonidos simultáneamente
Multiplicación y división	Reproducción de ritmos con respecto a un ritmo base	Regularidad de proporcionalidad multiplicativa que relacionan los valores de las octavas	Repetición de piezas musicales
Ecuaciones	Se pueden encontrar como equivalencias entre distintos tipos de ritmos	Se pueden identificar con equivalencias entre sonidos simultáneos.	Se pueden encontrar como equivalencias entre piezas musicales.
Fuente: <i>Elaboración propia</i>			

2.3.2. Marco teórico musical – algebraico

En este punto, se abordan los argumentos teóricos para este trabajo de grado, estos son creados a partir de las citas tenidas en cuenta en las dos primeras partes de este capítulo. El objetivo de esta parte de la investigación es crear algunos conceptos matemáticos musicales o centrarse en los elementos que se trabajarán en los siguientes capítulos. Así, este apartado se divide en tres enfoques de aprendizaje utilizando el ritmo, melodía y armonía de la música como herramientas de enseñanza:

Desde un punto, se busca analizar la música a partir de sus componentes mínimos, para lo cual se comienza por definir la música desde su parte más sustancial. La música es generada por la alteración del sentido del oído, ésta está determinada por la onda que transita entre un medio y el receptor (el oído). El receptor abstrae distintos tipos de información de la onda y la decodifica

para que el cerebro la interprete dependiendo de sus características de altura, color, duración y fuerza, para identificar estructuras algebraicas se debe crear un conjunto y luego, encontrar las operaciones cerradas de ese conjunto.

A partir de esto se genera el primer *axioma de percepción auditiva*⁸: el *axioma del sonido*; así mismo, se genera un segundo axioma contrario al sonido, el *axioma del silencio* con sus respectivas definiciones, este conjunto de los sonidos será desde donde se explorará el álgebra:

Axioma de percepción auditiva 1: Axioma del sonido

Existe el sonido. Para definirlo, es necesario realizar un análisis intuitivo de él, según Carrión (2016), el sonido son ondas propagadas por un emisor, estas ondas se mueven en el espacio y son recibidas por el tímpano del oído, que las decodifica con respecto a la manipulación de neuronas, para crear la sensación de sonido en nuestra mente. Teniendo en cuenta lo anterior, definiremos el sonido de la siguiente forma:

Definición 1: Definición de sonido

El **sonido** es la sensación percibida por el oído del ser humano y producida por la propagación de ondas en un espacio ocupado que posee cualidades de intensidad, duración, color y altura. No son indispensables todas las cualidades, excepto la duración. El conjunto de todos los sonidos se representa con el símbolo: \mathbb{S} .

Figura 5: Representación del conjunto de sonidos en general.

⁸ El axioma de percepción auditiva (APA): se define como la creación de los fundamentos básicos de la teoría que no tienen una demostración o su demostración no es relevante para esta teoría.

$$\mathcal{J} = \left\{ x \text{ percepción del ambiente} \left| \begin{array}{l} x \text{ tiene una duración} \\ y \\ (x \text{ tiene intensidad} \\ o \\ color \\ o \\ altura)^9 \end{array} \right. \right\}$$

Fuente: Elaboración propia

A partir de lo dicho, es necesario definir tales características y encontrar distintos elementos que permitan seguir desarrollando esta teoría; la condición necesaria y suficiente para la existencia de un sonido es que tenga un tiempo determinado en el cual sea perceptible, de aquí la siguiente definición:

Definición 2: Duración del sonido

La **duración del sonido** se define como el tiempo durante el cual es percibido este sonido. Su unidad de medida son los segundos. Por otro lado, cuando el sonido es perceptible se dice coloquialmente que este sonido es débil o fuerte, se entiende que existe un rango de umbral de percepción, que como afirma Carrión (2016), varía entre los 12dB hasta 120dB y hace referencia al volumen; este volumen se define a continuación como:

Definición 3: Intensidad de sonido

La **intensidad del sonido** es el volumen con el cual se percibe el sonido, también conocido como la fuerza de presión con la que el sonido se identifica en el oído. Su unidad de medida son los decibeles. El sonido es una sensación producido por la propagación de ondas en un espacio ocupado (*APA 1*) cumple las propiedades de ondas y a partir de ello se puede hablar de relación

⁹ Este o es inclusivo, es decir puede tener solo una propiedad o las tres al mismo tiempo, o simplemente tener dos de tres.

de frecuencias, estas frecuencias indican el color del sonido y son las que se utilizan para distribuir la teoría musical en las aulas de clase (Do Re Mi Fa Sol La Si) dentro de esta teoría se define el color de la siguiente forma:

Definición 4: Color del sonido

El **color del sonido** (también conocido como timbre) es la frecuencia que tiene la onda de cada sonido, ésta también está determinada por la combinación de varias ondas simultáneas. Así mismo, este valor determina las notas musicales y se puede catalogar según el cifrado americano. A partir de las frecuencias generadas por los sonidos se pueden realizar comparaciones entre ellos y se pueden separar éstas en clasificados grupos, que pueden ser agudos o graves. En seguida se presenta lo que definimos como altura del sonido:

Definición 5: Altura del sonido

La **altura** se define como la comparación de dos sonidos con respecto a su frecuencia, a los **sonidos altos** se les llama agudos y a los **sonidos bajos**, graves. Cabe aclarar que esta clasificación y el trabajo con las frecuencias entregan ciertas relaciones de orden dentro del conjunto de los sonidos, pero de esto se hablará más adelante. Estos aspectos permiten encontrar distintos tipos de relaciones entre los sonidos por sus características y también entre sonidos con otros sonidos. Así mismo, esta definición permite comenzar a relacionar notas entre sí para hacer comparaciones y sacar conclusiones, para que esto sea más claro se debe identificar cuando existe igualdad entre notas y cuando éstas son diferentes:

Axioma de percepción auditivo 2: Axioma del silencio

Existe el silencio.

Definición 5: Definición de silencio (0)

El silencio se define como la ausencia de cualquiera de las tres propiedades musicales, el color, la altura y la intensidad del sonido. Los conjuntos numéricos necesitan tener un elemento neutro dentro del conjunto con respecto a las operaciones con el fin de completar y crear el conjunto final sobre el que se va a trabajar. Se ilustra el siguiente teorema:

Teorema 1 silencio como sonido

Sea un silencio, entonces es un sonido.

Demostración: El sonido se define como la ausencia de cualquiera de las propiedades, sin embargo, tal ausencia es perceptible por el ser humano, luego, el silencio es un sonido. En otras palabras, el hecho de que las propiedades anteriormente nombradas fueran nulas no quiere decir que no sean sonido, desde que tenga un tiempo de duración determinado, se puede considerar como un sonido. Con el fin de realizar una abstracción de análisis con respecto a la duración (tiempo)¹⁰ y crear un conjunto continuo se ilustra el siguiente axioma:

Axioma de percepción auditivo 3: Del sonido completo

Un sonido siempre va seguido de otro sonido o de un silencio.

El axioma anterior permite definir la *velocidad de los sonidos* debido a que establece una relación de distancia con respecto a un tiempo determinado, es decir pueden existir cierta cantidad de sonidos entre otros sonidos. En la música, se conoce el *beat* como el elemento básico del sonido y la *velocidad* está determinada por los beats por minuto, que son una cantidad de

¹⁰ El conjunto numérico del tiempo se comporta como un campo ordenado completo que permite utilizar las propiedades de un anillo en un conjunto continuo, de vital importancia para el análisis del mundo.

sonidos secuenciales y repetitivos que se pueden identificar en un minuto, el elemento físico más utilizado para medir esta relación es el metrónomo.

Definición 6: Tempo

En conclusión, la velocidad (Tempo) de un conjunto de sonidos ordenados está determinada por la cantidad de beats que quepan por minuto dentro de esta pieza. También indica qué tan rápida o lenta es una pieza musical.

Todos los instrumentos musicales tienen la peculiaridad de generar silencios o alteración entre notas; aunque sean instrumentos melódicos o armónicos, todos manejan la habilidad de convertir sonidos en silencios y el silencio como sonido. De allí se ve la necesidad de enunciar el cuarto axioma de percepción, esta acción de reducir un sonido a silencio se basa en disminuir la vibración de las cuerdas en instrumentos acústicos, la vibración del parche u objeto de presión en los instrumentos de percusión o la no transición de aire en los instrumentos de viento; este actúa de dos formas directamente, cambiar la intensidad del sonido fuera del rango de percepción entre 12 db y los 120 db o cambiar el color del sonido fuera de los rangos (20hz a 20.000 hz).

Este trabajo de disminución de la fuerza se enfoca en aplicar una fuerza contraria de igual o mayor magnitud dentro del cuerpo vibrante con el fin de que este se quede quieto, teniendo en cuenta la idea anterior, si un sonido es audible (no es un silencio), está dentro de los parámetros y basta con insertar una fuerza ($-x$) que saque este sonido dentro de los parámetros, éstas también están dentro del conjunto de los sonidos porque convierten cierto tipo de sonidos en silencios y viceversa.

Axioma de percepción auditiva 4: Existencia del mute y alteración del silencio

Dentro de cualquier tipo de instrumento musical, un sonido se puede convertir en silencio y un silencio se puede convertir en sonido, estas acciones se denominan *mute* ($-x$) y *alteración del silencio* respectivamente. El conjunto del mute formará parte del conjunto \mathcal{M} y de todos sus subconjuntos.

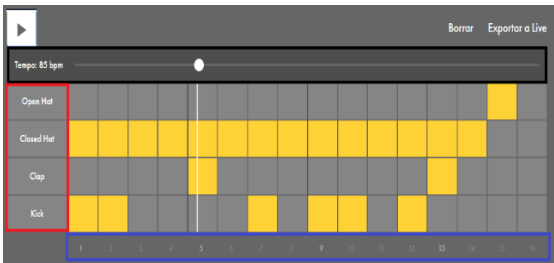
Corolario del silencio

El silencio es un elemento de cualquier subconjunto de \mathcal{M}

Demostración: Sea un silencio, por el axioma 4 existencia del mute y la alteración del sonido, esto permite identificar que el mute es subconjunto de todos los conjuntos de \mathcal{M} y por el teorema 1 se puede confirmar que el silencio es un sonido, por ende, el silencio es un elemento de todos los subconjuntos de \mathcal{M} . Es una condescendencia del teorema 1, por eso, se denomina corolario.

Modo de representación:

El modo de representación que se va a utilizar para entender el sonido en este marco teórico es el método de sonido vs tiempo:

Representación gráfica	Utilidad
 <p data-bbox="207 1669 745 1724">Figura 6: representación musical de la plataforma learningmusic</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El botón de play sirve para escuchar la secuencia de sonidos. • El deslizador dentro del rectángulo de color negro indica la velocidad (tempo) de la pista. • Los elementos de la parte vertical que están dentro del rectángulo de color rojo son los sonidos del instrumento. • Los elementos de la parte horizontal inferior que están dentro del rectángulo azul • Los elementos de color marrón indica que esa nota suena en ese espacio de tiempo mientras que si es de color gris ese instrumento está en silencio. • Por último, existe una barra vertical de color blanco que se mueve con respecto al tiempo cuando el botón play está activo.
<p data-bbox="378 1801 1281 1833">Fuente: Figura 6: representación musical de la plataforma learningmusic de Ableton</p> <p data-bbox="618 1833 1005 1858">(https://learningmusic.ableton.com/)</p>	

Con el fin de definir el conjunto de trabajo para analizar los ritmos, se describe un conjunto de sonidos importante para identificar ritmos y así, trabajar el primer campo de estudio: el “ritmo”.

Para ello se expone el siguiente conjunto:

Definición 7: Sonidos de percusión \mathcal{N}_p

Los sonidos de percusión se definen como los sonidos creados por cualquier instrumento de percusión¹¹. Existen distintos tipos de sonidos de percusión y se pueden clasificar con respecto a las cualidades del sonido: altura, duración, fuerza y color. Es decir, el conjunto de los \mathcal{N}_p está determinado por x sonidos producidos por instrumentos de percusión.

$$\mathcal{N}_p = \{x \in \mathcal{N} | x \text{ son reproducidos por instrumentos de percusión} \}$$

Comúnmente, los sonidos de percusión muestran las bases de los ritmos de las canciones del común y se utilizaran como herramienta de creación de los ritmos musicales, estos sonidos pueden ser sonidos sucesivos o independientes. Para este trabajo de grado se tendrán en cuenta dos instrumentos de percusión, la batería acústica y la batería eléctrica. Las propiedades más relevantes de los sonidos de percusión son *duración* y *altura* (indican si son agudos o graves).

Figura 7: imágenes físicas de una batería



¹¹ Las palmadas, aplausos, golpes a un puesto, etc. Se consideran sonidos rítmicos debido a que el cuerpo del ser humano es un instrumento andante.

Se puede observar una batería acústica (derecha) y una eléctrica (izquierda).

Debido a que se va a trabajar con el conjunto de los sonidos de percusión, es necesario comenzar a definirlos y mostrar cuales son cada uno de ellos:

Tabla 8: Parte de la batería

Parte de la batería	Acústica	Eléctrica
Bombo		
Palmada		
Redoblante o caja		
Charles cerrado		
Las imágenes son tomadas de la aplicación de creación sonidos de Ableton Learning. https://learningmusic.ableton.com/		

Operaciones entre sonidos de los instrumentos de percusión

Existen distintas formas de relacionar los sonidos de percusión entre ellos y así, lograr crear nuevos sonidos independientes o conjuntos de sonidos, de allí se pueden crear operaciones binarias entre sonidos y, de ese modo, darles una estructura algebraica. En este caso, se puede analizar la estructura de la operación *simultaneidad de sonidos*, los instrumentos de percusión tienen la acción de sonar uno o varios elementos a la vez, ahora bien, si hay dos instrumentos de percusión equivalentes, los sonidos que deben producir -tocados de la misma forma- deben ser

equivalentes, debido a que las dimensiones de construcción de estos instrumentos deben ser las mismas y las propiedades de las ondas (altura, color , intensidad y duración) transferidas a partir del mismo medio, también deben ser las mismas. Esto permite identificar la equivalencia entre sonidos de percusión:

Teorema 2: Equivalencia entre sonidos de percusión (\equiv)

Existe una relación de equivalencia entre sonidos de percusión, esta relación está determinada por la equivalencia de las propiedades de duración, altura y color de los sonidos de percusión.

Demostración: Es necesario afirmar que, si se relacionan dos sonidos de percusión, esta relación debe formar parte de los sonidos de percusión, es decir, estas relaciones deben ser cerradas [1], ahora, si se relaciona un sonido a con el mismo a , esta relación también va a formar parte del conjunto debido a la definición de elementos de un conjunto de percusión, además, esta equivalencia es única, es decir, no existe otro elemento b que sea equivalente a . Por otro lado [2], los sonidos de percusión montados dentro de una representación como la mostrada por la aplicación Learning (nombrada anteriormente), permite identificar que dos sonidos relacionados de forma indiferente generan un sonido que hace parte de los sonidos de percusión. Finalmente [3], si se considera que un sonido de percusión es equivalente a otro y este segundo sonido de percusión es equivalente a un tercero, el sonido de percusión es necesariamente igual al primero.

Los anteriores apartados indican que existe una relación de equivalencia entre sonidos de percusión descrita en la teoría de conjuntos en el texto “*Clasificar medir e invertir*” (Luque, 2014). A partir de lo anterior, se identifica una relación entre elementos de este conjunto y se puede denominar como la *simultariedad de sonidos de percusión*, la cual se produce cuando un sonido de percusión suena al mismo tiempo que otro, esta sensación producida, aunque parecida,

es muy diferente, por lo mismo, da origen a un nuevo sonido que, de hecho, forma parte de los sonidos de percusión.

Definición 8: Simultariedad¹² de sonidos de percusión

Para dos elementos x y y del conjunto \mathcal{N}_p que suenan simultáneamente (al mismo tiempo) y generan un tercer sonido z . El sonido z , producido por las ondas conjuntas, es también un sonido de percusión. Utilizaremos el operador $+$ para denotar la simultariedad.

Ahora, supongamos que tenemos dos sonidos simultados de dos baterías acústicas. Una batería toca el bombo mientras que la otra toca el redoblante, más adelante, se intercambian los papeles de las baterías; mientras que una toca el redoblante la otra toca el bombo. Los sonidos producidos por la simultariedad de las dos baterías es el mismo, entonces, se puede intuir que *simultar* un sonido a con un sonido b es lo mismo que *simultar* un sonido b con un sonido a . Acá podemos observar que se cumple la propiedad conmutativa con esta respectiva operación. De esta forma, también podemos encontrar que [1] *simultar* dos sonidos con un tercero es lo mismo que *simultar* el primer sonido con los otros dos ya *simultados*.

Por otro lado, dentro del conjunto, existen elementos que simultados generan silencio sin importar cualquier nota que se le aplique (APA 4), estos elementos simultados con algunos sonidos generan efectos (disminución de algunas características) o silencios dentro de un instrumento de percusión. Tales elementos se denominan *elementos inversos* de la operación *simultariedad de sonidos*, en otras palabras, [2] para todo sonido x que pertenece al conjunto \mathcal{N}_p ,

¹² La cualidad de ser simultáneos o la simultariedad de sonido se determinado por dos sonidos o más que suenan simultáneamente, esto da origen al verbo *simultar*: que es la acción de hacer sonar dos sonidos al mismo tiempo y sus respectivas conjugaciones.

si este sonido se simula con un elemento del conjunto *mute* ($-x$) el resultado de esta simulación es un silencio (0).

$$x + (-x) = 0$$

[3] Así mismo, para todo sonido x que es simulado con un silencio va a generar el mismo sonido x . Esto indica que cada elemento del conjunto tiene sus elementos inversos con respecto a la simulación y también existe un elemento neutro que, simulado con cualquier elemento genera el mismo elemento.

$$x + 0 = x$$

Teorema 4: Conjunto de percusión un grupo

El conjunto $(\mathcal{J}_p, +)$ es un grupo.

Demostración: Se puede confirmar que los elementos anteriormente nombrados muestran una estructura algebraica de un grupo, es una operación binaria entre elementos del conjunto \mathcal{J}_p es equivalente a uno conjunto de \mathcal{J}_p (Es decir es una operación cerrada) dónde:

En [1] sean tres elementos x, y y z del conjunto \mathcal{J}_p se cumple que:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ tal que } z \in \mathcal{J}_p$$

En [3] un elemento del conjunto \mathcal{J}_p simulado con el silencio (0_p) es el mismo sonido.

En [2] un elemento del conjunto \mathcal{J}_p simulado al mute es un silencio.

Y esta estructura según el texto “*Álgebra abstracta*” (Fraleigh, 1987) es la estructura de un grupo abeliano algebraico, lo que permite encontrar una estructura algebraica en la música y

comenzar a trabajar con sus elementos para crear contextos musicales en donde se puedan observar estas propiedades algebraicas. Hasta el momento, solo se ha descrito una estructura algebraica del sonido musical pero no de la música en sí, por lo mismo, es necesario definir otra operación entre el mismo conjunto, que se denomina *sucesión de sonidos* \otimes :

Definición 9: Sucesión¹³ de sonidos

Para dos sonidos $a, b \in \mathcal{N}_p$, estos sonidos son sucesivos cuando uno suena después de otro. Y se simboliza algebraicamente como:

$$a \otimes b = c$$

Teorema 4: Sucesión de sonidos es cerrada

La sucesión de sonidos es una operación cerrada.

Demostración: Es importante resaltar que c es un elemento de \mathcal{N}_p debido a que sigue siendo un conjunto de elementos son una secuencia de sonidos de percusión y esto los hace sonidos de percusión por definición.

Esta operación no es conmutativa debido a que tiene un orden, no es lo mismo $a \otimes b$ que $b \otimes a$, así mismo la ley asociativa no se cumple debido a que el orden indica la sucesividad de las notas de percusión, es decir

$$(a \otimes b) \otimes c \neq a \otimes (b \otimes c)$$

¹³ La sucesión de sonidos es la relación de sonidos que se emplea para que uno suene después de otro, esta sucesión de sonidos se deriva directamente del APA 3. Así mismo da creación a un verbo o acción que es la de sucesivar como la acción de poner un sonido a sonar después de otro, y también se recalca la necesidad de sus conjugaciones como verbo.

Esto permite confirmar que no existe la relación asociativa con respecto a esta operación. Se pueden seguir encontrando este tipo de relaciones dentro del conjunto de los sonidos de percusión y relaciones que no, esto es necesario al momento de plantear un problema con el fin de no inferir cosas inciertas. Sin embargo, con la idea de simplificar y generalizar algunas partes de la función se define el coeficiente rítmico, donde si dos elementos sucesivos se repiten, se les puede anteponer un número natural que indique la cantidad de veces que se repite dicho sonido.

$$a \otimes a \otimes a = 3a$$

Nota: no se cumple si se intercala una nota diferente: $a \otimes a \otimes b \otimes a = 2a \otimes b \otimes a \neq 3a \otimes b$. Debido a que esta operación no es conmutativa.

Ahora, según a la anterior operación se puede identificar una ordinalidad dentro de los elementos de un conjunto de elementos de percusión que suceden uno seguido del otro.

Comúnmente en la música estos conjuntos son repetitivos y siempre son continuos de allí se genera la siguiente definición:

Definición 10: Conjunto rítmico R

Un conjunto rítmico de sonidos R es un subconjunto de \mathcal{N}_p tal que sus elementos son sucesivos, con una velocidad continua y se repiten.

El simulador de sonidos *Learning*, diseñado por Ableton, permite mostrar pistas hasta de 16 sonidos sucesivos dependiendo la selección que el usuario indique en el tablero de notas (ver figura 16), lo que nos lleva a experimentar con estos distintos sonidos simultáneos que accedan en primera instancia a *Encontrar una relación funcional* entre el contexto musical matemático teniendo en cuenta la relación del sonido con respecto al tiempo (t). Esto permite cumplir con el

primero de los tres DBA de grado octavo nombrados anteriormente. Además, la misma aplicación describe ciertos parámetros para definir ciertos tipos de conjuntos rítmicos.

Tipos de conjuntos rítmicos

Existen muchos tipos de conjuntos rítmicos en este caso se tendrán en cuenta algunos conjuntos ya descritos por la aplicación¹⁴ y que se mostrarán en la siguiente tabla:

Tabla 9: Ejemplos de conjuntos rítmicos

Conjunto rítmico	Características	Definición no formal	Velocidad
Dup	Sonidos electrónicos en tiempos lentos y relajantes	Género musical electrónico creado en los años 70 en Jamaica	60-90bpm
Hip-hop	Sonidos de pista que permiten las rimas u otras expresiones artísticas	El Hip Hop es una corriente cultural, artística, urbana y transgresora que surgió durante la década de 1970 en Estados Unidos y que se ha ido expandiendo por todo el mundo.	60-100bpm
House	Un subgénero de la electrónica que combina sonidos cíclicos generados por un masterizador	El House es un estilo de música electrónica de baile que se considera uno de los precursores de la música electrónica en general (es un estilo de ésta, pero también es uno de sus primeros géneros y precursores). Suele imitar la percusión del disco con un especial uso de un prominente golpe de bombo.	115-130bpm
Techno/trance	Sonidos agudos entrelazados con muy graves	Se trata de un estilo principalmente musical con escasa presencia de vocales. Se suele escuchar en una sesión continua de DJ.	120-140 bpm
Dubstep	Sonidos relajantes y enfocados en velocidades rápidas.	Es un estilo relacionado con el DrumAndBass o el Reggae entre otros. Su BPM suele mantenerse en 140 o 150 y en casos más particulares, oscila de 160 a 175. Una de sus técnicas sonoras es la presencia de voz modificada de forma digital en muchos casos, al principio de la canción.	135-145bpm
Drum and bass	Sonidos de batería y bajos que permiten moverse a ritmos muy rápidos, de los más rápidos de los años 70	Tiene tantas facetas rítmicas que se puede bailar de formas muy diversas. Unos bailan al ritmo de la línea de bajos, otros al son de la percusión y otros al tempo	160-180bpm

Información extraída de Caparrini (2017) y Lillo (2015)

Anteriormente, se describió la manera de definir tanto los conjuntos rítmicos como algunas representaciones y relaciones algebraicas que existen dentro de este conjunto. Adicional a ello, existen otros tipos de instrumentos musicales; éstos, al igual que los anteriores, se clasifican con

¹⁴ <https://learningmusic.ableton.com/es/make-beats/tempo-and-genre.html>

respecto al tipo de sonidos que produzcan. En este caso, se tendrán en cuenta los instrumentos armónicos, que son aquellos que solo pueden producir un sonido a la vez. Dentro del marco de referencia musical, se recalcó el esfuerzo realizado por la humanidad con el fin de lograr clasificar con respecto a cómo funciona la vibración de los sonidos; fue de ese modo como aparecieron los *armónicos*, que son la marca personal de cada instrumento musical.

Los instrumentos que existen tienen sonidos respectivos que los diferencian, estos sonidos son diferentes porque los armónicos generados por estos instrumentos son propios de cada uno, en ese sentido, se entienden por *sonidos armónicos* aquellos producidos por un instrumento que implemente un sonido a la vez, como la flauta.

Definición 11: Sonidos armónicos \mathcal{N}_A

Los sonidos armónicos se definen como los sonidos creados por cualquier instrumento armónico¹⁵. Existen distintos tipos de sonidos de armónicos y estos se pueden clasificar con respecto a las cualidades del sonido: altura, duración, fuerza y color.

En otras palabras, el conjunto de los \mathcal{N}_A está determinado por x sonidos producidos por instrumentos armónicos.

$$\mathcal{N}_A = \left\{ x \in \mathcal{N} \mid \begin{array}{l} x \text{ son reproducidos por instrumentos armónicos} \\ x = f(x): f \text{ es frecuencia del sonido} \end{array} \right\}$$

Este conjunto de sonidos permite identificar relaciones entre los sonidos y su forma de comportarse, su característica principal es el color; es decir, existe una relación única entre cada sonido armónico y un número entre los patrones de frecuencias (Hz). El color permite describir la

¹⁵ Los instrumentos armónicos son aquellos instrumentos que solo pueden implementar un sonido a la vez como lo es el monocordio o la flauta.

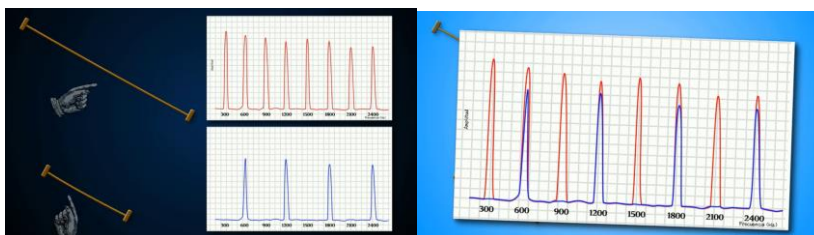
relación de proporcionalidad que denominamos altura y clasifica los sonidos en agudos y graves, si la frecuencia del color es alta se denominan *agudos* y, en caso contrario, si la frecuencia es baja se les denomina *graves*.

Definición 12: Proporcionalidad directa entre el color y la altura

Si el color del sonido es de un valor menor a los 440hz se define que la altura del sonido es *grave*, por el contrario, si el valor de un sonido es mayor a esta cantidad, se denomina un sonido *agudo*. Además, se cumple la proporcionalidad: a mayor *Color* mayor *Altura* y viceversa, lo que, a su vez, permite hablar sobre *proporcionalidad directa*, un campo de estudio bastante importante para el grado octavo, el cual también es descrito por los DBA, además, brinda un contexto de experimentación para trabajar estos conceptos en las aulas de clase.

Cuando se comienza a emplear la idea de relacionar distintos elementos del conjunto de los sonidos armónicos se identifica que anteriormente los pitagóricos se encontraron con las relaciones entre el sonido producido por la frecuencia de una nota tiene mucho en común con las de la otra nota (Figura 8) esto sugiere que hay sonidos que son equivalentes a otros, en este caso, estos sonidos se denominan octavas y se encuentran cuando se duplica o se divide en la mitad la cuerda a sonar o la salida del aire de una flauta:

Figura 8: Representación gráfica de armónicos y octavas



Se describe la representación de los armónicos producidos por una cuerda y otra de exactamente la mitad del valor de su longitud denominada octava. Fuente: Video “¿Por qué tenemos 12 notas musicales?” (Gómez, 2019)

Definición 13: Octavas la equivalencia entre sonidos armónicos

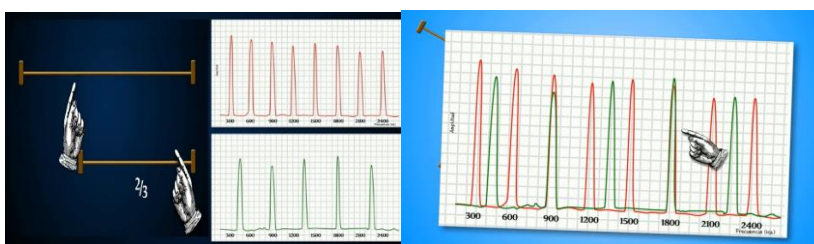
Para a, b elementos del conjunto \mathcal{N}_A estos son equivalentes si la frecuencia es múltiplo de una potencia de 2

$$\exists a, b \in \mathcal{N}_A \rightarrow (a = b)/f(a):f(b) \leftrightarrow f(a) = (f(b) * (2)^x): x \in \mathbb{Z}$$

Teorema 6: Octavas como relación de equivalencia

Demostración: En teoría es la misma idea que la relación de equivalencia en los sonidos de percusión. Para encontrar tal relación, es necesario identificar las notas determinadas por las frecuencias 220hz:440hz:880hz:110hz, todas estas notas son octavas; el nombre que recibe esta nota específicamente es “La”. Al notar esta regularidad se comienza a experimentar con otros elementos de proporción de una cuerda; por ejemplo, si se trabaja no con una proporción doble sino de 2/3 se evidencia la siguiente situación:

Figura 9:representación gráfica de armónicos sonantes



Se muestra la comparación entre los armónicos de dos cuerdas que tienen una proporción con respecto a su longitud de 2/3. Fuente: Video “¿Por qué tenemos 12 notas musicales?” (Gómez, 2019)





Estas notas comparten varios armónicos haciendo que suenen “bien”, estas relaciones, que suenan bien, se denominan *sonantes* y las que no cumplen esta relación son *disonantes*. Este proyecto se enfoca en los sonidos sonantes, puesto que se evidencian patrones y generalizaciones, a estas formas de encontrar nuevas notas se les denomina *quintas*. A partir de esto, se

comenzaron a encontrar las distintas *escalas* descritas por los pitagóricos, solamente se pueden encontrar estas proporcionalidades si la escala es simétrica, es decir, la construcción debe volver al origen (estrella de 5 puntas al revés). A continuación, se describirán las escalas y sus respectivas relaciones:

Definición 14: Escala musical

Una escala musical es un conjunto de elementos de \mathbb{N}_A que cumplen una regularidad distante entre sonidos:

Tabla 10: Escalas armónicas

Escala	Descripción	Representación
Pentatónica	Es la escala más utilizada por los occidentales para la creación de la música básica y de la generación.	
Mayor	Es la escala más utilizada en la actualidad, produce armonías luminosas y abiertas, esta está compuesta por siete notas. En esta escala mayor de Do se determinan las notas musicales básicas (Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si).	
Menor	Es una escala muy común al momento de crear armonías oscuras, tristes o que generen ambientes oscuros. También la conforman los distintos siete elementos. Las distancias entre estos elementos se expondrán más adelante.	
Cromática	La escala cromática es la escala que conforma la tonalidad occidental y permite entregar una cantidad de notas las cuales están relacionados con las escalas anteriores y esta representación está ligada a la forma en como está construido el piano.	

Imágenes extraídas del video “¿Por qué tenemos 12 notas musicales?” (Gómez, 2019)

Por otro lado, para comenzar a definir los elementos del conjunto se toman como base los días de la semana como relación directa a las notas musicales conocidas, sin embargo, vamos a partir desde la nota *La*, es decir, La-Si-Do-Re-Mi-Fa-Sol, vamos a recordar el *cifrado americano* descrito anteriormente; entonces, el conjunto sería A-B-C-D-E-F-G, estas son las siete notas

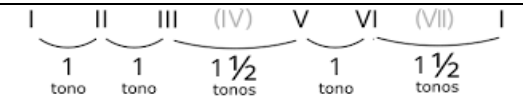
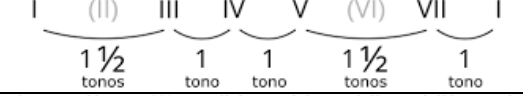
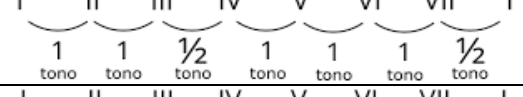
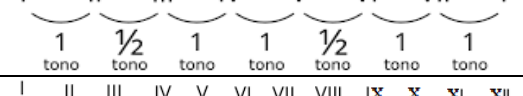
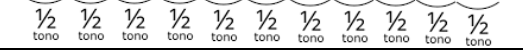
básicas aprendidas en primaria, más adelante se señalará de dónde vienen. Además, si se dice que son notas diferentes, se entiende que deben tener valores frecuenciales diferentes, entonces existe una diferencia entre notas, a partir de una definición de proporción armónica, se denomina la mínima distancia entre notas, denominada *semitono*:

Definición 15: semitono

El semitono sT es la mínima distancia generada entre notas de la escala cromática. Se determina que la distancia entre el conjunto de notas nombrado anteriormente es de dos semitonos, con excepción de las notas que terminan en I, cuando se determina la nota del conjunto con semitono se le suele poner el signo (#) ejemplo: D#, A#, G#...

Nota: lo anterior indica que las notas Si y Mi no tienen sostenido, es decir, si los sonidos E# y B# no existen y se aclara que un tono es equivalente a dos semitonos, se describe la escala cromática como el conjunto de elementos conformado por C-C#-D-D#-E-F-F#-G-G#-A-A#-B. Se pueden representar los tipos de escalas de la siguiente forma:

Tabla 10: Escalas y sus relaciones de distancias

Escala	Relación de distancia	Ejemplos
Pentatónica mayor		$PM_C = \{C - D - E - G - A\}$
Pentatónica menor		$Pm_C = \{C - D\# - F - G - B\}$
Mayor		$M_C = \{C - D - E - F - G - A - B\}$
Menor		$m_C = \{C - D - D\# - F - G - G\# - A\# \}$
Cromática		$Ec = \{(C - C\# - D - D\# - E - F - F\# - G - G\# - A - A\# - B)\}$

Fuente: imágenes construcción propia

Por último, se muestra una tabla de que relaciona las notas musicales armónicas que son percibidas por el oído humano con su valor de frecuencia y la octava en la que se encuentra, esta tabla tiene en cuenta los parámetros de audición y el valor numérico de la constante del semitono¹⁶ ($\sqrt[12]{2}$), esta constante es la distancia mínima entre notas; esta definición crea una ecuación tomando como punto de partida el valor de 440hz, además, esta ecuación tiene una definición de distancia con valores de proporción: $f(x) = 440 * (\sqrt[12]{2})^x$; $x \in \mathbb{Z} / -58 \leq x \leq 74$

Figura 10: Descripción de la relación de frecuencias y notas que registra el oído humano.

Octava	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	16,35	32,70	65,41	130,81	261,63	523,25	1046,50	2093,00	4186,01	8372,02	16744,04
C#	17,32	34,65	69,30	138,59	277,18	554,37	1108,73	2217,46	4434,92	8869,84	17739,69
D	18,35	36,71	73,42	146,83	293,66	587,33	1174,66	2349,32	4698,64	9397,27	18794,55
D#	19,45	38,89	77,78	155,56	311,13	622,25	1244,51	2489,02	4978,03	9956,06	19912,13
E	20,60	41,20	82,41	164,81	329,63	659,26	1318,51	2637,02	5274,04	10548,08	21096,16
F	21,83	43,65	87,31	174,61	349,23	698,46	1396,91	2793,83	5587,65	11175,30	22350,61
F#	23,12	46,25	92,50	185,00	369,99	739,99	1479,98	2959,96	5919,91	11839,82	23679,64
G	24,50	49,00	98,00	196,00	392,00	783,99	1567,98	3135,96	6271,93	12543,85	25087,71
G#	25,96	51,91	103,83	207,65	415,30	830,61	1661,22	3322,44	6644,88	13289,75	26579,50
A	27,50	55,00	110,00	220,00	440,00	880,00	1760,00	3520,00	7040,00	14080,00	28160,00
A#	29,14	58,27	116,54	233,08	466,16	932,33	1864,66	3729,31	7458,62	14917,24	29834,48
B	30,87	61,74	123,47	246,94	493,88	987,77	1975,53	3951,07	7902,13	15804,27	31608,53

Punto de partida: $la_4 = 440\text{hz}$, la sección gris no cumple la definición de sonido. Fuente: Construcción propia

La anterior tabla se realiza teniendo en cuenta la ecuación perfeccionada por Marín Merssene, la cual se comenzó a estudiar desde la relación encontrada por los pitagóricos: la *escala pentatónica*, que consta de cinco notas armónicamente relacionables entre sí.

En los sonidos de percusión se identificaron distintos tipos de operaciones, como la *simultaneidad* y la *sucesividad*, estas operaciones cumplen ciertas estructuras algebraicas y se pueden aplicar para el conjunto de los *sonidos armónicos*. Los instrumentos armónicos son los

¹⁶ Descrita por Nicolás Merssene anteriormente

que solamente pueden producir un sonido al mismo tiempo y esto no permite que se pueda pensar de una operación de simultariedad, pero si se puede pensar en la operación sucesividad con sus respectivas características anteriores, luego, se puede definir un conjunto armónico así:

Definición 16: Conjunto armónico A

Un conjunto armónico A es un conjunto sucesivo de sonidos de \mathcal{N}_A a una velocidad constante cuyos elementos son conjuntos de escalas.

Así mismo, existen distintos tipos de instrumentos musicales diferentes a los que ya tratamos anteriormente, los instrumentos que pueden representar varios sonidos a la vez crean un conjunto de sonidos determinados *sonidos melódicos* estos sonidos comparten las regularidades de los sonidos armónicos porque su estructura es construida de la misma forma. Con el fin de realizar el análisis de estos elementos se puede hablar de la operación simultariedad entre sonidos melódicos. Esta simultariedad de sonidos crea un conjunto de sonidos melódicos que también se conoce comúnmente como acordes:

Definición 17: Sonidos Melódicos \mathcal{N}_M

Los sonidos melódicos se definen como los sonidos creados por cualquier instrumento de melódicos¹⁷. Existen distintos tipos de sonidos melódicos y estos se pueden clasificar con respecto a las cualidades del sonido: altura, duración, fuerza y color.

En teoría:

¹⁷ Los instrumentos melódicos son aquellos instrumentos que pueden implementar varios sonidos a la vez como lo es la guitarra, el violín, el piano entre otros.

El conjunto de los \mathcal{N}_M está determinado por x sonidos producidos por instrumentos melódicos.

$$\mathcal{N}_M = \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ son reproducidos por instrumentos melódicos}\}$$

Definición 18: Conjunto Melódico M

Un conjunto melódico M es conjunto simultaneo de sonidos de \mathcal{N}_M donde todos sus elementos cumplen alguna de las regularidades descritas en las escalas.

3. Capítulo 3: Metodología

Con el fin de identificar la validez de los talleres, se utilizan las herramientas de investigación de experimentación de Lerma (2009), cuya investigación se enfoca en crear distintas herramientas que permitan la abstracción y análisis de información cuantitativa a una población en específico; estas herramientas están constituidas por una prueba inicial para identificar los conocimientos previos, la aplicación de las herramientas de investigación y desarrollo, además de una prueba final, la cual muestra el desarrollo de los conocimientos adquiridos por medio de los talleres. En este sentido el proceso se inscribe en el enfoque cualitativo con un alcance descriptivo, por lo mismo, este capítulo describe el diseño y planeación de la secuencia de actividades, cuyo objetivo, como ya se ha dicho, es utilizar la música como recurso didáctico que permita introducir algunos procesos del pensamiento matemático como lo son la generalización y la abstracción algebraica potencializando las competencias descritas en los lineamientos curriculares, estándares y DBA descritos por el MEN, orientado a los estudiantes de grado octavo en la ciudad de Bogotá, aportando a su crecimiento algebraico y al desarrollo de habilidades de pensamiento.

3.1.Método de investigación

En primera instancia, se entrega a todos los estudiantes de grado octavo de la UEFM una evaluación inicial para identificar el desarrollo de las habilidades de generalización, pensamiento algebraico y sus conceptos básicos, así mismo, usando la información recopilada del álgebra y la música, se realiza la aplicación de los talleres, cuya estructura se enfoca en la *exploración*, la *experimentación* y la *experimentación propia*, que se describirán en la parte 3.3.1 y se aplica una evaluación para de identificar la evolución de los conceptos nombrados.

3.2. Población Participante

Los participantes son todos los estudiantes de grado octavo, divididos en dos grupos; el grupo de *experimentación* y el grupo de *control*, como se evidencia en el siguiente apartado:

3.2.1. Población estudiantil

La UEFM, es una institución que ofrece los servicios de educación formal para los niveles de preescolar, básica primaria, secundaria y media, que busca la formación integral del hombre desde una temprana edad enfocándose en la formación de los valores humanos y la conservación del medio ambiente.

La institución comprende al niño como producto de la realidad social y política, por lo tanto, se establece la realidad como fundamento primordial para el aprendizaje del desarrollo de cada persona competente dentro de la sociedad actual. La población total, son sesenta (60) estudiantes, de los cuales, treinta (30) componen el grupo inicial, denominado *experimental*; este grupo es bastante inteligente, con distintas habilidades para las herramientas tecnológicas y con la capacidad de solucionar problemas; los treinta (30) estudiantes restantes, integran el segundo grupo, denominado *control*. Los estudiantes están en la adolescencia, tienen altas habilidades de comunicación y adecuados espacios tecnológicos de trabajo.

3.2.2. Muestra

Los participantes son estudiantes que oscilan en edades entre los doce (12) y los dieciséis (16) años, carismáticos, atentos, con habilidad para resolver problemas y capacidad de análisis para la solución de situaciones básicas cotidianas. La muestra seleccionada, como ya se dijo, es de 60 estudiantes.

3.2.3. *Grupo experimental y grupo de control*

El *grupo experimental* está conformado por 30 estudiantes (15 hombres y 15 mujeres), a los cuales se les aplican los distintos talleres con el fin de mejorar conceptos del álgebra como la generalización, el uso de variables, la relación funcional y la proporcionalidad. Del mismo modo, el *grupo de control* también está integrado por 30 estudiantes (16 hombres y 14 mujeres), a los cuales se les aplican, únicamente, las evaluaciones de diagnóstico inicial y final para identificar su desarrollo en los conceptos de generalización, uso de variables, proporcionalidad y relación funcional.

3.3. Instrumentos y recursos

Los instrumentos y recursos que se describen a continuación están diseñados con el fin de trabajar en conjunto, además de ser necesario que el estudiante tenga un computador y un celular con sistema operativo Android. En caso de no tener estas herramientas, el profesor debe realizar los talleres con anticipación para adquirir los conocimientos básicos y ejemplificar (si puede hacerlo) con un instrumento musical los distintos puntos de experimentación dentro de los instrumentos. En caso de contar con las herramientas tecnológicas para representar los distintos conceptos, el profesor puede hacer uso de ellas.

3.3.1. *Instrumentos de investigación*

Se diseñaron distintos talleres para los estudiantes con estructura enfocada en la *exploración*; estos talleres exponen algunas situaciones que describen pautas básicas del álgebra en la música, estableciendo las nociones axiomáticas de sonido y silencio junto con las distintas reglas a aplicar para cada concepto. Adicionalmente, se implementa la *experimentación*, donde se muestran al estudiante contextos de análisis de sonido y comparación con el fin de desarrollar distintos

conceptos del álgebra como la generalización y la abstracción de patrones, además de la forma de describirlos con un lenguaje algebraico. Por último, se introduce la *experimentación propia*, que es donde el estudiante aplica lo encontrado en la etapa anterior, intentando describir sus gustos propios musicales dentro de este contexto algebraico.

La distribución temporal de cada uno de los momentos de estos talleres es de una hora por los primeros dos apartados (momento de exploración) y (momento de experimentación); el tercero (momento de experimentación propia), tiene un tiempo indeterminado, dado que cada estudiante puede acomodarlo acorde con sus intereses y/o habilidades, sin embargo, se proyecta que al menos, sea de una hora.

Como recurso principal tecnológico se utiliza la herramienta Learning, mencionada antes, cuya división se encarga de crear dispositivos de adaptación de sonido y drivers para distintas tarjetas (de sonido), las cuales se encargan de digitalizar los diferentes géneros musicales de hoy en día. Otra herramienta tecnológica que se implementa dentro del estudio del sonido es una aplicación denominada *aTuner*, que permite analizar las frecuencias de los sonidos en tiempo real.

Material musical de estudio

Para formalizar la introducción al tema y contextualizar a los estudiantes sobre lo que se va a realizar, inicialmente, se le cuestiona respecto a música y álgebra, dando lugar a preguntas que permitan identificar el conocimiento previo de estos conceptos. Luego, se les presenta la herramienta Learning (ingresando al enlace <https://learningmusic.ableton.com/es/>), esta plataforma virtual permite la creación de piezas musicales a partir de sonidos básicos, lo que los lleva encontrar un conjunto de elementos con los cuales trabajar y que están disponibles en

contexto para cualquier ordenador o celular inteligente. Se puede cuestionar a los estudiantes en torno a las partes que conforman la música:

Tabla 11: Sesión 1 Material rítmico de estudio

* Objetivo general de la sesión: Desarrollar habilidades de generalización y descripción algebraica haciendo énfasis en los conceptos de variable, utilizando el conjunto rítmico de la música como herramienta para mostrar dichos conceptos del álgebra en la vida real.			
Pregunta	Objetivo	Tiempo	Conocimiento
Exploración del ritmo			
Escuche una de las cuatro pistas que se muestran en esta plataforma	Contextualizar al estudiante en el campo de trabajo donde se desarrollarán los conocimientos algebraicos	15 minutos	Conjuntos de sonidos
¿Cuántas notas conjuntas consecutivas están representando?	Exponer a los estudiantes el conjunto de elementos que se analizara para encontrar argumentos algebraicos.	10 minutos	Definir el conjunto de sonidos y abstraer una generalización de este.
Escuche los sonidos representados y responda las siguientes preguntas: ¿Son los dos patrones los mismos?	Establecer relaciones de equivalencia entre sonidos	10 minutos	Relaciones entre conjuntos
Experimentación del ritmo			
¿Implica el orden en la que se seleccione estos sonidos? ¿Qué pasa si se relaciona con tres sonidos o más, Afecta el orden?	Exponer a los estudiantes a relaciones algebraicas de conmutatividad y transitividad, dentro del mundo musical.	15 minutos	Propiedades algebraicas
A cada uno de estos sonidos diferentes letras (x, y, z, w).	Definir la primera operación y relacionarla con la operación conocida de la suma	15 minutos	Operaciones entre conjuntos
Luego realice las siguientes operaciones entre esos sonidos e identifique cuales suenan igual:	Realizar la introducción a la equivalencia entre sonidos rítmicos. Mostrar propiedades existencia de elemento neutro	15 minutos	Elemento neutro
Identifique si las siguientes equivalencias tienen sentido	Demostrar la existencia del elemento neutro e introducción al concepto de función teniendo en cuenta la unicidad de sonidos con respecto al tiempo.	15 minutos	Mostrar habilidades de generalización y definir el elemento neutro
Describa el conjunto R de la representación que se encuentra en este enlace	Exponer la definición de función y trabajar con el dominio.	15 minutos	Ecuación y función
<i>Fuente: se relaciona con el anexo de documentos 1 denominado "Taller 1.pdf"</i>			

La tabla anterior muestra la relación de las preguntas que usan el ritmo como herramienta básica para la enseñanza, además del objetivo de cada pregunta, el tiempo estimado para cada una y el concepto algebraico a tratar.

La siguiente tabla muestra la estructura similar del taller de ritmo 2.

Tabla 12: Sesión 2 Material rítmico de estudio

* Objetivo general de la sesión 2: Explorar distintos conjuntos rítmicos con el fin de desarrollar habilidades de generalización, manipulación de lenguaje algebraico y relación funcional.			
Pregunta	Objetivo	Tiempo	Conocimiento
Experimentación del ritmo			
Suponga que $kick = x$, $clap = y$ Describa el conjunto rítmico; Indique los sonidos representados en la función de esta canción	Definir la operación sucesión de sonidos con sus respectivas relaciones.	15 minutos	Aplicar propiedades de generalización y conceptos de relación funcional
Rock básico Suponga que $kick = x$, $Snare = y$ y $Clasehat = z$ Describa el conjunto rítmico, (ignore el silencio que hay entre dos notas).	Exponer la idea de coeficientes como simplificación de una regularidad.	15 minutos	Coeficientes
Describa el conjunto rítmico e indiquen los sonidos representados en la función de esta canción	Describir una base de ritmo entregada por un programa en un lenguaje algebraico.	15 minutos	Explorar con propiedades de generalización y experimentar con la relación funcional
describa el conjunto rítmico e indiquen los sonidos representados en la función de esta canción	Exponer y describir otro contexto real en un lenguaje algebraico.	15 minutos	Describir el conjunto rítmico de una canción real
Experimentación propia			
Busque una canción donde se pueda identificar el conjunto rítmico e intente escribir su relación funcional	Permitir al estudiante explorar con sus gustos personales con el fin de evidenciar si se puede aplicar lo aprendido.	30 minutos	Optimización de lo aprendido
<i>Fuente: se relaciona con el anexo de documentos 2 denominado "Taller 2.pdf"</i>			

Con esta última parte se cierran los conceptos de ritmo. Más adelante, se habla del tema de la armonía y se estructura la siguiente clase:

Tabla 13: Sesión 1 material armónico de estudio

* Objetivo general de la sesión 1: Desarrollar habilidades de generalización y descripción algebraica haciendo énfasis en los conceptos de variable, relación funcional y proporcionalidad, utilizando el conjunto de sonidos armónicos de la música como herramienta para mostrar dichos conceptos del álgebra en la vida real.			
Pregunta	Objetivo	Tiempo	Conocimiento
Exploración de la armonía			
Con su voz, realice distintos sonidos e identifique los datos que entrega la aplicación para cada sonido	IncurSIONAR al estudiante al campo de experimentación donde se piensa trabajar, la armonía.	20 minutos	Conjunto de la armonía
Experimentación de la armonía			
Identifique valores del color de la nota "La" y complete la siguiente tabla	Seleccionar datos con un patrón o regularidad para analizar.	15 minutos	Abstracción para generalizar
Describa una función que relacione este valor de frecuencias de "La" con respecto a octavas.	Generalizar la relación encontrada con los datos obtenidos anteriormente	20 minutos	Generalización
¿Qué relación existe entre la frecuencia y la altura?	Exponer un contexto de proporcionalidad directa con el fin de	20 minutos	Proporcionalidad directa

	realizar su análisis algebraico, esto permite cumplir el segundo derecho básico de aprendizaje para grado octavo.		
Cambie el valor de proporcionalidad de la nota a (1.05946), (Parta de A_4) identifique el valor de la frecuencia y revíselo en la aplicación DaTuner y el simulador de tonos, escriba la nota según el cifrado americano	Mostrar la variable como un elemento de cambio, o que forma parte de un conjunto de elementos arbitrarios, cumpliendo con su definición de variable como elemento funcional.	20 minutos	Variable como parámetro
<i>Fuente: se relaciona con el anexo de documentos 3 denominado "Taller 3.pdf"</i>			

Con el fin de completar los conceptos de la armonía se dispone de una segunda sesión, donde se tienen en cuenta las respuestas y conocimientos de la primera sesión:

Tabla 14 Sesión 2 material armónico de estudio

* Objetivo general de la sesión 2: Explorar distintos conjuntos armónicos con el fin de desarrollar habilidades de generalización, manipulación de lenguaje algebraico y el concepto de proporcionalidad entre variables.			
Pregunta	Objetivo	Tiempo	Conocimiento
Experimentación de la armonía			
Según lo anterior describa el conjunto de notas que cumple esta regularidad	Mostrar y trabajar ejemplos de generalización en conjuntos armónicos con patrones de tipo algebraico.	25 minutos	Conjunto de generalización escala pentatónica mayor
Así mismo, existe otro conjunto de notas que cumplen la siguiente regularidad $\left(\frac{3}{2}sT - T - T - \frac{3}{2}sT - T\right)$ que es diferente a la anterior, describa los conjuntos de notas con esta regularidad:	Experimentar con otro conjunto generalizado con un patrón diferente	25 minutos	Conjunto de generalización escala pentatónica menor
Describa las escalas mayores de las siguientes notas:	Mostrar y trabajar ejemplos de generalización en conjuntos con patrones de tipo algebraico, identificar una de las escalas más usadas en la actualidad con el fin de trabajar los sentimientos y crear ambientes alegres.	25 minutos	Conjunto de generalización escala mayor
Así mismo, existe la escala menor que cumple la regularidad que consta de siete notas y cumplen la regularidad $(T - sT - T - T - sT - T - T)$. Describa los conjuntos de las escalas menores:	Exponer y experimentar ejemplos de generalización en conjuntos con patrones de tipo algebraico, identificar una de las escalas más usadas en la actualidad con el fin de trabajar los sentimientos y crear ambientes tristes.	25 minutos	Conjunto de generalización escala menor
Experimentación propia			
Experimente con algunos conjuntos e indique la escala que más le gusto	Permitir al estudiante explorar con sus gustos personales con el fin de evidenciar si se puede aplicar lo aprendido.	20 minutos	Optimización de lo aprendido
<i>Fuente: se relaciona con el anexo de documentos 4 denominado "Taller 4.pdf"</i>			

Por último, se describe una clase que utiliza las características melódicas con el fin de profundizar distintos conceptos como: uso de variable, proporcionalidad y relación funcional.

Tabla 15: Sesión material melódico de estudio

* Objetivo general de la sesión: Desarrollar habilidades de generalización y descripción algebraica haciendo énfasis en los conceptos de variable, relación funcional y proporcionalidad, utilizando el conjunto de sonidos melódicos de la música como herramienta para mostrar dichos conceptos del álgebra en la vida real.			
Pregunta	Objetivo	Tiempo	Conocimiento
Exploración de la melodía			
Identifique el conjunto armónico (A) de la melodía “Love Will Tear Us Apart” De Joy División que se encuentra en el enlace nombrado anteriormente	Incurcionar al estudiante al campo de experimentación donde se piensa trabajar, la armonía.	15 minutos	Conjunto de la armonía
Experimentación			
¿Cuál es la escala base de esta canción?	Realizar la generalización de ciertos conjuntos melódicos partiendo de su generalización armónica	15 minutos	Generalización
¿Cuál es la escala base de esta canción?	Efectuar la generalización de ciertos conjuntos melódicos partiendo de su generalización armónica	15 minutos	Generalización por patrones
¿Cuál es la escala base de esta canción?	Utilizar herramientas de generalización clasificación para describir la armonía del conjunto melódico.	15 minutos	Generalizar en un contexto real
Ingrese al enlace del punto 1. De la canción “Love Will Tear Us Apart” y describa la ecuación del conjunto melódico	Definir el contexto de un conjunto melódico.	15 minutos	Trabajar con el conjunto melódico
	Explorar en el contexto de un conjunto melódico.	15 minutos	Conjunto melódico
Ingrese al enlace del punto 3 “Praxis” Ikonika y describa la ecuación el conjunto melódico, también indique el sonido en cierto número t:	Definir relación funcional dentro del conjunto melódico	15 minutos	Funciones
Ingrese al enlace del punto 4 “Ride” de Robert Hood y describa la ecuación el conjunto melódico, también indique el sonido en cierto número t:	Explorar la relación funcional dentro de un conjunto melódico.	15 minutos	Relación funcional
La parte de exploración propia de la armonía se deja como taller			
Experimente con distintos sonidos y describa una ecuación funcional con una canción que usted construya. $M =$ Indique la escala en la que se encuentra esta canción.	Permitir al estudiante explorar con sus gustos personales con el fin de evidenciar si se puede aplicar lo aprendido.	Trabajo en casa	Optimización de lo aprendido

Fuente: se relaciona con el anexo de documentos 5 denominado “Taller 5.pdf”

3.3.2. Herramientas tecnológicas de trabajo

Debido a la emergencia sanitaria mundial que se vive actualmente, se implementan las siguientes herramientas tecnológicas con el fin de mejorar el ambiente de aprendizaje.

Learning de Ableton


La plataforma *Learning de Ableton* es una plataforma virtual que permite la creación de distintas maquetas musicales utilizando diferentes sonidos organizados en una plantilla gráfica que utiliza las herramientas descritas en la *Figura 15* del capítulo 2.3. Además de esto, la plataforma contempla una variedad de canciones en maquetas -con su estructura gráfica- que permiten la interacción de sonidos y estructuras gráficas de forma experimental, pues permite trabajar con relaciones, generalizaciones y demás.

En este caso, se tiene en cuenta que esta plataforma permite crear conjuntos de distintos sonidos rítmicos, armónicos y melódicos que, relacionados de forma simultánea, posibilita la creación de canciones y el desarrollo de distintos temas como ritmo, melodía y armonía.

Afinador DaTuner

El afinador DaTuner es diseñado por una empresa de software denominada ... esta aplicación se encarga de recibir un sonido de cualquier instrumento y muestra sus distintas características tales como intensidad, el color y la altura; además de mostrar también la nota de afinación más cercana al sonido percibido. Esto comúnmente es conocido como un afinador musical y funciona de la siguiente forma:

Tabla 16: Descripción de la aplicación DaTuner

Relación gráfica	Utilidad
	<p>La parte amarilla denomina la nota del sonido</p> <p>La parte roja determina la intensidad del sonido</p> <p>La parte azul clara indica el color del sonido</p> <p>La parte azul oscura muestra la octava del sonido</p> <p>La parte morada indica la altura con relación de la nota afinada más cercana.</p>

Generador de tonos

Se ve la necesidad de utilizar un generador de tonos en caso que, el estudiante, no pueda realizar ciertas notas y con la intención de aplicar la herramienta para el análisis del sonido y desarrollar la parte de la *armonía* (<https://instrumt.com/u/generador-de-tonos>). Es diseñada por Instrumt que es una miscelánea de pequeños programas que brindan herramientas para usar en la casa, en el trabajo y en la escuela.

GoogleClassRoom

En la plataforma de *GoogleClassRoom* se suben los talleres con sus respectivas evaluaciones, el código de la clase es “qtmojpp”. Esta plataforma virtual permite organizar las actividades dadas las condiciones actuales de trabajo académico apoyado con recursos de las TIC. Este salón virtual está estructurado en 7 partes, donde se explica cada una de las guías descritas en el apartado anterior. Cada guía incluye su video, hoja para operaciones y formulario de respuestas con el fin de recopilar la información de forma más sencilla.

YouTube

El canal de *YouTube* denominado *Matematicas Virtuales Col* permite la transmisión de los videos que explican cada uno de los puntos de los talleres, sus objetivos y las posibles respuestas que se puedan obtener. Sin embargo, los videos no describen el uso de una aplicación, esta es labor del docente en el momento de la realización del trabajo.

3.4. Técnicas y métodos de aplicación de los talleres

Es necesario establecer algunas técnicas y métodos de aplicación de los talleres con el fin de que tengan éxito en los objetivos propuestos, sin estas especificaciones, las clases pueden perder su rumbo y convertirse en clases de teoría musical. Primero, se debe tener en cuenta el orden de los talleres, que cada uno de los puntos puede crear algunos conocimientos que se necesitan para desarrollar los siguientes contextos dentro del mismo o los siguientes.

También se le recomienda al docente realizar los talleres con el propósito de identificar los conocimientos previos y prever distintos puntos de vista de los estudiantes en pro de desarrollar el pensamiento algebraico. Por último, es importante aclarar las cuatro definiciones principales de intensidad, color, altura y duración de los sonidos y que el sonido, es el elemento básico para el análisis de piezas musicales -que será el conjunto de estudio-, esto permite relacionar la música con las matemáticas teniendo en cuenta los conocimientos básicos de conjuntos que posean los estudiantes.

3.4.1. Procesos y técnicas rítmicas

Una vez definido el conjunto de los sonidos, comenzaremos a trabajar con subconjuntos de este conjunto y los clasificaremos en tres, los conjuntos de sonidos rítmicos, armónicos y

melódicos. Es importante que el estudiante sepa qué conjunto se está trabajando, debido a que las reglas que se van construyendo están determinadas para el análisis de cada uno de estos conjuntos y la manera en que, a partir de sus propiedades, se pueden generalizar.

El conjunto de los sonidos rítmicos permite identificar las generalidades en la música desde el punto más intuitivo debido a que los cambios en las propiedades de los sonidos no se perciben mucho por el ser humano, esto es una ventaja debido a que, replicar sonidos a una velocidad constante y de forma repetitiva permite crear una base para llevar los tiempos de piezas musicales. Es importante que los estudiantes evidencien que la intención del taller es desarrollar habilidades de generalización con el fin de mejorar tanto esos procesos como el pensamiento algebraico.

También, es relevante resaltar el uso que tiene la variable y como dependiendo de su selección implica a una solución diferente, se recomienda hacer esta reflexión al final de la sesión del primer taller. No obstante, en el segundo taller, es relevante resaltar la definición de relación funcional que existe el conjunto rítmico y el tiempo, esto permite al estudiante enfrentarse a este contexto e ir manejando el concepto de relación funcional. Por último, se valora la importancia de la definición de la segunda operación “sucesión” y explicación indicando su similitud con la multiplicación y sus propiedades, sin embargo, aclarando que son completamente diferentes.

3.4.2. *Procesos y técnicas armónicas*

Por otro lado, el trabajo con las herramientas tecnológicas es de vital importancia para el desarrollo de esta parte del taller. Es importante resaltar que en este punto se experimenta con la propiedad específica del color del sonido y cómo existen relaciones como las *escalas*, que permiten identificar una buena combinación entre colores.

Se debe mostrar al estudiante que esta clase le permite encontrar algunos patrones y generalidades con los que puede experimentar, también entrega un contexto donde se permite trabajar con los números enteros y los números decimales dentro de un trabajo de generalización.

Así mismo, permite conjeturar acerca del análisis de proporcionalidades y relación funcional, es importante que se aclaren estos puntos de vista dentro de la clase puesto que, de no hacerse esto, sería equivalente a impartir una clase de música y no de matemáticas.

3.4.3. *Procesos y técnicas melódicas*

Dentro del estudio del taller de armonía es importante resaltar, precisamente, el uso de los conocimientos de ritmo y armonía con el fin de solucionar problemas de análisis de generalización, abstracción de patrones y utilización de estas relaciones para la creación y análisis de contextos reales (canciones) donde se presenten elementos de generalización. El análisis de melodía lleva a utilizar los conocimientos adquiridos en los talleres de armonía y ritmo, potencializando el pensamiento algebraico y experimentando con un contexto real que permite la creación de conocimiento significativo.

3.5. Métodos de evaluación

La evaluación es la parte más importante de esta investigación debido a que permite identificar si se lograron los aprendizajes esperados de algunos conceptos algebraicos en los estudiantes, esta evaluación se divide en tres etapas según la investigación experimental de Lerma (2009).

3.5.1. *Evaluación inicial*

Se realizó una evaluación inicial de forma virtual (por medio de la plataforma *Classroom*) para identificar los conocimientos previos del estudiante respecto a los conceptos de generalización,

relación funcional y proporcionalidad. La evaluación consta de seis preguntas, las cuales, se describen a continuación:

Objetivo general

Identificar los conocimientos básicos del estudiante respecto a los conceptos de generalización, relación funcional y proporcionalidad descritos en el álgebra y propuestos dentro del marco de referencia en este proyecto.

La estructura de esta evaluación inicial se describe en la siguiente tabla:

Tabla 17: Estructura de la evaluación

#	Pregunta	Concepto
1	En que contextos se aconseja utilizar el álgebra	Generalización
2	¿Qué entiende usted por generalización?	Generalización
3	¿Qué entiende por “variable”? o ¿Qué se entiende por el uso de las letras en álgebra?	Variable
4	¿La incógnita es una variable?	Variable
5	¿Qué entiende usted por función?	Relación funcional
6	¿Qué entiende usted por proporcionalidad?	Proporcionalidad

Fuente: Se relaciona con el anexo de evaluaciones denominado “Evaluación inicial”

3.5.2. Evaluación final

Dentro de la evaluación final se tuvo en cuenta el desarrollo de estos conceptos con el fin de identificar si se logró desarrollar alguno de éstos después de la aplicación de la herramienta experimental. Esta evaluación es única y se plantea para aplicar al total de los participantes (la población de experimentación y la de control). El objetivo general es identificar si se desarrollaron los conceptos de generalización, usos de la variable, relación funcional y proporcionalidad descritos por el álgebra y propuestos en el marco de referencia de este proyecto.

Tabla 18: Estructura de la evaluación final

#	Pregunta	Concepto
1	En que contextos se aconseja utilizar el álgebra	Generalización
2	¿Qué entiende usted por generalización?	Generalización
3	Dado el siguiente conjunto $A = \{1,3,5,7 \dots\}$ indique el valor que esta en la posición 13.	Generalización

4	Dado el siguiente conjunto $N = \{1,2,3,5,8 \dots\}$ indique el valor que está en la posición 7.	Generalización
5	¿Qué entiende por “variable”? o mejor ¿Qué se entiende por el uso de las letras en álgebra?	Variable
6	¿La incógnita es una variable?	Variable
7	Del siguiente conjunto $N = \{55,110,220,440, \dots\}$ describa la relación funcional de la posición con respecto a cada objeto del conjunto.	Variable
8	Dada la siguiente relación funcional $f(x) = 440 * (1.05946)^{x-1}$ encuentre el valor de la posición número 12	Variable
9	¿Qué entiende usted por función?	Relación funcional
10	En una relación de función como se le llama al conjunto de partida	Relación funcional
11	En una relación de función como se le llama al conjunto de llegada	Relación funcional
12	¿Los elementos del conjunto de partida se repiten? ¿Y pasa lo mismo con los del conjunto de llegada?	Relación funcional
13	¿Qué entiende usted por proporcionalidad?	Proporcionalidad
14	¿De las siguientes afirmaciones cual indica una proporción directa?	Proporcionalidad
15	¿De las siguientes afirmaciones cual indica una proporción inversa?	Proporcionalidad
16	De las siguientes expresiones cual no indica una proporción	Proporcionalidad
<i>Fuente: Se relaciona con el anexo de evaluaciones denominado “Evaluación final”</i>		

3.6. Procesamiento de datos

Los datos recolectados se relacionan con respecto al desarrollo de conocimientos previos y la comparación de éstos tanto en el grupo experimental como en el grupo de control con el fin de identificar el desarrollo de los conocimientos en las dos poblaciones; luego, se aplican los talleres solamente al grupo de experimentación.

Después, se ejecuta un examen final que permite identificar el desarrollo de los conceptos en los talleres, de este modo, se confirma que estos talleres sirven para enseñar álgebra y se cumplen los objetivos específicos de este proyecto.

Finalmente, se tratan los datos recolectados dentro de la aplicación de los talleres, éste tratamiento permite identificar la manera en que los conceptos se están desarrollando en cada uno de los talleres, con el fin de enseñar álgebra.

3.6.1. Variables

Las variables que se tendrán en cuenta son: el desarrollo de los conceptos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad, con respecto al uso de los contextos musicales guiados por los talleres en los grupos de experimentación y de control con el fin de identificar su desarrollo y la efectividad del uso de estos talleres para enseñar álgebra. Esta distribución de variables se estructura en las Tablas 18 y 19, también, se verifica el desarrollo de conceptos con respecto a la respuesta en los talleres, lo anterior, para identificar si se alcanzaron a desarrollar estos conceptos, de no ser así, se procede a aclarar y corregir dichas concepciones en la siguiente clase.

3.6.2. Relación entre variables

Se plantea identificar cuál es el desarrollo de los conceptos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcional, usando para ello una primera evaluación que permita contrastar los conocimientos de dichos conceptos en las poblaciones de control y experimental.

También se pretende llevar una constancia y registro de las distintas actividades para que el desarrollo de los cuatro conceptos sea más alto y se evidencie dentro de la música, esto permite identificar el desarrollo de distintos conceptos matemáticos y las dificultades y errores que tienen los estudiantes con el fin de corregirlos.

Por último, a partir de la evaluación inicial, se realiza un contraste con la evaluación final teniendo en cuenta sus resultados para evidenciar el desarrollo de los conceptos y contrastar entre la población de control y la de experimentación para mostrar relaciones entre el desarrollo de conceptos en la aplicación de estos talleres.

3.7. Implementación y desarrollo

Para la implementación del proyecto, primero se vio la necesidad de explicar a los estudiantes todas las actividades, partiendo de la evaluación inicial, la implementación de los talleres y la evaluación final, incluyendo las temáticas de estudio y la exposición de un video taller de exploración que habla sobre el trabajo a realizar.

3.7.1. Evaluación inicial

La implementación de la evaluación se realiza por medio de la plataforma *Zoom*, para ésta, se dispone de una hora de trabajo, se recopila la evaluación que evidencia los conocimientos básicos del álgebra como, por ejemplo, la *generalización*, se debe identificar si el estudiante utiliza o no este concepto como herramienta para describir un conjunto que cumple con alguna regularidad o patrón.

Para el *uso de variables*, se cuestiona acerca de sus posibles usos (variable, incógnita y relación funcional). La *relación funcional*, como relación entre dos conjuntos que cumple la noción de que, a cada elemento del conjunto de partida, se relaciona con un único elemento del conjunto de llegada; la *proporcionalidad*, por su parte, se debe describir como una función donde la variable dependiente cumple la condición de multiplicarse con un valor constante.

Cabe recordar que, la información anterior, se encuentra en el Marco Teórico Algebraico, disponible en el capítulo 2 del presente documento.

3.7.2. Talleres

Para realizar la aplicación de los talleres, en primer lugar, se realiza una exposición de introducción en donde se muestran las definiciones de sonido y sus respectivas características.

En seguida, se habla de la metodología de trabajo y también sobre las distintas plataformas que se van a usar, también se informa que, mientras que el grupo de experimentación está teniendo clase con los talleres, el grupo de control avanza normal en sus clases de álgebra.

3.7.2.1. Taller de ritmo

Dentro de la implementación del taller de ritmo se evidencia que, al ser un tema nuevo, es un poco más complejo de incorporar para los estudiantes, este obstáculo se aborda mostrando que es una herramienta nueva o algo diferente a lo que se les ha estado enseñando con el fin de encontrar alguna utilidad contextual a los conceptos. La descripción de la plataforma se toma un poco más de tiempo porque al comienzo no se entendía bien lo que se deseaba seleccionar, después de ciertas aclaraciones, se permite el desarrollo de las actividades.

Para la solución de los talleres, es de vital importancia la explicación de la estructura y de las dos variables que se tienen en cuenta para el desarrollo de un ritmo musical. Con el fin de que el estudiante identifique estas variables, se explica la solución de las dos primeras preguntas. Con respecto a la tercera pregunta, varios estudiantes identifican que el sonido es una nota, por lo mismo, se encontraron y describieron los conjuntos de la relación y un elemento neutro de estos.

En este punto, los estudiantes justifican la respuesta identificando que los silencios ocupan un espacio y por eso se les podía considerar como una nota. Por otro lado, la respuesta del punto 3 muestra la relación de igualdad de los patrones, algunos estudiantes identifican el cambio en los sonidos pero que el patrón sea “igual”, otros estudiantes identifican el cambio de los sonidos pero que los patrones sean “iguales”. En el punto 4 se identifica por algunos estudiantes intuitivamente la relación de orden que muestra a tres o más elementos con el fin de generalizar la propiedad conmutativa, donde se evidencia que varios estudiantes logran relacionarla.

En la parte de relación de cada elemento con una letra se encuentra complejidad en el momento del entendimiento hasta que, al final se ve la necesidad de explicarla con el siguiente punto para encontrar la utilidad del punto anterior pues, los estudiantes no encontraban sentido, de igual manera, se les indicó que ese punto no tiene valor en la evaluación. Más adelante, se define la relación de *simultariedad* entre sonidos, en este punto, los estudiantes indican que es un poco complicado, por lo que se da la necesidad de explicar varias veces este proceso.

Para el segundo taller de ritmo se realizó la explicación de la relación funcional r y cómo ésta permite identificar, uno por uno, todos los elementos de un conjunto rítmico teniendo en cuenta un valor t como parámetro; esta parte del taller se enfoca en profundizar las herramientas de generalización de piezas musicales con el fin de describirlas en la terminología algebraica aquí descrita.

3.7.2.2. Taller de armonía

El trabajo con la armonía se introdujo a partir de la utilización de la aplicación DaTuner, dado que muchos de los estudiantes se comunican por la plataforma *Zoom* en el celular, se les indican los valores de frecuencia de La (A) y ellos realizan el trabajo de generalización a partir de los datos mostrados en pantalla, de tal manera que se identifique la proporción que existe entre el color de las notas de La , que varían duplicándose o dividiéndose por dos.

También se identifica la búsqueda de una función que represente la generalidad de las frecuencias de La utilizando la octava como variable entera independiente, junto con un resultado que depende de esta variable. Adicional a lo anterior, se les indica a los estudiantes que el valor de proporcionalidad cambia para encontrar las 12 notas y se utiliza el número de Merssene.

Después de la definición de las doce notas, se habla de cada una de las escalas que se pueden definir y se les indica que, a partir de éstas, se pueden encontrar ciertos conjuntos de sonidos que transmiten cierta calidad de sentimientos según la emisión de distintas notas. Este punto es el más importante y complicado en tanto, al comienzo, no se hallaba la forma de brindar la instrucción de manera sencilla; luego se confirma que con la división de pantalla se puede realizar mejor la comparación de forma virtual.

3.7.2.3. Taller de melodía

El taller de melodía no se alcanza a aplicar debido a falta de tiempo y disponibilidad de la población, sin embargo, los conocimientos a desarrollar están reflejados en los talleres de ritmo y armonía, el de melodía pretende complementar el curso reforzando dichos conocimientos.

3.7.3. Evaluación final

La implementación de la evaluación final también se realiza vía *Zoom*, en este punto, se recopila la información de desarrollo de los conceptos en cada uno de los grupos (de control y de experimentación), esta evaluación tuvo un tiempo estimado de una hora.

4. Capítulo 4: Análisis de resultados y conclusiones

Este proyecto de grado genera varias expectativas puesto que no se encontraron muchas evidencias del trato algebraico dentro de la música, sin embargo, esto no impidió la realización de éste, al contrario, promovió la búsqueda de estructuras y herramientas que permitan desarrollar este aprendizaje algebraico dentro de un ambiente musical.

Así mismo, este trabajo utiliza herramientas de la investigación experimental teniendo en cuenta el contexto del colegio, las distintas falencias de aprendizaje dentro del álgebra escolar y el desarrollo del pensamiento algebraico dentro de un aula de clases. En este capítulo se mostrará un análisis de la construcción del material algebraico musical con el que se pretendió enseñar álgebra haciendo énfasis en las habilidades de generalización y conceptos como las variables, la relación funcional y la proporcionalidad descritas anteriormente, además, muestra el análisis de la información recolectada una vez aplicadas las herramientas construidas.

4.1. Análisis de la construcción de material

En la construcción de los talleres y teniendo en cuentas los tipos de herramientas que se emplearon en este proyecto, se vio la necesidad de crear una estructura que permita la unión de estas dos disciplinas (música y matemáticas) con el fin de realizar la introducción del álgebra escolar por medio de la música, así mismo, debido a los problemas de aislamiento, contingencia y a la necesidad del uso de las TIC se emplean varias herramientas tecnológicas que posibilitan el desarrollo del ambiente de aprendizaje esperado; por último, se desarrolla una discusión con respecto a los retos, las evidencias y aspectos relevantes que se vieron en la construcción de este material.

4.1.1. Estructura

Para comenzar a realizar la estructura, se vio la necesidad de identificar los conceptos principales de cada uno de los conocimientos para una introducción al álgebra, después, se identifican estos conceptos en contextos musicales con el fin de emplear una modelación que desarrolle procesos algebraicos en la música y, por último, se realiza una trasposición didáctica como lo describe Chavellar (1997), teniendo en cuenta los conocimientos del álgebra a través de la música y cómo enseñar este conocimiento basado en los gustos de la actualidad, el contexto estudiantil y los gustos personales de cada estudiante, cosa que permite el desarrollo del conocimiento significativo.

4.1.2. Herramientas tecnológicas de experimentación y recolección de información

Las tecnologías utilizadas para la elaboración de este proyecto de grado varían desde tecnologías cibernéticas hasta la utilización de instrumentos musicales. Por un lado, las tecnologías cibernéticas permiten al estudiante adentrarse en un mundo virtual que le permite identificar cierto tipo de regularidades y características, en este caso, la plataforma virtual Learning entrega la paleta de sonidos y su representación con el fin de aprender sobre la estructura de la música y así realizar composiciones musicales; por el otro lado, el afinador DaTuner busca abstraer la información de ciertos sonidos en tiempo real, lo que conlleva a encontrar generalidades y conceptos donde se identifica la matemática haciendo énfasis en el pensamiento algebraico.

Si el profesor tiene conocimientos musicales, puede realizar la aplicación de los talleres y el desarrollo de estos conceptos explicándolos desde el instrumento musical. Esto permite que las personas que no tienen acceso a las TIC puedan emplear estas herramientas con el objetivo de

desarrollar el pensamiento algebraico por medio del análisis de las características del sonido en un contexto matemático, utilizando la generalización de escalas (armonía) y la descripción de patrones rítmicos y melódicos. Si el profesor no tiene conocimientos musicales, debe realizar los talleres con anticipación para identificar los conceptos básicos y así poderlos guiar en el aula de clases también, haciendo uso de la metodología descrita en el capítulo tres.

4.1.3. Discusión

Dentro de la construcción de los distintos talleres se vio la necesidad de conocer de las dos teorías, tanto la de estructura musical como de la algebraica, esto permite que se encuentren de forma más sencillas distintos conceptos de la matemática en la música y así, poder modelarlos en talleres con el fin de enseñar los distintos conceptos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad.

Por otro lado, la exploración de estos conceptos permite también encontrar distintas relaciones entre la música y las matemáticas, como el uso de límites, los distintos conjuntos numéricos desde los naturales hasta los irracionales, algunas concepciones geométricas de la música y también el análisis de la distribución de datos que no se tomaron en cuenta para este trabajo, pero que existen y que se aclaran en el cuadro del capítulo 2.3.

Por último, se resalta la importancia de generar nuevas herramientas de estudio utilizando TIC con el fin de mejorar las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las nuevas generaciones.

4.2. Análisis de la información recolectada en la investigación

La información recolectada dentro de esta investigación se clasificó en dos: la información de control, que contiene la información de la población donde no se aplicaron los talleres y la

información de experimentación, donde se recopilarán los datos en el grupo donde los talleres fueron aplicados.

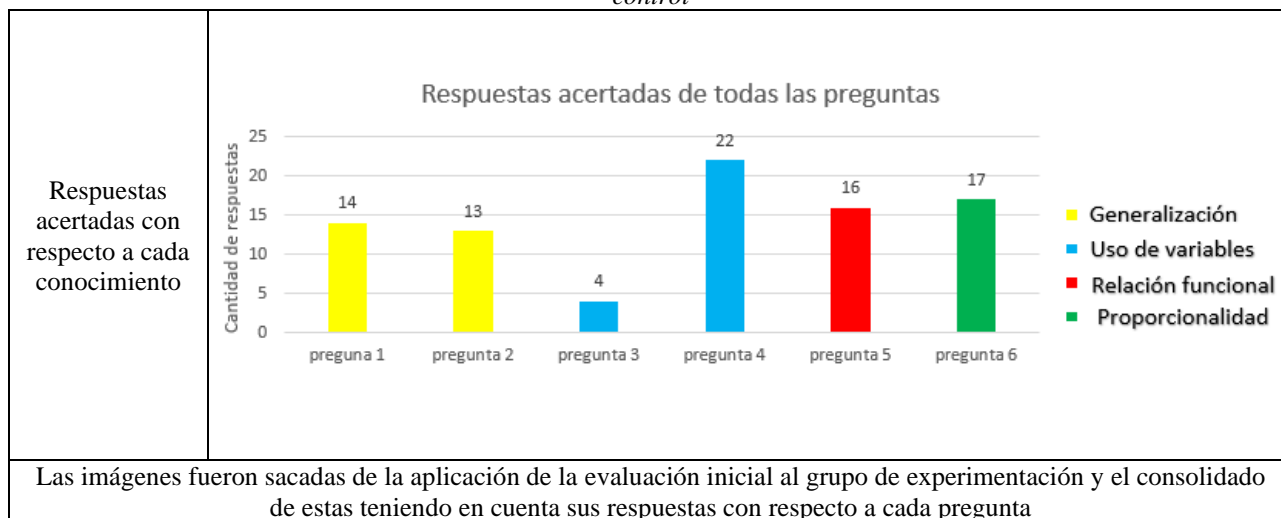
4.2.1. Procesamiento de datos

En este apartado se mostrarán los datos recolectados y una descripción y análisis de éstos en conjunto, con el fin de sacar algunas conclusiones en primera instancia se tendrán la relación de los datos de la evaluación inicial; más adelante, el procesamiento de los datos de la evaluación final y por último una comparación entre los datos recolectados.

Información de control

Durante la aplicación de la *evaluación de inicial* dentro del grupo de control, se encuentran los siguientes datos con respecto al análisis de los niveles de desarrollo de los conceptos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad de la siguiente forma:

Tabla 19: Relación de gráficas de respuestas con respecto a los conceptos básicos en la evaluación del grupo de control

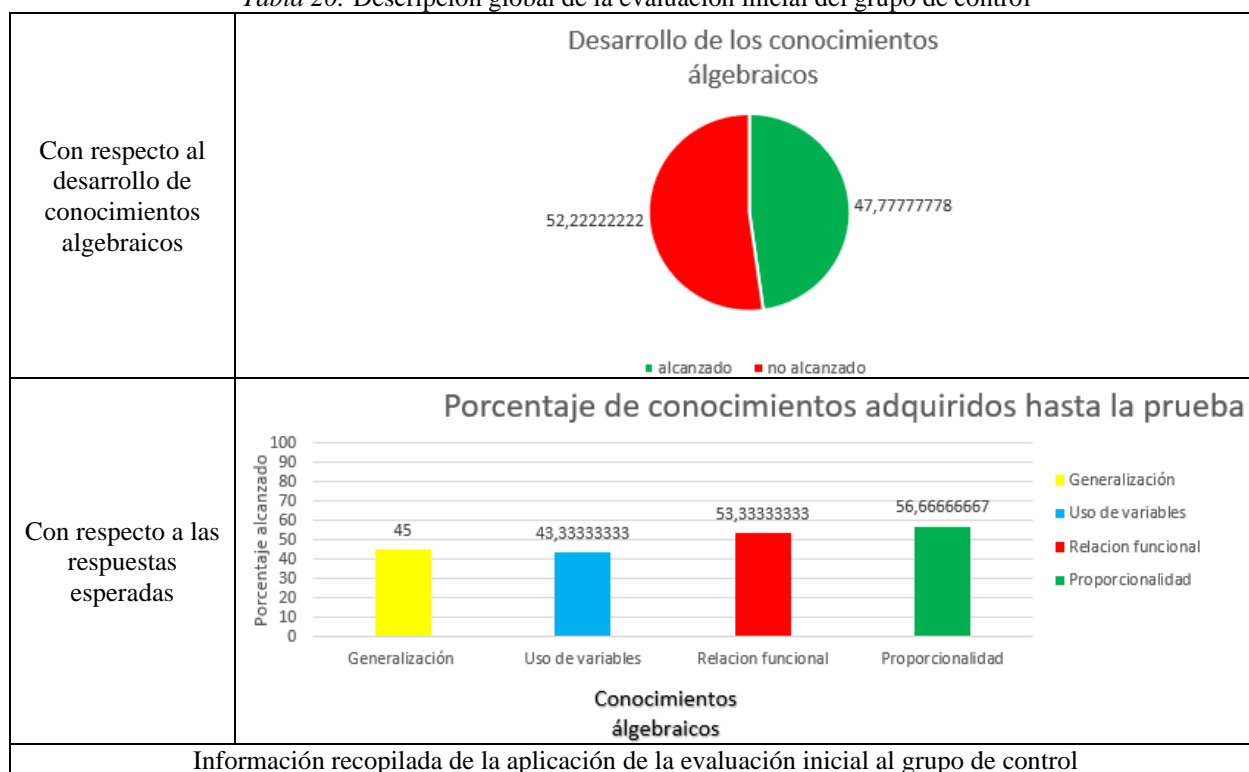


Con respecto a las respuestas relacionadas en la anterior tabla, se puede afirmar sobre la generalización que: menos de la mitad de las respuestas concluyen de manera correcta los

momentos donde se pueden utilizar el álgebra, además, que pocos entienden el concepto de generalización. Respecto al uso de variables, la gran mayoría no entiende que las variables tienen varios usos dentro del álgebra, en especial, su uso como relación funcional, también se puede evidenciar que la mayoría entiende que la incógnita es un tipo de variable, en tanto más de la mitad del grupo describe correctamente la relación funcional; con respecto a la proporcionalidad la gran mayoría brinda la respuesta correcta.

Con respecto a la información general de la evaluación se encontraron los siguientes datos que permiten evidenciar un panorama global del grupo de control:

Tabla 20: Descripción global de la evaluación inicial del grupo de control

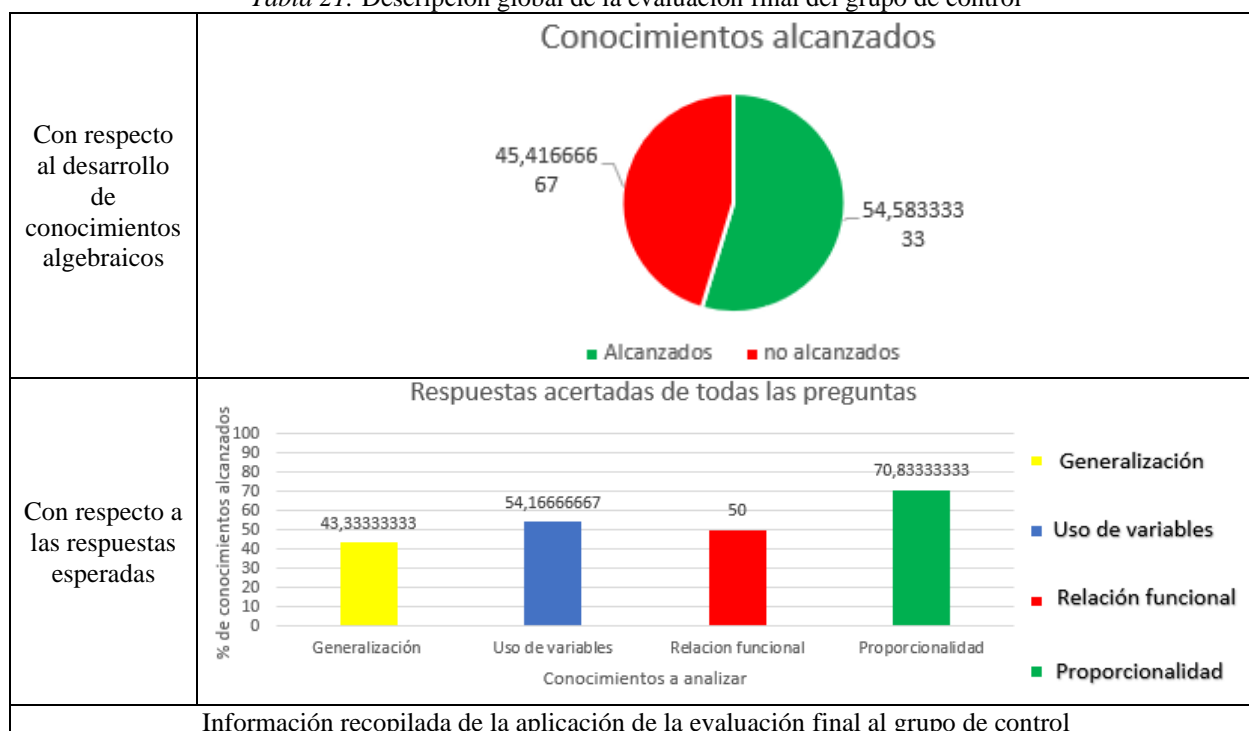


En la evaluación cuantitativa de los conocimientos matemáticos se encuentra la siguiente información: los estudiantes del grupo de control han alcanzado un desarrollo total de 47.7 % de los conocimientos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad,

teniendo en cuenta las descripciones de estos descritos en el capítulo 2. También se puede afirmar que la mayor dificultad se encuentra en el uso de variables y la mejor fortaleza está en entender que la incógnita es un tipo de variable y una herramienta que tiene varios usos, en especial, el de relación funcional teniendo en cuenta las evidencias de aprendizaje descritas en el capítulo de metodología.

Durante la aplicación de la *evaluación final*, se evidenciaron distintos datos relacionados con la evolución de los conceptos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad:

Tabla 21: Descripción global de la evaluación final del grupo de control

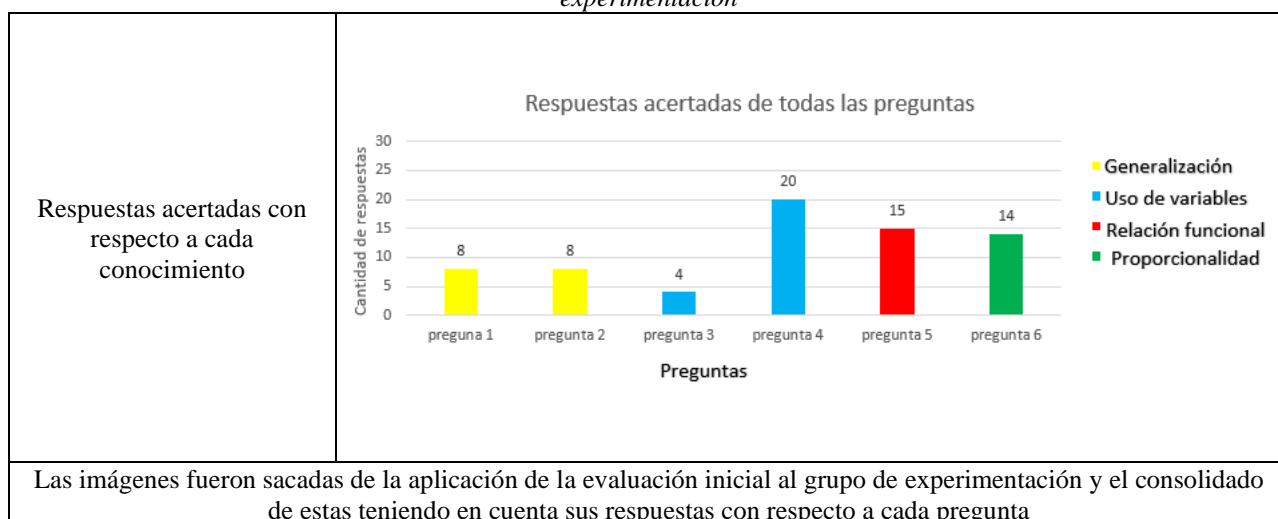


De la información anterior, se puede inferir que el conocimiento con mayor desarrollo es el de proporcionalidad y que los conocimientos algebraicos alcanzados con respecto a estos conceptos ya sobrepasa la mitad de lo esperado, también, que el conocimiento con menos desarrollo es el de generalización.

Información de experimentación

En la aplicación de la *evaluación de inicial* dentro del grupo de experimentación, se evidenciaron los siguientes datos con respecto al análisis de los niveles de desarrollo de los conceptos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad:

Tabla 22: Relación de gráficas de respuestas con respecto a los conceptos básicos en la evaluación del grupo de experimentación

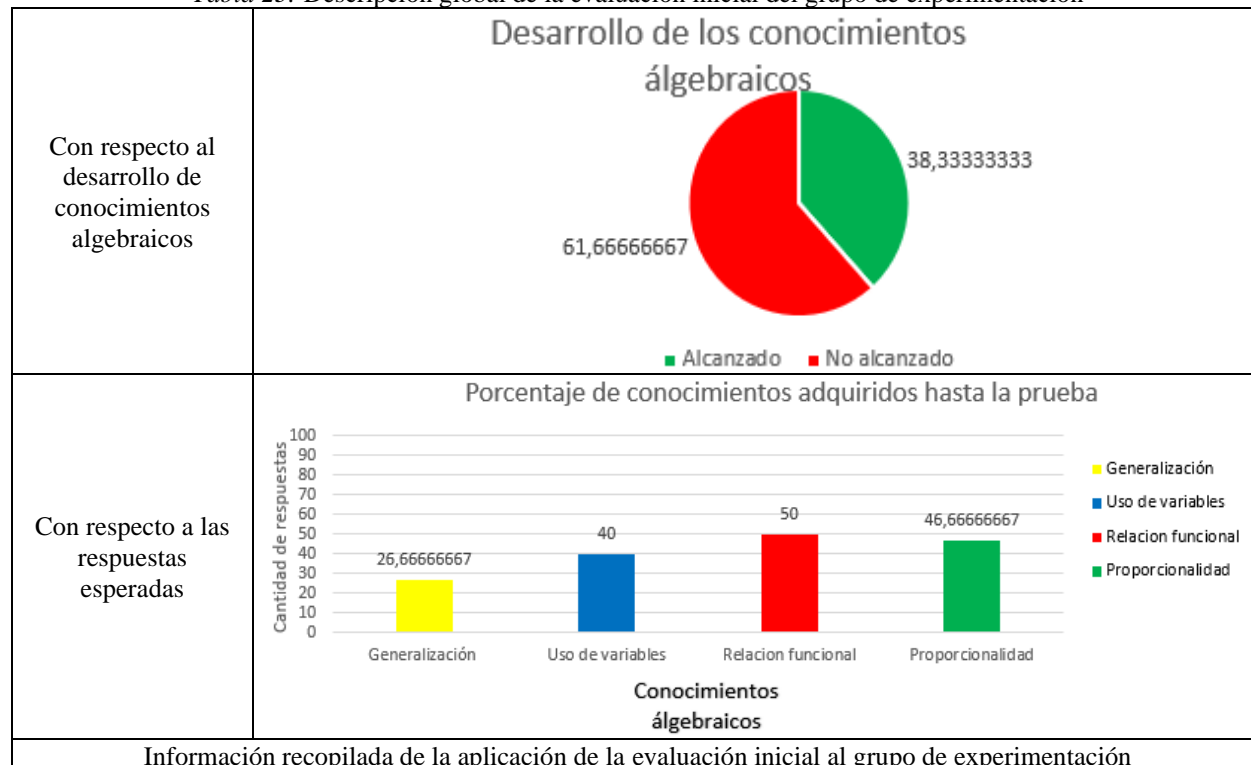


Teniendo en cuenta la información recopilada, se puede concluir que más de la mitad de los estudiantes del grupo de experimentación tienen problemas con los contextos en los que se debe utilizar el álgebra, pues la mayoría piensa que se utiliza para realizar operaciones de forma más sencilla, además, se evidencia que hay problemas con respecto a la definición de generalización.

Respecto al uso de variables, se puede identificar que entienden que las variables tienen varios usos, sin embargo, muy pocos lograron describirlos todos; así mismo, con relación al lado de la relación funcional, poco menos de la mitad acertaron a la respuesta, demostrando que hay un conocimiento básico acerca de este concepto. Por último, teniendo en cuenta las respuestas en torno a la proporcionalidad, se identifica que la mayoría tiene desarrollados conocimientos básicos sobre este concepto.

Teniendo en cuenta la información anterior y con el fin de encontrar un panorama global del grupo de experimentación, se pueden describir los datos de la siguiente manera:

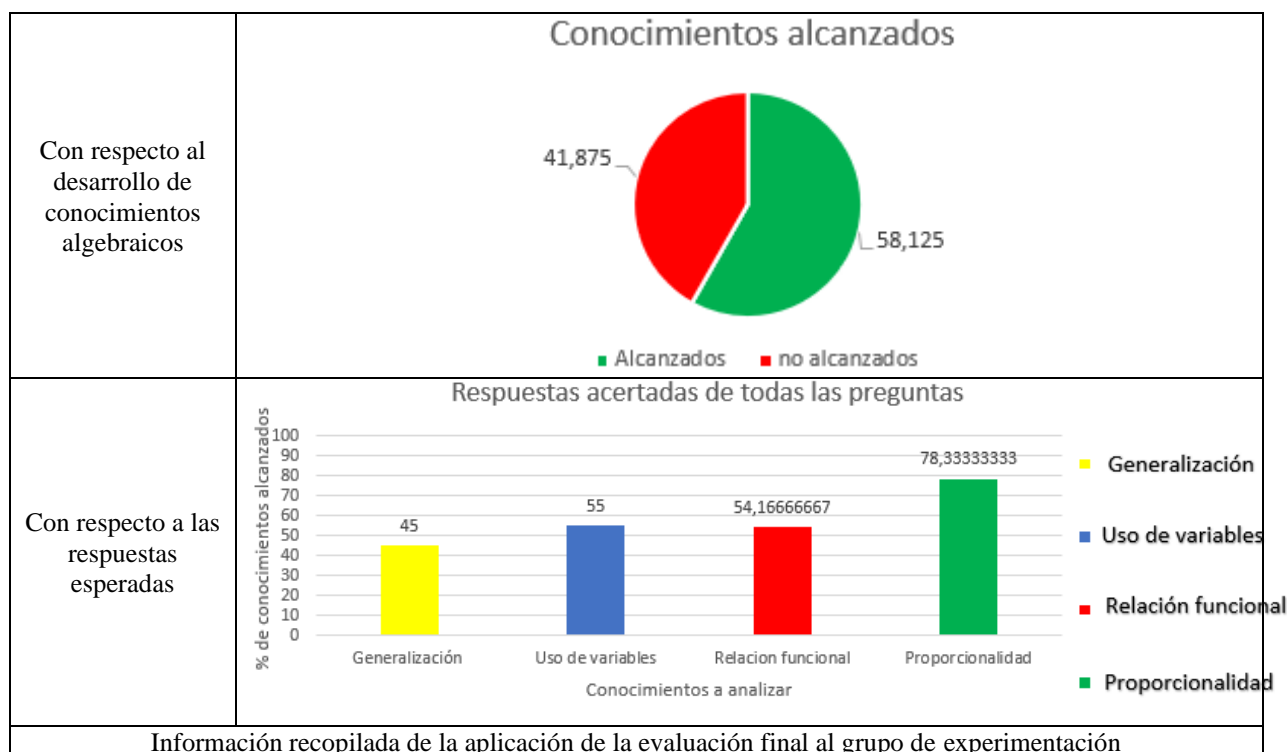
Tabla 23: Descripción global de la evaluación inicial del grupo de experimentación



Según la información anterior, se puede inferir que los estudiantes del grupo de control han alcanzado un desarrollo de 38.3 % de los conocimientos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad. También se puede afirmar que la mayor dificultad se encuentra en el uso de variables y la mejor fortaleza está en entender que la incógnita es un tipo de variable.

En la aplicación de la *evaluación final* se evidenciaron distintos datos relacionados con la evolución de los conceptos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad así:

Tabla 24: Descripción global de la evaluación final del grupo de experimentación



A partir de la información anterior, se puede identificar que el conocimiento con mayor desarrollo es el de proporcionalidad y que los conocimientos algebraicos alcanzados con respecto a estos conceptos ya sobrepasa la mitad de lo esperado, también, que el conocimiento con menos desarrollo es el de generalización.

4.2.2. *Discusión*

La discusión se enfoca en tres partes: en la comparación de datos de la evaluación inicial, los de la evaluación final y el cruce entre la evaluación inicial y final que describe el desarrollo de los distintos conceptos en los dos grupos de la investigación experimental.

Evaluación inicial

Con respecto a la evaluación inicial, se evidencia que los estudiantes del grupo de control acabaron en menos tiempo que los del grupo de experimentación; además, teniendo en cuenta la cantidad de respuestas acertadas que se describen como el desarrollo de los conocimientos algebraicos presentados en las tablas 22 y 24, se puede afirmar que los estudiantes del grupo de experimentación tienen un menor porcentaje (38.3%) que el grupo de control (47.7%) con respecto al desarrollo de los conceptos de generalización identificando su uso en contextos, también respecto a los distintos usos que tiene la variable; la relación funcional, como una relación que cumple la condición de que a cada elemento de un conjunto existe un único elemento del segundo conjunto y; la proporcionalidad como relación de dos conjuntos que crecen y decrecen a un valor constante.

También se identificó que el grupo de control y de experimentación tienen las mismas fortalezas y debilidades que se enfocan en la proporcionalidad, entienden ideas sobre la proporcionalidad directa y el uso de variables como incógnita, variable indeterminada y relación funcional respectivamente.

Evaluación final

Al realizar la comparación de la evaluación inicial con la evaluación final (Tablas 23 y 25), se evidencia que en las poblaciones de control y de experimentación existe un desarrollo de 54.58% y 58.125% respectivamente, además, que el desarrollo del grupo de experimentación fue de 19.79% y el del grupo de control de 6.8%. También se identifica que el grupo de experimentación desarrolla en mayor proporción los conocimientos adquiridos de generalización, uso de variables, relación funcional y proporcionalidad. La mayor debilidad en ambas poblaciones fue la del uso

de la generalización y el álgebra mostrando un desarrollo de 45% del grupo de experimentación y 43.3% del de control.

4.3. Conclusiones

Para concluir, se presentan los aspectos más relevantes del presente proyecto, los cuales permitieron el cumplimiento de los objetivos propuestos inicialmente. A continuación, se describen las conclusiones de la siguiente forma:

4.3.1. Conclusiones de construcción

A lo largo del proyecto, se muestra la importancia de la utilización de la música con el fin de desarrollar distintos conceptos del álgebra en la educación escolar. Se logra encontrar diferentes tipos de enlaces que relacionan la música y distintos conceptos algebraicos, además, se estructura una teoría algebraica-musical que permite el desarrollo de la construcción de forma más sencilla.

Como resultado, se logra la construcción de cinco talleres que utilizan las características de ritmo, melodía y armonía con el fin de enseñar álgebra a estudiantes de la UEFM. De este modo, se dan por cumplidos los dos primeros objetivos específicos del presente proyecto. Por último, es importante mostrar que existen distintos conocimientos matemáticos identificados en la música y, que, a partir de éstos, se pueden desarrollar distintos conceptos de la matemática.

4.3.2. Conclusiones de la investigación

Ésta la investigación evidencia el desarrollo de los distintos conceptos de generalización en diferentes contextos con el fin de identificar su utilidad: uso de variables (incógnita, variable indeterminada y como relación funcional), relación funcional (relación entre dos conjuntos con su respectiva condición) y la proporcionalidad, (relación específica entre dos conjuntos).

El grupo de experimentación se desarrolla más que el grupo de control en una proporción de casi tres veces $\left(\frac{19.79}{6.8} = 2.91\right)$, esto permite afirmar que el uso de estos talleres permitió que estos conceptos se desarrollaran de una mejor forma y el grupo de experimentación tuviera una mejora con respecto al desarrollo de los conocimientos introductorios para el estudio del álgebra, dando así por cumplido el último objetivo específico.

Conclusión general

Por último y según lo anterior, se cumple el objetivo general de este proyecto de grado, cuyo fin es diseñar una secuencia de actividades basadas en la música para iniciar la enseñanza del álgebra a estudiantes de grado octavo del colegio Unidad Educativa El Futuro del Mañana de la ciudad de Bogotá; mostrando que el desarrollo de los componentes algebraicos se puede lograr a partir de actividades o talleres que utilizan la música como herramienta para la enseñanza del álgebra a estudiantes de este grado.

5. Anexos y bibliografía

5.1. Bibliografía

Álvarez, L. M. (2012). *Patrones y Regularidades Numéricas: Razonamiento Inductivo*. Bogotá Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Anonimo. (2008). *Música y sonido: el medio ambiente sonoro*. Concepción: Colegio Aezobispado Santsima Consepcion.

Apolinar, E. S. (2011). *Diccionario Ilustrado de conceptos matemáticos* . Mexico DC: Mexico educación.

Baldor, A. (1941). *Algebra*. Cuba: Grupo Editorial Patria.

Blázquez, R. M. (2012). *Trabajo de fin de grado en maestro de educación primaria música y matemáticas*. Salamanca España: Universidad De salamanca.

Caparrini, L. A. (2017). *Clasificación de subgéneros de música electrónica*. Madrid España: Universidad Complutense de Madrid .

Carrión, E. (2016). *Expresión musical y su didáctica*. Madrid España: UNIVERSIDAD CAMILO JOSÉ CELA.

Carrión, V. L. (2008). *Musica y matemáticas La armonia de los numeros*. Madrid: Federación española de sociedades de profesores en matemáticas.

Castellanos, S. M. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación El caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Meta: Colegio Galan Cumaral Meta.

Chavellard, Y. (1997). *La transposición didáctica del sabio al saber enseñado*. Paris: La Pensée, Sauvage.

Contreras, G. d. (2017). *Matemáticas a través de la música en educación primaria: Reflexión y propuesta de actividades*. Jaen, España: UNIVERSIDAD DE JAÉN.

Cordantonopulos, V. (2002). *Curso completo de teoría musical*. Caracas: Comversion pdf por Hector Fernandez.

Corona. (2004). *Habilidades de pensamiento Generalización*. Bogotá Colombia: EAN.

Recuperado el 11 de 01 de 2020, de Universidad UEAN:

<http://univirtual.ean.edu.co/publico/habilidades/GENERALIZACION.pdf>

Corona, D. (2004). *HABILIDADES DE PENSAMIENTO*. Recuperado el 11 de 01 de 2020, de Uniiversidad UEAN:

<http://univirtual.ean.edu.co/publico/habilidades/GENERALIZACION.pdf>

Corral, E. B. (2001). *MATEMÁTICAS 1º ESO*. España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Diez, C. A. (1998). *Fundamentos del álgebra*. Coyoacan: Universidad Autonoma Metropolitana.

EDEM. (2016). *Pensamiento algebraico: Un contraste entre resoluciones de distintos niveles académicos, una tarea de generalizar patrones*. Bogotá: Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM. Volumen 3, año 2016. ISSN 2422-037X (en línea) .

Encarnación Castro, M. C. (2010). *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático*. Granada: Universidad de Granada.

- Fernández, J. M. (1998). *Introducción al álgebra*. Cómputa – Málaga: IES El Almirante.
- Florencio, M. O. (2016). *Estudio y evaluación de algoritmos de seguimiento del pulso musical*. Alacant: Universidad de Alicante.
- Fraleigh, J. B. (1987). *Algebra Abstracta*. Wilmington, Delaware, USA: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Gelabert, S. G. (1996). *Las regularidades: fuente de aprendizaje matemático*. Argentina: Consejo Provincial de educación .
- Godino, J. D. (2002). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada España: Universidad de Granada.
- Gómez, J. M. (02 de 05 de 2019). *Lemnismath*. Obtenido de Lemnismath:
<https://www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ>
- González, C. A. (2006). *Las matemáticas como una herramienta para la composición musical*. Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.
- Juárez, J. A. (2010). *Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV*. Mexico: Números Revista didáctica.
- Lerma, H. D. (2009). *Metodología de la investigación* . Bogotá: Ecoe Ediciones.

- Lillo, J. S. (2015). *El Hip Hop como movimiento social y reivindicativo*. Valencia España: Universidad politecnica de Valencia.
- López, H. H. (2016). *El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato*. Veracruz Mexico: Educación Matemática, vol. 28, núm. 3, diciembre de 2016.
- Lores, J. M. (2011). *De lo educativo y lo instructivo desde el método de enseñanza universitaria. Aproximación a las implicaciones cognitivas y volitivas de los procesos inductivos y deductivos*. Guantanom, Cuba: Revista Docencia e Investigación. N° 21. 2011.
- Luque, C. L. (2014). *Clasificar, Medir e invertir*. Bogotá: Universidad 1pedagógica Nacional.
- Maria Sagrario Barbosa. (2019). *Unidad Educativa El futuro del Mañana Propuesta educativa*. Bogotá: Unidad Educativa El futuro del Mañana.
- Martinez, M. D. (2019). *Transición de la aritmetica al álgebra* . Nicaragua: Revista Electronica de Conocimientos Saberes y prácticas.
- Mateos, F. P. (2012). *Lenguaje Musical I*. Quito: PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR.
- Meana, M. G. (2013). *Matemática Iniciacion al álgebra* . Buenos Aires: NIVEL SECUNDARIO PARA ADULTOS MÓDULO DE EDUCACIÓN SEMIPRESENCIAL.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación .
- MEN. (2006). *Estandares basicos de competencia*. Bogotá colombia: MEN.
- MEN. (2016). *Derechos Basicos De aprendizaje en Matemáticas v2*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- Meneses, J. A. (2010). *Influencia del tempo de la música en las emociones*. Bogotá: Revista de psicología Universidad Nacional De Colombia.
- Merino de la Fuente, J. (2008). *Las vibraciones de la música*. Alicante: Club Universitario.
- Merino, E. C. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5° de educación primaria en una tarea de generalización* . GRANADA: UNIVERSIDAD DE GRANADA.
- Morales, L. P. (2008). *Un estudio del concepto de variable en los libros de texto*. Mexico: Universidad de Sonora.
- Moreno, D. P. (2012). *Caracterización del proceso de generalización en primaria*. Bogotá colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Pachon, A. S. (2015). *Matemáticas y Música Una armonía desde la teoría de grupos*. Bogota: Universidad Pedagógica Nacional.
- PEÑA, J. J. (2005). *La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental*. Medellín: UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA.
- Pérez, C. d. (2013). *Educación, música y matemáticas: un triángulo afinado en armonía*. Valladolid España: Universidad de Valladolid.
- Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns*. PARIS FRANCIA: Universidad de Laurentine .
- Sánchez, A. M. (2015). *La modelación matemática: una visión interesada de la realidad*. Caracas: Universidad Nacional Experimental Politécnica de la.

- Sánchez, M. V. (2010). *Guías de Matemáticas para Economía y Ciencias Sociales*. Venezuela: Sector La Hechicera, Núcleo universitario Pedro Rincón Gutiérrez,.
- Sans, J. F. (2012). *Definiciones de ritmo musical*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.
- Universitat per a majors. (2018). *Nociones Básicas de Elementos Del Lenguaje musical*. España: Universitat per a majors.
- Vela, M. (2017). *El análisis musical como herramienta pedagógica e interpretativa en la enseñanza del piano en Conservatorios Superiores aplicado al aprendizaje de la forma sonata Capítulo VI. Parámetros analíticos: forma. Material no publicado*. Navarra: no publicado.
- Victoria, M. (2002). *Álgebra de estudio*. Merida Venezuela: Universidad de Los Andes.
- Yañez, E. C. (2011). *R: CAMPO ORDENAD*. Chile: UNIVERSIDAD CATOLICA DE TEMUCO.

Anexos

- Ocho tablas de Excel donde se muestra el recopilado de la información general:

Evaluación de control inicial.xls

Evaluación de control final.xls

Evaluación de experimentación inicial.xls

Evaluación de experimentación final.xls

Armonía 1.xls

Ritmo 1.xls

Ritmo 2.xls

- A continuación, se presentan los enlaces de los videos utilizados

Introducción: <https://www.youtube.com/watch?v=w6BCGQuZ5aE>

Video del ritmo 1: https://www.youtube.com/watch?v=e7cv_MOChx0&t=4s

Video del ritmo 2: <https://www.youtube.com/watch?v=vK2IOmbXvK8&t=49s>

Video de la armonía 1: <https://www.youtube.com/watch?v=FHHyDrB1X4A&t=56s>

Video de la armonía 2: <https://www.youtube.com/watch?v=zjO7joi9ZE>

Video de la melodía: <https://www.youtube.com/watch?v=jo29nETHmaE&t=1s>

- Los talleres:

Taller 1.pdf

Taller 2.pdf

Taller 3.pdf

Taller 4.pdf

Taller 5.pdf

- Evaluaciones

Evaluación inicial.pdf

Evaluación final.pdf