DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS SURGIDOS EN UNA TAREA SOBRE GENERALIZACIÓN REALIZADA POR ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

JUAN CARLOS PINILLA ACEVEDO
ALBERTO RAMIREZ GALE

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2013

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS SURGIDOS EN UNA TAREA SOBRE GENERALIZACIÓN REALIZADA POR ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

Por:
JUAN CARLOS PINILLA ACEVEDO
ALBERTO RAMIREZ GALE

Trabajo de grado entregado para optar por el título de
Especialista en Educación Matemática

Asesora:
MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ
Profesora Departamento de Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2013

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado"***Descripción y análisis de los argumentos surgidos en una tarea sobre generalización realizada por estudiantes de grado séptimo"*** Presentado por los estudiantes:

JUAN CARLOS PINILLA ACEVEDO – 2013182021
RAMIRÉZ GALÉ ALBERTO - 2013182022

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **45** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 06 días del mes de diciembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) María Nubia Soler
MARÍA NUBIA SOLER

Jurado:

Profesor(a) Johanna Montejo B
JOHANNA MONTEJO

ANEXO A. FORMATO RAE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE
Código:FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 5 de 67**

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Descripción y análisis de los argumentos surgidos en una tarea sobre generalización realizada por estudiantes de grado séptimo.
Autor(es)	PINILLA Acevedo Juan Carlos y RAMÍREZ Gale Alberto
Director	María Nubia Soler-Álvarez
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 67 páginas.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Argumentación, Razonamiento, Generalización, Educación, Matemáticas, Modelo Toulmin

2.Descripción

En este trabajo se describen y analizan los argumentos surgidos en una tarea de generalización resuelta por los estudiantes del curso 702 del colegio Bravo Páez. Está en marcado en la línea de investigación argumentación y prueba del Departamento de matemáticas de la UPN y surge de la necesidad de fortalecer en los estudiantes habilidades argumentativas al desarrollar una Actividad matemática. En la descripción y análisis de los argumentos surgidos en la tarea, se tuvo en cuenta el modelo de Toulmin y las etapas de generalización de Mason. Además, se espera que este trabajo lleve a los lectores a reflexionar sobre la importancia que tiene la implementación de estos tipos de tarea en los planes de estudios en la básica primaria y secundaria.

3.Fuentes

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes. Traducción de Pedro Gómez. Una Empresa Docente.

BLANCHÉ, R. (1973). *Le raisonnement*. Paris: P.U.F.

DIAZ, M. (2011). *Cursillo: comunicación y pensamiento visual en la clase de matemáticas.* Universidad Tecnológica y Pedagógica de Colombia.

HARADA, E. (2009). *Algunas aclaraciones sobre el "modelo" argumentativo de Toulmin.* Universidad Autónoma de México.

IZQUIERDO, R. & GRANADOS, M. (2012). *Caracterización de los argumentos que emergen en el desarrollo de una tarea de generalización realizada por estudiantes de grado noveno.* Tesis Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

MASON, J., GRAHAM, A. PIMM, D. & GOWAR, N (1999). *Rutas hacia el algebra y Raíces del álgebra*. Traducción y edición de Cecilia Agudelo Valderrama. Tunja: Sección de Publicaciones, UPTC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: MEN

RODRIGUEZ, L. (2004). *el modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa.* Revista digital universitaria vol 5. Número 1. http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/art2.htm

TOULMIN, S. (2003). *The uses of argument.* Reino Unido de Gran Bretaña: Cambridge UniversityPress.

4.Contenidos
El presente trabajo se divide en siete capítulos. En el primero se encuentra el planteamiento del problema, a partir de unas preguntas iniciales. Se hace la respectiva justificación del porque es importante realizar esta propuesta sobre tareas que faciliten la argumentación en clase, de igual manera se plantean los objetivos generales y específicos apoyados en el modelo argumentativo de Toulmin y el proceso de generalización de Mason En el segundo capítulo se encuentra el marco de referencia, en el cuál se encuentran todos los referentes teóricos que fundamentan el presente trabajo de grado. Se hace énfasis en los autores Toulmin S, y Mason J. En el tercer capítulo se encuentra la metodología. En ella se describen las estrategias que se implementaron durante el desarrollo de la tarea de generalización. Así mismo se describe el diseño del instrumento y su respectiva aplicación, y la manera de recolectar la información obtenida en el desarrollo de la tarea. En el cuarto capítulo se encuentra el análisis y la descripción de los argumentos obtenidos en el desarrollo de la tarea. Para esto es indispensable el soporte teórico del modelo Toulmin y las fases o raíces del proceso de generalización planteado por Mason. En el quinto capítulo se encuentra las conclusiones teniendo en cuenta el análisis y la descripción que se hizo de los argumentos evidenciados durante el desarrollo de la tarea. Dichas conclusiones se distinguen en tres aspectos esenciales: lo que corresponde a logro de los objetivos, lo referente a los avances en argumentación hechas por los estudiantes dentro del proceso de generalización y las conclusiones generales. En el sexto capítulo están las recomendaciones y sugerencias que se hacen con respecto al trabajo realizado y en general, a las futuras investigaciones que se hagan en relación a la argumentación desde las tareas sobre generalización. Y su incidencia en los escenarios escolares. Y en el capítulo séptimo se encuentran las referencias bibliográficas utilizadas en el presente trabajo, que aportan de manera significativa al marco de referencia y como orientador al análisis de la información.

5. Metodología
Se utilizó una tarea escrita sobre generalización en forma individual y grupal. Se realizó un registro de audio y video de las intervenciones de la socialización de sus resultados. Igualmente se tiene documentos, escritos, dibujos que se constituyen en evidencias de lo dicho por los estudiantes. Las sesiones en que se desarrolló el presente trabajo fueron: Un pilotaje con estudiantes delas mismas características de la población a la cual va dirigida. Los ajustes pertinentes que se hizo a la tarea teniendo en cuenta los resultados del pilotaje y La aplicación de la tarea final y su respectiva relatoría para su posterior análisis. La población de estudio está conformada por el grupo de estudiantes del curso 702 del colegio bravo Páez.

6. Conclusiones
De acuerdo con el desarrollo del presente trabajo de grado se puede concluir que finalizado el análisis de la información recolectada y desde los objetivos planteados, se evidencia la masiva participación de los estudiantes en el desarrollo de la tarea y por ende las numerosas discusiones y argumentaciones que se dieron en la socialización de sus respuestas, como también un avance significativo en desarrollo de sus habilidades argumentativas.

Elaborado por:	PINILLA Acevedo Juan Carlos y RAMÍREZ Gale Alberto
Revisado por:	María Nubia Soler Álvarez

Fecha de elaboración del Resumen:	20	10	13

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, Octubre 2013

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis agradecimientos a:

Queremos agradecer primero a Dios por habernos permitido llegar hasta aquí.

En segundo lugar a nuestras familias por su apoyo incondicional durante todo este proceso académico; hacemos reconocimiento especial a nuestros hijos por su paciencia y comprensión, gracias de todo corazón sin su apoyo no hubiese sido posible seguir en este camino.

A la Universidad Pedagógica Nacional por brindar espacios para la formación y mejoramiento a los docentes de Colombia, en especial por permitirme participar de la especialización en Educación Matemática, con énfasis en Argumentación y Prueba.

A nuestra asesora María Nubia Soler por su entrega, dedicación y ayuda que permitieron la consecución de este logro.

A mis compañeros de la especialización, personal docente del área de matemáticas de la Institución educativa Bravo Páez por sus aportes y acompañamiento durante nuestra formación como especialistas

A todos los que de una u otra manera me apoyaron, muchas gracias, que Dios los bendiga.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

TABLA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está enmarcado dentro de la línea de Investigación Argumentación y Prueba del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En este proyecto se describen y analizan los argumentos surgidos en una tarea sobre generalización realizada por los estudiantes del curso 702, del Colegio Distrital Bravo Páez, ubicado en la localidad de Rafael Uribe Uribe.

Se utiliza como marco de referencia conceptual el modelo de Toulmin y las etapas de generalización de Mason, para describir y analizar los tipos de argumentos surgidos durante el desarrollo de la tarea.

El documento se divide en siete capítulos. En el primero se expone el planteamiento del problema, en el cual se plantea la justificación y el objetivo general y específico.

El segundo capítulo hace referencia al marco de referencia que orientó la descripción y el análisis de los argumentos surgidos en la tarea.

En el tercer capítulo se encuentra la metodología que hace referencia a las estrategias que se utilizaron para la aplicación de la tarea y la recolección de la información. Para esto se realiza el trabajo en dos sesiones; sin embargo fue necesario hacer un entrenamiento a los estudiantes con tareas sobre generalización similares a la propuesta en el proyecto y se aplicó un pilotaje con estudiantes que tuvieran las mismas características de la población de estudio original para hacer un análisis y reestructuración del instrumento de acuerdo a los resultados del pilotaje. Finalmente se aplicó el instrumento mejorado.

En el cuarto capítulo está el análisis de la información recolectada, haciendo uso del modelo de Toulmin y las fases o Raíces del proceso de generalización de Mason.

En el quinto capítulo se relacionan las conclusiones del trabajo desarrollado de acuerdo con la descripción y análisis de los argumentos surgidos y de los objetivos planteados.

En el sexto capítulo hace referencia a las recomendaciones y sugerencias en relación al trabajo realizado y los futuros proyectos que tengan similitud con la tarea sobre generalización realizada.

En el séptimo y último capítulo están las referencias bibliográficas que contribuyen al presente trabajo de grado.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde los Estándares en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (2003, p.54), se destaca la importancia de la competencia argumentativa como una de las herramientas que contribuyen a la formación de ciudadanos críticos y propositivos en nuestro país. Es así, como los procesos de razonamiento y argumentación en la clase de matemáticas son de gran importancia en la construcción y validación del conocimiento matemático, llevando al estudiante, en primer lugar, a defender sus ideas con argumentos sólidos y capaces de demostrar, dando las razones pertinentes sobre su validez. Y en segundo lugar, el estudiante adquiere las herramientas necesarias para exponer contra argumentos para refutar las ideas que considere falsas.

En este sentido, el trabajo de grado que se presenta tiene como propósito aportar a los estudiantes del grado séptimo, en especial al curso 702 del Colegio Distrital Bravo Páez, herramientas para fortalecer sus habilidades argumentativas al momento de realizar actividad matemática.

Desde la experiencia docente, en el grupo de estudiantes del curso 702, se ha evidenciado, en primer lugar, que aún presentan serias dificultades al momento de dar razón sobre la validez o falsedad de una afirmación al solucionar algunos problemas matemáticos. En segundo lugar, la transición del paso de la aritmética hacia el álgebra, es un camino difícil para los estudiantes debido a la errónea interpretación que dan a los símbolos y también al planteamiento de un enunciado al expresarlo en un lenguaje algebraico.

En correspondencia con lo dicho, a continuación se enuncian las preguntas de indagación de este trabajo de grado y los objetivos para este.

De acuerdo con la tarea desarrollada¿el grupo de estudiantes del curso 702 logra identificar patrones o regularidades en desarrollo de la tarea de secuencias geométricas?

De acuerdo con las etapas de generalización según Mason (1999) ¿Cuáles son los procesos argumentativos que desarrollaron los estudiantes durante el desarrollo de la tarea?

Según el modelo de Toulmin (2003) ¿Qué tipos de argumentos surgieron en el desarrollo de la tarea sobre generalización por parte de los estudiantes del curso 702?

1.1. JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo nace de una necesidad de generar espacios académicos para actividades matemáticas de razonamiento en estudiantes de básica secundaria, la importancia que tiene esto, radica exclusivamente en contribuir a la formación de estudiantes en habilidades de argumentar, debatir y defender afirmaciones que hacen. Es entender que el proceso de razonar presente conlleva a dar cuenta que el ser humano de manera natural vive razonando frente a lo que ve, escucha y hace. Que en cualquier escenario de la vida del hombre se vive inmerso en el debate y la discusión, en defender posturas mediante razones , es ahí donde nuestra propuesta cobra sentido y significado, al ofrecer elementos pedagógicos y didácticos frente a loque se ha venido haciendo en las clases de matemáticas en el aula y por qué se hace inaplazable reflexionar frente a la actividad docente y de qué manera estamos comprometidos con desarrollar en los estudiantes competencias matemáticas sólidas donde se evidencie la competencia argumentativa.

La pertinencia de llevar a cabo este trabajo de grado se encuentra fundamentado en varios aspectos a decir.

En primer lugar, la línea de Argumentación y Prueba desarrollada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, centra sus estudios por un lado en la descripción de los razonamientos y argumentos existentes en la clase de matemáticas la cual involucra la labor docente y la labor de los estudiantes, y por otro lado en las características que deben tener algunas tareas que promueven las formas de razonar y argumentar en el aula y que la existencia de tareas de generalización son las que mejor se adecuan e involucran la acción de argumentar. Izquierdo (2012).

Por lo tanto el trabajo de grado pretende aportar a la línea de investigación, tipos de tareas que ayuden a los estudiantes a potenciar sus habilidades argumentativas.

En segundo lugar, en el proceso de enseñanza y aprendizaje se ponen en juego elementos sociales y cognitivos, los sociales giran en torno a la motivación, el interés y el agrado por la dinámica como el docente lleva su enseñanza de las matemáticas, y los cognitivos radican en la interacción que tiene los estudiantes con la tarea propuesta por el docente, para la población motivo de este trabajo reafirma que en edades de 12 a 14 años, esas propuestas en el aula deben llevar buen contenido de innovación por parte del docente y así mismo en contraprestación se genera interés en el estudiante. Izquierdo (2012).

En este sentido, es importante aceptar que la actividad de razonar no se reduce a un conjunto de reglas que pueden aplicarse en la solución de problemas; es una perspectiva en la que existe una conceptualización dinámica en la misma matemática como ciencia y en la cual es fundamental identificar elementos que ayuden a desarrollar y promover una disposición matemática en los estudiantes para defender sus ideas y enfrentarse a sí mismo y a los demás para argumentarlas.

En ese orden de ideas se hace necesario que para el desarrollo de habilidades argumentativas, la mejor manera es utilizar tareas basadas en observación de regularidades, atractivas para los estudiantes y llenas de posibilidades de enfrentarlas de diferentes maneras generando así una clase cognitiva y socialmente agradable. Mason (1999)

1.2.OBJETIVO GENERAL

Describir y analizar las formas de argumentar usadas por parte de los estudiantes del curso 702 del Colegio Distrital Bravo Páez, al resolver una tarea sobre generalización.

1.1. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Evidenciar las etapas de generalización según Mason en el desarrollo de la tarea.

2. Establecer relaciones entre los procesos de argumentar y generalizar.

3. Identificar los argumentos surgidos en el desarrollo de la tarea sobre generalización.

4. Describir las formas de razonar empleadas por los estudiantes del curso 702 al resolver una tarea sobre generalización.

2. MARCO DE REFERENCIA

2.1.RAZONAMIENTO

Para el desarrollo de este trabajo de grado, es pertinente dar claridad a lo que se está entendiendo como razonamiento y en especial el matemático.

Balacheff (2000) considera el razonamiento como una actividad intelectual no completamente explícita cuya su función es la de manipular la información dada o adquirida, para generar una nueva información. (p.13)

Blanché (1973) al ser citado por Balacheff (2000) considera que:

> *"el razonamiento se acerca cada vez más a la intuición en la medida en que se concentra el pensamiento, entendido como acto de la mente. Por el contrario, cuando se detiene en su expresión verbal o simbólica, aparece como una manera de organizar el discurso para convertirse al final en una serie de operaciones formales exactamente ordenadas, es decir, un cálculo"* (p.39)

En este punto vale la pena precisar aspectos que los autores presentan para definir lo que significa el razonamiento. En el acto de razonar y las situaciones que lo generan se denotan las inferencias explicitas pero también la exploración frente a una situación dada, para nuestro caso un problema matemático. Es claro que el razonamiento es una actividad intelectual que se hace totalmente evidente en la medida que se expresan las ideas, las creencias de lo que se considera como cierto en el desarrollo del problema propuesto. Vinculando las diferentes posturas de los autores antes expuestos, podemos decir, que el razonamiento como actividad conlleva a dar cuenta del origen de información nueva que debe ser revisada y evaluada y en forma progresiva avanzar hacia la consolidación de resultados cada vez más creíbles y aceptados por los demás como válidos.Balacheff (2000).

El proceso de razonamiento de acuerdo a los estándares en matemáticas (2003) consiste en percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Esto entendido como unos indicadores que permiten dar cuenta cómo se va dando dicho proceso en el estudiante y de qué manera se fortalece, desarrollando tareas que impliquen motivar la actividad mental de razonar. (p.54)

El razonamiento matemático se nutre entonces de los argumentos que son la expresión explicita del acto de razonar, del cual trataremos más adelante. Ahora precisar que dichos indicadores enmarcan lo que una clase de matemáticas provocaría el proceso de razonar. El proceso de acuerdo con los estándares hace ver por un lado que el razonamiento posee una tipología y que su aplicación depende en gran manera de la lógica con que se debe resolver alguna cuestión matemática. El Ministerio de Educación (2006), denota como tipos de razonamientos el lógico inductivo y abductivo para situaciones en las cuales se quiera formular hipótesis o conjeturas, y el lógico deductivo para poder comprobar con sentido la proposición con respecto a otras ya aceptadas como teoremas, axiomas, postulados o principios, o en dado caso refutar por carecer de lógica y sentido haciendo uso de otras proposiciones, o basándose en realización de contraejemplos(p.54).

2.1.1.El modelo argumentativo de Toulmin

Ahora bien ¿Qué es el modelo argumentativo de Toulmin? , Para Harada (2009) presenta dos interpretaciones de su significado:

> "*La primera interpretación, que no sólo comparten algunos críticos sino también ciertos apologistas y que en este escrito denominaremos preposicional, concibe a ese modelo como un patrón para elaborar razonamientos, diferentes a los formales deductivos, por ser más completos y cercanos a los argumentos cotidianos y disciplinarios, pero, finalmente, solamente razonamientos aislados y descontextualizados (un conjunto de proposiciones que apoyan la verdad de otra). La segunda interpretación, que llamaré dialéctica o retórica, entiende al modelo de Toulmin como una guía para construir esquemas que pueden servir para redactar textos argumentativos o participar en diálogos también argumentativos. En esta segunda interpretación se pone el acento en los elementos dialécticos y retóricos que permiten persuadir, convencer o alcanzar acuerdos" (p.46)*

En educación matemática, la enseñanza de la argumentación tiene su propósito fundamental en los estudiantes, que aprenda a defender sus aseveraciones frente a lo que ve e interpreta. En otras palabras los docentes pueden motivar a los estudiantes a encontrar la evidencia que fundamenta una aserción. Rescatar en Harada que el modelo de Tolumin pretende como herramienta por un lado desarrollar el razonamiento inductivo y por otro lado la dialéctica o la habilidad de convencer y exponer razones mediante el diálogo y el debate.

Para el caso de nuestros intereses la construcción de los argumentos se basará en sus tres elementos fundamentales expuestos claramente por Toulmin (2003) en su libro los usos de la argumentación: Los datos (Ground), garantías (warrants) y aserción o conclusión (Claim).

Se hace necesario definir cada uno de los tres componentes fundamentales del argumento desde el modelo Toulmin.
Para Rodríguez (2004) la explicación de cada componente las define como análisis de las categorías del modelo Toulmin.

2.1.1.1 La Aserción

Es aquello que se va a defender, debatir, en forma oral o escrita. En la actividad de argumentación significa la conclusión lo esencial y crucial en dicha actividad.

2.1.1.2 Evidencia

La evidencia aporta la razón (información) en la que la aserción se basa. Por ejemplo, si a un consultorio llega un paciente con fiebre y tos, el médico puede hacer una aserción (diagnóstico): “probablemente tiene gripe”. Pero si además llegan otros pacientes con los mismos síntomas, puede aseverar (concluir) que se trata de una virosis. Los síntomas del paciente serán los datos (evidencia) de los cuales parte para hacer su aserción. La evidencia está formada por hechos o condiciones que son observables. La evidencia es significativa porque establece la base de toda la argumentación.

2.1.1.3 Garantía

La garantía implica verificar que las bases de la argumentación sean las apropiadas. Brinda la lógica para la transición de la evidencia a la aserción. Justifica la importancia de la evidencia. Por ser la garantía una categoría de la argumentación que establece la relación entre la evidencia y la aserción, expresa el momento en el que la audiencia puede disentir de la conclusión a la cual se quiere arribar: la garantía establece cómo los datos sirven de soporte legítimo a la aserción. (p.8-11)

.El modelo Toulmin para los propósitos de este trabajo es ideal, hacia el logro de objetivos planeados para clases de matemáticas donde se desarrollen tareas que permitan la construcción de argumentos que seguramente serán originados a partir de la observación, experimentación, inferencias inductivas y la dialéctica necesaria hacia la búsqueda de certezas y aceptación de afirmaciones hechas por los estudiantes.

2.1.2 El Proceso de Generalizar Mason

Para describir el proceso de razonar en este trabajo de grado se utiliza la propuesta hecha por Mason, Graham, Pimm, (1999). Para estos autores el proceso de generalizar consiste en llegar al álgebra por medio de situaciones en las que el estudiante debe Ver, Describir y Expresar sus hipótesis dada una situación y la manera de comunicar estos tres pasos es por medio de las representaciones. Así mismo este proceso tiene cuatro fases o raíces donde a partir de conocimientos intuitivos de los estudiantes van construyendo las bases conceptuales del álgebra. Ver, decir y registrar forman una secuencia importante en todas las lecciones de matemáticas, particularmente en las que tiene que ver con todas las Raíces del Algebra. En forma similar Díaz (2011) afirma:

> "*La capacidad de generalizar requiere atención y concentración y una vez conquistada hay que superar otro reto, expresarla. Aquí entra en juego el desarrollo de la competencia comunicativa tanto oral como escrita, primero usando el lenguaje cotidiano, gráficos y diagramas para convencer (se) de qué generalización se obtuvo y sobre todo cómo se obtuvo, recalcando de esta manera la importancia que debe tener (en matemáticas) el procedimiento y la argumentación que justifican una respuesta; y luego, empleando un lenguaje más especializado: el algebraico. (p.4)*

Poniendo de presente como la búsqueda de regularidades es fundamental en la tarea de generalizar, el profesor Mason ofrece al lector un texto basado en cuatro fases o raíces como él las denomina en el proceso de generalizar en matemáticas.

2.1.2.1. Fases o Raíces

La primera etapa o raíz es expresión de la generalidad que consiste de manera sucinta en permitir que el estudiante vea una regularidad, exprese la regularidad y finalmente la registre. Aquí centra la atención (interludio) en las formas de registrar lo observado fundamental a la hora de hacer uso de la simbología matemática del caso.

En una segunda fase se enfatiza en el reordenamiento y manipulación que hace referencia a expresar de diferentes maneras la misma cosa, la construcción de expresiones y descomponerlas, y toma de decisiones.

Como tercera sección plantea las posibilidades y restricciones en sí, hacia que es posible que se dé o no en el futuro razonable del problema.

Finalmente la aritmética generalizada en reglas de la aritmética y su diferencia con el algebra.

Nuestro proyecto vincula esta teoría como parte fundamental de la actividad matemática de razonar en la propuesta de una tarea específica de regularidades con figuras concretas.

Estructuralmente cuando el estudiante se enfrenta a una tarea de regularidades en figuras concretas, Mason asegura que el primer paso es ver el patrón y que reconocerlo implica la pregunta ¿Qué hizo para reconocer el patrón?.Mason (Ibid, 1999). El reconocimiento de un patrón entendido como ese valor, signo o gráfica que de alguna manera se evidencia en todo el proceso de su construcción secuencial. De alguna manera el estudiante debe dar cuenta que su observación llega a un punto donde sea necesario expresar lo visto, en otras palabras, por ejemplo cuando se trata de conteo, se da cuenta que no debería seguir contando y más dedicarse a entender hacia dóndeva dicha sucesión numérica o gráfica.

Si bien es cierto que existen patrones complejos de identificar, también existen unos muy sencillos. La enseñanza de la generalización debe partir de tareas sencillas, de manera lenta y progresiva hacia la compresión del concepto de patrón o regularidad. Mason (1999). Es muy importante en el paso de ver el patrón o regularidad es acerca de las preguntas que se deben formular secuencial y lógicamente de acuerdo con el nivel escolar que se está trabajando.

Mason (1999), argumenta que sería razonable hacer preguntas a los alumnos, tales como: *"¿Cómo se mueve usted de la primera figura a la segunda?, ¿y desde la segunda a la tercera?, ¿Qué es común en estos movimientos?"*.

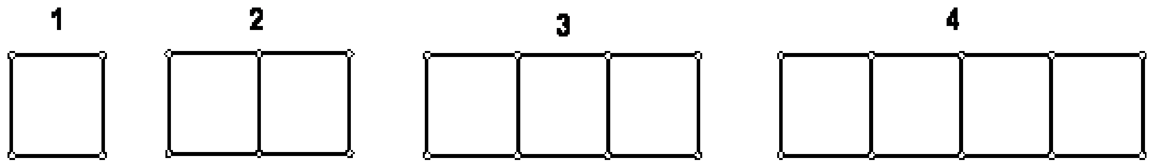
En el paso de ver al decir es probable que el uso de las palabras sea lo más inmediato para el estudiante. En ese sentido el docente se enfrenta a la tarea pedagógica de llevar esas palabras al registro pero respetando la percepción que el alumno tiene sobre lo que ha visto. Una manera es en permitir que los estudiantes expresen en parejas diciéndose entre ellos lo que han visto, partiendo de preguntas y llegando a un común acuerdo.

El autor recomienda no usar mucho tiempo, para esto, con unos pocos segundos es suficiente. Explicar patrones por parte de los estudiantes no es una tarea fácil, para generar en ellos la habilidad de dar explicación de aquello que se observa; es que ellos lleven el trabajo a sus casas, la expliquen a alguien que no ha visto el problema.

Ahora vale la pena centrar la atención al registro de un patrón, que no es otra cosa que llevar al papel una representación cualquiera que esta sea sobre lo que se observó y se dijo al respecto de la regularidad. En este paso las ideas deben ser escritas pues la mente tiende a dejar escaparlas si no se actúa rápidamente con la información tenida en forma verbal. Lo interesante del registro es el uso que se les puede dar una vez escritas.

Mason concibe esto como llevar lo escrito a su chequeo, discusión y modificación. Sin embargo aclara que el registro corresponda al estudiante que va a debatir lo escrito. Por ejemplo en una tarea sobre la **cantidad de fósforos** utilizados para construir la figura formada por un número dado de cuadrados, como se muestra en la figura 1(www.profesorenlinea.cl. Registro Nº 188.540). Es una tarea de ver, decir y registrar el patrón. Introducir a los estudiantes al tema de la generalización a partir de este tipo de problemas gráficos es más interesante y entretenidos para ellos. Mason (1999).

Veamos:



Nº de cuadrados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**. . .**	**n**
Nº de fósforos	**4**	**7**	**10**	**13**					

Figura 1: ejemplo de una tarea sobre regularidad o patrón

En el anterior ejemplo lo que corresponde registrar el patrón, una tabla de datos sería lo ideal. La dificultad en el estudiante es establecer la variable clave llevando el registro a un nivel más formal.

Mason (1999) sugiere algunos consejos para trabajar con patrones geométricos en el aula a decir:

1. Una vez que haya considerado el nivel de dificultad de los patrones, prepare varios de ellos para llevarlos al aula.

2. Este dispuesto(a) a trabajar despacio, y permitirle a los alumnos que hagan el trabajo. el tiempo que gaste ahora producirá sus recompensas más tarde.

3. prepare el tipo de preguntas que les hará a los alumnos si se quedan trancados.

4. Controle e deseo de moverse hacia el registro escrito. Haga que usen colores para indicar como crece el patrón. Proporcione a los alumnos papel cuadriculado, o si no, escoja los patrones con puntos de tal manera que los alumnos no tengan que utilizar el tiempo dibujando las figuras ordenadamente, pues no se daría el tiempo necesario para el trabajo de generalización.

5. No trabaje el aspecto de la generalidad como primer paso**.** Conténtese con que los alumnos desarrollen la capacidad de dibujar las siguientes figuras. Este trabajo debe ser divertido. Los niños lo disfrutarán y lo considerarán importante si usted así lo considera.

Mason (1999) dice al respecto de registrar lo que se dice verbalmente:

> *"Hay varias formas de registrar que varían desde lo completamente verbal hasta lo completamente simbólico"*. Continua diciendo: *"El movimiento hacia la notación matemática formal se debe trabajar en forma gradual, a la velocidad individual de quien aprende. Los alumnos necesitan ver que los símbolos se usan para expresar generalidades pero sólo lo emplearan en forma exitosa cuando estén listos para hacerlo, y cuando perciban una necesidad de hacerlo".(p. 52).*

En ese sentido es claro que las expresiones verbales corresponden a la escritura usando el lenguaje o idioma habitual y cotidiano, por ejemplo decir que la suma de dos números es diez y el mayor es tres veces el menor, o por ejemplo para hallar o encontrar el área de un triangulo se debe multiplicar la base del triangulo por su altura y a ese resultado dividirlo por dos.

Para hacer el respectivo análisis de la información que se logre obtener, le corresponde al docente que está presente en situaciones de registro de lo que ven y dicen los estudiantes, es dar cuenta de la comprensión de su escrito, la complejidad de este y la manera como va llevando sus expresiones verbales escritas a expresiones simbólicas.

Aprender a registrar es de suma importancia y se manifiesta como un reto docente en enseñarlo adecuadamente. Hacerse entender y que todos entiendan es el ideal, la capacidad de expresar en forma adecuada con símbolos una expresión verbal es determinada cuando todos en el aula la entienden y descubren su significado.

3. METODOLOGÍA

En el desarrollo del trabajo de grado, inicialmente se identifican la población de estudio, la cual está conformada por 20 estudiantes del curso 702 de la jornada tarde del colegio distrital Bravo Páez, ubicado en el barrio Quiroga de la localidad Rafael Uribe Uribe.

Los jóvenes estudiantes están entre los 12 y 14 años de edad. Y la intervención en el aula es basada en una propuesta integrada por dos instrumentos: que corresponde en primer lugar, en el diseño y aplicación de la tarea como versión inicial, para su posterior análisis, que conlleve a sus respectivas modificaciones y desde luego al planteamiento de la tarea final. En segundo lugar, se hace uso de una grabación de audio y video de las sesiones en las cuales los estudiantes desarrollan la tarea de generalización, luego se prosigue a la elaboración de la relatoría sobre la tarea, en la cual se analizan los argumentos surgidos que nos permitan validar el instrumento.

Es importante mencionar que la información fue analizada teniendo en cuenta el modelo argumentativo de Toulmin: datos, aserción y garante; como también la etapas en el proceso de generalización según Mason.La tarea desarrollada por los estudiantes se inscribe en un enfoque cualitativo de naturaleza descriptiva. Izquierdo (2012), debido a que se pretende describir y analizar los argumentos que surgen en el proceso de generalización realizados por los estudiantes.

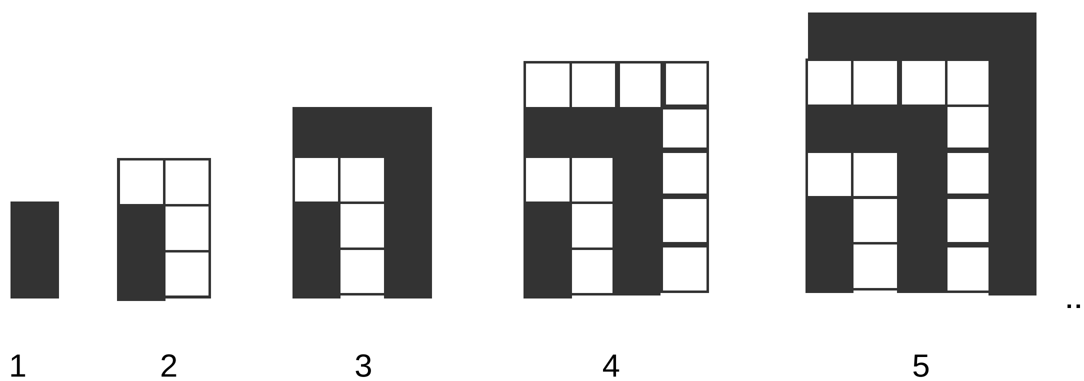
La selección de los estudiantes es intencional debido a dos situaciones: En primer lugar , la experiencia docente nos ha mostrado que los estudiantes del grado séptimo presentan serias dificultades al dar el paso de la aritmética hacia el álgebra , que por lo general se da al pasar de grado séptimo a grado octavo, en establecimientos educativos distritales. En segundo lugar, los estudiantes en general y en especial los del curso 702, también presentan dificultades parar dar razones sobre la validez de sus ideas, para ofrecer contra ejemplos que refuten las ideas de sus compañeros y la de su docente.

Es importante destacar que los estudiantes del curso 702, no estaban acostumbrados a desarrollar estos tipos de tareas, por lo que se hizo necesario desarrollar tareas similares propuestas en el texto de Mason.

La tarea propuesta para los estudiantes surge de dos momentos importantes: En primer lugar, después de haber trabajado una tarea de adición de los números racionales, nos dimos cuenta que los estudiantes por no tener una aprehensión de los conceptos previos, propiedades y algoritmos vistos en los años de escolaridad anteriores, no participaron en el desarrollo de la tarea propuesta por el docente, y por consiguiente al miedo de quedar en ridículo ante sus compañeros.

Esta dificultad nos llevó a la búsqueda de otros tipos de tareas, llevándonos a realizar un nuevo diagnóstico, estas vez utilizando una tarea sobre lógica y otra de generalización, obteniendo mejores resultados, como: la participación espontánea y colaborativa de los estudiantes , y por supuesto la discusión sobre la validez de las respuestas obtenidas durante el desarrollo de las tareas. En un segundo momento, se propone la versión final de la tarea, teniendo en cuenta la tarea diagnostica inicial de generalización, sobre la cual se hizo una prueba piloto con el propósito de recolectar información que nos permitiera validar o modificar el instrumento.

La prueba piloto se aplicó a dos estudiantes de las mismas características (sexo, grado de escolaridad, edad, colegio) de la población a la cual va dirigida originalmente. De la información recogida en este primer pilotaje, se elaboró una relatoría para su posterior análisis, los resultados nos llevaron a replantear las preguntas, puesto que no eran claras y concisas para los estudiantes. La tarea inicial de generalización es la siguiente: Haz una descripción general de la figura

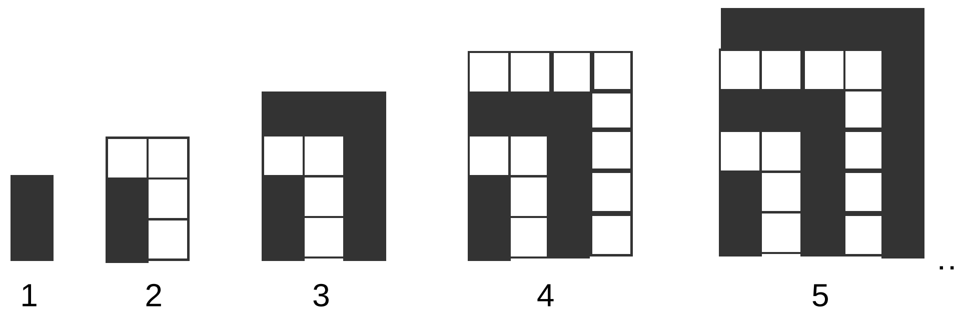


Preguntas

1. ¿Cómo se construye la figura a partir de la anterior? ¿Qué es común en estos movimientos?
2. Dibuja las dos figuras siguientes
3. En las figuras 10, 13, 24, 32 y 75 ¿Cuántos cuadrados blancos hay en total?

En el análisis que se hizo de la prueba piloto, se presentaron las siguientes situaciones: en primer lugar; la pegunta 1 es muy general y no permite que el estudiante observe la particularidad e importancia que tiene cada una de las figuras dentro de la secuencia, llevando al docente a intervenir frecuentemente en el desarrollo de la tarea, quitándole el rol protagónico al estudiante. Por otro lado, la segunda pregunta no da instrucciones claras sobre las condiciones que debe tener para argumentar ¿Cómo se construye la figura a partir de la anterior?, y para la preguntas 3 y 4 se mejoró su redacción.

La versión final de la tarea, después de los ajustes pertinentes es la siguiente:



Preguntas:

1. Describa la figura de la posición 4 y la figura de la posición 5.

2. Al observarlas figuras de la posiciones 4 y 5 ¿Qué es igual o diferente en estas figuras?

3. Teniendo en cuenta la posición de la figura, los cuadrados blancos y los sombreados, responde:

    a. ¿Cómo se construye la figura 5 a partir de la figura 4?
    b. ¿Cómo se **construye** la figura 6 a partir de la figura 5?

4. Dibuja las dos figuras siguientes.

5. Responde:

    a. Teniendo en cuenta la figura de la posición 6:
       ¿Es cierto que hay 20 cuadrados en blanco?
       ¿Es cierto que hay 18 cuadrados sombreados?
    b. Teniendo en cuenta la figura de la posición 13
       ¿Es cierto que hay 104 cuadrados en blanco?
       ¿Es cierto que hay 175 cuadrados sombreados?

6. ¿Cuántos cuadrados blancos hay en:
    a. La figura 24?
    b. La figura 36?
    c. La figura 75?

La tarea final se desarrolló en dos sesiones y en tres momentos. En un primer momento los estudiantes desarrollaron individualmente la tarea, luego; en un segundo momento se reunieron en grupos de cuatro personas para discutir sobre la validez de sus respuestas, y en un tercer momento, se realizó un debate en el cual cada grupo eligió espontáneamente a un estudiante relator para socializar sus respuestas ante los demás compañeros.

Hecha la intervención en el aula y aplicado el instrumento se procedió a recolectar la información correspondiente haciendo uso de los registros fílmicos y escritos de los estudiantes. La información recogida permitió hacer el respectivo análisis que se fundamentó en la estructura de los argumentos según Toulmin (2003) y el proceso de generalización según Mason (1999).

El análisis inicia mediante la revisión de la relatoría de lo que sucedió en el desarrollo de la tarea sobre secuencias de figuras geométricas, con intenciones centradas en la argumentación por parte de los estudiantes, dicha revisión dio lugar a obtener siete argumentos, que se agruparon según caracterización de los garantes y las aserciones evidenciadas, al organizar cada afirmación hecha por los estudiantes que se resaltan en dicho análisis. Teniendo en cuenta que varios estudiantes ofrecieron información importante para el análisis fue necesario incluir fotografías de los registros hechos por ellos donde se ilustra su aporte en la construcción de argumentos.

El análisis de datos se orientó hacia la vinculación del modelo Toulmin y las fases de generalización expuestas por Mason, pudiendo así definir los argumentos en dos categorías, la primera de ellas en patrones o generalidades y la segunda en generalizaciones aritméticas hechas por los estudiantes como garante fundamental para la parte final de la tarea.

Finalmente se ofrece una aproximación de lo sucedido en el desarrollo de la tarea, se describe aspectos significativos de las intervenciones de los estudiantes que enriquecieron la actividad matemática de razonar en el aula y de igual manera poner a disposición aquellas situaciones propias del nivel académico en que se encuentran los estudiantes y las dinámicas sociales y cognitivas que fueron apareciendo en el desarrollo de las sesiones.

4. ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presenta el análisis de la información obtenida del desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes. En éste se describe el proceso de generalización logrado por los estudiantes y los argumentos surgidos en este proceso. Posteriormente se presenta una clasificación de los argumentos evidenciados.

Para esto se cuenta con las afirmaciones encontradas en los escritos y las intervenciones en video de los estudiantes. En ese sentido en el desarrollo de las dos sesiones se hizo énfasis en las diferentes etapas hacia el camino a la generalización (Mason, 1999) y los argumentos (de acuerdo con el modelo de Toulmin) que allí se evidencian, para finalmente realizar la clasificación correspondiente de los argumentos según la manera como se caracterice el garante y la aserción en cada argumento encontrado.

Es importante aclarar aquí que para el análisis de la información obtenida en este trabajo de grado, las intervenciones de los estudiantes no son tomadas de manera textual, sino que se hacen interpretaciones de lo dicho por ellos en el desarrollo de la tarea propuesta.

4.1. CATEGORIAS DE ANÁLISIS

CATEGORIAS	COMPONENTE	DESCRIPCIÓN
FASES DE GENERALIZACION MASON	**FASE 1: ver regularidades, expresarlas y registrarlas**	A partir de la observación el estudiante debe dar cuenta de aquello que se repite en la secuencia de figuras, decir algo sobre ellas y poder expresar en forma escrita las regularidades observadas.
	FASE 2: Reordenamiento de datos	Esta fase consiste en usar cierta información registrada por el estudiante y usarla de tal manera que reordenando los datos se obtengan maneras diferentes de llevar el problema hacia un mismo resultado la reestructuración aritmética donde vincula operaciones para encontrar resultados que a través de estrategias de conteo más efectivas llevan al mismo resultado

	FASE 3: Posibilidades y restricciones	Consiste ofrecer las posibilidades de que algo ocurra o no en la secuencia de las figuras. Mason (1999) resalta la importancia de percibir posibilidades, llevar al estudiante a ser creativo aritméticamente hablando, que dé cuenta de aquello que puede usar y de las restricciones existentes de lo que está usando. Se enfatiza que la manera como el estudiante resuelve una cuestión, y si está restringida para resolver otra.
TIPOS DE ARGUMENTOS MODELO TOULMIN	**GARANTE TIPO 1: patrón o regularidad**	Es definido cuando los estudiantes a partir de observaciones hechas en los datos suministrados generan aserciones muy particulares frente a lo que ven, ellos hacen el registro de la regularidad o patrón vista entre las primeras figuras
	GARANTE TIPO 2: generalización aritmética	Se caracteriza por ser una generalización basada en operaciones matemáticas que se cumplen para cualquier figura de la secuencia de figuras geométricas de la tarea propuesta.

4.1.1. Fases de Generalización Mason

4.1.1.1. Primera Fase: ver regularidades, expresarlas y regístralas

Durante esta fase los estudiantes manifiestan, entre otras cosas, que las figuras tienen cuadros blancos y sombreados, que las figuras son rectángulos, observan que los cuadros blancos están organizados en forma de “L” al igual que los sombreados, que en todas las figuras observadas los dos primeros cuadros en forma vertical son sombreados, y que la cantidad de cuadritos de la base de cada figura corresponde a la posición de la figura. Que la figura que sigue la secuencia se forma a partir de la anterior agregando una “L” de cuadritos. Que la primera figura todos los cuadros son sombreados, que la segunda figura se forma de la primera agregando una “L” de cuadritos blancos, que la figura tres a partir de la segunda y se agrega una “L” de cuadritos sombreados, así sucesivamente. Que entre dos figuras consecutivas por ejemplo 4 y 5 tienen la misma cantidad de cuadritos blancos y entre la 5 y 6 tienen la misma cantidad de cuadritossombreados.Esas expresiones hechas por los estudiantes son delimitadas en la fase primera del proceso de generalización Mason (1999) los estudiantes realizan una descripción y para esto es necesario vincular el ver y el decir, y aunque en cierta medida pasar de una a otra acción no es tan fácil como parece. Pero el hecho de trabajar en grupos pequeños permite que entre ellos expresen lo que ven. En ese mismo sentido el registro se evidencia en la medida que la pregunta obliga a poner en un papel lo que están observando y diciendo. Las regularidades observadas por los estudiantes son expresadas y registradas en la manera y forma como ellos las están percibiendo.

De la primera fase y tomando el modelo Toulmin (datos, aserción y garante) para dar cuenta de los argumentos que se evidencian en lo hecho por los estudiantes es importante partir de la pregunta 1 donde se les pide describir brevemente la figura de la posición 4 y la figura de la posición 5".

4.1.1.1.1. Argumentos fase 1

Uno de los estudiantes denominado estudiante 3 (E3), encuentra una regularidad al afirmar que todas las figuras son rectángulos y que la base de cada figura tiene la misma cantidad de cuadritos que su posición en la secuencia, y un cuadrito más que la base en forma vertical; señala que en la figura 4 la base tiene cuatro cuadritos y cinco en forma vertical; y en la figura 5 la base tiene cinco cuadritos y seis en forma vertical.

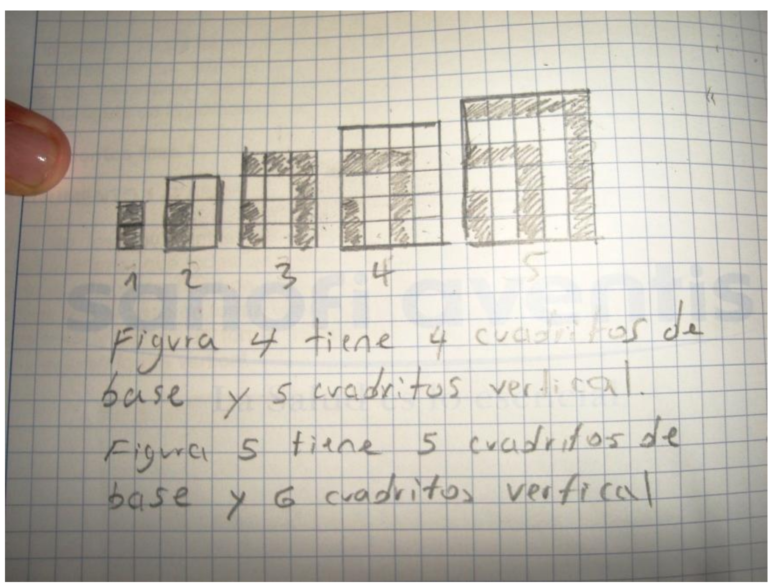
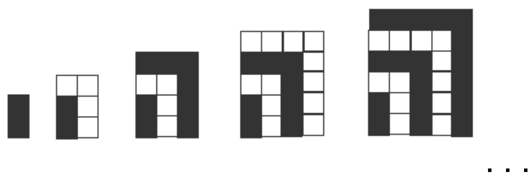


Figura 2.Registro de la descripción de las figuras 4 y 5 de la secuencia

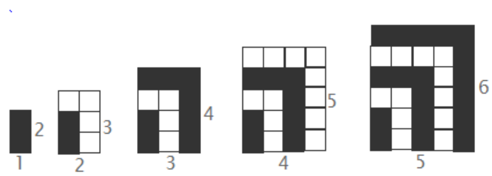
Este argumento dado por el estudiante 3 establece una estructura según el modelo de Toulmin de la siguiente manera:

DATOS: las figuras de la 1 a la 5



ASERCIÓN: Las figuras de la secuencia son rectángulos donde la base es un cuadrito menos que la cantidad de cuadritos en forma vertical.

GARANTE: Regularidad o patrón en las figuras.



Con relación a las figuras de las posiciones 4 y 5 se les preguntó ¿Qué es igual o diferente en estas figuras?.Se genera lo siguiente.

El estudiante 4 encuentra la siguiente regularidad: afirma que entre la figura 4 y 5 la diferencia está que la figura 5 tiene una "L" de cuadritos más que la figura 4, y esto sucede en entre figura y figura, hay un aumento.

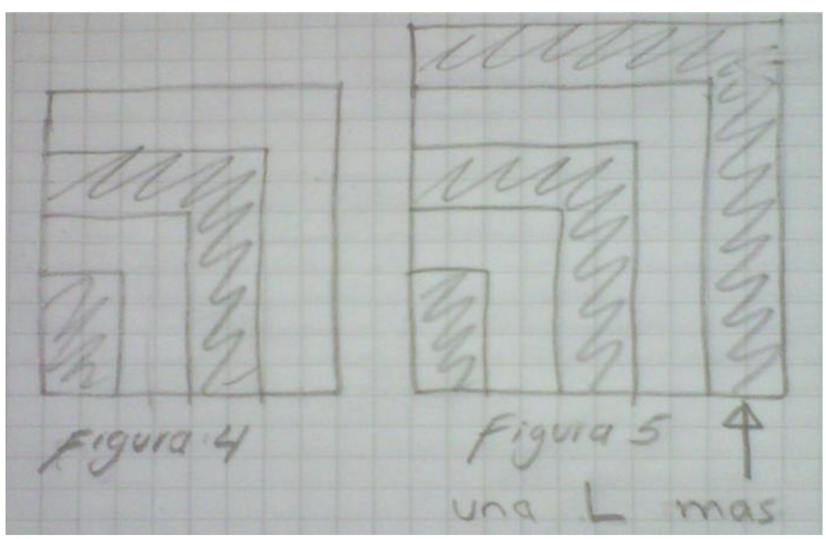
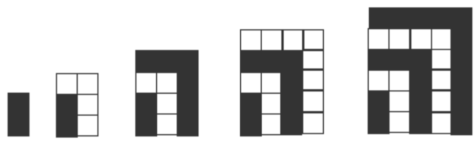


Figura 3. Registro sobre las diferencias entre la figura 4 y 5

Estructura del argumento logrado es esta:

DATOS: Figuras de la 1 a la 5



ASERCIÓN: Entre una figura y la siguiente hay una “L” de cuadritos más

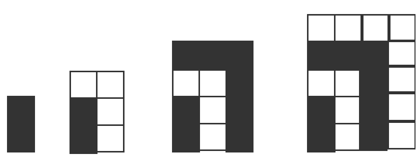
GARANTE: Regularidad o patrón en las figuras observada por el estudiante en la figura 2.

Dando continuidad al desarrollo de la tarea se les propone a los estudiantes a partir de las posiciones de las figuras 4 y 5, en especial acerca de los cuadritos en blanco y los cuadritos sombreados. Se les pregunta ¿Cómo se construye la figura 5 a partir de la 4? Se obtuvo lo siguiente:

El estudiante 1 expresa que: sobre la última “L” blanca de la figura 4 se coloca una “L” sombreada para formar la figura de la posición 5.

Estructura del argumento

DATOS:



ASERCIÓN: La figura 5 se construye adicionando una “L” de cuadritos sombreados a la figura 4

GARANTE: La última “L” de las figuras de posiciones impares son sombreadas y las figuras cuando pasan de una posición a otra se les adiciona un “L”

En esta fase se obtuvieron los 3 argumentos anteriores.

4.1.1.2. Segunda Fase: Reordenamiento de datos

Esta fase consiste en usar cierta información registrada por el estudiante y usarla de tal manera que reordenando los datos se obtengan maneras diferentes de llevar el problema hacia un mismo resultado, por una parte lo que corresponde al conteo y por otro lado la reestructuración aritmética que vincula operaciones para encontrar resultados que a través de estrategias de conteo más efectivas llevan al mismo resultado. De igual manera permite abrir camino a lo que es posible que suceda y no en el desarrollo de la tarea.

Partiendo de las respuestas dadas por los estudiante a las preguntas "teniendo en cuenta la figura de la posición 13 ¿es cierto que hay 104 cuadritos en blanco? Y ¿es cierto que hay 175 cuadritos sombreados?" se evidencia el siguiente argumento:

4.1.1.2.1. Argumentos fase 2

El estudiante 2 manifiesta que la última "L" de los cuadritos sombreados está en las posiciones impares y que la figura 13 contiene a las últimas "L" de las figuras de las posiciones impares anteriores, entonces para obtener el resultado de cuadritos sombreados de la figura 13, el estudiante plantea que: toma cada posición impar la multiplica por dos y suma sus resultados.

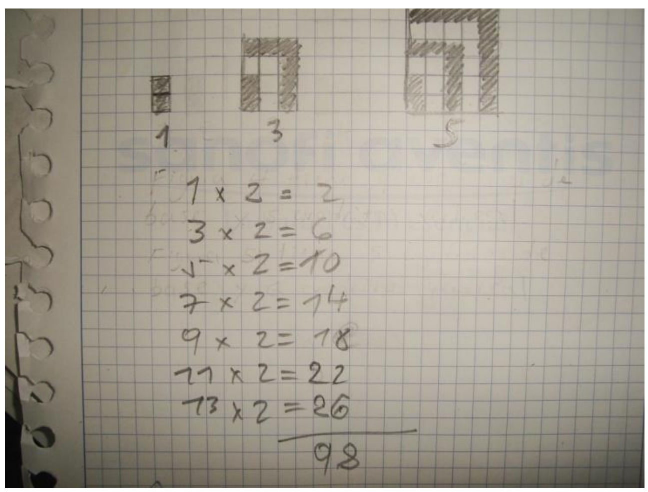


Figura 4. Número de cuadritos sombreadosde la figura 13 de la secuencia

Estructura del argumento

DATOS

(posición 1) x 2 = 2 cuadrados sombreados en total, en la figura posición 1.

(posición3) x 2 = 6 cuadrados sombreados en la última "**L**" de la figura 2.

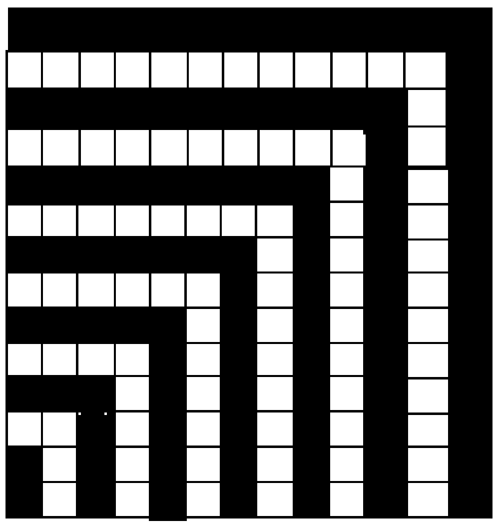
(posición5) x 2 = 10 cuadrados sombreados en la última "**L**" de la figura 3.

(posición7) x 2 = 14 cuadrados sombreados en la última "**L**" de la figura 7.

(posición9) x 2 = 18 cuadrados sombreados en la última “**L**” de la figura 9.

(posición11) x 2 = 22 cuadrados sombreados en la última “**L**” de la figura 11.

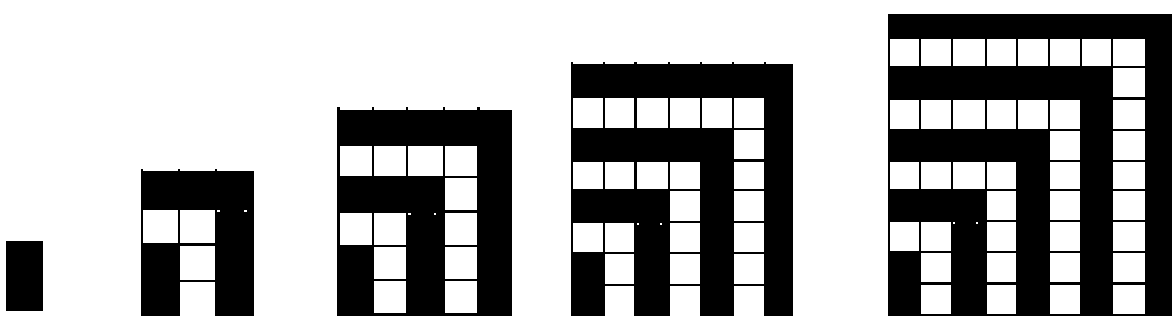
(posición13) x 2 = 26 cuadrados sombreados en la última “**L**” de la figura 13



Figuras:1, 3, 5, 7, 9, 11 contenidas en la figura 13

ASERCIÓN: En la figura 13 hay 2+6+10+14+18+22+26=98 cuadritos sombreados

GARANTE: En las posiciones impares la última “L” es sombreada, la última “L” de los impares tiene posición x 2 = número de cuadritos sombreados de esa posición.



. **1** **3** **5** **7** **9**

El estudiante 2 manifiesta que la última “L” de los cuadritos blancos está en las posiciones pares y es necesario de la figura 13 pasar a la figura 12, porque las dos posiciones mencionadas tienen la misma cantidad de cuadritos en blanco, entonces para obtener el resultado de cuadritos blancos de la figura 13, el estudiante expresa que: toma cada posición par la multiplica por dos y suma sus resultados.

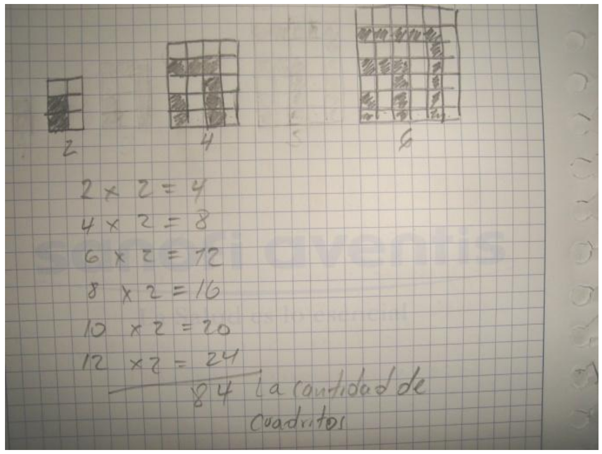


Figura 5. Cantidad de cuadritos blancos de la figura 13 de la secuencia

Estructura argumento:

DATOS:

(posición12) x 2 = 24 cuadrados en blanco en la última “**L**” de la figura 12.

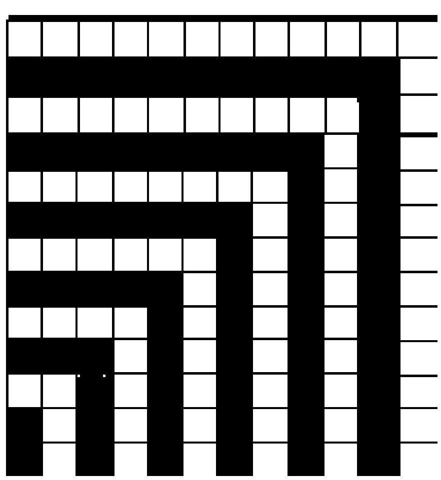
(posición10) x 2 = 20 cuadrados en blanco en la última “**L**” de la figura 10.

(Posición 8) x 2 = 16 cuadrados en blanco en la última “**L**” de la figura 8.

(posición6) x 2 = 12 cuadrados en blanco en la última “**L**” de la figura 6.

(posición4) x 2 = 8 cuadrados en blanco en la última “**L**” de la figura 4.

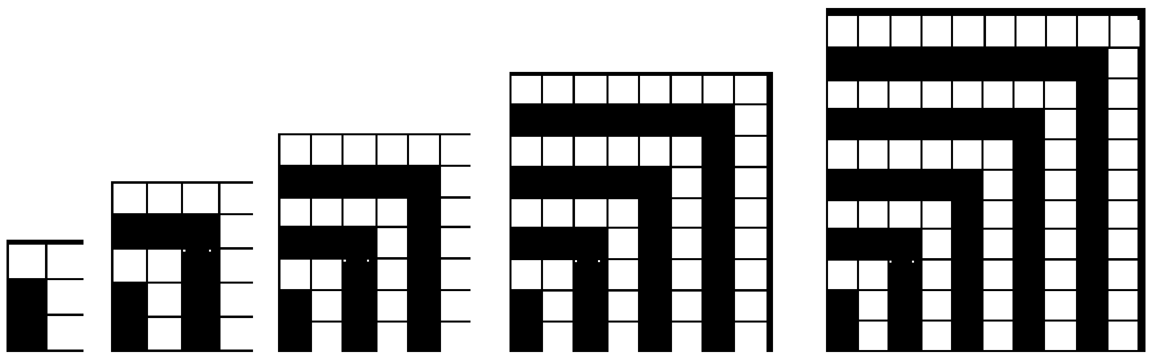
(posición2) x 2 = 4 cuadrados en blanco en la única “**L**” en la figura 2.



Figuras: 2, 4, 6, 8, 10 contenidas en la figura 12.

ASERCION: En la figura 13 hay 24+20+16+12+8+4=84 cuadritos blancos

GARANTE: En las posiciones pares la última “L” es blanca, la última “L” de las posiciones pares tiene posición x 2= número de cuadritos blancos de esa posición.



2 4 6 8 10

En esta fase se obtuvieron los dos argumentos anteriores.

4.1.1.3. Tercera Fase: posibilidades y restricciones

A partir de aquí se evidencia que los estudiantes ofrecen unos argumentos enmarcados en la fase tres del proceso de generalización que consiste ofrecer las posibilidades de que algo ocurra o no en la secuencia de las figuras. Mason (1999) resalta la importancia de percibir posibilidades, llevar al estudiante a ser creativo aritméticamente hablando, que dé cuenta de aquello que puede usar y de las restricciones existentes de lo que está usando.

En los siguientes argumentos se enfatiza que la manera como el estudiante resuelve una cuestión, está restringida para resolver otra. Al formular lo siguiente:¿cuántos cuadritos en blanco hay en la figura 24, 36 y 75? Se pone a prueba la creatividad del estudiante en desarrollar sus ideas para solucionarlo y defender sus afirmaciones. Se obtuvo lo siguiente:

4.1.1.3.1. Argumentos Fase 3

El estudiante 2 dice al respecto: que para hallar la cantidad de cuadritos blancos de cada posición par se debe descomponer los rectángulos en un cuadrado y una hilera horizontal superior, donde la cantidad de cuadritos blancos en el cuadrado formado es igual a la cantidad de cuadritos sombreados; y el total de cuadritos equivale a multiplicar la posición por si misma y la hilera horizontal superior corresponde a cuadritos blancos de cantidad igual a la posición de la figura. Para esto explica que se ayuda de la figura 6 de la secuencia.

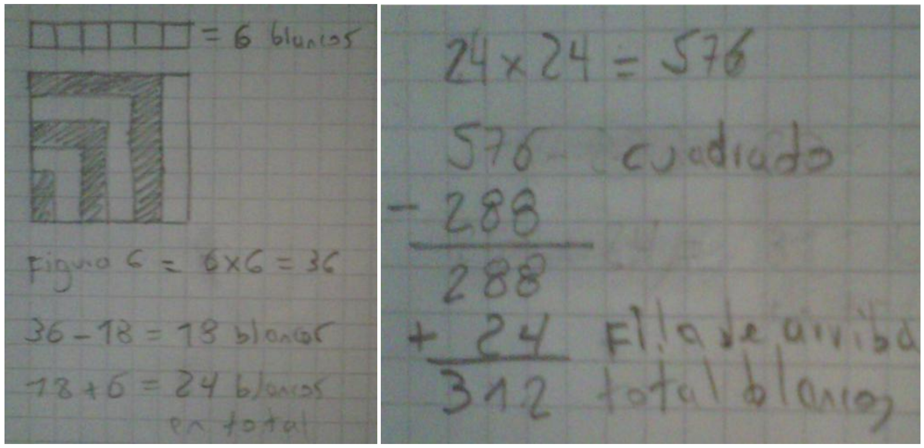


Figura 6. Descomposición figura de la posición 6 y cantidad de cuadritos blancos de la figura 24 de la secuencia.

Estructura del argumento
DATOS: Figura 6

Cuadrado = 6x6 = 36 cuadritos: 18 blancos y 18 sombreados y la hilera = 6 cuadritos blancos.

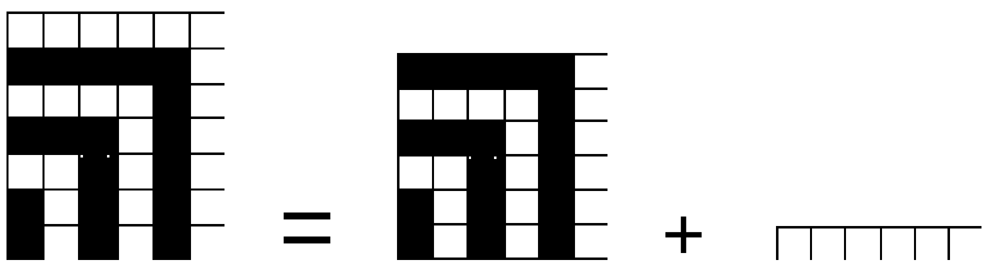


Figura 6 = 6x6 + 6

ASERCION: La figura 24 tienen 312 cuadritos blancos, la figura 36 tiene 684 cuadritos blancos.

GARANTE: las posiciones pares en su última hilera solo tiene cuadritos blancos, la mitad de los cuadritos del cuadrado son blancos, 24x24 – la mitad de 24x24 + 24 = 312 y 36x36-la mitad de 36x36 +36 = 684

El estudiante 2 continuando con su razonamiento afirma que para la figura de la posición 75 el procedimiento es diferente es decir, toman una figura de posición impar (figura 5), determinan que descomponiendo el rectángulo obtienen un cuadrado donde los cuadritos sombreados tienen un cuadrito más que los blancos y la hilera superior tiene todos sus cuadritos sombreados y por lo tanto no la tienen en cuenta para hallar el total de cuadritos blancos. Entonces solo es necesario hallar el total de cuadritos del cuadrado, restar un cuadrito sombreado y finalmente restar los sombreados que corresponde a la mitad.

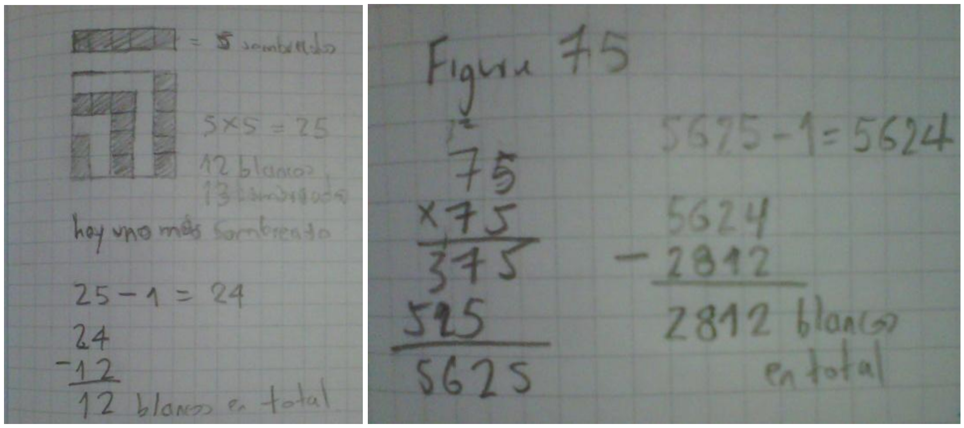
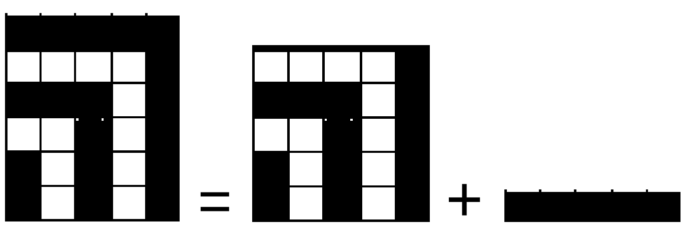


Figura 7. Registro de la descomposición de la figura 5 y el cálculo de la cantidad de cuadritos de la figura 75 de la secuencia

Estructura del argumento

DATOS: Figura 5

Cuadrado= 5x5= 25 cuadritos donde hay un cuadrito sombreado más que los blancos y hilera superior= 5 cuadritos sombreados.



5x5=25 donde 12 son blancos y 12+1 son sombreados.

La hilera sombrada no se tiene en cuenta.

ASERCION: La figura 75 tiene 2812 cuadritos blancos.

GARANTE: Las posiciones impares en su última hilera superior tienen solo cuadritos sombreados y los cuadritos blancos=75x75-1-la mitad de 75x75= 2812

En esta fase se obtuvieron los dos argumentos anteriores.

4.1.2 Clasificación de los Argumentos

Una vez se han descrito los argumentos encontrados en el desarrollo de la tarea hecha por los estudiantes se procede a clasificar los argumentos. Para un primer tipo de argumentos, proponemos lo que para Izquierdo y Granados (2012) es el uso del patrón o generalidad, en el que los estudiantes afirman que esto ocurre para todos los casos de la secuencia de las figuras propuestas. Su análisis es abordado desde la caracterización del garante y la aserción del modelo Toulmin y las etapas del proceso de generalización según Mason.

En ese sentido se pueden evidenciar siete argumentos significativos durante las tres primeras etapas o fases del proceso de generalización de Mason, en la tarea sobre razonamiento en una secuencia de figuras geométricas. Estos argumentos los podemos clasificar de la siguiente manera:

4.1.2.1. Patrón o generalidad

Dentro de este ítem tenemos los argumentos 1, 2 y 3 considerados dentro del garante patrón o generalidad, porque los estudiantes a partir de observaciones hechas en los datos suministrados generan aserciones muy particulares frente a lo que ven, ellos hacen el registro de la regularidad o patrón vista entre las primeras figuras, dando cuenta que una figura resulta de la anterior anexando una “L” al final usando ya sea la “L” blanca o la “L” sombreada según sea el caso.

En esta clasificación el proceso de generalización vincula la primera fase, en ese mismos sentido los estudiantes 3, 4 y 1 en su orden como se fueron organizando los argumentos encontrados se pudo apreciar que ellos afirmaban a partir de lo que observaban, expresando sus ideas y cada uno registró lo que consideraba es cierto. También dan cuenta que cada dos figuras consecutivas la cantidad de cuadritos sombreados no se alteraba, al igual sucedió con los cuadritos blancos. Y otro aspecto que pudimos ver es desde la figura 1 a la 5 ellos aseguraban que la 2 se construía a partir de la primera, la tercera a partir de las dos anteriores y así sucesivamente.

4.1.2.2. Generalización aritmética

Aquí corresponden los argumentos 4, 5, 6 y 7 y forman parte de la segunda y tercera fase del proceso de generalización. En los argumentos el garante se caracteriza por ser una generalización basada en operaciones matemáticas que se cumplen para cualquier figura de la secuencia de figuras geométricas de la tarea propuesta. Estas operaciones nacen inicialmente de una observación primaria, pero que hace necesario que el estudiante busque la manera de registrar numéricamente lo que ve, organice y estructure los datos de tal manera que logre comprender porque cierta operación matemática es correcta y que le permite hallar la cantidad de cuadritos blancos y sombreados para cualquier posición en la secuencia.

En el caso de los argumentos 6 y 7 en los cuales el estudiante 2 logra obtener la respuesta de la cantidad de cuadritos blancos en las posiciones 24, 36 y 75 usando como estrategia el reordenamiento de datos construyendo un cuadrado separando la última hilera superior y teniendo en cuenta si la posición solicitada es para o impar.

El estudiante 2 realiza un proceso de conteo que le facilitó encontrar el resultado rápidamente, para ello se valió de identificar en las posiciones pares que la última "L" siempre sería blanca y para las posiciones impares la última "L" siempre sería sombreada.

De igual manera encontró que al formar cuadrados podía reorganizar el conteo en forma de multiplicación de acuerdo a la posición de la figura, aunque no vincula el concepto de dividir por 2, lo asume como al mitad de un número diciendo textualmente: "se le resta la mitad" en el caso de posiciones pares , y en el caso de las posiciones impares sencillamente se dio cuenta que en el cuadrado que organizó sobraba un solo cuadrito sombreado y que la hilera superior no se usaba para hallar el resultado.

5. CONCLUSIONES

Finalizado el análisis de la información recolectada, se pretende realizar una aproximación de los resultados obtenidos a manera de conclusiones, establecidos por una parte a lo que corresponde al alcance del trabajo de grado desde los objetivos planteados, y por otra a las particularidades vistas en el desarrollo de la actividad matemática en el proceso de razonar y de argumentar por parte de los estudiantes, además se dan unas conclusiones generales que comprendan aspectos fundamentales que deben ser tomados en cuenta hacia la construcción pedagógica y didáctica de la enseñanza y aprendizaje de la argumentación en el aula.

En consecuencia, se tiene que los estudiantes en el desarrollo de la tarea sobre generalización formularon afirmaciones; las cuales fueron caracterizadas según el modelo de argumentación de Toulmin, permitiendo establecer el tipo de afirmación y garante que ellos utilizaron, en donde la afirmación se podría considerar como una respuesta, que surge después de aplicar algunos algoritmos como: La suma, resta, multiplicación y la división de números naturales. Y en el caso de los garantes se plantean como patrones y regularidades en forma de polinomios aritméticos.

Desde el punto de vista de la argumentación y la generalización, de acuerdo al primer objetivo específico, se tiene que en el desarrollo de la tarea se evidencia algunas etapas de generalización según el texto de Mason (1999), en la etapa degeneralizar, los estudiantes a través de la observación logran ver, registrar y decir regularidades de acuerdo a sus habilidades argumentativas.

En cuanto al segundo objetivo específico, se evidenció durante el desarrollo del tarea una conexión entre la actividad argumentativa y el proceso de generalizar, esto debido a que alver, decir y registrar cosas sobre la tarea, se genera un vínculo estrecho en la construcción de ideas mediante el razonamiento hecho por los estudiantes y los elementos que constituyen un argumento en el modelo de Toulmin.

De acuerdo con el tercer objetivo específicoque hace énfasis a la identificación de argumentos surgidos en la tarea propuesta sobre generalización, de manera satisfactoria se puede decir que emergieron argumentos de la actividad matemática posibilitando la generación de argumentos de dos tipos, por un lado aquellos donde el garante es un patrón o generalidad que se cumple en todos los casos haciendo uso de ejemplos y verificación tomando como referentes las figuras propuestas en la secuencia. Y un segundo tipo de argumento el garante es una generalización aritmética basado en algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división de número naturales expresada en forma polinómica.

Finalmente, con respecto al último objetivo específico, es importante decir que los estudiantes formularon de manera espontánea afirmaciones, las cuales fueron puestas a consideración de sus compañeros y docente, surgiendo así una serie de argumentos durante el desarrollo de la tarea.

En términos generales en el proceso de razonar podría concluir lo siguiente:

1. Para los estudiantes la observación fue fundamental para iniciar la construcción de ideas para dar respuesta a la primera y segunda preguntas planteadas en la tarea.

2. Los Estudiantes en mención se dieron a la tarea de registrar cada afirmación hecha ante sus compañeros de grupo, se evidenciaba en ellos una motivación y un interés natural por resolver el problema de las secuencias de figuras.

3. Los estudiantes que se mencionan en la relatoría, formaban parte de grupos diferentes, enriquecieron la actividad matemática en el sentido de participar en plenaria pasando al tablero y exponiendo sus ideas delante de sus compañeros.

4. La dinámica del proceso de razonar tuvo su punto más alto en la parte final de la tarea propuesta, el manejo de datos, el ir y venir expresiones aritméticas buscando la lógica de la solución para las figuras de posición impar y para las figuras de posición par. Esto último fue un paso importante en dicho proceso que tomo cierto tiempo en ser razonado y descubierto por algunos estudiantes.

5. En la pegunta: En las figuras 24,36 y 75 ¿cuántos cuadrados en blanco hay en total en cada figura? Algunos estudiantes el conteo lo hicieron cuadritos por cuadritos, pero al enfrentarse a las figuras de las posiciones 36 y 75 entendieron que de esa manera era muy dispendioso dar una respuesta satisfactoria a sus compañeros y al docente, generando la necesidad de buscar nuevas estrategias de conteo.

6. Las tareas de generalización permiten generar argumentos y expresar una generalidad sin importar que el lenguaje que se utilice no sea de tipo algebraico.

6. RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS

En este capítulo se presentan algunas recomendaciones y sugerencias para que sirvan de pautas en proyectos similares.

De acuerdo al trabajo desarrollado en este proyecto se recomienda que para futuras investigaciones relacionadas con tareas de generalización, se tenga en cuenta que es necesario que los estudiantes se familiaricen con tareas sobre generalización con el propósito de generar en ellos la confianza en sí mismo y de algún modo garantizar la participación espontánea en la realización de la tarea.

Que se dé el tiempo necesario para que los estudiantes resuelvan las preguntas planteadas en la tarea de acuerdo a cada fase en el proceso de generalización y no se sientan presionados a dar una respuesta inmediata.

El número sesiones de trabajo deben ser las necesarias para que los estudiantes no pierdan la motivación al trabajo a causa del cansancio físico y mental. Es decir hacer uso mesurado de los tiempos de cada sesión.

Se sugiere que esta clase de trabajos sea implementada por la comunidad educativa, en las instituciones educativas, en especial en los grados de primaria y secundaria, como propuesta pedagógica para fortalecer habilidades argumentativas en los estudiantes.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes. Traducción de Pedro Gómez. Una Empresa Docente.

BLANCHÉ, R. (1973). *Le raisonnement*. Paris: P.U.F.

DIAZ, M. (2011). *Cursillo: comunicación y pensamiento visual en la clase de matemáticas.* Universidad Tecnológica y Pedagógica de Colombia.

HARADA, E. (2009). *Algunas aclaraciones sobre el "modelo" argumentativo de Toulmin.* Universidad Autónoma de México.

IZQUIERDO, R. & GRANADOS, M. (2012). *Caracterización de los argumentos que emergen en el desarrollo de una tarea de generalización realizada por estudiantes de grado noveno.* Tesis Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

MASON, J., GRAHAM, A.PIMM, D. & GOWAR, N (1999).*Rutas hacia el algebra y Raíces del álgebra*. Traducción y edición de Cecilia Agudelo Valderrama. Tunja: Sección de Publicaciones, UPTC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: MEN

RODRIGUEZ, L. (2004). *el modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa.* Revista digital universitaria vol 5. Número 1. http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/art2.htm

TOULMIN, S. (2003).*The uses of argument.*Reino Unido de Gran Bretaña: Cambridge University Press.

ANEXOS

Anexo A

Tarea de práctica sobre generalización

COLEGIO "BRAVO PÁEZ"
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
NIT. 860.532.422-8 – CÓDIGO DANE: 11100112614
Resolución de Integración No. 2589 de Agosto 28 de 2002 y
Resolución Aclaratoria No.1879 del 30 de Mayo de 2008

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría EDUCACIÓN

TAREA DE PRACTICA SOBRE GENERALICACION- 702 JT

Observe las figuras

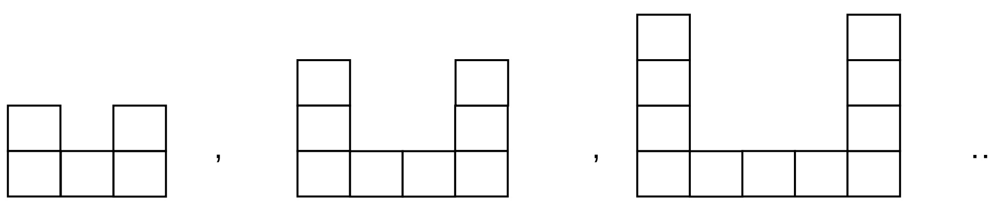


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Responde

1. Haz una descripción breve de la figura 2
2. Haz una descripción breve de la figura 3
3. ¿Cómo se construyó la figura 3 a partir de la figura 2?
4. Dibuje las dos siguientes figuras
5. ¿Cuántos cuadrados unitarios tiene la figura 4? ¿La figura 5?
6. ¿Es cierto que hay 647 cuadrados unitarios en la figura 21? Justifique.

Anexo B

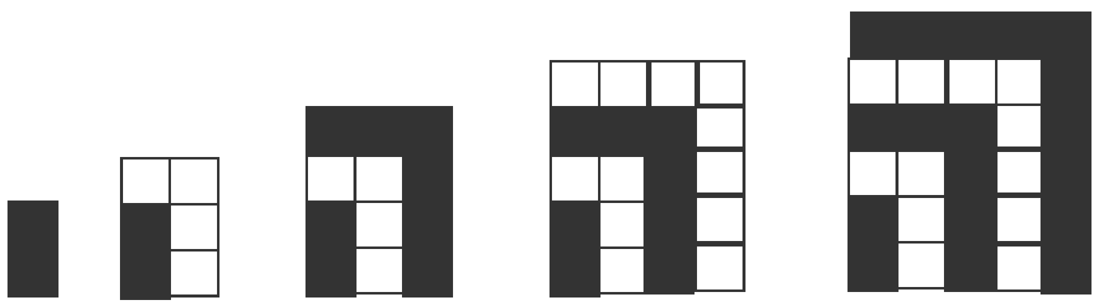
Tarea de pilotaje sobre generalización inicial

COLEGIO “BRAVO PÁEZ”
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
NIT. 860.532.422-8 – CÓDIGO DANE: 11100112614
Resolución de Integración No. 2589 de Agosto 28 de 2002 y
Resolución Aclaratoria No. 1879 del 30 de Mayo de 2008

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría EDUCACIÓN

CURSO 702 JT

Observa las figuras



...

1 2 3 4 5

Preguntas:

1. Haz una descripción general de la figura
2. ¿Cómo se construye la figura a partir de la anterior? ¿Qué es común en estos movimientos?
3. Dibuja las dos figuras siguientes
4. En las figuras 10,13,24, 32 y 75 ¿Cuántos cuadrados blancos hay en total?

Anexo C

Relatoría Pilotaje tarea sobre generalización inicial

COLEGIO “BRAVO PÁEZ”
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
NIT. 860.532.422-8 – CÓDIGO DANE: 11100112614
Resolución de Integración No. 2589 de Agosto 28 de 2002 y
Resolución Aclaratoria No. 1879 del 30 de Mayo de 2008

CURSO 702 JT

RELATORIA DEL PILOTAJE SOBRE TAREA SECUENCIAS GEOMÉTRICO

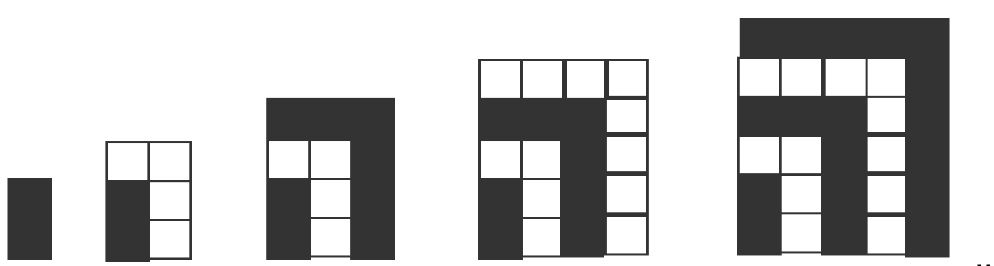
La siguiente relatoría está basada en el pilotaje que se llevó a cabo con dos estudiantes del curso 702, cuyas características (edad, sexo, escolaridad) son similares a la población al cual va dirigida originalmente. Es importante aclarar que el desarrollo de la actividad se dividió en dos sesiones:

DESCRIPCIÓN DE LOS ESTUDIANTES

El pilotaje se realizó con dos estudiantes del curso 702, del colegio distrital Bravo Páez, ubicado en la localidad de Rafael Uribe Uribe, Barrio el Quiroga Central. Cabe destacar que los educandos han trabajado con tareas similares a la de los patrones geométricos, sin dejar de lado las temáticas que corresponden a su plan de estudios.

DESCRIPCIÓN DE LA TAREA DESARROLLADA POR LOS ESTUDIANTES

La siguiente tarea que se describe a continuación fue desarrollada por los estudiantes con la orientación del docente.



1 2 3 4 5

Preguntas

1. Haz una descripción general de la figura
2. ¿Cómo se construye la figura a partir de la anterior? ¿Qué es común en estos movimientos?
3. Dibuja las dos figuras siguientes
4. En las figuras 10, 13, 24,32 y 75 ¿Cuántos cuadrados blancos hay en total?

Los estudiantes empezaron a desarrollar la tarea y cada vez que ellos tenían una duda se dirigían al profesor para que los orientara.

DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN PRESENTADA

En la siguiente relatoría nos referimos a los estudiantes no con sus nombres de pila, sino como estudiante 1 y estudiante 2:

En la pregunta: Haz una descripción general de la figura.

El estudiante 1 respondió:

"Una descripción general es que todas las figuras al multiplicar el número de cuadrados del lado horizontal con el número de cuadrado del lado vertical, da como resultado el número total de cuadrados que tiene cada figura"

El estudiante 2 dijo:

"Otra descripción que se puede hacer es que al multiplicar la posición de la figura por 2, da como resultado el número de cuadrados que tiene la**L**que se está adicionando con respecto a la figura anterior" así:

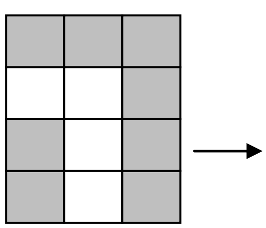
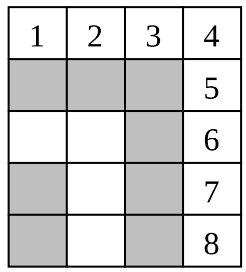


Figura de la posición 3

Luego se tiene para la posición 4, la siguiente figura



La **L** que se adicionó con respecto a la figura anterior tiene 8 cuadrados, porque:

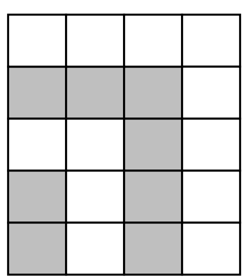
4(posición) por 2 = 8 (total de cuadros de la **L** adicionada) .

Con respecto a la pregunta ¿Cómo se construye la figura a partir de la anterior? ¿Qué es común en estos movimientos?

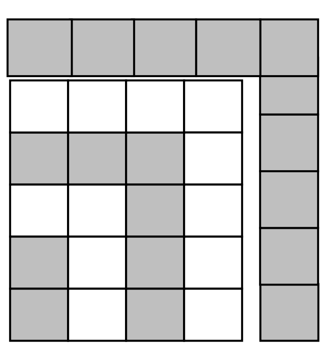
El estudiante 2 dijo:

“Para construir la figura siguiente, se le suma un cuadrito a uno de los lados de los cuadrados que hacen parte de la **L** más grandes de la figura anterior” por ejemplo:

En la posición 4, tenemos la siguiente figura:



Ahora le sumamos un cuadrado a uno de los lados de cada cuadrado que hacen parte de la **L** más grandes de la figura 4, así:



Y completamos la figura de la posición 5, adicionándole a la **L** un cuadrito más.
El profesor le preguntó a los estudiantes: ¿Se puede evidenciar algo en común en cada una de las figuras?

El estudiantes 1 dijo: “Que le parecía que lo común es que se le sumaba una **L** más, a cada una de las figuras”

El profesor le preguntó:

¿Hay alguna secuencia con los cuadrados que están en blanco y con los que están sombreados al adicionar un**L**en cada posición?

Los estudiantes se quedaron pensando un tiempo la pregunta que les hizo el profesor; pero no le dieron una respuesta, entonces… hubo la necesidad que el docente interviniera diciéndoles…

Observen que el número de cuadrados en blancos que hay en la **L** más grande de la figura en la posición 2, es el mismo número de cuadrados blancos que hay en la penúltima **L** de la figura que está en la posición 3 ¿Qué analizan de esta situación?

Después de otro momento en que los estudiantes se dieron a la tarea de analizar lo que dijo el profesor.

El estudiante 1, dijo:

“Si el número de cuadrados en blancos se incrementan en las posiciones 2, 4 y 6, y los números de cuadrados sombreados van aumentando cuando cambia en las posiciones 3 y 5, entonces, se presenta la siguiente situación:

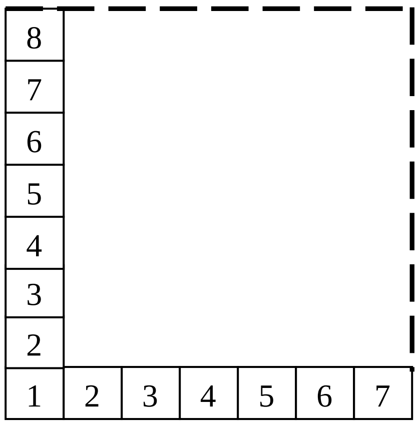
- En la posición 2, hay 4 cuadrados blancos en total.
- En la posición 4, hay 12 cuadrados blancos en total.
- En la posición 6, hay 24 cuadrados blancos en total.

En esos momentos la actividad se interrumpió para que los estudiantes tomaran un descanso.

Después del descanso se inició con la segunda sesión de la siguiente manera:

Con respecto a la pregunta 3: Dibuja las dos figuras siguientes.

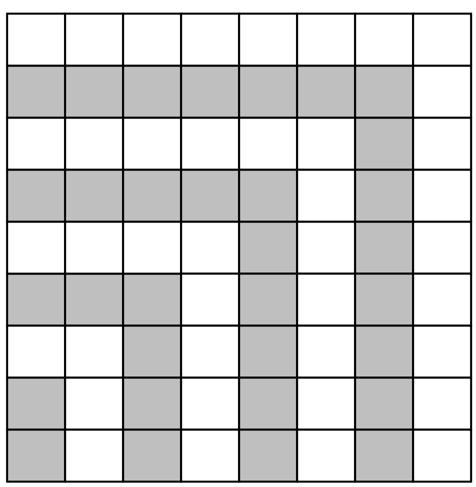
El estudiante 2 , hizo el siguiente razonamiento para construir la figura de la posición 7, dijo: Como en la posición 6 hay seis cuadrados horizontalmente y 7 para arriba (verticalmente); entonces la figura 7 debe tener 7 cuadrados en la horizontal y 8 cuadrados en la vertical, así:



Luego empezó a dibujar todas las figuras de las posiciones anteriores al interior del rectángulo de la figuras de la posición 7
.
Los estudiantes construyeron la figura de la posición 8, siguiendo la misma estrategia anterior.

En la pregunta que dice: En las figuras 10, 13, 24, 32 y 75 ¿Cuántos cuadrados blancos en total hay? El estudiante 2 respondió:

En la figura 8, hay 4 **L** con cuadrados blancos, y en la figura 9, hay 5 **L**con cuadrados blancos. Como se muestra en la siguiente figura:



Hay 4 **L** con cuadrados blancos

Figura 8.

El docente les hizo la siguiente aclaración: ¡Jóvenes!, la pregunta se refiere al número de cuadrados blancos que hay en total en cada figura.
Y les preguntó ¿Es cierto que hay en total 24cuadrados blancos en la figura 6?

El estudiante 2 verificó los resultados de los totales de los cuadrados blancos en la figura 6, contándolos uno por uno y dijo: “profesor… es cierto que hay la cantidad de cuadrados en blancos en las figuras 6, como usted lo dijo”. Inmediatamente el profesor, les formuló la siguiente pregunta: ¿De qué otra manera se puede contar el número de cuadrados blancos en cada figura, sin la necesidad de contarlos uno por uno?

El estudiante 2 dijo:

Que una de las estrategias es tener en cuenta la posición de la figura y el número de cuadrados sombreados que hay al lado izquierdo de cada rectángulo, así:

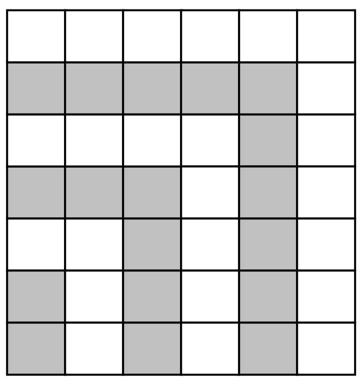


Figura 6

Luego se multiplica 6 (posición) por 4 (número de cuadrados sombreados en el lado izquierdo del rectángulo), da un total de 24 cuadrados blancos en la figura 6.

El docente les dijo, ahora calcule el número de cuadrados en blancos que hay en las figuras 10,13, 24, 32, 75 y 86Sin dibujarlas.

El estudiante 2 dijo:Que en la figura 10 hay 60 cuadrados blancos porque:
10 x 6 (cuadrados sombreados) = 60

El estudiante 1 dijo:Hay que tener en cuenta que: - En las figuras 2 y 3, hay 4 cuadrados blancos, en las figuras 4 y 5, hay 12 cuadrados blancos y así sucesivamente.

Luego dijo, que el número de cuadrados sombreados que están al lado izquierdo del rectángulo de cada figura, se presenta la siguiente situación:En las figuras 1 y 2, hay 2 cuadrados sombreados, en las figuras 3 y 4, hay 3 cuadrados sombreados, en las figuras 5 y 6, hay 4 cuadrados sombreados, en las figuras 7 y 8, hay 5 cuadrados sombreados , en las figuras 9 y 10, hay 6 cuadrados sombreados, si hago una lista de los números pares consecutivos obtengo la siguiente información:

(Posiciones pares)

0,	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10

(número de cuadritos sombreados)

Se tiene que para una posición impar, se obtiene el número de cuadrados sombreados, restándole una unidad a la posición par así: En la posición par 10, hay 6 cuadrados sombreados igual que en la figura que está en la posición impar 9, En conclusión se tiene que :

En la figura 13, hay en total 104 cuadrados blancos porque:13 (posición de la figura) por 8 (cuadrados sombreados) es igual a 104. En la figura 24, hay en total 312 cuadrados en blancos porque:24 (posición) x 13 (número de cuadrados sombreados) es igual a 312. Y para la figura en la posición 75, se tiene 75 x 39 = 2925 cuadrados en blancos.

Anexo D

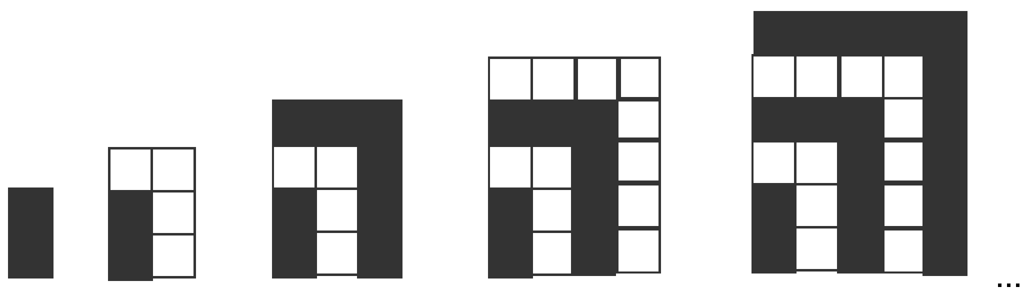
Tarea sobre generalización definitiva

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría
EDUCACIÓN

COLEGIO “BRAVO PÁEZ”

NIT. 860.532.422-8 – CÓDIGO DANE: 11100112614
Resolución de Integración No. 2589 de Agosto 28 de 2002 y
Resolución Aclaratoria No. 1879 del 30 de Mayo de 2008

Observa las figuras



1 2 3 4 5

Preguntas:

1. Describa brevemente la figura de la posición 4 y la figura de la posición 5.
2. Al observarlas figuras de la posiciones 4 y 5 ¿Qué es igual o diferente en estas figuras?
3. Teniendo en cuenta la posición de la figura, los cuadrados en blancos y los sombreados, responde:
   a. ¿Cómo se construye la figura 5 a partir de la figura 4?
   b. ¿Cómo se construye la figura 6 a partir de la figura 5?
4. Dibuja las dos figuras siguientes.
5. Responde:
   a. Teniendo en cuenta la figura de la posición 6:
   ¿Es cierto que hay 20 cuadrados en blanco?
   ¿Es cierto que hay 18 cuadrados sombreados?
   b. Teniendo en cuenta la figura de la posición 13
   ¿Es cierto que hay 104 cuadrados en blanco?
   ¿Es cierto que hay 175 cuadrados sombreados?
6. ¿Cuántos cuadrados blancos hay en:
   La figura 24?, La figura 36? , La figura 75?

Anexo E

Relatoría Tarea sobre generalización definitiva

COLEGIO “BRAVO PÁEZ”
NIT. 860.532.422-8 – CÓDIGO DANE: 11100112614
Resolución de Integración No. 2589 de Agosto 28 de 2002 y
Resolución Aclaratoria No. 1879 del 30 de Mayo de 2008

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría EDUCACIÓN

RELATORIA FINALDE LA TAREA SE SECUENCIAS GEOMÉTRICAS

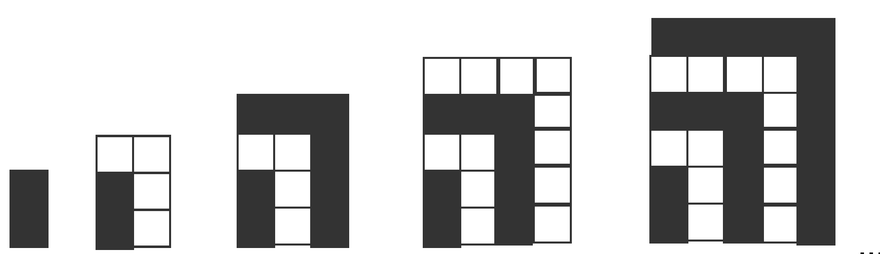
La siguiente relatoría está basada en la tarea que se llevó a cabo con los estudiantes del curso 702 Jornada tarde del Colegio Distrital Bravo Páez, ubicado en la Localidad Rafael Uribe Uribe, Barrio Quiroga Central.
La tarea se desarrolló en dos sesiones:

DESCRIPCIÓN DE LOS ESTUDIANTES

El grupo de estudiantes del curso 702, del colegio distrital Bravo Páez, tienen un promedio de edad de 14 años y en su mayoría son de estratos 1 y 2, cabe destacar que todos son de sexo masculino, por consecuencia del proyecto de educación diferenciada que implementa el Colegio.

DESCRIPCIÓN DE LA TAREA DESARROLLADA POR LOS ESTUDIANTES

La tarea consiste en una secuencia geométrica dados por rectángulos que están conformados por cuadrados en blanco y sombreados. La tarea tiene como objetivo que los estudiantes establezcan regularidades y generalizaciones, utilizando un lenguaje apropiado, así este no sea de tipo algebraico.También es importante destacar que los estudiantes del curso 702, han venido trabajando desde hace un tiempo con tareas similares de secuencias geométricas, con el propósito de familiarizarse con estas actividades.La tarea es la siguiente:



1 2 3 4 5

Preguntas:

1. Describa brevemente la figura de la posición 4 y la figura de la posición 5.
2. Al observarlas figuras de la posiciones 4 y 5 ¿Qué es igual o diferente en estas figuras?
3. Teniendo en cuenta la posición de la figura, los cuadrados en blancos y los sombreados, responde:
c. ¿Cómo se construye la figura 5 a partir de la figura 4?
d. ¿Cómo se construye la figura 6 a partir de la figura 5?
4. Dibuja las dos figuras siguientes.
5. Responde:
c. Teniendo en cuenta la figura de la posición 6:
   ¿Es cierto que hay 20 cuadrados en blanco?
   ¿Es cierto que hay 18 cuadrados sombreados?
d. Teniendo en cuenta la figura de la posición 13
   ¿Es cierto que hay 104 cuadrados en blanco?
   ¿Es cierto que hay 175 cuadrados sombreados?
6. ¿Cuántos cuadrados blancos hay en: La figura 24?, La figura 36? , La figura 75?

Es importante aclarar que inicialmente la tarea fue desarrollada individualmente por los estudiantes, luego conformaron grupos de 4 personas para la socialización de sus respuestas y por último se hizo un debate a nivel de todo el curso, donde cada grupo eligió libre y espontáneamente a un estudiante relator.

DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN PRESENTADA

En la siguiente relatoría nos referimos a los estudiantes no con sus nombres de pila, sino como estudiante 1, estudian 2, estudiante 3 y estudiante 4.

SESIÓN 1

A la pregunta: Describe brevemente la figura de la posición 4 y la figura de la posición 5. Los estudiantes relatores, respondieron:

El estudiante 1: La figura 4 como la figura 5 tienen cuadrados en blanco y sombreados, y ambas figuras son rectángulos.

Estudiante 2: Hay doce cuadrados en blanco y ocho cuadrados negros en la figura 4, y hay doce cuadrados en blanco y dieciocho cuadrados sombreados en la figura 5.

Estudiante 3: Tanto como la figura 4 como la figura 5, son rectángulos, en el caso de la figura 4, la base tiene cuatro cuadrados y el lado vertical tiene 5 cuadrados. La figura 5, la base tiene cinco cuadrados y el lado vertical tiene seis cuadrados. En total hay veinte cuadrados en la figura 4 y en total hay treinta cuadrados en la figura 5.

Estudiante 4: Las figuras 4 y 5 son rectángulos conformados por hileras en forma de "**L**"·, la primera "**L**" son de cuadrados en blanco y la que le sigue son de cuadrados sombreados y así sucesivamente…

A la pregunta: Al observar las figuras de las posiciones 4 y 5 ¿Qué es igual o diferente en estas figuras?

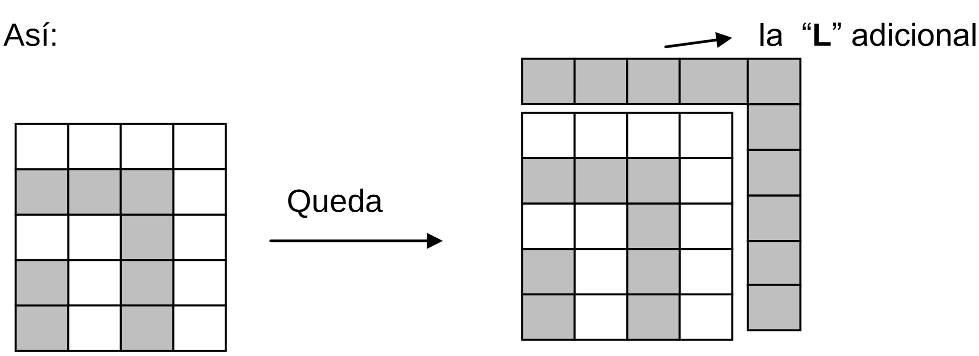
Los estudiantes respondieron: *Estudiante 1:* Lo diferente, es que la figura de la posición 4 tiene diez cuadrados menos que la figura de la posición 5.Y lo igual, es que ambas figuras están formadas por hileras en forma de "**L**" y tiene cuadrados en blanco y sombreados. *Estudiante 2:* La diferencia es que la figura 4, tiene 8 cuadrados sombreados y la figura 5 tiene 18 cuadrados sombreados; además la figura 5, tiene 10 cuadrados más que la figura 4.Lo igual, es que hay 12 cuadrados en blanco en ambas figuras.

Estudiante 3: Lo distinto es que en la figura 5 hay una "**L**" más que en la figura 4. Lo igual, es que hay igual número de cuadrados en blanco, tanto en la figura 4 como en la figura 5.*Estudiante 4:* La igualdad, consiste en que tienen la misma cantidad de cuadrados en blanco y lo distinto, es que los cuadrados sombreados aumentaron en la figura 5; es decir, en la figura 4 hay 8 cuadrados sombreados y en la figura 5 hay 18 cuadrados sombreados.

A la pregunta: Teniendo en cuenta la posición de la figura, los cuadrados en blanco y los cuadrados sombreados, ¿Cómo se construye la figura 5 a partir de la 4? ¿Cómo se construye la figura 6 a partir de la figura 5?

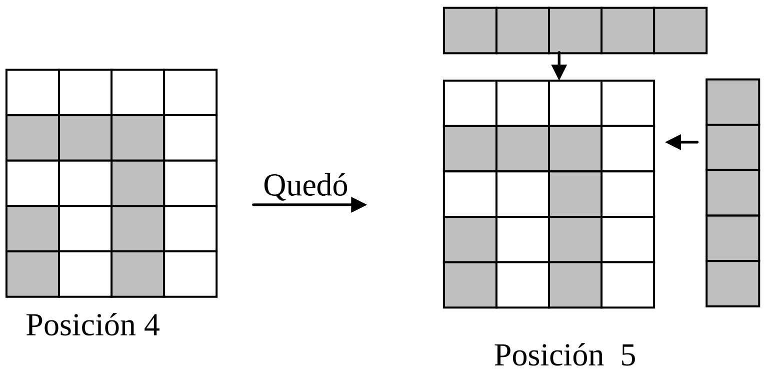
Estudiante 1: Sobre la última "**L**" blanca de la figura 4 se coloca una "**L**" negra para formar la figura de la posición 5.

Así:



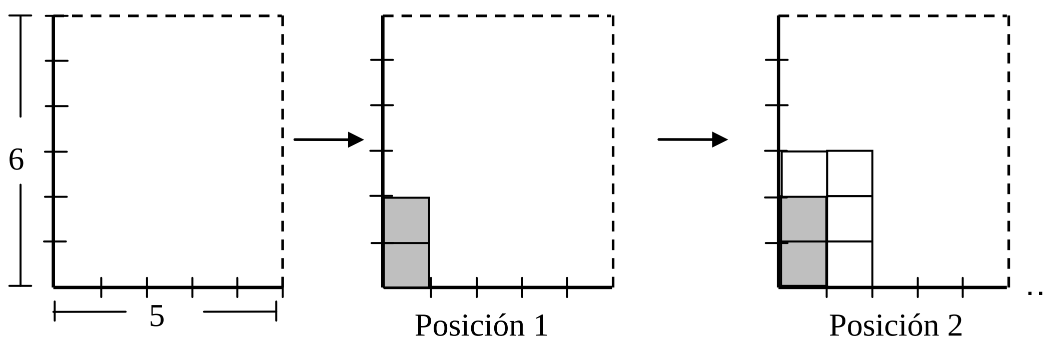
Posición 4 **Posición 5**

Y para construir la figura posición 6, se coloca una "**L**" blanca encima de la última "**L**" negra de la figura 5.*Estudiante 2.* Se le agregó una hilera horizontal de cinco cuadrados sombreados y luego una hilera vertical de 5 cuadrados sombreados a la figura de la posición 4, así:



Y el caso de la figura posición 6 hacemos el mismo procedimiento, pero las hileras tanto horizontales como verticales deben ser de seis cuadrados en blanco, encima y al lado de la figura 5.

Estudiante 3: Como la figura 5 contiene a la figura 4 entonces, se hace un esqueleto de un rectángulo en la figura de la posición 5, que tiene cinco cuadrados de base y seis cuadrados de alto; y ahí adentro se reconstruye la figura de la posición 4; así:



Para construir la figura 6, se hace algo parecido.

Estudiante 4: Para dibujar la figura 5, se hace una réplica exacta de la figura 4 y luego se le agrega una "**L**"de cuadrados negros y quedó lista la figura de la posición 5, y para construir la figura de la posición 6, se le agrega una "**L**" de cuadrados blancos a la figura posición 5.

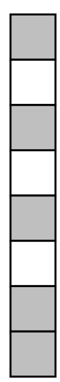
En la elaboración de las figuras correspondientes a la posición 7 y 8, los estudiantes dieron las siguientes explicaciones (es importante aclarar que los estudiantes dibujaron correctamente las dos figuras):

Estudiante 1: Para elaborar la figura de la posición 7, dibujamos como primera medida la figura de la posición 1, luego a ésta, le agregamos la "**L**" blanca para formar la figura de la posición 2 y a ésta, le agregamos una "**L**" negra para formar la figura de la posición 3, y así sucesivamente hasta llegar a la figura de la posición 7.

Estudiante 2: Tuvimos en cuenta que la figura 7 tienecomo base siete cuadrados y en el lado vertical 8 cuadrados , luego construimos un rectángulo de 7 x 8, es decir de 42 cuadrados en total, luego dibujamos las figuras de las posiciones anteriores al interior del rectángulo 7 x 8.El mismo procedimiento lo utilizamos para construir la figura de la posición 8.

Estudiante 3: Para dibujar la figura 7, empezamos dibujando la figura de la posición 1 y luego le fuimos agregando una "**L**" blanca, una "**L**" negra y así sucesivamente hasta llegar a la figura 7. La figura de la posición 8 fue más sencilla porque ya teníamos la figura de la posición 7, sólo nos bastó con agregarle una "**L**" blanca.

Estudiante 4: Para dibujar la figura 7, primero dibujamos una columna con 8 cuadrados, y los dos primeros de abajo hacia arriba los pintamos de negro, el tercero lo dejamos en blanco, el cuarto lo pintamos de negro, el quinto en blanco, el sexto de negro, el séptimo en blanco y el octavo de negro, así:



Luego, a partir del tercer cuadrado, dibujamos las "**L**" correspondientes; una blanca, otra negra y así sucesivamente hasta completar un rectángulo de 7 x 8.

SESIÓN 2

A la pregunta: Teniendo en cuenta la figura de la posición 6 ¿Es cierto que hay 20 cuadrados en blanco? ¿Es cierto que hay 18 cuadrados sombreados?Los estudiantes respondieron, así:

Estudiante 1: Es correcto que hay 18 cuadrados sombreados, y no es cierto quehay 20 cuadrados en blanco, sino 24; esto lo verificamos contando uno por uno los cuadrados en la figura 6.

Estudiante 2: Se puede observar que en la figura de la posición 6, hay dieciocho cuadrados sombreados y veinticuatro cuadrados en blanco, por lo tanto la respuesta de la primera pregunta es falsa y la segunda, es verdadera.

Estudiante 3: Después de contar uno a uno los cuadrados de la posición 6, se tiene que hay dieciocho cuadrados sombreados y veinticuatro cuadrados blancos.
Estudiante 4: Estamos de acuerdo con los demás compañeros que hay 24 cuadrados blancos y 18 cuadrados sombreados.

A la pregunta: Teniendo en cuenta la figura de la posición 13 ¿Es cierto que hay104 cuadrados en blanco? ¿Es cierto que hay 175 cuadrados sombreados?
Los estudiantes respondieron:

Estudiante 1: Dibujamos la figura de la posición 13 y contándolos uno a uno, nos dimos cuenta que no es cierto que hay 104 cuadrados en blanco y tampoco es cierto que hay 175 cuadrados sombreados, lo correcto es que hay 84 cuadrados en blanco y 98 cuadrados sombreados.

Estudiante 2: Nosotros observamos que en las figuras de las posiciones pares, la última "**L**" siempre son cuadrados en blanco, y la última "**L**" en las posiciones impares son cuadrados de color sombreados, entonces hicimos lo siguiente:

(Posición 1) x 2 = 2 cuadrados sombreados en total, en la figura posición 1.
(posición3) x 2 = 6 cuadrados sombreadosen la última "**L**" de la figura 2.
(posición5) x 2 = 10 cuadrados sombreados en la última "**L**" de la figura 3.
(posición7) x 2 = 14 cuadrados sombreadosen la última "**L**" de la figura 7.
(posición9) x 2 = 18 cuadrados sombreados en la última "**L**" de la figura 9.(posición11) x 2 = 22 cuadrados sombreados en la última "**L**" de la figura 11.
(posición13) x 2 = 26 cuadrados sombreados en la última "**L**" de la figura 13.

Como la figura 13 contiene a las "**L**" de las figuras de posiciones impares anteriores; hicimos la siguiente suma: 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 = 98 cuadros sombreados, que es el total de cuadrados sombreados que hay en la figura de la posición 13.

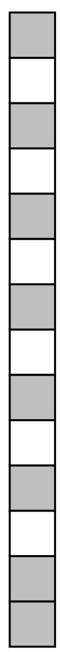
Para hallar los cuadrados en blanco de la figura posición 13, lo que hicimos fue devolvernos a la posición anterior, es decir a la figura de la posición 12 y luego hicimos lo siguiente:

(posición12) x 2 = 24 cuadrados en blanco en la última "**L**" de la figura 12.
(posición10) x 2 = 20 cuadrados en blanco en la última "**L**" de la figura 10.
(Posición 8) x 2 = 16 cuadrados en blanco en la última "**L**" de la figura 8.
(posición6) x 2 = 12 cuadrados en blanco en la última "**L**" de la figura 6.
(posición4) x 2 = 8 cuadrados en blanco en la última "**L**" de la figura 4.
(posición2) x 2 = 4 cuadrados en blanco en la única "**L**" en la figura 2.

Luego hicimos la suma de:24 + 20 + 16 + 12 + 8 + 4 = 84 y nos da el número de cuadrados en blanco que tiene la figura de la posición 13. Entonces, la respuesta es falsa tanto para la primera como para la segunda pregunta.

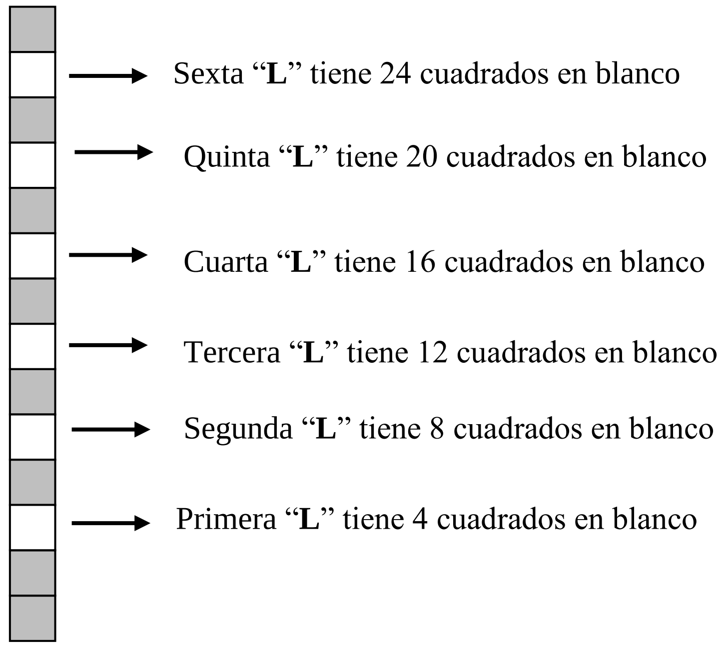
Estudiante 3: Dibujamos la figura de la posición 13 y luego contamos uno por uno y obtuvimos que hay 84 cuadrados en blanco y 98 cuadrados sombreados, es decir que la respuesta para ambas preguntas es falsa.

Estudiante 4: Como la figura de la posición 13 tiene trece cuadrados horizontalmente y 14 cuadrados verticalmente, nosotros dibujamos una columna con 14 cuadrados, luego de abajo hacia arriba pintamos los dos primeros cuadrados de negro, el tercero lo dejamos en blanco, el cuarto lo pintamos de negro y así sucesivamente, quedando así:



Para hallar la cantidad de cuadrados en blanco, tuvimos en cuenta que por cada cuadrado en blanco, se forma una "**L**" blanca y que la primera tiene 4 cuadrados

en blanco, la segunda tiene 8 cuadrados en blanco, la tercera 12, la cuarta 16, la quinta 20 y la sexta 24 cuadrados en blanco.
Algo así:



Luego sumamos 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 y nos da un total de 84 cuadros en blanco. Para hallar el número de cuadrados sombreados sumamos:

2 cuadrados sombreados, son los primeros de abajo hacia arriba.

6 cuadrados sombreados de la primera "**L**".

10 cuadrados sombreados de la segunda "**L**".

14 cuadrados sombreados de la tercera "**L**".

18 cuadrados sombreados de la cuarta "**L**".

22 cuadrados sombreados de la quinta "**L**".

26 cuadrados sombreados de la sexta "**L**" .

Luego sumamos: 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26, nos da 98 cuadrados sombreados en total. Entonces la respuesta es falsa para las dos preguntas anteriores.

A la pregunta: ¿Cuántos cuadrados blancos hay en la figura 24, en la figura 36 y en la figura 75?Los estudiantes respondieron:

Estudiante 1: Nosotros dibujamos las figuras 24 y 36, pero la figura 75 no la hicimos puesto que es muy grande… entonces, en la figura 24, hay 312 cuadrados en blanco. En la figura 36, hay 684 cuadrados sombreados

Estudiante 2: Nos dimos cuenta que al descomponer los rectángulos de las posiciones pares en un cuadrado y una hilera horizontal, podíamos encontrar la manera de encontrar el número de cuadrados en blanco y sombreados en cada figura de posición par, nosotros los verificamos con la figura de la posición 6, así:
Tomamos la figura de la posición 6.

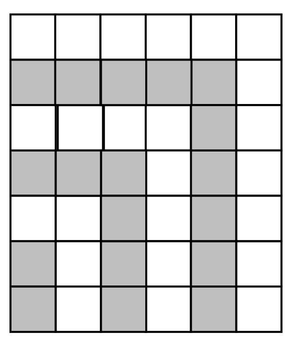
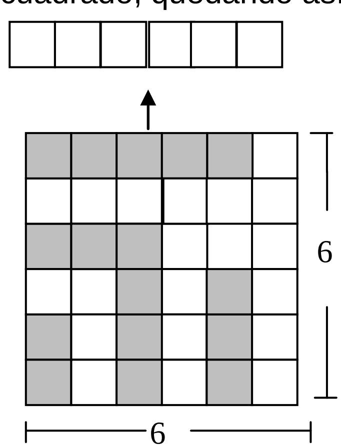


Figura posición 6

Ahora desprendemos la hilera horizontal que está encima de la figura 6, para formar un cuadrado, quedando así:



Como se observa, tenemos un cuadrado de 6 x 6, en el cuadrado observamos que hay igual cantidad de cuadrados en blancos que cuadrados sombreados, en este caso hay 18 cuadrados sombreados y 18 cuadrados en blanco y suman en total

36 cuadrados. También observamos que la cantidad de cuadrados de la hilera horizontal que retiramos es igual a la posición de la figura, es decir 6 cuadrados. Entonces para hallar el número de cuadrados en blanco de la figura 6, hicimos lo siguiente:

Primero hallamos el número total de cuadrados del cuadrado, es decir: 6 x 6 = 36 cuadrado.Luego a este resultado le restamos 18 cuadrados sombreados y nos dio:

36 – 18 = 18cuadrados en blanco, a este resultado le sumamos 6 cuadrados blancos (los de la hilera horizontal que retiramos), la suma nos dio 24 cuadrados en blanco en la figura de la posición 6.

Nosotros en el caso de la figura de la posición 24, hicimos el mismo procedimiento, así:

Primer paso, multiplicamos 24 x 24 = 576 y luego le restamos la mitad, así: 576 – 288(cuadrados sombreados) = 288(cuadrados en blanco) y a este le sumamos los 24cuadrados en blanco que retiramos, quedando así: 288 + 24 = 312, es el total de cuadrados en blanco en la figura de la posición 24.

En la figura de la posición 36, hicimos las siguientes operaciones:36 x 36 = 1296, luego le restamos la mitad, así:

1296 – 648(cuadrados sombreados) = 648(cuadrados en blanco), luego a 648 le sumamos 36(cuadrados en blanco) y nos dio 684 cuadrados en blanco en total.

Y para la figura de la posición 75,no pudimos encontrar el número de cuadrados en blanco.

Estudiante 3: Nosotros tuvimos que dibujar las figuras 24 y 36 y obtuvimos los mismos resultados, para la figura 24 son 312 y para la figura 36, son 684.

Estudiante 4: Nosotros también dibujamos las figuras 24 y 36 y contamos uno a uno los cuadrados en blanco y nos dio el mismo resultado que los compañeros, y no hicimos el resultado de la figura 75.

Acto seguido, el profesor le sugirió a los estudiantes que analizaran detenidamente la estrategia que utilizó el grupo del estudiante 2, con el fin de buscar el número de cuadrados en la figura 75.

Después de un tiempo (30 minutos aproximadamente) el estudiante 2, intervino diciendo: Si tomamos la gráfica de la posición 5, y la transformamos en cuadrado queda así:

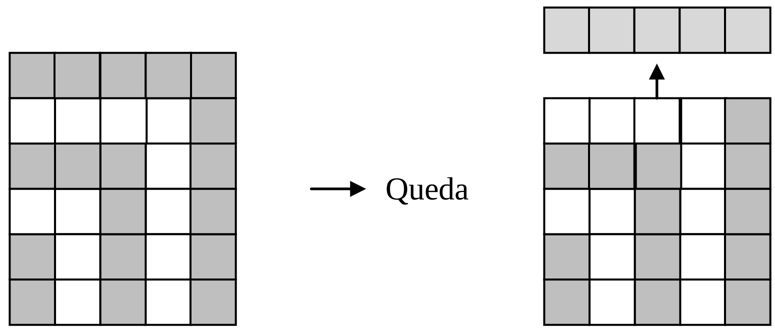


Figura 5

Como el número de cuadrados sombreado es uno más que los cuadrados en blanco (observando el cuadrado), nosotros como grupo, llegamos a la conclusión que… si al número total de cuadrados del cuadrado le restamos un cuadrito sombreado, entonces tenemos la misma cantidad de cuadrados blancos y sombreados y nos funcionó para conseguir el número de cuadrados en blanco de la figura posición 75; porque lo comprobamos con la figura 5 así:

5 x 5 = 25cuadrados(entre sombreados y en blanco), a éste resultado le restamos un cuadrado sombreado y nos da 24cuadrados(la mitad sombreados y la mitad en blanco) y luego le sacamos la mitad y nos dio 12 que es el número de cuadrados en blanco que hay en total en la figura de la posición 5, y así mismo hicimos con la figura de la posición 75; es decir:

Multiplicamos 75 x 75 = 5625, a éste resultado le quitamos un cuadrado sombreado y queda 5624(la mitad es sombreado la otra mitad en blanco) y a este resultado le sacamos la mitad y nos da 2812 que es el total de cuadrados en blanco que hay en la figura de la posición 75.

Profesor: El docente finalizó la actividad, agradeciendo a los estudiantes por su colaboración.