

**ACERCA DE LA FORMALIZACIÓN DEL CONCEPTO VELOCIDAD DESDE LA
GEOMETRIZACIÓN DEL MOVIMIENTO DE CAÍDA SEGÚN GALILEO
GALILEI**

DIANA VICTORIA MORENO GARCÍA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.

2020

**ACERCA DE LA FORMALIZACIÓN DEL CONCEPTO VELOCIDAD DESDE LA
GEOMETRIZACIÓN DEL MOVIMIENTO DE CAÍDA SEGÚN GALILEO
GALILEI**

DIANA VICTORIA MORENO GARCÍA

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FÍSICA

ASESORA:

PROFESORA, LILIANA TARAZONA VARGAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.

2020

Dedicatoria.....

A mi madre Ana Flor G, a mi padre Víctor Julio M, a mi hermana Sandra y
a mi hermano Alberto que desde el cielo me cuida,
por ser pilares fundamentales en mi vida y a quienes agradezco inmensamente la fuerza, dedicación,
comprensión y amor que siempre me han acompañado.
A todas las personas que con su amistad creyeron en mis capacidades para culminar esta etapa de mi vida
académica.

Agradecimientos

A Dios por sus bendiciones y permitirme dar este paso tan importante en mi vida profesional.
A mi asesora, la profesora Liliana Tarazona quien estuvo siempre dispuesta a ayudarme para el desarrollo de
esta investigación.
Al los profesores que contribuyeron con sus orientaciones en mi formación en esta etapa universitaria.

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|--|----|
| INTRODUCCIÓN | 6 |
| CAPÍTULO 1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN..... | 9 |
| 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA | 9 |
| 1.1 La cinemática en contextos de enseñanza | 10 |
| 1.2 La velocidad como elemento primordial de la ciencia del movimiento..... | 12 |
| 2. OBJETIVOS | 14 |
| 2.1 Objetivo General | 14 |
| 2.2. Objetivos específicos..... | 14 |
| 3. ANTECEDENTES | 15 |
| 4. PROCEDER METODOLÓGICO..... | 17 |
| CAPITULO 2. FORMALIZACIÓN: UNA DISCUSIÓN SOBRE LA RELACIÓN FÍSICA – MATEMÁTICAS | 20 |
| 1. DE LA FORMALIZACIÓN EN LOS FENÓMENOS FÍSICOS Y LAS MATEMATICAS .. | 20 |
| 1.1. Construcción de magnitudes | 22 |
| 1.2 Sobre la velocidad instantánea | 24 |
| 2. SOBRE LA RELACIÓN FÍSICA – MATEMÁTICA..... | 26 |
| CAPITULO 3. LA VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO DE CAÍDA DESDE EL TRABAJO DE GALILEO GALILEI..... | 29 |
| 1. LA FÍSICA PREGALILEANA DEL MOVIMIENTO..... | 30 |
| 1.1 El cambio en el movimiento..... | 32 |
| 1.2 Movimientos y proporciones..... | 33 |
| 2. LA FÍSICA DE GALILEO: MOVIMIENTOS, VELOCIDAD Y GEOMETRIZACIÓN | 34 |
| 2.1 Sobre el movimiento uniforme..... | 35 |
| 2.2 Sobre el movimiento naturalmente acelerado | 38 |
| 2.3 Sobre la formalización en el trabajo de galileo | 48 |
| CAPITULO 4. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA | 51 |
| 1. Problematicar el movimiento desde el análisis cualitativo..... | 51 |
| 2. A cerca de la implicación cuantitativa de movimiento | 54 |
| 3. La representación geométrica de la magnitud velocidad instantánea en Galileo | 57 |
| CONCLUSIONES | 60 |
| BIBLIOGRAFÍA..... | 64 |

TABLA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1. Uso de una línea para representar la intensidad de una cualidad..... | 23 |
| Figura 2. Esquema del proceso de formalización. | 26 |
| Figura 3. Galileo Galilei (1564-1642) | 27 |
| Figura 4. Representación definición movimiento uniforme..... | 35 |
| Figura 5. Movimiento Uniforme. Teorema I, Proposición I..... | 36 |
| Figura 6. Movimiento Uniforme. Teorema III, Proposición III..... | 37 |
| Figura 7. Movimiento Uniforme. Teorema IV, Proposición IV..... | 37 |
| Figura 8. Grados de intensidad de velocidad..... | 39 |
| Figura 9. Teorema I, Proposición I. Movimiento naturalmente acelerado..... | 43 |
| Figura 10. Sobre la velocidad en diferentes instantes..... | 45 |
| Figura 11. Teorema II, Proposición II. Movimiento naturalmente acelerado..... | 46 |
| Figura 12. La suma de los n primeros números impares..... | 47 |
| Figura 13. Representación geométrica de los grados de velocidad instantáneos de un cuerpo en caída..... | 57 |
| Figura 14. Movimiento de caída de los cuerpos..... | 58 |

TABLA DE CUADROS

| | |
|---|----|
| Cuadro 1. Sobre el concepto velocidad en textos escolares..... | 11 |
| Cuadro 2. Síntesis de antecedentes..... | 16 |
| Cuadro 3. Movimiento, teoremas de Galileo y notación actual..... | 55 |

INTRODUCCIÓN

La física es una edificación del conocimiento, la cual ha tenido en la cinemática una de sus bases más sólidas para su construcción. Por lo tanto, referirse a los temas que la llevaron a su estudio, nos permite: profundizar en sus orígenes y fundamentos; a su vez clarificar el panorama que dio sentido a sus explicaciones, buscando fortalecer los criterios de enseñanza; dando cabida a los estudiantes que frecuentemente formulan inquietudes sobre sus conceptos físicos y los cuales en su mayoría son enseñados sin un análisis más amplio de ellos, resultando su concepción de manera explícita estableciendo por sentada su comprensión.

Es, por tanto, que para la investigación de este trabajo se trató uno de los conceptos fundamentales en la cinemática, como lo es el concerniente al tema de la velocidad y como en su análisis se nos permite hacer referencia a la velocidad instantánea, y a comprender el alcance o sentido de lo que concebimos actualmente de ella. Es por lo que recurriendo precisamente a trabajos realizados en la historia de la física los que nos ofrecen la explicación necesaria para darle mejor sentido a lo que significó la construcción de tales magnitudes y encontrar en el trabajo hecho por el gran físico Galileo Galilei, un reflejo de lo que representó el estudio de esta magnitud para la descripción de un fenómeno físico como lo es el referente al movimiento.

Las anteriores consideraciones dieron paso a este trabajo, donde se plantearon las siguientes preguntas problema:

¿Cómo se formaliza el concepto velocidad desde la perspectiva de Galileo en el movimiento de la caída del objeto?, ¿Cómo problematizar la velocidad instantánea desde el trabajo de Galileo para el estudio del movimiento en los contextos de enseñanza de la física?

Por lo tanto, se acude al fenómeno físico sobre la caída de los cuerpos para considerar la velocidad y su formalización, teniendo en cuenta algunos elementos de la caracterización del estudio del movimiento desde la Época Medieval hasta Galileo Galilei. Es el trabajo de Galileo, una fuente importante para esta investigación, estudiando sus tratados, particularmente su libro: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias, escrito en varios teoremas, axiomas y colorarios, referentes al movimiento naturalmente acelerado, expuestos en

su tercera jornada. Además de estudiar todo lo que antecede a ese trabajo en cuanto al entendimiento de la física o la filosofía natural que se asumía en el Renacimiento.

Este estudio permitió un análisis desde la perspectiva conceptual de la organización del fenómeno físico del movimiento correspondiente a la identificación y cuantificación de magnitudes, el cual dieron paso a formalizar el concepto velocidad. En el cual se destaca la representación geométrica como herramienta elemental para su formalización en cuanto al modo de medir el cambio de posición con respecto al tiempo de un cuerpo.

A continuación, se hará una descripción sobre la organización de cada capítulo, los cuales fueron constituidos de manera tal, que brinden la oportunidad de analizar las concepciones consideradas para dar cuenta de la formalización de la velocidad instantánea en el caso de la matematización del movimiento, donde nos da cuenta de que se trata de un proceso que no se interpreta como una sola adaptación de la geometría, sino que es necesaria su análisis conceptual.

En el primer capítulo, *Diseño de la investigación*, se expone las consideraciones que se tuvieron en cuenta para la propuesta de este trabajo de grado, allí se expondrá el planteamiento problema y su justificación. A su vez una exposición de los antecedentes encontrados y la forma como constituyeron un aporte a esta investigación, también las preguntas problema anteriormente mencionadas y el objetivo propuesto que hace referencia al análisis de la formalización del concepto velocidad y sus derivaciones en la enseñanza. Así como una referencia de la cinemática considerada en el espacio académico concernientes a los cursos iniciales de física, correspondiente a la forma como se percibe la velocidad instantánea en los textos escolares tratados por los estudiantes.

En el segundo capítulo, *Formalización: una discusión sobre la relación física – matemáticas*, se hace referencia a la formalización para reflexionar sobre el papel de las matemáticas en el análisis de los fenómenos físicos. Por lo tanto, se derivan características en la construcción de magnitudes realizadas en la época medieval, además se enuncia el establecimiento de la relación física-matemáticas haciendo evidencia de su estrecho acercamiento, para dar cuenta de los fenómenos mecánicos.

En el tercer capítulo, *La velocidad en el movimiento de caída desde el trabajo de Galileo Galilei*, se tomó en cuenta los comienzos de la historia de la física clásica, específicamente en

los fundamentos que caracterizaron la descripción geométrica del estudio del movimiento de caída de los cuerpos, realizada por Galileo Galilei. Por lo tanto, se empleó desde la física medieval un análisis del establecimiento de las tesis referentes a las cualidades, cantidades, proporciones descritas en el movimiento. Los cuales concurrían en la geometría explicada por Galileo, siendo uno de los referentes más relevantes para entender cómo surgieron las primeras interpretaciones matemáticas que se le hacen al movimiento de caída de los cuerpos a través de un lenguaje de formalización que encuentra en las matemáticas. Permitiéndole demostrar uno de sus principios fundamentales el cual expresa que existe una proporcionalidad entre la velocidad de caída y el tiempo de duración.

En el cuarto capítulo, *implicaciones en la enseñanza* se realiza una recapitulación de los temas tratados desde el principio de la investigación para así derivar criterios en la enseñanza de la física que nos permitan hacer reflexiones en la manera como se concibe el concepto de velocidad instantánea, desde la descripción hecha por Galileo hasta llegar a su cuantificación como una magnitud la cual en la actualidad se considera en relación al espacio-temporalidad.

Finalmente, se trae al escenario de la enseñanza de la física, el tema de la velocidad como un referente en el estudio del movimiento, que frecuentemente se confunde con la aplicación de algoritmos matemáticos que tal vez no nos permiten indagar en el origen de sus teorías físicas.

CAPÍTULO 1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En el siguiente capítulo se presentan los argumentos, que dieron origen al trabajo de grado que se presenta en este documento, donde se expone la temática a desarrollar para la elaboración de la investigación que se obtuvo a partir del planteamiento del problema.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA

En los cursos introductorios de física que se dictan desde el colegio hasta los primeros semestres universitarios, se aborda desde la cinemática el concepto velocidad, particularmente el tema de la velocidad instantánea, para describir el movimiento de caída de los cuerpos . En estos contextos, la velocidad se presenta como una cantidad que se deriva de otras magnitudes como el espacio y el tiempo, y con ello se hace referencia también a la velocidad media. En el caso de la velocidad instantánea su definición acude a pensar en el movimiento que tiene un cuerpo en un momento (I) acudiendo al cálculo del límite de la velocidad media durante un intervalo de tiempo cuando este tiende a cero.

Esta definición presenta en los estudiantes una noción formal de la velocidad instantánea, sin embargo, es poco reconocida su comprensión en la experiencia, es decir, establecer la noción que tenemos de limite como planteamiento matemático es diferente al que entenderíamos en el campo de la mecánica, ya que esta expresión es considerar si realmente se está calculando el instante de la caída del cuerpo. En otras palabras, *¿Cómo dar cuenta de la velocidad que tiene un cuerpo en un punto específico, o en un instante?*

Para dar paso a resolver estas cuestiones, es necesario entender cómo se construyeron y fundamentaron estos conceptos tan relevantes en la historia de la Física. Para tal fin es importante acudir a los pensadores que dieron origen al estudio de la cinemática para realizar reflexiones acerca de la grandes discusiones que se dieron sobre el estudio del movimiento de los cuerpos.

Por lo tanto, nos remontaremos al estudio del movimiento y su concepto velocidad en el trabajo realizado por Galileo Galilei, el cual establece en su última obra de 1638, *Discursos y*

demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias también conocido como los Discorsi, donde trata los temas de la mecánica y el movimiento. Este libro Galileo fue escrito durante el confinamiento que sufrió como consecuencia de su condena por parte de la iglesia católica, para la cual era efectivo el castigar a los que contradecían sus principios. Los Discorsi son una recuperación y corrección de escritos anteriores, estos con mayor profundización sobre las leyes del movimiento. Galileo nos brinda un panorama de su interpretación geométrica (euclidiana) desde la física medieval y cómo después de casi dos mil años, donde las ideas de Aristóteles eran las únicas admitidas, dieron paso a la matematización del movimiento que constituyó uno de los temas más fascinantes para los científicos, en su interés por la interpretación de los fenómenos físicos que nos ofrece la naturaleza.

1.1 La cinemática en contextos de enseñanza

Desde los contextos de enseñanza de la física, interpretamos el papel de la cinemática como la encargada de describir el movimiento de los objetos y su trayectoria. De aquí que se toma en consideración el concepto velocidad instantánea como el producto que obtiene un cuerpo en cierta posición y tiempo al realizar desplazamientos muy cortos en intervalos de tiempo también muy cortos.

El entendimiento de este concepto hace referencia a lo que se nos enseña en el aula, sobre la noción de *velocidad instantánea*, estableciéndose como una de las bases conceptuales necesarias para abordar el estudio del movimiento. Por consiguiente, un primer intento por parte de los estudiantes en la comprensión de este tema, lo encuentran fácilmente en diferentes textos escolares, convirtiéndose en una de sus principales fuentes de información. Varios de estos textos escolares, definen el concepto velocidad instantánea (Ver Cuadro 1.) según los aspectos y clasificaciones que considere el autor para organizar su demostración.

Algunos de estos autores abordan en estos textos una breve revisión histórica de Aristóteles y Galileo para introducir los temas relacionados al movimiento (Mecánica). Por lo tanto, al ser tan reducido este espacio histórico, no resulta tan extenso como lo que si ocurre con las ecuaciones cinemáticas.

| CONCEPTO | TEXTO | DEFINICIÓN |
|------------------------------|---|---|
| Velocidad Instantánea | (Wilson, Buffa, & Lou, 2007). <i>Física</i> . México. Sexta edición, Pearson Educación. | Al igual que la rapidez, cuando el delta de t se aproxima a cero, obtenemos la velocidad instantánea, que describe que tan rápidamente y en qué dirección se está moviendo algo en un momento específico. |
| | (Valero, 1994). <i>Física Fundamental I</i> . Santafé de Bogotá, Colombia. Decimosexta reimpresión, Editorial Norma S.A. | El único medio de conocer el movimiento de un cuerpo, en cada <i>instante</i> , es medir su velocidad media para desplazamientos muy pequeños durante intervalos de tiempo también muy pequeños a cada momento. Podemos definir el vector velocidad instantánea a un momento dado, a la razón del desplazamiento, al intervalo de tiempo correspondiente, cuando este tiende a cero. |
| | (Hewitt, 2007). <i>Física conceptual</i> . México. Décima edición, Pearson Educación. | Cuando se conocen tanto la rapidez como la dirección de un objeto, estamos especificando su <i>velocidad</i> . La <i>velocidad variable</i> , si la rapidez o la dirección cambian (o si ambas lo hacen), entonces cambia la velocidad. |
| | (Tipler, 2001). <i>Física para la ciencia y la tecnología</i> , volumen 1. Barcelona, España. Cuarta edición, Editorial Reverté, S.A. | Se define la <i>velocidad vectorial</i> media de la partícula, como el cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo. La <i>velocidad instantánea</i> es el límite de la relación entre el delta de la posición y el delta del tiempo, cuando este último se aproxima al valor cero. |

Cuadro 1. Sobre el concepto velocidad en textos escolares. Fuente: elaboración propia.

Sin dejar de reconocer la rigurosidad con que tratan algunos textos de física este tema en ocasiones se cae en la generalidad al hablar de la velocidad instantánea, con un lenguaje muy técnico o mecanizado. Trayendo consigo ciertas dificultades en su análisis cualitativo, según Romero & Rodríguez (2002)

La definición operatoria de velocidad instantánea trae consigo dificultades de adecuación entre la noción instantaneidad temporal y el significado de velocidad que subyace a dicha definición. Cuando se hace referencia al movimiento de un cuerpo se considera intuitivamente que en cada instante el cuerpo tiene un valor de velocidad determinado; no obstante, el uso de lapsos de tiempo finitos (aunque pequeños), presentes en el paso al límite de la definición, no se corresponden con

esta noción de instantaneidad, dado que lo que se tiene son lapsos de tiempo - duraciones-, no instantes. (Romero & Rodríguez, 2002, pág. 60)

Es entonces que la definición matemática del límite en la velocidad instantánea corresponde a la duración que adquiere el cuerpo en su caída en pequeños intervalos de tiempo, pero tal vez no precisamente a sus instantes. Sin considerar generalmente este tipo de objeciones, se acude a una sucesión de procesos algebraicos para llegar a su aplicación. Es aquí donde la cinemática termina presentando una serie de ecuaciones y su estudio conlleva al despeje de variables que hacen parte de la comprensión conceptual del tema. Sin embargo, pueden resultar dificultades en su análisis dejando por fuera el examinar el proceso de construcción de esas variables y cómo éstas dan cuenta del fenómeno del movimiento. También surgen dificultades cuando los maestros intentan explicar los fenómenos de la naturaleza, desligando en ocasiones el campo físico del campo matemático:

La dificultad en el punto de unión entre “ lo físico y lo matemático” quizá quedaría eliminada cuando se considere que no se trata de unir formas de conocimiento radicalmente diferentes, que la física no requiere de la matemática para adquirir sentido y generar una visión de mundo, consideradas éstas como disciplinas separadas, sino que en el proceso mismo de comprender los fenómenos físicos se hacen explícitas ciertas formas matemáticas que nacen del proceso de formalización en sí mismo. (Ayala, Garzón, & Malagón, 2007, pág. 40)

Esto puede decantar en las diversas opiniones que se tiene en el ejercicio de enseñar y el cómo se considera la mejor metodología para hacerlo. Para el caso de la cinemática, es preciso señalar que abordarla de una manera clara y comprensible donde disciplinas como las matemáticas resulten compartiendo un sentido en común que mejore en gran medida el interés de los estudiantes por saber más sobre sus conceptos.

1.2 La velocidad como elemento primordial de la ciencia del movimiento

La cinemática se constituye en objeto de estudio con los trabajos de Galileo Galilei, sin dejar de resaltar que se había convertido en uno de los temas centrales de la filosofía natural del medioevo. Es así como se convierte en tema de debate y el cual condujo a su consolidación, más

aún cuando se deriva del estudio del movimiento con conceptos como la velocidad, así lo sugiere, Papp:

Para la historia de las ciencias dar cuenta del movimiento también ha sido un problema para abordar. Nos remontamos a la gran época donde se consolidan los cimientos de la nueva ciencia del movimiento que parte del siguiente interrogante “¿Cómo aumenta la velocidad en la caída libre, fenómeno básico del mundo físico?”, desde Aristóteles se concebía su respuesta a la sencillez de las leyes de la naturaleza. (Papp, 1993, págs. 97-98)

Es precisamente cuando Galileo demuestra que en los caracteres geométricos de la naturaleza encontraría la solución a estos cuestionamientos. Aunque careciera para ese momento de la Edad Media de herramientas como el cálculo infinitesimal, se da a la tarea de valerse de la matemática de la época establecida por Euclides (La teoría de proporciones, ver capítulo 3), para exponer sus principales ideas acerca de la caída libre de los cuerpos. Precisamente esto lo llevaría a pensar en no desistir en matematizar sus observaciones y es a través de varios escritos donde difunde sus ideas. (White, 1993) Uno de esos primeros escritos, fue en 1590, donde Galileo reunió todas sus ideas sobre el movimiento de cuerpos que caen, en un libro llamado *De Motu* (En movimiento)¹.

Es a través de sus publicaciones que Galileo se destaca como una revolución² en la historia de las ciencias en el momento en el que aun imperaba algunas ideas del pensamiento aristotélico. Aristóteles había declarado que los objetos con diferentes pesos caían con diferentes velocidades, pero para Galileo esta idea era equivocada, ya que él consideraba que todos los objetos caían de la misma manera sin importar el peso esto es presentando los mismos cambios de velocidad.

Con el trabajo de Galileo se reconoce el proceso de construcción de la velocidad como una magnitud, que aún sin recurrir a las expresiones algebraicas y del cálculo infinitesimal que se

¹ De Motu; tal vez no puede ser considerado como un gran trabajo científico ya que algunos de los conceptos sugeridos por Galileo no estaban completamente desarrollados cuando fueron escritos y, en algunos puntos, el texto es una extraña mezcla de ciencia y de imaginación. (White, 1993, p. 24)

² La revolución en la historia de las ciencias que realiza Galileo se destaca por retomar trabajos realizados por otros filósofos de la corriente de la filosofía natural como Nicolas de Oresme o Buridán que ya habían representado una concepción para la medición del movimiento, por lo tanto sabemos que el trabajo de Galileo no se presenta de modo totalmente inédito.

presentan en los libros de texto, se vincula a las formas de hablar y representar el movimiento natural de caída de los cuerpos.

Por lo tanto, este trabajo es un aporte desde la explicación geométrica que ofrece Galileo al estudio del movimiento y su modo de formalizar el concepto de velocidad instantánea, como una variable del movimiento de caída de los cuerpos.

Para orientar esta investigación, se plantean las siguientes preguntas problema:

¿Cómo se formaliza el concepto velocidad desde la perspectiva de Galileo en el movimiento de la caída del objeto?, ¿Cómo problematizar la velocidad instantánea desde el trabajo de Galileo para el estudio del movimiento en los contextos de enseñanza de la física?

2. OBJETIVOS

Este trabajo tiene los siguientes objetivos:

2.1 Objetivo General

Analizar la formalización del concepto de velocidad, a partir de la geometrización de Galileo sobre el movimiento uniformemente acelerado para derivar consideraciones en la enseñanza de la física.

2.2. Objetivos específicos

- Analizar el proceso de formalización del trabajo de Galileo expresado en los teoremas expuestos en la jornada tercera del libro: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.
- Plantear una discusión sobre la relación física – matemática en los procesos de formalización.
- Definir implicaciones para la enseñanza de la velocidad instantánea como variable para dar cuenta del movimiento.

3. ANTECEDENTES

A continuación, se hace referencia a algunos trabajos consultados; tesis de grado (Pregrado y Maestría) de la Universidad pedagógica Nacional y un artículo de la Universidad de Antioquia, que constituyeron una orientación para la realización de esta investigación. Se presenta una breve descripción y la pertinencia que tienen dentro de la problemática señalada. Particularmente son trabajos que acuden a la historia de la ciencia y reconocen en el trabajo de Galileo un punto de partida para diseñar propuestas de enseñanza alrededor del movimiento:

Cuadro 2. Síntesis de antecedentes

| Referencia | Descripción | Pertinencia |
|--|--|---|
| <p><i>En la mente de dos grandes pensadores: Reflexión frente a nuevas explicaciones planteadas por Galileo Galilei en respuesta al planteamiento Aristotélico sobre la caída de los cuerpos.</i> Autor: Néstor David Vargas Rojas. Año:2017. Trabajo de grado del programa Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional.</p> | <p>Es un análisis histórico de los trabajos de Aristóteles en relación con la caída de los cuerpos y la nueva forma que plantea Galileo para pensar la actividad científica. Se contempla el diálogo entre los autores: Thomas S. Kuhn, Aristóteles y Galileo, mediante textos como: la estructura de las revoluciones. Se articula el diálogo establecido entre los autores y una propuesta pedagógica.</p> | <p>Conocer las interpretaciones realizadas sobre la caída de los cuerpos que surgieron en Aristóteles el movimiento de los cuerpos de manera natural y violenta en comparación a la nueva perspectiva que ofrece Galileo para establecer una manera distinta en el conocimiento científico en la naturaleza del movimiento permitiendo una forma de pedagogía a través de su manera de experimentación.</p> |
| <p><i>La relación Física y Matemáticas en Galileo.</i> Autor: José Francisco Malagón Sánchez. Año:1988. Tesis de Maestría en Docencia de la Física de la</p> | <p>Es un trabajo que analiza las formas matemáticas involucradas en lo que podría considerarse el primer intento sistemático y exitoso de matematizar el mundo físico y de las condiciones que hacen</p> | <p>En los dos últimos capítulos se muestra la diferencia entre el razonamiento geométrico y el razonamiento algebraico y sus implicaciones en el concepto velocidad. También se presenta la</p> |

| Referencia | Descripción | Pertinencia |
|--|---|---|
| <p>Universidad Pedagógica Nacional.</p> | <p>posible tal proceso en Galileo.</p> | <p>manera como la noción galileana de continuo da forma a la velocidad instantánea.</p> |
| <p><i>La experimentación en Galileo.</i> Autor: Leandro A. Castillo. Año: 1986. Maestría en docencia de la física de la Universidad Pedagógica Nacional. (Castillo, 1986)</p> | <p>Se recopila en su primera parte la Teoría del conocimiento según los Empiristas y los Racionalistas. En la segunda parte aborda la física en la época de Galileo. De allí que habla de Bacon y el proceder de Galileo donde da un estatus diferente a las leyes ya escritas para el movimiento, una de ellas el ímpetu como causa del movimiento y la gran influencia de Arquímedes en toda la obra de Galileo.</p> | <p>He de destacar que es un trabajo que agrupa mucha información sobre los diferentes experimentos de Galileo, teniendo en cuenta las ideas traídas desde la perspectiva filosófica que da como resultado, un gran enriquecimiento histórico.</p> |
| <p><i>Diseño y construcción de un prototipo para el estudio de la caída de los cuerpos: Medición de la aceleración de la gravedad por medio de Arduino.</i> Autor: Walter Loren García Cruz. Año: 2016. Trabajo de grado del programa Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional. (García, 2016)</p> | <p>Se encuentra una unidad didáctica: <i>El poder oculto de la caída de los cuerpos</i>, se abordan: ¿Qué factores debo tener en cuenta para construir relación medida y construcción de magnitud? Centra en el estudio histórico y epistemológico alrededor del movimiento, la caída de los graves y su implicación alrededor de la enseñanza a través de la construcción de un instrumento de medida de la aceleración de la gravedad por medio de la plataforma Arduino.</p> | <p>Referirse a la implementación de la unidad didáctica que dé cuenta de la aceleración gravitacional como magnitud, con respecto a las perspectivas de los tres autores para llegar a comprender el concepto de gravedad. Además de la ayuda de un modelo a través de las TIC, en paralelo con mi investigación de formalización de la velocidad estaría como apoyo los diferentes modelos con los que se compara la caída de los cuerpos.</p> |

| Referencia | Descripción | Pertinencia |
|--|---|--|
| <p><i>Una perspectiva fenomenológica para la enseñanza de la caída de los cuerpos: Propuesta experimental.</i> Autor: Harold Mauricio Claret Valencia. Año: 2019. Tesis de Maestría en Docencia de las Ciencias Naturales. (Claret, 2019)</p> | <p>Es una investigación sobre una propuesta experimental en el aula, sobre la caída de los cuerpos como un fenómeno a organizar desde el movimiento de un cuerpo que cae en medios que ofrecen resistencia. Así mismo como interpreto Galileo desde su perspectiva en la caída de los cuerpos que dependen de su relación cuerpo-medio.</p> | <p>Es un aporte al estudio de los tratados de Galileo, en cuanto señala como el lugar donde se realiza la caída de los cuerpos depende de su relación cuerpo-medio donde esto determina cómo caen con distintas velocidades en distintos medios. Se atribuye a esta investigación la recopilación de datos referentes a la caída de los cuerpos.</p> |
| <p><i>La Formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea.</i> Autores: Romero Ángel, Rodríguez Luz Año: 2002 Revista Educación y Pedagogía Vol. XV No.35 Universidad de Antioquia CODI.</p> | <p>Un análisis de la forma tradicional de asumir la relación física-matemáticas en el contexto educativo y, tomando como fundamento los aportes de la historia y la epistemología de la física y del enfoque de modelización, se analiza en particular el concepto velocidad instantánea y su formalización.</p> | <p>Es un artículo que se analizan conceptos físicos como la velocidad instantánea que a través de una perspectiva galileana y otros aspectos relacionados con la enseñanza brindan un espacio para reflexionar sobre su formalización. Siendo de gran relevancia para la orientación que da base a la investigación realizada.</p> |

4. PROCEDER METODOLÓGICO

El presente trabajo se desarrolla bajo el carácter de la investigación del análisis histórico-crítico en el campo correspondiente a la enseñanza de la física, donde se caracteriza esencialmente la consulta de textos que han servido de contribución para dar importancia a fenómenos naturales en la física contribuyendo a su reconocimiento. Por lo tanto, es pertinente mencionar que, de acuerdo con Ayala (2006) su finalidad es:

Establecer un diálogo con los autores a través de los escritos analizados, con miras a construir una estructuración particular de la clase de fenómenos abordados y una nueva mirada que permita ver viejos problemas con nuevos ojos (proceder característico de la construcción de formas alternativas de representación). (Ayala M. , 2006, pág. 29)

Siendo uno de los propósitos de este trabajo, el pensar cómo considerar temas que provienen de la mecánica clásica, y la necesidad de trazar una visión más amplia de ellos, los cuales en algunas circunstancias se limitan a explicaciones absolutas, exposición de ecuaciones y definiciones que se supone no requieren de grandes procesos comprensión dentro de los contextos de enseñanza de la física. Es entonces que se pretende que por el contrario signifiquen una ayuda para entender cómo llegaron a ser constituidos en la historia de la ciencia estos productos y de allí qué procesos son oportunos de desarrollar en las clases de física.

Todo esto nos permite analizar desde diferentes perspectivas cómo distintos autores se refieren a la velocidad y su categorización. Así mismo brindarnos la oportunidad de establecer dinámicas que permitan mejorar la comprensión de estos conceptos. Es entonces que para tal comprensión acudimos a un momento crucial en la historia de la cinemática, el cual señala Azcarate (1984):

En efecto, a lo largo del siglo XVII asistimos a la revolución científica de la Mecánica Clásica, cuya elaboración conceptual inicia Galileo -quien introduce el paradigma de la cinemática- y desarrolla posteriormente Newton en su totalidad. Como es propio de una revolución científica surge un nuevo cuadro conceptual que exige un nuevo formalismo matemático; en esta fase de nacimiento de una nueva ciencia es patente la necesidad de crear métodos matemáticos distintos, adecuados a unos problemas concretos que antes no existían. (Azcárate, 1984, pág. 203)

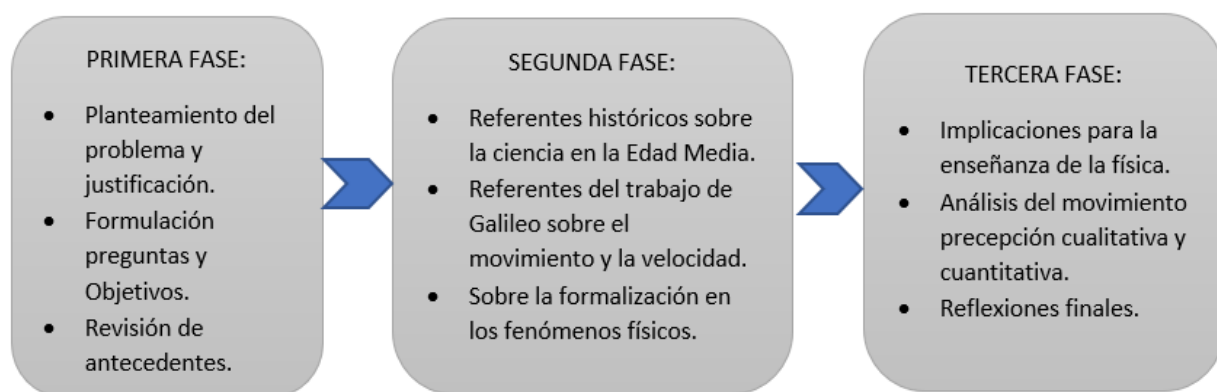
Por lo tanto, es pertinente remontarnos a los sucesos que dignificaron todo el proceso en la construcción de los elementos en la cinemática para comprender cuáles fueron esos problemas que dieron paso a los conceptos y formas de proceder que hoy se intentan presentar en las clases de física. Particularmente, en este trabajo se buscará analizar, desde el trabajo de Galileo cómo concebimos el movimiento desde una de sus magnitudes, como lo es la velocidad que permitió la cuantificación de este.

Así mismo acercarnos entorno a las teorías expuestas a lo largo de la historia, las cuales son enseñadas dentro la constitución del conocimiento científico, así;

Ante la diversidad de formas de comprender el mundo físico inherentes a las teorías que constituye el panorama de la física cuando se rescata la lógica conceptual y las dificultades de los estudiantes en la asimilación de dichas teorías, surge la preocupación por la forma como se puede pasar de un tipo de explicación a otro y por la forma como esto puede haber ocurrido en la historia. Los problemas de conocimiento a los que responde la actividad científica se vuelven relevantes. (Ayala M. , 2006, pág. 25)

De lo anterior podemos deducir que las teorías físicas que hoy se presentan en las clases como productos acabados fueron parte de la actividad científica, tuvieron un proceso de constitución que respondían a problemáticas específicas, estuvieron permeadas de diversos obstáculos. Por esto se acudirá al trabajo de Galileo ubicándolo en el contexto histórico en el que produjo su trabajo, las observaciones que realizó particularmente sobre el movimiento que lo llevaron a la constitución de formas de representación geométrica del movimiento y a configurar la velocidad como una magnitud.

Finalmente, este tipo de investigación establece diversos momentos, que hacen este proceso más enriquecedor al considerarse como una experiencia investigativa en el ejercicio de la enseñanza de la cinemática. Por lo tanto, las fases de la investigación fueron:



CAPITULO 2. FORMALIZACIÓN: UNA DISCUSIÓN SOBRE LA RELACIÓN FÍSICA – MATEMÁTICAS

En este capítulo se abordará el proceso de formalización desde la percepción que se le otorga a los fenómenos físicos referentes en la cinemática con referencia a sus magnitudes en el caso de la velocidad instantánea y el trabajo de Galileo. Posteriormente hacer una reflexión sobre la relación física-matemáticas en la enseñanza de la física.

1. DE LA FORMALIZACIÓN EN LOS FENÓMENOS FÍSICOS Y LAS MATEMATICAS

Cuando se habla de formalización en los fenómenos físicos, comúnmente los estudiantes lo relacionan directamente con la noción de una serie de pasos matemáticos que se deben ejecutar en el proceso de resolución de los ejercicios propuestos en los libros de texto. También es muy frecuente que se entienda la formalización como un conjunto de expresiones escritas en algoritmos que dan cuenta de su comprensión y al parecer se tiene la percepción que entre más rigurosa sea el ejercicio matemático, más formal será su explicación; es decir, adquiriendo mayor sustento en su demostración. Sin embargo, esto pone en consideración que su proceso no solo se debe a una abstracción de matematizar un fenómeno físico, sino en generar elementos que contribuyan a su análisis, así según:

La formalización no se refiere únicamente al uso y adaptación de las formas aritméticas o geométricas para organizar la experiencia; mirar por clases, modo propio de nuestro lenguaje común, es el ejercicio de la imposición de una forma predeterminada a la diversidad de objetos de la experiencia. (Ayala, Garzón, & Malagón , 2008, pág. 21)

Es entonces pertinente destacar que la formalización hace parte del proceso de construcción de un lenguaje matemático pero que a su vez se prevalece bajo concepciones concernientes a la experiencia del investigador. Por lo tanto, conocer cómo se consideró la formalización de los fenómenos físicos requiere entenderse con una mejor interpretación de lo que se concibe desde las teorías físicas.

Es por esto oportuno reflexionar sobre lo que verdaderamente implicó el desarrollo de la formalización de los fenómenos físicos en la historia y así considerar como se constituyeron estas teorías, adquiriendo mayor significado en el eminente proceso que desarrollaron el campo de la cinemática y lo que representó la construcción de sus magnitudes. Es entonces que podemos distinguir en la formalización referente al campo de la física vistos a través de la historia, un tipo de formalización que se refiere a: *la aplicación de las matemáticas en el análisis de los fenómenos físicos*, donde se describe, según Ayala, Garzón & Malagón:

Este tipo de formalización corresponde a procesos cognitivos en los que se reconoce que formalizar no se limita a sobreponer una estructura formal o una estructura matemática a un fenómeno para analizarlo y comprenderlo, sino que se requiere ante todo construir la posibilidad misma de formalizarlo y matematizarlo, es decir, de construir las magnitudes, relaciones, etc. Con la que damos cuenta del fenómeno. (Ayala, Garzón, & Malagón, 2008, pág. 23)

Es en este tipo de formalización que ubicamos el trabajo de Galileo, como la manera que empleó la geometrización del movimiento para dar cuenta de la caída de los cuerpos y tener en esta estructura matemática, la herramienta necesaria para demostrar y convencer a la física medieval de que la formulación de sus principios eran base de su experiencia y que a su vez podían cumplirse en el mundo físico de la naturaleza.

Por consiguiente, la formalización en el estudio del movimiento realizada por Galileo hace referente a la aplicación de las matemáticas en su relación con el análisis de sus fenómenos físicos, donde se reconoce una estructura formal, así afirma: Ayala, Garzón, & Malagón, (2007), “prevalciendo el razonamiento semántico que implica el entendimiento a razón de sus contextos culturales y del conocimiento cultural de sus científicos”. (pág. 45)

La formalización, específicamente en el campo de la física, se tiene en cuenta la manera estructurada en la que se conceptualiza un fenómeno natural, por lo que nos referiremos como afirma: Malagón, Sandoval, & Ayala (2012) “que hablar del fenómeno es construir un lenguaje para mostrar el proceso de diferenciación de una cualidad o conjunto de cualidades que expresen el estudio u organización del mismo”. (pág. 131)

Ese lenguaje de formalización utilizado en Galileo es el que resalta por la manera como desarrolla sus teorías con ayuda de modelos desde su experiencia, así:

Galileo no desarrolla cuantitativamente sus teorías con ayuda de mediciones concretas, sino que se limita a construir análisis de modelos abstractos y generales, lo cual explica el uso continuo de experimentos imaginarios (que podrían haberse realizado, aunque no se considera necesario) orientados a mostrar pedagógicamente y no a demostrar experimentalmente, y de experimentos mentales orientados a mostrar que los viejos modelos del movimiento son incompatibles, con otras piezas de experiencia, por lo que necesitan ser reformados. (Solis & Sabada, 1974, pág. 19)

Es entonces que reflexionar sobre el proceso de formalización que llevo a cabo Galileo, pone como cuestión, la idea que, en los experimentos mentales, se concibe una manera de sustentar la experimentación de los fenómenos físicos, sin perder la caracterización real de sus fundamentos y que constituyen una comprensión basados en su propio razonamiento.

1.1. Construcción de magnitudes

Se ha mencionado la manera como Galileo ejecuta varios de sus experimentos a través de una construcción mental dando significancia a su manera de formalizar el movimiento. Además, según: Vargas Rojas (2017) “para Galileo el carácter experiencial es muy importante. Ya que solo si la experiencia concuerda, se puede establecer principios matemáticos evidentes e inapelables” (pág. 46). Sin embargo, es posible evidenciar de manera implícita la necesidad de tener en cuenta como acude a la construcción de parámetros que sirvan como medio de comparación entre una cualidad y otra.

Es posible considerar entonces que este tipo de formalización sobre la aplicación de las matemáticas en el análisis de los fenómenos físicos, es fundamental la importancia de identificar cualidades del fenómeno físico que nos permitan obtener una escala de medida, para lo cual se necesitará organización del campo fenomenológico estudiado que facilite el proceso en la construcción de magnitudes, según: Malagón, Sandoval, & Ayala (2012) “Esto implica, que la construcción de magnitudes y del campo fenomenológico es más bien el punto de llegada y no el punto de partida” (p.133). Por tanto, este proceso determino para la ciencia de la Edad Media una nueva manera de representar el movimiento de caída de los cuerpos, por lo tanto, afirma:

imaginemos ahora la dificultad de la física medieval para representar el principio de movimiento naturalmente acelerado de la caída de los cuerpos en donde, Galileo representa mediante segmentos magnitudes no geométricas como lo son la velocidad instantánea y el tiempo, y opera sobre ellos haciendo uso de la teoría de las proporciones. (Ayala, Garzón, & Malagón, 2007, pág. 46)

esto para dar cuenta de la cuantificación del desplazamiento que adquiere el cuerpo en cada momento.

Para comprender cómo se da esta construcción de magnitudes en el trabajo de Galileo, hacemos remembranza a la forma como se concebía la noción de cualidad de los cuerpos, que es muy diferente a la idea que tenemos ahora de ella. Por lo que la cualidad para los filósofos de la Edad Media era considerada como parte fundamental en la descripción de intensidad que sufrían los cuerpos y al cuantificar esa cualidad, se destacaba la representación geométrica (euclidiana) para expresar su cantidad.

Entre las formas de representación se usaba la longitud de una línea para describir si una cualidad estaba presente en mayor o menor grado, y se hacía referencia a todo el rango de intensidades de una cualidad como la latitud de formas que se podían adoptar. La figura 1 muestra un ejemplo sencillo: si el segmento AB representa la intensidad de una cualidad, el segmento AC representa el doble de esa intensidad. Formando diferentes segmentos sobre la línea podían describirse diferentes proporciones entre intensidades. (Nieto & Sánchez, 2007, pág. 231)

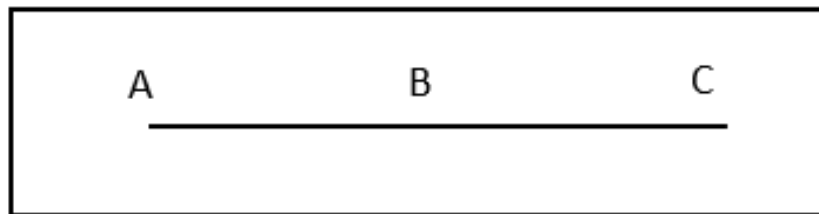


Figura 1. Uso de una línea para representar la intensidad de una cualidad. Fuente: Creer y poder hoy. (Nieto & Sánchez, 2007, pág. 231)

Se podría considerar una representación sencilla, sin embargo, las implicaciones que se dieron desde este tipo de geometría fueron las que derivaron magnitudes como la velocidad instantánea. Por lo tanto, más adelante veremos cómo repercute la construcción de estas magnitudes en lo que referenciamos de la cinemática que se nos enseña en la actualidad y que sirvieron para el establecimiento de parámetros que nos permita diferenciar una de la otra.

1.2 Sobre la velocidad instantánea

Hemos ido reconociendo el trabajo de formalización hecho por Galileo, la manera como describe el movimiento desde la geometrización y su experimentación (esto se detallará en el siguiente capítulo). Esa geometrización nos refiere a la forma como acude a magnitudes como la velocidad para fundamentar el principio que expone a cerca del movimiento de caída de cualquier cuerpo, sin importar cual sea su peso una relación directa entre estas dos cualidades. Es así como utiliza las magnitudes como una manera de representar los grados de velocidad por medio de segmentos de línea.

Esos grados de velocidad es lo que calculamos en la actualidad bajo los fundamentos del cálculo diferencial, donde encontramos en la relación posición y tiempo la manera de percibir la velocidad instantánea, que puede considerarse, según afirma: Romero & Rodríguez (2002) : “su cuantificación se hace mediante la identificación de un fenómeno prototipo -la caída de los cuerpos, por ejemplo- y el uso adecuado de representaciones para dar cuenta de las variables y relaciones entre variables identificadas en dicho fenómeno”. (pág. 66)

Por consiguiente, la relación de esas variables, como es el caso de la velocidad instantánea se hace comúnmente en la representación sobre el plano, en donde para los alumnos constituye una forma de interpretar sus características , así se afirma:

La representación cartesiana se considera particularmente importante para desarrollar en los estudiantes los procesos de matematización de los fenómenos físicos, por cuanto [...] facilita la identificación de las relaciones de orden, características de las magnitudes físicas, por medio de la comparación entre los segmentos que representan los diversos valores que puede tomar una variable. (Romero & Rodríguez, 2002, pág. 64)

Es así que, para dar cuenta de las variables como la velocidad, es preciso reconocer en la representación cartesiana, una de las maneras de ubicar magnitudes que no solo signifiquen una asignación de ecuaciones, si no que pueda establecer una relación con el razonamiento propio del estudiante. Para visualizar ese razonamiento sobre el movimiento es posible considerarlo como lo menciona Mockus (1988) sobre la representación cartesiana:

En el “visualizar” cartesiano, aquello de lo que hablamos es necesariamente extensionalizado, transformado en magnitudes (hoy preferimos decir variables) cuyas relaciones pueden ser representadas gráficamente y expresadas sintéticamente mediante signos algebraicos. Al acudir a este tipo de “visualización” podemos pretender que seguimos hablando de lo que veníamos hablando y al mismo tiempo aspirar a hablar con la certeza propia de lo cuantitativo y de lo sometible al cálculo. Citado en (Ayala, Garzón, & Malagón, 2008, pág. 47)

Por consiguiente, acudimos a la representación cartesiana como el medio más conocido para dar cuenta de cómo se observa el comportamiento de los cuerpos en movimiento. Así hallar un lenguaje que permita mostrar, en caso de la velocidad instantánea un análisis que nos lleve a ubicar no solo las funciones de la posición y velocidad en función del tiempo, sino también considerar como se puede describir el fenómeno físico. Sin embargo, es prudente considerar que este análisis de las variables puede presentar dificultades, como lo señala:

Es importante advertir las posibles faltas de correspondencia entre una explicación física que involucra una variable y su representación gráfica, por cuanto ello ilustra las dificultades de tipo semántico en el uso de una representación espacial, como es la longitud de un segmento, para representar una variable no espacial, como es la velocidad. (Romero & Rodríguez, 2002, pág. 65)

Por lo tanto, es importante centrarse en estas dificultades, para contemplar los posibles aspectos a mejorar que, como maestros, se presentarán en la enseñanza de la cinemática y así no pasar por alto consideraciones que resultan de gran valor para generar criterios propios en la formación pedagógica.

En conclusión, se establece un esquema (ver figura 2) donde se sintetiza la manera como se mencionaron los diferentes ítems a tener en cuenta en el trabajo de Galileo.

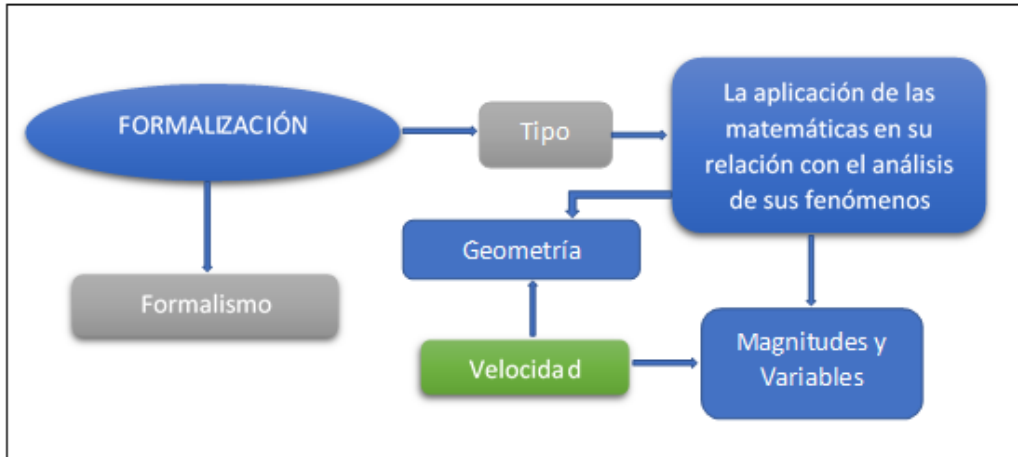


Figura 2. Esquema del proceso de formalización. Fuente: Elaboración propia.

En este esquema, se parte como eje principal; la *formalización* como un proceso donde se deriva el término *formal*, que establece la noción de una estructura determinada que da cuenta del análisis del fenómeno físico. Caracterizando en el trabajo de Galileo un tipo de formalización que acude a *la aplicación de las matemáticas en su relación con el análisis de sus fenómenos*, donde se corresponde una construcción de *magnitudes* como la *velocidad*, que le permiten hacer uso de la *geometría* y su operación para transformar el estudio del movimiento.

2. SOBRE LA RELACIÓN FÍSICA – MATEMÁTICA

Obtuvimos de la formalización la organización de un proceso que se da en el estudio de los fenómenos naturales, por ejemplo, en la descripción del movimiento de los cuerpos que deriva en los conceptos de la cinemática. Por lo tanto, es pertinente pensar que tal formalización necesita de herramientas para su presentación y es cuando pensamos en el estudio de la física y el establecimiento de las matemáticas. Para dar una ampliación más detallada del tema nos remontaremos a la concepción más antigua, formulada por los filósofos griegos, así;

La concepción platónica del conocimiento permeará la obra de astrónomos como Eudoxo de Cnido en la antigua Grecia, pero su influencia también llega hasta la ciencia y el arte del Renacimiento. Entre muchos otros, Kepler y Galileo compartirán con la tradición platónica la idea de la geometría y las matemáticas como un lenguaje divino en el que está escrito el orden de la creación. (Nieto & Sánchez, 2007, pág. 217)

De esta manera Galileo tiene un pensamiento hacia la corriente Platónica por lo que era reconocido en la época Medieval. Además, se hizo famosa una de sus frases más conocidas al decir:



Galileo Galilei (1564-1642) (Susterman. Cliché Roger Viollet.)

“Para entender el universo, debes entender el lenguaje en el que está escrito, el lenguaje de las matemáticas”.

Figura 3. Galileo Galilei (1564-1642). Fuente: (Thuiller, 1992)

Es por lo que la asociación que hace Galileo a un instrumento como las matemáticas concibe en él una de las mejores maneras para dar credibilidad a sus experimentos.

Es entonces que desde la Edad Media la influencia de las matemáticas fue de gran importancia para la explicación de la ciencia. Sin embargo ¿cómo entender la relación física-matemática? Levy-Leblond (1988) plantea que la matemática es lenguaje de la naturaleza o la matemática es el lenguaje de quién estudia la naturaleza:

Esta concepción de las matemáticas como lenguaje de la física puede, no obstante, interpretarse de varias maneras, según que dicho lenguaje se piense como el de la naturaleza, y que el individuo que la estudia deberá esforzarse por asimilar; o bien que se le conciba, a la inversa, como el lenguaje del individuo, al cual habrán de traducirse los hechos de la naturaleza para que resulten comprensibles. La primera posición parece ser la de Galileo. (Levy, 1988)

Para Galileo, al igual que otros contemporáneos de su época, daban por sentada la eminente relación de las matemáticas como la mejor manera de dar cuenta de las características de la naturaleza. Sin embargo, razonar esta concepción actualmente parece no haber sufrido gran variación, así se puede seguir entreviendo entre las dificultades de la enseñanza de la física, según Romero y Rodríguez (2002)

esta concepción puede dividirse en dos enfoques, dependiendo de la forma como se asume el lenguaje en su relación con el pensamiento. Uno, a través del cual las matemáticas son asumidas como un medio de expresión y de cálculo, que conduce a concretar la relación entre la física y las matemáticas a través de una relación de aplicación: las matemáticas intervienen en la física como un instrumento meramente técnico. Y otro, en donde se considera que las matemáticas tienen con la física una relación de constitución: sin las matemáticas no sólo es imposible especificar y expresar los conceptos y procesos del pensamiento físico, sino incluso generarlos. (Romero & Rodríguez, 2002, pág. 58)

Es entonces pertinente reflexionar sobre la idea de que la física puede generar en ocasiones una independencia de las matemáticas, por lo tanto, se considera que, aunque se constituye una dualidad, también pueden establecer sus principios cada una. Autores como, (Levy, 1988) según: “Resultaría en efecto difícil encontrar un concepto físico que no esté indisolublemente asociado a uno o a varios conceptos matemáticos. ¿Como pensar, por ejemplo, de una manera eficaz el concepto de velocidad sin hacer intervenir el de derivada?”. Esto nos hace reflexionar sobre la idea de cómo enseñar los conceptos físicos con el empleo de las matemáticas sin abrir una brecha con lo físico que deteriore su relación de constitución.

Esta relación estrecha entre la física y las matemáticas encuentra en la historia elementos importantes y necesarios para la comprensión de unión y en ocasiones confrontación que resultan de la manera como se quiera distinguir la matematización del fenómeno físico, así Malagón (1988) contribuyen a la constitución de un marco conceptual apropiado:

matematizar un fenómeno físico no consiste en sobreponer un aparato matemático al fenómeno; se requiere, ante todo, construir la posibilidad misma de matematizarlo, es decir, de construir las magnitudes, relaciones y procedimientos apropiados para representarlo y cuantificarlo. (Malagón J. F., 1988, pág. 114)

Es decir, que la idea de involucrar las matemáticas en el estudio del concepto físico parte de la noción propia de dar cuenta de su cantidad, así demostrar que la velocidad en la caída de los cuerpos se aumentaba continuamente en correspondencia a tiempo transcurrido. Es también fundamental destacar el campo de la experiencia que permitieron a físicos como Galileo obtener una armonía suficiente en la matematización de proporciones de velocidades, tiempo y espacio.

CAPITULO 3. LA VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO DE CAÍDA DESDE EL TRABAJO DE GALILEO GALILEI.

En este capítulo se estudiará el trabajo de Galileo y el significado que le da a una magnitud como la velocidad, ofreciéndole precisión al proceso de medición para el movimiento de caída, esto apoyado en lo que se conocía como la teoría de las proporciones y la geometría euclidiana. Es precisamente la matemática utilizada en la física medieval, la que brinda a los filósofos naturales como Galileo, la gran tarea que se derivó al abordar el tema del *movimiento*, que tenía ya su origen en la ciencia griega.

Por otra parte, es oportuno conocer los trabajos realizados por filósofos y matemáticos antes de Galileo (siglo XVI) que dieron los primeros intentos por medir el movimiento, abriendo la posibilidad de cuantificarlo, muestra de ello algunos de estos predecesores, fueron: Arquímedes, Ioannes Philoponos, Thomas Bradwardine, sin embargo el más destacado es el trabajo realizado por Nicolas de Oresme³ quien, desde el siglo XIV, demostrando los primeros inicios de la representación geométrica para los conceptos de la cinemática, convirtiéndose en uno de los predecesores al trabajo de Galileo.

Otros trabajos lo hacen Jean Buridán en lo que se llamó la escuela de Paris (siglo XIV) y los aportes que realizaron los Calculadores del Merton de College de la Universidad de Oxford⁴.

Estos últimos hicieron explícita la diferencia entre dinámica y cinemática, y desarrollaron un marco conceptual y el vocabulario necesarios para describir el movimiento. Gerard de Bruselas, geómetra del siglo XIII, había definido en su obra El libro sobre el movimiento [...] que la cinemática se acercaba al movimiento de una forma descriptiva, sin indagar sus causas. Fue durante este periodo que surgieron conceptos como velocidad, velocidad instantánea y aceleración. (Nieto & Sánchez, 2007, pág. 231)

Es oportuno entonces anotar, según afirma: (Papp, 1993) “es por lo que se conoce que por más que se quiera atribuir un trabajo científico como independiente de otro siempre resulta apoyado en los trabajos de sus antecesores”.

³ Nicolas de Oresme, también se destaca por ser el predecesor de la Geometría analítica y los dibujos utilizados en sus demostraciones fueron utilizados en Europa hasta el siglo XVII.

⁴ Calculadores del Merton de College de la Universidad de Oxford, un grupo de eruditos ingleses de la jerarquía de Heystebury, Dumbledon y Swinneshead llegaron a tratar variaciones en velocidad, o movimiento local, como si fueran variaciones en la intensidad de una cualidad. (Grant, 1983, pág. 113)

Por lo tanto, la comprensión que tenemos actualmente de la cinemática del movimiento pasó por un proceso de construcción desde la edad media (siglos XIV al XVII) y esto implicó cambios de perspectivas que se dieron desde el orden ideológico hasta la representación matemática.

1. LA FÍSICA PREGALILEANA DEL MOVIMIENTO

Señalar los logros alcanzados en la ciencia griega es mencionar uno de sus aportes más sobresalientes al referirnos al atribuido por Aristóteles, según: Malagón J. F.(1988) “fueron promovidos y profundizados durante la época Helenística, cuando las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio de Pérgamo, rivalizaban en importancia con los aportes igualmente dignos de tener en cuenta de las ciencias médicas y biológicas”. (pág. 7)

Entre esos aportes para la física medieval se encuentra el estudio del movimiento y las ideas de Aristóteles. Sin embargo, la idea de cuantificarlo era una cuestión que se problematizaba en el campo teórico y no existía como tal una ciencia que se centrara en su medición. Para los filósofos naturales dar solución al tema de la medición y por ende a la discusión planteada para contar y precisar un objeto tanto en su cantidad y su cualidad, dio paso a diferentes concepciones, las cuales para la Edad Media era común que se distinguieran por la división que se daba entre los que se encontraban a favor y en contra del pensamiento aristotélico, como lo señala Martínez (2002)

[...] se sitúan los defensores del aristotelismo, para quienes la cualidad y la cantidad pertenecen a ámbitos o categorías excluyentes, lo que hace imposible reducir una a la otra. Cambios en la longitud o en número de objetos serían cambios provocados en la cantidad por la suma o la sustracción de partes homogéneas, fueran estas continuas o de tipo discreto. Sin embargo, un cambio en la sensación de calor que provocaba un objeto era de un orden muy diferente pues considerando que el calor podría existir en diversos grados de intensidad, el cambio de uno a otro grado no se efectuaba mediante el simple hecho de agregar o quitar una parte homogénea de calor. (Martínez, 2002, pág. 217)

Es decir, que para los aristotélicos una cualidad, como el calor, no podría ser descrita con una cantidad, como la longitud de una línea. Para dar ejemplo desde esta perspectiva, pensemos en la velocidad como una cualidad del movimiento, a la que le podremos atribuir una intensidad, es decir, un movimiento rápido o un movimiento lento, o movimiento natural, movimiento violento y reposo. Sin embargo, no era posible asignarles un número con el que se pudiera decir ¿qué tan rápido o lento es el movimiento?

Esta tradición viene desde los griegos: (Martínez, 2002, pág. 217) “[...] basta con recordar la concepción griega de que las cualidades existen en pares opuestos, siendo los más famosos los que caracterizaban a los elementos en términos de las oposiciones”, es decir, si algo estaba húmedo su par opuesto es lo seco y así mismo ocurría con frío-caliente, o reposo-movimiento. Martínez (2002) señala que esto no daba cabida a que existiera alguna medida intermedia o de graduación entre los extremos. Entonces, para el caso del movimiento donde sus cualidades pueden diferenciarse con estar en reposo o estar en movimiento, es decir, que no pertenecían a la misma cualidad. Este fue un planteamiento que representó una dificultad en la tarea que tenían estos filósofos por demostrar que existía una graduación o cambios entre estas cualidades opuestas. Trabajo que hará parte de la representación que utiliza Galileo para la descripción de sus teoremas.

Por otro lado, estaban los que presentaban oposición a los argumentos de Aristóteles quienes: “[...] sostenían que, si el calor o la humedad era sustraída o agregada a otro cuerpo, el último se tornaría más caliente o húmedo según sus cantidades, que podrían ser expresadas numéricamente con base en alguna escala que hubiera sido propuesta [...]” (Martínez, 2002, pág. 217). Este razonamiento implica la posibilidad de asociar cualidades y cantidades, ahora parece natural, pero esto no fue sencillo de explicar en la Edad Media, uno de sus principales obstáculos fue sustituir lo que ya tradicionalmente estaba establecido y que era enseñado como teorías únicas: las ideas aristotélicas. Desde esta posición, para el caso del movimiento natural la noción de describir su cualidad se expresaría por el grado de velocidad que adquirieran los cuerpos al acelerarse.

Para mencionar alguno de los precursores que dio pie a la noción de cuantificación de una cualidad, aparece en el siglo XIV, Buridán⁵ al intentar darle al concepto de inercia una formulación a través del concepto de *ímpetus* que se refiere a una medida a la cantidad de movimiento. De aquí que se diera la importancia al papel que jugarían las matemáticas para determinar diferentes características del movimiento.

1.1 El cambio en el movimiento

Para la Edad media la descripción de potencia de un objeto se debía a la acción en que se transforma el estado de un objeto, es decir, como puede comportarse en su estado original y sus permutaciones más adelante. Concepción del pensamiento de Aristóteles el cual afirma:

El concepto de cambio se puede describir precisamente como la actualización de lo potencial. En otras palabras, algo está cambiando si tiene la capacidad de cambiar (esto es, si en potencia puede ser algo distinto) y si de hecho se encuentra en tal proceso de actualización de sus potencias. De esta manera, no sólo el cambio es posible, sino también el conocimiento de la naturaleza que ya no es mera apariencia sino realidad. (Nieto & Sánchez, 2007, pág. 219)

El estudio del *movimiento*, para los filósofos de la Edad Media implicaba reconocerlo en la *naturaleza* y en sus diferentes *cambios*, esta era la mirada aristotélica del mundo (Martínez, 2002, pág. 222). Por lo cual hablar de la realidad del movimiento era considerar, las cuatro categorías, que según (Martínez, 2002, pág. 222) fueron desarrolladas después del 1277 son:

- Movimiento local: movimiento respecto al lugar, es la noción actual de desplazamiento de un objeto en el espacio.
- Alteración: movimiento respecto a cualidad, como cuando un objeto que se enfría o se calienta.
- Aumento o disminución: movimiento respecto cantidad, como cuando un cuerpo crece o decrece en tamaño.

⁵ Jean Buridán, filósofo escolástico francés y uno de los inspiradores del escepticismo religioso en Europa. Destacó en los estudios de lógica y en los comentarios a Aristóteles. Fue defensor del principio de causalidad. (Biblioteca virtual de Polígrafos, Madrid)

- Generación o corrupción de un objeto: movimiento en la categoría de sustancia.

El caso del estudio de la cuantificación del movimiento local por los filósofos naturales de principios del siglo XIV implicó dar cuenta de la *velocidad* a través de las comparaciones de movimientos y acudiendo a las proporciones, herramienta matemática disponible en esa época.

1.2 Movimientos y proporciones

Es de precisar que desde los siglos V y VII, los pensadores de la Edad Media tenían conocimiento de la teoría de las proporciones, gracias a los escritos de Euclides y los cuales, al ser traducidos al latín en el siglo XII, brindaron un uso más claro de las matemáticas para la descripción de lo que se observaba. “Una de las herramientas matemáticas utilizadas para la enseñanza en el medievo, estaba fundamentada en la aritmética explicada por Boecio, quien establece diez tipos de proporcionalidad, pero de las cuales solo se destacaron tres: aritmética, geométrica y armónica”. (Martínez, 2002, pág. 224):

- La aritmética, que se refería a la igualdad de las diferencias entre dos pares de cantidades de la misma clase, $A-B=C-D$. Por ejemplo: proporción entre velocidades: $(\text{Velocidad 2} - \text{Velocidad 1}) = (\text{Velocidad 4} - \text{Velocidad 3})$
- La geométrica, que se refería a la igualdad de las razones de dos pares de cantidades, $(A/B) = (C/D)$, donde se podrían relacionar dos cantidades de distinta clase siempre. Por ejemplo, proporción entre velocidades y tiempos: $\text{Velocidad 2} / \text{Velocidad 1} = \text{Tiempo 2} / \text{Tiempo 1}$
- La armónica, que se refiere a la igualdad entre dos razones con cantidades de la misma clase, $A/B = ((A-C) / (C-B))$. Por ejemplo: $\text{Velocidad 2} / \text{Velocidad 1} = ((\text{Velocidad 2} - \text{Velocidad 3}) / (\text{Velocidad 3} - \text{Velocidad 1}))$

Esta idea de proporciones nos deja ver como para el caso de la aritmética y la armónica, no era posible relacionar dos cantidades de distinta clase. Lo que no ocurría en el caso de la geométrica, donde se podrían relacionar dos cantidades de distinta clase siempre y cuando se conserve la igualdad. Es por lo que, para el caso de la cuantificación del movimiento, los filósofos naturales del siglo XIV y también Galileo, acuden a la proporcionalidad geométrica,

de tal manera que, aunque relacionaban cantidades de diferente clase, como el espacio y el tiempo, podían establecer proporciones.

Es de resaltar que esto no implicaba que se usara una misma representación para estas cantidades, como se usa hoy acudiendo al plano cartesiano donde en un eje se ubica el espacio y en el otro el tiempo. Ellos separaban la representación de espacio y el tiempo en líneas diferentes y las cuales describía como dos magnitudes clases diferentes.

2. LA FÍSICA DE GALILEO: MOVIMIENTOS, VELOCIDAD Y GEOMETRIZACIÓN

Para los filósofos de la Edad media, era razonable pensar que el movimiento de caída de un cuerpo pesado fuese el producto de su movimiento natural correspondiendo a la sencillez que caracteriza la naturaleza por sí misma. Así concordaba con lo propuesto ya por Aristóteles, el cual atribuía el efecto que sufren los cuerpos al descender a su peso por lo que consideraba que en cuanto más pesado, mayor sería su velocidad. Pero la idea de que estas razones no fueran tan ciertas, fueron las que condujeron a otros pensadores de la época a replantear dichas ideas aristotélicas. Existieron, por lo tanto, otros filósofos antes de Galileo que se lanzaron a ampliar tal razonamiento, considerando que los cuerpos que poseían diferentes pesos caían en velocidades iguales. Posteriormente pasaron varios años para que finalmente Galileo, retomara estas ideas y aunque ya se habían producido formalizaciones como las hechas por Bradwardine, todavía hacían falta herramientas que le permitiera describir con mayor sustento sus cualidades.

Para tal fin Galileo centra su interés en el estudio en la cinemática, la cual escribe en su última obra

entre 1634 y 1637, en esos oscuros días de cautiverio, Galileo Galilei produjo lo que muchos consideran como su más importante trabajo un libro titulado; *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*. En él, utilizando su familiar técnica de personajes que discuten los problemas del tema, describió dos importantes, aunque muy distintas, áreas de la ciencia. (White, 1993, págs. 55-57)

Uno de estos temas fue todo el referente al estudio del movimiento de caída de los cuerpos que es tratado en la jornada tres de este libro y que analizaremos en este apartado con el objetivo

de exponer cómo se fue formalizando la noción de velocidad, brindándonos una perspectiva de cómo en la velocidad instantánea se logra dar claridad a ciertos problemas que se presentan para la representación euclidiana del movimiento y cómo el establecimiento de la teoría de proporciones da cuenta de cómo se desplazan los objetos.

2.1 Sobre el movimiento uniforme

En este apartado Galileo describe el movimiento uniforme, en el *principio* que da lugar a la acción que tienen los cuerpos cuando estos se desplazaban de manera uniforme y con velocidad constante, definiéndolo de la siguiente manera:

Por movimiento igual o uniforme entiendo aquel en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, *cualesquiera* que estos sean, son iguales entre sí (Galilei, 1974, pág. 266).

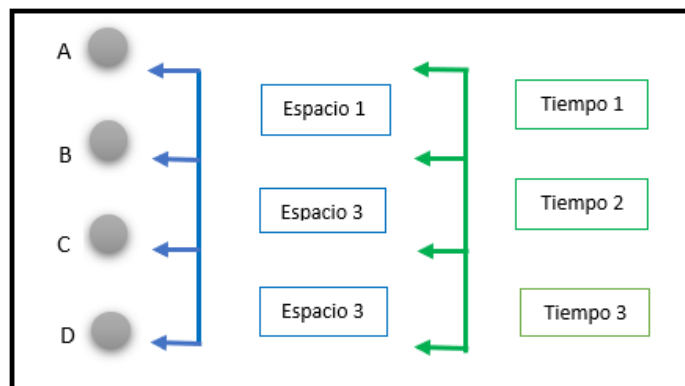


Figura 4. Representación definición movimiento uniforme. Fuente: Elaboración propia

De la figura 4, interpretamos el movimiento uniforme, con un cuerpo que se mueve entre A y D en este caso la esferas grises (un mismo objeto) y que a razón de la definición de Galileo recorre los mismos espacios señalados en cada momento de su movimiento (descritos por las líneas azules) y a su vez se recorre estos espacios en los mismos intervalos de tiempo (señalado con las líneas verdes). Sin embargo, hacemos aquí una connotación que se le brinda al término *cualesquiera* que advierte Galileo, después de la definición del movimiento uniforme. Azcarate (1984) se señala la importancia del término «cua-lesquiera»

ya que «puede suceder que un móvil recorra espacios iguales en determinados tiempos iguales mientras que distancias recorridas en fracciones de tiempo más pequeñas pueden no ser iguales, aunque lo sean dichos intervalos más pequeños».

Vemos aquí la preocupación de Galileo por el rigor: en realidad necesita la idea de velocidad como límite para un tiempo tan pequeño como se quiera, es decir que roza el concepto de velocidad como derivada. (Azcárate, 1984, pág. 204)

Es así como Galileo va organizando su realidad sobre el movimiento, acude a la relación de espacios recorrido e intervalos de tiempos. Si bien aquí no explicita el término velocidad, es lo que hoy asociaríamos para el caso del movimiento uniforme. Y como señala Azcárate (1984) es una organización cercana a la mirada de velocidad como límite.

Galileo continua en los siguientes teoremas mostrando cómo organiza su realidad sobre un tipo de movimiento particular, el movimiento uniforme:

En otro de los teoremas, Galileo describe el movimiento a través de segmentos de recta horizontales donde dibuja subdivisiones sobre esta que dan cuenta de las proporciones de las magnitudes empleadas, utilizadas como herramientas fundamentales para describir el movimiento uniforme de un cuerpo, así:

Teorema I, Proposición I: Si un móvil dotado de movimiento uniforme recorre dos espacios a la misma velocidad, los tiempos invertidos tendrán entre si la misma proporción que los espacios recorridos. (Galilei, 1974, pág. 268)

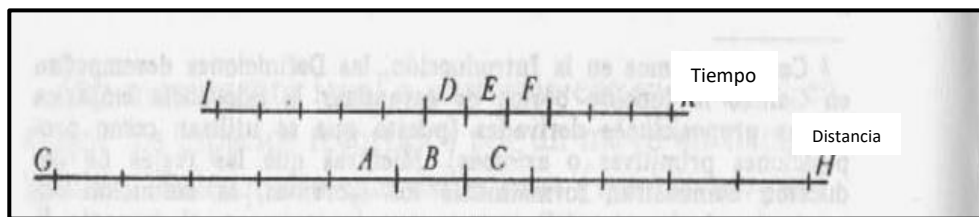


Figura 5. Movimiento Uniforme. Teorema I, Proposición I. Fuente:

Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias (Galilei, 1974, pág.268)

Este es una de las interpretaciones (Figura 5) donde al considerar un móvil que se desplaza en línea recta, recorre ciertas distancias que están comprendidas entre AB y BC. Para determinar el tiempo que gastó en recorrer las distancias mencionadas, se observa que los tiempos DE y EF tienen la misma proporción, lo cual nos indica que las distancia AB es a la distancia BC como el tiempo DE es al tiempo EF. En el caso de que se quisieran prolongar los espacios hasta G, H,

también los tiempos a I, K, esta relación no cambiará, por lo que se conservaran directamente proporcionales. Con este teorema la velocidad se expresa en relación directa con la proporción entre espacios y tiempos recorridos por un mismo móvil con movimiento uniforme.

Otro caso que nos muestra el movimiento uniforme es cuando ese mismo móvil puede recorrer la misma distancia con diferentes velocidades, donde:

Teorema III, proposición III: Si la misma distancia es recorrida con velocidades desiguales, entonces los intervalos de tiempo de los móviles son inversamente proporcionales a sus velocidades. (Galilei, 1974, pág. 270)

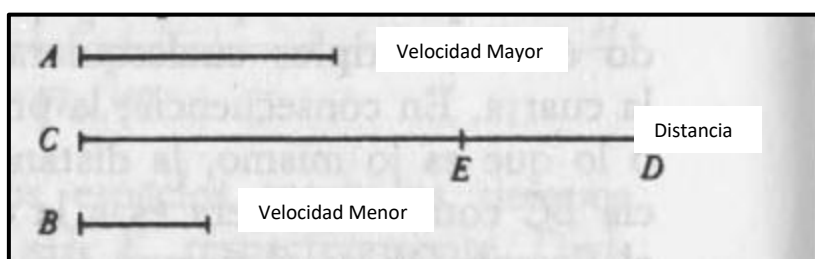


Figura 6. Movimiento Uniforme. Teorema III, Proposición III. Fuente: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias (Galilei, 1974, pág.270)

Aquí (figura 6) se debe tener en cuenta que ahora las líneas que representan la velocidad no tienen la misma longitud, por lo que la línea A representa la velocidad mayor y la línea B es la velocidad menor. Se establecerá que el espacio representado por la línea CD es la distancia que recorre un cuerpo en movimiento con cualquiera de las dos velocidades. Galileo organiza con este teorema la relación que guarda la velocidad con el espacio.

Teorema IV, Proposición IV: Si dos cuerpos se mueven con una velocidad uniforme, pero a diferente velocidad, las distancias por ellos recorridas en tiempos desiguales están, entre si, en una proporción compuesta por las proporciones entre las velocidades y las proporciones entre los tiempos.

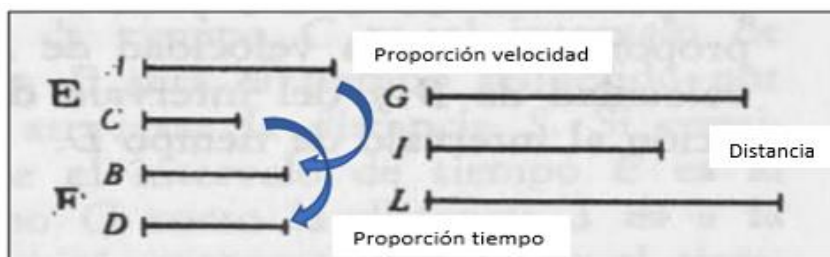


Figura 7. Movimiento Uniforme. Teorema IV, Proposición IV. Fuente: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias (Galilei, 1974, pág.271)

En esta parte (figura 7), tenemos una velocidad uniforme donde se mueven tanto el cuerpo E, como el cuerpo F. La proporción de velocidad del cuerpo E, se representa en el segmento de línea A, así mismo la proporción del tiempo para el cuerpo F, se refiere al segmento de línea D.

Para encontrar la relación deducida entre las proporciones de velocidades de A y B como de las proporciones de tiempo C y D, se señalan con las flechas azules su relación que deriva del producto entre de las distancias recorridas representadas en cada segmento de G, I y L. En este teorema Galileo establece la relación compuesta entre la velocidad y el tiempo como resultado del espacio.

De los tres teoremas anteriores se puede inferir como Galileo comienza a interesarse por relacionar magnitudes de manera directa, inversa y proporciones compuesta haciendo referencia a las representaciones de magnitudes como velocidad, tiempo y espacio. Por lo tanto, aquí se puede vislumbrar el ejercicio de formalización que comienza a hacer Galileo, en la organización que les da a sus experiencias a partir de la noción del movimiento natural y así emprender conexiones con su matematización. En esta organización el uso de la proporción entre segmentos de recta es necesario, de otra manera no se podrían deducir las proporciones.

Después de haber escrito sobre el movimiento uniforme, es importante ahora considerar con más detalle el movimiento naturalmente acelerado donde apoya su tesis en los cuerpos pesados que caen libremente, lo que se conoce ahora como caída libre.

2.2 Sobre el movimiento naturalmente acelerado

Era de conocimiento general el establecimiento del movimiento uniforme para el medioevo, el cual daba cuenta de los espacios y tiempos iguales recorridos por el móvil. Por lo tanto, Galileo centra sus ideas en incluir a esta descripción una magnitud como lo es *la velocidad*. Es el cambio en esta magnitud lo que le permitirá dar cuenta del movimiento naturalmente acelerado, en tanto afirma:

Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco, cada vez más velocidad, **¿Por**

qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera. Esto lo entenderemos fácilmente si consideramos la relación tan estrecha que se da entre tiempo y movimiento: del mismo modo de que la igualdad y la uniformidad del movimiento se define y se concibe sobre la base de la igualdad de los tiempos y de los espacios (en efecto llamamos movimiento uniforme al movimiento que en tiempos iguales recorre espacios iguales), así también, mediante una subdivisión uniforme del tiempo, podemos imaginarnos que los aumentos de velocidad tengan lugar con [la misma] simplicidad. (Galilei,1974, págs.276-277)

Para dar cuenta de este cambio y con ello el carácter de la intensidad del recorrido por el móvil, acude al tiempo como magnitud para establecer cómo cambia la velocidad. Asiste a suponer cómo es la velocidad para fracciones o subdivisiones iguales de tiempo, así:

[...]de modo que si el móvil continuara su movimiento según **el grado de intensidad** (momento) de **velocidad** adquirido en la primera fracción de tiempo y prosiguiera uniformemente con tal grado, este movimiento seria dos veces más lento que el que obtendría (el móvil) con el grado de velocidad adquirido en dos fracciones de tiempo. (Galilei, 1976, pag.277)

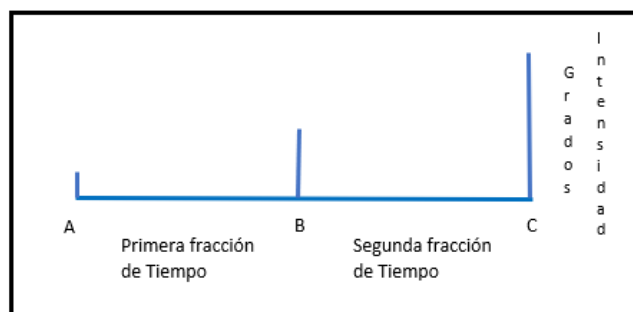


Figura 8. Grados de intensidad de velocidad. Fuente: Elaboración propia.

De la figura 8, se observa en las líneas azules verticales una representación de los grados de intensidad de la velocidad. , Asimismo se observa que en cada punto A, B y C (instantes de tiempo) estas líneas tienen diferente longitud, de tal manera que se va incrementando conforme avanza la primera y segunda fracción de tiempo. De esta manera es admitida la definición para

el movimiento naturalmente acelerado el incremento de la intensidad de la velocidad que da cuenta de la rapidez del móvil con respecto al incrementos del tiempo, guardando una relación directamente proporcional. Por lo anterior, se confirmaba que era admitida la definición que señalaba que para el movimiento naturalmente acelerado incremento de la intensidad de la velocidad con respecto al incremento del tiempo, guardaba una relación directamente proporcional.

Por otro lado, en el movimiento naturalmente acelerado, para describir qué tan rápido o lento caían los cuerpos, se empezaba a deslumbrar ciertas dificultades que se centraban en explicar cómo pensarse en medir el movimiento continuo de un cuerpo. Es decir, interpretar la continuidad del movimiento con una magnitud como la velocidad, con sus cambios. Un móvil que, partiendo del reposo, cae describiendo un movimiento continuo hasta el momento en el que éste es interrumpido, por ejemplo: por el suelo. Entonces la velocidad dará cuenta de ese paso del reposo a un movimiento determinado justo un instante de tiempo antes de llegar al suelo con su velocidad final. De aquí que Galileo reflexione sobre este tema, a través de sus interlocutores: Sagredo, Simplicio y Salviati donde trata de dar claridad a esta objeción, por lo que es importante resaltar algunos argumentos discutidos en el siguiente diálogo;

Sagredo: Cuando me imagino un grave que cae desde **el reposo, o sea, de la privación de toda velocidad**, y comienza a moverse acelerándose [velocitando]según la proporción en que aumente el tiempo desde el primer instante del movimiento;[...]al ser **el tiempo subdividible al infinito**, se sigue que, en cuanto la velocidad antecedente va disminuyendo siempre por tal razón, **no habrá grado de velocidad tan pequeño o, dicho de otra manera, grado de lentitud [tardita] tan grande** en lo que no se encuentre el mismo móvil después de que parta de la lentitud infinita, esto es, del reposo; [...] podemos concluir, entonces, **que los instantes de tiempo que se acercan cada vez más a aquel primero por el cual pasa del reposo al movimiento, estaría en una situación de lentitud tal que no conseguiría atravesar** (si continuase moviéndose con una lentitud tan acusada) una milla en una hora, ni en un día, ni en un año, ni en mil; más aún, **no avanzaría ni siquiera un palmo por mucho tiempo que dejemos discurrir**. Parece que la imaginación se acomoda a este fenómeno con dificultad, mientras que **los sentidos nos muestran**

que un grave, cuando cae, pasa inmediatamente a tener una velocidad notable.

(Galilei, 1974, pág.279)

De esta reflexión, se resaltan varias ideas que nos brindan la oportunidad de intuir la velocidad instantánea. La primera de enunciar es la noción de pensar cómo un cuerpo se desplaza en distintos momentos que dan cuenta de cada instante de su caída representado en el fraccionamiento pequeñísimo del tiempo. En la segunda hace referencia a que la velocidad no se puede considerar constante en algún intervalo de tiempo de lo contrario el cuerpo nunca caería, es decir, que complementa la afirmación anterior al darle apreciación a lo que ocurre con la velocidad en cada instante de tiempo.

De la consideración hecha por Salviati, cuando expresa con un ejemplo: si una piedra que cae del reposo por efecto de que es más pesada que el aire y teniendo en cuenta que en principio lo realiza con un movimiento más lento que el de su final, ya no estaría actuando de manera uniforme si no que estaría acelerándose continuamente. Permitiéndole imaginarse el caso hipotético de que si esa misma piedra pudiera aumentar y disminuir sus grados de velocidad esto sería partiendo de la idea que al moverse de manera descendente atravesaría por todos los grados de lentitud que después volvería a recorrer si pudiera volver a su posición de reposo, es decir de manera ascendente, concluyéndolo de la siguiente manera;

Salviati: **Dado que la velocidad puede aumentar y disminuir sin límite, [...].** No pienso que no estuviérais dispuestos a concederme que la adquisición de los grados de velocidad de la piedra que cae desde su estado de reposo pueda llevarse a cabo según el mismo orden que la disminución y pérdida de los mismos grados, si la piedra, impelida por alguna fuerza [virtú], fuese devuelta a la misma altura, si esto es posible, **no veo por qué se pueda poner en duda que al disminuir la velocidad de la piedra ascendente, al ir consumiendo su velocidad, haya de pasar por todos los grados de lentitud, antes de llegar al estado de reposo.** (Galilei, 1974, pág.281)

Es un argumento que analiza cómo podría pensarse no solo en la caída sino en el comportamiento de la velocidad si esta fuera en dirección contraria, así lo relata;

Salviati: Ocurriría esto señor Simplicio, si el móvil permaneciera durante cierto tiempo en cada grado de velocidad; lo que ocurre simplemente es que pasa sin emplear más de un instante. Y puesto que, **en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que**

sea, hay infinitos instantes, estos serán siempre suficientes para corresponder a **los infinitos grados** con los que puede ir disminuyendo la velocidad. (Galilei, 1974, págs.281-282)

De la anterior cita se consideran los infinitos grados como el principio que se tenía de cambio instantáneo, al no poder referirse en términos de la velocidad en intervalos “grandes o pequeños de tiempo”, de lo contrario se daría la idea que establece Simplicio. Por tanto, era preciso considerar el cambio de velocidad de instante a instante del tiempo. También hacer referencia de lo que para Galileo consideraba sobre los infinitos grados de velocidad y de tiempo ya que daba cuenta de la continuidad de estas magnitudes, es entonces, afirma Malagón (1988)

la idea de que el móvil pasa por infinito número de grados de velocidad en un tiempo finito, al hacer una correspondencia uno a uno entre los grados de velocidad y los instantes de tiempo: considera que a cada instante del transcurso del movimiento le corresponde un único grado de velocidad. (Malagón J. F., 1988, pág. 110)

Para Galileo era entonces importante observar cómo lo enuncia Malagón (1988) que en los grados de velocidad se examina el comportamiento del cuerpo grado por grado para diferenciar entre el transcurso en el que se desplaza a cada instante.

Galileo, al reflexionar sobre estas dificultades y recogiendo las consideraciones que toma acerca del movimiento uniformemente acelerado, lo define: “Llamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquel que, partiendo del reposo, adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez [celeritatis momento]” (Galilei, 1974 pág.288).

Para Galileo la relación espacio y movimiento era un argumento para considerar lo uniforme en el movimiento de los graves, ahora representa la relación espacio y temporalidad⁶. Apoyándose en la geometría logra representar la velocidad y sus grados en la siguiente proposición:

⁶ En esta relación espacio y temporalidad, se advierte que no es la misma representación que tenemos actualmente, porque estas dos magnitudes son de diferente clase para Galileo, por eso representa en una línea el espacio y en otra el tiempo.

Teorema I, Proposición I: El tiempo en el cual un espacio dado es recorrido por un móvil que parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado, es igual al tiempo en el que aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme cuyo grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado al final del movimiento uniformemente acelerado precedente. (Galilei, 1974, pág. 292)

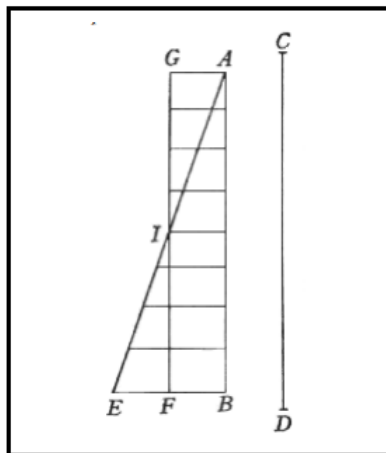


Figura 9. Teorema I, Proposición I. Movimiento naturalmente acelerado. Fuente: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias (Galilei, 1974, pág.292)

Como se había mencionado en uno de los apartados del capítulo, para Galileo la relación proporcional entre espacio y tiempo era un argumento para considerar lo uniforme en el movimiento de los graves. Ahora explica la relación espacio y temporalidad, en la figura 9 describiéndola así: el segmento vertical comprendido entre AB representa el *tiempo*, aquí es importante mencionar que en las primeras representaciones que hizo Galileo del tiempo (Ver figura 5, sobre el movimiento uniforme), se le asigna una línea horizontal, lo que podríamos aludir a una corrección hecha por él. Entonces ahora la línea AB, corresponde al tiempo empleado por el móvil cuando pasa por el espacio CD, donde su estado de reposo está en C, esta representación del espacio CD se encuentra separada de la figura, señalando que es una magnitud diferente a la relación velocidad-tiempo.

Las velocidades instantáneas están representadas en los segmentos horizontales perpendiculares a AB, es decir, con respecto al tiempo, por lo que la velocidad máxima y final del móvil cuando recorre el intervalo de tiempo AB es el segmento de la línea EB, formando un ángulo recto entre ellos.

Para el caso de la línea AE, se ubicarán puntos equidistantes con respecto a AB y trazando líneas horizontales paralelas a BE, donde su origen o punto de partida del movimiento está en el instante A. También se observa la formación de un rectángulo AGFB, donde su base es BF donde traza los segmentos de velocidad hasta GA delimitándolas en GF. A partir de este rectángulo, Galileo hace las siguientes afirmaciones;

El triángulo AEB describe un movimiento acelerado del grave y el rectángulo AGFB describe un movimiento de velocidad constante BF ($BE/2$) y que sucede en el mismo tiempo que el anterior. Sobre el área del triángulo AEB podemos inferir que es igual al área de rectángulo AGFB. (Azcárate, 1984, pág. 207)

Galileo logra explicar cómo dos cuerpos que partiendo en el mismo momento se desplazan espacios iguales en tiempos iguales, pero su diferencia está en que uno de los cuerpos se desplaza con una aceleración uniforme alcanzando su intensidad máxima, mientras que el otro que se desplaza con una velocidad uniforme que es la mitad de intensidad que alcanzó el movimiento acelerado.

En una de las intervenciones realizadas por los interlocutores, Sagredo hace el siguiente análisis pensándose como representar de manera más precisa, la velocidad en determinado punto.

Sagredo: Suspended, por favor, la lectura un momento, pues le estoy dando vueltas a una idea que se me acaba de ocurrir. Para explicarla, y en bien de la claridad mía y vuestra, la ilustraré con un dibujo [Figura 10]. Por medio de la línea AI quiero representar el trascurso del tiempo, partiendo del primer instante en A. Aplicando después en A, según un ángulo cualquiera, la recta AF y uniendo los puntos terminales I y F, mientras que se divide el tiempo AI en su mitad, C, trazo la paralela a IF, CB. Si consideramos, después, la línea CB como el grado máximo de la velocidad que, a partir del reposo en el primer instante de tiempo A, fue en aumento según el incremento que se manifiesta en las paralelas a BC, trazadas en el triángulo ABC (que es lo mismo que decir que la velocidad aumenta en proporción al tiempo), entonces admito sin ninguna dificultad, en vista de los argumentos dados hasta el momento, que el espacio recorrido por el móvil que cae con el incremento de velocidad descrito será igual al espacio que recorrería el mismo móvil durante el mismo intervalo de tiempo AC con movimiento

uniforme, cuyo grado de velocidad fuese igual a EC, que es la mitad de BC. (Galilei, 1974, págs. 296-297)

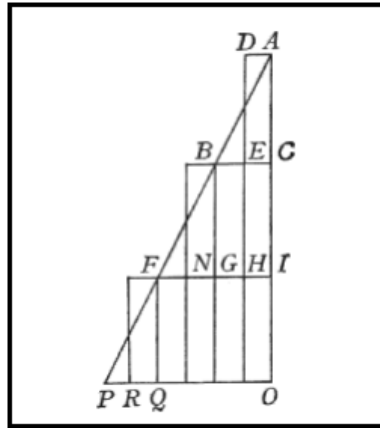


Figura 10. Sobre la velocidad en diferentes instantes. Fuente: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias. (Galilei, 1976, p.296)

De lo anterior, se establece una reflexión acerca de lo que ya se venía considerando en términos de las velocidades instantáneas, que partiendo desde su primer instante, hacen referencia a la representación que hace del teorema I, pero que en este caso aumenta por así decirlo a representar otros instantes de tiempo C, I, O. Aquí Galileo establece una relación importante dentro del proceso de formalización de la velocidad: el movimiento acelerado se puede describir a partir de movimientos uniformes.

Esta relación le permite a Galileo establecer, para el movimiento acelerado, la relación que guardan los espacios recorridos y los tiempos, como lo hizo para el caso del movimiento uniforme. De la aceleración que adquirirían los cuerpos al descender y de la cual Galileo centra su interés en evidenciarla de tal manera que la compara con los números impares para describir su proporcionalidad, afirmando: “[...] que yo sepa nadie ha demostrado que un móvil que cae partiendo de una situación de reposo recorre, en tiempos iguales, espacios que mantienen entre sí la misma proporción que la que se da entre los números impares sucesivos comenzando por la unidad”. (Galilei, 1974, pág. 265)

Siguiendo con la demostración hecha por Galileo, ahora retomando lo explicado brevemente en el tema sobre el movimiento local, mencionamos la idea que configuró Galileo en explicar las proporciones según la sucesión de los números impares, el cual definió en el

primer corolario del Teorema II. Proposición II sobre el movimiento uniformemente acelerado, al ejemplificarlo con la siguiente situación:

Colorario I: [...], si desde el primer instante o inicio del movimiento hubiéramos tomado sucesivamente un *número cualquiera* de tiempos iguales, como, por ejemplo, AD, DE, EF, FG, en los cuáles se recorran los espacios HL, LM, MN, NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares *ab unitate*; es decir, como 1,3,5,7: es esta, efectivamente, la proporción entre los excesos de los cuadrados de las líneas que se sobrepasan igualmente y cuyo sobrante es igual a la más pequeña de ellas; es decir, entre los números cuadrados consecutivos *ab unitate*. Por lo tanto, cuando los grados de velocidad aumentan, en tiempos iguales, según la serie de los números naturales, los espacios recorridos, en los mismos tiempos, adquieren incremento según la serie de los números impares *ab unitate*. (Galilei, págs.295-296).

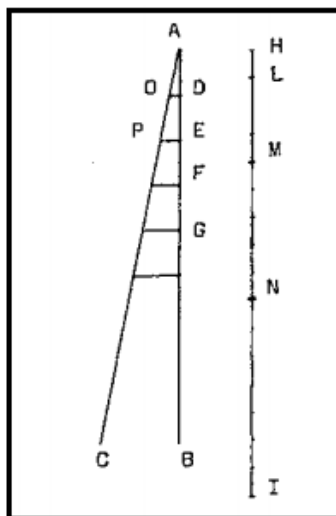


Figura 11. Teorema II, Proposición II. Movimiento naturalmente acelerado. Fuente: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias (Galilei, 1974,pág.294)

Este teorema induce a la idea que explica en el Teorema II. Proposición II, cuando aborda el tema del movimiento uniformemente acelerado, donde explica como en los espacios recorridos por un móvil, conforman el cuadrado de la proporción entre los tiempos (figura 11), es decir, en que ya existía la noción cinemática que después del trabajo de Galileo se convirtió en la ley de caída de los cuerpos y que conocemos hoy como, la posición en función del tiempo siendo este igual a la aceleración por tiempo al cuadrado.

Por lo que ya desde aquí, Galileo deduce una expresión de proporción que conocemos hoy, como:

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

Aquí cabe detenerse para resaltar que del colorario anterior, se puede deducir la relación que halló Galileo sobre la expresión de proporciones que se realiza ahora de manera algebraica con la ley cuadrática de caída, la cual se conoce como: $x(t) = a \times t^2$, donde se puede tener el espacio recorrido por el móvil en función del tiempo t . (Berrone, 2001, pág. 631)

Por otra parte, es oportuno indicar la relación que existe entre la serie de números impares que conocemos actualmente contrastadas con las ideas de Galileo, reflejadas en la reflexión hecha en su dialogo (Sagredo). Se describe de la siguiente manera (ver figura 10): en principio del punto A al punto C un movimiento acelerado y así mismo en el segmento EC se describe un movimiento uniforme. Si notamos el espacio que atraviesa el cuerpo en ese primer instante de tiempo se representa un primer rectángulo ACDE, entonces si seguimos incrementando el tiempo del movimiento acelerado del cuerpo, este seguirá aumentando a su vez los espacios recorridos donde se muestran tres rectángulos más y así sucesivamente si seguimos sumando más tiempo obtendremos cinco rectángulos más,

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|------------------|------------------|------|------------------|
| 1 | | | | | | | | | | = 1 | = 1 | | | |
| 1 | + | 3 | | | | | | | | = 4 | = 2 ² | | | |
| 1 | + | 3 | + | 5 | | | | | | = 9 | = 3 ² | | | |
| 1 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | | | | = 16 | = 4 ² | | | |
| 1 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 9 | | = 25 | = 5 ² | | | |
| 1 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 9 | + | 11 | = 36 | = 6 ² | | |
| 1 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 9 | + | 11 | + | 13 | = 49 | = 7 ² |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 12. La suma de los n primeros números impares. Fuente: Números. (Barrios, 2015, pág. 56)

Es entonces que si relacionamos la serie de los números impares (Figura 12), evidenciaremos como los tiempos recorridos en cada instante se configuran con los espacios atravesados por el cuerpo, es decir, en la columna que refiere a 1,4,9,16, etc., nos permite obtener lo que para Galileo fue los espacios recorrido en cada instante de la división que hace del tiempo

donde resulta la ley del cuadrado del tiempo que conocemos actualmente. Y a su vez de la serie 1,3,5,7, etc., nos describe cuanto espacio recorre en cada instante.

2.3 Sobre la formalización en el trabajo de galileo

Con los teoremas anteriormente expuestos, se evidencia como Galileo logra formalizar por medio de la geometría que el movimiento de caída tiene respuesta en sus leyes matemáticas. Como se presentó en el capítulo sobre la formalización se tiene en cuenta la experiencia como un factor esencial en la organización que se expresa a través del lenguaje físico y matemático, implicando a reflexionar con los diferentes teoremas escritos por Galileo las explicaciones que lo llevo a precisar las relaciones entre espacios, tiempos y velocidades a partir de la caracterización del movimiento. Sin embargo, cómo establecer una relación directa entre esta formalización geométrica y la experiencia que cualquiera pueda tener con el movimiento de caída, por ejemplo, ha sido tema de discusión de varios filósofos e historiadores de la ciencia:

El carácter experimental de la ciencia de Galileo ha sido objeto de un serio malentendido, gracias A. Koyré. Aquel, empeñado en criticar la imagen clásica de la distinción entre la ciencia moderna y la medieval en términos de experimentación vs cultura libresca, insiste en el platonismo de Galileo y en el carácter *apriórico* de su ciencia, sugiriendo que Galileo no habría realizado ninguno de los experimentos de los que habla en los Discorsi, que no serían sino imaginarios o mentales. (Solis & Sabada, 1974, págs. 18-19)

Esto generó que Alexandre Koyré, no escatimara en resaltar su posición en su libro; Estudios galileanos, donde en uno de sus apartes menciona:

Descartes y Galileo se equivocaron en la deducción de una ley sumamente sencilla. ¿No será eso, quizá, indicio de que tal sencillez es sólo aparente? O, si se prefiere, ¿no será indicio de que la ley de la caída de los cuerpos no resulta sencilla sino dentro de un cierto sistema de axiomas y a partir de un cierto conjunto de nociones??. (Koyré, 1980, pág. 75)

De lo afirmado por Koyre, se puede diferir que una de las posibles respuestas a sus cuestionamientos sobre la evidencia de la realización de los experimentos de Galileo, al

describir la caída de los cuerpos, se observa el análisis detallado que se encuentra en sus teoremas, proposiciones y colorarios escritos y consignados, en el texto (Consideraciones y demostraciones) ya analizado en párrafos anteriores a este trabajo. Así también lo señala, Solís (1976)

[...] han sacado también a la luz manuscritos que muestra a Galileo hallando experimentalmente (a veces, mientras buscaba otras cosas) fenómenos que treinta años más tarde aparecerán enunciados como principios o teoremas fundamentales de la tercera jornada. El error de Koyre habría que atribuirlo a un deficiente análisis de la ciencia galileana, dejándose engañar por el método de exposición de los Discorsi. (Solis & Sabada, 1974, pág. 19)

En este trabajo no se pretende hacer una discusión sobre este asunto. Pero sí se quiere retomar cómo Galileo tenía una experiencia organizada sobre el movimiento (uniforme y acelerado) que trató de exponer en términos de proporciones, de tal manera que se pudiera hablar del movimiento en general (sin acudir a distinciones de los movimientos naturales y violentos de Aristóteles) a partir de estas relaciones. (Azcárate, 1984) “Cabe resaltar que, en sus escritos Galileo no acude a una definición como tal de la velocidad, sin embargo, si la considera como una magnitud física que se puede comparar, medir y expresar con un número, y representar mediante un segmento”.

En síntesis, Galileo en sus teoremas presenta las siguientes relaciones que hacen posible concebir la velocidad como una magnitud que permite caracterizar cualquier movimiento, permite compararlos, pero que además que es una magnitud que no está definida a priori, sino que se debe construir:

1. En sus primeras deducciones para dar cuenta sobre el movimiento uniforme, establece una relación entre espacios y tiempos. Además, señala en su definición en un apartado sobre el requerir limitar el desplazamiento del objeto, en fracciones de tiempos más cortos.
2. Establece la relación directa entre espacios y tiempos (teorema I, movimiento uniforme), así como la representación en segmentos de recta donde muestra ya las proporciones en subdivisiones sobre la líneas.

3. Plantea la manera de relacionar la velocidad con el espacio en el movimiento uniforme (Teorema III)
4. Considera el espacio y el tiempo de la misma clase que la velocidad para asignar relaciones directa, inversa y compuestas entre ellas en el movimiento uniforme (teorema I, III y VI). Estableciendo la relación de proporciones entre magnitudes homogéneas.
5. Considera caracterizar el movimiento unifórmemente acelerado, dando paso a la noción de los grados de intensidad que describen la cualidad de caída de los cuerpos.
6. Brinda la noción de los grados de lentitud para dar cuenta de que tan rápido se mueven los cuerpos y de su movimiento continuo.
7. Separa la magnitud espacio en la relación que hace de velocidad y tiempo, además de que este último se representa en un línea vertical y ya no horizontal en el movimiento unifórmemente acelerado (Teorema I).
8. Del teorema I también se establece la noción de velocidad instantánea dando cuenta de la relación espacio-temporalidad.
9. Establece la relación entre la serie de los números impares (colorario I), para dar cuenta de los espacios recorridos por el cuerpo en cada instante.

De lo anterior es importante señalar que Galileo no utiliza símbolos y esto hace más interesante su trabajo, ya que da cuenta de cómo en los procesos de cuantificación de una magnitud física, como lo es la velocidad, no se involucran números y así guarda una estructura en la geometrización del movimiento natural de caída.

Es de resaltar que el trabajo de formalización que realizó Galileo permite valorar todo el constructo que implica el conocimiento científico. Para posibilitar que a través de sus teoremas se fueran erigiendo las bases de las magnitudes que consolidan en estudio de la cinemática.

CAPITULO 4. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

En este capítulo se expondrán una serie de elementos extraídos de la investigación que se llevó a cabo a lo largo de este trabajo de grado y que nos brinda la oportunidad de considerar algunas implicaciones para la enseñanza de la cinemática, en relación al modo como concebimos la formalización de una magnitud como la velocidad instantánea.

1. Problematizar el movimiento desde el análisis cualitativo

Es posible que, en ciertos casos al tomar un curso de cinemática, nos demos una corta oportunidad en el análisis de la descripción cualitativa del movimiento. Tal vez porque nos hemos acostumbrado como estudiantes a ir directamente a la ecuación y esta a su vez centra toda nuestra atención en tratar de solucionarla; es decir, que se ha vuelto un modelo mecanizado en el pensar de los conceptos físicos. Es precisamente cuando investigamos sobre un concepto como la velocidad que se observa que en los textos consultados en la asignatura de Mecánica se presenta una extensión de ecuaciones que en ocasiones no permite entender con mayor claridad la caracterización de lo que se quiere aplicar a través de los ejercicios matemáticos. Por esto es tarea de los docentes dar la posibilidad en los espacios de enseñanza el abordaje cualitativo del movimiento.

Si, el movimiento fue un tema de gran debate para la ciencia de la Edad Media, y la constitución de las magnitudes que lo describen implicó un proceso de comprensión y organización de la experiencia del movimiento, es factible considerar que si resulta importante destacar la descripción cualitativa del movimiento como una herramienta que sea útil en una comprensión más adecuada de este. En consecuencia es posible reflexionar sobre, ¿Por qué en algunos ocasiones no se encuentra en la enseñanza de la cinemática una explicación más relevante al hecho de pensar el movimiento y en la variedad de elementos que intervienen en él para su descripción?, esto puede deberse, a que tal vez nos hemos acostumbrado a limitarnos en lo que encontramos en los libros de física dejando por fuera las maneras cómo experimentamos nosotros el movimiento y la forma como nos referimos a éste, según Romero Chacón & Rodríguez (2003)

la estructura del lenguaje usado para referirnos al movimiento nos percatamos de esta posibilidad: cuando percibimos que no es adecuado decir «el cuerpo tiene

movimiento», sino «el cuerpo está en movimiento», estamos considerando que el movimiento no es algo que pertenece al cuerpo, sino que es un modo de ser o estar de los cuerpos. (Romero Chacón & Rodríguez, 2003, pág. 60)

Es decir, que la idea que tenemos del movimiento dista de la característica propia del cuerpo. Estas formas de referirse al movimiento muchas veces no se conectan con la manera como se presenta el movimiento desde un conjunto de ecuaciones, pues éstas o los números que se obtienen de su despeje no dicen mucho respecto a la experiencia que se tiene del movimiento.

Se expuso, en el capítulo anterior, que para físicos como Galileo fue de gran relevancia abordar el movimiento inicialmente desde su descripción cualitativa y posteriormente configurar una magnitud como la velocidad. En ese proceso se reconoce el desarrollo que establece la formalización, como las distintas maneras de organizar la experiencia que se tiene con el fenómeno, establecer formas de representarlo, construir magnitudes y relaciones entre estas.

Rescatando en el trabajo de Galileo una forma de lograr esta conexión para definir las magnitudes que están relacionadas con esas formas de “estar del cuerpo” desde nuestra experiencia. Podemos acudir a lo que, aunque parezca obvio es necesario rescatar de experiencias como: si se dice que un cuerpo se está moviendo rápido es porque recorre un espacio en poco tiempo, en relación con otro movimiento. Es así como se ha expuesto en el desarrollo de este trabajo, como para Galileo establecer la relación entre espacios y tiempos en el movimiento uniforme no partió de una ecuación ya dada como la que se conoce: $v = \frac{x}{t}$, sino que construyó formas de representación (a través de segmentos de línea) que le permitieran establecer proporciones geométricas (entre segmentos de líneas) y relacionar en un mismo conjunto magnitudes como la velocidad, tiempo y espacio.

Es entonces tener en consideración como se conciben los conceptos antes de llegar a su matematización, en el caso particular del movimiento acelerado, describir cómo sucede el movimiento de caída de los cuerpos desde cierta posición y en determinado instante. La primera idea que se nos ha enseñado está en relacionar, que este cuerpo tiene una aceleración y por tanto una velocidad determinada en cada momento, la cual corresponde a la noción de límite (cálculo). Entonces, decir que el cuerpo cae rápido no es suficiente para describir su movimiento, será necesario preguntarse si tiene la misma rapidez en diferentes momentos de su caída.

Es esencialmente en el análisis que realiza Galileo acerca de los grados de intensidad de velocidad en cada instante que, si bien no implica la idea de límite, permite pensar que la velocidad es una magnitud continua que puede ser significada en función de los espacios y tiempos recorridos. Entonces resulta importante acudir a esa descripción cualitativa que nos brinda la historia de la física para orientar una motivación en los estudiantes que le den sentido a conceptos como la instantaneidad.

Por lo tanto, es oportuno que la enseñanza que se hace de estos conceptos, como la velocidad instantánea, parta de situaciones que estén dentro de nuestra experiencia para asimismo tener un tipo de comparación. Para ejemplificar: una situación que involucre un análisis de posición y velocidad, vamos a imaginarnos todas las acciones que surgen del desplazamiento que tenemos partiendo de nuestra casa para llegar a tomar un transporte, ya que involucramos una serie de elementos que ocurren en ese momento, ubicándonos en un sistema de referencia que implica: hacia dónde nos movemos; además de la manera como lo hacemos rápido o lento, dependerá de: si existen baches, si nos chocamos con alguien, si hay semáforos, en fin, situaciones que interrumpan nuestro camino, tendremos que describir el tiempo que nos demoró cada situación y así razonar qué tan rápido debemos hacerlo y en qué tiempo.

Siguiendo con la situación, es posible determinar factores que me permitan realizar ciertos cuestionamientos como: ¿Es posible considerar que en todo el trayecto recorrido se contó con la misma rapidez?, podemos analizar entonces que al realizar este recorrido no siempre llevamos la misma rapidez, ya que existirán momentos en donde ralenticemos nuestra caminata, sin dejar de movernos, es decir que manteniendo la misma trayectoria se pueden evidenciar cambios en pequeñas distancias que conforman el recorrido. Es entonces que surge el interrogante: ¿Cómo saber qué tan rápido fue una parte del recorrido respecto a otra? Para este análisis es necesario tener un punto de comparación, ya sea con respecto a los desplazamientos que ejecutemos nosotros mismos entre un suceso y otro, o también considerar qué tan rápido fue mi recorrido con respecto a otra persona. Por consiguiente, es importante señalar que evidenciar los cambios es lo que hace que referenciáramos variables que se involucran en un mismo sistema de movimiento. Este tipo de análisis es esencial para que las variables cobren sentido en la enseñanza.

Es entonces que pensar en la manera como se formalizaron los conceptos físicos, como la velocidad, nos conducen a reflexionar que en los contextos de enseñanza se pueda vislumbrar la necesidad de hacer hincapié en la descripción cualitativa que hacemos de ellos a través de los análisis que comprendan todo el marco conceptual que los acompaña.

Es pertinente tener en cuenta que en los procesos de enseñanza se promueva la descripción de diferentes situaciones que den cuenta del movimiento de los objetos, situaciones que puedan posibilitar por ejemplo un diseño de actividades donde los estudiantes comparen movimientos que realicen en su cotidianidad y que los puedan expresar de manera verbal, con dibujos, con su corporalidad, etc. El conjunto de descripciones que se generan de diferentes situaciones que dan cuenta de la distinción en el análisis cualitativo del movimiento, se puede entender como necesario para iniciar el estudio del movimiento.

2. A cerca de la implicación cuantitativa de movimiento

Si sabemos ahora que la noción del análisis cualitativo que hacemos a los conceptos físicos viene acompañada del recurso que nos ofrece la historia para su comprensión. Es precisamente cuando observamos en el estudio del movimiento de Galileo y de algunos pensadores de la Edad Media, como se distinguió, según afirma Nieto & Sánchez (2007),

La manera de entender el movimiento como un proceso en sí mismo facilitó la concepción y diferenciación entre movimiento uniforme o con velocidad constante y movimiento con velocidad variable. Se dio también una definición de aceleración uniforme y movimiento uniformemente acelerado, como un movimiento en el cual la velocidad mostrara incrementos o decrementos iguales en tiempos iguales. (Nieto & Sánchez, 2007, pág. 232).

El estudio del movimiento implica la categorización que se le atribuyó a la velocidad como magnitud que da cuenta del estado de movimiento de un cuerpo. Con esta magnitud se puede identificar si el movimiento es uniforme o uniformemente acelerado.

Aquí podemos hacer una comparación de la forma como se puede interpretar los teoremas escritos por Galileo (descritos en el capítulo anterior), y el paralelo que podemos hacer de ellos en la notación actual.

| TEMA | DEFINICIÓN GALILEO | NOTACIÓN ACTUAL |
|--|---|---|
| <p style="text-align: center;">La Cinemática del movimiento</p> | <p>Sobre el movimiento uniforme: Por movimiento igual o uniforme entiendo aquel en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que estos sean, son iguales entre sí.</p> <p>De los teoremas de este apartado Galileo, expone la noción de relaciones de proporcionalidad directa, inversa y compuesta de las magnitudes; espacio, tiempo y velocidad.</p> | <p>Se puede hacer una interpretación de los Teoremas I y IV, entendiéndolos, así:</p> <p>Formula:</p> $v = \frac{e}{t}$ <p>Por lo tanto, del Teorema I:</p> $v = cte : \frac{e_1}{e_2} = \frac{t_1}{t_2}$ <p>Y del Teorema IV:</p> $\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2}$ |
| | <p>Sobre el movimiento naturalmente acelerado: Llamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquel que, partiendo del reposo, adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez.</p> <p>Del Teorema II, específicamente Galileo hace un acercamiento a la relación de espacio y tiempo.</p> | <p>Se puede hacer una interpretación del Teorema II, donde entendemos la ley de proporción cuadrática, así:</p> <p>Entonces la constante de proporcionalidad es (k).</p> <p>Por lo tanto: $v = k \cdot t$</p> <p>Ley; $e = k' \cdot t^2$</p> |

Cuadro 3. Movimiento, teoremas de Galileo y notación actual. Fuente: La nueva ciencia del movimiento de Galileo (Azcárate, 1984, págs. 204-205)

Cuando observamos las variables contenidas (Tabla 2) en cada expresión de los teoremas de Galileo se puede señalar cómo estas fueron y siguen siendo parte importante en la enseñanza de la cinemática del movimiento. Sin embargo, el trabajo de Galileo muestra cómo a través de su formalización por medio de la representación las proporciones de velocidad y tiempo hicieron posible deducir varias de las ecuaciones que se presentan actualmente a los estudiantes, y que, en ocasiones suelen no ser analizadas detenidamente desde las relaciones de proporcionalidad implicadas.

Por lo tanto, a partir de estas variables descritas en el movimiento aparece otro ejercicio muy importante en el razonamiento de los conceptos físicos que surgen a partir de la abstracción

cuantitativa que hacemos de ellos y precisamente es aquí donde se genera una discusión mencionada en el segundo capítulo sobre la relación física-matemáticas. Donde podemos encontrar cómo los conceptos físicos se constituyen a partir de una organización de la realidad expresada en una matematización para su comprensión.

En la velocidad instantánea, con el cálculo infinitesimal, se presenta la definición, así:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esta definición tal como está escrita en el lenguaje que suscita para las matemáticas su simbolización, indica que debe usarse solamente cuando los intervalos tienden a cero, sin embargo, en nuestra experiencia es realmente complejo comprender qué significa tender a cero. Sabemos que en la actividad experimental siempre existe ese rango de incertidumbre que posibilita el error en la medición, así resulte en el caso de tomar pequeñísimos intervalos de tiempo, a menos que se tengan instrumentos de medida muy precisos.

Por otro lado, la definición sustenta que el cálculo de la velocidad se basa en cuantificar los cambios de posición en ciertos intervalos de tiempo y observar cómo cambia (o permanece) en el tiempo, por lo tanto, se debe reconocer a qué ecuaciones acudir. Además, se acude al plano cartesiano como representación para describir, por ejemplo, las variaciones de velocidad en cada momento y también se presenta para dar cuenta de la velocidad media en pequeños intervalos de tiempos. Sin embargo, según afirma; Romero Chacón & Rodríguez (2003)

la forma de medir la velocidad implícita en esta definición no se corresponde con el proceso de medir: no se dispone de una unidad de velocidad que permita la construcción de una escala para asegurar cuándo un valor determinado de velocidad es la mitad, el doble, el triple, etc., de otro. (Romero Chacón & Rodríguez, 2003, pág. 60).

Es decir, siempre se da por sentada una escala de velocidad representada en el plano cartesiano, pero ¿cómo conectamos eso con la experiencia del movimiento? Se necesitaría pensar si el valor encontrado en cada momento de movimiento del cuerpo representa una unidad de medida diferente. Es así como pensar en la cuantificación involucra la construcción de una magnitud, proceso que muchas veces se omite en los procesos de enseñanza, porque reduce a pensar que la magnitud se define en la ecuación.

Pensando en una posible manera de desarrollo de una actividad, que posibilite pasar de la descripción cualitativa del movimiento a generar la descripción cuantitativa de este, se destaca las implicaciones que la representación de segmentos de línea permitió en la construcción de la velocidad en el trabajo de Galileo. En este sentido, en los procesos de enseñanza es necesario promover que la representación permita establecer relaciones de orden y de comparación entre elementos que distinguen el movimiento; esta es una etapa necesaria y previa a la presentación de cualquier ecuación.

3. La representación geométrica de la magnitud velocidad instantánea en Galileo

Hemos observado que en el estudio del movimiento la representación geométrica ha servido de gran utilidad para la representación de un conjunto de variables que dan cuenta de sus caracterizaciones. Es así como la velocidad pueda ser comparada de manera cuantitativa a través de su medición y cualitativamente dándole sentido al desplazamiento y trayectoria de los cuerpos en cada momento.

Es entonces cuando podemos reflexionar como en la cinemática galileana, se expone las relaciones, entre un estado de movimiento y sus magnitudes dando cuenta de su proporcionalidad. De allí que una magnitud como la velocidad y su representación geométrica ayudaron a Galileo en su demostración de las relaciones espacio-temporales descritos en sus teoremas sobre movimiento naturalmente acelerado, donde los grados de velocidad de la caída de los cuerpos daban cuenta de la proporcionalidad del tiempo que se demoraba en atravesar el cuerpo en cada trayecto de su desplazamiento. Así es como reconocemos una de las figuras (Ver figura 13) más destacadas en el trabajo de Galileo para matematizar el movimiento.

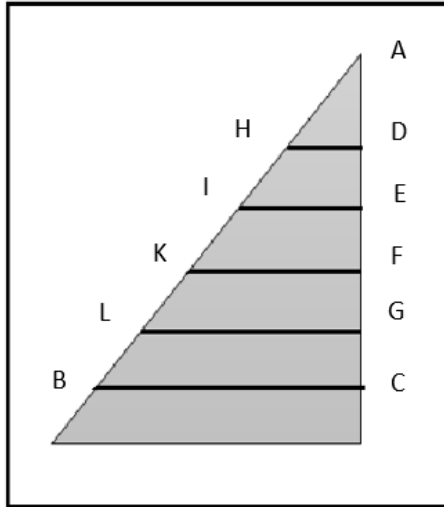


Figura 13. Representación geométrica de los grados de velocidad instantáneos de un cuerpo en caída.
Fuente: Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias. (Romero & Rodríguez, 2002, pág. 63)

Galileo representa el tiempo, en cada instante de la caída del cuerpo, con un segmento vertical comprendido entre AC y para describir su proporcionalidad subdivide en segmento iguales cada tiempo y finalmente los grados de velocidad son descritos por segmento horizontales. Este tipo de representaciones evidenciaban que para Galileo no existían un movimiento donde se saltaran u omitieran pasos al recorrer determinada distancia. Por tanto, era importante la noción de la infinidad de grados de velocidad que precedían al pasar al siguiente grado, es decir, en palabras textuales en uno de sus diálogos “Hay que imaginar una cantidad de líneas cada vez menores”. Así, el establecimiento de proporciones, en parte estaba vinculada a la experiencia con el movimiento de caída, así como con formas de representación que se adecuaban a la organización que se estaba realizando.

Cabe resaltar que en la cinemática de Galileo la velocidad instantánea no es un concepto que tenga una definición explícita. Pero sí fue considerada como una magnitud continua fundamental para dar cuenta del movimiento; al representarla por segmentos le facilitó compararla, establecer proporciones geométricas entre magnitudes también representados por elementos geométricos: el espacio y el tiempo.

De aquí que destaquemos, para los procesos de enseñanza, la importancia de las diferentes formas de representación que han hecho posible dar sentido a las magnitudes. Haciendo más fácil el poder describir y comparar el movimiento en la acción de caída de los cuerpos. Es decir,

cuando se hace referencia a la concepción cualitativa del movimiento a través de la experiencia, se hace necesario posibilitar diferentes formas de representarlo (ver figura 14). Pero será necesario afinar esas representaciones para que posibiliten comparar el movimiento de diferentes cuerpos o comparar el movimiento del mismo cuerpo en diferentes momentos. Entonces la representación con segmentos de línea o la misma representación en el plano cartesiano se vuelvan necesarias. Esto llevará a que empiece a involucrar establecer formas de cuantificación.

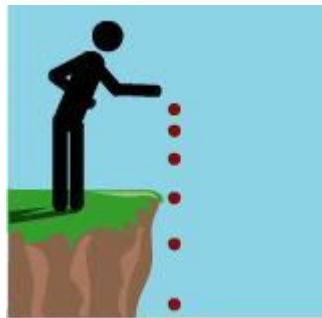


Figura 14. Movimiento de caída de los cuerpos. Fuente: <http://vmsernasbrito.blogspot.com/>

En consecuencia, la construcción de magnitudes como la velocidad, nos brinda un panorama de los posibles énfasis que debemos hacer en los procesos de enseñanza. De aquí que los profesores puedan comprender de manera más amplia las herramientas que nos ofrecen los científicos, a través de sus formas de proceder en la demostración de sus leyes y principios, es necesario para que establezcan orientaciones para la enseñanza.

CONCLUSIONES

Este trabajo inició en el planteamiento de los objetivos propuestos y en su desarrollo procuró encaminar este análisis hacia la orientación que diera respuesta a las preguntas problema expuestas. Es así como en la recopilación y organización de la información investigada contribuyó a comprender el proceso de formalizar el concepto de velocidad en el trabajo de Galileo y derivar implicaciones para la enseñanza.

A continuación, se expresan algunas conclusiones en función de las preguntas planteadas en este trabajo:

¿Cómo se formaliza el concepto velocidad desde la perspectiva de Galileo en el movimiento de la caída del objeto?

La formalización se concibe en el trabajo de Galileo como el reconocimiento de una estructura formal que ya era establecida desde el pensamiento griego, pero que incide notablemente en su pensamiento para tratar de dar una “perspectiva nueva a un tema tan antiguo como el movimiento”, así lo citó el propio Galileo.

Por tanto, Galileo realizó un proceso de formalización que corresponde al análisis que hace del movimiento uniforme y uniformemente acelerado para establecer una serie de magnitudes como la velocidad, tiempo y espacio que puedan demostrar como matematizarlo y a su vez estableciendo relaciones de carácter directo, inverso y compuesto. Todo utilizando herramientas del sistema geométrico euclidiano para demostrar que sus axiomas, definiciones y teoremas eran pertinentes a las leyes que se evidencian en la naturaleza.

La misma naturaleza le brinda la oportunidad de representar la *cualidad* de un objeto, la cual es de aclarar que es distinto al termino que conocemos actualmente, ya que para el mundo de la época medieval se caracterizaba en el análisis de la teoría de proporciones que describían las intensidades de un fenómeno natural por medio de segmentos de recta y sus diferentes longitudes representada sobre una serie de líneas.

Esos segmentos significaron la construcción de las formas geométricas que utilizó Galileo para representar los grados de velocidad de la caída de los cuerpos. Así se destaca una magnitud como la velocidad que resulto un elemento geométrico indispensable para distinguir los

diferentes instantes de caída, que atribuyó a qué tan rápido o lento caían los cuerpos, dando paso a considerar la velocidad instantánea.

Cuando se estudia el movimiento, la velocidad instantánea, vista desde la perspectiva de Galileo, podemos inferir que cada instante en un intervalo de tiempo que recorre el cuerpo pareciera que nos imagináramos una sucesión de cortos reposos pero que significan la suma de la velocidad total, es decir, que para ciertos instantes se considera la velocidad aumenta o disminuye según las proporciones de tiempo recorridas por el cuerpo.

¿Cómo problematizar la velocidad instantánea desde el trabajo de Galileo para el estudio en los contextos de enseñanza de la física?

Intuir la manera implícita como la noción sobre la velocidad instantánea expuesta en el trabajo de Galileo, nos permite valorar como los conceptos físicos adquieren gran relevancia en función del análisis obtenido desde un punto de vista puramente conceptual. Es en ese análisis conceptual que podemos derivar aspectos cualitativos que permite diseñar estrategias de enseñanza que orienten a los estudiantes el saber cómo se originaron la construcción de las magnitudes que utilizamos en diferentes fenómenos físicos que trata la cinemática.

Es entonces posible inferir que algunas de las dificultades en la enseñanza de los conceptos físicos que comprenden una variable como la velocidad instantánea y la representación que se hace de ella en las gráficas, puede ocasionarse a la falta de interpretación semántica o del significado que se realiza por parte de los estudiantes. Partiendo del hecho del problema que se tiene en comprender como entendemos el espacio y como lo podemos representar en nuestro entorno. Esta dificultad puede surgir por la forma como se interpretan las razones teóricas o experimentales del fenómeno físico, es decir, que son descritas como variables de la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ en función del tiempo, teniendo en cuenta su implicación en la representación del movimiento de un cuerpo en una sola dimensión.

Aquí se han presentado tres implicaciones para la enseñanza, que, aunque se pueden distinguir en la enunciación están relacionadas en sus implicaciones: problematizar el movimiento desde el análisis cualitativo, reconocer la implicación cuantitativa de movimiento y la importancia de la representación de las magnitudes que dan cuenta del movimiento. Se considera que estos elementos permiten vincular la experiencia de los estudiantes y dar significado a la formalización que se presenta en la cinemática.

Este trabajo también deja unas conclusiones del papel de la historia en la formación del profesor y su aporte para su quehacer docente:

Este tipo de análisis presentado en este trabajo, desde un contexto histórico, brinda la oportunidad como docente en formación, el reconocer en los autores una manera de razonar sobre las experiencias adquiridas en el proceso de aprendizaje. Proceso continuo en el cual se encuentra el ejercicio de la docencia y el cual enriquece el conocimiento de la física que se conoce hasta el momento para así establecer criterios que resultan al estudiar la obra de Galileo y asimismo que constituyan una parte importante de la formación pedagógica.

Se puede evidenciar entonces que analizar textos escritos por sus propios autores representan para el docente una manera de encontrar la génesis y el proceso por el cual tuvieron que pasar estos conceptos físicos para derivar en un mejor significado de ellos y así poder explicar los parámetros que los causaron.

Además de que la historia se convierta en un recurso para el docente en explicar el avance que han adquirido estos conceptos, así:

Conocer la física sería conocer, entonces, los problemas que han posibilitado la formación y el desarrollo de los conceptos de la física, las condiciones en que tales problemas se plantean, las respuestas y formas de abordarlos que se han elaborado, la forma como evolucionan los conceptos(...), la física como actividad comienza a plantearse como objeto de estudio en los cursos de física y el carácter dinámico e histórico de la física adquiere una gran relevancia. (Ayala M. , 2006, pág. 25)

Por lo tanto, podemos reflexionar que el reconocer que la física no tiene una verdad absoluta es considerar que por el contrario necesitó de un proceso de constitución y reconstrucción de lo que hoy conocemos como teorías, conceptos, magnitudes como la velocidad. Es precisamente esa reconstrucción que puede permitirle al profesor para extraer del pasado herramientas que le posibiliten mejorar sus estrategias de enseñanza.

Se considera la representación del movimiento como una implicación de todo un mundo de vivencias contenidas en los fenómenos físicos de la naturaleza llevándonos a inferir en sus causas naturales, que nada se encuentra totalmente inmóvil, ya que hasta el mismo estado de reposo de los objetos o de nosotros mismos establece una característica del movimiento que

para la cinemática resulta prevalecer el entorno en el que se efectúa tal movimiento dependiendo de la velocidad en que se mueva o que tan diferente resulta su rapidez.

BIBLIOGRAFÍA

- Ayala, M. (2006). Los análisis historico-criticos y La recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades. *Pro-Posies*, 17, 19-37.
- Ayala, M., Garzón, M., & Malagón, F. (2008). *Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos*. Bogotá, Colombia.
- Ayala, M., Garzón, M., & Malagón, F. (2007). Consideraciones sobre la formalización y Matematización de los fenomenos físicos. *Praxis Filosófica*(25), 39-54.
- Azcárate, C. (1984). La nueva ciencia del movimiento de Galileo: Una nueva génesis difícil. *Historia de las ciencias y enseñanza*, 203-208.
- Barrios, L. (2015). Los números impares y las potencias de los números naturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 88, 55-74.
- Berrone, L. (2001). Galileo y la génesis de la cinemática del movimiento uniformemente acelerado. (U. N. Rosario, Ed.) *LLULL*, 24, 629-648.
- Castillo, L. (1986). La experimentación en galileo. Bogotá. Colombia: Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional.
- Claret, V. (2019). Una perspectiva fenomenológica para la enseñanza de la caída de los cuerpos: Propuesta experimental. Tesis de Maestría en Docencia de las Ciencias Naturales. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- García, W. (2016). Diseño y construcción de un prototipo para el estudio de la caidad de los cuerpos: Medición de la aceleración de la gravedad por medio de Arduino. *Trabajo de grado*. Bogotá. colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Grant, E. (1983). *La ciencia física en la Edad Media: La física del movimiento*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Hewitt, P. (2007). *Física Conceptual*. México: PEARSON Educación. Décima edición.
- Koyré, A. (1980). *Estudios Galileanos*. Madrid: Siglo XXI España Editores.
- Levy, L. (1988). *Pensar la matemática. Física y Matemáticas*. Barcelona: Tusquets Editores.
- Malagón, F., Sandoval, S., & Ayala, M. M. (2012). La actividad experimental: Construcción de fenomenologías y procesos de formalización. *Praxis Filosófica Nueva serie*(36), 119-138.
- Malagón, J. F. (1988). La relación Física y Matemáticas en Galileo. *Tesis de Maestría en Docencia de la Física, Universidad Pedagógica Nacional*. Bogotá.
- Martínez, R. (2002). *La continuidad en las ciencias. Razones y proporciones: Un código medieval del movimiento*. México: Universidad Autonoma de Mexico. Fondo de Cultura Económica.

- Nieto, M., & Sánchez, N. (2007). *Creer y poder hoy-Catedra Manuel Ancizar. Tercera parte, Ciencia y Religión: Aristotelismo, telogía y Física*. (C. Tejeiro, F. Sanabria, & W. Beltran, Edits.) Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Papp, D. (1993). *Ideas revolucionarias en la ciencia*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria. Colección el mundo de las ciencia.
- Romero, Á. E., & Rodríguez, L. D. (2002). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Educación y Pedagogía*, XV(35), 57 - 67.
- Solis, C., & Sabada, J. (1974). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Madrid, España: Editorial Nacional Torregalindo.
- Thuiller, P. (1992). *De Arquímedes a Einstein. Capítulo VIII: ¿Experimentó Galileo?* Madrid, España: Alianza Editorial CNCA.
- Tipler, P. (2001). *Física para la ciencia y la tecnología*. Barcelona, España: Editorial Reverté. Cuarta Edición.
- Valero, M. (1994). *Física Fundamental 1*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma S.A. Decimosexta reimpresión.
- Vargas Rojas, N. (2017). En la mente de dos grandes pensadores: Reflexión frente a nuevas explicaciones planteadas por Galileo Galilei en respuesta al pensamiento aristotélico sobre la caída de los cuerpos. Bogotá, Colombia: Trabajo de grado, Licenciatura en Física. Universidad Pedagógica Nacional.
- White, M. (1993). *Genios de la humanidad. Galileo Galilei*. Bogotá, Colombia: Prensa Moderna.
- Wilson, J., Buffa, A., & Lou, B. (2007). *Física*. México: PEARSON Educación. Sexta Edición.