



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

*LAS ECUACIONES DE MAXWELL: UNA ESTRATEGIA
TECNOLÓGICA PARA ABORDAR FENÓMENOS QUE
RELACIONAN LA RELATIVIDAD ESPECIAL CON EL
ELECTROMAGNETISMO.*

Cristian Andres Munevar Espejo

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.
2019



*LAS ECUACIONES DE MAXWELL: UNA ESTRATEGIA
TECNOLÓGICA PARA ABORDAR FENÓMENOS QUE
RELACIONAN LA RELATIVIDAD ESPECIAL CON EL
ELECTROMAGNETISMO.*

Por:
Cristian Andres Munevar Espejo
2014146039

Trabajo de grado para optar por el título de:
Licenciado en Física

Asesor:
Eduardo Garzón Lombana

Línea de investigación:
La enseñanza de la Física y la relación Física-Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.
2019

0.1. Dedicatoria.

*A mis padres
Luz Marina Espejo y Antonio Munevar
Gracias por su apoyo incondicional,
Amor eterno.*

0.2. Agradecimientos.

A mi madre Luz marina Espejo, por darme la vida, por todo su amor, gracias a tus consejos que me han forjado para ser la persona que soy hoy en día y esto me ha llevado a donde estoy.

A mi padre Antonio Munevar, por su constante e invaluable apoyo, gracias por todo lo que me has brindado y por estar pendiente en este proceso.

Al profesor Eduardo Garzón Lombana, quien se ha tomado el arduo trabajo de trasmitirme sus diversos conocimientos estos me guiaron en la elaboración del proyecto, gracias por su apoyo este proceso académico.

A mis compañeros y amigos, por ser parte de este proceso académico.

0.3. Resumen.

El siguiente trabajo titulado, “Las ecuaciones de Maxwell: Una perspectiva para abordar fenómenos de la electrodinámica relativista, a partir de situaciones del electromagnetismo clásico.” Muestra la relación implícita que hay entre el electromagnetismo y la relatividad especial, desde una perspectiva física – matemática, a través de una descripción cualitativa y conceptual de las ecuaciones de Maxwell, con el apoyo de una herramienta computacional que facilite la observación de diferentes situaciones que en un laboratorio son difíciles de realizar, con esta herramienta se pretende que el estudiante tenga diferentes opciones de observar una misma situación, esto con el fin que los conceptos abordados sean más fáciles de comprender. Además se elaboró una unidad didáctica la cual aborda el aprendizaje para la comprensión, estas unidades didácticas tiene unas metas de comprensión establecidas.

Palabras clave: Flujo eléctrico y magnético, ecuaciones de Maxwell, electromagnetismo, principio de relatividad Galileano, invarianza, varianza, relatividad especial, corriente de inducción, corriente de desplazamiento, enseñanza, comprensión, software, tecnología.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación Profesional</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 6	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Las ecuaciones de maxwell: una estrategia tecnológica para abordar fenómenos que relacionan la relatividad especial con el electromagnetismo.
Autor(es)	Munevar Espejo, Cristian Andres
Director	Garzón Lombana, Eduardo
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 105 p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	FLUJO ELÉCTRICO; FLUJO MAGNÉTICO; ECUACIONES DE MAXWELL; ELECTROMAGNETISMO; PRINCIPIO DE RELATIVIDAD GALILEANO; RELATIVIDAD ESPECIAL; CORRIENTE DE INDUCCIÓN; CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO; ENSEÑANZA; COMPRENSIÓN; SOFTWARE; TECNOLOGÍA.

2. Descripción
<p>El presente trabajo tiene como objetivo relacionar las áreas del conocimiento electromagnetismo y relatividad especial, haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell desde un enfoque físico – matemático involucrando la interdisciplinariedad de saberes utilizando como herramienta un software que logre acercar a los estudiantes de la Licenciatura en Física, en los conceptos que relacionan a estas áreas y su relación físico - matemática todo esto enfocado desde una perspectiva de la enseñanza para la comprensión basado en la estrategia Predecir, Observar y Explicar (POE).</p> <p>El software permite mostrar tres situaciones desde diferentes marcos de referencia esto con el fin de manifestar que algunos fenómenos físicos se pueden comprender desde una perspectiva del electromagnetismo como de la relatividad especial, para la elaboración del software se realizó un estudio detallado de las ecuaciones de Maxwell y su relación con la relatividad especial, esta investigación tiene sus cimientos en la teoría electromagnética de Maxwell, Faraday, Ørsted, Einstein entre otros, este proyecto hace parte de la línea de investigación Enseñanza de la Física y su relación Físico – matemática.</p>

3. Fuentes
<p>Berkson, W. (1974). <i>Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein</i>. Number w BER.</p> <p>Castro, R. A. G., PANQUEVA, A. H. G., and DREWS, O. M. (1998). Ingeniería de</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Explicando la Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 6	

software educativo con modelaje orientado por objetos: un medio para desarrollar micromundos interactivos. *Informática educativa*, 11(1):9–30.

Einstein, A. (1905). Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. *Teorema: Revista internacional de filosofía*, 24(2):91–119.

Einstein, A. et al. (1905). On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der Physik*, 17(891):50.

Faraday, M. (1839). Michael faraday, experimental researches in electricity.

Volume i, reprinted from the first edition, 1839. experimental researches in electricity. volume ii. *The British Journal for the History of Science*, 34(4):100–481.

Feynman, R., Leighton, R. B., and Sands, M. (1987). *Física, Vol. II: electromagnetismo y Materia*.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (2011). *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*, volume 1. Basic books.

Fleisch, D. (2008). *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press.

Galilei, G. and Azcárate, C. (1645). *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno `a due nuoue scienze*, volume 1. Univ. Aut`onoma de Barcelona.

Hernández Millán, G. and López Villa, N. M. (2011). Precedir, observar, explicar e indagar: estrategias efectivas en el aprendizaje de las ciencias. *Educación Química*, (09):4–12.

Jackson, J. D. (1980). *Electrodinámica clásica*, madrid, ed.

Jones, B. and Faraday, M. (1821). *The life and letters of Faraday*, volume 2. Cambridge University Press.

Maxwell, J. C. (1954). *A treatise on electricity and magnetism, Tratado sobre la electricidad y magnetismo*, volumen 1. Juan Carlos Orozco y María Cecilia Gramajo.

McAnally-Salas, L., Navarro Hernández, M. d. R., and Rodríguez Lares, J. J. (2006). La integración de la tecnología educativa como alternativa para ampliar la cobertura en la educación superior. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(28):11–30.

Newton, I. (1687). *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación Profesional</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 6	

California Press.

Orsted, H. C. Oersted medal lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics.

Ørsted, H. C. (1813). *Investigación sobre la identidad de las fuerzas químicas y eléctricas*. Dentu.

Santomé, J. T. (1994a). *Globalización e interdisciplinariedad: el currículum integrado*. Ediciones morata.

Santomé, J. T. (1994b). *Globalización e interdisciplinariedad: el currículum integrado*. Ediciones morata.

Serway, R. A., Jewett, J. W., Hernández, A. E. G., and López, E. F. (2005). *Física para ciencias e ingeniería*, volume 5. Thomson.

Shannon, R. E., Bernal, A., et al. (1988). *Simulación de sistemas diseño, desarrollo e implantación*. Number 003.0184 S5.

Velez, F. (2012). Apuntes de relatividad. *Universidad Pedagógica Nacional, sexta versión*.

4. Contenidos

Con relación a la estructura de este trabajo, es pertinente aclarar que está dividido en cinco capítulos los cuales se describirán a continuación:

En el primer capítulo, se aborda una contextualización del origen de la problemática de la investigación, luego sigue la problemática de la investigación la cual describe el origen, el por qué y su importancia para abordarla en este trabajo seguido de su justificación y objetivos que describen las metas a cumplir en este trabajo, por último, se evidencian algunos antecedentes que permiten referenciar problemáticas similares a la enunciada en este proyecto.

Para el segundo capítulo, se aborda un breve contexto histórico de los científicos que aportaron a la teoría electromagnética, para luego dar continuidad con una interpretación cualitativa del significado y aportes de cada una de las ecuaciones de Maxwell a la teoría electromagnética y su relación implícita con la relatividad especial, un segundo apartado de este capítulo es el componente pedagógico el cual especifica la importancia de la Enseñanza Para la Comprensión (EPC), y sus aportes, la cual está apoyada en la estrategia didáctica, Predecir, Observar y explicar (POE), la tercera parte de este capítulo está dedicado a los aspectos teóricos del software y los aportes que esta herramienta le brinda a la investigación en la estrategia (POE), luego se hace una descripción

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación Profesional</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 6	

de la elaboración y diseño del software, para terminar con una explicación detallada de cada una de las situaciones planteadas que ayudaran a la comprensión de la relación implícita entre el electromagnetismo y la relatividad especial.

Luego, en el tercer capítulo, se describe la unidad didáctica la cual es el eje fundamental de este trabajo debido a que con esta se evidencian los resultados de las metas de comprensión, esta unidad didáctica está diseñada para tres sesiones las cuales están descritas en este capítulo, cada una de estas cuentas con sus objetivos y planeaciones elaboradas en matrices que permiten dar una linealidad a cada sesión. Una descripción breve de cada sesión es: en la primera sesión se hace la introducción a la navegabilidad del software, terminando con una prueba diagnóstica que permite evidenciar los conocimientos previos de los estudiantes. Para la segunda sesión se elabora una clase participativa que permite la interacción con el software y con sus compañeros aplicando la estrategia Predecir, Observar y Explicar. En la sesión tres se hace un post test para evidenciar si el estudiante realmente comprendió las temáticas abordadas.

En el cuarto capítulo, se hace un análisis detallado de la unidad didáctica donde se comparan los resultados esperados con los resultados obtenidos evidenciando si realmente se lograron las metas de comprensión establecidas para cada sesión por otra parte, se analiza si realmente se cumplió el objetivo general de la investigación y si se respondió la pregunta problema.

Por último, en el quinto capítulo, se presenta un análisis de los aspectos generales del proyecto su investigación y la elaboración del software, finalizando con las conclusiones generales del proceso de construcción de la investigación y de los resultados obtenidos en la unidad didáctica.

5. Metodología

Este trabajo, se desarrolló mediante una metodología descriptivo en aspectos teóricos conceptuales, matemáticos y experimentales, debido a que se plantea como objetivo una descripción cualitativa conceptual y matemática de las ecuaciones de Maxwell, y experimental por la creación del software puesto permite recrear fenómenos que en algunos casos se pueden hacer en el laboratorio pero que en algunos son complejos de realizar por ende se facilita el uso del software, esto con el fin de afianzar los conceptos que relacionan las áreas del electromagnetismo y la relatividad especial, para estudiantes de la Licenciatura en Física.

6. Conclusiones

La estrategia y metodología adoptada en esta investigación permitió obtener resultados importantes que llevaron a cumplir con los objetivos propuestos, de esta manera se logró desarrollar una implementación con ayuda de una unidad didáctica en torno a la relación conceptual y matemática de las áreas del conocimiento del electromagnetismo y la relatividad especial, esta estrategia de aula logro involucrar los aspectos teóricos, matemáticos y además experimentales a través de un software, esto permitió que los estudiantes lograran relacionar estas áreas y su importancia entre sí, dando respuesta a nuestra pregunta problema.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación Profesional</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 6	

Por otra parte, es importante mencionar los conceptos identificados que relacionan estas áreas y los propuestos, vistos en la implementación los cuales fueron una parte importante en el desarrollo de esta, algunos de estos fueron: campo eléctrico, campo magnético, invarianza, contracción de longitud, flujo magnético, fuerza eléctrica motriz, marcos de referencia, principio de relatividad Galileano, entre otros todo este conjunto de conceptos permitió que los estudiantes lograran comprender y relacionar estas dos teorías.

La unidad didáctica implementada en esta investigación se fundamentó en la enseñanza para la comprensión (EPC), ligado a la estrategia pedagógica. Predecir, Observar, Explicar (POE), con esto se evidencio que al unir estos componentes pedagógicos se convierten en una gran herramienta al momento de la planificación de las clases o actividades en el aula, en ese orden de ideas, las actividades propuestas permitieron que los estudiantes se acercaran a sus propios conocimientos, esto debido a que pudo interactuar con diferentes situaciones, esto los llevo a poner a prueba si realmente comprende los conceptos previos que traen, y así mismo también le permite ampliar y afianzar procesos de comprensión.

Con lo anterior, es importante comentar que la unidad didáctica y cada una de las sesiones tiene una secuencia, partiendo de los conocimientos previos de los estudiantes y con los niveles formativos que se pretende que el estudiante adquiera, esta secuencia tiene unos tópicos generativos y objetivos, esto permite que los estudiantes sean autónomos con los temas de su interés y que profundicen en ellos, las metas de comprensión establecen lo que se quiere que los estudiantes realicen de acuerdo a cada actividad, por último se tienen los desempeños de comprensión que permiten evidenciar el desempeño y la comprensión de los estudiantes con respecto a las actividades propuestas, esta sucesión permitió alcanzar las metas de comprensión establecidas.

Por otro lado, los estudiantes desarrollaron y lograron en cada una de las sesiones, competencias establecidas que estimularon el interés de la investigación, como, por ejemplo, el observar y reflexionar acerca de lo visto en las situaciones propuestas en el software, esto permitió hacer un seguimiento de las comprensiones adquiridas debido a que ellos mismo iban comparando su predicción con lo observado, en otro orden de ideas, la elaboración o construcción de una explicación de las situaciones planteadas por parte de ellos permite evidenciar los resultados de comprensión, debido a que es un proceso que va más allá del simple hecho de responder a una situación propuesta.

Por último, se evidencio que los métodos computacionales para la creación de simulaciones pueden llegar hacer una muy buena herramienta al momento de abordar situaciones experimentales que son difíciles de implementar en un laboratorio, desde otra perspectiva es importante resaltar que el uso de la simulación en los procesos de enseñanza, debido a que los estudiantes participantes mostraron un gran interés tanto de la parte de la creación de herramientas virtuales, como hacer uso de estas en sus procesos profesionales, ya que permite incentivar a los jóvenes en la investigación y creación de nuevas herramientas para enseñanza, este aporte es muy importante debido a que está propuesta

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 6 de 6	

esta implementada futuros docentes que más adelante llegaran a las aulas con nuevas ideas para la enseñanza.

Como recomendaciones es importante que los futuros docentes hagan uso adecuado de las tecnologías debido a que son una gran ayuda en la preparación de clases, no obstante, puede llegar a desviar el proceso de aprendizaje si no se tiene claro el objetivo, el modelo, y el por qué es importante usarlas.

Elaborado por:	Munevar Espejo, Cristian Andres
Revisado por:	Eduardo Garzón Lombana

Fecha de elaboración del Resumen:	04	12	2019
--	----	----	------

Índice general

0.1. Dedicatoria.	I
0.2. Agradecimientos.	II
0.3. Resumen.	III
1. Contexto problemático.	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Problemática de la investigación.	4
1.3. Justificación de la problemática.	5
1.4. Objetivos.	6
1.5. Antecedentes.	7
2. Marco teórico.	9
2.1. Las ecuaciones de Maxwell.	9
2.2. Contexto histórico.	9
2.2.1. Ecuaciones de Maxwell	11
2.3. Ley de Gauss para el campo eléctrico.	11
2.4. Ley de Gauss para el campo magnético.	13
2.5. Ley de Faraday.	14
2.5.1. El descubrimiento de la inducción electromagnética.	14
2.5.2. Ley de Lenz.	16
2.6. Ley de Ampère – Maxwell.	16
2.6.1. Densidad de la corriente eléctrica.	17
2.6.2. Densidad de corriente de desplazamiento.	18
2.7. Una mirada relativista a las ecuaciones de Maxwell.	19
2.7.1. Las transformaciones de Lorentz.	21
2.8. Componente pedagógico.	22
2.8.1. La tecnología y el aprendizaje.	22
2.8.2. ¿Qué es la comprensión?	22

2.8.3. La enseñanza para la comprensión en el aula.	23
2.8.4. ¿Cómo evidenciar si las actividades permitieron llegar a las metas de comprensión propuestas por el docente?	24
2.9. Aspectos teóricos de las simulaciones.	25
2.9.1. La simulación.	25
2.9.2. Diseño y elaboración del software.	27
2.10. Las simulaciones propuestas en el software.	28
2.10.1. Situación I (Carga eléctrica).	28
2.10.2. Situación II (Variación de flujo magnético).	29
2.10.3. Situación III (Una nueva perspectiva del electromagnetismo).	31
3. Unidad didáctica e implementación.	36
3.1. Propuesta de la unidad didáctica.	36
3.2. Sesión 1. Introducción al software y prueba diagnóstico.	37
3.2.1. Explicación de la actividad.	38
3.3. Sesión 2.	40
3.3.1. Clase participativa, la interacción con el software para Predecir Observar y Explicar.	40
3.3.2. Explicación de la actividad.	40
3.4. Sesión 3.	44
3.4.1. Post test ¿Que he aprendido?	44
3.4.2. Explicación de la actividad.	44
4. Análisis y resultados.	47
A. Una explicación breve a la divergencia.	54

Índice de figuras

2.1. Campo eléctrico a través de una superficie.	12
2.2. Patron de limadura de hierro bajo el efecto de un imán.	13
2.3. Simulación del comportamiento de las líneas de campo magnético.	13
2.4. animacion del experimento inducción electromagnética.	15
2.5. Experimento campo magnético producido por una corriente.	17
2.6. Sistemas de referencia.	20
2.7. Algoritmo.	25
2.8. Elementos de la simulación.	26
2.9. Mapa de navegabilidad.	27
2.10. Situación I, observador A.	28
2.11. Situación I, observador B.	29
2.12. Situación I, observador C.	29
2.13. Situación II.	30
2.14. Situación II, observador B.	31
2.15. Situación III.	32
2.16. Situación III, observador Usuario	33
2.17. Situación III, observador A	33
2.18. Situación III, observador A	34
2.19. Situación III, observador A, perspectiva relativista.	35
A.1. Divergencia mayor a cero.	55
A.2. Divergencia igual a cero.	55
A.3. Divergencia menor a cero.	55

Capítulo 1

Contexto problemático.

1.1. Introducción.

Este documento es el resultado un proyecto de investigación que surge del interés y la pasión de un tema que se evidencio en los cursos de electromagnetismo II y de relatividad especial en la Universidad Pedagógica Nacional, en la Licenciatura en Física, abordando las ecuaciones de Maxwell y de cómo estas hacen parte de una teoría que unificó los fenómenos eléctricos y magnéticos, y pudo dar explicación al comportamiento de las brújulas durante un rayo, también de explicar la naturaleza de la luz, al comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos y apporto a nuevas ramas del conocimiento como la relatividad, la cuántica entre muchos otros fenómenos. El interés no solo va en mostrar sus aportes sino en evidenciar la importancia de estas ecuaciones para la enseñanza de la física, pero también evidenciar que esta teoría tenía ciertas irregularidades como: la varianza ante las transformaciones de galileo y su principio de relatividad y la incompatibilidad con la mecánica como se evidenciara a lo largo del documento.

La importancia de las ecuaciones de Maxwell se resalta en una teoría que unificó los fenómenos eléctricos y magnéticos, como lo menciona Berkson el interés de los científicos del siglo XIX, era en dar una explicación a los fenómenos eléctricos y magnéticos, aunque se pensaban como hechos independientes, esto debido a que los científicos históricamente han querido relacionar la gran mayoría de fenómenos físicos, con la intención de tener una única teoría que explique o de cuenta de muchos fenómenos de la naturaleza que aparentemente son independientes entre sí. [Berkson, 1974][pág. 47] Un ejemplo de estas teorías de unificación, la realizo Isaac Newton en el siglo XVII, quien consiguió relacionar los fenómenos observables en la tierra con la astronomía, esto mediante la teoría de la gravitación universal. Newton se dio cuenta que la fuerza que hace mover a los planetas es la misma que hace caer a los objetos en la tierra.

Mas tarde, ya para el siglo XIX, llega otra teoría de unificación que se produjo con la teoría de James Clerk Maxwell, quien consiguió relacionar los fenómenos eléctricos y magnéticos, en una teoría de campo electromagnético, sin embargo, no fue un trabajo propuesto solo por él. La gran contribución de Maxwell fue reunir en una teoría, largos años de resultados experimentales y teóricos hechos por científicos como: Coulomb, Ampere, Gauss, Faraday entre otros, este último fue muy importante, al introducir el concepto de líneas de fuerza¹ definiendo este concepto de la siguiente manera: “*Son líneas cuyas tangentes están siempre en la dirección de la fuerza; en el caso de una sola partícula cargada, las líneas de fuerza son rectas y surgen de la partícula en todas las direcciones, como la luz emitida por una fuente luminosa.*” [Faraday, 1839] [pág.133]

Como lo menciona Berkson la situación problemática de los científicos del siglo XIX era hallar una relación entre la electricidad y magnetismo, entre estos estaba Faraday, Oersted, Ampere, entre otros. Esta problemática era poder relacionar los fenómenos de la electricidad estática, la atracción amperiana de las corrientes, inducción electromagnética, entre otros fenómenos. [Berkson, 1974] Ahí es donde juega un papel fundamental Maxwell, quien unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en su “Tratado de electricidad y magnetismo”, cuyo nombre original es *A treatise of electricity and magnetism*.² En consecuencia proporciono una serie de ecuaciones con la intención de relacionar fenómenos eléctricos y magnéticos. Una década después Oliver Heaviside simplifica las ecuaciones propuestas por Maxwell en cuatro ecuaciones mediante el cálculo vectorial que son las que actualmente se conocen y utilizan con el nombre de las ecuaciones de Maxwell, estas describen la dinámica de los campos eléctricos y magnéticos. Por consiguiente, pasa a ser uno de los campos más importantes a estudiar e investigar en la física en aquel entonces, a partir de esto a lo largo de la historia surgieron algunos problemas para esta nueva teoría.

En relación a lo anterior, la física en el siglo XIX yacía en la mecánica newtoniana y del principio de relatividad Galileano, recordando que Galileo Galilei estudio el movimiento relativo de dos sistemas de referencia, postulando su principio de relatividad, que se puede explicar de la siguiente forma, las leyes mecánicas son iguales para dos sistemas de referencia en movimiento relativo, esto quiere decir

¹El concepto de líneas de fuerza magnética fue propuesto por Faraday en 1839, “por curvas magnéticas quiero decir las líneas de fuerza, que se manifiestan mediante limaduras de hierro.”

²MAXWELL. James Clerk. *A treatise on electricity and magnetism*” vol. I, Dover Publications Inc., New York, 1954. * Traducción realizada por Juan Carlos Orosco y María Cecilia Gramajo.

que todos los fenómenos físicos evidenciaran el mismo resultado sin importar en cuál de los sistemas de referencia se encuentre el observador, con esta consideración debería ocurrir lo mismo con los fenómenos electromagnéticos, es decir que las leyes propuestas por Maxwell deberían cumplir con el principio de Galileo, para comprobar esto se aplicaron las ecuaciones de transformación de Galileo dando como resultado que las ecuaciones de Maxwell son variantes ante una transformación de Galileo.

Si las leyes electromagnéticas son variantes, es decir no mantienen su forma al cambiar de sistema de referencia, el fenómeno observado no es el mismo debido a que da un resultado diferente para cada observador. Con esto surgieron una serie de preguntas y problemas respecto a las leyes que soportan la teoría electromagnética y al principio de relatividad de Galileo. Fue hasta el año 1905 que Albert Einstein postuló un artículo el cual dio la solución de este problema titulado "*On the Electrodynamics of moving Bodies*"³ traduciéndolo al español "*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*", que más adelante se complementa con la teoría de la relatividad especial, para poder comprender los fundamentos relativistas de la teoría del electromagnetismo.

Esto se hace para entender que al aplicar las transformaciones de Lorentz las ecuaciones de Maxwell son invariantes en todos los sistemas de referencia, en otras palabras estas ecuaciones no cambian, con lo anterior se pretende explicar la relación implícita que hay entre el electromagnetismo y la relatividad y el porqué las ecuaciones de Maxwell no cumplían con las transformaciones de Galileo, pero si cumplían con las transformaciones de Lorentz, esto se hace evidenciando que lo largo de la historia grupo de científicos influyó para que Einstein diera una solución al carácter relativo del fenómeno.

La importancia de este proyecto no es hacer evidente que las ecuaciones de Maxwell son variantes ante las transformaciones de Galileo, pero son invariantes ante las transformaciones de Lorentz, es evidenciar como el electromagnetismo y la relatividad especial son dos teorías desarrolladas cada una con sus propios cimientos pero que al final están entrelazadas debido a que hay fenómenos que las relacionan, de esa manera nace la idea de este trabajo el cual se enfoca en la comprensión de fenómenos electromagnéticos desde diferentes perspectivas.

³"Artículo publicado por Albert Einstein en 1905 con título *On the Electrodynamics of moving Bodies*, este trajo una importancia notoria para la física del siglo XIX y en su actualidad sigue siendo un referente para la ciencia."

1.2. Problemática de la investigación.

De acuerdo a lo ya expuesto, ésta propuesta nace del interés de la relación que existe entre el electromagnetismo y la relatividad especial, pero abordar ésta relación no es evidente para algunos estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional, debido a diferentes circunstancias: pueden ser por cuestiones del contexto de la misma universidad, ya sea, por falta de tiempo en los diferentes espacios académicos, o por el simple hecho que se pueden considerarse como dos ramas completamente aisladas que no tienen nada en común, pero esto se considera como un problema global, que afecta a muchas áreas del conocimiento, como lo plantea Jurjo Torres “*En la actualidad una de las disputas que tienen muchas de las áreas de conocimiento es la delimitación de sus fronteras. Cada vez son más numerosas las especialidades que se pugnan entre sí por ámbitos de intervención profesional, porque consideran que tal o cual parcela del conocimiento y acción les pertenece*”. [Santomé, 1994a][pág.48]

De lo anterior se puede considerar, que el estudiante aísla los conceptos al no encontrarle alguna relación entre áreas. Con este referente surge el presente proyecto donde se quiere evidenciar la relación implícita que existe entre los dos campos del conocimiento, mostrando una serie de fenómenos que los relacionan.

Con este trabajo no se pretende realizar un curso de electrodinámica relativista o algo similar, lo que se pretende es mostrar con la ayuda de un software, la comprensión y relación de estas dos teorías, con el objetivo de visibilizar el conocimiento desde una perspectiva integral, en otras palabras, que haya una relación con el fin que sea visible para los estudiantes, en algunas áreas del conocimiento que facilitarían el desarrollo de diferentes situaciones. Esto en un plano más general, contextualizando esta problemática con las áreas del conocimiento electromagnetismo II y relatividad especial, es decir, que el electromagnetismo tiene fenómenos que se pueden relacionar y abordar desde la relatividad especial, sin conocimientos previos de esta. Con este planteamiento del problema surge la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de didáctica se puede desarrollar en los estudiantes del Departamento de Física para que relacionen los conceptos de la teoría electromagnética con la relatividad especial?

1.3. Justificación de la problemática.

Esta investigación pretende aportar a la enseñanza de la física desde una perspectiva de la relación física - matemática que hay entre el electromagnetismo y la relatividad especial, con el uso de las tecnologías que permiten apoyar la comprensión y a la integralidad de las teorías.

Con lo anterior, lo que se pretende es que este trabajo aborde la relación del electromagnetismo y la relatividad, para estudiantes de la Licenciatura en Física, pero ¿Por qué es importante para un Licenciado abordar esta relación? Este trabajo es significativo porque pertenece a la línea de la enseñanza de la física y la relación física – matemática, donde se reflexiona sobre el rol de la matemática en la enseñanza de la física que es una herramienta o un lenguaje que permite la comprensión de teorías y fenómenos, esto proporciona que el concepto tenga un vínculo físico y matemático consolidando la integralidad del conocimiento.

En consecuencia, lo que se pretende es usar la matemática y la tecnología para abordar una serie de situaciones que involucren fenómenos que relacionen el electromagnetismo y la relatividad especial, enfatizando que el estudiante adquiera habilidades matemáticas, conceptuales, el uso de las TIC y destrezas de diferentes teorías para comprender y solucionar situaciones similares a las planteadas, partiendo de la premisa “*Pocos estudiantes son capaces de visualizar algo que le permita unir o integrar problemáticas de diferentes asignaturas*”. [Santomé, 1994a][pág. 29].

Se puede considerar que la propuesta de este proyecto es el estudio que converge de los espacios académicos mencionados, haciendo uso de las tecnologías, que permitirá evidenciar si el estudiante ya tiene una idea de la relación como por ejemplo: su vínculo entre algunos fenómenos al momento de interpretarlos, y si no es así, le permitirá comprender dicha relación. Ya que es evidente el avance tecnológico e informático en los últimos años, y estos avances ponen un desafío en la educación, puesto que las nuevas generaciones son nativas a estos avances y a su vez los usan como una ayuda para su proceso de aprendizaje, por esta razón la educación debe ir de la mano con la tecnología, para hacer uso de herramientas virtuales que permiten facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para facilitar estos procesos es importante que el software a utilizar haga uso de la interactividad con el estudiante que logra incentivarlo, como lo mencionan Ricardo Gómez y Alvaro Castro “*una buena utilización del medio computacional en la educación depende, en gran medida, de lo interactivo que sea el material*” [Castro et al., 1998] [pág. 3].

1.4. Objetivos.

Objetivo General.

Diseñar e implementar una estrategia didáctica que permita relacionar la teoría electromagnética con la relatividad especial en diferentes situaciones, aplicando el principio de relatividad Galileano.

Objetivos Específicos.

- Identificar algunos fenómenos que relacionen el electromagnetismo y la relatividad, para evidenciar la relación entre estas teorías y los aportes en la enseñanza de la física.
- Diseñar un software educativo, que permita abordar problemas del electromagnetismo desde una perspectiva clásica y relativista abordando el principio de relatividad Galileano.
- Interpretar cualitativamente cada una de las ecuaciones de Maxwell, desde una perspectiva física y matemática, evidenciando su importancia en la formación de futuros licenciados.

1.5. Antecedentes.

Para la elaboración de este trabajo se tuvieron en cuenta algunos trabajos investigativos, que tienen una relación con la problemática que se abordara en esta investigación.

El Experimento de Michelson y Morley en la Clase de Relatividad Especial, Como Herramienta Para la Comprensión Del Concepto Sistema de Referencia.

Universidad Pedagógica Nacional; año: 2004.

Autor: Angela Rocío Hernández Tique.

Asesor: Eduardo Garzón Lombana.

La autora diseña una propuesta de aula apoyada de herramientas didácticas, para la comprensión del concepto sistema de referencia, de tal manera que hace uso de las actividades POE, (predecir, observar y explicar), donde su enfoque pedagógico es la enseñanza para la comprensión.

Esta investigación aporta aspectos importantes con respecto al enfoque pedagógico e implementación debido a que comparte la idea de que el profesor es un sujeto que incentiva a los estudiantes al aprendizaje interactivo a partir de diferentes actividades que los motiven en su rol de futuro docente donde incentiva a que el profesor sea más creativo.

Análisis de la falta de simetría del electromagnetismo clásico y su solución relativista: tensor de campo electromagnético.

Universidad Pedagógica Nacional; año: 2016.

Autores: Edwin José Vargas Moreno y Edwin Sebastián Barrera Mendivelso.

Asesor: Yesid Javier Cruz Bonilla.

Los autores hacen un análisis sobre la no simetría de la teoría electromagnética, en consecuencia, como esto resulto siendo un problema para la física, pasando hacer un tema importante para investigar en el siglo XIX, debido a que el electromagnetismo clásico no correspondía con el principio de relatividad Galileano, en el trabajo hacen un análisis de la conexión del electromagnetismo clásico y la relatividad especial.

Este trabajo resulta importante puesto muestra la relación implícita que hay entre la teoría electromagnética y la relatividad especial y las consecuencias que trajo a la ciencia, es un trabajo detallado de las transformaciones de Galileo y de Lorentz en las ecuaciones de Maxwell, evidenciado que las matemáticas son una herramienta importante en las ciencias.

Micromundo Para la Enseñanza de la Óptica en Estudiantes de Grado Octavo.

Universidad Pedagógica Nacional; año 2010.

Autor: Víctor Andrés Heredia Heredia.

Asesor: Eduardo Garzón Lombana.

La propuesta de este trabajo es una estrategia que permite el acercamiento del concepto de reflexión de la luz a través de un software, usado como herramienta didáctica en el aprendizaje y comprensión de algunos fenómenos físicos tratados desde el aspecto tecnológico.

Esta propuesta resulta fundamental, debido a que muestra el uso de las herramientas tecnológicas como una forma esencial y pertinente al momento de dar una explicación de un fenómeno, por esa razón concuerda con el presente trabajo, de tal manera que este referente evidencia que los estudiantes son más receptivos ante nuevas propuestas educativas tecnológicas, resultando importante porque evidencia la viabilidad de diseñar una propuesta didáctica haciendo uso de la tecnología.

Estrategia didáctica para el estudio de la refracción de la luz, como base para el desarrollo de los estándares en competencias, propuestos por el ministerio de educación nacional.

Universidad Pedagógica Nacional; año 2016.

Autor: Paula Andrea Almonacid Castiblanco.

Asesor: Eduardo Garzón Lombana.

En este trabajo de grado, el autor propone una estrategia didáctica para el estudio de la refracción de la luz, basada en TIC y en práctica experimental como base para el desarrollo de los estándares en competencias propuestos por el Ministerio de Educación Nacional.

La investigación aporta a esta investigación las diferentes problemáticas que se pueden presentar al momento de usar un software educativo, permitiendo mejorar el diseño, la navegabilidad, la interacción que permite hacer un entorno más ameno para el estudiante, debido a que el aprendizaje depende en gran parte a lo interactivo e ingenioso del software.

Capítulo 2

Marco teórico.

2.1. Las ecuaciones de Maxwell.

En este capítulo aborda el estudio de las cuatro ecuaciones más influyentes en la ciencia, las ecuaciones de Maxwell, pero también se abarcara la importancia que estas tuvieron para la relatividad especial y los aportes en la física durante el siglo XIX, esto se hace con la intención de presentar los conceptos relacionados del electromagnetismo clásico y la relatividad especial.

Con cada una de las ecuaciones de Maxwell se hará una interpretación física, desde los conceptos matemáticos y físicos que estas conllevan.

2.2. Contexto histórico.

Para el siglo XVII algunas observaciones revelaban que ciertos materiales eléctricos al acercarlos a otra tenían propiedades de atracción o repulsión. Los primeros en evidenciar estos fenómenos fueron Stephen Gray, Benjamín Franklin entre otros. Los experimentos que hicieron estos científicos evidenciaron la presencia de cargas eléctricas, las clasificaron en dos tipos (positivas y negativas), las cuales experimentaban una fuerza de atracción o de repulsión, las cargas del mismo signo tienen un efecto de repulsión, mientras que las cargas de signo contrario tienen un efecto contrario de atracción. Por otro lado, a este fenómeno se le denominó (flujo eléctrico), efecto causado al mover electrones genera unas corrientes eléctricas, aunque se desconocía que esta corriente se podía cuantizar, tampoco se sabía la existencia de electrones o protones, lo único que se conocía era la magnetita, que como la carga tiene propiedades de atracción o repulsión.

A pesar de que ya se conocían estos fenómenos, se percibían que eran teorías aisladas tanto la electricidad como el magnetismo, cada uno por su lado. Fue hasta 1820 que el danés Hans Cristian Orsted se dio a la cuenta que una corriente eléctrica

creaba a su alrededor un efecto magnético, y esta a su vez hacia oscilar una aguja, de esta manera quedaba claro que no eran fenómenos aislados o independientes, como lo afirma el mismo Orsted, , *“siempre he estado tentado de comparar las fierezas eléctricas y magnéticas. El gran parecido entre las atracciones y repulsiones eléctricas y magnéticas, así como la gran similitud entre sus leyes conduce necesariamente a realizar esta comparación...”* [Ørsted, 1813][pág. 21]

Pero este no fue el único descubrimiento, del mismo modo otros científicos hallaron una serie de fenómenos que relacionaban la electricidad y el magnetismo, un ejemplo más fue Faraday que de manera experimental muestra la inducción electromagnética, que él denominó (rotaciones electromagnéticas), aclarando este concepto en su informe titulado *“Historical Sketch of Electromagnetims”* de la siguiente manera:

“Al hacer un experimento para averiguar las posiciones relativas de la aguja magnética respecto a un alambre conectado a una pila, llegue a ciertos puntos que en mi opinión pueden dar nuevas ideas sobre la acción electromagnética y el magnetismo, en el cual observe, cuando se coloca un imán cerca al cable se obliga a la aguja a que de vueltas a su alrededor, acercándose por el lado que es atraído y alejándose por el que es repelido, es decir la aguja es atraída y repelida a la vez, girando en un círculo determinado evidentemente las fuerzas circulantes” [Jones and Faraday, 1821][pág.127,128]

Con estos descubrimientos emerge una idea que insinúa una relación entre estas dos áreas, en consecuencia, gracias a estos fenómenos ya se podía intuir lo que estaba sucediendo con la teoría eléctrica y magnética y el avance de una ciencia incipiente, que en un principio lo que hace es descubrir fenómenos, para más adelante describirlos, comprobarlos y clasificarlos, como lo afirma Maxwell en (1954)¹, *“Encontré que muchos de los más fértiles métodos de investigación descubiertos por los matemáticos podían ser expresados mucho mejor en términos de las ideas derivadas de Faraday que en su forma original”* [Maxwell, 1954][pág. 7]

Ahora se describirá la teoría electromagnética, sus ecuaciones y su significado físico.

¹MAXWELL. James Clerk. A treatise on electricity and magnetism” vol. I, Dover Publications Inc., New York, 1954. * Traducción realizada por Juan Carlos Orosco y María Cecilia Gramajo

2.2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

En principio estas ecuaciones en conjunto describen el campo eléctrico y magnético, en otras palabras detalla el comportamiento de fenómenos eléctricos y magnéticos y la relación, en consecuencia este conjunto de ecuaciones describen fenómenos como: la corriente eléctrica, la luz, la corriente estática, las ondas electromagnéticas, la desviación de una brújula cerca de un conductor, la variación de un del flujo de un campo eléctrico o magnético en una superficie, entre muchos fenómenos más...

Para iniciar este capítulo es pertinente tener en cuenta la siguiente aclaración: A los campos eléctricos y magnéticos se les asocian los siguientes vectores \vec{E} y \vec{B} con cualquier punto (x, y, z) del espacio, son dos vectores que pueden cambiar con el tiempo, por consiguiente los campos eléctricos y magnéticos son considerados ahora funciones vectoriales, lo anterior se puede entender teniendo a Feynman como referente *“Precisamente por que se puede definir a \vec{E} y \vec{B} en todo punto en el espacio y esto se llama “campo”. Un “campo” es toda cantidad física que toma un valor diferente en cada punto del espacio.”* [Feynman et al., 1987][pág. 1-5]

2.3. Ley de Gauss para el campo eléctrico.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

Ahora pasando a la ley de Gauss, se aplica una operación con un operador vectorial a una superficie escalar que en este caso, permite hallar la distribución en el espacio punto a punto, para tener una idea más clara suponga que se tiene una superficie curva S y por ella pasa un flujo eléctrico Φ_E , como se evidencia en la siguiente figura(2.1), lo que permite está ecuación es encontrar la variación de flujo que pasa a través de la superficie S , por consiguiente lo que se pretende es saber: ¿Cuánto flujo o partículas pasan a través de la superficie en cada segundo?

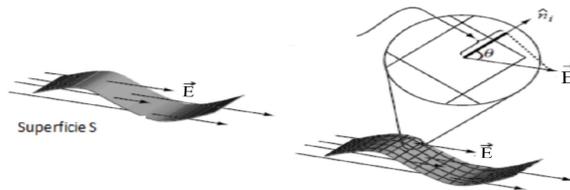


Figura 2.1: Campo eléctrico a través de una superficie.

Fuente de la imagen: Tomado del libro *A Student's Guide to Maxwell Equations*.

Respondiendo a la pregunta anterior, se define al flujo eléctrico Φ_E en el caso mas simple de un campo vectorial se define como: "La cantidad de vectorial (flujo), que atraviesa un área de una superficie", [Fleisch, 2008][pág. 67] al ser una función vectorial debe tener una magnitud y dirección, y este conjunto debe tener la misma dirección que el flujo Φ_E esto determina la cantidad vectorial que pasa por la superficie S en un tiempo determinado.

Exponiendo la idea de Feynman "el flujo de un campo vectorial a través de una superficie está definido como el valor medio de la componente normal del vector por el área de la superficie", [Feynman et al., 1987][pág.1-7] y este se puede representar mediante el uso de líneas de campo, pero esta consideración depende de la distribución de líneas que atraviesan un área determinada, es decir que la densidad del campo eléctrico es proporcional a la cantidad de líneas, es importante analizar que la idea del flujo eléctrico Φ_E por medio de las líneas de campo son solo una representación conveniente para el campo eléctrico \vec{E} por lo tanto, la parte izquierda de la ecuacion (2.1), representa la divergencia ² del campo eléctrico.

En consecuencia, el flujo del campo eléctrico Φ_E a través de una superficie cerrada la cual no tiene cargas se define de la siguiente manera:

El flujo del campo eléctrico Φ_E en una superficie S cerrada = Qn / ϵ_0
donde Qn , es una carga neta incluida y ϵ_0 es una letra griega (Épsilon), una contante física, denominada la permitividad eléctrica del vacío, físicamente la permitividad está determinada por la tendencia de un material a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico y de esa forma anular parcialmente el campo interno del material, como en está situación no hay cargas en el interior de la superficie S el flujo eléctrico Φ_E es cero.

En conclusión el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada, se puede ver como el número de líneas de campo eléctrico \vec{E} que atraviesan esta

²Para comprender el concepto de divergencia se puede remitir a los anexos, (Una explicación breve a la divergencia.)

superficie, otro aspecto físico es: una carga eléctrica genera un efecto en el espacio, el cual está relacionado con el flujo determinado que puede ser positivo o negativo, entrante o saliente.

2.4. Ley de Gauss para el campo magnético.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

Al igual que el flujo eléctrico Φ_E , el flujo magnético Φ_B a través de una superficie cerrada se puede considerar como la cantidad de campo magnético \vec{B} que fluye a través de la superficie S , y este flujo tiene las mismas consideraciones, como el número de líneas que penetran la superficie debe ser proporcional a su intensidad.

Recordando que los campos eléctricos \vec{E} tienen una fuente cargas positivas y un fin cargas negativas, con los campos magnéticos \vec{B} no sucede lo mismo, no se originan en ninguna carga ni terminan en ellas, lo que sucede es que las líneas de campo vuelven a circular sobre si mismas, formando una especie de bucles continuos. Para entender lo anterior se considera un imán y sobre este se coloca una hoja con limadura de hierro, este experimento genera el siguiente patrón:

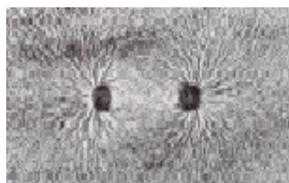


Figura 2.2: Patrón de limadura de hierro bajo el efecto de un imán.

Fuente de la imagen: Foto tomada por el autor en el laboratorio de la Universidad Pedagógica Nacional.

Si se observa la figura (2.2) con atención, se evidencia en el experimento se aprecian curvas pero no hay una flecha que indique la dirección. No se sabe por donde entran o salen por lo que se trata de una convención, al polo norte se le atribuye por donde salen las líneas y el polo sur por donde entran para tener un poco más claro esto observemos la siguiente imagen:

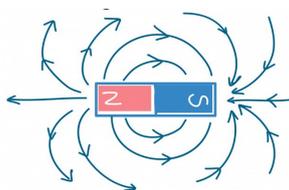


Figura 2.3: Simulación del comportamiento de las líneas de campo magnético.

Fuente de la imagen: <http://blogfernandafisica2.blogspot.com/campo-magnetico>.

Independiente de la forma del imán, todas las líneas del campo magnético \vec{B} que entran en un volumen cerrado se compensan con las líneas que salen de ese volumen, analizando físicamente la ley de Gauss para el campo magnético, es claro

que el flujo Φ_B que pasa por cualquier superficie cerrada debe ser cero por qué las líneas de campo magnético siempre forman bucles cerrados o completos.

Pero hay una diferencia muy importante y quizás es lo que hace tan sorprendente a esta segunda ecuación con la primera es que en el campo eléctrico las cargas positivas y negativas se pueden separar, con el campo magnético no sucede lo mismo, no se puede separar un imán en una parte polo norte y otra en un polo sur, así se parta el imán siempre se obtendrá dos polos - para sintetizar, se puede decir que: una carga eléctrica positiva no requiere de la existencia de una carga eléctrica negativa, en comparación con los polos si necesitan de ello para que exista un polo norte se necesita un polo sur. En otras palabras, no hay monopolos magnéticos, pero cabe aclarar que las ecuaciones de Maxwell son una representación matemática de experimentos aplicables a fenómenos físicos, en la actualidad hay investigaciones que pueden llegar a descubrir alguna partícula, como por ejemplo investigaciones en el detector, MoEDAL (Monopole and Exotics Detector At the LHC), pueden llegar al descubrimiento de algún tipo de monopolo magnético.

2.5. Ley de Faraday.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

En las ecuaciones (2.1) ley de Gauss para el campo eléctrico y (2.2) ley de Gauss para el campo magnético, se evidencio que cada una de estas explicaba fenómenos eléctricos y magnéticos, por separado, en la Ley de Faraday se relacionan estos dos campos. Faraday demostró que una variación de flujo magnético puede producir campos eléctricos.

2.5.1. El descubrimiento de la inducción electromagnética.

Como lo menciona Berkson, la búsqueda de Faraday por demostrar que una corriente eléctrica puede ser inducida por un flujo magnético Φ_B encerrado en un circuito, esto lo llevo a elaborar una serie de experimentos, uno de estos experimentos fue: *“en el año de 1831 que Faraday concibió la idea de un nuevo experimento, el cual pudo surgir al observar la propiedad que tienen los electroimanes muy intensos de invertir su polaridad casi instantáneamente, esto lo llevó considerar que un cable cerca de un campo magnético y la variación de la fuerza magnética producida por la creación del electroimán podría provocar un cambio en el estado de la tensión del cable.”* [Berkson, 1974][pág.92]

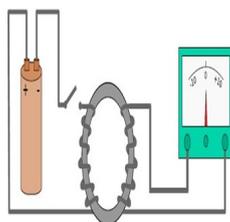


Figura 2.4: animacion del experimento inducción electromagnética.

Fuente de la imagen: <http://blogfernandafisica2.1.blogspot.com/inducción-electro>.

La figura (2.4), es una representación del experimento hecho por Faraday, es un circuito abierto que está conformado por: una pila, un electroimán y un galvanómetro, al cerrar el circuito, el electroimán queda imantado y el galvanómetro indicara un breve paso de corriente, al abrir el circuito, el electroimán se desimanta y se observaba nuevamente una breve corriente. Pero lo que realmente genera la corriente es la variación del flujo magnético Φ_B además de esto, cuando se cierra el circuito la corriente tiene un sentido y cuando se abre el circuito esta va en un sentido opuesto a la variación del flujo, lo cual se explica desde la Ley de Lenz, una consecuencia del principio de la conservación de la energía.

Lo realmente interesante del anterior descubrimiento, es el hecho que evidencia que la variación de un flujo magnético produce un campo eléctrico, pero estos campos inducidos son diferentes a los campos generados por una carga eléctrica, y con la ley de Faraday se puede entender este fenómeno como:

Esta ley implica, que si hay una variación de flujo magnético Φ_B en una superficie S y esta variación induce un campo eléctrico o una corriente inducida denominada fuerza electromotriz (*fem*)³. Que en palabras de Daniel Fleisch “*el cambio en el flujo magnético Φ_B a través de una superficie induce un campo electromagnético en cualquier trayectoria límite de esa superficie, y un campo magnético cambiante induce un campo eléctrico circulante*”. [Fleisch, 2008][pág. 71]

Matemáticamente la ecuación (2.3), describe una razón de cambio de acuerdo con la derivada parcial, $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ esto representa, el cambio del campo magnético con respecto al tiempo, si el cambio es cero quiere decir que el campo magnético no cambia en el tiempo, con lo anteriormente enunciado, se puede interpretar físicamente de la siguiente manera: Si hay un flujo magnético Φ_B cambiante o variante, a través de una superficie este induce un campo eléctrico en la superficie S , si hay un conductor presente o cerca a la superficie, el campo eléctrico inducido proporciona una (*fem*),

³la *fem* inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez del cambio en el tiempo del flujo magnético a través de un circuito.” Concepto tomado del libro Serway - Beichner. Quinta edición. tomo II [Serway et al., 2005][pág. 982]

que conduce una corriente a través del conductor, pero esta fuerza electromotriz se opone al cambio de flujo recordando que la derivada parcial del campo magnético es acompañada por un signo negativo, es decir, tiende a mantener el sentido del flujo existente, a esto se le conoce como ley de Lenz.

2.5.2. Ley de Lenz.

*La polaridad de la fem inducida es tal que tiende a producir una corriente que crea un flujo magnético, el cual se opone al cambio del flujo magnético a través del área encerrada por la espira de la corriente.*⁴ [Serway et al., 2005][pág. 989]

Según la visión de Lenz las corrientes inducidas por el flujo magnético siempre fluyen en la dirección contraria, para oponerse al cambio de dicho flujo, es decir si sobre una región donde se presenta variación de flujo magnético se encuentra una espira conductora, en ella se induce una corriente eléctrica y su sentido es tal que se opone a la variación del flujo. La corriente inducida genera un campo magnético que se opone a dicho cambio, de otro modo se sumarían los efectos lo cual va en contra del principio de conservación de la energía. La ley de Lenz es una consecuencia del trabajo realizado que se convierte en campo eléctrico, es aquí donde se evidencia la importancia de la ley de Faraday puesto que representa un principio físico universal, *magnético variable en el tiempo es capaz de producir un campo eléctrico, en sentido contrario a la variación del campo en el tiempo, esto es una consecuencia del principio de la conservación de la energía.* [Fleisch, 2008][pág. 77]

2.6. Ley de Ampère – Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Esta ecuación se remonta a 1820 donde los científicos André Ampère y Christian Orsted, aunque por separado realizaron una serie de experimentos, uno de estos experimentos consistía en: conectar un circuito con una pila a un conductor, evidenciando que alrededor del cable aparecía un campo magnético y este a su vez hacía girar la aguja de una brújula.

Aunque Orsted, no pudo obtener una relación matemática ya para 1826 Ampère había publicado una ley matemática que describía el experimento anterior que es el primer término de la ecuación (2.4), pero quien logró describir conceptualmente de una manera general este fenómeno fue Orsted como se muestra a continuación:

- *El efecto magnético era más intenso cuanto mayor era la intensidad de la corriente eléctrica, (se puede decir una proporcionalidad directa a la intensidad).*

⁴concepto desarrollado por el físico alemán Heinrich Lenz.

- El efecto magnético era más intenso cuanto más cerca del cable o conductor, (se puede entender como una proporcionalidad inversa a la distancia).
- La dirección del efecto magnético se dirige hacia afuera del cable, o perpendicular a este en una forma como si rodeara el cable. [Orsted,][pág.34]

Ahora pasando a la ecuación (2.4), en la parte izquierda proporciona información matemática de la circulación de un campo magnético \vec{B} alrededor de una superficie S cerrada, en el lado derecho hay dos términos los cuales son fuentes para el campo magnético una corriente inducción y una corriente de desplazamiento, en esta parte del trabajo se hace un análisis de como “Una corriente de desplazamiento a través de una superficie S produce un campo magnético circulante alrededor de la superficie” [Fleisch, 2008][pág. 84] es decir que se produce un campo magnético a lo largo de un área si esta encierra una corriente.

Para entender lo anterior, de como el campo magnético \vec{B} es generado alrededor de un conductor el cual es conectando a una pila con una corriente I , se acerca una hoja que contiene limaduras de hierro, se observa algo similar a la figura (2.5), ahora si se pasa una brújula alrededor del cable o conductor se evidencia que esta se mueve pero su movimiento se debilita al momento de alejarla del conductor, es decir que el campo magnético disminuye a razón de la distancia.



Figura 2.5: Experimento campo magnético producido por una corriente.
Fuente de la imagen: [http://blogfernandafisica2.blogspot.com/campo magnético producido por una corriente.](http://blogfernandafisica2.blogspot.com/campo_magnético_producido_por_una_corriente)

2.6.1. Densidad de la corriente eléctrica.

$$\vec{J}$$

Como se mencionó anteriormente, la ecuación contiene dos términos que originan el campo magnético. Uno es la densidad de corriente eléctrica en términos de vector, para entender el concepto de densidad de corriente, es importante recordar que el flujo eléctrico Φ_E se define como la cantidad flujo que pasa a través una superficie S en un determinado tiempo, es decir que la densidad de corriente es la cantidad de carga que pasa a través de la superficie S , pero en lugar de partículas lo que se mide o cuenta es la cantidad de cargas q que pasan por esta superficie S en un tiempo determinado.

La ecuación que expresa la densidad de corriente es:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (2.5)$$

Como se evidencia en la ecuación anterior esta si involucra carga, donde \vec{v}_d es la velocidad de los portadores de la carga q , entonces la dirección de la densidad de la corriente es la misma que la del flujo de corriente, y la magnitud es la corriente por unidad de área, la relación entre la corriente total que pasa a través de una superficie S depende de la geometría de dicha superficie. Si la densidad de la corriente \vec{J} es uniforme a la superficie S y es **perpendicular** a la superficie la relación es:

$$\mathbf{I} = |\vec{J}| \times \text{área de la superficie} \quad (2.6)$$

En cambio, si la densidad de la corriente \vec{J} es uniforme pero **no necesariamente perpendicular** a la superficie S para encontrar la corriente total \mathbf{I} a través de S se tendrá que determinar la relación entre \mathbf{I} y \vec{J} la cual es:

$$\mathbf{I} = |\vec{J}| \cdot \hat{n} \times \text{área de la superficie} \quad (2.7)$$

Ahora se detalla el termino que acompaña a la densidad de corriente μ_0 , es una constante, denominada permeabilidad magnética del vacío, está determina la respuesta de un material a un campo magnético aplicado, este conjunto $\mu_0\vec{J}$ representa la **corriente de conducción**, de acuerdo con lo anterior y retomando algunos textos en los cuales se refieren a la corriente eléctrica como un flujo de la densidad de corriente.

2.6.2. Densidad de corriente de desplazamiento.

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Este es el segundo término de la ecuación el cual fue adicionado por Maxwell y es la segunda fuente del campo magnético y en la ley de Ampère – Maxwell es la variación del campo eléctrico con respecto al tiempo, por lo tanto, representa la densidad de corriente de desplazamiento, recordando que la corriente eléctrica se define como el movimiento físico de cargas q , las unidades de este término son amperios por metros cuadrado, y actúa como una fuente del campo magnético \vec{B} , al igual que la densidad de corriente de conducción, es una cantidad vectorial que tiene la misma relación con el campo magnético.

La parte importante es el concepto del campo eléctrico \vec{E} cambiante que produce un campo magnético \vec{B} , es aquí donde surge la idea de onda electromagnética puesto que, debido a esta ley se supo que los campos eléctricos y magnéticos se propagan en el vacío, y la simetría de esta ecuación es perfecta, en virtud de que los campos magnéticos cambiantes inducen campos eléctricos, y los campos eléctricos cambiantes inducen campos magnéticos.

Parecerá exagerado decir que esta ecuación muestra la belleza de la física una simetría extraordinaria, que surgió de los aportes de muchos científicos anteriormente mencionados y del modelo mecánico de Maxwell. La adición de un campo eléctrico cambiante como una fuente del campo magnético, amplió el alcance de la ley de Ampère a los campos dependientes del tiempo mediante la eliminación de la inconsistencia, con el principio físico de la conservación que en este caso se aplica a la conservación de la carga, y por último y más importante le permitió James Clerk Maxwell establecer una teoría completa del electromagnetismo, la primera teoría de campo consistente.

2.7. Una mirada relativista a las ecuaciones de Maxwell.

A lo largo de la historia las ecuaciones de movimiento formuladas por Newton describían correctamente la naturaleza, tras varias comprobaciones teóricas surgió una inconsistencia de estas ecuaciones, luego se descubrió una corrección propuesta por Einstein en 1905. A grandes rasgos la teoría de la relatividad especial soluciona esta inconsistencia cambiando las leyes de Newton introduciendo un factor de corrección para la masa.

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (2.9)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.10)$$

De las ecuaciones anteriores donde la ecuación(2.9) es la propuesta por Newton y la ecuación (2.10) es la solución a esta inconsistencia propuesta por Einstein, la exactitud de la corrección de la masa ha sido confirmada ampliamente observando muchos tipos de partículas que se mueven con velocidades cercanas a la luz, es importante aclarar que Einstein al igual que Maxwell lo que hicieron fue reunir experimentos y razonamientos físicos, para llegar a un descubrimiento final que en este caso fue Einstein.

En este apartado del capítulo está dedicado a la teoría de la relatividad especial que fue publicada en 1905. El principio de relatividad fue formulado por primera vez por Galileo y este ha sido aplicado en las leyes de la física, por ejemplo, Newton en sus corolarios de las leyes de movimiento: *“Los movimientos de cuerpos en un mismo espacio dado son iguales entre sí, si este espacio está en reposo o si se mueve uniformemente sobre una línea recta”* [Newton, 1687]. Para tener una idea de lo anterior, por ejemplo, suponga que en un automóvil se desplaza con una velocidad uniforme, y en este

se hacen unos experimentos, los fenómenos realizados serán iguales si se observan cuando el automóvil está en reposo o cuando se encuentra en movimiento.

Comprobando si lo anteriormente es cierto surge la siguiente pregunta: ¿Las leyes de Newton realmente son iguales en diferentes marcos de referencia móviles? Para responder a esta pregunta se debe hacer uso de la imaginación, con el siguiente ejemplo; suponga que un observador está en un automóvil en movimiento sobre una vía recta, en contraste hay otro observador que está de pie sobre la acera o andén de esta vía, ambos observadores evidencian la caída de un cuerpo, desde su propio sistema de referencia y el movimiento del cuerpo es vertical uniformemente acelerado. los sistemas de referencia para la situación anterior son:

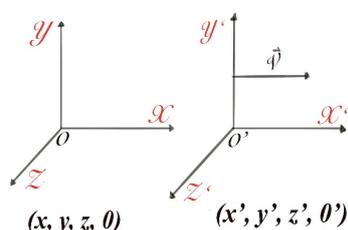


Figura 2.6: *Sistemas de referencia.*
Fuente de la imagen: *Elaboración propia.*

La referencia de la dirección de la velocidad del automóvil es $O'x'$ esta dirección es arbitraria no afecta en nada si se desea cambiar la dirección, también se consideró al tiempo $t=0$ por consiguiente 0 y $0'$ donde las coordenadas del observador que está en el automóvil son $(x', y', z', 0')$ y para el observador que está en reposo son $(x, y, z, 0)$ las ecuaciones de transformación para los sistemas son:

$$\left. \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \right\} \left. \begin{cases} x'' = \ddot{x} \\ y'' = \ddot{y} \\ z'' = \ddot{z} \end{cases} \right. \quad (2.11)$$

Se observa que las segundas derivadas coinciden, esto permite intuir que el principio de relatividad Galileano el cual enuncia a continuación: “*dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación rectilínea uniforme son equivalentes desde el punto de vista mecánico; es decir, los experimentos mecánicos se desarrollan de igual manera en ambos y las leyes de la mecánica son las mismas*”.⁵ [Galilei and Azcárate, 1645] por lo tanto, se observa que las leyes de Newton cumplen dicho principio también cumplen con la transformación de Galileo, es decir que las leyes de Newton tienen la misma forma para todos los sistemas de referencia en movimiento, y esto a su vez se aplicó durante muchos años a los fenómenos físicos.

⁵Galilei Galilei, Discursos y demostraciones en torno a dos ciencias nuevas relacionadas con la mecánica, Galileo 1620

El anterior principio de relatividad Galileano que se aplicó se ha usado en la mecánica durante largo tiempo, pero en el siglo XIX aumento el interés en este principio aplicándolo a los fenómenos eléctricos y magnéticos, como ya se mencionó estos fenómenos se pueden abarcar desde las ecuaciones de Maxwell que describen los campos eléctricos y magnéticos en un único sistema, pero largas investigaciones teóricas evidenciaron que las ecuaciones de Maxwell no cumplen con este principio de relatividad, es decir que al aplicar las transformaciones de Galileo estas no quedan igual, por esta razón los fenómenos en sistemas de referencia en movimiento serian diferentes a los mismos fenómenos en un sistema en reposo, ¿qué pasó con las ecuaciones de Maxwell?

2.7.1. Las transformaciones de Lorentz.

En el apartado anterior se evidencio la irregularidad de las ecuaciones de Maxwell ante el principio de relatividad, al inicio se pensó como era una teoría nueva que las ecuaciones debían estar con algún error, luego de un largo intento de cambiarlas cada vez se confirmaba que realmente eran correctas, puesto con cada ajuste que les hacían se descubrían nuevos fenómenos eléctricos, por esta razón ese intento de modificaras fue abandonado, las leyes de Maxwell eran correctas. Por otro lado, Hendrik Lorentz evidencio que, al hacer las siguientes sustituciones en las ecuaciones de Maxwell, mantienen su forma es decir a esto se le conoció como las transformaciones de Lorentz.

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como: transformación de Lorentz, siguiendo una sugerencia hecha originalmente por Poincaré, Einstein propuso que: *“todas las leyes físicas debían ser tales de permanecer las mismas bajo una transformación de Lorentz”*. [Feynman et al., 2011][pág. 15-4] En otras palabras, se deberían cambiar las leyes de la mecánica y no las leyes de la electrodinámica. Si usa la transformación de Lorentz en el caso del automóvil en movimiento y el observador en reposo, no se puede detectar quien se está moviendo por que el resultado será que todas las ecuaciones son iguales en ambos sistemas de coordenadas.

Es importante pensar en lo que significa el reemplazo de una transformación a otra, es posible que las nuevas transformaciones den el mismo resultado experimentalmente, para saber esto tal como lo hizo Einstein: *“No basta con estudiar las*

leyes de la mecánica, sino que, se debe analizar el concepto de espacio y tiempo para poder comprender esta transformación". [Feynman et al., 2011][pág. 15-4] Por el momento esto ya está justificado debido a que los resultados teóricos evidencian los resultados experimentales.

En conclusión, las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante la transformación de Lorentz pero no ante la transformación de Galileo. Esto significa que las ecuaciones de Maxwell cumplen con el principio de relatividad de Galileano debido a que son las mismas, y los fenómenos que estas describen son los mismos en cualquier marco de referencia. Para saber esto no basta con estudiar las leyes de la mecánica, sino que tal como lo hizo Einstein, se debe analizar los conceptos de espacio y tiempo para poder comprender esta transformación, se tendrá que discutir con detalle estos conceptos y sus consecuencias...

2.8. Componente pedagógico.

2.8.1. La tecnología y el aprendizaje.

En el proceso educativo los alumnos utilizan una serie de habilidades cognitivas con el fin de adquirir un nuevo conocimiento, en la pedagogía se emplean estrategias para la enseñanza como medio para facilitar el aprendizaje de los estudiantes, con esto se pretende enfatizar que la habilidad de **compresión** permite que lo aprendido por los alumnos puede ser incorporado y realizable y utilizado en muchas circunstancias diferentes dentro y fuera de las aulas como base para un aprendizaje amplio y lleno de posibilidades, por tal motivo es importante y pertinente incorporar en este trabajo el aprendizaje para la comprensión.

Con lo anterior es importante aclarar el concepto de comprensión.

2.8.2. ¿Qué es la comprensión?

La comprensión se puede interpretar como una actividad que va más allá de la memorización y la rutina, como ejemplo: suponga que la maestra le pide a sus estudiantes el abecedario que generalmente se aprende por memorización, pero que pasaría si esta vez la maestra les pidiera el abecedario no en orden sino en una forma aleatoria como por ejemplo empezar desde la letra Z, para este ejemplo la maestra les está pidiendo un desempeño de comprensión puesto que los estudiantes no habían hecho esto antes y tienen que pensar en ello. Si por el contrario se les pide el abecedario en orden no sería un ejercicio de comprensión debido a que lo aprenden más por memorización.

Como referente la Enseñanza Para la Comprensión (EPC), se enuncia a Perkins quien muestra una idea más clara de la comprensión: *“la comprensión es poder realizar una gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a un tema –por ejemplo, explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías y representarlo de una manera nueva.”* [McAnally-Salas et al., 2006][pág.36]

Por lo tanto, la Enseñanza Para la Comprensión (EPC), está vinculada con el desempeño de usar las habilidades del individuo en diferentes situaciones, convirtiendo el aprendizaje en una reflexión de cómo se adquiere el conocimiento en diferentes contextos y situaciones.

2.8.3. La enseñanza para la comprensión en el aula.

Para poder incorporar la estrategia de la enseñanza para la comprensión se hace referencia a Perkins quien caracteriza cuatro elementos necesarios al momento de utilizar esta estrategia, los cuales son: *“tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua. Cada uno de estos elementos centra la investigación alrededor de como los alumnos pueden comprender articulando cada una de las metas de dichos elementos.”* [Santomé, 1994b][pág. 74]

Tópicos generativos.

Permite estudiar un tema a profundidad, el cual causa interés en los estudiantes para que puedan extender sus conocimientos con el fin de comprender el tema, es necesario que las competencias y conceptos abordados en las actividades sean acordes con los niveles formativos de los estudiantes, debido a que al tener cierta familiaridad con los conceptos permite alcanzar las metas de comprensión establecidas.

Metas de comprensión.

Este elemento permite o establece lo que se quiere que los estudiantes realicen de acuerdo con la actividad, para esto es importante que en los tópicos generativos se tenga una temática a realizar especificando los conceptos a abordar, el tipo de actividades a realizar, esto permitirá tener claro cuál es el propósito de la actividad y cuáles son los alcances de dicha actividad.

Desempeños de comprensión.

Este tal vez sea uno de los elementos más importantes de la enseñanza para la comprensión puesto que permite evidenciar el desempeño y la comprensión de los estudiantes con base a las actividades propuestas, debe ser acorde con las metas de comprensión.

Evaluación diagnóstica continua.

Este cuarto elemento es una evaluación en relación con las metas de comprensión, pero no solo se trata de evaluar a los estudiantes sino de retroalimentar con el fin que cada uno reflexione acerca de su comprensión en las actividades propuestas por el docente, abordadas y realizadas por los estudiantes.

2.8.4. ¿Cómo evidenciar si las actividades permitieron llegar a las metas de comprensión propuestas por el docente?

Para dar respuesta a esta pregunta se presenta la propuesta didáctica, la evaluación diagnóstica continua se realizará siguiendo la estrategia Predecir, Observar y Explicar (POE), la cual es una estrategia propuesta en el año de 1979 en una investigación acerca del pensamiento de los estudiantes de Física de la Universidad de Pittsburg. Como afirman (Hernández Millán y López Villa, 2011) *esta es una estrategia de enseñanza, con la cual se puede saber qué tanto comprenden los estudiantes sobre una serie de actividades, al momento de desarrollarlas se tienen tres momentos importantes los cuales son: Predecir, Observar y Explicar.* [Hernández Millán and López Villa, 2011][pág.4, 5], Para esta propuesta, los estudiantes tendrán que predecir qué sucederá en un experimento y/o simulación. Luego observarán realmente que sucede con un fenómeno, determinado propuesto por el docente. La siguiente etapa es explicar el porqué del resultado de dicha situación y comparar con su primera observación, al comparar y establecer los niveles de comprensión de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de llegar a los niveles requeridos de comprensión propuestos al inicio de la actividad.

La unidad didáctica compila los siguientes aspectos didácticos abordados en el marco teórico: las tecnologías de la información, la enseñanza de la física desde una relación física - matemática y conceptual, esta unión se hace mediante la enseñanza para la comprensión, y la estrategia Predecir, Observar y Explicar, esto permite que el estudiante desarrolle una forma alternativa de aprendizaje de la física.

Por otra parte, permite relacionar la parte conceptual y matemática entre las áreas del conocimiento como lo son: El electromagnetismo y la relatividad especial desde el uso de las tecnologías, igualmente se planea una implementación para que se pueda desarrollar en tres sesiones, cada una de ellas con una duración de una hora a dos horas, la propuesta gira en torno a los siguientes elementos:

- Simulaciones a cerca de la relación implícita que hay entre el electromagnetismo

clásico y la relatividad especial, la cual se implementará desde un computador que tenga el software que permitirá evidenciar los conceptos a tratar.

- Como está propuesta fue diseñada con la estrategia POE, se pretende que el estudiante sea parte fundamental en las sesiones, puesto esto permite que al haber una comunicación profesor - estudiante se pueda evidenciar si este último logro el objetivo principal de esta unidad didáctica la cual es: comprender ideas básicas de la electrodinámica y su relación con la relatividad especial, desde un aspecto conceptual y matemático.

2.9. Aspectos teóricos de las simulaciones.

2.9.1. La simulación.

La simulación es un proceso en el cual el experimentador ejecuta acciones con el modelo generando diferentes estrategias de análisis y de estudio. Como lo propone Robert Shannon, “El modelado de la simulación es, por lo tanto, una metodología aplicada y experimental.” [Shannon et al., 1988][pág, 17] esta debe cumplir ciertos criterios:

- Describir el comportamiento de sistemas.
- Postular teorías que puedan dar razón al comportamiento del sistema modelado.

Para lograr estos criterios es necesario generar un modelo, como modelarlo, y como utilizarlo, para esto se necesita tener una estructura que permita evidenciar cual es el modelo más adecuado para la descripción del sistema, Banks J, muestra un esquema que permite la creación de modelos apropiados, esto es importante para la simulación e implementación de este trabajo de investigación.

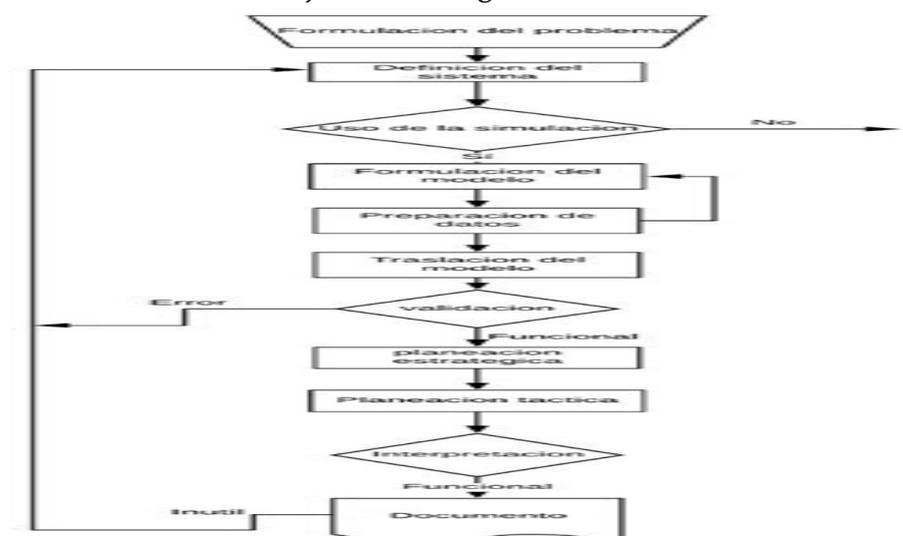


Figura 2.7: Algoritmo.

Fuente de la imagen: Tomado del artículo de Banks, *Discrete-EventSystemSimulation*.

En la anterior figura (2.7), se presenta la secuencia de pasos para realizar de manera ordenada y planificada un modelo, la descripción de cada paso es la siguiente:

1. **formulación del problema:** Definir porque es necesario la creación del modelo y su simulación.
2. **Definición del sistema:** Se establecen los parámetros de acción y restricción que tendrá la simulación.
3. **Formulación del modelo:** Abstracción del sistema real a un modelo establecido.
4. **Preparación de datos:** Establece en que rango de datos para el funcionamiento del modelo.
5. **Traslación del modelo:** Transcripción del modelo aun lenguaje computacional adecuado.
6. **Validación:** Los resultados deben ser similares o muy cercanos a lo esperado para seguir en el desarrollo de la simulación.
7. **Planeación estratégica:** Elaboración de un experimento que permita tener resultados confiables y comparables.
8. **Planeación táctica:** Definir cada una de las etapas de la simulación.
9. **Experimentación:** Ejecutar la simulación para luego interpretar los resultados.
10. **Interpretación:** Análisis de resultados y datos obtenidos.
11. **Documento:** Registro de los datos y resultados obtenidos.

Para el desarrollo del modelo presentado en esta investigación, se utilizó una simulación de tipo digital que es un sistema basado en un lenguaje de programación, debido a que esta cuenta con los siguientes elementos:



Figura 2.8: *Elementos de la simulación.*
Fuente de la imagen: *Elaboración propia.*

Los elementos de la figura (2.8), cumplen con unas funciones determinadas para el desarrollo de un modelo que para nuestro caso es una simulación:

Un modelo: Es la simulación computacional corresponde a la unión de modelos temáticos, analógicos, estadísticos entre otros.

Un evaluador: es el conjunto de procedimientos que se ejecutaran para tener los datos o resultados de la simulación.

Una interfaz: Es el elemento que permite la comunicación con el usuario, esta debe ser clara y sencilla para este, con el fin de que se logre tener resultados más precisos a la realidad del experimento simulado.

2.9.2. Diseño y elaboración del software.

¿El por que el uso del software?

El objetivo del software es que sea una herramienta que permita la relación de teorías que en este caso son el electromagnetismo y la relatividad especial, desde un enfoque conceptual, la pertinencia de la elaboración o formulación de las simulación surge debido que en algunos de los experimentos abordados no se pueden realizar en un laboratorio de física, como es el caso de la situación I, (Carga en movimiento), ya que no se puede evidenciar el movimiento aparente de una carga, lo mismo sucede con la situación III, (Una nueva perspectiva del electromagnetismo.)

El software está desarrollado en su totalidad en Visual Basic 2017, este consta de 14 escenarios entre los cuales se encuentran: las simulaciones, cuestionarios, ayudas conceptuales, página de inicio. Su navegabilidad se representa con el siguiente mapa:

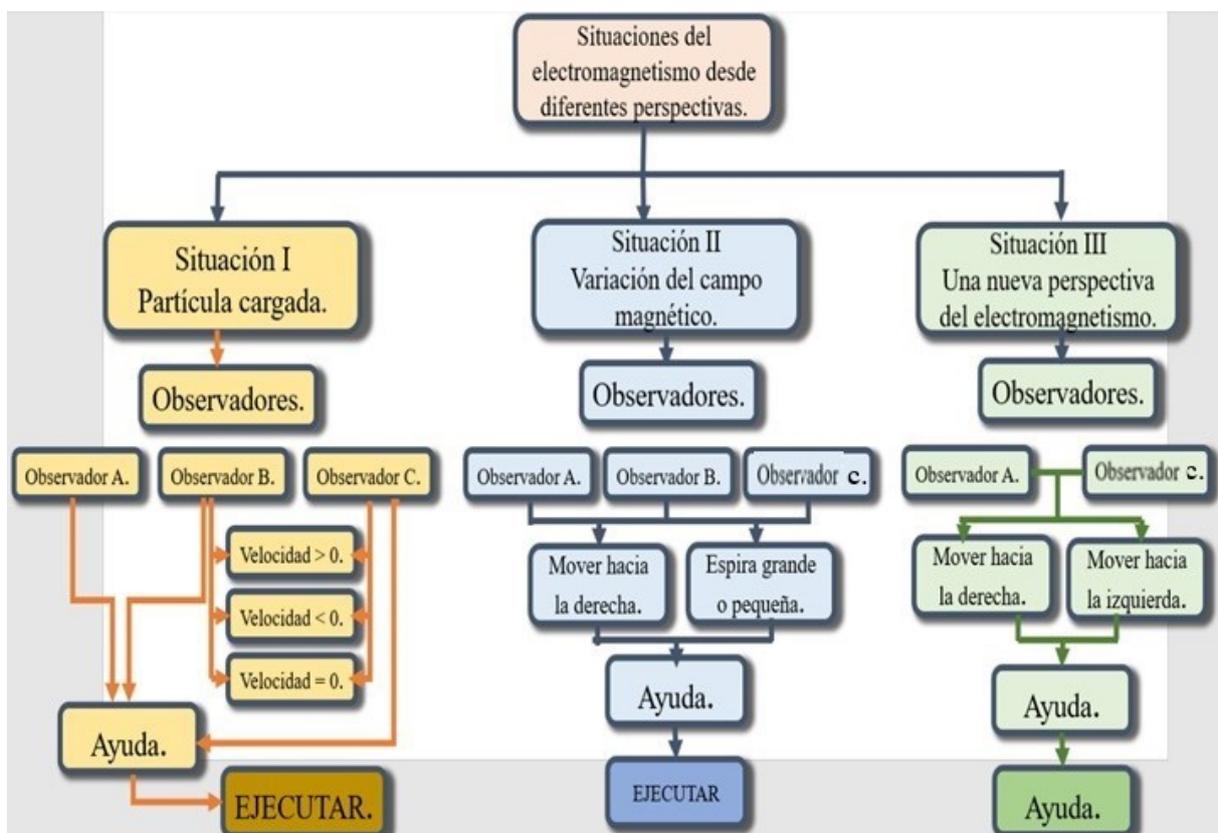


Figura 2.9: Mapa de navegabilidad.
Fuente de la imagen: Elaboración propia.

2.10. Las simulaciones propuestas en el software.

2.10.1. Situación I (Carga eléctrica).

La siguiente situación es tomada del libro Apuntes de relatividad del profesor Favio Vélez, [Vélez, 2012]pág.50] donde resalta la problemática del movimiento aparente o relativo de una carga, él autor deja claro que este problema se le atribuye al movimiento de la carga o al observador. Este experimento mental tiene ciertas modificaciones con respecto al original, con el fin de hacer más evidente la relación implícita que hay entre el electromagnetismo y la relatividad especial.

Se tiene una carga en movimiento observada desde diferentes marcos de referencia (diferentes observadores), la carga estará ubicada en un plano X,Y,Z, y tendrá los siguientes movimientos, izquierda, derecha o podrá estar en reposo, los observadores estarán ubicados de la siguiente manera el observador A estará en el origen del marco de referencia, el observador B, se encuentra a una distancia X del observador A, y el observador C se encuentra sobre la carga. Esta situación está planteada para analizar el principio de relatividad Galileano, los observadores se pueden mover de la misma manera que la carga de izquierda a derecha y siempre tendrán la misma velocidad con respecto a la carga.

Pasando al software el cual simula la situación anterior, se añaden dos sensores de medida uno para el campo eléctrico y otro para el campo magnético, también se puede seleccionar a cualquiera de los tres observadores A, B y C, a su vez se puede seleccionar la dirección del movimiento de estos. Teniendo en cuenta el principio de relatividad Galileano los instrumentos de medida marcarán lo que el observador seleccionado podría observar o medir. Un ejemplo de las opciones que tiene este escenario es: Si se tiene una carga la cual se mueve hacia la derecha con respecto al observador A y este se encuentra en reposo, él podrá medir un campo magnético y eléctrico, como se evidencia en la siguiente figura:



Figura 2.10: Situación I, observador A.
Fuente de la imagen: Tomada del software.

Pero si ahora la carga se encuentra en reposo respecto al observador B, y él está en movimiento en la dirección hacia la derecha, se esperaría que también se pueda medir un campo magnético y eléctrico pero la experiencia revela que esto no sucede, debido a que la carga está estática solo generara un campo eléctrico el cual está disminuyendo su intensidad debido a que el observador B se aleja de la carga, como se evidencia en la siguiente figura:

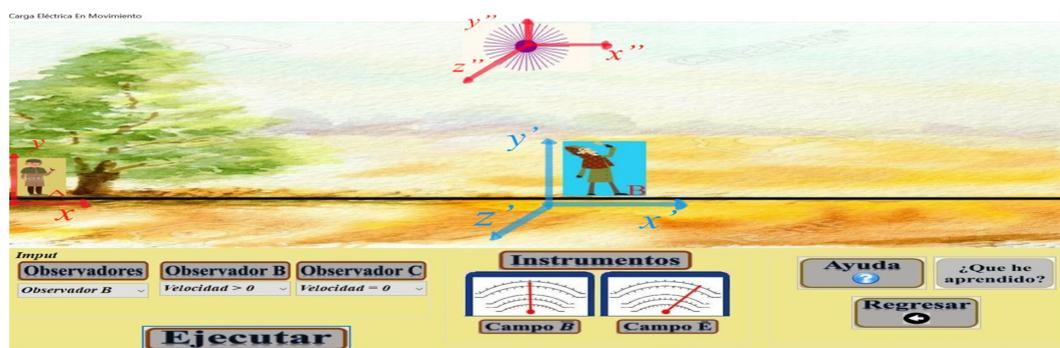


Figura 2.11: Situación I, observador B.
Fuente de la imagen: Tomada del software.

Ahora para el observador C, como se sabe este estará sobre la carga y ambos tendrá la misma velocidad y sentido, pero ocurre lo mismo se esperaría que se pueda medir un campo eléctrico y uno magnético, pero no es así, él no puede medir un campo magnético, debido a que al estar sobre la carga no puede percibir el movimiento de la carga, por ende no puede observar una variación de campo magnético, pero si podrá medir un campo eléctrico, con una intensidad mayor que los observadores A y B, debido a que está más cerca de la carga, pero este campo no tiene una variación para él ya que no percibe el movimiento de la carga, como se evidencia en la siguiente figura:

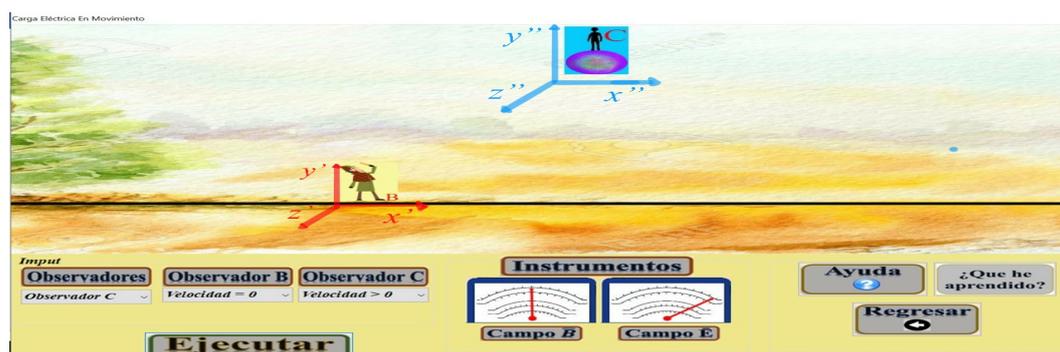


Figura 2.12: Situación I, observador C.
Fuente de la imagen: Tomada del software.

2.10.2. Situación II (Variación de flujo magnético).

Esta situación fue tomada, del artículo publicado por Albert Einstein en el año 1905 titulado en su idioma original “*On the Electrodynamics of moving Bodies*”, traducido al español es “*sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.*” [Einstein,

1905] En esta situación se considera la interacción electromagnética recíproca entre un imán y un conductor, igual que en la situación anterior depende solamente del movimiento relativo entre el conductor y el imán. Y que también se le hicieron algunas modificaciones para que fuera más claro algunos conceptos abordados en esta situación II.

Para esta situación se tendrán tres observadores: el observador A estará en reposo sobre el circuito o conductor, el observador B se ubicará sobre el imán y el observador C será el usuario que en este caso es la persona que estará usando el software. Los instrumentos de medida evidenciarán lo que el observador seleccionado pueda medir, que para esta situación serán el flujo magnético y el voltaje, para tener una idea de la situación observe la siguiente figura:

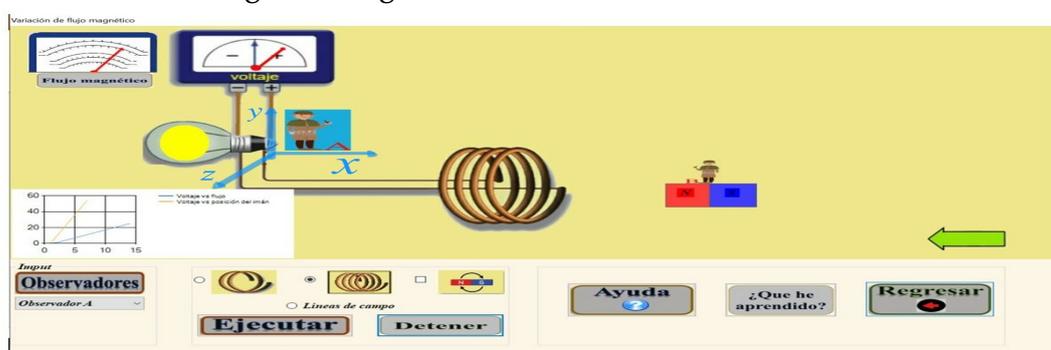


Figura 2.13: Situación II.

Fuente de la imagen: Tomada del software.

Como se mencionó, en esta situación se trata del movimiento aparente entre el conductor y el imán, la concepción habitual establece que el fenómeno dará el mismo resultado con respecto al movimiento del conductor o el imán. Pero hay una distinción como lo mencionó Albert Einstein cuando expuso este fenómeno en su artículo, “Existe una distinción radical en los dos casos, ya sea el imán en movimiento y conductor en reposo respecto al imán, debido a que se originara cerca al imán un campo eléctrico con una energía definida, conduciendo una corriente donde está ubicado el conductor. Pero si el imán está en reposo con respecto al conductor y este está en movimiento, no se originará ningún campo cerca al imán, sin embargo, en el conductor habrá una fuerza electromotriz.” Que se le conoce como *fem*, y esta encenderá un bombillo en la simulación.

Un ejemplo de las opciones que se pueden realizar en este escenario son: la combinación de selecciones entre: tres observadores, dos embobinados (grande y pequeño) y se puede girar el imán, como ejemplo se tiene: si se selecciona el observador B, y este está en movimiento hacia el circuito en dirección de la bobina grande lo que el percibirá o podrá medir será: Como él se encuentra sobre el imán

no percibe ninguna variación de flujo magnético por consiguiente el instrumento de medida no marcará ningún valor, como está acercándose hacia la espira grande la intensidad del voltaje o del campo eléctrico que genera la variación del flujo magnético y la intensidad con que se prende el bombillo será mayor que si se acercara a la espira pequeña.

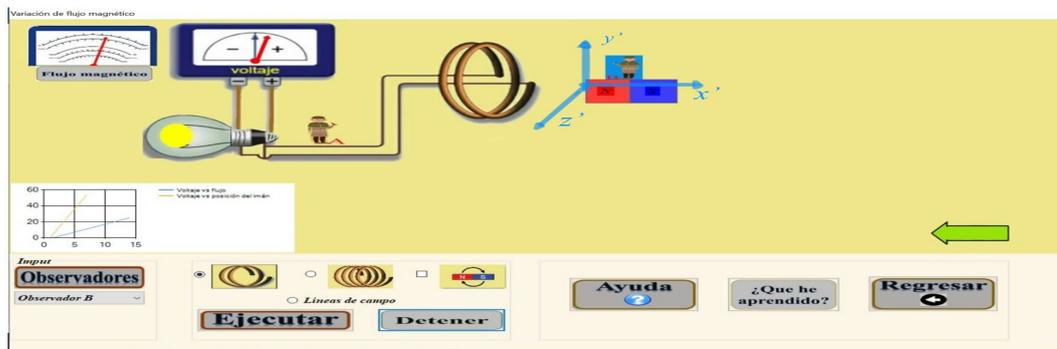


Figura 2.14: Situación II, observador B.
Fuente de la imagen: Tomada del software.

Pero con la selección anterior en el software, se puede comparar que puede percibir el observador A, al estar en reposo con respecto al observador B, y al imán él puede medir una variación de flujo magnético, pero también puede medir un voltaje inducido el mismo que observaría B, solo que con una mayor intensidad debido a que esté más cerca del circuito. Con la situación II (Variación de flujo magnético), y retomando la subsección El descubrimiento de la inducción electromagnética (2.6.1), resalta la relación entre la electricidad y el magnetismo, propuesta en la Ley de Faraday.

2.10.3. Situación III (Una nueva perspectiva del electromagnetismo).

Esta situación es un ejemplo clásico al explicar el movimiento relativo entre las cargas que hay dentro de un conductor y un observador externo, la idea original se toma del libro Electrodinámica Clásica de David Jackson, [Jackson, 1980][pág. 723] la idea de este experimento es evidenciar como dos observadores que se mueven uno respecto al otro no observan los mismos efectos en un conductor, discrepando desde el principio de relatividad Galileano pero en consonancia con la solución proporcionada por Albert Einstein en su artículo “sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.” [Einstein et al., 1905]

En la situación III, se tiene un conductor rectilíneo muy largo en reposo, con respecto a los observadores, el cable tiene el mismo número de cargas positivas

como negativas, es decir tienen una carga eléctrica neta,⁶ pero estas cargas tienen la opción de moverse hacia la derecha o la izquierda, para los observadores se tienen dos opciones, un observador A el cual tendrá la misma velocidad que las cargas del cable y la misma dirección, el otro observador será el estudiante o usuario y este siempre estará en reposo con respecto al conductor, en esta situación también se tiene una carga positiva que se mueve con la misma velocidad y dirección que las cargas que están en el conductor, por último, se tienen los instrumentos de medida que mostrarán lo que el observador seleccionado pueda medir, para la situación III serán: un medidor de campo eléctrico y otro de campo magnético. Para tener una idea más clara del entorno de la situación III, se muestra la siguiente figura:

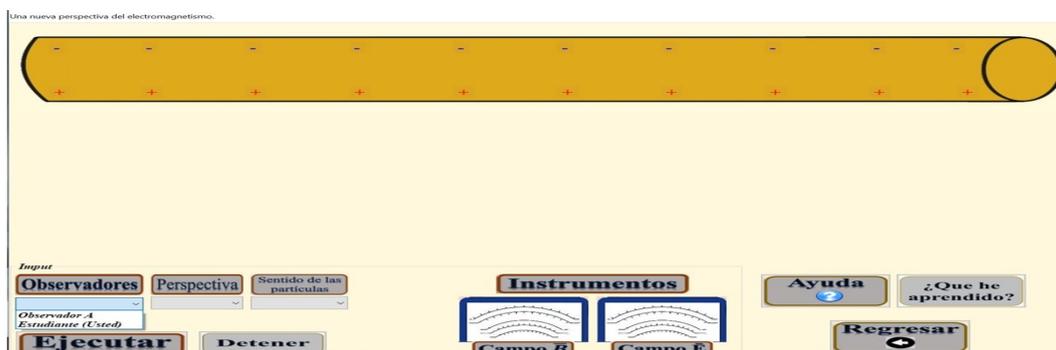


Figura 2.15: Situación III.

Fuente de la imagen: Tomada del software.

La situación III, consiste en el principio de relatividad de Galileo, el cual se puede interpretar de la siguiente manera; sin importar desde que marco de referencia se observe un fenómeno tendrá que dar el mismo resultado, pero **¿En este caso dará lo mismo?** Para averiguarlo se retomaron algunas opciones de la situación III, (Una nueva perspectiva del electromagnetismo).

Usando el software, la selección en este ejemplo será la siguiente: Como observador se elige al estudiante (usuario) y se tiene un conductor muy largo en reposo con respecto al observador con una carga neta, las partículas negativas que tiene este conductor tienen una velocidad v en dirección hacia la derecha, en la parte inferior de este se encuentra una carga de prueba positiva, que tiene la misma velocidad y dirección que las cargas negativas que se encuentran en el conductor. Con la selección anterior, lo que sucede conceptualmente es lo siguiente:

El movimiento de estas cargas negativas es una corriente eléctrica y como se mencionó en la sección Ley de Ampere – Maxwell (2.7), esta corriente genera

⁶La electrización de un cuerpo se consigue extrayendo de este las cargas de un signo. Por otro lado, un cuerpo adquiere una carga eléctrica neta cuando tiene el mismo número de cargas positivas que negativas.

alrededor del cable un campo magnético, recuerde que también la carga positiva se está moviendo en la misma dirección, y de acuerdo con la Ley de Lorentz (2.8), esta carga positiva sufrirá una fuerza magnética que es perpendicular al campo magnético como a la velocidad de las cargas, que por regla de la mano derecha en este caso es hacia abajo, es decir que el observador (Usuario), observara que la carga de prueba se curva hacia abajo, debido al campo generado, para hacer más comprensible lo anterior observe la siguiente figura:

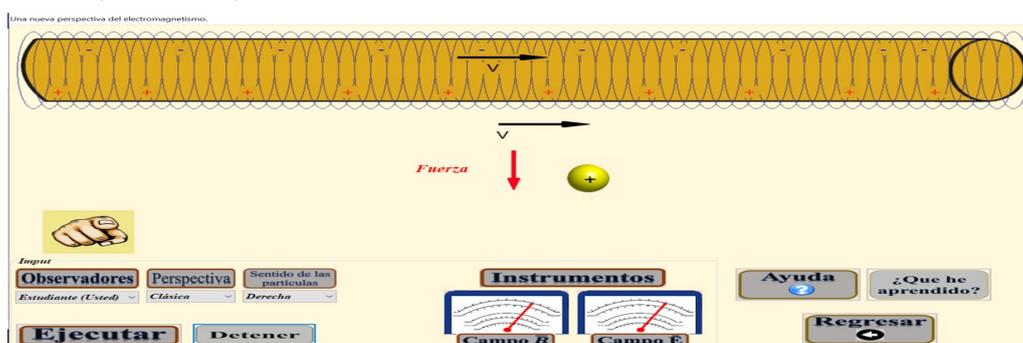


Figura 2.16: Situación III, observador Usuario
Fuente de la imagen: Tomada del software.

Ahora, si se cambia el observador ¿Que pasara?

Recordando que el observador A se moverá con la misma velocidad v y dirección que las cargas negativas y la carga positiva que está afuera del conductor, como el observador A se mueve con la misma velocidad que las cargas mencionadas no evidenciará el movimiento de estas, es decir estarán en reposo para él, lo que estará en movimiento serán las cargas positivas con una velocidad v hacia la izquierda, por lo tanto él también observará una corriente eléctrica debido al movimiento aparente de las cargas positivas, esta corriente tiene la misma intensidad que la que evidencia el estudiante, recordando que el conductor tiene la misma cantidad de cargas positivas y negativas, por consiguiente al tener una corriente eléctrica igual que el caso anterior se generará un campo magnético con las mismas características. hasta el momento todo está igual aparentemente.

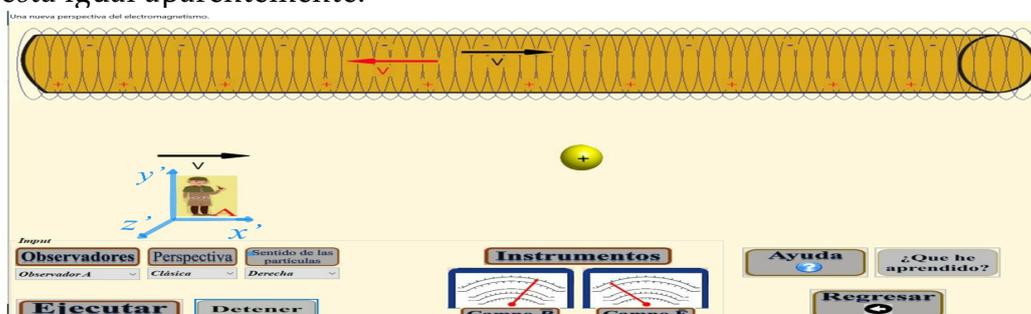


Figura 2.17: Situación III, observador A
Fuente de la imagen: Tomada del software.

Este fenómeno producía mucha inquietud para algunos científicos como Lorentz, Poincaré, Einstein entre otros, este interrogante se puede interpretar con la siguiente pregunta: **¿Hay alguna explicación alternativa que no vulnere el principio de relatividad Galileano, y a su vez de el mismo resultado para ambos observadores?**

Es aquí donde muchos científicos se dieron a la tarea de darle una solución a este inconveniente, uno de estos científicos fue: Albert Einstein quien publica en 1905 su artículo “*On the Electrodynamics of moving Bodies*” traducido al español “*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*”, en el cual establece sus dos famosos postulados y su teoría de la relatividad especial, dando solución a varios problemas similares, como lo era las incongruencias entre la mecánica y el movimiento relativo del electromagnetismo.

De esta manera se analizará esta situación desde la perspectiva de Einstein, como lo postuló en su artículo, retomando el ejemplo del conductor con el observador A el cual se mueve con la misma velocidad \vec{v} y dirección que las partículas negativas que tiene el cable y la carga positiva, pero desde una perspectiva relativista él observador evidenciará que las cargas positivas se mueven hacia la izquierda, debido a la contracción de longitud,⁷ estas van a estar más cerca unas de otras con respecto a cuando estaban en reposo, de la misma manera las cargas negativas van a estar más separadas entre si con respecto al observador A, evidenciará lo siguiente:

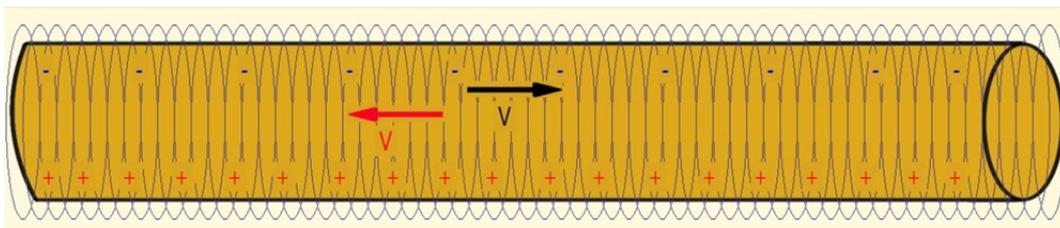


Figura 2.18: Situación III, observador A
Fuente de la imagen: Tomada del software.

Es decir, las cargas negativas están más alejadas entre sí y las cargas positivas más juntas, observando la figura (2.18), **el cable ya no está neutro**, ahora el cable tiene carga eléctrica neta positiva, de acuerdo con la Ley de Gauss (2.4), la divergencia del campo eléctrico alrededor del conductor será positiva, en otras palabras el campo eléctrico está alrededor del cable, el efecto que sufre la carga positiva en este caso será por el campo eléctrico y la fuerza que sufre la carga estará dada por la siguiente

⁷“Se trata de la contracción de la longitud, cuando un objeto se mueve respecto a un sistema de referencia inercial, parece sufrir una contracción de la longitud del mismo en la dirección del movimiento”, tomado de Albert Einstein quien publica en 1905 su artículo “*On the Electrodynamics of moving Bodies*” traducido al español “*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*”,

ecuación:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.13)$$

Esta fuerza ira en dirección del campo eléctrico es decir la carga se alejara del cable, otra manera de ver este efecto es la siguiente, se sabe que la carga neta es positiva y la carga puntual también como ya se ha explicado cargas del mismo signo se repelen por consiguiente se aleja, en consecuencia, lo que evidenciara el observador A será, exactamente lo mismo que el estudiante o usuario.

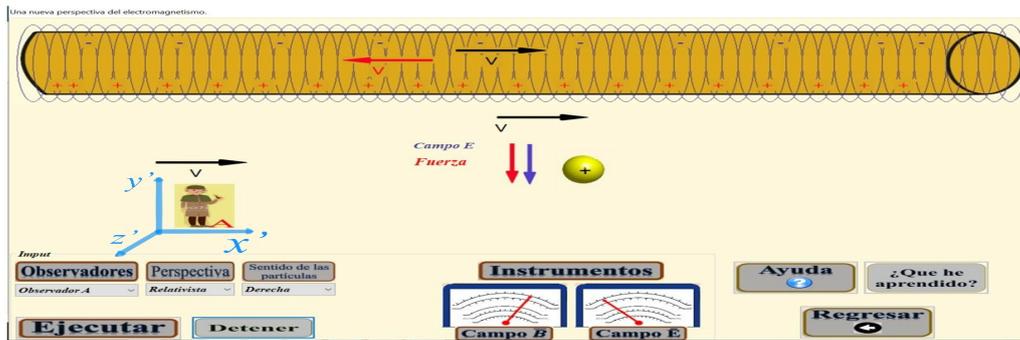


Figura 2.19: Situación III, observador A, perspectiva relativista.
Fuente de la imagen: Tomada del software.

Comparando las dos situaciones tanto para el observador A como para el observador (Usuario), ahora estos dos observadores evidencian lo mismo, la carga positiva se mueve hacia abajo en un movimiento curvo con respecto a cada observador.

Capítulo 3

Unidad didáctica e implementación.

3.1. Propuesta de la unidad didáctica.

Para la elaboración de la unidad didáctica se tuvo en cuenta el tipo de población a la cual va dirigida, está compuesta por estudiantes del Departamento de Física que están cursando o ya cursaron las asignaturas de electromagnetismo II y relatividad especial, es un grupo de 15 estudiantes, los cuales son voluntarios para la implementación de una estrategia para la comprensión de los conceptos relacionados entre el electromagnetismo y la teoría de la relatividad especial, desde un ámbito tecnológico.

Para comprender algunos fenómenos es necesario de métodos y estrategias experimentales que permitan replicarlos, pero estos pueden llegar a tener dificultades ya sea por el entorno del experimento o por los instrumentos de medición que cada vez necesitan ser más exactos al momento de medir, es aquí donde se resalta la creatividad del ser humano donde crea diferentes métodos o estrategias desde experimentos mentales hasta aplicar los últimos avances de la tecnología para el uso de la ciencia, como lo es el uso de softwares que permiten crear modelos con el fin de recrear fenómenos complejos de la naturaleza, pero los modelos no son un dato 100% asertivo, debido a que lo que hacen la mayoría modelos es analizar el fenómeno a observar desde en una serie de bases de datos que le permite interpretar cual puede ser la mejor solución de cada caso. Como lo menciona Robert Shannon, un modelo es: *“Son representaciones de un objeto, sistema, o idea, de forma diferente a la entidad misma.”* [Shannon et al., 1988][pág, 14]

Por lo tanto, la creación de un modelo es una representación de alguna situación con características correctamente extraídas, donde lo que se pretende es que el modelo de los resultados que sean esperados, para que logre dar la solución al problema inicial.

De acuerdo con lo anterior, se evidencia que el uso de softwares facilita observar

fenómenos, en consecuencia, para esta unidad didáctica el uso del software es una herramienta que ayudara a los estudiantes en la comprensión de los temas abordados. También se tuvo en cuenta el tipo de población a la cual va dirigida, la población está compuesta por estudiantes del Departamento de Física que están o ya cursaron los asignaturas de electromagnetismo II y relatividad especial, es un grupo de 15 estudiantes los cuales son voluntarios para la implementación de una estrategia para la comprensión de los conceptos relacionados entre la teoría electromagnética y la relatividad especial, desde un ámbito tecnológico, debido a que algunas de las situaciones que se estudiaran son complejas de realizar en un laboratorio de física.

La unidad didáctica cuenta con tres momentos los cuales son: Una introducción al software, luego se realiza una prueba diagnostico que permite evidenciar los conocimientos con los que cuentan los estudiantes (presaberes). El segundo momento es el uso del software de una forma más detallada donde el estudiante logre evidenciar las diferentes opciones de combinaciones posibles que tiene una misma situación, esto con el fin de comparar resultados e interpretar el porque se obtiene el mismo resultado o en caso opuesto resultados distintos. La tercera parte se enfoca en hacer una prueba igual a la inicial, esto permite comparar los conocimientos previos y los conocimientos adquiridos durante las sesiones, el análisis de estos dos resultados permite comparar que tanto comprendieron los estudiantes y de ser un resultado negativo permite replantear que aspectos a mejorar ya sea en la parte de las sesiones o a nivel de software.

3.2. Sesión 1. Introducción al software y prueba diagnóstico.

Objetivos.

- Orientar y Explicar el uso correcto del software, para que en las siguientes etapas de la implementación tenga los resultados esperados y óptimos.
- Identificar las nociones previas que tienen los estudiantes en la relación de la teoría electromagnética y la relatividad especial.
- Aclarar dudas acerca de la explicación del uso del software y de las situaciones explicadas anteriormente.

3.2.1. Explicación de la actividad.

Para la sesión 1, el docente hace una explicación detallada de cada una de las situaciones y de las opciones de navegabilidad del software, esto con el fin que los estudiantes se familiaricen con el programa, luego se hace una prueba diagnóstica la cual se encuentra en el software para evidenciar el uso correcto de este, en esta prueba diagnóstica también se evidenciará la relación que tienen los estudiantes en el electromagnetismo y la relatividad especial, para luego pasar a la siguiente sesión en la cual se aplicará la estrategia Predecir, Explicar y Observar (POE).

Con la explicación del software se espera que el estudiante se familiarice con las opciones del programa y con las situaciones planteadas, se elabora una matriz que permite visualizar la planeación de la sesión 1, esto permite determinar las fases e instrucciones a seguir durante esta etapa, con el fin que el estudiante pueda resolver la prueba diagnóstica.

Sesión 1		Objetivos		Metas de comprensión		Resultados esperados	
Temas generativos.		<ul style="list-style-type: none"> Establecer los conocimientos previos que tienen los estudiantes a cerca de las situaciones carga eléctrica y Variación de campo magnético, esto mediante una prueba diagnóstica que se encuentra en el software. Identificar los conceptos previos que tienen los estudiantes a cerca del electromagnetismo y la relatividad especial. Examinar la noción que tienen los estudiantes entre la relación entre el electromagnetismo y la relatividad especial, para abordar y explicar o retroalimentar desde los conocimientos que tienen. 		<p>En esta sesión se pretende identificar los conocimientos previos de los estudiantes, esto con el fin de establecer unas metas de comprensión acordes a los presaberes de los estudiantes.</p>		<p>Identificar los conocimientos previos respecto a la relación conceptual entre el electromagnetismo y la relatividad especial. Reconocer los conceptos previos que tiene el estudiante frente a la teoría electromagnética y a la relatividad especial.</p>	
<ul style="list-style-type: none"> ¿Qué sucede al observar las situaciones físicas ya expuestas:(Carga eléctrica), (variación del campo magnético) y (Una nueva perspectiva del electromagnetismo), vista desde diferentes marcos de referencia? ¿por qué se obtienen resultados diferentes en algunas situaciones planteadas? 		<ul style="list-style-type: none"> Establecer los conocimientos previos que tienen los estudiantes a cerca de las situaciones carga eléctrica y Variación de campo magnético, esto mediante una prueba diagnóstica que se encuentra en el software. Identificar los conceptos previos que tienen los estudiantes a cerca del electromagnetismo y la relatividad especial. Examinar la noción que tienen los estudiantes entre la relación entre el electromagnetismo y la relatividad especial, para abordar y explicar o retroalimentar desde los conocimientos que tienen. 		<p>En esta sesión se pretende identificar los conocimientos previos de los estudiantes, esto con el fin de establecer unas metas de comprensión acordes a los presaberes de los estudiantes.</p>		<p>Identificar los conocimientos previos respecto a la relación conceptual entre el electromagnetismo y la relatividad especial. Reconocer los conceptos previos que tiene el estudiante frente a la teoría electromagnética y a la relatividad especial.</p>	

Tiempo	Actividades	Metodología	Materiales	Funciones del docente	Funciones del estudiante	Resultados esperados
45 minutos	Introducción al software. Desarrollar la prueba diagnóstica que se encuentra en el software.	Explicación del software por parte del docente. Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica.	Software. Computador. Tablero.	Explicar el uso del software. Definir los criterios de la actividad.	El estudiante prestará atención a la explicación del software y respondera la prueba diagnóstica.	Que el estudiante entienda el uso del software. Que el estudiante diligencie la prueba diagnóstica, de acuerdo a lo previsto.

Tabla 3.1: Sesión 1, guía número uno.

3.3. Sesión 2.

3.3.1. Clase participativa, la interacción con el software para Predecir Observar y Explicar.

En esta sesión se pretende que el estudiante participe a través de sus ideas y aportes relacionados a la electrodinámica clásica, en las situaciones mencionadas anteriormente, Una partícula cargada, variación de flujo magnético y Una nueva perspectiva del electromagnetismo, con la intención de aplicar la primera etapa de la herramienta (POE) la cual es **Predecir**.

Objetivo.

- Analizar las situaciones, afianzando los conceptos relacionados entre áreas y su relación entre estas.
- Desarrollar competencias de análisis de situaciones mediante la utilización de las TIC.

3.3.2. Explicación de la actividad.

Esta actividad se desarrollará empleando el software, que relaciona las áreas del conocimiento electromagnetismo y relatividad especial. En esta sesión el estudiante será autónomo en el uso del software debido a que ya sabe su funcionamiento, esto permitirá que tenga una mayor interacción en cada situación planteada y con cada una de sus opciones de selección.

Luego de un uso libre del software, los estudiantes realizarán una explicación de cada situación, la actividad permitirá generar una discusión en torno a los resultados que ellos creen que pasaba con el fenómeno y compararlos con los resultados del software, esta comparación de sus hipótesis con respecto al resultado de la simulación permite cumplir con la primera parte de la actividad (POE), la cual es predecir qué sucederá con la situación planteada o propuesta.

Sesión 2	Objetivos	Metas de comprensión	Resultados esperados
<p>Tópicos generativos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Relación entre los marcos de referencia. ▪ Cargas eléctricas. ▪ Principio de relatividad Galileano. ▪ ¿Cuál es la causa de las diferencias en las medidas de los campos eléctricos y magnéticos? ▪ Que conceptos relacionan la teoría electromagnética y la relatividad especial. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Encontrar un vínculo entre el principio de relatividad y las ecuaciones de Maxwell. ▪ Evidenciar los conceptos que tienen en común los estudiantes en su explicación, con relación a cada situación planteada en el programa. ▪ Generar herramientas para que el estudiante pueda solucionar situaciones o problemas similares a las planteadas. ▪ Contextualizar sobre la relación entre estas teorías. 	<p>Que los estudiantes logren identificar la relación implícita que hay entre el electromagnetismo clásico y la relatividad especial.</p> <p>Que el usuario del software acompañado de un docente pueda construir una explicación frente a los resultados de las situaciones planteadas en el software.</p> <p>El estudiante pueda crear situaciones similares a las planteadas logrando comprender la relación entre estas áreas, por el hecho que está evidenciando una solución a problemas diferentes de la misma área del conocimiento.</p>	<p>Se espera que los estudiantes comprendan el principio de relatividad Galileano desde el contexto de las situaciones planteadas.</p> <p>Que el estudiante pueda comprender la relación entre el electromagnetismo y la relatividad especial, a partir de la estrategia didáctica que se empleó que en este caso es la simulación.</p> <p>comprender las ideas básicas de los fenómenos relacionados en el electromagnetismo y la relatividad especial.</p>

Tabla 3.2: Sesión 2, guía número dos.

Tiempo	Actividad	Metodología	Materiales	Funciones del docente	Funciones del estudiante	Resultados esperados
30 minutos	Clase participativa.	La Clase participativa se implementa en esta sesión con el fin que los estudiantes desarrollen la participación, creativa e independiente; dando la oportunidad de interactuar con el docente y sus compañeros, de modo que pueda plantear sus puntos de vista e intercambiar opiniones.	Computador. Software. Tablero.	Por parte del docente se realizará una descripción detallada de las situaciones 1, 2 y 3, (enunciadas en la sección (3.1). También se pretende que sea un intermediario en las opiniones de los estudiantes. El docente plantea un debate donde se recojan las ideas de los estudiantes para poder explicar el fenómeno.	El estudiante a partir de sus conocimientos previos dará una opinión de cuál será el posible resultado, esto con el fin de Predecir , las posibles soluciones de las situaciones e intercambiar opiniones y conocimientos entre compañeros.	Los estudiantes utilizan sus conocimientos previos para dar solución y explicación del fenómeno de sus posibles resultados. A partir del debate y las explicaciones por el docente el estudiante relaciona algunos conceptos entre estas dos teorías. Que el estudiante participe activamente en la discusión. Que los estudiantes comparen sus predicciones con el resultado del software y con las respuestas de sus compañeros.
40 minutos	Simulación entorno a las tres situaciones planteadas en el software, se pretende el acercamiento a la relación conceptual que hay entre el electromagnetismo y la relatividad especial.	Se emplea la simulación para la interacción y respuesta a las preguntas que se encuentran en el software, con el fin de dar una explicación de las situaciones planteadas.	Computador. Software.	El docente será el guía en el uso del software, en el caso dado que algún estudiante tenga alguna pregunta del funcionamiento de este o de las situaciones planteadas el docente resolverá las dudas.	En esta parte del proceso de aprendizaje el estudiante Observa , cumpliendo con la segunda etapa del POE, para dar respuesta a las preguntas del software.	Que el estudiante participe activamente en la discusión. Que los estudiantes comparen sus predicciones con el resultado del software y con las respuestas de sus compañeros.

Tiempo	Actividad	Metodología	Materiales	Funciones del docente	Funciones del estudiante	Resultados esperados
30 minutos	Comparación de resultados de acuerdo con cada observador o marco de referencia.	En esta etapa de la sesión se pretende que el estudiante analice, relacione, argumente y convierta la información recolectada en conocimiento que pueda Explicar , pasando a la última fase del (POE). Donde el estudiante desarrolla destrezas del pensamiento que van más allá de la memorización.	Computador. Software. Tablero.	El docente será el intermediario, de las ideas de cada estudiante, con el fin de que al finalizar la sesión se logre dar una explicación global por parte del grupo.	Los estudiantes en esta ocasión plantean una hipótesis del por qué dan resultados diferentes en las situaciones 1, 2 y 3, donde se pretende que puedan Explicar de forma conceptual y precisa la discrepancia de estos resultados y así mismo se pueda evidenciar la relación de estas dos teorías y como se les dio solución a estos inconvenientes.	Se espera que el estudiante logre culminar las tres etapas del POE (Predecir, Observar y Explicar). Las cuales son una herramienta indispensable para la comprensión del objetivo general de esta unidad didáctica el cual es: Que el estudiante pueda relacionar conceptualmente las teorías electromagnéticas y la relatividad especial.

Tabla 3.3: Sesión 2, guía número dos.

3.4. Sesión 3.

3.4.1. Post test ¿Que he aprendido?

En esta sesión se aborda los resultados de la sesión 1 y se comparan con los resultados de la sesión 3, para evidenciar si los estudiantes lograron las metas deseadas de comprensión, para esta etapa de la implementación se usa el POE haciendo una retroalimentación de la sesión 2 explicando las situaciones y los conceptos que se abordan en estas.

La comparación de resultados permite analizarlos de ser negativos, en otras palabras, que no se lograron las metas de comprensión, se consideran las posibles consecuencias y causas para solucionarlas en una próxima ocasión, al ser positivo el resultado de comprensión se seguirá mejorando la unidad didáctica y su diseño tanto de la propuesta pedagógica como del software, debido a que el conocimiento y la tecnología siguen avanzando.

Objetivos.

- Identificar la comprensión que tienen los estudiantes alrededor de la relación entre el electromagnetismo y relatividad especial desde las situaciones planteadas en el software, situación 1, situación 2 y situación 3.
- Orientar a los estudiantes para que logren comprender y explicar estas situaciones desde una postura del electromagnetismo clásico y relativista.
- Identificar si los estudiantes tienen una relación alrededor de los resultados de cada situación expuesta en el software observada desde diferentes marcos de referencia.

3.4.2. Explicación de la actividad.

En esta parte se hace una prueba similar a la inicial para lograr las metas de comprensión, evidenciando que no es un aprendizaje por memorización, esto con el fin de constatar si realmente los estudiantes lograron comprender los temas propuestos por el docente, así mismo el estudiante reflejara si realmente relaciona conceptos del electromagnetismo y la relatividad especial, los resultados de los post test comparados con el pre test sirven de referencia para tener una idea si los estudiantes realmente lograron comprender las diferentes situaciones y todo lo que esto implica.

Sesión 3	Objetivos	Metas de comprensión	Resultados esperados
<p>Tópicos generativos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Al observar las situaciones (Carga eléctrica), (variación del campo magnético) y (Una nueva perspectiva del electromagnetismo), vista desde diferentes marcos de referencia. ¿Qué relación hay entre estas situaciones? ▪ ¿Qué conceptos se relacionan entre estas dos teorías? 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Establecer si los estudiantes lograron las metas de comprensión, esto de acuerdo con los resultados. ▪ Elaborar una evaluación, del software, en donde los estudiantes puedan dar su opinión acerca de la unidad didáctica y del software, y si creen que es pertinente y apropiado el uso de tecnologías para la comprensión de diferentes temáticas. ▪ Analizar los resultados de las pruebas diagnóstica y el Post test, luego compararlos con la primera prueba para evidenciar que tanto comprendieron debido que para llegar a la comprensión el estudiante debe resolver y plantear situaciones similares. 	<p>En esta sesión la meta de comprensión es hacer una comparación entre la prueba diagnóstica y Post test, debido a que cada prueba tiene situaciones diferentes permite evidenciar si los estudiantes lograron comprender los tópicos generativos de cada sesión.</p>	<p>Que los estudiantes al observar fenómenos o situaciones desde distintos marcos de referencia, pueden tener un marco más amplio del conocimiento de diferentes áreas. Que los estudiantes logren cumplir con las metas de comprensión propuestas por el docente y por la unidad didáctica.</p>

Tiempo	Actividad	Metodología	Materiales	Funciones del docente	Funciones del estudiante	Resultados esperados
30 minutos	<p>Desarrollar la prueba ¿Qué he aprendido? La cual se encuentra en el software, y esta consiste en una serie de preguntas como: ¿En qué dirección se mueven las agujas de los instrumentos de medida? Esto de acuerdo con las opciones seleccionadas en cada situación, con el fin de compararla con la prueba de diagnóstico.</p>	<p>Desarrollo de la actividad número tres ¿Qué he aprendido? Para analizar si hubo comprensión en toda la actividad propuesta.</p>	<p>Software. Computador. Tablero.</p>	<p>Definir los criterios de la actividad que van a realizar los estudiantes, en que consiste y cuánto tiempo disponen para realizarla. Evaluar los resultados de la prueba post test. Evaluar y analizar los resultados de la prueba post test.</p>	<p>El estudiante prestara atención a la explicación, luego responderá la prueba post test.</p>	<p>Que los estudiantes relacionen conceptualmente la teoría electromagnética con la relatividad especial. Identificar que tan viable fue la unidad didáctica para las metas de comprensión propuestas, mejorarla si es necesario.</p>

Tabla 3.4: Sesión 3, guía número tres.

Capítulo 4

Análisis y resultados.

En este capítulo se pretende describir el proceso llevado a cabo en la implementación de la unidad didáctica, evidenciando y comparando los resultados de cada sesión y a su vez con los resultados esperados, con el fin de evidenciar las metas de comprensión propuestas, este proceso permitirá sintetizar y analizar las respuestas de los estudiantes en el software, considerando el objetivo general de la investigación y dando respuesta a la pregunta problema.

Como herramienta para la recolección de datos se utilizó el propio software, el cual permitió recopilar las respuestas de los estudiantes al momento que lo usaban, este registro de datos proporciona realizar un análisis y obtener conclusiones de estos.

Sesión 1	Resultados esperados	Resultados obtenidos	Observaciones y análisis
<p>Introducción al software.</p> <p>Desarrollo de la prueba diagnóstica.</p>	<p>Se espera que los estudiantes entiendan el uso del software, su interfaz y manejo.</p> <p>Que el estudiante diligencie la prueba diagnóstica, de acuerdo con lo previsto.</p> <p>Que los estudiantes tengan claro los conceptos abordados en el software, como: campo eléctrico, campo magnético, marcos de referencia, entre otros.</p>	<p>Los estudiantes estuvieron atentos a la explicación del software por parte del docente, esto permitió que al momento de interactuar con este lograran acoplarse rápidamente a los comandos e interfaz.</p> <p>Por otra parte, como al inicio de todo proceso de aprendizaje en algunos momentos o situaciones los estudiantes pidieron una retroalimentación del uso de este.</p> <p>El grupo de 15 estudiantes en un 60% no tenían claro los conceptos que se abordaron en el software, como lo son campo eléctrico, invarianza, contracción de longitud o de Lorentz, entre otros.</p> <p>Al momento de comparar las situaciones planteadas desde diferentes marcos de referencia evidenciando la invarianza de las ecuaciones de maxwell, lo cual se logró con el software que permite cambiar el observador en la misma situación y observar el mismo fenómeno, pero en algunos casos con un resultado diferente, los resultados obtenidos revelaron que el grupo de 15 estudiantes en un 60%, no tienen clara esta relación ligada a los fenómenos electromagnéticos con la relatividad especial.</p>	<p>Los estudiantes usaron el software de acuerdo con las especificaciones o indicaciones recibidas.</p> <p>Algunos estudiantes manifestaron agrado con la interfaz del software, debido a las ayudas y comandos que este tiene.</p> <p>Durante la sesión se evidenció que se puede mejorar el uso de estas ayudas en el software, como añadir un comando de voz que permita indicarle al estudiante las opciones seleccionadas y el uso de este, para mejorar el proceso de acoplamiento a una nueva herramienta.</p> <p>Al aplicar la prueba diagnóstica para evidenciar los conocimientos previos de cada estudiante, sobre los conceptos que desprenden de la teoría electromagnética y de la relatividad especial y su relación implícita, se evidenció que los estudiantes a nivel general tienen los conceptos que se desprenden de estas teorías, pero no relacionan una con la otra.</p>

Sesión 2	Resultados esperados	Resultados obtenidos	Observaciones y análisis
Clase participativa	<p>Los estudiantes utilizan sus conocimientos previos para dar solución y explicación de las situaciones propuestas en el software, esto generara un debate donde el docente será el intermediario y a partir de este se espera que los estudiantes relacionen algunos conceptos entre estas dos teorías y logren evidenciar la relación entre estos campos del conocimiento.</p>	<p>Con la actividad los estudiantes refuerzan el manejo y apropiación de los conceptos básicos y fundamentales abordados en esta actividad, este proceso permite introducir los conceptos necesarios para las situaciones del software las cuales se abordaran a continuación.</p> <p>Los 15 estudiantes dieron su hipótesis de lo que podría pasar en cada una de las situaciones es decir Predecir, aunque no fueron del todo acertadas en esta ocasión, el porcentaje de aciertos fue de un 40%, es un porcentaje bajo, pero este no interfiere con la planeación y ejecución de la sesión, debido a que lo que se pretende es la comprensión de las situaciones propuestas para lograr las metas de comprensión establecidas.</p>	<p>Al analizar el debate se evidencio que 60% de estudiantes no tenían claros algunos conceptos, como se evidencio en la prueba diagnostico, pero el debate ayudo a la aclaración y explicación de los conceptos para aquellos estudiantes, es importante resaltar que la clase participativa ayudo a la retroalimentación colectiva. Las consideraciones en esta etapa no fueron acertadas como se ha mencionado, pero es un resultado que se esperaba debido a que esta propuesta didáctica pretende que los estudiantes comprendan los conceptos que permiten relacionar la teoría electromagnética con la relatividad especial y esa comprensión se lograra a lo largo de las sesiones.</p>
Simulación de las tres situaciones planteadas en el software.	<p>En esta parte del proceso de aprendizaje los estudiantes Observan, cumpliendo con la segunda etapa del POE, para dar respuesta a las preguntas del software.</p> <p>En esta parte del proceso de aprendizaje los estudiantes Observan, cumpliendo con la segunda etapa del POE, para dar respuesta a las preguntas del software.</p> <p>Donde compararan sus predicciones anteriores con el resultado del software y con las respuestas de sus compañeros.</p>	<p>Esta comparación permitió un acercamiento a los conceptos y a las situaciones planteadas en el software. Donde los estudiantes evidenciaron que sus respuestas no fueron acertadas, pero al darse cuenta de esto, lograron entender el resultado correcto el cual lo muestra el software, este resultado se evidencia en un 70% y se puede demostrar de dos formas al momento que cada estudiante explica una situación dada y la segunda es con la ayuda de sus compañeros y docente que le explican y aclaran las dudas existentes.</p>	<p>En esta observación por parte de docente, se evidencio que los estudiantes entendieron los resultados del software, pero una forma de comprobar si realmente comprendieron es en la siguiente etapa donde los estudiantes tendrán que explicar los resultados de las situaciones.</p>

Sesión 2	Resultados esperados	Resultados obtenidos	Observaciones y análisis
<p>Explicación de resultados de acuerdo con cada observador o marco de referencia en las situaciones del software.</p>	<p>En esta etapa de la sesión se pretende que el estudiante analice, relacione, argumente y convierta la información recolectada en conocimiento que pueda Explicar pasando a la última fase del (POE). Donde el estudiante desarrolla destrezas del pensamiento que van más allá de la memorización.</p>	<p>Un 92% de los estudiantes que participaron lograron interpretar y aplicar los conocimientos adquiridos en las situaciones propuestas y en fenómenos similares o experimentos mentales como: que pasa si se tiene un imán y una bobina, pero ahora lo que se mueve es la bobina ¿qué pasaría? Este es un experimento mental que se propuso para evidenciar si los estudiantes lograron las metas de comprensión propuestas para esta sesión. Con lo anterior se evidencia un manejo apropiado de los conceptos que se han venido trabajando.</p>	<p>Se logro culminar con los estudiantes las tres etapas del POE (Predecir, Observar y Explicar), las cuales son una herramienta indispensable para la comprensión del objetivo general de esta unidad didáctica el cual es: Que el estudiante pueda relacionar conceptualmente las teorías electromagnéticas y la relatividad especial. Para evidenciar si realmente los estudiantes lograron las metas de comprensión se realizara una prueba en la siguiente sesión.</p>
<p>Sesión 3</p> <p>Desarrollar la prueba ¿Qué he aprendido? La cual se encuentra en el software.</p>	<p>Encontrar si los estudiantes relacionan conceptualmente la teoría electromagnética con la relatividad especial. Identificar que tan viable fue la unidad didáctica para las metas de comprensión propuestas.</p>	<p>Los estudiantes respondieron una prueba de los conocimientos adquiridos, donde se evidencio con estos resultados que lograron alcanzar las metas de comprensión propuestas en la unidad didáctica, es decir que en un 92% los estudiantes lograron responder a situaciones similares, evidenciando un aprendizaje por comprensión y no por memorización</p>	<p>Observaciones y análisis</p> <p>Es importante aclarar que el software es la herramienta que le permite al estudiante lograr estas metas de comprensión, pero no es la principal para lograr estas metas debido a que sin las indicaciones del docente no sería precisa con el conocimiento que se quiere transmitir.</p>

Tabla 4.3: Resultados sesiones 2 y 3.

Con las matrices anteriores se puede concluir, que la unidad didáctica a través de la estrategia POE (Predecir, Observar y Explicar), y el software no privilegia la memorización de conceptos establece una construcción de estos de una forma grupal y colectiva, esto debido a que cada una de las etapas pretende la interacción con los compañeros, docente y a su vez cada sesión tiene unos objetivos, por otro lado el software al tener la alternativa de modificar cada una de las opciones seleccionadas permite tener una amplia variedad de situaciones diferentes para la situación 1, Partícula cargada tiene 27 opciones posibles, para la situación 2, Variación de flujo magnético tiene 9 opciones y para la situación 3, Una nueva perspectiva del electromagnetismo tiene 8 opciones diferentes, en conclusión el estudiante tiene una amplia variedad de alternativas que le permiten interactuar y obtener muchos mas resultados, esto lleva a los estudiantes a una respuesta por deducción y comprensión y no por repetición.

Analizando las matrices y las sesiones se puede concluir que los estudiantes aprendieron conceptos como: invarianza, campo eléctrico, campo magnético, principio de relatividad Galileano, marcos de referencia, entre otros, aunque el fuerte de esta investigación es que los estudiantes lograran relacionar el electromagnetismo con la relatividad especial y los conceptos que esto implica, esto se logro en un 92% es decir que la propuesta tuvo buenos resultados de comprensión logrando las metas las metas establecidas para cada sesión y a nivel general de la investigación.

Conclusiones.

Por otra parte, es importante mencionar los conceptos identificados que relacionan estas áreas y los propuestos, vistos en la implementación los cuales fueron una parte importante en el desarrollo de esta, algunos de estos fueron: campo eléctrico, campo magnético, invarianza, contracción de longitud, flujo magnético, fuerza eléctrica motriz, marcos de referencia, principio de relatividad Galileano, entre otros todo este conjunto de conceptos permitió que los estudiantes lograran comprender y relacionar estas dos teorías.

La unidad didáctica implementada en esta investigación se fundamentó en la enseñanza para la comprensión (EPC), ligado a la estrategia pedagógica. Predecir, Observar, Explicar (POE), con esto se evidencio que al unir estos componentes pedagógicos logran hacer una gran herramienta al momento de la planificación de las clases o actividades en el aula, en ese orden de ideas, las actividades propuestas permitieron que los estudiantes se acercaran a sus propios conocimientos, esto debido a que pudo interactuar con diferentes situaciones, esto los llevo a poner a prueba si realmente comprende los conceptos previos que traen, y así mismo también le permite ampliar y afianzar procesos de comprensión.

Con lo anterior, es importante comentar que la unidad didáctica y cada una de las sesiones tiene una secuencia, partiendo de los conocimientos previos de los estudiantes y con los niveles formativos que se pretende que el estudiante adquiera, esta secuencia tiene unos tópicos generativos y objetivos, esto permite que los estudiantes sean autónomos con los temas de su interés y que profundicen en ellos, las metas de comprensión establecen lo que se quiere que los estudiantes realicen de acuerdo a cada actividad, por último se tienen los desempeños de comprensión que permiten evidenciar el desempeño y la comprensión de los estudiantes con respecto a las actividades propuestas, esta sucesión permitió alcanzar las metas de comprensión establecidas.

Por otro lado, los estudiantes desarrollaron y lograron en cada una de las sesiones, competencias establecidas que estimularon el interés de la investigación, como, por ejemplo, el observar y reflexionar acerca de lo visto en las situaciones propuestas en el

software, esto permitió hacer un seguimiento de las comprensiones adquiridas debido a que ellos mismo iban comparando su predicción con lo observado, en otro orden de ideas, la elaboración o construcción de una explicación de las situaciones planteadas por parte de ellos permite evidenciar los resultados de comprensión, debido a que es un proceso que va más allá del simple hecho de responder a una situación propuesta.

Por último, se evidencio que los métodos computacionales para la creación de simulaciones pueden llegar hacer una muy buena herramienta al momento de abordar situaciones experimentales que son difíciles de implementar en un laboratorio, desde otra perspectiva es importante resaltar que el uso de la simulación en los procesos de enseñanza, debido a que los estudiantes participantes mostraron un gran interés tanto de la parte de la creación de herramientas virtuales, como hacer uso de estas en sus procesos profesionales, ya que permite incentivar a los jóvenes en la investigación y creación de nuevas herramientas para enseñanza, este aporte es muy importante debido a que está propuesta esta implementada futuros docentes que más adelante llegaran a las aulas con nuevas ideas para la enseñanza.

Como recomendaciones es importante que los futuros docentes hagan uso adecuado de las tecnologías debido a que son una gran ayuda en la preparación de clases, no obstante, puede llegar a desviar el proceso de aprendizaje si no se tiene claro el objetivo, el modelo, y el por qué es importante usarlas.

Apéndice A

Una explicación breve a la divergencia.

Para la comprensión del concepto de divergencia el autor realizo la siguiente analogía: La cual se situara en un contexto académico en el transcurso de una clase: suponga que un profesor quiere explicar el tema de divergencia, para ello les informa a sus estudiantes que realizara la explicación de dicho tema con una actividad, la cual necesita de la participación de ellos y de la puntualidad en la próxima clase.

En la clase siguiente, efectivamente todos sus estudiantes llegan puntual, antes de entrar el docente les da las siguientes indicaciones:

- Docente: como ya saben el día de hoy explicare el tema de divergencia, con la siguiente actividad, cuando yo les indique que entremos al salón, - será el único momento de ingreso, con esto podemos determinar la cantidad de estudiantes que ingresaran, que para nuestro caso la denominaremos con una letra I .

Al momento de que el profesor les dio la indicación, los estudiantes ingresaron al aula y luego se sentaron.

- Docente: como se pudieron dar cuenta al momento de ingresar al salón la puerta de entrada estaba abierta y la de salida cerrada, es decir que solo teníamos la opción de entrar mas no de salir, en términos matemáticos si aplicamos el operador ∇ (nabla), por el número de estudiantes que ingresaron tenemos, $\nabla \cdot I > 0$.

- Estudiantes: Profesor, ¿Por qué la divergencia es mayor a cero?

- Docente: ¡Muy buena pregunta! La divergencia es positiva, porque solo teníamos una opción de entrada, lo cual se representa como un número de estudiantes entrando al salón que es una cantidad mayor a cero, graficándolo obtendríamos unas líneas ingresando al salón, donde cada línea los representaría a cada uno de ustedes y observarían lo siguiente:



Figura A.1: *Divergencia mayor a cero.*
Fuente de la imagen: *Elaboración propia.*

- Docente: Para $\nabla \cdot I = 0$, una forma de entender la divergencia cuando es nula, es de la siguiente manera; necesito que se levanten y salgan del salón luego entran al salón dando tres vueltas entrando y saliendo alrededor de este, luego se sientan.

- Docente: como se pudieron dar cuenta cada uno de ustedes pasaron por la puerta de salida y luego entraron, graficando el recorrido hecho por cada uno de ustedes, se observa algo muy similar a la siguiente imagen:



Figura A.2: *Divergencia igual a cero.*
Fuente de la imagen: *Elaboración propia.*

- Estudiante: Profesor, ¿No me es claro el por qué la divergencia es cero?

- Docente: La imagen anterior cuenta con dos puntos específicos arbitrarios, que para nuestro caso son las puertas, es decir que toda línea que entra vuelve a salir en dichos puntos, por consiguiente, toda línea que sale vuelve a entrar, no hay diferencia entre líneas que salen o entran, por ejemplo, entraron 5 estudiantes y salen cinco, cuantos quedaron en el salón, pues cero estudiantes.

- Docente: Si $\nabla \cdot I < 0$, Para la explicación de la divergencia menor que cero, será un claro ejemplo, cuando la clase se acabe, en términos de nuestra actividad abrimos la puerta de salida, y el número de estudiantes en el aula será cada vez menor, es decir que solo hay líneas de salida, como lo evidenciamos en la imagen:



Figura A.3: *Divergencia menor a cero.*
Fuente de la imagen: *Elaboración propia.*

Apéndice A

Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento A. Einstein

Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento
A. Einstein

Se sabe que cuando la electrodinámica de Maxwell – tal como se suele entender actualmente – se aplica a cuerpos en movimiento, aparecen asimetrías que no parecen estar en correspondencia con los fenómenos observados. Pensemos, por ejemplo, en la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor. En este caso, el fenómeno que se observa depende solamente del movimiento relativo entre el conductor y el imán, mientras que de acuerdo a la interpretación común se deben distinguir claramente dos casos muy diferentes, dependiendo de cuál de los dos cuerpos se mueva. Si se mueve el imán mientras que el conductor se encuentra en reposo, al rededor del imán aparece un campo eléctrico con cierto valor para su energía. Este campo eléctrico genera una corriente en el lugar donde se encuentre el conductor. Pero si el imán está en reposo y el conductor se mueve, al rededor del imán no aparece ningún campo eléctrico sino que en el conductor se produce una fuerza electromotriz que en sí no corresponde a ninguna energía, pero da lugar a corrientes eléctricas que coinciden en magnitud y dirección con las del primer caso, suponiendo que el movimiento relativo es igual en cada uno de los casos bajo consideración.

Otros ejemplos de esta índole así como los intentos infructuosos para constatar un movimiento de la Tierra con respecto al “medio de propagación de la luz” permiten suponer que no solamente en mecánica sino también en electrodinámica ninguna de las propiedades de los fenómenos corresponde al concepto de reposo absoluto. Más bien debemos suponer que para todos los sistemas de coordenadas, en los cuales son válidas las ecuaciones mecánicas, también tienen validez las mismas leyes electrodinámicas y ópticas, tal como ya se ha demostrado para las magnitudes de primer orden. Queremos llevar esta suposición (cuyo contenido será llamado de ahora en adelante “principio de la relatividad”) al nivel de hipótesis y además introducir una hipótesis adicional que solamente a primera vista parece ser incompatible con el principio de la relatividad. Dicha hipótesis adicional sostiene que la luz en el espacio vacío siempre se propaga con cierta velocidad V que no depende del estado de movimiento del emisor. Basándonos en la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo, estas dos hipótesis son suficientes para derivar una electrodinámica de cuerpos en movimiento que resulta ser sencilla y libre de

contradicciones. La introducción de un “éter” resultará ser superflua puesto que de acuerdo a los conceptos a desarrollar no es necesario introducir un “espacio en reposo absoluto”, ni tampoco se asocia un vector de velocidad a ninguno de los puntos del espacio vacío en los que se llevan a cabo procesos electromagnéticos.

La teoría a desarrollar se basa – como cualquier otra electrodinámica – en la cinemática del cuerpo rígido porque las afirmaciones de cualquier teoría involucran relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. El que estas circunstancias no hayan sido consideradas en forma apropiada es la raíz de las dificultades con las que actualmente debe luchar la electrodinámica de cuerpos en movimiento.

I. Cinemática

§ 1. Definición de simultaneidad

Supongamos un sistema de coordenadas en el cual se valen las ecuaciones mecánicas de Newton. A este sistema de coordenadas lo llamaremos “sistema en reposo” a fin de distinguirlo de otros sistemas que se introducirán más adelante y para precisar la presentación.

Si un punto material se encuentra en reposo con respecto a este sistema de coordenadas, su posición se puede determinar y expresar en coordenadas cartesianas mediante escalas rígidas, utilizando la geometría euclidiana.

Cuando queremos describir el *movimiento* de un punto material, especificamos los valores de sus coordenadas en función del tiempo. Será necesario tener en cuenta que una descripción matemática de esta índole tiene un sentido físico solamente cuando con anterioridad se ha aclarado lo que en este contexto se ha de entender bajo “tiempo”. Debemos tener en cuenta que todas nuestras afirmaciones en las cuales el tiempo juega algún papel, siempre son afirmaciones sobre *eventos simultáneos*. Por ejemplo, cuando digo “Ese tren llega aquí a las 7,” esto significa algo así como: “El momento en que la manecilla pequeña de mi reloj marca las 7 y la llegada del tren son eventos simultáneos.”¹

Podría parecer que todas las dificultades relacionadas con la definición

¹Aquí no se discutirá la imprecisión que se encuentra implícita en el concepto de simultaneidad de dos eventos en (aproximadamente) el mismo lugar y que de igual manera se debe conciliar mediante una abstracción.

del “tiempo” se superarían si en lugar de “tiempo” utilizara “la posición de la manecilla pequeña de mi reloj.” De hecho, una definición de este tipo sería suficiente en caso de que se trate de definir un tiempo exclusivamente para el lugar en el cual se encuentra el reloj; no obstante, esta definición ya no sería suficiente en cuanto se trate de relacionar cronológicamente series de eventos que ocurren en lugares diferentes, o – lo que implica lo mismo – evaluar cronológicamente eventos que ocurren en lugares distantes del reloj.

No obstante, podríamos sentirnos satisfechos si evaluáramos cronológicamente los eventos mediante el reloj de un observador que se encuentra en el origen de coordenadas y le asigna la posición correspondiente de la manecilla del reloj a cada uno de los eventos a evaluar, en el momento en que recibe una señal de luz que proviene del evento y se propaga en el espacio vacío. Sin embargo, como lo demuestra la experiencia, una asignación de esta índole tiene la inconveniencia de no ser independiente del observador equipado con el reloj. Mediante la siguiente observación llegaremos a una especificación mucho más práctica.

Si en el punto A del espacio se encuentra un reloj, un observador que se encuentre en A puede evaluar cronológicamente los eventos en la vecindad inmediata de A , buscando las posiciones de la manecilla del reloj que correspondan simultáneamente a estos eventos. Si en el punto B del espacio también se encuentra un reloj – queremos añadir “un reloj de exactamente la misma naturaleza como el que se encuentra en A ” – también es posible realizar una evaluación cronológica de los eventos en la vecindad inmediata de B mediante un observador que se encuentra en B . Sin embargo, sin especificaciones adicionales no es posible comparar cronológicamente el evento en A con el evento en B ; hasta ahora hemos definido un “tiempo A ” y un “tiempo B ”, pero no un “tiempo” común para A y B . Este último tiempo se puede definir estableciendo *por definición* que el “tiempo” que necesite la luz para viajar de A a B sea igual al “tiempo” para pasar de B a A . Supongamos que una señal de luz parte de A hacia B en el “tiempo A ” t_A , llega a B y se refleja de regreso hacia A en el “tiempo B ” t_B y finalmente arriba al punto A en el “tiempo A ” t'_A . De acuerdo a la definición, los dos relojes estarán sincronizados si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B . \tag{1}$$

Supongamos que es posible formular sin contradicciones esta definición de sincronización para un número arbitrario de puntos, y que en general las

siguientes relaciones son válidas:

1. Si el reloj en B está sincronizado con el reloj en A , entonces el reloj en A está sincronizado con el reloj en B .

2. Si el reloj en A está sincronizado con los relojes en B y en C , entonces los relojes en B y C también estarán sincronizados entre sí.

De esta manera con ayuda de ciertos experimentos físicos (imaginarios) hemos establecido lo que se debe entender bajo relojes sincronizados que se encuentran en reposo en diferentes lugares y, por ende, obviamente hemos obtenido una definición de “simultáneo” y de “tiempo”. El “tiempo” de un evento es el dato de un reloj que se encuentra en reposo en el mismo lugar y el mismo momento del evento; dicho reloj debe estar sincronizado, para todas las determinaciones del tiempo, con un reloj específico que se encuentre en reposo.

Además, basándonos en el experimento asumimos que la magnitud

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V \quad (2)$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío).

Lo importante es que hemos definido el tiempo mediante un reloj que se encuentra en reposo con respecto a un sistema en reposo; debido a su correspondencia con un sistema en reposo, al tiempo que acabamos de definir le llamaremos “el tiempo del sistema en reposo”.

§ 2. Sobre la relatividad de la longitud y el tiempo

Las siguientes reflexiones se basan en el principio de la relatividad y el principio de la constancia de la velocidad de la luz, los cuales formularemos de la siguiente manera.

1. Las leyes de acuerdo a las cuales cambian los estados de los sistemas físicos no dependen de si estos cambios de estado se refieren a uno u otro de dos sistemas de coordenadas que se encuentran en movimiento relativo de traslación uniforme.

2. Cualquier rayo de luz se propaga en un sistema de coordenadas en “reposo” con cierta velocidad V , independientemente de si este rayo de luz ha sido emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento. En este caso

$$\text{velocidad} = \frac{\text{trayectoria de la luz}}{\text{intervalo de tiempo}}, \quad (3)$$

donde el concepto de “intervalo de tiempo” se debe entender en el contexto de la definición presentada en § 1.

Consideremos una varilla rígida en reposo de longitud l , la cual se determina igualmente mediante una escala de medición en reposo. Imaginémonos ahora el eje de la varilla situado sobre el eje X del sistema de coordenadas en reposo y supongamos que la varilla se traslada uniformemente (con velocidad v) y de forma paralela al eje X en la dirección de crecimiento de la coordenada x . Ahora nos preguntamos cuál será la longitud de la varilla *en movimiento*, suponiendo que esta longitud se determina mediante las siguientes dos operaciones:

a) El observador se desplaza junto con la escala mencionada anteriormente y la varilla bajo consideración y efectúa la medición de la longitud superponiendo directamente la escala sobre la varilla, justamente de la misma manera como si la varilla, la escala y el observador se encontraran en reposo.

b) El observador determina los puntos del sistema en reposo en los cuales se encuentran los extremos de la varilla en determinado tiempo t , utilizando para ello relojes que no se mueven con respecto al sistema en reposo y han sido sincronizados de acuerdo al procedimiento del § 1. La distancia entre estos dos puntos, determinada mediante la escala en reposo que ya hemos utilizado en este caso, también es una longitud que se puede designar como la “longitud de la varilla”.

De acuerdo al principio de la relatividad, la longitud a determinar en la operación a), que llamaremos “longitud de la varilla en el sistema en movimiento”, debe ser igual a la longitud l de la varilla en reposo.

La longitud a especificar en la operación b), que llamaremos “longitud de la varilla (en movimiento) en el sistema en reposo”, será determinada en base a nuestros dos principios y se demostrará que su valor es diferente de l .

La cinemática de uso general asume tácitamente que las longitudes determinadas mediante las operaciones arriba mencionadas son exactamente iguales o, en otras palabras, desde el punto de vista geométrico un cuerpo rígido en movimiento en el momento t se puede reemplazar completamente por el *mismo* cuerpo cuando se encuentra en *reposo* en alguna posición.

Supongamos además que en los extremos (A y B) de la varilla se colocan relojes sincronizados con los relojes del sistema en reposo, es decir, en un instante dado sus indicaciones corresponden al “tiempo del sistema en reposo” en las posiciones donde resulte que se encuentren. Por lo tanto estos relojes están “sincronizados en el sistema en reposo”.

Supongamos además que con cada reloj se mueve un observador y que estos observadores aplican a cada uno de los relojes el criterio establecido en § 1 para la sincronización de dos relojes. En el instante de tiempo² t_A un rayo de luz parte de A , luego se refleja en el punto B en el momento t_B y regresa al punto A al tiempo t'_A . Teniendo en cuenta el principio de constancia de la velocidad de la luz obtenemos:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \quad (4)$$

y

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v}, \quad (5)$$

donde r_{AB} representa la longitud de la varilla en movimiento, medida en el sistema en reposo. Por lo tanto los observadores que se desplazan con la varilla determinarán que los relojes no están sincronizados, mientras que los observadores en el sistema en reposo los declararían como sincronizados.

De esta manera vemos que no podemos asignar un significado *absoluto* al concepto de simultaneidad, y que dos eventos simultáneos desde el punto de vista de un sistema de coordenadas ya no se pueden interpretar como simultáneos desde un sistema de coordenadas que se mueve relativamente con respecto al sistema en reposo.

§ 3. Teoría de la transformación de coordenadas y del tiempo de un sistema en reposo a otro sistema que se encuentra en movimiento traslacional uniforme con respecto al primero

Consideremos dos sistemas de coordenadas en el espacio “en reposo”, es decir, dos sistemas cada uno con tres líneas materiales rígidas que parten de un punto y son perpendiculares entre sí. Supongamos que los ejes X de ambos sistemas coinciden y los ejes Y y Z son respectivamente paralelos. Consideremos una escala rígida y un número de relojes en cada uno de los sistemas y supongamos que tanto las escalas como también los relojes de ambos sistemas son, de manera respectiva, exactamente iguales.

Al punto de origen de uno de los sistemas de coordenadas (k) se le confiere una velocidad (constante) v en la dirección de crecimiento de la coordenada

²En este caso “tiempo” significa “tiempo del sistema en reposo” y simultáneamente “indicación del reloj en movimiento que se encuentra en la posición que estamos considerando”.

x del otro sistema (K) que se encuentra en reposo. Igualmente, la velocidad se transfiere a los ejes de coordenadas, la escala en cuestión y a los relojes. A cada tiempo t del sistema en reposo K le corresponde una posición determinada de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría estamos facultados para suponer que el movimiento de k puede ser tal que los ejes del sistema en movimiento en el momento t (siempre se designa con “ t ” el tiempo del sistema en reposo) son paralelos a los ejes del sistema en reposo.

Ahora imaginémosnos que el espacio del sistema en reposo K se mide mediante la escala en reposo, e igualmente el del sistema en movimiento k mediante la escala que se mueve junto con él, y de esta manera se determinan las coordenadas x, y, z y ξ, η, ζ , respectivamente. El tiempo t del sistema en reposo se determina para todos los puntos del sistema mediante los relojes que se encuentran en reposo en dicho sistema y con la ayuda de señales de luz tal como se describió en § 1; de igual forma el tiempo τ del sistema en movimiento se determina para todos los puntos del sistema, en el cual se hallan relojes en reposo relativo con respecto al mismo sistema, utilizando el método mencionado en § 1 de señales de luz entre los puntos donde se encuentran dichos relojes.

Para cada sistema de valores x, y, z, t , el cual determina completamente la posición y el tiempo de un evento en el sistema en reposo, corresponde un sistema de valores ξ, η, ζ, τ que fija dicho evento con respecto al sistema k . Ahora el problema a resolver consiste en encontrar el sistema de ecuaciones que relaciona estas magnitudes.

En primer lugar es claro que las ecuaciones deben ser *lineales* debido a las propiedades de homogeneidad que le asignamos al espacio y al tiempo.

Si fijamos que $x' = x - vt$, es claro que a un punto en reposo en el sistema k le corresponde cierto sistema de valores x', y, z que es independiente del tiempo. Primero determinaremos τ como función de x', y, z y t . A tal fin debemos expresar en forma de ecuaciones el hecho de que τ no es nada más que el compendio de los datos de los relojes en reposo en el sistema k , los cuales han sido sincronizados de acuerdo a la regla especificada en § 1.

Supongamos que desde el origen del sistema k se emite un rayo de luz en el momento τ_0 a lo largo del eje X hacia x' y desde allí en el momento τ_1 se refleja hacia el origen de coordenadas a donde llega en el momento τ_2 .

Entonces se debe cumplir que

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \quad (6)$$

o incluyendo los argumentos de la función τ y aplicando el principio de la constancia de la velocidad de la luz en el sistema en reposo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau \left(0, 0, 0, \left\{ t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v} \right\} \right) \right] \\ = \tau \left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v} \right). \end{aligned}$$

Tomando a x' infinitamente pequeño, de esta última ecuación obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (7)$$

o

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Debemos anotar que en lugar del origen de coordenadas podríamos haber seleccionado cualquier otro punto como punto de salida del rayo de luz y, por lo tanto, la ecuación recién obtenida se cumple para todos los valores de x' , y , z .

Considerando que desde el punto de vista del sistema en reposo la luz siempre se propaga con la velocidad $\sqrt{V^2 - v^2}$ a lo largo de los ejes Y y Z , un análisis similar aplicado a estos ejes nos lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que τ es una función *lineal*, de estas ecuaciones obtenemos

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right), \quad (9)$$

donde a es por el momento una función desconocida $\varphi(v)$ y por brevedad suponemos que en el origen de k , $\tau = 0$ cuando $t = 0$.

Con ayuda de estos resultados es fácil determinar las magnitudes ξ , η , ζ , expresando mediante ecuaciones que la luz (tal como lo exige el principio de constancia de la velocidad de la luz en conexión con el principio de la relatividad) también se propaga en el sistema en movimiento con velocidad V . Para un rayo de luz que en el momento $\tau = 0$ se emite en la dirección de crecimiento de ξ tenemos que:

$$\xi = V\tau, \quad (10)$$

o

$$\xi = aV \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right). \quad (11)$$

Pero con respecto al origen de k el rayo de luz se desplaza con la velocidad $V - v$, cuando se mide en el sistema en reposo, de tal manera que:

$$\frac{x'}{V - v} = t. \quad (12)$$

Si reemplazamos este valor de t en la ecuación para ξ , obtenemos

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'. \quad (13)$$

Si consideramos rayos de luz propagándose a lo largo de los otros ejes, de forma análoga encontramos

$$\eta = V\tau = aV \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right), \quad (14)$$

donde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0; \quad (15)$$

es decir,

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y \quad (16)$$

y

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z. \quad (17)$$

Introduciendo el valor de x' , resulta

$$\begin{aligned}\tau &= \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right), \\ \xi &= \varphi(v)\beta(x - vt), \\ \eta &= \varphi(v)y, \\ \zeta &= \varphi(v)z,\end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \quad (18)$$

y φ es por ahora una función desconocida de v . Si no se impone ninguna condición sobre la posición inicial del sistema en movimiento ni sobre el punto cero de τ , se debe agregar una constante aditiva en la parte derecha de estas ecuaciones.

Ahora debemos demostrar que desde el punto de vista del sistema en movimiento todo rayo de luz se propaga con la velocidad V , si este es el caso en el sistema en reposo, como lo hemos supuesto. Esto es necesario debido a que aún no hemos demostrado que el principio de constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de la relatividad.

En el tiempo $t = \tau = 0$, cuando ambos sistemas de coordenadas poseen un origen común, se emite una onda esférica que se propaga en el sistema K con velocidad V . Si (x, y, z) representa un punto abarcado por esta onda, entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2. \quad (19)$$

A esta expresión le aplicamos nuestras ecuaciones de transformación y tras un cálculo sencillo obtenemos:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2. \quad (20)$$

Por lo tanto, en el sistema en movimiento la onda bajo consideración también es una onda esférica con velocidad de propagación V . De esta manera se demuestra que nuestros dos principios básicos son compatibles entre sí.

En las ecuaciones de transformación que hemos derivado aparece una función desconocida φ de v que determinaremos ahora.

A tal fin introducimos un tercer sistema de coordenadas K' que con respecto al sistema k se encuentra en un estado de movimiento traslacional paralelamente al eje Ξ , de tal manera que su origen de coordenadas se desplaza con velocidad $-v$ a lo largo del eje Ξ . Supongamos que en el momento $t = 0$ todos los tres orígenes de coordenadas coinciden y que para $t = x = y = z = 0$ el tiempo t' del sistema K' es igual a cero. Sean x', y', z' , las coordenadas medidas en el sistema K' . Utilizando dos veces nuestro sistema de ecuaciones de transformación obtenemos:

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(-v)\beta(-v) \left\{ \tau + \frac{v}{V^2}\xi \right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t, \\ x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x, \\ y' &= \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y, \\ z' &= \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z. \end{aligned}$$

Puesto que las relaciones entre x', y', z' y x, y, z no contienen el tiempo t , los sistemas K y K' se encuentran en reposo uno con respecto al otro y es claro que la transformación de K a K' debe ser la transformación idéntica. Por lo tanto:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1. \quad (21)$$

Ahora nos preguntamos cuál es el significado de $\varphi(v)$. Consideremos el intervalo del eje H localizado entre $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ y $\xi = 0, \eta = l, \zeta = 0$. Este intervalo del eje H corresponde a una varilla que se mueve perpendicularmente a su eje con la velocidad v con respecto al sistema K . Los extremos de la varilla en el sistema K tiene las coordenadas:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0 \quad (22)$$

y

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0. \quad (23)$$

Por lo tanto, la longitud de la varilla medida en K es $l/\varphi(v)$; de esta forma hemos hallado el significado de la función φ . Por razones de simetría es evidente que la longitud de una varilla, medida en el sistema en reposo, que se mueve perpendicularmente a su eje depende solamente de la velocidad y no de la dirección y el sentido del movimiento. Entonces, la longitud, medida

en el sistema en reposo, de la varilla en movimiento no varía si se intercambia v por $-v$. En consecuencia tenemos:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}, \quad (24)$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v). \quad (25)$$

A partir de esta relación y de la encontrada anteriormente se deriva que $\varphi(v) = 1$ y, consecuentemente, las ecuaciones de transformación se convierten en

$$\begin{aligned} \tau &= \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \quad (26)$$

§ 4. Significado físico de las ecuaciones obtenidas en lo referente a cuerpos rígidos y relojes en movimiento

Consideremos una esfera rígida³ de radio R que está en reposo con respecto al sistema k y cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas de k . La ecuación para la superficie de esta esfera que se mueve con velocidad v con respecto a K es:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2. \quad (27)$$

Al tiempo $t = 0$ la ecuación de esta superficie en coordenadas x, y, z se expresa como:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2. \quad (28)$$

³Es decir, un cuerpo que posee forma de esfera cuando se examina en reposo.

Si en un sistema en reposo un cuerpo rígido tiene la forma de una esfera, en un sistema en movimiento, visto desde el sistema en reposo, tendrá la forma de un elipsoide de rotación con los ejes

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad R, \quad R. \quad (29)$$

Mientras que las dimensiones Y y Z de la esfera (y por lo tanto también de cualquier cuerpo rígido de forma arbitraria) no resultan afectadas por el movimiento, la dimensión X aparece reducida en la relación $1 : \sqrt{1 - (v/V)^2}$, es decir, se hace mayor a medida que aumenta v . En el caso $v = V$ todos los objetos en movimiento, vistos desde un sistema en reposo, se transforman en figuras planas. A velocidades superiores a la de la luz nuestro análisis pierde todo sentido. Por lo demás, en los siguientes análisis veremos que físicamente la velocidad de la luz en nuestra teoría juega el papel de las velocidades infinitamente grandes.

Es claro que los mismos resultados son válidos para cuerpos en reposo en el sistema de “reposo”, vistos desde un sistema en movimiento uniforme.

Además, imaginémonos uno de los relojes que están en la capacidad de indicar el tiempo t cuando se encuentra en reposo con respecto a un sistema en reposo, y el tiempo τ cuando se encuentra en reposo con respecto a un sistema en movimiento. Supongamos que dicho reloj está localizado en el origen de coordenadas de k y está ajustado de tal manera que indica el tiempo τ . ¿Qué tan rápido marcará el tiempo este reloj, si se observa desde el sistema en reposo?

Entre las cantidades x , t y τ que se refieren a la posición de este reloj tenemos, obviamente, las siguientes ecuaciones:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{V^2} x \right) \quad (30)$$

y

$$x = vt. \quad (31)$$

Por lo tanto

$$\tau = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right) t, \quad (32)$$

de donde se deduce que la indicación del reloj (vista desde el sistema en reposo) por cada segundo se retrasa $(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2})$ segundos, es decir, $\frac{1}{2}(v/V)^2$ segundos, si nos olvidamos de las correcciones iguales o superiores al cuarto orden.

De lo anterior se deriva la siguiente consecuencia particular. Si en los puntos A y B de K existen relojes sincronizados, que se encuentran en reposo con respecto al sistema en reposo, y movemos el reloj de A con velocidad v a lo largo de la línea que une A con B , al llegar al punto B los relojes ya no estarán sincronizados, sino que el reloj desplazado de A hasta B mostrará, con respecto al reloj que desde el principio se encontraba en B , un retraso de $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ segundos, donde t es el tiempo que necesita el reloj para pasar de A a B .

Inmediatamente se ve que este resultado también es válido cuando el reloj se desplaza desde A hasta B a lo largo de una línea poligonal arbitraria, incluso cuando los puntos A y B coinciden.

Si suponemos que el resultado demostrado para una línea poligonal es válido también para una curva de curvatura continua, obtenemos la siguiente conclusión: Si en A se encuentran dos relojes sincronizados y movemos uno de ellos con velocidad constante a lo largo de una curva cerrada hasta regresar al punto A , utilizando para ello un tiempo de t segundos, entonces al arribar al punto A el reloj desplazado mostrará un retraso de $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ segundos, con respecto al reloj que ha permanecido inmóvil. De aquí concluimos que un reloj de balance situado en el ecuador de la Tierra debe andar más despacio, por una cantidad muy pequeña, que un reloj similar situado en uno de los polos y sujeto a las mismas condiciones.

§ 5. Teorema de adición de velocidades

Consideremos en el sistema k , que se mueve con velocidad v a lo largo del eje X del sistema K , un punto en movimiento de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\xi &= w_\xi \tau, \\ \eta &= w_\eta \tau, \\ \zeta &= 0,\end{aligned}$$

donde w_ξ y w_η son constantes.

Se pretende describir el movimiento del punto con respecto al sistema K . Si introducimos en las ecuaciones de movimiento del punto las magnitudes x, y, z, t mediante las ecuaciones de transformación derivadas en § 3, obtenemos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{vw_\xi}{V^2}}t, \\y &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw_\xi}{V^2}}w_\eta t, \\z &= 0.\end{aligned}$$

Consecuentemente, en nuestra teoría la ley del paralelogramo para las velocidades es válida únicamente a primer orden de aproximación. Sea

$$\begin{aligned}U^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2\end{aligned}$$

y

$$\alpha = \arctg \frac{w_y}{w_x}; \quad (33)$$

entonces, α se debe considerar como el ángulo entre las velocidades v y w . Un cálculo sencillo genera

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha) - \left(\frac{vw \sin \alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw \cos \alpha}{V^2}}. \quad (34)$$

Es interesante anotar que v y w aparecen de forma simétrica en la expresión para la velocidad resultante. Si w también tiene la dirección del eje X (eje Ξ), obtenemos

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}. \quad (35)$$

De esta ecuación se deriva que de la combinación de dos velocidades, ambas menores que V , siempre resulta una velocidad menor que V . En efecto, si tomamos $v = V - \kappa$ y $w = V - \lambda$, donde κ y λ son positivas y menores que V , entonces:

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V. \quad (36)$$

Además, se deriva que la velocidad de la luz V no se puede alterar al combinarla con una “velocidad menor que la de la luz”. En este caso se obtiene

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V. \quad (37)$$

Para el caso en que v y w tienen la misma dirección también hubiéramos podido obtener la fórmula para U aplicando dos de las transformaciones descritas en § 3. Si además de los sistemas K y k utilizados en § 3 introducimos un tercer sistema de coordenadas k' que se desplace paralelamente al sistema k y cuyo origen se mueve con velocidad w sobre el eje Ξ , obtenemos ecuaciones que relacionan a x, y, z, t con las cantidades correspondientes en k' y que se diferencian de las encontradas en § 3 solamente porque en lugar de “ v ” aparece la magnitud

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}. \quad (38)$$

De aquí se deduce que, como debe ser, dichas transformaciones paralelas forman un grupo.

Hemos derivado las dos leyes necesarias de la cinemática que corresponden a nuestros dos principios y ahora procederemos a mostrar su aplicación en electrodinámica.

II. Electrodinámica

§ 6. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de la fuerza electromotriz que aparece con el movimiento en un campo magnético.

Supongamos que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema en reposo K de forma tal que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde (X, Y, Z) representa el vector de la fuerza eléctrica y (L, M, N) el de la fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones la transformación desarrollada en § 3, refiriendo los efectos electromagnéticos al sistema de coordenadas que se mueve con velocidad v , obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \xi}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \xi},
\end{aligned} \tag{39}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V} \right)^2}}, \tag{40}$$

El principio de la relatividad exige ahora que las ecuaciones de Maxwell-Hertz en el espacio vacío también se cumplan en el sistema k , si se cumplen en el sistema K , es decir, que los vectores de la fuerza eléctrica y magnética $-(X', Y', Z')$ y (L', M', N') del sistema en movimiento k , que se definen respectivamente mediante sus efectos ponderomotrices sobre la masa eléctrica y magnética, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Evidentemente, los dos sistemas de ecuaciones derivados para el sistema k deben representar lo mismo debido a que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema K . Además, puesto que las ecuaciones de ambos sistemas coinciden, con la excepción de los símbolos que representan los vectores, deducimos que las funciones que aparecen en las posiciones correspondientes en las ecuaciones deben coincidir, con la excepción de un factor $\psi(v)$ que es común para todas las funciones de uno de los sistemas y es independiente de ξ , η , ζ , pero eventualmente dependiente de v . Por lo tanto se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\ Y' &= \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), & M' &= \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right), \\ Z' &= \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), & N' &= \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Si calculamos el inverso de este sistema de ecuaciones, primero resolviendo el sistema recién obtenido y, segundo, aplicando las ecuaciones a la transformación inversa (de k a K), caracterizada mediante la velocidad $-v$, y consideramos que los dos sistemas de ecuaciones obtenidos de esta manera deben ser idénticos, obtenemos:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1. \quad (42)$$

Además, por razones de simetría tenemos⁴

$$\varphi(v) = \varphi(-v); \quad (43)$$

por lo que

$$\varphi(v) = 1, \quad (44)$$

y nuestras ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), & M' &= \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), & N' &= \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right). \end{aligned}$$

⁴Por ejemplo, si $X = Y = Z = L = M = 0$ y $N \neq 0$, es claro por razones de simetría que cuando v cambia su signo sin alterar su valor numérico, entonces Y' también debe cambiar su signo sin alterar su valor numérico.

Para interpretar estas ecuaciones notemos lo siguiente: Supongamos que una carga eléctrica puntual tiene el valor “uno” en el sistema en reposo K , es decir, cuando se encuentra en reposo con respecto al sistema en reposo ejerce una fuerza de una dina sobre una cantidad de electricidad igual que se encuentra a una distancia de un cm. De acuerdo al principio de la relatividad, esta carga eléctrica también tiene el valor “uno” en el sistema en movimiento. Si esta cantidad de electricidad se encuentra en reposo con respecto al sistema en reposo, de acuerdo a la definición, el vector (X, Y, Z) es igual a la fuerza que actúa sobre ella. Si la cantidad de electricidad se encuentra en reposo con respecto al sistema en movimiento (por lo menos en el momento relevante), entonces la fuerza que actúa sobre ella, medida en el sistema en movimiento, es igual al vector (X', Y', Z') . Consecuentemente, las primeras tres de las ecuaciones presentadas arriba se pueden expresar mediante palabras de las siguientes dos maneras:

1. Si una carga eléctrica, puntual y unitaria se mueve en un campo electromagnético, además de la fuerza eléctrica sobre ella actúa una “fuerza electromotriz” que, si despreciamos los términos multiplicados por las potencias de v/V de orden dos y superiores, es igual al producto vectorial de la velocidad de la carga unitaria por la fuerza magnética, dividido por la velocidad de la luz (modo de expresión antiguo).

2. Si una carga eléctrica, puntual y unitaria se mueve en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ella es igual a la fuerza eléctrica presente en la posición de la carga, la cual se obtiene mediante una transformación del campo a un sistema de coordenadas en reposo con respecto a la carga eléctrica (modo de expresión moderno).

La analogía es válida para “fuerzas magnetomotrices”. Vemos que en la teoría desarrollada la fuerza electromotriz juega solamente el papel de concepto auxiliar cuya introducción se debe al hecho de que las fuerzas eléctricas y magnéticas no existen independientemente del estado de movimiento del sistema de coordenadas.

Además es claro que ahora deja de existir la asimetría mencionada en la introducción que aparecía cuando considerábamos corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor. Adicionalmente, las cuestiones relaciones con el “sitio” de las fuerzas electrodinámicas electromotrices (máquinas unipolares) no tienen ningún sentido.

§ 7. Teoría del principio de Doppler y de la aberración

Supongamos que muy lejos del origen de coordenadas del sistema K se encuentra una fuente de ondas electrodinámicas, las cuales en la parte del espacio que contiene el origen se representan con un grado suficiente de aproximación mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, & \Phi &= \omega \left(t - \frac{ax + by + cz}{V} \right). \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, \end{aligned}$$

Las magnitudes (X_0, Y_0, Z_0) y (L_0, M_0, N_0) son los vectores que determinan la amplitud de la onda y a, b, c , son los cosenos direccionales de las normales de la onda.

Queremos investigar la constitución de estas ondas cuando son examinadas por un observador que se encuentra en reposo con respecto al sistema en movimiento k . Aplicando las ecuaciones de transformación para las fuerzas eléctricas y magnéticas derivadas en § 6 y las ecuaciones de transformación para las coordenadas y el tiempo halladas en § 3, encontramos directamente las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta \left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0 \right) \sin \Phi', & M' &= \beta \left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0 \right) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta \left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0 \right) \sin \Phi', & N' &= \beta \left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0 \right) \sin \Phi', \\ \Phi' &= \omega' \left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

donde hemos utilizado que

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega \beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right), \\ a' &= \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}}, \\ b' &= \frac{b}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V} \right)}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$c' = \frac{c}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V}\right)}.$$

De la ecuación para w' se deriva lo siguiente: Si con respecto a una fuente de luz de frecuencia ν , situada a una distancia infinita, un observador se mueve con velocidad v de forma tal que la línea de conexión “fuente de luz - observador” forma el ángulo φ con la velocidad de un observador asociado con un sistema de coordenadas que se encuentra en reposo con respecto a la fuente de luz, la frecuencia ν' de la luz percibida por el observador está dada mediante la ecuación:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \quad (47)$$

Este es el principio de Doppler para velocidades arbitrarias. Para $\varphi = 0$ la ecuación toma la forma clara

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}. \quad (48)$$

Vemos que –a diferencia de la opinión común– para $v = -\infty$ corresponde $\nu = \infty$.

Si denominamos como φ' el ángulo entre la normal de la onda (dirección del rayo) en el sistema en movimiento y la línea de conexión “fuente de luz - observador”, la ecuación para a' toma la forma

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}. \quad (49)$$

Esta ecuación representa la ley de la aberración en su forma más general. Si $\varphi = \pi/2$, la ecuación toma la forma sencilla

$$\cos \varphi' = -\frac{v}{V}. \quad (50)$$

Todavía debemos encontrar la amplitud de la onda tal como aparece en el sistema en movimiento. Si denominamos como A y A' a la amplitud de la fuerza eléctrica o magnética medida en el sistema en reposo y en movimiento, respectivamente, obtenemos la ecuación

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad (51)$$

que para $\varphi = 0$ se simplifica y toma la forma

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}. \quad (52)$$

De las ecuaciones desarrolladas se deriva que para un observador que se aproxima con velocidad V hacia una fuente de luz, dicha fuente debería mostrar una intensidad infinita.

§ 8. Transformación de la energía de rayos de luz. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre un espejo perfecto.

Puesto que $A^2/8\pi$ es la energía de la luz por unidad de volumen, de acuerdo al principio de la relatividad debemos considerar a $A'^2/8\pi$ como la energía de la luz en el sistema en movimiento. Por lo tanto A'^2/A^2 sería la relación entre la energía de cierto complejo de luz “medida en movimiento” y la “medida en reposo”, si el volumen del complejo de luz medido en K fuera el mismo que el medido en k . Sin embargo, este no es el caso. Si a, b, c son los cosenos direccionales de la normal de la onda de luz en el sistema en reposo, a través de los elementos de superficie de la esfera

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2 \quad (53)$$

que se desliza con la velocidad de la luz no pasa ninguna energía. Por consiguiente, podemos decir que esta superficie encierra permanentemente el mismo complejo de luz. Nos preguntamos cuál es la cantidad de energía que encierra esta superficie desde el punto de vista del sistema k , es decir, la energía del complejo de luz con respecto al sistema k .

Desde el punto de vista del sistema en movimiento la superficie esférica es una superficie elipsoidal cuya ecuación para el tiempo $\tau = 0$ es

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2. \quad (54)$$

Si S es el volumen de la esfera y S' el volumen del elipsoide, un cálculo sencillo muestra que

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}. \quad (55)$$

Entonces, si designamos a la energía encerrada por esta superficie como E , cuando se mide en el sistema en reposo, y como E' , cuando se mide en el sistema en movimiento, obtenemos la fórmula

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}, \quad (56)$$

que para $\varphi = 0$ se simplifica y transforma en

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}. \quad (57)$$

Es notable que la energía y la frecuencia de un complejo de luz varían con el estado de movimiento del observador de acuerdo a la misma ley.

Sea el plano de coordenadas $\xi = 0$ una superficie reflectora perfecta sobre la cual se reflejan las ondas planas consideradas en el último párrafo. Nos preguntamos cuál es la presión de la luz ejercida sobre la superficie reflectora, y la dirección, frecuencia e intensidad de la luz después de la reflexión.

Supongamos que el rayo incidente está definido mediante las magnitudes A , $\cos \varphi$, ν (con respecto al sistema K). Desde el punto de vista de k las magnitudes correspondientes son:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}}, \quad (58)$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}, \quad (59)$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \quad (60)$$

Si relacionamos el proceso con el sistema k , para la luz reflejada obtenemos

$$\begin{aligned} A'' &= A', \\ \cos \varphi'' &= -\cos \varphi', \\ \nu'' &= \nu'. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la transformación inversa para el sistema en reposo K para la luz reflejada encontramos que

$$A''' = A'' \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad (61)$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad (62)$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}. \quad (63)$$

La energía (medida en el sistema en reposo) que incide sobre el espejo por unidad de área y unidad de tiempo está dada evidentemente por $A^2(V \cos \varphi - v)$. La energía que sale del espejo por unidad de área y unidad de tiempo es $A'''^2/8\pi(-V \cos \varphi''' + v)$. De acuerdo al principio de la energía, la diferencia entre estas dos expresiones corresponde al trabajo ejercido por la presión de la luz en una unidad de tiempo. Si igualamos este trabajo al producto Pv , donde P es la presión de la luz, obtenemos

$$P = 2 \frac{A^2 \left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{8\pi \left(1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)}. \quad (64)$$

De acuerdo con el experimento y con los resultados de otras teorías, a primer orden de aproximación obtenemos

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi. \quad (65)$$

Todos los problemas sobre óptica de cuerpos en movimiento se pueden resolver aplicando el método utilizado aquí. Lo importante es que la fuerza eléctrica y magnética de la luz, la cual resulta influenciada por un cuerpo en movimiento, se transforman a un sistema de coordenadas que se encuentra en reposo con respecto al cuerpo. De esta manera cualquier problema relacionado con óptica de cuerpos en movimiento se reduce a una serie de problemas sobre óptica de cuerpos en reposo.

§ 9. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz considerando las corrientes de convección.

Comenzamos con las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_x \rho + \frac{\partial X}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_y \rho + \frac{\partial Y}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_z \rho + \frac{\partial Z}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},\end{aligned}$$

donde

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (66)$$

representa 4π veces la densidad eléctrica y (u_x, u_y, u_z) es el vector de velocidad de la carga eléctrica. Si nos imaginamos las cargas eléctricas acopladas de forma invariable a pequeños cuerpos rígidos (iones, electrones), estas ecuaciones representan el fundamento electromagnético de la electrodinámica de Lorentz y de la óptica de cuerpos en movimiento.

Si estas ecuaciones son válidas en el sistema K y las transformamos al sistema k con la ayuda de las ecuaciones de transformación derivadas en § 3 y § 6, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_\xi \rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_\eta \rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_\zeta \rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},\end{aligned}$$

donde

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi$$

$$\frac{u_y}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \quad \rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta \left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right) \rho$$

$$\frac{u_z}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta.$$

Puesto que – como se deduce del teorema de adición de velocidades (§ 5) – el vector (u_ξ, u_η, u_ζ) no es nada más que la velocidad de las cargas eléctricas en el sistema k , de esta forma se demuestra que, en base a nuestros principios cinemáticos, el fundamento electrodinámico de la teoría de Lorentz para la electrodinámica de cuerpos en movimiento está de acuerdo con el principio de la relatividad.

Además, quisiéramos anotar brevemente que de las ecuaciones desarrolladas se puede derivar con facilidad la siguiente ley importante: Si un cuerpo cargado eléctricamente se mueve de forma arbitraria en el espacio sin alterar su carga, cuando se observa desde un sistema de coordenadas que se desplaza junto con el cuerpo, entonces su carga también permanecerá constante cuando se observa desde el sistema en “reposo” K .

§ 10. Dinámica de un electrón (acelerado lentamente).

En un campo electromagnético se mueve una partícula puntual (que llamaremos electrón) provista de una carga eléctrica ε y sobre su movimiento suponemos lo siguiente:

Si el electrón se encuentra en reposo en un momento dado, en los instantes de tiempo subsiguientes el movimiento se desarrolla de acuerdo a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon Y \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon Z, \end{aligned}$$

donde x, y, z son las coordenadas del electrón y μ es su masa, siempre y cuando el movimiento sea lento.

En segundo lugar, supongamos que en cierto momento el electrón posee la velocidad v . Buscamos la ley de acuerdo a la cual se mueve el electrón en

los instantes de tiempo inmediatos.

Sin alterar la generalidad del análisis podemos y queremos asumir que el electrón, en los momentos en que lo observamos, se encuentra en el origen de coordenadas y se mueve a lo largo del eje X del sistema K con velocidad v . Entonces es claro que en un momento dado ($t = 0$) el electrón se encuentra en reposo con respecto a un sistema de coordenadas que se desliza paralelamente a lo largo del eje X con velocidad v .

De la suposición descrita arriba en relación con el principio de la relatividad es claro que desde el punto de vista del sistema k y para los momentos de tiempo subsiguientes (valores pequeños de t) el movimiento del electrón se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \varepsilon X' \\ \mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \varepsilon Y' \\ \mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \varepsilon Z',\end{aligned}$$

donde las magnitudes ξ , η , ζ , τ , X' , Y' , Z' se refieren al sistema k . Si además fijamos que para $t = x = y = z = 0$ deba ser $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, entonces tienen validez las ecuaciones de transformación de §§ 3 y 6 de forma tal que obtenemos

$$\begin{aligned}\tau &= \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right), \\ \xi &= \beta(x - vt), & X' &= X, \\ \eta &= y, & Y' &= \beta \left(Y - \frac{v}{V} N \right), \\ \zeta &= z, & Z' &= \beta \left(Z + \frac{v}{V} M \right).\end{aligned}$$

Con ayuda de estas ecuaciones transformamos las ecuaciones de movimiento del sistema k al sistema K y obtenemos como resultado

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta^2} X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M \right). \end{aligned} \right.$$

Asumiendo el punto de vista común nos preguntamos cuál es la masa “longitudinal” y “transversal” del electrón en movimiento. Primero escribimos las ecuaciones (A) en la forma

$$\begin{aligned}\mu\beta^2\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\ \mu\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y', \\ \mu\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z',\end{aligned}$$

y luego notamos que $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, vistas desde un sistema que en ese momento se mueve junto con el electrón a la misma velocidad. (Esta fuerza se podría medir, por ejemplo, mediante una balanza de resorte que se encuentre en reposo en este último sistema.) Si ahora llamamos a esta fuerza simplemente “la fuerza que actúa sobre el electrón” y mantenemos la ecuación

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \text{fuerza} \tag{67}$$

y, además, decidimos que las aceleraciones deben ser medidas en el sistema en reposo K , de las ecuaciones mencionadas arriba obtenemos

$$\begin{aligned}\text{masa longitudinal} &= \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3}, \\ \text{masa transversal} &= \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.\end{aligned}$$

Naturalmente, si se utilizaran otras definiciones para la fuerza y la aceleración, encontraríamos otros valores para las masas. De aquí vemos que se debe ser muy cuidadoso cuando se comparan diferentes teorías del movimiento del electrón.

Nótese que estos resultados sobre la masa también son válidos para puntos materiales ponderables, porque un punto material ponderable se puede convertir en un electrón (en nuestro sentido), adicionándole una carga eléctrica *tan pequeña como se quiera*.

Ahora determinaremos la energía cinética del electrón. Si un electrón se mueve partiendo del reposo desde el origen de coordenadas del sistema K a lo

largo del eje X bajo la acción de una fuerza electrostática X , es claro que la energía extraída del campo electrostático tiene el valor de $\int \varepsilon X dx$. Puesto que el electrón se debe acelerar lentamente y, por lo tanto, no debe emanar energía en forma de radiación, la energía extraída del campo electrostático se debe igualar a la energía de movimiento W del electrón. Teniendo en cuenta que durante todo el proceso de movimiento bajo consideración se puede aplicar la primera de las ecuaciones (A), obtenemos

$$W = \int \varepsilon X dx = \mu \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}. \quad (68)$$

Para $v = V$ la energía W crece infinitamente. Como en nuestros resultados anteriores, velocidades superiores a la de la luz no tienen ninguna posibilidad de existencia.

En virtud del argumento mencionado arriba, esta expresión para la energía cinética también debe ser válida para masas ponderables.

Ahora enumeraremos las propiedades del movimiento del electrón que se derivan del sistema de ecuaciones (A) y que podrían ser sometidas a experimentos:

1. De la segunda ecuación del sistema (A) se deduce que una fuerza eléctrica Y y una fuerza magnética N actúan con la misma intensidad de deflexión sobre un electrón que se mueve con velocidad v , cuando se cumple que $Y = Nv/V$. Entonces vemos que de acuerdo a nuestra teoría es posible determinar la velocidad del electrón a partir de la relación entre la deflexión magnética A_m y la deflexión eléctrica A_e , utilizando la ley

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}. \quad (69)$$

Esta relación puede ser probada en el experimento porque la velocidad del electrón también se puede medir directamente, por ejemplo, mediante campos eléctricos y magnéticos que oscilan rápidamente.

2. De la derivación de la energía cinética para el electrón se deduce que entre la diferencia continua de potencial y la velocidad adquirida por el electrón v debe existir una relación de la forma

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}. \quad (70)$$

3. Calculemos el radio de curvatura R de la trayectoria cuando existe (como única fuerza de deflexión) una fuerza magnética N que actúa de forma perpendicular a la velocidad del electrón. De la segunda de las ecuaciones (A) obtenemos

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon v}{\mu V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \quad (71)$$

o

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}. \quad (72)$$

Estas tres relaciones representan una expresión completa para las leyes que debe cumplir el movimiento de un electrón, de acuerdo a la teoría presentada aquí.

Finalmente quisiera anotar que durante el trabajo realizado para analizar los problemas aquí presentados he contado con la fiel asistencia de mi amigo y colega M. Besso a quien agradezco por algunas sugerencias valiosas.

Berna, junio de 1905.

(Recibido el 30 de junio de 1905.)

Sobre esta edición:

La versión aquí presente es una traducción del artículo original publicado por Albert Einstein en idioma alemán bajo el título “*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*” en la revista *Annalen der Physik*, **17**, 891–921 (1905).

Esta traducción y su versión electrónica en PDF han sido elaboradas por Hernando Quevedo (ICN-UNAM, quevedo@nucleares.unam.mx) en abril de 2005. Por tratarse de una traducción de material de dominio público, esta versión puede ser reproducida y utilizada para fines no lucrativos de cualquier forma y sin restricción alguna.

Apéndice B

Código del software.

Solo se adjunta una parte muy pequeña del código debido a lo extenso del mismo.

Formulario pantalla de inicio.

```
Public Class Form1
    Private Sub Situacion1_Click(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion1.Click
        Me.Hide()
        Form2.Show()
    End Sub
    Private Sub Situacion2_Click(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion2.Click
        Me.Hide()
        Form3.Show()
    End Sub
    Private Sub Situacion3_Click(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion3.Click
        Me.Hide()
        Form4.Show()
    End Sub
    Private Sub Situacion1_MouseEnter(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion1.MouseEnter
        Me.situacion1.BackgroundImage = My.Resources._1_1
    End Sub
    Private Sub Situacion1_MouseLeave(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion1.MouseLeave
        Me.situacion1.BackgroundImage = My.Resources._12
    End Sub
    Private Sub Situacion2_MouseEnter(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion2.MouseEnter
        Me.situacion2.BackgroundImage = My.Resources._22
    End Sub
    Private Sub Situacion2_MouseLeave(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion2.MouseLeave
        Me.situacion2.BackgroundImage = My.Resources._21
    End Sub
    Private Sub Situacion3_MouseEnter(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion3.MouseEnter
        Me.situacion3.BackgroundImage = My.Resources._32
    End Sub
    Private Sub Situacion3_MouseLeave(sender As Object, e As EventArgs) Handles
situacion3.MouseLeave
        Me.situacion3.BackgroundImage = My.Resources._33
    End Sub
End Class
```

Formulario situación I, Carga eléctrica.

```
Imports System.Drawing.Drawing2D
Public Class Form3
    Dim a, b, c, d, o, p, x, z, v, l, n, m As Integer
    Dim x1, x2, y1, y2, r As Integer
    Dim dibujo As Graphics
    Private Sub Form3_Load(sender As Object, e As EventArgs) Handles MyBase.Load
        iman.BackColor = Color.FromArgb(190, 255, 0, 0)
        iman1.BackColor = Color.FromArgb(190, 0, 255)
        For i As Integer = 1 To 25 Step 2.5
            Chart1.Series("Voltaje vs flujo").Points.Add(i)
        Next
        For l As Integer = 0 To 54 Step 9
            Chart1.Series("Voltaje vs posición del imán").Points.Add(l)
        Next
    End Sub
    Private Sub Graficar()
        Dim pen As New Pen(Brushes.Yellow, 3)
        dibujo = luz.CreateGraphics
        'dibujo.DrawEllipse(pen, 30, 40, 50, -60)
        dibujo.FillEllipse(Brushes.Yellow, 20, 20, 40, 50)
    End Sub
    Private Sub Graficar1()
        Dim pen As New Pen(Brushes.Yellow, 3)
        dibujo = luz.CreateGraphics
        'dibujo.DrawEllipse(pen, 30, 40, 50, -60)
        dibujo.FillEllipse(Brushes.Yellow, 20, 10, 60, 75)
    End Sub
    Public Sub Pinta()
        'DEFINE LAS VARIABLES DE GRAPHICS
        Dim manecilla As Bitmap = New Bitmap(pantallab.Width, pantallab.Height)
        Dim linea As Graphics = Graphics.FromImage(manecilla)
        'QUEREMOS LINEAS SUAVES
        linea.SmoothingMode = SmoothingMode.AntiAlias
        'DIBUJA LA MANECILLA DE campo
        Dim pen As New Pen(Brushes.Red, 3)
        pen.SetLineCap(0, LineCap.DiamondAnchor, DashCap.Triangle)
        linea.TranslateTransform(79, 85)
        linea.RotateTransform(o)
        linea.DrawLine(pen, 0, 0, -1, -60)
        linea.ResetTransform()
        'PRESENTALO EN EL PICTUREBOX
        pantallab.Image = manecilla
        linea.FillEllipse(Brushes.Red, 74, 80, 10, 10)
    End Sub
    Public Sub Pinta1()
        'DEFINE LAS VARIABLES DE GRAPHICS
        Dim manecilla As Bitmap = New Bitmap(pantallab.Width, pantallab.Height)
        Dim linea As Graphics = Graphics.FromImage(manecilla)
        'QUEREMOS LINEAS SUAVES
        linea.SmoothingMode = SmoothingMode.AntiAlias
        'DIBUJA LA MANECILLA DE campo
        Dim pen As New Pen(Brushes.Red, 3)
```

```

pen.SetLineCap(0, LineCap.DiamondAnchor, DashCap.Triangle)
linea.TranslateTransform(79, 85)
linea.RotateTransform(p)
linea.DrawLine(pen, 0, 0, 58, -48)
linea.ResetTransform()
'PRESENTALO EN EL PICTUREBOX
pantallab.Image = manecilla
linea.FillEllipse(Brushes.Red, 74, 80, 10, 10)
End Sub
Public Sub Pintas()
'DEFINE LAS VARIABLES DE GRAPHICS
Dim manecilla As Bitmap = New Bitmap(pantallab.Width, pantallab.Height)
Dim linea As Graphics = Graphics.FromImage(manecilla)
'QUEREMOS LINEAS SUAVES
linea.SmoothingMode = SmoothingMode.AntiAlias
'DIBUJA LA MANECILLA DE campo
Dim pen As New Pen(Brushes.Red, 3)
pen.SetLineCap(0, LineCap.DiamondAnchor, DashCap.Triangle)
linea.TranslateTransform(79, 85)
linea.RotateTransform(p)
linea.DrawLine(pen, 0, 0, -55, -45)
linea.ResetTransform()
'PRESENTALO EN EL PICTUREBOX
pantallab.Image = manecilla
linea.FillEllipse(Brushes.Red, 74, 80, 10, 10)
End Sub
Public Sub Pinta2()
'DEFINE LAS VARIABLES DE GRAPHICS
Dim manecilla As Bitmap = New Bitmap(circuito3.Width, circuito3.Height)
Dim linea As Graphics = Graphics.FromImage(manecilla)
'QUEREMOS LINEAS SUAVES
linea.SmoothingMode = SmoothingMode.AntiAlias
'DIBUJA LA MANECILLA DE VOLTAJE
Dim pen As New Pen(Brushes.Red, 5)
pen.SetLineCap(0, LineCap.DiamondAnchor, DashCap.Triangle)
linea.TranslateTransform(136, 91)
linea.RotateTransform(x)
linea.DrawLine(pen, 0, 0, -1, -55)
linea.ResetTransform()
'PRESENTALO EN EL PICTUREBOX
circuito3.Image = manecilla
linea.FillEllipse(Brushes.Red, 129, 80, 12, 12)
End Sub
Public Sub Pinta3()
'DEFINE LAS VARIABLES DE GRAPHICS
Dim manecilla As Bitmap = New Bitmap(circuito2.Width, circuito2.Height)
Dim linea1 As Graphics = Graphics.FromImage(manecilla)
'QUEREMOS LINEAS SUAVES
linea1.SmoothingMode = SmoothingMode.AntiAlias
'DIBUJA LA MANECILLA DE VOLTAJE
Dim pen As New Pen(Brushes.Red, 4)
pen.SetLineCap(0, LineCap.DiamondAnchor, DashCap.Triangle)
linea1.TranslateTransform(136, 91)
linea1.RotateTransform(x)
linea1.DrawLine(pen, 0, 0, -1, -55)
linea1.ResetTransform()
'PRESENTALO EN EL PICTUREBOX
circuito2.Image = manecilla

```

```
        linea1.FillEllipse(Brushes.Red, 130, 81, 13, 12)
    End Sub
    Private Sub Espira_CheckedChanged(sender As Object, e As EventArgs) Handles
    espira.CheckedChanged
        If espira.Checked = True Then
            Me.pequeña.BackgroundImage = My.Resources.bobina31
        End If
        If espira.Checked = False Then
            Me.pequeña.BackgroundImage = My.Resources.bobina21
        End If
    End Sub
    Private Sub Espirag_CheckedChanged(sender As Object, e As EventArgs) Handles
    espirag.CheckedChanged
        If espirag.Checked = True Then
            Me.grande.BackgroundImage = My.Resources.bobina4
        End If
        If espirag.Checked = False Then
            Me.grande.BackgroundImage = My.Resources.bobina11
        End If
    End Sub
```

Bibliografía

- Berkson, W. (1974). *Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein*. Number w BER.
- Castro, R. A. G., PANQUEVA, A. H. G., and DREWS, O. M. (1998). Ingeniería de software educativo con modelaje orientado por objetos: un medio para desarrollar micromundos interactivos. *Informática educativa*, 11(1):9–30.
- Einstein, A. (1905). Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. *Teorema: Revista internacional de filosofía*, 24(2):91–119.
- Einstein, A. et al. (1905). On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der Physik*, 17(891):50.
- Faraday, M. (1839). Michael faraday, experimental researches in electricity. volume i, reprinted from the first edition, 1839. experimental researches in electricity. volume ii,. *The British Journal for the History of Science*, 34(4):100–481.
- Feynman, R., Leighton, R. B., and Sands, M. (1987). *Física, Vol. II: electromagnetismo y materia*.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (2011). *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*, volume 1. Basic books.
- Fleisch, D. (2008). *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press.
- Galilei, G. and Azcárate, C. (1645). *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue fcienze*, volume 1. Univ. Autònoma de Barcelona.
- Hernández Millán, G. and López Villa, N. M. (2011). Precedir, observar, explicar e indagar: estrategias efectivas en el aprendizaje de las ciencias. *Educació Química*, (09):4–12.

- Jackson, J. D. (1980). *Electrodinámica clásica*, madrid, ed.
- Jones, B. and Faraday, M. (1821). *The life and letters of Faraday*, volume 2. Cambridge University Press.
- Maxwell, J. C. (1954). *A treatise on electricity and magnetism, Tratado sobre la electricidad y magnetismo*, volume 1. Juan Carlos Orozco y Maria Cecilia Gramajo.
- McAnally-Salas, L., Navarro Hernández, M. d. R., and Rodríguez Lares, J. J. (2006). La integración de la tecnología educativa como alternativa para ampliar la cobertura en la educación superior. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(28):11–30.
- Newton, I. (1687). *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of California Press.
- Orsted, H. C. Oersted medal lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics.
- Ørsted, H. C. (1813). *Investigación sobre la identidad de las fuerzas químicas y eléctricas*. Dentu.
- Santomé, J. T. (1994a). *Globalización e interdisciplinariedad: el currículum integrado*. Ediciones morata.
- Santomé, J. T. (1994b). *Globalización e interdisciplinariedad: el currículum integrado*. Ediciones morata.
- Serway, R. A., Jewett, J. W., Hernández, A. E. G., and López, E. F. (2005). *Física para ciencias e ingeniería*, volume 5. Thomson.
- Shannon, R. E., Bernal, A., et al. (1988). *Simulación de sistemas diseño, desarrollo e implantación*. Number 003.0184 S5.
- Vélez, F. (2012). *Apuntes de relatividad*. Universidad Pedagógica Nacional, sexta versión.