PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA ABORDAR ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA DERIVADA DIRECCIONAL EN UN CURSO DE CÁLCULO VECTORIAL A TRAVÉS DEL USO DE LA ESTACIÓN TOTAL COMO MEDIADOR

LUIS CARLOS ROMERO CASTRO
HÉCTOR FABIÁN RODRÍGUEZ MAYORGA

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2013

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA ABORDAR ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA DERIVADA DIRECCIONAL EN UN CURSO DE CÁLCULO VECTORIAL A TRAVÉS DEL USO DE LA ESTACIÓN TOTAL COMO MEDIADOR

Por:
LUIS CARLOS ROMERO CASTRO
HÉCTOR FABIÁN RODRÍGUEZ MAYORGA

Trabajo de grado entregado para optar por el título de
Especialista en Educación Matemática

Asesor:
ALBERTO DONADO
Magister en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia

2013

“*Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”*

Nota de aceptación:

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, Noviembre 2013

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Propuesta de actividades para abordar algunas características de la derivada direccional en un curso de cálculo vectorial a través del uso de la estación total como mediador"*** Presentado por los estudiantes:

Luis Carlos Romero Castro - 2013182026
Héctor Fabián Rodríguez Mayorga - 2013182024

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **45** puntos.

Observaciones:

____

En constancia se firma a los 10 días del mes de diciembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) ______________________
ALBERTO DONADO

Jurado:

Profesor(a) ______________________
MAURICIO BAUTISTA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10- 10- 2012	**Página 6 de 68**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Propuesta de actividades para abordar algunas características de la derivada direccional en un curso de cálculo vectorial a través del uso de la estación total como mediador.
Autor(es)	Luis Carlos Romero Castro Héctor Fabián Rodríguez Mayorga
Director	Alberto Donado
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 68 paginas
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Derivada direccional, pendiente de un terreno, estación total, argumentación.

2. Descripción
El presente trabajo de grado se realizó en el marco de la línea de argumentación y prueba, y presenta una propuesta de actividades que puede ser implementada con el objetivo de generar la capacidad de comprender e interpretar algunas características de la derivada direccional en un curso de cálculo vectorial. Dichas actividades buscan que el estudiante relacione el concepto de pendiente de una curva en un punto y la derivada

direccional desde un punto de vista aplicativo, de tal forma que se logre identificar los argumentos y razones generados por el estudiante frente a un problema. Para ello, se proporciona una serie de actividades que se espera, brinden al estudiante herramientas que fortalezcan sus procesos de argumentación y su visión hacia el cálculo de varias variables.

En el desarrollo de la propuesta participaron un grupo de estudiantes de las carreras ingeniería topográfica y tecnología en topografía de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, dado que su formación nos permite introducir un instrumento topográfico como lo es la estación total y utilizarlo como mediador tecnológico.

El trabajo se llevó a cabo en cuatro etapas. Primero, se diseñaron actividades de exploración en donde intervinieran la derivada direccional y el uso de la estación total, mediador tecnológico de la actividad. Segundo, se aplicaron las actividades diseñadas. Tercero, se recolectó la información por medio de un video y algunos ejercicios de forma escrita plasmados en una relatoría. Cuarto, se analizó la información recolectada en la etapa anterior para identificar los argumentos encontrados en el desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes.

3. Fuentes

BUSTOS, G. Catedra: Topografía II. Recuperado de : ftp://ftp.unsj.edu.ar/agrimensura/Topografia%20II/ESTACI%D3N%20TOTAL.pdf

CEDEÑO, M., & CASTRO, N. (2011). El papel de las calculadoras graficadoras comoinstrumento mediador en la comunicación matemática, *Revista Épsilon,* (16), 65-77.

CONEJERO, J. & SANABRIA, E. (s.f.). *Interpretación geométrica de las derivadas direccionales de funciones reales de dos variables mediante el uso del programa DPGraph.* Recuperado de http://albertoconejero.webs.upv.es/conejero_papers_education/conejero_sanabria2003derivadas.pdf

CUEVAS, C., & PLUVINAGE, F. (2009). Cálculo y Tecnología, *El Cálculo y su Enseñanza,1*, 45-58

LARSON, R., HOSTETLER, R., EDWARDS, B. (2006) *Calculo de Varias Variables. Volumen II. Octava Edición.* México: McGraw-Hill Interamericana.

LÓPEZ, R. (2008). *Nuevas tecnologías en la enseñanza – aprendizaje del cálculo: una* *aproximación al estado de la cuestión.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad de Granada. Recuperado de http://http://fqm193.ugr.es/media/gruposcms/TFM_Rubi.pdf

RADFORD, L. (1994). La Enseñanza de la Demostración: Aspectos Teóricos y Prácticos. *Educación Matemática, 6* (3), 21-36

ROJAS, L. & ESTEBAN, P. (s.f.). *Applets como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo vectorial*. Recuperado de http://www.iiis.org/CDs2010/CD2010CSC/SIECI_2010/PapersPdf/XA713EZ.pdf

ROJAS, L. & ESTEBAN, P. (2012, 30 de Marzo). *Enseñanza del cálculo vectorial: Aspectos pedagógicos y tecnológicos*. Saarbrücken: Editorial Académica Española.

THOMAS, G. (2006) *Cálculo. Una Variable*. *Undécima Edición.* México: Pearson Education.

TOULMIN, S. (2003). *The Uses of Argument*. Cambridge: Cambridge University Press

ZIMMERMANN, W. (1991). Visual thinking in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-137). Washington, DC: Mathematical Association of América.

4. Contenidos

El trabajo consta de 5 capítulos que se encuentran distribuidos de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se encuentra el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos para nuestra propuesta.

En el capítulo 2, hace referencia al marco referencial, en el que se expone la importancia de la enseñanza del cálculo, el uso de las TIC y las mediaciones utilizadas en la propuesta, marco conceptual en el que se encuentra las definiciones de pendiente, derivada y derivada direccional.

En el capítulo 3, hace referencia al diseño de la propuesta, en el cual se encuentran las actividades que se proponen para nuestro proyecto y se describe el grupo para el cual fue diseñada la propuesta.

En el capítulo 4, hace referencia a la implementación de las dos actividades propuestas.

En el capítulo 5, hace referencia al análisis de resultados evidenciados en la aplicación de las actividades de nuestro proyecto.

5. Metodología

La propuesta se implementó a un grupo de tres estudiantes de Ingeniería topográfica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas inscritos en la asignatura de Cálculo Multivariado del corte 2013-3.

La propuesta de este trabajo de grado tiene como objetivo la comprensión e interpretación del concepto de derivada direccional, a través del uso de la estación total, con el fin de que el estudiante pueda relacionar, el concepto con su aplicación vista como la pendiente de un terreno en un punto con respecto a una dirección. Por esta razón, en la propuesta se contemplan dos actividades que el estudiante debe desarrollar; de tal forma que el concepto no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario pueda verse como una aplicación útil.

6. Conclusiones

La enseñanza de las matemáticas, y en particular del cálculo vectorial, requiere del uso de herramientas tecnológicas que involucren al estudiante con la verdadera naturaleza de los conceptos que se enseñan; desde ese punto vista, el trabajo que hemos realizado es una avance en esta dirección, ya que ha permitido que los estudiantes desarrollen habilidades argumentativas con respecto a la noción de ciertas propiedades de la derivada direccional, el cual es el objetivo principal de este trabajo.

La importancia de los mediadores instrumentales para la enseñanza de las matemáticas ha sido resaltada en el marco teórico, y en la aplicación de la actividad diseñada en el presente trabajo se observa que no ha sido sobrevalorada dicha importancia: la mayoría de los argumentos que surgieron en el desarrollo de la actividad probablemente no se obtendrían sin la presencia de la estación total, y eso es algo que se hace evidente al observar el contraste entre las respuestas de los estudiantes antes y después de hacer uso del mediador que, en el caso de la población objetivo de la actividad, es un instrumento propio de su actividad profesional.

En particular, podemos resaltar el significativo avance que se evidenció en la compresión de la necesidad de establecer una dirección para determinar la pendiente en un punto en una superficie determinada, lo cual permite contrastar con la situación de la pendiente de una curva, en la cual solo era necesario especificar el punto; más importante aún es que dicha comprensión se alcanzó sin necesidad de que el profesor lo afirmara de antemano, sino que se logró cuando los estudiantes verificaron, haciendo uso de la estación total, que si se calculaba la pendiente en un punto, utilizando como referencia puntos que se encontraban en distintas direcciones, los valores eran significativamente distintos.

No obstante, hay que resaltar también que ciertas nociones no pudieron ser interiorizadas por el estudiante de la forma que se esperaba; en particular debemos referirnos a la idea central de que la pendiente en una función de dos variables (representada aquí por medio de un terreno con relieve) está totalmente determinada por el punto donde se estudia; en este caso, los estudiantes que hicieron parte de este estudio siempre consideraron la noción de pendiente como dependiente de los dos puntos a través de los cuales se calcula la recta que permite aproximar la pendiente que deseamos; nuestra conclusión es que dicha dificultad se basa principalmente en la conceptualización que se hecho del concepto de pendiente en la topografía.

La actividad se puede enmarcar dentro de lo que Radford denomina un “problema abierto”, ya que en la mayoría de las preguntas no se le indicó al estudiante cual era la respuesta a la pregunta, lo cual derivó en diversas afirmaciones por parte de los estudiantes acerca de las nociones sobre las cuales se estaba trabajando; por lo tanto, podemos afirmar que la actividad generó procesos de argumentación que permitió al estudiante involucrarse con su aprendizaje; entre estos procesos podemos destacar la generación de conjeturas acerca del comportamiento de la pendiente tanto en una curva como en una superficie, y la validación de estas conjeturas haciendo uso de técnicas matemáticas respaldadas por la utilización de la estación total para hacer los cálculos necesarios.

Con respecto a los argumentos evidenciados en el desarrollo de la actividad, se observa que en el caso de la pendiente de una recta, algunos estudiantes la calcularon haciendo uso de la formula y otros tuvieron en cuenta la interpretación de la pendiente como la variación de la altura con respecto a la variación en el desplazamiento; en el caso de la pendiente de la parábola, observamos que la mayoría de los estudiantes realiza el cálculo de la pendiente a través de aproximaciones por medio de rectas secantes; en este caso, los estudiantes argumentaron que la pendiente en un curva debería ser bastante parecida a la de las pendientes de esas rectas secantes, por lo cual observamos que los estudiantes argumentan en base a cierta idea intuitiva que tienen acerca de la aproximación, pero sin llegar a formalizarla en su totalidad.

Para la segunda actividad, la argumentación se basó principalmente en mediciones realizadas con la estación total, como se puede observar en la descripción de los argumentos expuesta en el presente trabajo; aquí, los argumentos surgieron en base a un garante empírico, aprovechando el hecho que se estaba trabajando sobre el objeto concreto; esto permitió fortalecer la visualización que tenían los estudiantes sobre el concepto de pendiente y verificar de una manera más cercana sus propiedades.

Finalmente, se pudo observar como el uso de la estación total permitió al estudiante visualizar la relación que existe entre la pendiente en un terreno y la dirección que escojamos para calcularla, lo cual se evidencia en las respuestas de los estudiantes antes y después de desarrollar la actividad que se diseñó.

Elaborado por:	Luis Carlos Romero Castro Héctor Fabián Rodríguez Mayorga
Revisado por:	Alberto Donado

Fecha de elaboración del Resumen:	4	11	2013

AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestros agradecimientos a:

Los docentes que nos acompañaron en nuestro proceso de formación, especialmente a nuestro asesor Alberto Donado, por su dedicacióny apoyo incondicional.

Nuestros compañeros de la especialización, Alejandra y Jaime por sus valiosos aportes y observaciones en este trabajo.

Los estudiantes del proyecto curricular de ingeniería topográfica y tecnología en topografía de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por su dedicación y esfuerzo al realizar todas las actividades propuestas.

Y por último a nuestros familiares y amigos.

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN 15
1.PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 16
1.1 JUSTIFICACIÓN 16
1.2 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA 17
1.3 OBJETIVO GENERAL 17
1.3.1 Objetivos Específicos 17
2.MARCO REFERENCIAL 18
2.1 IMPORTANCIA Y PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL 18
2.2 VISUALIZACIÓN 19
2.3 ARGUMENTACIÓN 19
2.4 LAS TIC 21
2.5 MEDIACIÓN INSTRUMENTAL 22
2.5.1 Uso De La Estación Total Como Instrumento Mediador Para El Cálculo Vectorial. 22
2.6MARCO CONCEPTUAL 24
2.6.1 Pendiente de una recta. 24
2.6.2 Recta tangente a una curva y derivada. 25
2.6.3 Derivada direccional 25
3.DISEÑO DE LA PROPUESTA 27
3.1 PRIMERA ACTIVIDAD 27
3.2 SEGUNDA ACTIVIDAD 32
4.IMPLEMENTACIÓN 35
5.ANÁLISIS DE RESULTADOS 37
CONCLUSIONES 47
BIBLIOGRAFÍA 50
ANEXOS 52
ANEXO A 52
ANEXO B 56

TABLA DE FIGURAS

Pág.

FIGURA 1. DIAGRAMA PROBLEMA RADFORD 21
FIGURA 2. MONTAJE DE LA ESTACIÓN TOTAL SOBRE UN TERRENO 23
FIGURA 3. POSICIÓN DE LA ET CON RESPECTO AL PRISMA 24
FIGURA 4. GRÁFICA DE LA RECTA 28
FIGURA 5. GRÁFICA DE LA PARÁBOLA $Y=X^2$ 29
FIGURA 6. GRÁFICA DE LA CURVA 31
FIGURA 7. PUNTOS DE LA RECTA 58
FIGURA 8. CÁLCULO DE LA PENDIENTE DE LA RECTA 58
FIGURA 9. PENDIENTE COMO DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL Y VERTICAL 59
FIGURA 10. APROXIMACIÓN A LA PENDIENTE DE PARÁBOLA ENUN PUNTO 60
FIGURA 11. APROXIMACIÓN A LA CURVA EN UN PUNTO POR RECTAS 62
FIGURA 12. APROXIMACIÓN DE LA PENDIENTE DE LA CURVA EN UN PUNTO 63
FIGURA 13. TERRENO 1 64
FIGURA 14. BOSQUEJO TERRENO 1 65
FIGURA 15. PENDIENTE DEL TERRENO 1 PUNTOS A Y B 66
FIGURA 16. PENDIENTE TERRENO 1 PUNTOS A Y C 67
FIGURA 17. BOSQUEJO TERRENO 2 67

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se realizó en el marco la línea de argumentación y prueba, y presenta una propuesta de actividades que puede ser implementada para abordar algunas características de la derivada direccional en un curso de cálculo vectorial. Dichas actividades buscan que el estudiante relacione el concepto de pendiente de una curva en un punto y la derivada direccional desde un punto de vista aplicativo,de tal forma que se logre identificar los argumentos y razones generados por el estudiante frente a un problema. Para ello, se proporciona una serie de actividades que se espera, brinden al estudiante herramientas que fortalezcan sus procesos de argumentación y su visión hacia el cálculo de varias variables.

En el desarrollo de lapropuestaparticiparon un grupo de estudiantes de las carreras ingeniería topográfica y tecnología en topografía de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, dado que su formación nos permite introducir un instrumento topográfico como lo es la estación total y utilizarlo como mediador tecnológico.

El trabajo se llevó a cabo en cuatro etapas. Primero, se diseñaron actividades deexploración en donde intervinieran la derivada direccional y el uso de la estación total, mediador tecnológico de laactividad. Segundo, se aplicaron las actividades diseñadas. Tercero, se recolectóla información por medio de un video y algunos ejercicios de forma escrita plasmados en una relatoría. Cuarto, se analizó lainformación recolectada en la etapa anterior para identificar losargumentos encontrados en el desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 JUSTIFICACIÓN

Nuestra experiencia como docentes en las Universidades Distrital y América en el campo de las matemáticas, nos ha permitido observar que una de las razones por las cuales los estudiantes incurren en la deserción académica de las carreras que están estudiando,son los cursos de matemáticas que se imparten. Uno de los causantes de esta deserción es el curso de Cálculo vectorial o Multivariado, en donde la mayoría de los estudiantes se cuestiona sobre la importancia o relevancia de este tipo de cursos en su formación.

Desafortunadamente, en los cursos de matemáticas, y en especial en los de cálculo vectorial, se enfatiza en los aspectos numéricos y simbólicos, dejando de lado los aspectos gráficos y geométricos que surgen de los conceptos de la asignatura(Rojas & Esteban, 2012); eso impide que el estudiante comprenda la naturaleza real de los conceptos más relevantes de la asignatura y por lo tanto estos quedan reducidos exclusivamente a abstracciones que no tienen ninguna relación con los fenómenos de la naturaleza que dichos conceptos pretenden representar. Este hecho impide desarrollar el aprendizaje del cálculo de manera integral, al respecto, Rojas y Esteban (2012) afirman: "… el cálculo debe ayudarles (a los alumnos), por un lado, a desarrollar la capacidad de ver y de transformar lo observado en ecuaciones con un significado propio, y por otro, a partir de fórmulas que se pueden representar gráficamente, a relacionarlas con fenómenos de la naturaleza"

Además de los objetivos que debe tener un curso de cálculo, desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, no basta con que el estudiante solo comprenda y visualice los conceptos adecuadamente, sino que además, sea capaz de establecer y validar afirmaciones acerca de ellos; y no nos referimos a que demuestre teoremas de una manera exclusivamente deductiva, sino que esté en la capacidad de dar razones a las afirmaciones que hace, utilizando argumentos lo suficientemente "convincentes". Este proceso, conocido como **argumentación,** ha sido materia de estudio por parte de diversos autores; resaltamos principalmente a Toulmin (2003), quien plantea el modelo bajo el cual desarrollaremos nuestro trabajo.

Por esta razón una de nuestras principales preocupaciones es y será buscar estrategias didácticas que permitan a los estudiantes superar las dificultades que presentan en la comprensión y el aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos, y por ende en los procesos cognitivos y argumentativos requeridos para la aplicación de estos conceptos en situaciones reales.

1.2 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los grandes problemas de la enseñanza del cálculo es la deficiente visión geométrica de los estudiantes con respecto a los conceptos fundamentales del área en sí (límites, derivadas, etc.); en el caso del cálculo vectorial, la problemática es más acentuada, dado que las limitaciones de las herramientas clásicas de aprendizaje impiden una correcta visualización de los objetos tridimensionales.

El interés particular de este trabajo, es generar en el estudiante la capacidad de comprender e interpretar el concepto de la derivada direccional a través de una secuencia de actividades, que permitan percibir las relaciones o propiedades existentes del concepto y los problemas de aplicación que involucran los cambios de pendiente en un terreno. Además, crear situaciones en donde se perciban diferentes tipos de argumentos que sirvan como imagen para futuros trabajos.

Lo anterior conduce a plantear la siguiente pregunta: *¿Cómo elaborar una propuesta de actividades con el apoyo de un mediador, que proporcione al estudiante herramientas para comprender e interpretar algunas características del concepto de derivada direccional?*

1.3 OBJETIVO GENERAL

Diseñar y aplicar una secuencia de actividades que generen en el estudiante la capacidad de comprender e interpretar algunas características de la derivada direccional, en un curso de cálculo vectorial con el apoyo de la estación total como mediador evidenciando de esta forma los procesos de argumentación.

1.3.1 Objetivos Específicos

- Diseñar una actividad que permita al estudiante relacionar el concepto de pendiente de una curva en un punto y la forma de aproximarla a través de rectas secantes. Con el fin, de encontrar elementos que permitan identificar las formas de argumentar del estudiante.

- Aplicar una actividad a los estudiantes involucrando el uso de la estación total, que permita identificar algunas características de la derivada direccional y a su vez fortalezca los procesos de argumentación del estudiante.

- Describir y analizar los resultados obtenidos a partir de las actividades, resaltando el aprendizaje y los argumentos que se evidenciaron durante su desarrollo.

2. MARCO REFERENCIAL

A continuación procederemos a describir los referentes teóricos en los que se enmarca nuestro trabajo; especialmente hablaremos de los conceptos de argumentación, desde la perspectiva de Toulmin (2003) y visualización (Zimmermann (1991)), que hacen parte de los procesos didácticos que estamos interesados en desarrollar hacia los estudiantes junto con la actividad que hemos diseñado. Nuestra actividad tiene el esquema que Radford (1994) denomina “problema abierto”, noción que se detallará y ejemplificará más adelante.

Finalmente, describiremos la Estación Total, el cual será el mediador que usaremos en el desarrollo de nuestra actividad, mostrando su funcionamiento y la manera en que este instrumento permite calcular la pendiente en un terreno; adicionalmente, anexamos las definiciones de derivada y derivada direccional, con el fin de contextualizar al lector sobre los conceptos matemáticos en los que se basa nuestro trabajo.

2.1 IMPORTANCIA Y PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL

Según López (2008) “Todas las Matemáticas son importantes en nuestra educación, pero como comenta Young (1986): “Cálculo es nuestro curso más importante… El futuro de esta asignatura depende de cómo mejorarlo”, citado por Ferrini (1991). Cálculo representa una de las asignaturas integradoras de varias áreas básicas de las matemáticas; así como también es uno de los peldaños importantes para las asignaturas de ciencias básicas en varias carreras universitarias.”

Desafortunadamente, en los cursos de matemáticas, y en especial en los de cálculo vectorial, se enfatiza en los aspectos numéricos y simbólicos, dejando de lado los aspectos gráficos y geométricos que surgen de los conceptos de la asignatura(Rojas & Esteban, 2012); eso impide que el estudiante comprenda la naturaleza real de los conceptos más relevantes de la asignatura y por lo tanto estos quedan reducidos exclusivamente a abstracciones que no tienen ninguna relación con los fenómenos de la naturaleza que dichos conceptos pretenden representar; este hecho, al decir de Cuevas Vallejo & Pluvinag (2009) “…hace bastante complejo su aprendizaje, en particular a lo que su representación geométrica se refiere; muchas veces el estudiante logra entender los procedimientos y algoritmos relacionados con el cálculo vectorial, pero no logra entender qué representan los conceptos a los que se refieren dichos procedimientos.”

Un ejemplo paradigmático de esta afirmación es el concepto de derivada direccional, a pesar de que su cálculo es bastante simple, en la mayoría de los casos el estudiante no logra entender cuál es el significado de este concepto ni su relación con la pendiente de la recta tangente en un punto en una determinada dirección.

Este hecho impide desarrollar el aprendizaje del cálculo de manera integral. Al respecto, Rojas y Esteban (2012) afirman: "… el cálculo debe ayudarles (a los alumnos), por un lado, a desarrollar la capacidad de ver y de transformar lo observado en ecuaciones con un significado propio, y por otro, a partir de fórmulas que se pueden representar gráficamente, a relacionarlas con fenómenos de la naturaleza"

2.2 VISUALIZACIÓN

Dentro de los aspectos relevantes a tener en cuenta en el aprendizaje del cálculo, adquiere gran importancia el papel de la **visualización,** entendida esta como la capacidad de generar una imagen mental de un objeto abstracto; como afirma Zimmermann (1991): "El papel del pensamiento visual es tan fundamental en el aprendizaje del Calculo que es difícil imaginar un curso exitoso que no enfatice los elementos visuales del tema" (pp.136). En el caso particular del cálculo vectorial, dicha relevancia es más notoria, debido a la naturaleza esencialmente geométrica de la asignatura; conceptos como derivada parcial, gradiente, derivada direccional, entre otros, son nociones que representan relaciones gráficas de objetos físicos, y por lo tanto, es de vital importancia que el estudiante no solo enfatice en la manipulación algebraica de estos conceptos, sino que también comprenda qué representan dichos conceptos visualmente.

2.3 ARGUMENTACIÓN

Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, no basta con que el estudiante comprenda y visualice los conceptos adecuadamente, sino que además, sea capaz de establecer y validar afirmaciones acerca de ellos; y no nos referimos a que demuestre teoremas de una manera exclusivamente deductiva, sino que esté en la capacidad de dar razones a esas afirmaciones que hace, utilizando argumentos lo suficientemente "convincentes".

Este proceso, conocido como **argumentación,** ha sido materia de estudio por parte de diversos autores; resaltamos principalmente a Toulmin (2003), quien plantea el modelo bajo el cual desarrollaremos nuestro trabajo.

El modelo primitivo de argumentación de Toulmin se basa en tres componentes básicos denominados **datos, afirmaciones y garantes;** de manera resumida, el modelo se basa en hechos dados (los datos), de los que ya se ha establecido plenamente su validez y a partir de los cuales obtenemos conclusiones (las afirmaciones), sustentando este paso de datos a afirmaciones a partir de proposiciones (garantes) que funcionan como puente entre ellos (Toulmin 2003).

Vale la pena resaltar que los garantes que se establecen en este modelo no tienen por qué ser necesariamente proposiciones teóricas ni demostraciones formales, sino que pueden ser de diversa naturaleza (gráficas, tablas, etc.).

Al considerar la argumentación como un aspecto importante en el quehacer matemático (y de la educación matemática), se plantea la pregunta ¿Qué clase de actividades generan procesos donde se evidencia la importancia de la argumentación y a su vez permitan generar en el estudiante competencias argumentativa que le permitan no solo resolver problemas matemáticos, sino también generar conjeturas con respecto a dichos problemas? Al respecto,

Radford (1994) afirma que la clase de problemas que se deben plantear deben ser problemas "abiertos", en el sentido de que es preferible que en el enunciado del problema no aparezca la solución del mismo. A manera de ejemplo, Radford plantea el problema que se enuncia a continuación

"Un triángulo ABC inscrito en un círculo de centro O. La tangente en el punto C intersecta a la prolongación del lado AB en el punto P. Sea CM la bisectriz del ángulo ACB. Tal línea corta al lado AB en el punto D. Demostrar que el triángulo PCD es isósceles."

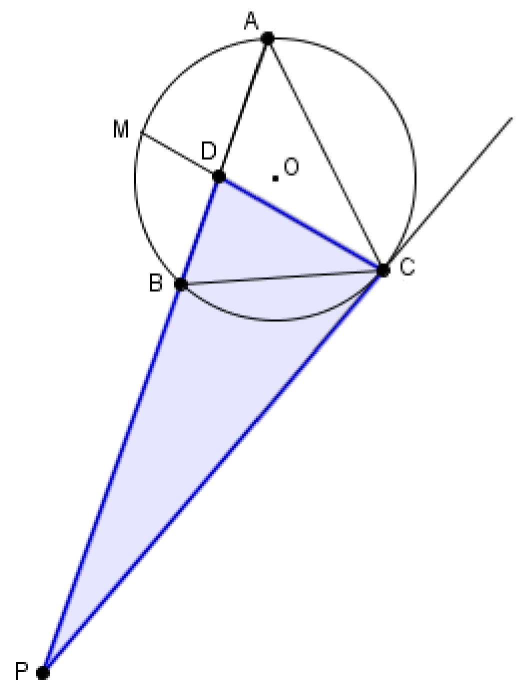


Figura 1. Diagrama Problema Radford

Se puede reformular como sigue:

"Trazar un circulo cualquiera. Sea O su centro. Inscribir un triángulo cualquiera en el círculo. Sea ABC dicho triángulo. Trazar la tangente al círculo en el punto C. Sea P el punto de intersección de esa tangente y de la recta que pasa por A y B. Trazar la bisectriz del ángulo ACB. Sea D la intersección de la bisectriz y del segmento AB. ¿Qué puede decirse del triángulo PCD?
Volver a comenzar con otro círculo y otro triángulo ABC. ¿Qué propiedad parece tener el triángulo PCD? Enunciar una conjetura.
¿Puede proporcionar una demostración de su conjetura?"

Como se puede observar, en el primer ejercicio la solución del problema aparece en el planteamiento ("El triángulo PCD es isósceles"), mientras que en el segundo problema se invita al estudiante a que descubra por su propia cuenta que propiedades debe tener el objeto que ha construido.

2.4 LAS TIC

La pedagogía tradicional del cálculo, y en general de las matemáticas, ha estado enfocada en los contenidos de la asignatura y no tanto en los estudiantes; esto ha generado en el estudiante una limitada comprensión de las nociones y procedimientos que requiere la matemática; en este sentido, Rojas y Esteban

(2012) considera de vital importancia “proponer alternativas basadas en estrategias didácticas, y en el uso de herramientas tecnológicas que propicien un mayor interés en los estudiantes hacia el curso, a fin de involucrarlos en su proceso formativo y animarlos a descubrir y desarrollar nuevas habilidades en función del cálculo”.

Tradicionalmente las herramientas tecnológicas que se han implementado en la docencia de las matemáticas han sido la calculadora y el computador; no en vano, López (2008) afirma sobre ellos que “son herramientas esenciales para enseñar, aprender y “hacer” matemáticas. Los estudiantes pueden aprender más matemáticas y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología”

En el caso que nos interesa (el concepto de derivada direccional), la representación gráfica o visual y lo más importante su aplicación, juegan un papel de suma importancia en la comprensión del concepto, de donde el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de cálculo vectorial se percibe en primera instancia como una herramienta estrictamente necesaria, debido a que con el uso de otros recursos materiales (tablero) resulta muy complicado, por un lado representar con lujo de detalle el comportamiento de funciones de varias variables, por el otro sus gráficas en tres dimensiones y por ende, su aplicación.

2.5 MEDIACIÓN INSTRUMENTAL

En el contexto de los procesos cognitivos, la teoría de la mediación instrumental es reconocida como una de las de mayor impacto en la actualidad; dicha teoría expresa que “todo acto cognitivo esta mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico”; en la actualidad dicho proceso de mediación se realiza principalmente con herramientas computacionales, debido a que ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran exclusivas de los seres humanos.

2.5.1 Uso De La Estación Total Como Instrumento Mediador Para El Cálculo Vectorial.

Al trabajar el concepto de función de dos variables en el cálculo vectorial y las nociones que de él se derivan, es necesario considerar su representación gráfica (superficie tridimensional) para lograr una mejor comprensión de sus propiedades; en el caso de la derivada direccional, al entender esta como la pendiente de la superficie en un punto y una dirección determinada, se hace imprescindible que el estudiante visualice de manera adecuada su interpretación en la superficie que representa la correspondiente función.

Los mediadores clásicos (calculadoras graficadoras y computadores), si bien logran aproximar bastante bien dicha representación, no permiten visualizar de una manera adecuada propiedades más profundas, en particular la pendiente o inclinación que dicha superficie tiene en un punto específico, varios estudios se han desarrollado en ese sentido, destacamos el trabajo realizado por Conejero & Sanabria (2003), haciendo uso del programa DGRAPH.

Con el fin de lograr una mejor interpretación y concepción de la derivada direccional, es indispensable dar uso a las herramientas topográficas, que permitan encontrar propiedades específicas en un terreno; estableciendo nexos más fuertes entre la definición formal y el grado de inclinación del terreno.

La herramienta topográfica que sirve como mediador es la **ESTACIÓN TOTAL (ET);** dicho instrumento permite medir ángulos, distancias, y lo más importante establecer coordenadas entre puntos determinados en cualquier relieve; con estos datos y aplicando formulas trigonométricas básicas, se pueden calcular pendientes en cualquier terreno[1] .

Para realizar el cálculo de las distancia y coordenadas de los puntos, la ET hace uso de una onda electromagnética con distintas frecuencias que rebota en un prisma reflectante ubicado en el punto que nos interesa medir y regresa, utilizando el desfase entre las frecuencias para determinar las coordenadas del punto.

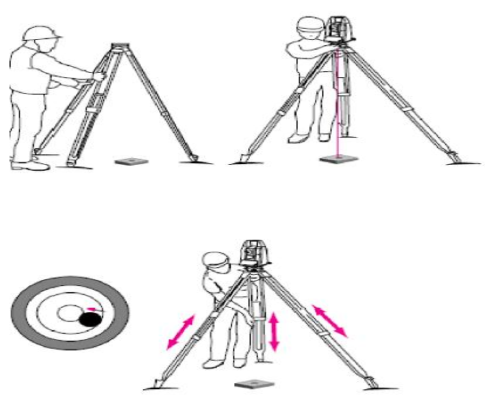


Figura 2. Montaje de la estación total sobre un terreno.

De esta manera, la estación total nos permite hallar en una ubicación determinada las coordenadas planas de la ubicación (coordenadas en plano *xy*), la altura de la ubicación (que correspondería a la coordenada en el eje z en un plano coordenado cartesiano), el ángulo horizontal y el ángulo vertical que forma la semirrecta formada entre el punto de origen (donde está ubicada la estación total)

[1]Bustos, G. Catedra: Topografía II. Recuperado de : ftp://ftp.unsj.edu.ar/agrimensura/Topografia%20II/ESTACI%D3N%20TOTAL.pdf

y el punto que nos interesa (que es donde se ubica el prisma) con respecto a un eje de referencia determinado.

Se puede aplicar el siguiente método: Posicionar el instrumento en un punto de la línea cuya pendiente se quiere calcular y colocar el bastón con el prisma extendiendo este a la altura i del instrumento) o una mira graduada vertical en un segundo punto de dicha línea. Utilizando el anteojo, bisecar al centro del prisma o sobre la mira reproducir la altura del instrumento. La lectura del círculo vertical (que mide el ángulo cenital en grados) se puede configurar para obtener valores en porcentaje, de tal forma que el valor de la pendiente se pueda leer directamente en %[1]. En nuestro caso, la estación total toma las coordenadas de dos puntos, calcula la distancia entre ellos y su diferencia de alturas para finalmente, encontrar la pendiente del terreno.

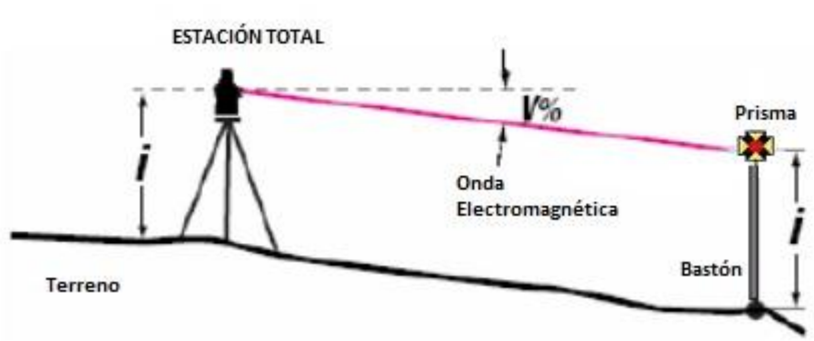


Figura 3. Posición de la ET con respecto al prisma

2.6 MARCO CONCEPTUAL

2.6.1 Pendiente de una recta.

En el estudio de las rectas una de sus características más importantes es su **pendiente,** entendida esta como el grado de inclinación de la recta con respecto al eje *x*; su importancia radica en que determina la relación entre el aumento de la variable *y* y el aumento de la variable *x*; para poder calcular dicha pendiente hacemos uso de la siguiente definición, tomada del libro de cálculo de Thomas (2006):

Si $(x_1, x_2) y$ (y_1, y_2)son puntos de una recta, entonces la pendiente de la recta viene dada por$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Es de destacar que para la aplicación de esta definición basta con tomar cualquier par de puntos que se encuentrensobre la recta.

2.6.2 Recta tangente a una curva y derivada.

Uno de los conceptos importantes del cálculo infinitesimal es el de **recta tangente** a una curva en un punto; su importancia radica en que calcular la pendiente de esta recta permite determinar cuál es la pendiente de la curva en dicho punto.
La manera natural de determinar cuál es la pendiente de la recta tangente es aproximándola por medio de rectas secantes, es decir, rectas que pasan por el punto en cuestión y por cualquier otro punto de referencia que se encuentre en la curva; a medida que el punto de referencia se aproxime más al punto donde se pretende calcular la pendiente de la recta tangente, más aproximado es el valor de las correspondientes pendientes.

Estas ideas se expresan simbólicamente de la siguiente manera (tomado de Thomas, 2006):

La pendiente de la una curva $y = f(x)$ en el punto $\left(a, f(a)\right)$es el número

$m = \ lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, siempre y cuando este límite exista.

A este número lo llamamos **la derivada de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en el punto $\boldsymbol{a}$**y se denota como $\boldsymbol{f'(a)}$***.***

2.6.3 Derivada direccional

Definición

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables y sea $u = \langle u_1,\ u_1\rangle$ un vector unitario. Entonces **la derivada direccional de$\boldsymbol{f}$ en la dirección de $\boldsymbol{u}$,** que se denota $\boldsymbol{D_u f}$**,** se define como

$D_u f\ = lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu_1,y+tu_2\,)-f(x,y)}{t}$. (Larson, Hostetler & Edwards, 2006)

Desde un punto de vista práctico, la derivada direccional, $\boldsymbol{D_u f}$representa la **pendiente** de la función $\boldsymbol{f}$en la dirección del vector u; si evaluamos la derivada direccional en un punto determinado $(x_0\ , y_0\ )$, esta es equivalente a la derivada de $f(x_0 + tu_1, y_0\ + tu_2\ )$ con respecto a *t,* evaluada en $t = 0$.

Calcular la derivada direccional de cualquier función a partir directamente de la definición (o de la caracterización dada en el párrafo anterior) puede ser bastante complicado, por lo que generalmente utilizamos el siguiente teorema (Larson, Hostetler & Edwards, 2006) que simplifica su cálculo:

Teorema: Si $f(x,y)$ es una función diferenciable (esto es, que sus derivadas parciales sean continuas en un abierto) entonces

$$\boldsymbol{D_u}\,\boldsymbol{f}(x_0\,,y_0\,) = f_x\,(x_0\,,y_0\,).\,u_1\ +\ f_y\,(x_0\,,y_0\,).\,u_2$$

Donde$f_x\,(x_0\,,y_0\,)$ y $f_y\,(x_0\,,y_0\,)$ representan las derivadas parciales de *f.*

Del teorema anterior podemos deducir, que si consideramos como direcciones los vectores canónicos $\langle 1{,}0\rangle$ y $\langle 0{,}1\rangle$, $\boldsymbol{D_u}\,\boldsymbol{f}(x_0\,,y_0\,)$ corresponde a $f_x\,(x_0\,,y_0\,)$ y $f_y\,(x_0\,,y_0\,)$ respectivamente; es decir, que las derivadas parciales de una función de dos variables son en sí mismas casos particulares de derivadas direccionales en la dirección de los vectores canónicos.

3. DISEÑO DE LA PROPUESTA

La propuesta de este trabajo de grado tiene como objetivo la comprensión e interpretación del concepto de derivada direccional, a través del uso de la estación total, con el fin de que el estudiante pueda relacionar, el concepto con su aplicación vista como la pendiente de un terreno en un punto con respecto a una dirección. Por esta razón, en la propuesta se contemplan dos actividades que el estudiante debe desarrollar; de tal forma que el concepto no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario pueda verse como una aplicación útil.
La propuesta, está dirigida a estudiantes de tercer semestre vinculados a las carreras de ingeniería topográfica o tecnología en topografía, que cursen la asignatura de cálculo Multivariado y que tengan conocimientos previos de:
Concepto de límite, derivada (como pendiente de la recta tangente a la curva), gráfico de funciones, vector, vector gradiente y derivada direccional.

3.1 PRIMERA ACTIVIDAD

En esta sesión, se les pide a los estudiantes que respondan una serie de preguntas que pretenden abordar el concepto de **pendiente** de una curva en un punto, primero a través de la recta, luego usando el concepto de derivada y finalmente, aproximándola por medio de rectas secantes. El objetivo principal es que a partir de todas estas preguntas que se trabajan en el plano cartesiano, el estudiante recojalas ideas que resulten y las puedan aplicar en un terreno; resaltando la importancia de la dirección y aproximación en la derivada direccional.

La metodología que utilizaremos para desarrollar la actividad consiste en presentarles individualmente cada una de las preguntas de la actividad en una ficha bibliográfica; cuando todos los estudiantes terminen de contestar una pregunta, se socializaran las respuestas y se entregarála siguiente; así se repetirá el procedimiento sucesivamente.

Recursos: Guías de la actividad propuesta y Fichas Bibliográficas

Tiempo: 2 horas

Ejercicio 1

Pendiente de una recta

Objetivo: Identificar si el estudiante está familiarizado con el concepto de pendiente de una recta y de qué manera, si algebraica o geométricamente.

¿Qué entiende por pendiente de una recta?

Objetivo: Evidenciar las diferentes formas como el estudiante calcula la pendiente de una recta a partir de su gráfica. Posiblemente tomando dos puntos y utilizando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, o simplemente observando el desplazamiento vertical sobre el desplazamiento horizontal.

Use la gráfica de la recta que aparece a continuación para encontrar su pendiente.

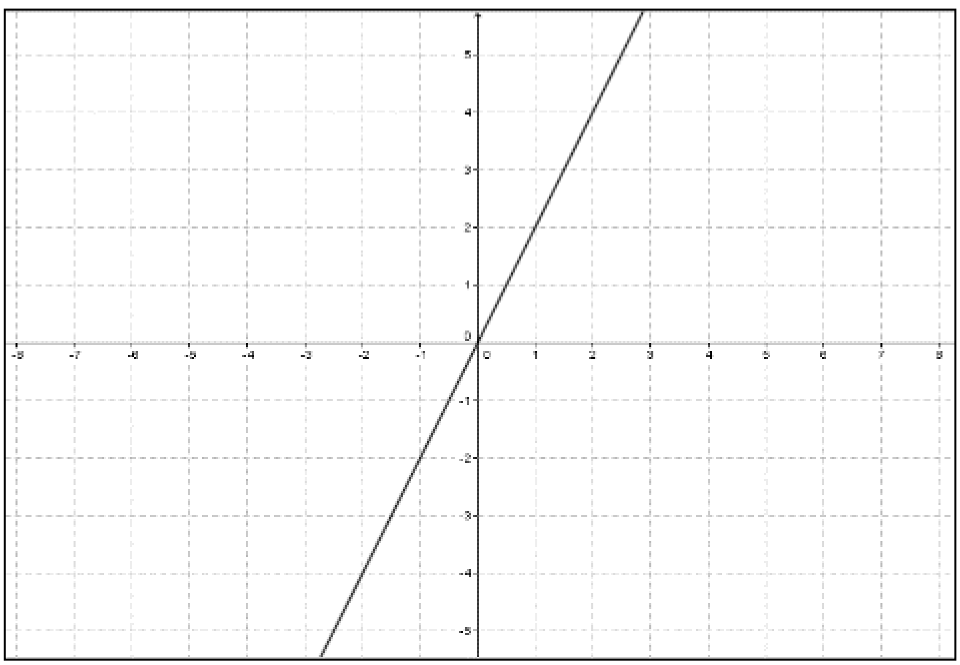


Figura 4. Grafica de la recta

Ejercicio 2

Pendiente de una parábola en un punto

Identificar si el estudiante está familiarizado con el concepto de pendiente de una parábola y de qué manera, si algebraica o geométricamente.

Objetivo: Buscar que el estudiante identifique la necesidad de tomar un punto específico para poder calcular la pendiente. Ya sea, que utilice el concepto de derivada usando la fórmula de la función o se aproxime por rectas secantes

Considere la gráfica de la función $y = x^2$. ¿Cuál es la pendiente de esta parábola?

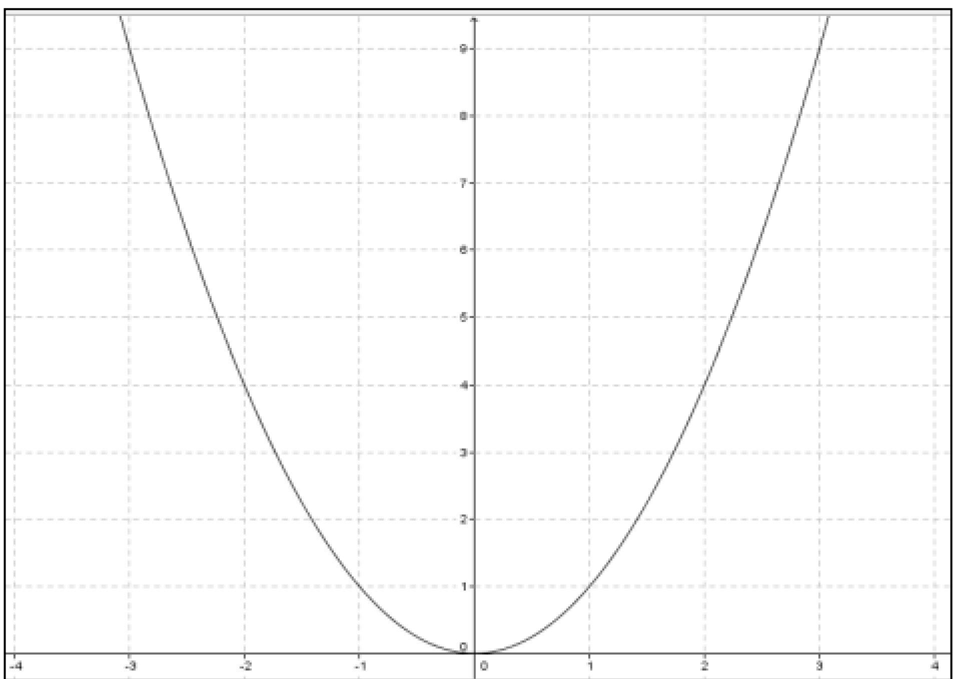


Figura 5. Grafica de la Parábola *y=x*^{2}

¿Considera que es necesario especificar un punto en la curva para calcular esa pendiente? Justifique su respuesta.

Calcule la pendiente de la parábola en el punto (2,4)

Ejercicio 3

Pendiente de una Curva en un punto

Objetivo: Identificar si el estudiante está en la capacidad de encontrar la pendiente de una curva dada, sin que se le dé la ecuación de la misma. Generar de manera específica la noción de aproximación a través de rectas secantes.

Considere la gráfica de la curva que aparece a continuación.

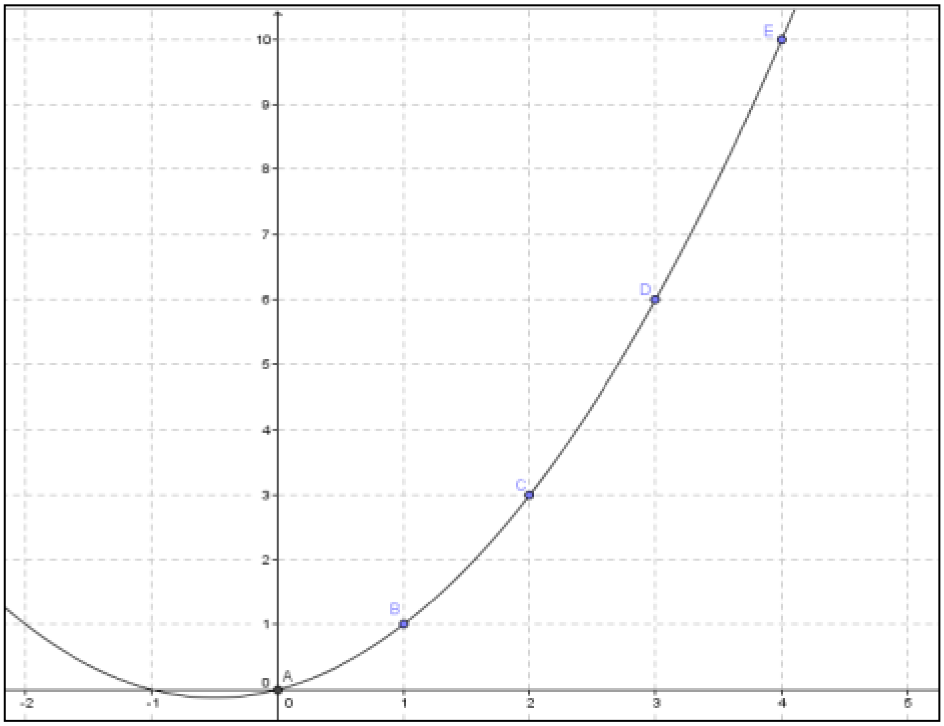


Figura 6. Gráfica de la Curva

¿Cómo encontraría la pendiente de esta curva en el punto B?

Objetivo:permitir que el estudiante establezca relaciones con respecto a la parábola y pueda encontrar la pendiente a través de la noción de aproximación sin necesidad de la fórmula de la función. Con lo que se espera, acepte más adelante que no siempre se tiene el modelo de un terreno pero si se puede calcular su pendiente.

¿Será estrictamente necesaria la ecuación de la curva para poder calcular la pendiente en ese punto? Justifique su respuesta.

3.2 SEGUNDA ACTIVIDAD

El objetivo de esta actividad, es lograr que los estudiantes después de haber realizado diferentes cálculos de pendientes en curvas y rectas, puedan establecer relaciones entre la derivada usual y la derivada direccional; específicamente en lo que respecta a la dirección y la noción de aproximación en un terreno.

Los estudiantes han estado trabajando sobre el plano cartesiano y ahora se presentaran dos superficies (terrenos) en donde se espera calculen la pendiente en un punto con respecto a una dirección, utilizando la ET como mediador dado que facilita las mediciones sobre el terreno y establece datos importantes como ángulos, direcciones, distancias y el más importante pendientes. Cabe mencionar, que los estudiantes están muy bien familiarizados con el mediador, puesto que es la herramienta principal de estudio en su programa; razón por la que se escogió la ET. Además, debido a las constantes prácticas de mediciones sobre diferentes terrenos que ellos realizan, es bastante viable acceder al mismo.

Descripción de los terrenos

La importancia de escoger muy bien los terrenos para que la práctica o aplicación tengan los resultados esperados es fundamental en esta actividad, en primera instancia debemos tomar un terreno uniforme (T1), con un relieve no muy pronunciado, más bien parejo, pero que a su vez tenga una inclinaciónbien marcada. Esto, con el objetivo de que el estudiante se cuestione acerca de la relevancia de la dirección en que se calcule la pendiente, porque se podría pensar en algún momento que como el terreno es prácticamente plano, su pendiente no cambia sustancialmente; pero al tomar algunas mediciones en un punto con la ET pueden llegar a verificar lo contrario.

El segundo terreno (T2), que no puede tener las mismas condiciones del primero porque ya no se quiere tratar la noción dirección sino de aproximación, deber ser al contrario bien escarpado, con un relieve bastante brusco y ojalá que alrededor del punto exista un barranco hacia un lado, para que, al calcular la pendiente en ese punto observe que solo será bastante aproximada si toma puntos muy cercanos en una misma dirección.

Los dos terrenos escogidos, se encuentran ubicados en el Campus de la Universidad Distrital Fráncico José de Caldas, Facultad de Medio Ambiente y recursos Naturales, ya que, los estudiantes a los que se realizó la prueba piloto pertenecen a la misma y las condiciones ya mencionadas se cumplen cabalmente.

Recursos: Guías de la actividad propuesta y Estación Total.

Tiempo: 2 horas

Ejercicio 1

Pendiente de un terreno en un punto e importancia de la dirección

Objetivo: Buscar que el estudiante perciba la importancia de la dirección al calcular la pendiente de un terreno en un punto con respecto a una dirección.

La metodología para esta actividad consiste en las preguntas a los estudiantes, la mayor parte encaminadas hacia la importancia de la dirección y generación de algunos argumentos.

1. Fijar unas coordenadas de amarre en T1 que nos sirvan para establecer un sistema de referencia.

2. Establecer un punto fijo (A) en T1 que será el punto donde vamos a calcular la pendiente; allí se ubicará la ET.

Objetivo: Indagar sobre los métodos utilizados por los estudiantes para el cálculo de pendientes en un terreno y ver si relacionan la actividad anterior de la recta con esta pregunta.

3. Se planteará la pregunta ¿De qué forma calcularía la pendiente en el punto A?

4. Asumimos que el estudiante tomó un punto de referencia B (este punto de referencia se refiere al punto con respecto al cual va a trazar la secante para calcular la pendiente). A partir de esto, se le pide que utilice otro punto de referenciaC (Cserá un punto que esté en una dirección diferente) y le pediremos que calcule la pendiente teniendo en cuenta el punto C.

Objetivo: Identificar qué tipos de argumentos se pueden encontrar a partir de esta pregunta, resaltando la importancia de la dirección.

5. ¿Deberían ser iguales las pendientes, a pesar del cambio de dirección? ¿Cuál cree que es la razón?

Ejercicio 2

Pendiente de un terreno en un punto e importancia de la noción de aproximación

Objetivo: Buscar que el estudiante perciba la importancia de la noción de aproximación al calcular la pendiente de un terreno en un punto con respecto a una dirección, resaltando que no siempre se tiene la función de la superficie para usar la derivada.

La metodología para esta actividad consiste enlas preguntas a los estudiantes y con la ayuda del mediador ET en el terreno T2, calcular varias pendientes tomando puntos cada vez más cercanos al punto inicial y en diferentes direcciones.

1. Fijar unas coordenadas de amarre en T2 que nos sirvan para establecer un sistema de referencia.

2. Establecer un punto fijo (A) en T2 que será el punto donde vamos a calcular la pendiente; allí se ubicará la ET.

Objetivo: Permitir que el estudiante comprenda que al calcular la pendiente de un punto en una misma dirección, la mejor forma es tomar puntos muy cercanos al inicial dado que si toma puntos lejanos, así sea una misma dirección la pendiente puede variar drásticamente y no llegar a ninguna aproximación.

3. Se da una dirección y se pide calcular la pendiente del punto A con respecto a un punto B que esté a una distancia de 5 metros, luego a un punto C en la misma dirección pero a un metro y por último un punto D a 30 centímetros (distancia mínima donde funciona el mediador).

4. ¿Cuál de todos estos valores será el que más se aproxime a la pendiente del punto A?

4. IMPLEMENTACIÓN

La propuesta se implementó a un grupo de tres estudiantes de Ingeniería topográfica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas inscritos en la asignatura de Cálculo Multivariado del corte 2013-3. El lugar donde se implementó fue la facultad de medio ambiente y recursos naturales, que cuenta con los terrenos apropiados anteriormente descritos. La implementación de la propuesta tuvo una duración de cuatro horas divididas en dos sesiones cada una, en diferente día; dichas sesiones fueron grabadas en un video, cuyo contenido se describe en la relatoría que sirve como base para analizar los resultados de la propuesta de actividades. En la primera actividad los estudiantes trabajaron individualmente para luego socializar junto con el profesor y en la segunda tuvieron que trabajar en grupo debido al mediador pero cada uno haciendo sus respectivos aportes.En la sesión inicial, se trabajó con la primera actividad que estaba compuesta por 3 ejercicios.

El primer ejercicio consta de dos preguntas, a cada estudiante se le entregóuna ficha bibliográfica con la primera pregunta, se les dio 5 minutos para que pensaran y escribieran la respuesta y posteriormente se socializó llegando todos a características acerca de la misma pero ninguno haciendo énfasis en algo formal. Luego de la misma forma se les entregó la segunda pregunta que pedía calcular la pendiente de una recta y una hoja con la gráfica de una recta sin especificar su ecuación, vale la pena resaltar que en la gráfica se puso una cuadricula con el propósito de que los estudiantes la utilizaran para observar el desplazamiento vertical y horizontal de la recta, aunque algunos simplemente tomaron las coordenadas de dos puntos y usaron la formula $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

En el segundo ejercicio, nuevamente se entregó una ficha con su respectiva pregunta que trataba sobre la pendiente de una curva y esta vez una hoja con la gráfica de la parábola $y = x^2$, ahora si con la ecuación. Los estudiantes tardaron un buen tiempo en responder que dependiendo del punto iba a variar la pendiente. Se les entregó la segunda pregunta del ejercicio y esta vez definitivamente concluyeron que era necesario especificar un punto para poder calcular la pendiente. La tercera y última pregunta del ejercicio consistía en calcular la pendiente de la parábola en un punto, algunos simplemente usaron la ecuación con la derivada usual y evaluaron el punto encontrando rápidamente la pendiente; otros por el contrario siguieron con la noción de pendiente de una recta y se aproximaron a la pendiente en el punto a través de rectas secantes.

Luego de haber trabajado la pendiente de la parábola, se dio paso al tercer ejercicio; los cuestionamos acerca de la pendiente en un punto para una curva que se les entregó en una hoja también en cuadricula para que se cumpliera el objetivo. Resaltamos que esta fue la pregunta que les llevo más tiempo responder, sobre todo a los que utilizaron la derivada en el ejercicio anterior, pues no había otro camino que hacerlo por rectas secantes haciendo uso de la aproximación.

Continuando con la implementación de la propuesta, se llevó a cabo la segunda sesión, una actividad que está compuesta por dos ejercicios que se fundamentan en la actividad anterior y que tienen como objetivo mostrar la aplicación de algunos conceptos, además de su interpretación, comprensión y generación de argumentos a partir de ellos.

En el primer ejercicio, nos paramos sobre el terreno T1 y ubicamos la ET en un punto de tal manera que fuera sencillo fijar unas coordenadas de amarre, dado que las placas que utilizan para fijar estas coordenadas se encontraban bastante lejos, nos vimos en la obligación de tomar unas coordenadas arbitrarias. Luego de tener las coordenadas y el punto se realizó la primera pregunta que trataba sobre la pendiente del terreno, los estudiantes comenzaron a responder de acuerdo con la experiencia que ellos tienen sobre este tema. Posteriormente, se les pidió calcular la pendiente de un punto en una dirección donde los estudiantes resaltaron la importancia de usar la ET como mediador. Adicionalmente, se les pidió calcular la pendiente en ese mismo punto pero en diferentes direcciones, dando como resultados diferentes pendientes para cada una de las direcciones, nuevamente el uso de la ET facilita este tipo de cálculos ya que los estudiantes manifiestan que de hacerlo manualmente con metro y estacas sería muy demorado, tedioso y no se relacionarían con tanta facilidad los ángulos, distancias y pendientes; finalmente se les preguntó sobre la importancia de la dirección al momento de calcular pendientes en un terreno, obteniendo algunos de los resultados que se esperaban.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Durante el desarrollo de la actividad se evidenciaron diversos procesos de argumentación en varias preguntas; es importante resaltar que en la primera actividad, la mayoría de los argumentos surgen a partir de las gráficas que se le suministran a los estudiantes, con lo cual se observa que es muy útil complementar las actividades relacionadas con derivación con un soporte grafico que permita visualizar la noción que se está tratando.

En la segunda actividad, en la cual se hizo uso de la Estación Total, se observó que la noción de que la dirección es importante para el cálculo de la pendiente estaba latente en los estudiantes antes de iniciar la actividad; sin embargo, gracias al mediador el estudiante pudo evidenciar de una manera más clara este hecho.

La mayor dificultad se encontró en la noción de la pendiente en un punto específico; este concepto, que era evidente para los estudiantes en el caso de funciones de una variable, como se pudo observar en el desarrollo de la primera actividad, para objetos tridimensionales no se asume con claridad; consideramos que esto se debe a la noción topográfica de pendiente, la cual siempre requiere el uso de dos puntos para determinarse.

A continuación, haremos un análisis especifico del desarrollo de cada una de las preguntas de la secuencia de actividades; en algunos casos, al ser la relación entre las preguntas tan profunda, hemos decidido analizar las preguntas similares en conjunto.

En el caso del ejercicio 2 de la segunda actividad, al no poderse obtener una gran cantidad de respuestas con respecto a lo que se preguntaba, hemos hecho un análisis general de lo sucedido en su desarrollo.

Al final del análisis, procederemos a hacer una descripción, desde la perspectiva de Toulmin (2003), de los argumentos identificados en el desarrollo de la actividad

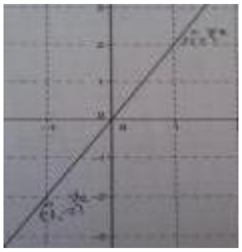
ACTIVIDAD 1

Análisis Pregunta 1:

En esta pregunta es de notar la relación casi directa que existe para los estudiantes entre las nociones de pendiente e inclinación; sin embargo, a la hora de definir inclinación de una recta se pudieron observar dos maneras de representarla: una informal, basada en la ideas de “crecimiento horizontal” y “crecimiento vertical” y otra más formalizada, basada en la fórmula de la pendiente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.**(Relatoría, 1-6)**

Argumento 1.

Dato:



Aserción

La pendiente de la recta es 2

Garante:

P(-1,-2) y Q(1,2) ∈ Recta

La pendiente de la recta es:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

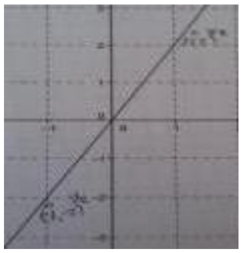
Cuando se les pide analizar la fórmula de la pendiente expuesta anteriormente, es de resaltar que los estudiantes afirman que no importa el par de puntos que se escoja, la fórmula va a funcionar**(Relatoría, 9-11).**

Análisis Pregunta 2

La primera observación que se puede hacer sobre las respuestas a esta preguntas es que dos de los estudiantes plantearon la necesidad de encontrar las coordenadas de dos puntos cualquiera para poder aplicar la fórmula que permite encontrar la pendiente (**Argumento 1, Actividad 1)** ; el otro estudiante parte de esta alternativa, planteó la posibilidad de medir (en términos de los cuadros de la cuadricula) el avance horizontal y vertical (que el estudiante denomina longitud y altura) y dividiéndolas encontrar la pendiente (**Argumento 2, Actividad 1)**.

Argumento 2

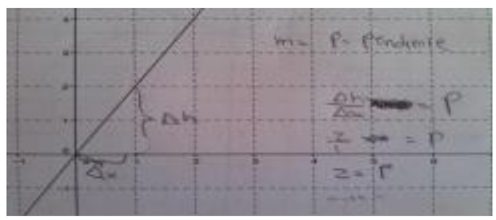
Dato:



Aserción

La pendiente de la recta es 2

Garante:



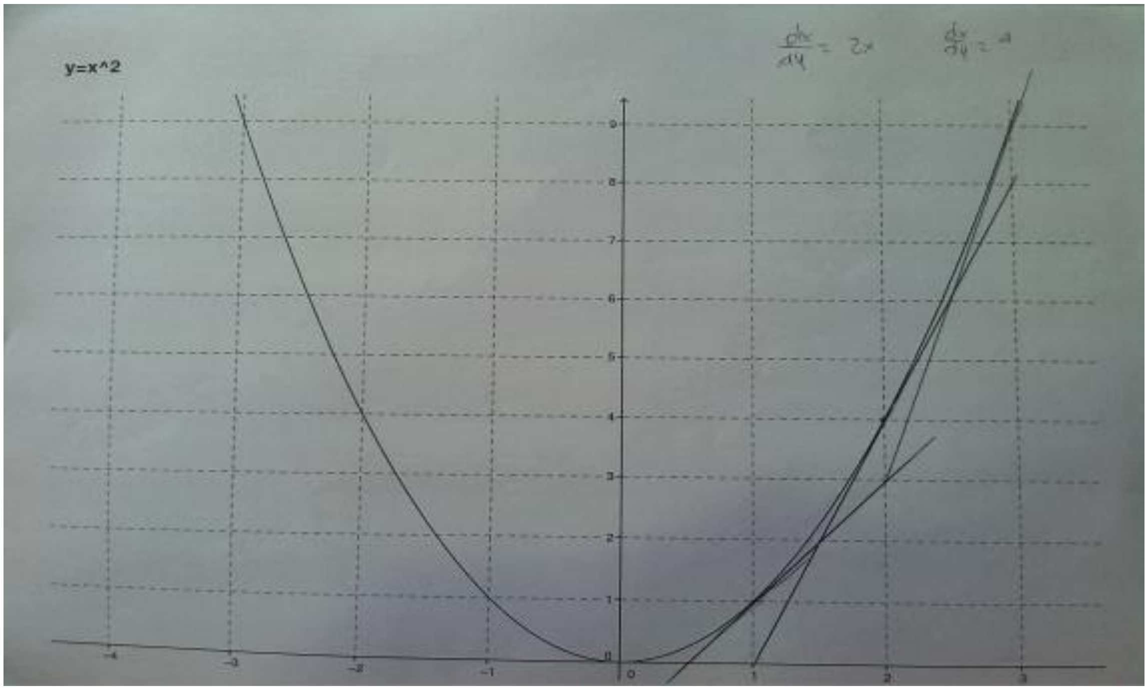
La pendiente de la recta es:

$$\boldsymbol{p = \frac{\Delta h}{\Delta x}}$$

Análisis pregunta 3

Esta pregunta se planteó con el fin de que los estudiantes se cuestionaran sobre si era suficiente con describir una curva (por medio de la fórmula) para poder hablar de la pendiente; los estudiantes contestaron que no conocían la manera de calcular la pendiente en ese caso, y evidenciaron que la pregunta parecía carecer de algún dato (**Relatoría 23)**.

No obstante, los estudiantes plantearon que la pendiente se podría aproximar por medio de rectas cada vez más "pequeñas", indicando que la pendiente de ellas podría aproximar la pendiente de la curva (**Relatoría, 24-26),** como se ilustra en la siguiente figura:



Análisis pregunta 4.

Al plantearse esta pregunta, los estudiantes manifiestan que al suministrársele un punto específico se podría hablar de pendiente de una manera más precisa, ya que en distintos puntos las pendientes deberían ser distintas (**Relatoría 27)**

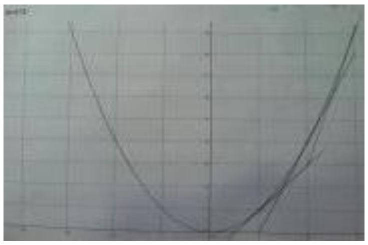
Análisis pregunta 5

Al especificar un punto en la curva, algunos de los estudiantes propusieron aproximar la pendiente por medio de una recta entre el punto y otro punto arbitrario, utilizando una idea análoga a la de la recta de la primera pregunta; sin embargo, a partir de ciertas preguntas del profesor, los estudiantes observaron que a diferencia de la recta, en este caso al tomar puntos distintos cambia la pendiente**(Relatoría 28-29)**.

Argumento 4

Dato:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2}$$



Aserción:

Pendiente de la curva en x=2 es 4

Garante:

Pendiente de la recta que pasa por los puntos de la curva

(2,4) , (4,16), m=6

(2,4) , (3,9), m=5

(2,4) , (2.5,6.25), m=4.5

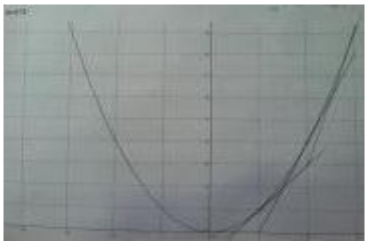
(2,4) , (2.1,4.41), m=4.1

Otro estudiante propuso el uso de la derivada, teniendo en cuenta que al tenerse la función, la derivada de la función en el punto corresponde precisamente a la pendiente de la recta tangente que pasa por ese punto**(Argumento 3, Act.1)**

Argumento 3

Dato:

$f(x) = x^2$



Aserción:

Pendiente de la curva en x=2 es 4

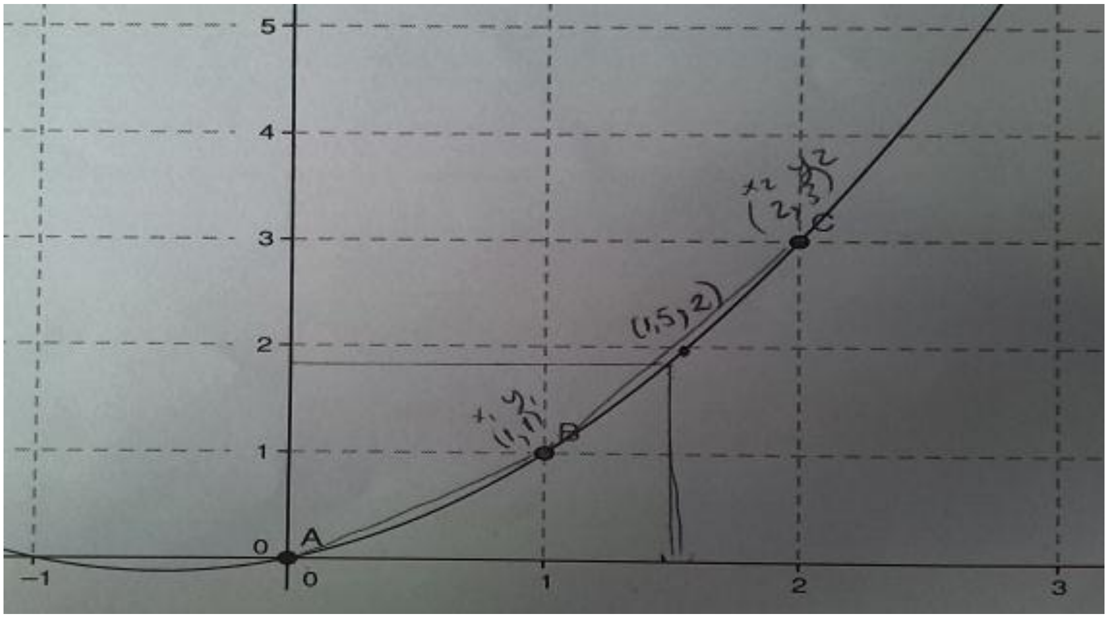
Garante:

La pendiente es la derivada de la función, $y' = 2x$, evaluada en el punto (2,4)

Es de resaltar aquí que ante el desconocimiento por parte de algunos estudiantes del uso de la derivada para calcular pendientes, decidieron aproximar la pendiente usando rectas secantes, y al contrastar las respuestas que obtuvieron a través de las diversas aproximaciones con el resultado dado por la derivación. Pudieron observar que los datos eran bastante aproximados**(Relatoría 37-44)**

Análisis Preguntas 6 y 7

Ante la ausencia de una expresión algebraica que describa la curva, los estudiantes manifiestan que no se puede hacer uso de la derivada para hallar la pendiente de la curva en algún punto**(Relatoría 45)**; teniendo en cuenta esto, los estudiantes argumentan que una forma de aproximar el valor es tomando rectas secantes con puntos sobre la curva cada vez más aproximados (**Relatoría 46-51)**; sin embargo, acentúan el hecho de que es solo una aproximación y que el verdadero valor de la pendiente no se puede calcular**(Relatoría 54-56)**.



ACTIVIDAD 2

EJERCICIO 1

Análisis preguntas 1, 2,3

Al desarrollar la primera instrucción de la actividad, se hace evidente que para establecer un sistema de referencia para localizar los puntos es necesario encontrar un punto del cual conozcamos las coordenadas (que ellos llaman **placa**) (**Relatoría 60-61)**, o en su defecto darle unas coordenadas arbitrarias a un punto de referencia**(Relatoría 62)**; en este último caso, no habría problema, ya que la estación total daría medidas reales; al argumentar esto, los estudiante evidencian tener claridad sobre que el sistema de referencia no afectaría el cálculo de la pendiente, siempre y cuando se mantenga siempre la misma referencia**(Relatoría 63-64)**.

Al ser cuestionados sobre el cálculo de la pendiente en un punto específico, los estudiantes manifiestan que la manera de calcularlo debería incluir otro punto**(Relatoría 66)**, pero les genera inquietud que "no sabrían hacia donde" calcularlo (**Relatoría 67)**; aquí se evidencia, aunque de manera incipiente, que los estudiantes reconocen que se necesita cierta noción de dirección para establecer la pendiente en un punto.**(Argumento 1, Segunda Actividad)**

Argumento 1

Dato:

Coordenadas A y B del terreno

A B

N 100 N 101,5

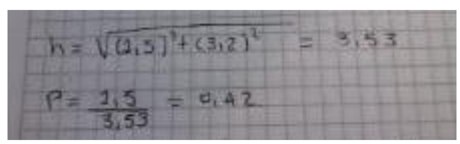
E 200 N 203,2

Z 300 N 298,5

Aserción

La pendiente del terreno es de 42%

Garante:



Análisis preguntas 4 y 5

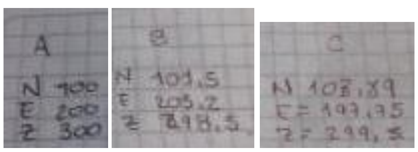
Al responder estas preguntas, se evidencia que el estudiante comprende la relevancia que adquiere considerar la dirección en la que se analiza la pendiente, a partir de la medición, utilizando puntos de referencia en diversas direcciones**(Argumento 2, Actividad 2)**; sin embargo, se observa que para terrenos planos se sigue con la concepción de que la dirección no debería afectar el cálculo de la pendiente, aun para planos inclinados como lo es el terreno que se escogió para desarrollar la actividad.**(Relatoría 75).**

Argumento 2

Dato:

Coordenadas A, B y C del terreno

A	B	C
N 100	N 101,5	N 108,89
E 200	E 203,2	E 197,75
Z 300	Z 298,5	Z 299,5



Aserción

La pendiente entre los puntos A y B del terreno es

Diferente a la del punto A y C.

Garante:

Pendiente entre A y B es 42%

Pendiente entre A y C es 11,13%

EJERCICIO 2

En este ejercicio se evidencia que la noción de pendiente en un punto es extraña para el estudiante, en el sentido de que para los estudiantes la pendiente está relacionada con el uso de dos puntos; por otro lado, el estudiante no logra convencerse de que el grado de inclinación en un punto guarde relación con las pendientes que se calculan al tomar otro punto de referencia **(Relatoría 82-85);** por lo tanto, el estudiante afirma que la estación total no funciona para calcular la pendiente en un punto (**Argumento 3, Actividad 2)**.

Argumento 3

Dato:

Coordenadas A, B, C y D del terreno, los puntos son colineales.

A	B	C
N 100	N 104	N 99,19
E 200	E 203	E 199,1
Z 300	Z 302,3	Z 298,7

D

N 99,75

E 199,82

Z 300,04

Aserción

La pendiente entre los puntos (AB, AC y AD) son distintas. No se puede hallar la pendiente del punto con la ET.

Garante:

Entre A y B: P = 2.3/5=0.46, la pendiente es del 46%.

Entre A y C: P = -1.3/1.21=1.07, la pendiente entre A y C es del 107%, que no es la pendiente "natural" que se hallaría tomando varios puntos de terreno no solo dos.

Entre A y D: P = 0.04/0.3=0.13, la pendiente es del 13%.

CONCLUSIONES

La enseñanza de las matemáticas, y en particular del cálculo vectorial, requiere del uso de herramientas tecnológicas que involucren al estudiante con la verdadera naturaleza de los conceptos que se enseñan; desde ese punto vista, el trabajo que hemos realizado es una avance en esta dirección, ya que ha permitido que los estudiantes desarrollen habilidades argumentativas con respecto a la noción de ciertas propiedades de la derivada direccional, el cual es el objetivo principal de este trabajo.

La importancia de los mediadores instrumentales para la enseñanza de las matemáticas ha sido resaltada en el marco teórico, y en la aplicación de la actividad diseñada en el presente trabajo se observa que no ha sido sobrevalorada dicha importancia: la mayoría de los argumentos que surgieron en el desarrollo de la actividad probablemente no se obtendrían sin la presencia de la estación total, y eso es algo que se hace evidente al observar el contraste entre las respuestas de los estudiantes antes y después de hacer uso del mediador que, en el caso de la población objetivo de la actividad, es un instrumento propio de su actividad profesional.

En particular, podemos resaltar el significativo avance que se evidenció en la compresión de la necesidad de establecer una dirección para determinar la pendiente en un punto en una superficie determinada, lo cual permite contrastar con la situación de la pendiente de una curva, en la cual solo era necesario especificar el punto; más importante aún es que dicha comprensión se alcanzó sin necesidad de que el profesor lo afirmara de antemano, sino que se logró cuando los estudiantes verificaron, haciendo uso de la estación total, que si se calculaba la pendiente en un punto, utilizando como referencia puntos que se encontraban en distintas direcciones, los valores eran significativamente distintos.

No obstante, hay que resaltar también que ciertas nociones no pudieron ser interiorizadas por el estudiante de la forma que se esperaba; en particular debemos referirnos a la idea central de que la pendiente en una función de dos variables (representada aquí por medio de un terreno con relieve) está totalmente determinada por el punto donde se estudia; en este caso, los estudiantes que hicieron parte de este estudio siempre consideraron la noción de pendiente como dependiente de los dos puntos a través de los cuales se calcula la recta que permite aproximar la pendiente que deseamos; nuestra conclusión es que dicha dificultad se basa principalmente en la conceptualización que se hecho del concepto de pendiente en la topografía.

La actividad se puede enmarcar dentro de lo que Radford denomina un “problema abierto”, ya que en la mayoría de las preguntas no se le indicó al estudiante cual era la respuesta a la pregunta, lo cual derivó en diversas afirmaciones por parte de los estudiantes acerca de las nociones sobre las cuales se estaba trabajando; por lo tanto, podemos afirmar que la actividad generó procesos de argumentación que permitió al estudiante involucrarse con su aprendizaje; entre estos procesos podemos destacar la generación de conjeturas acerca del comportamiento de la pendiente tanto en una curva como en una superficie, y la validación de estas conjeturas haciendo uso de técnicas matemáticas respaldadas por la utilización de la estación total para hacer los cálculos necesarios.

Con respecto a los argumentos evidenciados en el desarrollo de la actividad, se observa que en el caso de la pendiente de una recta, algunos estudiantes la calcularon haciendo uso de la formula y otros tuvieron en cuenta la interpretación de la pendiente como la variación de la altura con respecto a la variación en el desplazamiento; en el caso de la pendiente de la parábola, observamos que la mayoría de los estudiantes realiza el cálculo de la pendiente a través de aproximaciones por medio de rectas secantes;en este caso, los estudiantes argumentaron que la pendiente en un curva debería ser bastante parecida a la de las pendientes de esas rectas secantes, por lo cual observamos que los estudiantes argumentan en base a cierta idea intuitiva que tienen acerca de la aproximación, pero sin llegar a formalizarla en su totalidad.

Para la segunda actividad, la argumentación se basó principalmente en mediciones realizadas con la estación total, como se puede observar en la descripción de los argumentos expuesta en el presente trabajo; aquí, los argumentos surgieron en base a un garante empírico, aprovechando el hecho que se estaba trabajando sobre el objeto concreto; esto permitió fortalecer la visualización que tenían los estudiantes sobre el concepto de pendiente y verificar de una manera más cercana sus propiedades.

Finalmente, se pudo observar como el uso de la estación total permitió al estudiante visualizar la relación que existe entre la pendiente en un terreno y la dirección que escojamos para calcularla, lo cual se evidencia en las respuestas de los estudiantes antes y después de desarrollar la actividad que se diseñó.

RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS

Nuestra actividad está orientada hacia un público familiarizado con el uso de los instrumentos topográficos; esto no significa que se deba restringir la actividad exclusivamente a estudiantes de profesiones que requieran el uso de ellos, ya que en las diversas disciplinas se pueden encontrar instrumentos que se adapten a las necesidades de la correspondiente carrera.

A pesar de que el uso del mediador facilita la comprensión de ciertas nociones propias del cálculo vectorial, en el trabajo se ha evidenciado que no es suficiente para clarificar la totalidad de dichas nociones; en el caso particular de la idea de pendiente como aproximación, sugerimos complementar la actividad con el uso de una representación bidimensional del terreno (curvas de nivel), la cual complementa la información que se puede obtener con las mediciones realizadas con las estación total, para así enriquecer los argumentos que surgieron en el desarrollo de la actividad.

Por último, nuestra principal recomendación es aprovechar el uso de instrumentos comunes, no necesariamente computacionales, para apoyar las propuestas didácticas no solo del cálculo vectorial, sino de cualquier rama de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA

BUSTOS, G. Catedra: Topografía II. Recuperado de : ftp://ftp.unsj.edu.ar/agrimensura/Topografia%20II/ESTACI%D3N%20TOTAL.pdf

CEDEÑO, M., & CASTRO, N. (2011). El papel de las calculadoras graficadoras comoinstrumento mediador en la comunicación matemática, *Revista Épsilon,* (16), 65-77.

CONEJERO, J. & SANABRIA, E. (s.f.). *Interpretación geométrica de las derivadas direccionales de funciones reales de dos variables mediante el uso del programa DPGraph.* Recuperado de http://albertoconejero.webs.upv.es/ conejero_papers_education/conejero_sanabria2003derivadas.pdf

CUEVAS, C., & PLUVINAGE, F. (2009). Cálculo y Tecnología, *El Cálculo y su Enseñanza,1*, 45-58

LARSON, R., HOSTETLER, R., EDWARDS, B. (2006) *Calculo de Varias Variables. Volumen II. Octava Edición.* México: McGraw-Hill Interamericana.

LÓPEZ, R. (2008). *Nuevas tecnologías en la enseñanza – aprendizaje del cálculo: una aproximación al estado de la cuestión.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad de Granada. Recuperado de http://http://fqm193.ugr.es/media/gruposcms/TFM_Rubi.pdf

RADFORD, L. (1994). La Enseñanza de la Demostración: Aspectos Teóricos y Prácticos. *Educación Matemática, 6* (3), 21-36

ROJAS, L. & ESTEBAN, P. (s.f.). *Applets como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo vectorial*. Recuperado de http://www.iiis.org/CDs2010/CD2010CSC/SIECI_2010/PapersPdf/XA713EZ.pdf

ROJAS, L. & ESTEBAN, P. (2012, 30 de Marzo). *Enseñanza del cálculo vectorial: Aspectos pedagógicos y tecnológicos*. Saarbrücken: Editorial Académica Española.

THOMAS, G. (2006) *Cálculo. Una Variable*. *Undécima Edición.* México: Pearson Education.

TOULMIN, S. (2003). *The Uses of Argument*. Cambridge: Cambridge University Press

ZIMMERMANN, W. (1991). Visual thinking in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-137). Washington, DC: Mathematical Association of América.

ANEXOS

ANEXO A

Propuesta

Primera actividad

Recursos: Guías de la actividad propuesta y Fichas Bibliográficas

Tiempo: 2 horas

Ejercicio 1

Pendiente de una recta

¿Qué entiende por pendiente de una recta?

Use la gráfica de la recta que aparece a continuación para encontrar su pendiente.

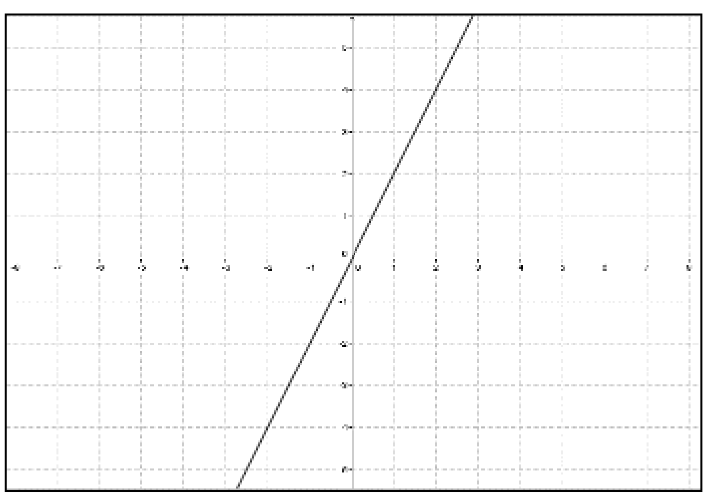


Figura 7. Grafica de la recta

Ejercicio 2

Pendiente de una parábola en un punto

Considere la gráfica de la función $y = x^2$. ¿Cuál es la pendiente de esta parábola?

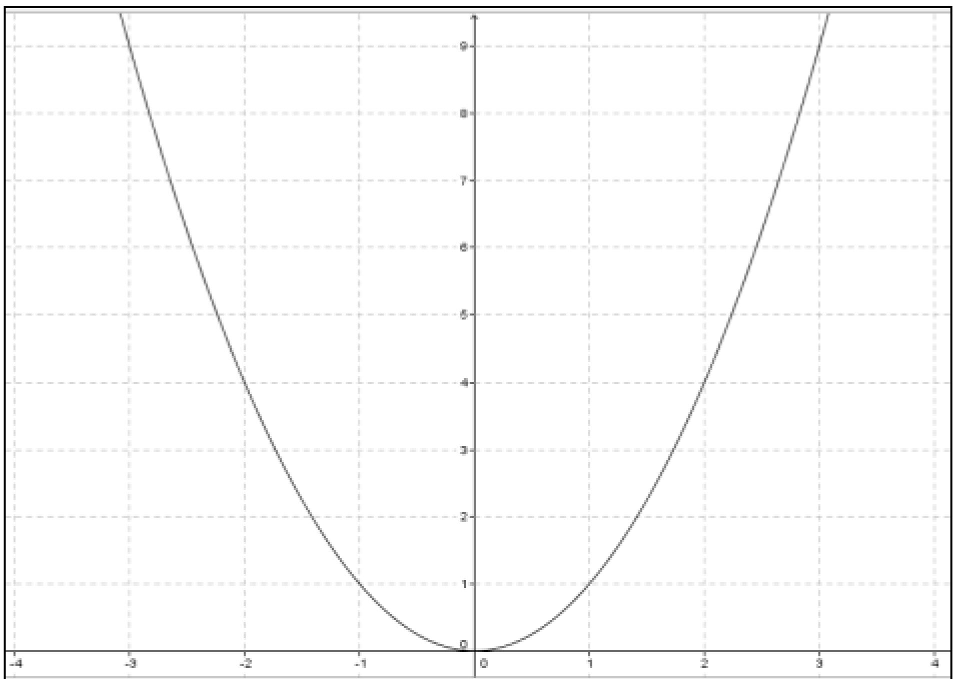


Figura 8. Grafica de la Parábola *y=x*^{2}

¿Considera que es necesario especificar un punto en la curva para calcular esa pendiente? Justifique su respuesta.

Calcule la pendiente de la parábola en el punto (2,4)

Ejercicio 3

Pendiente de una Curva en un punto

Considere la gráfica de la curva que aparece a continuación.

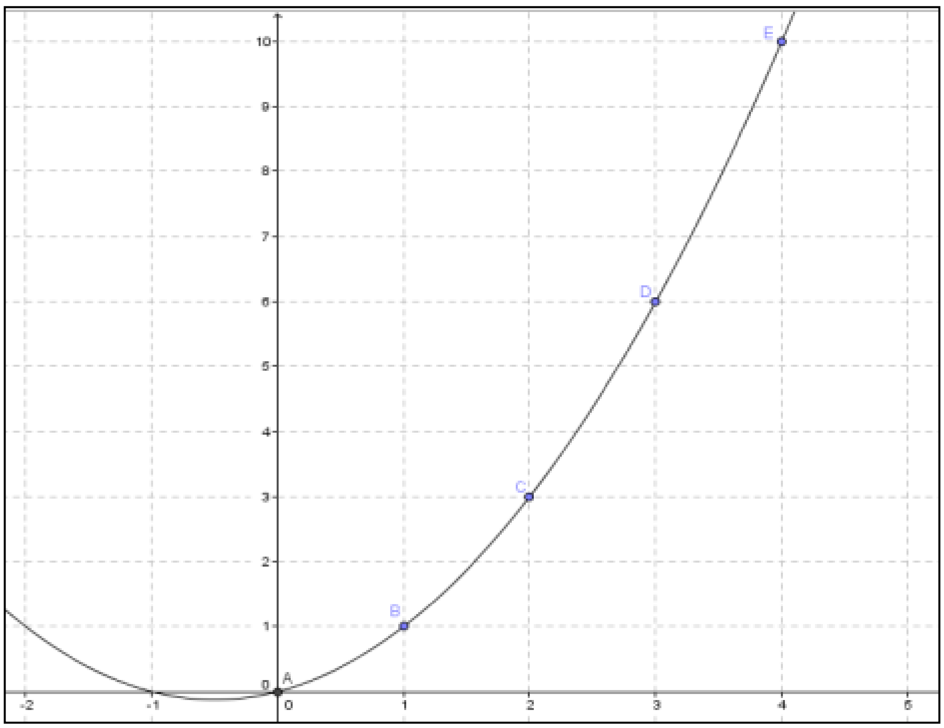


Figura 9. Gráfica de la Curva

¿Cómo encontraría la pendiente de esta curva en el punto B?

¿Será estrictamente necesaria la ecuación de la curva para poder calcular la pendiente en ese punto? Justifique su respuesta.

SEGUNDA ACTIVIDAD

Descripción de los terrenos

Recursos: Guías de la actividad propuesta y Estación Total.

Tiempo: 2 horas

Ejercicio 1

Pendiente de un terreno en un punto e importancia de la dirección

1. Fijar unas coordenadas de amarre en T1 que nos sirvan para establecer un sistema de referencia.

2. Establecer un punto fijo (A) en T1 que será el punto donde vamos a calcular la pendiente; allí se ubicará la ET.

3. Se planteará la pregunta ¿De qué forma calcularía la pendiente en el punto A?

4. Asumimos que el estudiante tomó un punto de referencia B (este punto de referencia se refiere al punto con respecto al cual va a trazar la secante para calcular la pendiente). A partir de esto, se le pide que utilice otro punto de referencia C (C será un punto que este en una dirección diferente) y le pediremos que calcule la pendiente teniendo en cuenta el punto C.

5. ¿Deberían ser iguales las pendientes, a pesar del cambio de dirección? ¿Cuál cree que es la razón?

Ejercicio 2

Pendiente de un terreno en un punto e importancia de la noción de aproximación

1. Fijar unas coordenadas de amarre en T2 que nos sirvan para establecer un sistema de referencia.

2. Establecer un punto fijo (A) en T2 que será el punto en el que vamos a calcular la pendiente; allí se ubicara la ET.

3. Se da una dirección y se pide calcular la pendiente del punto A con respecto a un punto B que este a una distancia de 5 metros, luego a un punto C en la misma dirección pero a un metro y por último un punto D a 30 centímetros (distancia mínima donde funciona el mediador).

4. ¿Cuál de todos estos valores será el que más se aproxime a la pendiente del punto A?

ANEXO B

Relatoría de la propuesta de actividades para abordar la derivada direccional en un curso de cálculo vectorial a través del uso de la estación total como mediador.

En este anexo se relata la socialización generada a partir del desarrollo de la propuesta, entre el grupo de estudiantes y el profesor.

Se orientó una discusión a partir de las siguientes actividades:

El profesor inicia explicando a los estudiantes la metodología de la actividad, donde se les entregará una ficha bibliográfica con una pregunta, ellos la responderán ojala de una manera explícita en detalle y luego se socializa de acuerdo a las respuestas que cada uno tenga.

1. ¿Qué entiende por pendiente de una recta?

1. *Est. A:* es el grado de inclinación de la recta y también es como va creciendo la recta a medida que se va aumentando o alargando.

2. Prof.: ¿Qué va aumentando en qué?

3. Est. A: En distancia horizontal.

4. Est. B: yo también tengo que es el grado de inclinación de una recta o de un punto a otro, desde la horizontal hasta la vertical.

5. Est. C: Es el grado de inclinación de la recta llamada pendiente desde la horizontal hasta la recta que se intersecta con la horizontal x.

6. Prof.: Parece que todos nosotros tenemos un concepto en común con respecto a pendiente cierto, la palabra inclinación aparece en todas las aserciones. Entonces ¿Qué entiende uno por inclinación?

7. Est. A: Es como una diferencia de alturas, entre más se va alargando de forma horizontal también va creciendo en forma vertical.

8. Est. B: Es la diferencia de $x_2$con x_1y también $y_2$con y_1, que sería la fórmula de la pendiente.

9. Prof.: ¿Quiénes son esos valores?

10. *Est. B*: las coordenadas de dos puntos cualquiera que se encuentren en la recta.

11. Prof.: Se concluye este ejercicio diciendo que siempre que se quiera hallar la pendiente de una recta tomamos dos puntos cualesquiera y usamos la fórmula de la pendiente.

2. Se entrega a los estudiantes la gráfica (con cuadricula) de una recta sin la ecuación y se les pide calcular su pendiente.

12. Est. C: Yo tome dos puntos les saque las coordenadas en *x* y *y,* entonces el punto uno tendría las coordenadas (-1, -2) y el punto 2 tendría las coordenadas (1, 2).

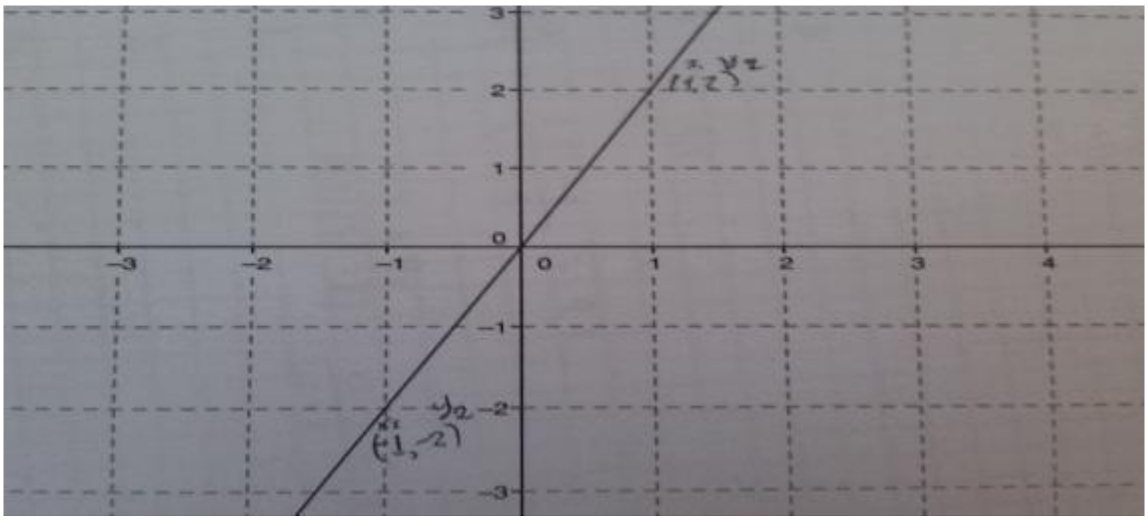


Figura 10. Puntos de la Recta

13. Prof.: recordemos que no había ecuación ¿de dónde salieron esos puntos?

14. Est. C: los saque por donde pasaba la recta

15. Prof.: Si no estuviera la cuadricula ¿se hubiesen podido encontrar esas coordenadas?

16. Est. C: si, pues desde que tenga a *x* y *y* podría encontrarlas.

17. La estudiante termina diciendo que una vez encontradas esas coordenadas se utiliza la fórmula $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ y se halla la pendiente que sería 2.

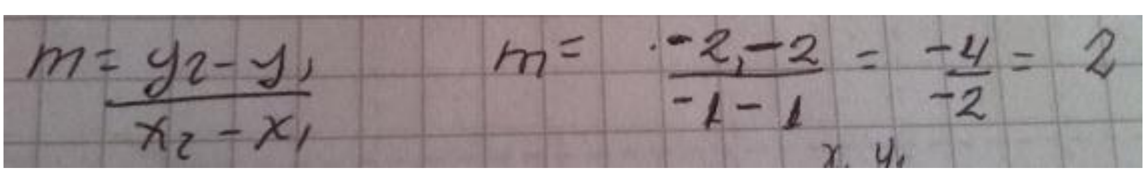


Figura 11. Cálculo de la pendiente de la recta

18. Est. B: Yo hice el mismo procedimiento solo que tome dos puntos diferentes, pero llegue al mismo resultado.

19. Est. A: Yo lo hice un poco diferente, me podría haber basado en dos formas una utilizando la cuadricula y otra si no me hubieran dado la cuadricula lo hubiera podido haber hecho pero con una regla.

20. Prof.: ¿con una regla?

21. Est. A: Si, porque de todas formas yo sé que la pendiente es una diferencia de alturas, yo le llamo altura al eje *y* y una distancia al eje *x*, entonces yo sé que la pendiente es una diferencia de alturas sobre una longitud. Primero sacaría la distancia y después la altura que es la perpendicular al eje *x* y diría la que es la altura sobre la distancia y ahí ya encontraría la pendiente.

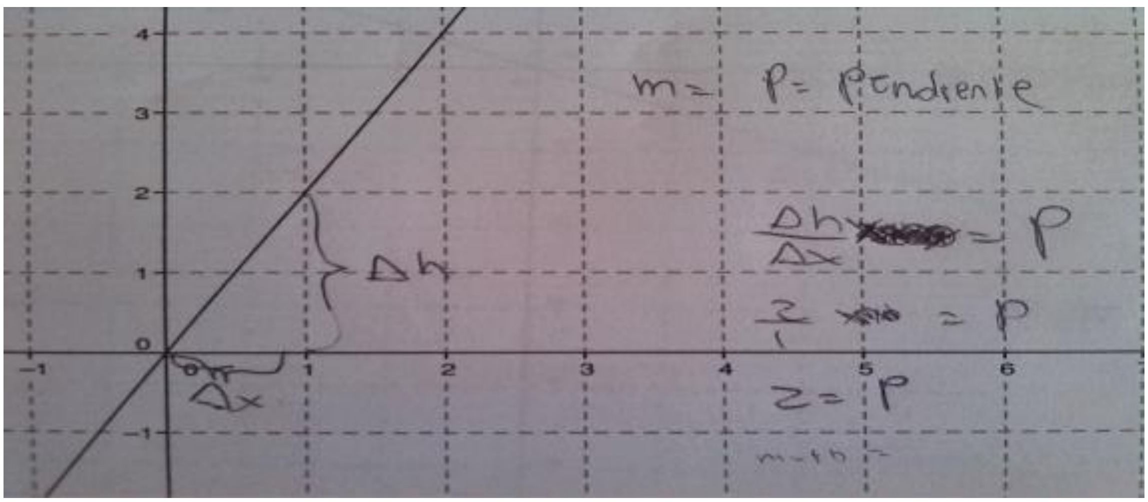


Figura 12. Pendiente como desplazamiento horizontal y vertical

22. El profesor ve la necesidad de hacer otro ejemplo en el tablero con el objetivo de relacionar lo mencionado por las estudiantes A y B con lo dicho por el estudiante C. Todos llegan a la conclusión de que la cuadricula es muy importante para que haya exactitud porque de no tenerse ya se hablaría es de aproximación de la pendiente. Es decir, el procedimiento de tener las coordenadas y aplicar la fórmula facilita el cálculo pero si no hay cuadricula la opción más viable seria trazar proyecciones sobre los ejes y medir longitudes.

3. Considere la gráfica de la función $y = x^2$. ¿Cuál es la pendiente de esta parábola?

23. Nuevamente se les entregó la gráfica de la función con la cuadrícula y algunos puntos marcados en ella. Todos los estudiantes manifestaron que la pregunta no

les era "familiar", haciendo referencia a que no sabían cuál era la fórmula para calcular la pendiente de una curva. Entonces se dio la siguiente discusión:

24. Est. B: Pues yo lo haría trazando rectas muy pequeñas sobre la curva y posteriormente encontraría la inclinación de esa recta.

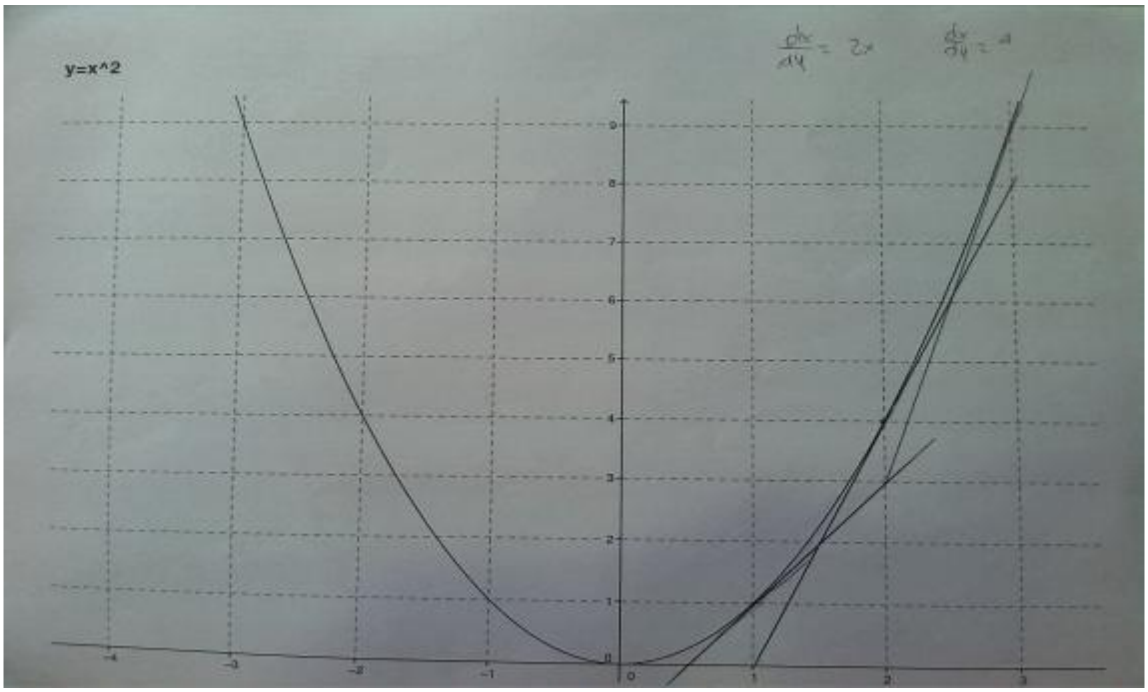


Figura 13. Aproximación a la pendiente de parábola en un punto

25. Prof.: Por ejemplo uno de ustedes había mencionado que se puede hallar la pendiente de una recta tomando dos puntos ¿funcionara esa idea para la curva? Además, no olviden que a diferencia de la recta aquí si tenemos la ecuación.

26. Est. C: pienso que si funciona porque la recta la podríamos trazar uniendo dos puntos que estén en la curva y a partir de ahí calcular la pendiente.

4. **¿Considera que es necesario especificar un punto en la curva para calcular esa pendiente? Justifique su respuesta.**

27. Todos los estudiantes responden: sí, ya que si no se especifica un punto entonces esa curva tendría muchas pendientes.

5. **Calcule la pendiente de la parábola en el punto (2,4).**

28. Est. C: ya nos dan la función que es $y = x^2$, además me daban un punto que es (2,4) y pues lo ubique. Con la ecuación ubique otro punto cualquiera en *x*, digamos 3 al evaluarlo en *y* me daría 9, entonces es el punto (3,9) y ya teniendo los dos puntos hallé la pendiente como en la recta y me dio 5. Yo entendería que avanza 1 y sube 5.

29. Est. B: yo también la hice con 3, pero digamos en el punto (4,16) obviamente da otra pendiente.

30. Prof.: Ustedes estaban diciendo que se podían tomar rectas muy "pequeñas", que pasa si escogemos una recta más pequeña que la tomada anteriormente ¿Cuánto daría la pendiente?

31. La estudiante a pesar de que hizo mención de escoger rectas muy "pequeñas" no tenía claro cómo representarla. El profesor trata de dar una guía, y propone un ejemplo en el tablero diciendo lo siguiente:

32. Prof.: Ustedes fijaron dos puntos (2,4) y (3,9), trazaron la recta que los une y calcularon su pendiente que les dio 5. Pero la estudiante B dice que si ahora tomamos los puntos (2,4) y (4,16) la pendiente de la recta que los une, cambia y es 6. ¿Sera que si tomamos puntos más próximos a (2,4) la pendiente va cambiando?

33. Est. B: Si, pero no estoy seguro.

34. La estudiante C manifiesta no saber y en ese momento interviene el estudiante A.

35. Est. A: Yo todavía sigo con la teoría de que, la pendiente de una parábola es la derivada de su función, entonces la derivada es *2x.* Como me piden que la encuentre en un punto, pues lo que yo hago es reemplazar el *x* en ese punto como me dieron el (2,4) y la pendiente es *2x* entonces me dio 4.

36. El profesor resalta que el estudiante A utiliza la derivada y la ecuación de la parábola para encontrar la pendiente evaluando en el punto, y cuestiona a los otros estudiantes sobre esto.

37. Est. C: Pues yo seguí haciendo el proceso anterior y decidí escoger los puntos (2, 4) y (2.5, 6.25) trace la recta que los une y la pendiente me dio 4.5.

38. Prof.: fíjense en lo siguiente, con el punto (4, 16) la pendiente dio 6, con (3, 9) el resultado fue 5 y ahora con (2.5, 6.25) la pendiente es 4.5. Pero el estudiante A utilizo la derivada y evaluó en el punto (2,4) con lo que la pendiente le dio 4. ¿Por qué utilizar la derivada?

39. Est. A: porque la derivada de una función es la pendiente de esa función en un punto.

40. Est. B: Pero entonces sería lo mismo que nosotros tenemos, porque en el punto (3,9) al reemplazar en la derivada me daría 6.

41. Prof.: pero acaso ¿en qué punto estamos calculando la derivada en (2,4) o (3, 9)? Además si ustedes recuerdan al principio ustedes habían dicho que una parábola tenía varias pendientes, por eso es que el estudiante A dice que solo basta con hallar la derivada y evaluar el punto, porque en cada punto tendremos una pendiente diferente. Ahora, no le quitemos importancia a lo que se estaba haciendo con los puntos y rectas, porque por ejemplo, que pasa si tomamos el punto (2.1, 4.41) para calcular la pendiente de la parábola en el punto (2,4) ¿Cuánto les da?

42. Est. C: me dio 4.1.

43. Prof.: parece que nos vamos acercando, entonces si elegimos *x= 2.00001* a qué valor creen que se aproximaría la pendiente.

44. Todos sin necesidad de hacer el cálculo afirmaron que a 4. Se concluye la discusión resaltando que se utilizaron dos métodos, uno el de aproximación que fue de manera intuitiva y utilizando la noción de recta y el otro el de la derivada utilizando la ecuación que es el método usual.

6. Se entrega a los estudiantes la gráfica (con cuadricula) de una curva sin la ecuación y se les pide calcular su pendiente en el punto B.

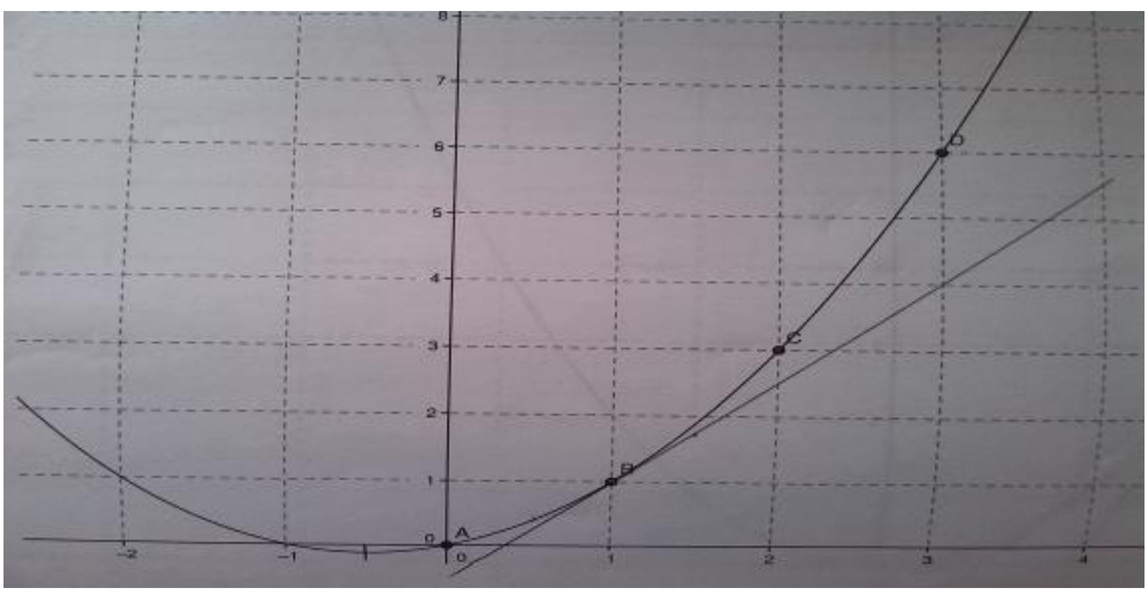


Figura 14. Aproximación a la curva en un punto por rectas

45. Est. C: podría hacerse rápido por el método de la derivada.

7. **¿Será estrictamente necesaria la ecuación de la curva para poder calcular la pendiente en ese punto? Justifique su respuesta**.

46. Est. A: No creo, lo que pasa es que la curva esta corrida en el vértice, entonces no sécómo podría encontrar la ecuación.

47. Est. C: Entonces sería nuevamente la pendiente entre dos puntos.

48. Est. B: Pues sería coger B (1,1) y otros puntos que pueden ser A o B.

49. Est. C: Profesor pues yo lo hice con respecto a C y A, pero me dan dos pendientes diferentes, si elijo A (0,0) con B (1,1) la pendiente es 1, mientras que si tomo B (1,1) con C (2,3) la pendiente seria 2.

50. Prof.: recuerde que en el ejercicio anterior logramos encontrar una buena aproximación de la pendiente porque nos acercamos bastante al punto donde queríamos hallarla; luego podríamos tomar puntos más cercanos que A y C.

51. *Est. A:* Pues como no tengo la ecuación el único punto que podría tomar más o menos cerca es (1.5, 2) y la pendiente entre esos dos puntos sería 2.

52. Las estudiantes B y C apoyan la afirmación.

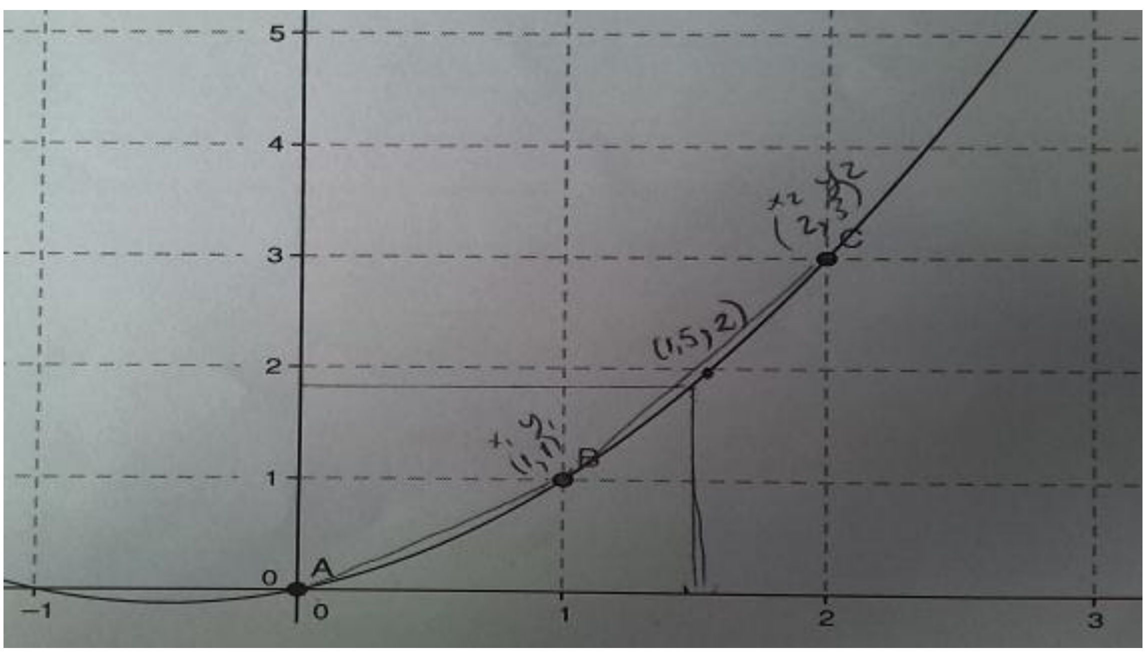


Figura 15. Aproximación de la pendiente de la curva en un punto

53. Prof.: ¿Existirá algún método que garantice la exactitud de la pendiente?

54. Est. A: pues si nos dan la gráfica con cuadricula sí. De lo contrario no, porque no tenemos la fórmula de la función.

55. Est. B: Se podría construir la función pero la verdad no sécómo.

56. Est. C: Tomando valores cercanos a B sería un buen método. Pero digamos yo digo que eso tendría un poco de error porque mi forma de medir con la regla sería diferente a la de mis compañeros.

57. Se termina la discusión resumiendo que para las gráficas en las que no tenemos la ecuación, es muy importante tener una cuadricula que indique las coordenadas de puntos específicos, y de no tenerse tendrían que hacer mediciones con algún instrumento para poder encontrar esas coordenadas e inmediatamente proceder con las aproximaciones a través de rectas de la pendiente de la curva en un punto.

SEGUNDA ACTIVIDAD

58. La metodología para esta actividad fue en principio dirigirnos al terreno T1 y T2 e ir leyendo las preguntas a todo el grupo de estudiantes donde se les pide hacer algunos cálculos usando la ET, las respuestas no serán dadas individualmente, sino como grupo, puesto que entre todos tienen que manejar el instrumento; se referenciará cuando un estudiante comente algo en particular.

Figura 16. Terreno 1

59. Bosquejo inicial realizado por los estudiantes del terreno T1 que se hace teniendo en cuenta como es la pendiente.

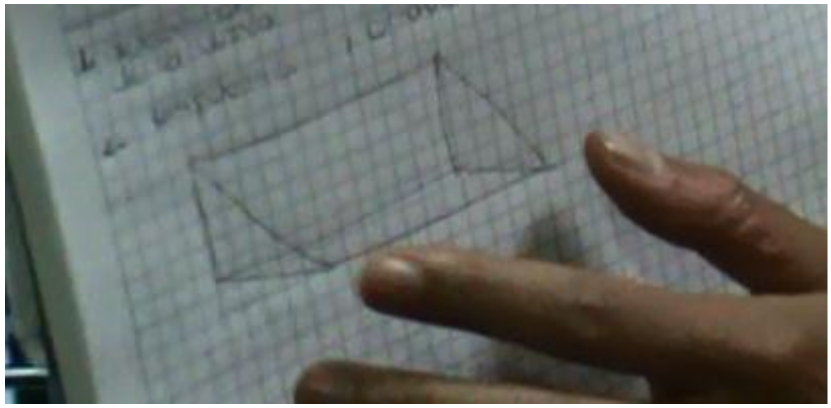


Figura 17. Bosquejo terreno 1

1. **Fijar unas coordenadas de amarre en T1 que sirvan para establecer un sistema de referencia.**

60. G.: Profesor lo que pasa es que para poder establecer el sistema de referencia tenemos que tomar los puntos de la placa más cercana y eso nos llevaría aproximadamente media hora mientras ajustamos los puntos para que todo coincida.

61. Prof.: De qué otra forma entonces podríamos establecer las coordenadas.

62. G.: Pues tomamos unas coordenadas arbitrarias aunque en topografía siempre hay que amarrare a una placa.

63. Prof.: Pero eso afectaría los resultados que vamos a obtener, o nos servirían las mediciones.

64. G.: Si sirven, porque nos estamos parando con coordenadas arbitrarias pero en realidad las distancias si son reales, es decir los instrumentos, el terreno todo es real, luego las mediciones que nosotros realicemos serán reales.

2. **Establecer un punto fijo (A) en el terreno y allí se ubicara la ET.**

65. El grupo decide tomar las coordenadas A (100, 200,300) y allí ubicar la estación total.

3. **¿De qué forma calcularía la pendiente en el punto A?**

66. G.: Profesor la verdad no entiendo la pregunta porque con un solo punto no puedo calcular la pendiente, en cambio si usted me dice que calcule la pendiente entre dos puntos, pues ahí si sabría cómo hacerlo; que sería tomar la diferencia entre las coordenadas.

67. G.: Profe lo que yo entiendo que nos está preguntando es, en ese punto hacia dónde iría el terreno, que es como si nos preguntara por la pendiente del terreno.

68. Prof.: Bueno y entonces ¿Cuál sería la pendiente del terreno?

69. G.: ahora si tendríamos que tomar dos puntos, el punto A que sería el de la estación y el punto B donde yo colocaría el bastón con el prisma y la estación calcula las coordenadas y de acuerdo a eso calculamos la pendiente. Sacamos la distancia horizontal y la altura entre esos dos puntos y eso me da la pendiente del terreno.

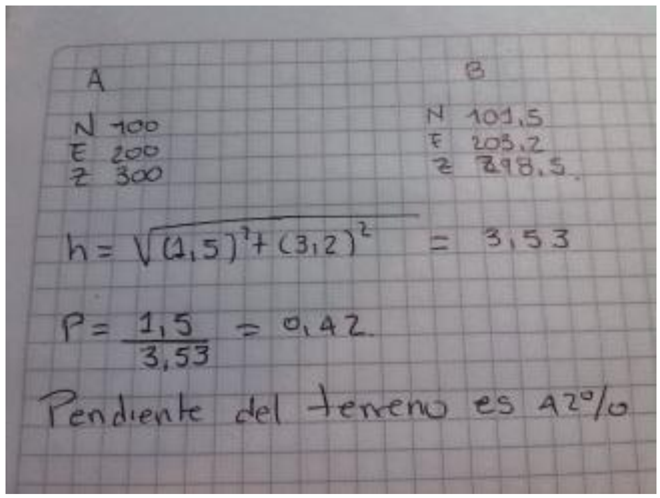


Figura 18. Pendiente del terreno 1 puntos A y B

70. La pendiente del terreno es de 42 %.

4. Utilice otro punto de referencia C y calcule la pendiente de A a C. ¿Será la misma que calcularon de A a B?

71. G.: ahí si cambia, pero cambiaria es por la dirección, porque es muy diferente tener una pendiente hacia B que hacia C.

72. Prof.: ¿porque?

73. G.: porque la pendiente en un lado puede ser más plana, o ser más inclinada.

74. Para calcular la pendiente seria tomar el punto C que de acuerdo a la ET está a 330º de la horizontal y por trigonometría calculamos las coordenadas del punto, después con la ET tomamos la distancia horizontal que es 4.5m y la diferencia de alturas. La pendiente del terreno es 11,13%

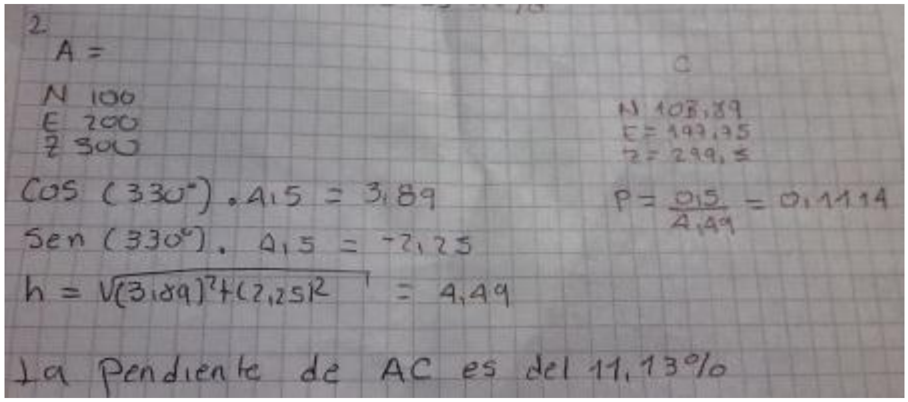


Figura 19. Pendiente Terreno 1 puntos A y C

5. **¿Deberían ser iguales las pendientes, a pesar del cambio de dirección? ¿Cuál cree que es la razón?**

75. G.: depende del terreno, porque si es un terreno totalmente plano la pendiente se cancelaria porque el terreno es plano, además sería el único caso donde la pendiente en diferente dirección sería igual.

76. Prof.: ¿será importante la dirección?

77. G.: Si, es muy importante porque dependiendo de los puntos que yo escoja en el terreno que puede ser en bajada o subida la pendiente va a variar bastante, y eso es por la dirección. Es que siempre que yo tengo un terreno él va cambiando de acuerdo a su pendiente y esta depende a su vez de la dirección.

Ejercicio 2

78. Bosquejo inicial realizado por los estudiantes del terreno T2 que se hace teniendo en cuenta como es la pendiente. Se ve un terreno escarpado y una caída cerca al punto A que llamamos barranco en la descripción inicial.

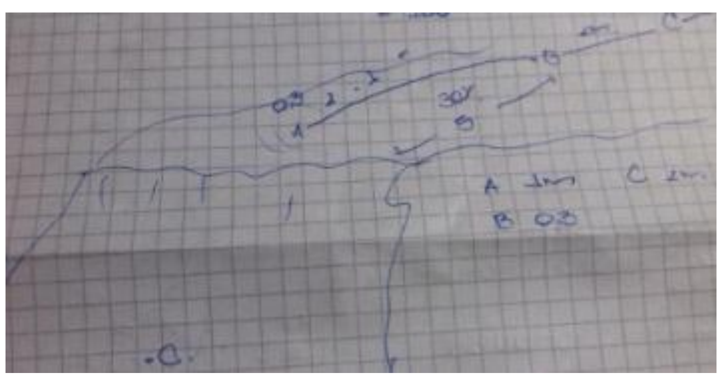


Figura 20. Bosquejo Terreno 2

79. Se fijan nuevamente unas coordenadas arbitrarias de amarre y el punto A dónde va la ET.

6. **Calcular la pendiente del punto A con respecto a un punto B que este a una distancia de 5 metros, luego a un punto C pero a un metro y por ultimo un punto D a 30 centímetros, todos en la misma dirección.**

80. G.: Para el punto A las coordenadas serán (100, 200,300), B por estar una distancia de 5m y midiendo con la estación total nos da las coordenadas (104, 203, 302.3). Para C las coordenadas serán (99.19, 199.1, 298.7) y D (99.75, 199.82, 300.04)

81. Las pendientes se calculan de la misma forma que el ejercicio anterior y son las siguientes:

Entre A y B: P = 2.3/5=0.46, la pendiente es del 46%.

Entre A y C: P= -1.3/1.21=1.07, la pendiente entre A y C es del 107%, que no es la pendiente "natural" que se hallaría tomando varios puntos de terreno no solo dos.

Entre A y D: P= 0.04/0.3=0.13, la pendiente es del 13%.

7. **¿Cuál de todos estos valores será el que más se aproxime a la pendiente del terreno en el punto A?**

82. G.: Otra vez aparece la pregunta que confunde al topógrafo, dice la pendiente del punto A yo digo pero cuál será la pendiente del punto A. Porque para poder calcular la pendiente de ese punto necesitaríamos densificar el terreno, ya no se podría hacer en campo se necesitaría un software.

83. Prof.: ¿Qué es densificar un terreno?

84. G.: Tomar muchos puntos del terreno, hacer una nube de puntos y ver hacia dónde va la pendiente de cualquier punto en cualquier dirección.

85. Se termina la actividad por parte de los estudiantes concluyendo que no se puede calcular la pendiente en un punto utilizando exclusivamente la ET, que a pesar de que brinda una gran precisión en las mediciones no logra calcular con exactitud dicha pendiente.