

**Sobre la enseñanza de la Mecánica cuántica a propósito de las transformaciones
de simetría: Reflexión, Rotación y Paridad**

Daniel Esteban Bermúdez Mendoza

**Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2019**

Sobre la enseñanza de la Mecánica cuántica a propósito de las transformaciones de simetría: Reflexión, Rotación y Paridad

Daniel Esteban Bermúdez Mendoza

La enseñanza de la física y la relación física-matemáticas

Trabajo presentado como requisito parcial para optar por el título de
Licenciado en Física

Director


Sandra Bibiana Ávila Torres

**Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2019**

*“Entre ser y no ser,
Me decidí por la Física,
Y en esa hermosa profesión
Mi corazón no tiene tregua...”*

*“El científico no estudia la naturaleza por que sea útil; la estudia por que se deleita en ella,
y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la
pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir”*


Henri Poincaré

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 6	


1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Sobre la enseñanza de la Mecánica cuántica a propósito de las transformaciones de simetría: Reflexión, Rotación y Paridad
Autor(es)	Bermúdez Mendoza, Daniel Esteban
Director	Ávila Torres, Sandra Bibiana
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 119 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	SIMETRÍA; INVARIANCIA GAUGE; ENSEÑANZA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA; TEORÍA DE GRUPOS.

2. Descripción
<p>Trabajo de Grado que busca proponer una ruta de enseñanza alternativa para conceptos básicos de Mecánica Cuántica, analizando particularmente fenómenos de rotación, reflexión y paridad. El eje trasversal de la propuesta es el concepto de simetría y su relación con la calibración gauge, puesto que dicho concepto permite hacer representaciones del mundo físico atendiendo a principios de conservación, que convergen en el desarrollo de un formalismo alternativo o análogo al que se trabaja usualmente, y por el cual se verifican los mismos resultados. El concepto de simetría guarda una estrecha relación con sistemas matemáticos como la teoría de grupos, que poseen implícitamente, el paradigma actual de la ciencia física, esto es, la conservación de magnitudes u observables bajo ciertas transformaciones lineales, la invariancia de esos mismos objetos matemáticos que los representan y también la unificación de las leyes que rigen los fenómenos físicos.</p>

3. Fuentes

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 6	

- Apostol, T. (1967). *Calculus*. Waltham, Massachusetts: Blaisdell Publishing Company.
- Asimov, I. (1977). *Extracts of the left hand of the electron*. Madrid : Alianza Editorial .
- Brading, K., & Elena, C. (2003). *Symmetries in Physics*. New York: Cambridge University Press .
- Casa, J. G. (1996). El conjunto de Cantor . En J. G. Casa, *El conjunto de Cantor* (pág. 15). Ciudad de Mexico : SMM.
- Clemens, S. (1998). *Geometría* . Massachusettss: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Cordero, P. (2007). *Grupos de Simetría en Mecánica Cuántica*. Obtenido de Universidad de Chile : <https://www.cec.uchile.cl/cinetica/pcordero/todos/GruposEnQM.pdf>
- Cuesta Beltrán, Y. J. (2016). Reflexiones en torno a la Educación en Ciencias: El caso de la Mecánica Cuántica . *Tecné, Episteme y Didaxis*, 921 - 927.
- De Caria, P., & Schaposnik, L. (10 de 08 de 2007). *Universidad Nacional de La Plata* . Obtenido de Grupos Matriciales : <http://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/EA/13.%20Grupos%20Matriciales%20-%20P.%20De%20Caria%20&%20L.%20Schaposnik%20-%202007.pdf>
- Feynman, R., & Sands, M. (1965). *Lectures on Physics*. USA: Addison-Wesley.
- Galavíz Casas, J. (1996). *Instituto de Matemáticas, Universidad Autónoma de México* . Obtenido de <http://www.miscelaneamatematica.org/Misc24/galaviz.pdf>
- Griffiths, D. (1987). *Introduction to elementary particles* . WILEY-VCH Verlag GmbH.
- Kosso, P. (2000). The empirical status of Symetries in physics. *Brit. J. Phil. Sci.* 51 , 81-90.
- Luque, C., Haydee, J., & José, Á. (2013). *Representar estructuras algebraicas Finitas y enumerables* . Bogotá D.C: Universidad Pedagógica Nacional .
- Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. Bristol : IOP Publishing.
- Oppenheim, N., & Kedder, D. (2012). *365 días para ser más culto* . Barcelona : Grupo Planeta .
- Penrose, R. (2004). *El camino a la Realidad* . Oxford : Debate .


 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>República de Colombia</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 6	

- Rozo, M. (12 de 2016). *Academia de Ciencias Colombiana*. Obtenido de Sobre la dinámica de una Partícula en Rotación : <http://dx.doi.org/10.18257/raccefyn.394>
- Ruíz, A. (2003). *História y Filosofía de las Matemáticas* . Obtenido de <http://www.centroedumatematica.com/arui/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf>
- Salam, A., Heisenberg, W., & Dirac, P. (1991). *La unificación de las Fuerzas Fundamentales* . Gedisia.
- Salcedo, L. (13 de 02 de 2018). *Física Matemática* . Obtenido de <http://www.ugr.es/local/salcedo/public/fm/curso.pdf>
- Sánchez del Río, C. (2015). *Física Cuántica*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Serway, R., & Beichner, R. (2002). *Física para Ciencias e Ingeniería* . México D.F: McGraw-Hill.
- Suarez Bermúdez, C. G. (25 de 08 de 2016). *Efectos Dinámicos de los sistemas no Inerciales: Una explicación desde la perspectiva Gauge*. Obtenido de Repositorio Universidad Pedagógica Nacional : <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/2146/TE-19406.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Wikipedia. (02 de 09 de 2019). *Fundación Wikipedia, INC*. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Russell

4. Contenidos

El proceso que se llevó a cabo en esta investigación inició con la indagación de las estructuras matemáticas que brindan sustento a la teoría de grupos y la implementación de la idea gauge a ecuaciones que describen fenómenos físicos particulares. Los procesos de formalización, consecuencia del análisis anterior, se basó justamente en continuar los razonamientos de forma tal que se mantuviese lo investigado en el primer capítulo y se tuvieran en cuenta los argumentos de simetría sugeridos por los modelos matemáticos.

En el primer capítulo se brinda una contextualización histórica sobre el concepto de simetría para situar al lector en la tradición intelectual que supone dicho concepto y su evolución en el tiempo.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES PEDAGÓGICAS</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 6	


Luego de ello se brinda una explicación sobre los conceptos más importantes a la hora de abordar la teoría de grupos y su relación con algunos fenómenos físicos. Se tiene en cuenta la idea de subgrupo, subgrupos invariantes, generadores de grupo y grupos de Lie entre otros, que más adelante tendrán un papel central en la descripción de situaciones físicas concretas. Éste capítulo se cierra con una aproximación conceptual a la idea de calibración gauge y una reflexión sobre la importancia de la simetría como eje articulador en distintas propuestas orientadas a la enseñanza de la física.

En el segundo capítulo se hace uso de la idea gauge para construir los operadores de rotación y paridad en un contexto clásico, dejando en evidencia la estructura matemática trabajada y revisada previamente en el capítulo uno, y se procede a deducir los mismos operadores en Mecánica Cuántica por comparación. En el proceso de construcción de los diferentes operadores se siguen no solo argumentos de simetría sino también de conservación, y se relaciona directamente con la idea gauge cuando se analizan ecuaciones dinámicas que describen la evolución temporal de los sistemas.

Por último, en el tercer capítulo, se procede a diseñar una ruta de aprendizaje basada en la información recolectada, la experiencia de investigación y el planteamiento de objetivos claros para cada actividad, de modo que resalten los conceptos brindados por el documento o dado el caso del maestro que desee implementar en el aula dichas actividades. Las actividades están hechas a modo de cuestionarios sencillos, que recogen los aspectos más llamativos e importantes de la investigación y sugieren continuamente al estudiante pensar los problemas a partir de argumentos de simetría que derivan en procesos lógicos y matemáticos sencillos para la resolución de problemas propios de la Mecánica Cuántica.

5. Metodología

La metodología utilizada para el desarrollo de esta investigación fue la revisión documental, de páginas web y artículos científicos relacionados con el tema y a partir del análisis de la información recolectada, plantear una ruta para la solución de la problemática expuesta previamente.


 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES PEDAGÓGICAS</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 6	

Muchas de las hipótesis que surgieron a lo largo de la investigación en torno a la ruta de trabajo y la creación y elección del material final, estuvo basado en la observación y la interacción directa con varios compañeros de la licenciatura que manifestaban sus conocimientos y la ausencia de ellos respecto a los temas propuestos y que sirvieron como una guía constante para determinar puntos estratégicos de acción para el desarrollo de la propuesta.

6. Conclusiones

Se considera que este trabajo es apenas una ínfima parte de las cosas que se pueden lograr a partir de la hipótesis de trabajo por lo cual, las conclusiones son apenas incompletas en comprensión y contables en extensión. Sin embargo, se comentarán los aspectos más relevantes.

- Se concluye de manera inequívoca que la aplicación de operadores que representan transformaciones continuas o discretas, poseen una estructura algebraica análoga a los grupos ortogonales y unitarios, mostrando una vía útil de trabajo tanto en el campo de la física como en el de la matemática. Además de ello, la comprensión de este punto puede ser un generador de conceptos básicos que permitan el tránsito natural a temas de mayor abstracción.
- Se evidenció que hay una vía de trabajo alterna que permite construir operadores de la Mecánica en general a partir del concepto de simetría obteniendo los mismos resultados que en el caso tradicional sin la necesidad de acudir a una componente axiomática fuerte.
- Se llegó a la conclusión de que hay una profunda relación entre los operadores reflexión, paridad y rotación, atendiendo a su estructura de grupo, la geometría del sistema, la conservación de observables y la calibración de magnitudes para fenómenos que no tienen en cuenta desintegraciones electrodébiles.
- La Paridad no es lo mismo que una rotación de 180° , uno de los mayores problemas conceptuales que se presenta a la hora de trabajar procesos de formalización.
- Existe un isomorfismo entre el grupo especial ortogonal en tres dimensiones y el grupo especial unitario en dos dimensiones para el caso de sistemas rotacionales.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES PEDAGÓGICAS</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 6 de 6	

- Se pueden deducir las propiedades de sistemas físicos, ecuaciones dinámicas y la matemática de los fenómenos atendiendo a ideas novedosas de simetría y conservación.
- Existen cuestiones que no han sido resueltas del todo y por lo tanto, se mostró a partir de un nuevo camino las distintas posibilidades que aparecen a la hora de hacer otro tipo de análisis y cuán fructífera puede ser considerada esta ruta de aprendizaje para la enseñanza de la Mecánica Cuántica.

Elaborado por:	Daniel Esteban Bermúdez Mendoza
Revisado por:	Sandra Bibiana Ávila Torres

Fecha de elaboración del Resumen:	12	12	2019
--	----	----	------

Contenido

Tabla de imágenes.....	12
Introducción	14
Problemática	17
Objetivo general.....	19
Objetivos específicos.....	19
Antecedentes	20
Capítulo 1	21
Contexto histórico sobre el concepto de simetría	21
Perspectiva gauge.....	24
La enseñanza de la física a propósito de la simetría.....	25
Capítulo 2.....	29
Implementación de la perspectiva Gauge	29
Movimiento circular uniforme (Desarrollo matemático tradicional).....	29
Movimiento circular uniforme (Desarrollo Gauge).....	31
Rotación de un sistema desde el contexto cuántico.....	39
Capítulo 3.....	57
Idea de Paridad desde el contexto matemático.....	57
Idea de Paridad desde el contexto físico clásico.....	59
Idea de Paridad desde el contexto físico Cuántico	63
El operador de Paridad y la Idea Gauge	71
Ruptura de simetría y Violación de Paridad en Bosones.....	74
Conclusiones.....	78
Anexos	79
Anexo 1. Teoría de Grupos.....	79
Grupo Infinito Contable.....	80
Grupo Finito.....	83
Grupo Infinito no numerable	85
Subgrupos y generadores de un grupo	88
Subgrupo	88

Generadores de grupo.....	93
Grupos de Lie.....	98
Grupo General Lineal en el cuerpo Complejo.....	102
La paradoja de Russell.....	106
Rotación como doble reflexión.....	107
La relación entre razón de cambio y calibración gauge.....	109
Anexo2. Teoremas.....	109
TEOREMA DE I	109
TEOREMA DE II	110
TEOREMA DE III	115
TEOREMA DE IV	115
Bibliografía.....	117

Tabla de imágenes

Figura 1. Imagen del libro Landau donde aparece la invariancia de contraste, concepto que se muestra carente de sentido en relación a la traducción y alusión del concepto mismo.	15
Figura 2. Implementación de la idea gauge para el potencial vectorial de un campo electromagnético.	16
Figura 7. Descripción clásica de un sistema rotando. Se determina la posición del sistema en términos una variable angular.....	29
Figura 8. Sistema en rotación de 180° . La medición de los ángulos se toma desde el eje de las equis positivas. El vector de color verde indica la posición inicial en cero grados. El vector rojo indica la posición final en ciento ochenta grados.	30
Figura 9. Sistema en cero grados, posición inicial. A ésta situación la llamamos N. Observe que la figura tiene un brillo sobre la parte que está en contacto con el eje equis positivo, el cual sirve de marcador para indicar la posición del objeto.	31
Figura 10. Sistema rotado 180° . A ésta situación la llamaremos R. El brillo de la figura está orientado ahora hacia las equis negativas.	31
Figura 11. Tabla en la que ordenamos los resultados del experimento de rotar 180° un cuerpo. Información tomada de “Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables” (Luque, Jiménez, Ángel, 2009).	32
Figura 12. El sistema ubicado en la posición N. Ahora le añadimos dos vectores de posición que nos permita identificar una pequeña rotación en relación con la rotación aplicada inicialmente de 180° teniendo en cuenta dos puntos cualesquiera próximos entre sí.	33
Figura 13. Ésta imagen muestra en detalle las proyecciones de los vectores inicial y final sobre los dos ejes del sistema coordenado.	33
Figura 14. Tabla cualitativa del fenómeno de rotación en el plano. Aquí se ordena la información obtenida de las ecuaciones y se cambia las letras N y R de las situaciones por los versores de la base en la cual se está trabajando.....	35
Figura 15. Imagen que retrata la misma situación que la figura 4, ahora en términos de la aplicación de un operador rotacional a un vector V que es transformado en un vector V_R	37
Figura 16. Vectores rotados a partir de la re calibración de los ángulos. Se muestra claramente que la diferencia de dichos ángulos es nuevamente 180° , con lo cual se concluye que la posición angular de un sistema se mantiene invariante ante transformaciones de rotación.	39
Figura 18. Molécula de Fluoruro de Hidrógeno. Simetría de Reflexión con dos estados posibles para el sistema respecto a un eje previamente establecido.	40

Fig

ura 19. Tabla que relaciona la simetría de un sistema con una magnitud física que se conserva.	53
Figura 20. Tabla que ordena la información analizada previamente en relación a la Paridad de los números. Basada en (Luque, Haydee, & José, 2013).	58
Figura 21. Sistema de coordenadas en tres dimensiones que representa un vector posición antes y después de una Transformación de Paridad. Imagen basada en (Sánchez del Río, 2015).	60
Figura 22. Imagen de intérprete musical con simetría bilateral que permite ejemplificar la idea de ruptura.	61
Figura 23. Distribución de Probabilidad para un Fermión antes y después de la Transformación de Paridad.	66
Figura 24. Esquema que representa el caso particular de una superposición con máxima probabilidad cerca del origen.	69
Figura 25. Graficas desplazadas c unidades para realizar la calibración gauge.	72
Figura 26. Analogía de transformaciones de Paridad para el caso del decaimiento radioactivo del Bosón K, que ejemplifica la paradoja Tauón-Tetha.	76
Figura 27. Grupo de Cantor. Muestra las infinitas particiones que se puede realizar en el intervalo 0 a 1. Imagen basada en (Wikipedia, 2019).	86
Figura 3. Propiedades de los subgrupos que forman álgebras de Lie en el cuerpo Real a partir del análisis del Grupo Lineal General.	99
Figura 4. Cuadrado de Penrose. Caracterización de un grupo en el cuerpo Complejo que exhibe propiedades de simetría respecto a la rotación de 45°. Imagen basada en (Penrose, 2004).	100
Figura 5. Representación de los grupos Unitarios en el cuerpo de los Complejos. Descripción de características básicas.	103
Figura 6. Representación Fiel y Local de un Grupo de Lie. Por medio de la caracterización expuesta por Sophus Lie, se conoce la estructura Local del grupo y no se especifican los aspectos globales del Grupo. Imagen basada en (Penrose, 2004).	105
Figura 17. Rotación como doble Reflexión Especular en el plano.	108
Figura 28. Diagrama que representa la clasificación y ordenación del grupo de rotaciones SO(n) en un cuerpo Real en relación al Grupo Lineal General y otros subgrupos. Imagen basada en (Nakahara, 2003).	110
Figura 29. Representación del complemento del grupo Ortogonal. Teorema DEB I para el denominado subgrupo Especular SE(n) en el cuerpo de los Reales.	111
Figura 30. Tabla que sintetiza la composición de Transformaciones Lineales Continuas y Discretas. Teorema DEB IV.	116

Introducción

A lo largo del siglo XIX, XX y XXI se ha venido gestando un desarrollo de la física que ha tenido a la base conceptos novedosos y muy significativos. Un ejemplo de esto es la noción gauge, la cual lleva implícito el concepto de invariancia y simetría. Sin embargo, la interpretación que se puede hacer de tales conceptos puede ser errónea bien sea por un problema de traducción o por un problema de explicación.

Una de las motivaciones de este trabajo de grado, surge cuando se indaga en diferentes textos de física teórica, en estos se reconocen conceptos fundamentales para la enseñanza de la física, tal es el caso de la Teoría clásica de Campos trabajada en el curso de física Teórica de Landau o propuestas que están a la vanguardia en la física teórica como *Cosmology in gauge Field theory and string theory* (Cosmología en la teoría gauge y la teoría de cuerdas) de la serie Cambridge. En estos textos se trabajan temas de Mecánica Cuántica y Cosmología que permiten hacer estudios de física moderna y que prepara el camino al futuro docente para estudios más avanzados. Muchos de esos temas no han sido trabajados de manera explícita a lo largo de diferentes cursos y seminarios en la licenciatura en física en la Universidad Pedagógica Nacional, dejando de lado perspectivas ricas en contenido y por lo cual puede presentarse alguna de las dificultades mencionadas anteriormente. Un ejemplo claro de ello es la perspectiva gauge y su relación con los principios de conservación.

En el libro de física teórica Landau, por ejemplo, en el capítulo tres del volumen dos (Teoría clásica de campos) se cita un apartado bajo el título de invariancia de contraste. Observe la *Figura 1*.

Es fácil ver que esto es también válido para el campo electromagnético en la teoría de la relatividad. En este caso, sin embargo, a la vez que se cambia t en $-t$ hemos de cambiar el signo del campo magnético. En efecto, es fácil ver que las ecuaciones del movimiento (17.5) subsisten inalteradas si se hace el cambio

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}. \quad (17.8)$$

De acuerdo con (17.3) y (17.4), esta transformación no modifica el potencial escalar, mientras que el potencial vector cambia de signo:

$$\phi \rightarrow \phi, \quad \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}, \quad (17.9)$$

De esta manera, si un cierto movimiento es posible en un campo electromagnético, el movimiento inverso es también posible en un campo en el que se invierte el sentido de \mathbf{H} .

PROBLEMA

Expresar la aceleración de una partícula en función de su velocidad y de las intensidades de los campos eléctrico y magnético.

Solución. En la ecuación del movimiento (17.5) substitúyase \mathbf{p} por $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ y tómease para $d(\gamma m \mathbf{v})/dt$ la expresión que resulta de (17.7). Se obtendrá así

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \right\}.$$

§ 18. Invariancia de contraste

Veamos hasta que punto están unívocamente determinados los potenciales del

Figura 1. Imagen del libro Landau donde aparece la invariancia de contraste, concepto que se muestra carente de sentido en relación a la traducción y alusión del concepto mismo.

En esta sección se muestra como el potencial vectorial y escalar permanece invariante al añadir el gradiente de una función que depende de las coordenadas y del tiempo y la derivada parcial de esa función respecto al tiempo para cada caso respectivamente (Figura 2). La conclusión del apartado consiste en decir que el campo electromagnético no cambia al cambiar los potenciales, y se muestra allí la idea de invariancia. Sin embargo, la duda queda latente cuando se piensa en la palabra contraste. ¿Qué es lo que se contrasta? ¿Es la invariancia un concepto que permite hacer contraste de magnitudes físicas? O mejor, ¿Al contrastar magnitudes físicas percibimos la invariancia? Es posible que la respuesta a estas preguntas esté implícita en el título y en la descripción de la sección, pero ¿cómo asume un docente de física esta ambigüedad a la hora de enseñar el concepto de “invariancia de contraste”? Una idea análoga es la de invariancia de calibración, ésta última un poco más diciente que la anterior.

campo. Ante todo conviene tener en cuenta que el campo está caracterizado por el efecto que produce sobre el movimiento de una carga colocada en él. Pero en la ecuación del movimiento (17.5) aparecen, no los potenciales, sino las intensidades del campo \mathbf{E} y \mathbf{H} . Por consiguiente, dos campos son físicamente idénticos si están caracterizados por los mismos vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} .

Si se nos dan los potenciales \mathbf{A} y ϕ , éstos determinan unívocamente, según (17.3) y (17.4), los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} , y, por consiguiente, también el campo. Sin embargo, a un mismo campo pueden corresponder diferentes potenciales. Para comprobarlo, sumemos a cada componente del potencial la cantidad $\partial f / \partial x^k$, donde f es una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo. El potencial A_k se transforma entonces en

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (18.1)$$

Como consecuencia de este cambio aparece en la integral de acción (16.1) el término adicional,

$$\frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = \frac{e}{c} df, \quad (18.2)$$

que es una diferencial exacta y carece de efecto sobre las ecuaciones del movimiento (véase *Mecánica* § 2.)

Figura 2. Implementación de la idea gauge para el potencial vectorial de un campo electromagnético.

Este trabajo se orienta de forma que permita aclarar conceptos como el de “invariancia de contraste” (la palabra contraste se debe en realidad a una mala traducción) y dilucidar cuál es la relación que tiene con el concepto gauge de la física moderna a partir de la idea de simetría, particularmente en el caso de la Mecánica Cuántica y las transformaciones \mathbf{P} (Paridad). Para tal efecto, se busca inicialmente argumentos de simetrías evidentes en un sistema físico, asociando la idea de simetría a la conservación y la geometrización de una situación. El análisis de un sistema con dichas características permite hacer comparaciones, abstracciones, composiciones, deducciones que permiten organizar la información de una manera simple que sugiere estructuras matemáticas familiares al educando, y por ende aproximación a conceptos básicos de la teoría de la Mecánica Cuántica, que por lo general son poco intuitivos en cursos de iniciación y que se suelen dar

en forma de axioma o postulado, dejando de lado otro tipo de interpretaciones que traen consigo consecuencias importantes para la física desarrollada a lo largo de los últimos doscientos años. Por otro lado, el desarrollo de algunos operadores en Mecánica Cuántica seguirá una forma de deducción similar a la que han trabajado autores como Feynman o Penrose, pero acudiendo siempre a la perspectiva gauge que es de nuestro interés. La construcción de dichos operadores no es tan evidente en el caso Cuántico y por tal razón se hace necesaria una perspectiva diferente que acompañe dicho proceso de deducción, en términos de lo que físicamente y matemáticamente está ocurriendo con la geometría del sistema.

En el primer capítulo del documento se realiza una contextualización histórica del concepto de simetría, y se comentan algunos aspectos importantes del surgimiento en la física teórica de la idea gauge y su relación con la invariancia. También se habla sobre algunos aspectos del andamiaje matemático que nos permite trabajar la idea de invariancia y simetría, concretamente la teoría de grupos. También se lleva a cabo una aproximación a la definición de la idea gauge y cuál es la importancia pedagógica de la reflexión alrededor de estas ideas para la enseñanza de la física.

En el segundo capítulo se da paso al fenómeno de rotación y se muestra la relación entre simetría, invariancia y la perspectiva gauge. El caso de un sistema rotando permite conceptualizar magnitudes como el momento angular, la conservación del momento y la invariancia de este bajo ciertas transformaciones. Se lleva en paralelo la perspectiva clásica y cuántica para hacer un poco más intuitiva la construcción del concepto y además, valerse de procesos de comparación que permitan elaborar la propuesta en Mecánica Cuántica (MC en lo sucesivo para abreviar).

En el capítulo tres se procede a la construcción del operador de Paridad, también en el caso clásico y cuántico. Allí se usa la idea de isomorfismo matemático desarrollada previamente para llevar a cabo dicha construcción y así conceptualizar la transformación de Paridad generando así acercamientos a conceptos avanzados como del teorema CPT de Mecánica Cuántica.

Problemática

Actualmente la enseñanza de la mecánica cuántica a nivel universitario se encuentra enmarcada en el desarrollo de actividades de alto razonamiento abstracto y la adquisición y manipulación de herramientas matemáticas que muchas veces escapan del alcance de

los estudiantes. Diversos estudios realizados en la enseñanza de la ciencias a nivel universitario “Señalan que una dificultad en la enseñanza de la MC es el alto nivel matemático y de abstracción propuesto en cursos donde se prioriza el enfoque algorítmico para el estudio de los fenómenos” (Cuesta Beltrán, 2016). Este hecho “se ve reflejado ya que en la mayoría de los textos universitarios especializados introducen conceptos como invariancia gauge local e invariancia gauge global como punto de partida de la teoría” (Suarez Bermúdez, 2016), quedando así un vacío conceptual de la teoría gauge como base de diversos conceptos de la Mecánica Cuántica y su tránsito en temas relacionados a ésta asignatura.

Así, la idea de simetría está íntimamente relacionada con el desarrollo de la teoría gauge o invariancia gauge y permite anticipar algunos conceptos capitales en la explicación de fenómenos, como el estado de un sistema rotando o las interacciones entre partículas, entre otros. De esta forma se evidencia que uno de los conceptos primordiales en la enseñanza de la física es el de simetría, que históricamente hace parte del desarrollo de la teoría y es la base conceptual para el avance de la disciplina. *“In contemporary physics, the best example of this role of symmetry is the classification of elementary particles by means of the irreducible representations of the fundamental physical symmetry groups, a result first obtained by Wigner in his famous paper of 1939 on the unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group”* (Brading & Elena, 2003).

La simetría ha sido tanto en la física clásica como en la física moderna un concepto vital y por lo general está inmerso en el análisis de los fenómenos naturales. *“It is often said that many physical phenomena can be explained as (more or less direct) consequences of symmetry principles or symmetry arguments”* (Brading & Elena, 2003). Por tal motivo, se hace necesario proponer de manera explícita la relación que existe entre simetría y Mecánica Cuántica y también, indagar e investigar en una ruta que favorezca los procesos de enseñanza-aprendizaje respecto a estos temas. Además, explorar la teoría de simetría permite hacer otro tipo de reflexión en relación a la comprensión de la Mecánica Cuántica, particularmente de las transformaciones \mathbf{P} en la Física Cuántica.

En este trabajo se considera que, en la licenciatura en física en la Universidad Pedagógica Nacional, la enseñanza de la mecánica cuántica puede incluir el concepto de simetría como eje articulador de las ideas fundamentales que subyacen a la par de los tópicos, herramientas y conceptos básicos de esta teoría. El proceso de enseñanza de la mecánica cuántica que se lleva a cabo en la licenciatura podría verse beneficiado si se realiza un

proceso de enseñanza-aprendizaje en términos de la comprensión de la teoría gauge, teoría fundamental para el estudio de la física moderna y los fenómenos que ésta se propone explicar. Un acercamiento a la invariancia gauge y su relación con la Mecánica Cuántica puede generar nuevas vías para la comprensión de las teorías físicas y además, posibilita la reflexión y apropiación de teorías adelantadas en el siglo XX y XXI.

Teniendo en cuenta lo expuesto, el desarrollo del presente trabajo se propone como alternativa para iniciar los cursos de Mecánica Cuántica, Electromagnetismo Avanzado y Tópicos de Física. Con la propuesta de investigación se quiere sugerir una ruta de enseñanza-aprendizaje del concepto de simetría para la mecánica cuántica, realizando resignificación del concepto de simetría a propósito de la educación de docentes en física del siglo XXI, pues como ya se ha mencionado, dicho concepto no ha tenido una amplia exploración en lo que a la enseñanza de la física moderna se refiere.

Así, se hace evidente la necesidad de estudiar los conceptos básicos para las teorías de la física desde estas perspectivas, no solo por las implicaciones pedagógicas, sino atendiendo también a la relación física-matemática puesto que muchas veces el aparato matemático que supone el estudio de la simetría es poco conocido por los maestros en formación.

La formalización de los fenómenos físicos desde la idea de simetría, muestra claramente otra forma de enseñanza-aprendizaje y permite trazar una ruta alternativa donde se resalte la relación entre física y matemáticas. Es por ello que vale la pena preguntarse ¿Cómo se puede resaltar la importancia del concepto de simetría y el enfoque gauge para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Mecánica Cuántica?

Objetivo general

Establecer una ruta de interpretación de las transformaciones de Paridad en su forma matricial en mecánica cuántica a través del concepto de simetría y el enfoque de la teoría gauge, partiendo de casos concretos como la rotación y la reflexión de sistemas físicos.

Objetivos específicos

- Revisar y analizar diferentes textos y artículos relativos a la teoría de la simetría e invariancia gauge en relación a la enseñanza de la Mecánica Cuántica.

- Construir, por medio de la consulta e interpretación de textos una explicación amena, sencilla, clara y completa de la teoría gauge y su relación con sistemas rotacionales tanto en Mecánica Clásica como Mecánica Cuántica.
- Articular por medio del concepto de simetría el pensamiento físico y matemático necesario para lograr una comprensión clara de los fenómenos que se propone explicar la Mecánica Cuántica, concretamente de las transformaciones de Paridad.
- Sistematizar los aspectos más importantes del trabajo para elaborar un artículo, cartilla o experimento que me permita dejar un producto final de la propuesta de enseñanza.

Antecedentes

El primer antecedente es un proyecto de monografía de la universidad pedagógica nacional que tiene que ver con los ***efectos dinámicos de los sistemas no inerciales: una explicación desde la perspectiva gauge***. Esta monografía fue útil ya que en ella se describen, en primer lugar, los efectos dinámicos de sistemas tanto inerciales como no inerciales desde una perspectiva newtoniana, que luego contrastará en el segundo y tercer capítulo, desde la perspectiva gauge. El autor de ésta monografía toma como problema el hecho de que en la literatura contemporánea de física moderna se encuentra mucho el concepto gauge, y tanto en mi experiencia, como en la del autor, dicho concepto no es apropiado por parte de la comunidad estudiantil (Suarez Bermúdez, 2016), particularmente de la licenciatura en física de la Universidad Pedagógica Nacional, y con toda razón ya que existen malas traducciones que llevan a la confusión de este concepto, como se ha comentado anteriormente en la introducción. Una de las principales diferencias de este referente y el trabajo aquí expuesto, estriba en la perspectiva de la Mecánica Cuántica. La implementación de la perspectiva gauge en este referente es únicamente en el contexto de la Mecánica Clásica.

Otro referente conceptual importante en mi propuesta de investigación es el ***análisis de la falta de simetría del electromagnetismo clásico y su solución relativista: tensor de campo electromagnético***. Este proyecto elaborado por un egresado de la universidad pedagógica nacional maneja un concepto en el que estoy bastante interesado, a saber, la simetría. Aquí se muestra como las ecuaciones deben ser covariantes bajo ciertas transformaciones. Este es un punto importante en este trabajo de investigación, puesto que

se brinda la explicación de lo que serían los principios de invariancia. Este tratamiento muestra la diferencia que existe en una teoría que es invariante y una que no. Ofrece un tratamiento matemático (solución tensorial) que permite modificar el esquema teórico y realizar cambios conceptuales pertinentes. A diferencia de mi trabajo, el aparato matemático tiene que ver con el análisis tensorial y no con la teoría de grupos. También la rama de la física por la que se interesa es sustancialmente diferente. El referente habla de electromagnetismo. Aquí se discutirán fenómenos propios de la Mecánica Cuántica como inversión espacial, rotación e interacciones entre partículas.

Por último y no menos importante, comentar el artículo **Algunas reflexiones en torno a las implicaciones de la NdC en educación en ciencias: el caso de la mecánica cuántica**, que sirve de base y guía para argumentar la importancia del proyecto de investigación y poder modelar así la justificación pedagógica del mismo. En éste artículo se pone de manifiesto que en torno a la enseñanza de la mecánica cuántica deberían existir por parte de los docentes-investigadores nuevas perspectivas de enseñanza que no se enfoquen en lo axiomático u algorítmico. Dichos planteamientos tampoco deben desconocer la relación física-matemática, y por el contrario mostrar que las herramientas matemáticas cercanas a los estudiantes pueden servir como puentes conceptuales para la enseñanza de la mecánica cuántica.

Capítulo 1

Contexto histórico sobre el concepto de simetría

Desde la antigüedad los seres humanos han seguido de cerca las ideas subyacentes al concepto de simetría. Sin embargo, la idea que se tenía en la antigüedad sobre simetría es en esencia diferente a la que se tiene actualmente. El concepto de simetría ha adoptado diversas interpretaciones dependiendo del contexto en el cual se intente definir.

En la Grecia antigua pensadores como Platón brindaban explicaciones sobre la naturaleza de los objetos a partir de conjeturas filosóficas y matemáticas. La suma o conjunto de las formas puras de dichos objetos, son lo que platón denominó el mundo de las ideas. "He tomado la noción de Platón de un mundo de formas ideales solo en el sentido limitado de formas matemáticas" (Penrose, 2004). Esto quiere decir que en la antigüedad, en el contexto de Atenas, los objetos del mundo físico eran un mero reflejo de las formas matemáticas puras. Además de esto, dentro del imaginario colectivo de la sociedad

ateniense, la naturaleza se explicaba por medio de otros esquemas y otro tipo de ideales. “Las matemáticas se interesan crucialmente en el ideal concreto de verdad. El propio Platón habría insistido en que hay otros dos ideales fundamentales y absolutos, a saber, los de lo bello y lo bueno.” (Penrose, 2004). En otras palabras, la idea de simetría no se escapaba a esta interpretación, pues hacía parte también de una forma pura, pero a diferencia de otras ideas como el número, era de un nivel de abstracción mucho más alto. Claramente la idea de simetría se relacionaba más con la belleza, lo que Platón concebía como bueno y bello, pues de alguna forma se alcanzaba una “armonía” en los fenómenos que se estudiaban. Un ejemplo de esto puede ser el Partenón, que cumple con los estándares que los griegos consideraban acerca de la simetría, atendiendo también a proporciones, a lo verdadero, lo bueno y por ende, lo bello. “Los templos de la antigua Grecia eran por lo general de planta rectangular y se podía acceder a ellos por cualquier lado subiendo unos escalones. Cuando construían estos templos, los griegos solían seguir las reglas de uno de los tres órdenes arquitectónicos: dórico, jónico y corintio.” (Oppenheim & Kedder, 2012). Las diferencias principales entre estos órdenes obedecen a las proporciones que había en relación a la altura de las columnas y las distancias de cada una al punto medio superior del lado más corto del rectángulo. Aquí, el concepto de simetría como lo proporcional, lo bello, lo armonioso tuvo incluso un papel preponderante en arquitectura. “Sus arquitectos incluyeron refinamientos ópticos, es decir, leves distorsiones que mejoraban la apariencia del edificio” (Oppenheim & Kedder, 2012), atendiendo a la posición del observador.

Se puede afirmar que en esa época, la belleza era proporcional a su “grado” de simetría. Es por lo anterior que se considera que la simetría tiene su origen en la geometría como ese modelo matemático que permite obtener respuestas definidas sobre las proporciones de los objetos que componen el mundo.

Por otro lado, la historia nos muestra que la idea de simetría en el contexto del siglo XIX y XX ha adoptado otra interpretación, descrita como: “una cosa es simetría si hay algo que se le pueda hacer tal que, una vez hecho, la cosa parezca la misma que antes” (Suarez Bermúdez, 2016). Herman Weyl, matemático de la escuela alemana, inicio diversos trabajos en el primer cuarto del siglo XX basado en la idea de simetría y principalmente inspirado por las ideas de Albert Einstein a éste respecto. Sin embargo, estas ideas las podemos rastrear desde los trabajos de Faraday y Maxwell; “Antes de 1820, la electricidad y el magnetismo eran considerados dos fuerzas diferentes” (Salam, Heisenberg, & Dirac, 1991). El gran esfuerzo de Michael Faraday y André Marie Ampère, consistió en lograr demostrar con experimentos “que la electricidad y el magnetismo no eran sino dos aspectos

de una sola fuerza: la *electromagnética*.” (Salam, Heisenberg, & Dirac, 1991). Cuando Maxwell realiza el proceso de formalización de los fenómenos evidenciados en los experimentos realizados anteriormente para dar explicación a los fenómenos eléctricos y magnéticos, utiliza argumentos de simetría para hacer correcciones a las expresiones que había sugerido Ampère. Maxwell manifestaba (bajo el supuesto griego de belleza) que las ecuaciones que habían previamente, carecían de “armonía” y de simetría. Cabe resaltar que de las ecuaciones de Maxwell se puede demostrar matemáticamente la conservación de la carga y reconocer la relación naciente entre simetría y conservación. Los principios implícitos hasta ese momento de conservación y simetría fueron desarrollados más adelante por Emmy Noether en 1915 en sus trabajos sobre la teoría de los invariantes, álgebra abstracta, y aplicaciones al campo de la física. Desde este momento, se comienza una ruta fecunda de investigación en la ciencia, dado que serían estos trabajos la base para futuros modelos matemáticos que buscarían unificar fuerzas fundamentales. Más adelante, Albert Einstein avanzó en la física teórica proponiendo modelos matemáticos *unificadores*, como lo sería en 1905 la teoría de la relatividad restringida donde hacía de dos conceptos hasta entonces independientes uno solo: *El espacio-tiempo*. También dio las bases conceptuales y se apoyó en el trabajo de algunos matemáticos para solucionar el problema de la gravitación, formulando la teoría de la relatividad general. “Después del logro de la TGR y la explicación de la gravitación atendiendo a la curvatura del espacio-tiempo, Einstein comenzó a preguntarse si habría una conexión entre gravedad y electromagnetismo, especialmente si el electromagnetismo podría mirarse también como una propiedad *geométrica* del espacio-tiempo, con lo cual se unificarían las dos fuerzas fundamentales de la naturaleza conocidas hasta entonces”. (Salam, Heisenberg, & Dirac, 1991). Como se ha descrito, muchos de los trabajos de Weyl fueron inspirados en las ideas de Einstein, al punto que fue el mismo Weyl quien se dio a la tarea de solucionar el problema que ya se pensaba Einstein. Weyl “propone un modelo matemático que permanece invariante con respecto a dilaciones o contracciones arbitrarias del espacio, y en cual las ecuaciones resultan invariantes frente a cualquier cambio de coordenadas. Weyl incorpora a la geometría de Riemann la posibilidad del cambio en la longitud de un vector (Suarez Bermúdez, 2016), esto supone que las leyes de la naturaleza no cambian cuando se modifica la escala en cada punto del espacio-tiempo, esto a su vez supuso la introducción de un nuevo principio, al cual llamó “Eich-Invarianz Prinzip” (Principio de invariancia de calibración o invariancia gauge). En este punto se logra presentar brevemente la unificación de diversos pensamientos desde los ideales griegos, hasta la unificación de modelos

matemáticos que hicieron uso del concepto de simetría, y éste a su vez, fue aplicado en el contexto de la física moderna para el desarrollo de lo que hoy llamamos idea gauge.

Perspectiva gauge

Luego de que Einstein orientara la mayoría de sus esfuerzos a la construcción de una teoría que permitiría realizar ciertas modificaciones en cuanto a la electrodinámica de sistemas físicos, se comienza a pensar en las transformaciones como algo que, independiente del observador debía mantener invariante la magnitud física en cuestión, y además se exigía un “código de traducción” para diferentes observadores. Éste es el caso del vector aceleración de una partícula el cuál no se mantiene invariante bajo una transformación de coordenadas. Para solucionar esta disyuntiva se aplica la derivada covariante cuando intentamos obtener el vector aceleración, a partir de la velocidad del sistema. Uno de los principios de la relatividad en los cuales se apoyó Einstein, es justamente el principio de relatividad Galileano, el cual establece que las leyes de la mecánica deben ser las mismas en todos los sistemas de referencia inercial (Serway & Beichner, 2002), de lo contrario habrían tantas leyes de la física como sistemas inerciales. La idea gauge tiene una profunda conexión con este principio pues dicta las pautas para demostrar cuando una magnitud física bajo ciertas condiciones iniciales se puede mantener invariante. El concepto de invariancia es justamente lo que busca establecer el principio de relatividad Galileano, pues se exige que la magnitud física analizada por distintos observadores sea la misma independiente del estado de movimiento de los mismos. Veamos un caso sencillo en el que se puede apreciar la calibración gauge y la idea anteriormente expuesta. Suponga que se tiene una determinada diferencia de potencial que nos permite cierto flujo de corriente eléctrica. La ecuación que representa lo anterior estará dada por

$$\Delta V = V_f - V_i$$

La calibración gauge consiste en añadir una constante, llamada constante de calibración, y así obtener nuevos puntos de potencial calibrados de acuerdo al valor de dicha constante. Para un valor arbitrario de dicha constante se puede hacer la calibración de acuerdo a

$$V_f^\circ = V_f + c$$

$$V_i^\circ = V_i + c$$

Ahora bien, se puede hacer uso de la idea gauge, dado que se pueden calibrar dichos puntos de potencial, en búsqueda de alguna magnitud física que sea invariante bajo una transformación gauge (Suarez Bermúdez, 2016). Luego de obtener los nuevos puntos se

procede a revisar la diferencia de potencial, que es la magnitud que nos interesa, y se obtiene que

$$\Delta V^\circ = V_f^\circ - V_i^\circ = V_f + c - (V_i + c) = V_f + c - V_i - c$$

Luego

$$\Delta V^\circ = V_f - V_i = \Delta V$$

Con esto se concluye que la diferencia de potencial se mantiene invariante bajo calibraciones gauge. Es decir si cambiamos en el espacio dichos puntos, la diferencia de potencial no se ve modificada, es decir es invariante bajo transformaciones de coordenadas. Esto permite hacer una pequeña aproximación a la idea gauge y se retomará la calibración de magnitudes físicas en este sentido en los capítulos posteriores.

La enseñanza de la física a propósito de la simetría

Como hemos visto anteriormente, el concepto de simetría toma un carácter mucho más general durante el siglo XIX y es un criterio a la hora de la formulación de las teorías que permiten la explicación de fenómenos del mundo físico. Dicho carácter, hace referencia a la aplicación de una transformación a un objeto, y una vez aplicada, este se mantenga inalterado en algunas de sus propiedades específicas. Como hemos comentado antes la teoría de electromagnetismo clásico llega a su punto más alto, cuando Maxwell desarrolla las ecuaciones de campo electromagnético y hace correcciones a la ley de ampere usando un criterio de simetría. Así, los docentes en formación deben reconocer que dichas ecuaciones son un buen ejemplo de la aplicación del concepto simetría en las teorías físicas, y cuán valioso puede llegar a ser dicho criterio para discernir en el tratamiento de los problemas físicos. Lo anterior pone de manifiesto la necesidad de que un docente, durante el proceso de formación, debe profundizar en el papel de la simetría en la formulación de teorías físicas. Las ecuaciones de Maxwell constituyen lo que se podría denominar la primera teoría gauge local. En otras palabras, “una interpretación moderna cataloga la teoría electromagnética como la primera gran teoría gauge dado que los campos, eléctrico y magnético, permanecen invariantes bajo transformaciones gauge” (Suarez Bermúdez, 2016).

Así, al precisar una diferencia de potencial como medida de la intensidad de campo, se advierte mediante los argumentos de simetría que el intervalo es lo que tiene realidad física, y que para diferentes observadores, en sistemas de referencia distintos, podrán tener valores diferentes de cada punto de potencial, pero el intervalo o diferencia se mantendrá invariante. Esto se mostrará con mayor detalle en los próximos capítulos. El argumento de

simetría como lo comprendió Maxwell es solo una mirada que se puede apreciar desde los argumentos de simetría. Entonces constituye la conservación e invariancia de ciertas magnitudes y cantidades (Diferencia de Potencial) otro aspecto rescatable e imprescindible a la hora de examinar y enseñar las teorías de la física.

Por otro lado los aportes que se hicieron durante la época en matemáticas, por ejemplo el establecimiento de la teoría de grupos, contribuyo enormemente a la construcción y aplicación de lo que denominamos aquí argumentos de simetría. En este sentido y parafraseando a Roger Penrose “Los subgrupos son importantes en muchas teorías modernas de física atómica. Se supone existe alguna simetría fundamental que relaciona diferentes tipos de partículas entre sí y también relaciona diferentes interacciones entre ellas... Así pues, es importante conocer cuáles son realmente los posibles subgrupos de un presunto grupo de simetría “fundamental”, para que aquellas simetrías que son manifiestas en la naturaleza puedan considerarse como subgrupo de este grupo más general”. Lo anterior quiere decir que la teoría de grupos permite el desarrollo de ideas sobre simetría que son aplicables a las teorías de la física moderna. Aquí vale la pena resaltar que si nuestro interés está en los sistemas rotatorios y de muchas partículas en la mecánica cuántica, cabe reconocer no solo que la rotación pone de manifiesto una simetría, sino que la mecánica cuántica es susceptible también de ser abordada a través de éste concepto, fijando elementos importantes en el desarrollo de la teoría. Así, un docente en formación que aborde la explicación de una teoría física (La mecánica cuántica por ejemplo) no debe despreciar temas como la invariancia, la conservación y transformación. El interés de la propuesta se hace evidente en la medida que se comprenda que los docentes en física puedan trazar una ruta académica donde se favorezcan competencias como la elaboración conceptual, interpretación y argumentación de las teorías físicas en relación a los principios de simetría.

Por otro lado, un docente en física del siglo XXI debe desempeñar un papel como investigador, e indagar en relaciones entre las ramas del saber y su disciplina, como es el caso de la relación física-matemática. Además, no debe verse rezagado frente al conocimiento actual o de frontera. Nuestro sistema está pensado actualmente para formar docentes en ciencias naturales, docentes que tengan un conocimiento en diversas áreas de la ciencia. A pesar de que ello en principio parece que favorece lo interdisciplinar, realmente se está evitando que el docente tenga un grado de conocimiento específico y de frontera, pues se forma educadores que van a educar en temas del siglo XIX, que si bien son importantes para la historia y el desarrollo cultural, no responden a las demandas

y problemas de nuestro siglo. Así, la consigna es que el docente adquiera los conocimientos de una forma amena, sin favorecer la perspectiva axiomática (tampoco sin dejarla de lado) y más bien enfocándose en conceptos que permiten el desarrollo de competencias que harán al formador no solo divulgador de la ciencia moderna, sino que le enseñará a traducir ese lenguaje complicado de la mecánica cuántica a un lenguaje sencillo que permita la introducción de estos tópicos en el aula.

Muchas de las deficiencias en los procesos de desarrollo económico y tecnológico son la ausencia de investigación por parte de la comunidad académica. La formación del docente como investigador y divulgador de la ciencia moderna podrá no solo facilitar a los estudiantes del aula el acceso a dichas teorías y cosmovisiones, sino que será cada vez más fácil para un estudiante de nuestro sistema acercarse a carreras científicas que den un grueso a las academias y se genere mucho más desarrollo e investigación en las mismas.

Así, los docentes en formación que puedan recibir y brindar estos conocimientos de forma amena, ligados a una componente en estudios CTS (Ciencia, Tecnología y Sociedad), pueden generar finalmente un aumento en el bienestar social, económico y cultural. Colombia dispone actualmente de recursos con los cuales se puede hacer cosas valiosas en relación a ciencia y tecnología, como a cultura y sociedad. Ya lo decía Benjamín Franklin, la inversión en educación, produce los mejores dividendos.

Bruce Rosenblum afirma en su libro titulado el enigma cuántico: “La teoría cuántica es asombrosamente exitosa. Ni una sola de sus predicciones se ha demostrado incorrecta. La mecánica cuántica ha revolucionado nuestro mundo. Un tercio de la economía mundial depende de productos basados en ella. Y es que los experimentos cuánticos sacan a la luz un enigma que desafía nuestra visión cotidiana del mundo”. Si esto es así, quiere decir que no solo el imaginario cultural y científico, también el educativo se verá favorecido, sino que también se podrán llegar a pensar en tecnologías que pongan a disposición del país nuevas formas de comercio.

Entonces la enseñanza de la mecánica cuántica en una aproximación conceptual puede permitir un proceso de alfabetización que favorece la profesionalización de estudiantes en carreras científicas. Invertir en investigación no solo brindara regalías económicas sino que puede dar cabida a conocimiento de frontera. Pero para hacer intelección de la mecánica cuántica, el docente debe ser formado no solo en los aspectos formales de la teoría, sino que debe contar con herramientas y métodos que permitan aproximar a los estudiantes a dichas teorías. Esta propuesta busca brindar dichas herramientas a partir de la apreciación

del concepto de simetría, que viene siendo el eje articulador de una nueva propuesta de enseñanza-aprendizaje de la mecánica cuántica para docentes en formación, que recoge los aspectos más importantes de las teorías físicas modernas, la matemática moderna y la construcción de esquemas explicativos sobre los fenómenos físicos.

Por otro lado, uno de los problemas actuales de física es la construcción de una teoría única, de la cual se puedan deducir la explicación de la mayor cantidad de fenómenos. En los últimos cinco siglos se han venido desarrollando una cantidad de teorías que dan cuenta de diversos fenómenos, mecánicos, electromagnéticos, atómicos. Hoy por hoy, se busca unificar las cuatro interacciones fundamentales, y se ha comprendido que dicha teoría es posible cuando se construye una teoría gauge no abeliana con simetría local. Así, uno de los actuales paradigmas científicos requiere que el docente en formación este contextualizado con dichas teorías, y la perspectiva de la enseñanza de la física cuántica a partir del concepto de simetría, toma una importancia descomunal para el educando, pues el conocimiento de la física desde el enfoque gauge lo prepara para asumir el paradigma actual y también para la correcta divulgación del problema. Es simple, si usted no sabe cuál es el problema, mucho menos puede esperar solucionarlo, a menos que tenga un golpe de suerte nunca antes visto. Entonces cuando el docente en formación reconoce la importancia de la simetría en la explicación y construcción de teorías físicas, está en principio preparado para afrontar los retos del siglo, en lo educativo y en lo disciplinar, o por lo menos está mucho más contextualizado que en el caso de la enseñanza de la mecánica cuántica en su forma tradicional y axiomática.

Entonces, “la idea planteada constituye un aporte original y una forma alternativa de enseñanza para abordar la física de una partícula en rotación dentro de un contexto alterno al usualmente establecido, lo cual permite crear un puente entre el conocimiento adquirido por los estudiantes y las nuevas ideas que utilizan los pensadores para la explicación de los fenómenos. Este tipo de análisis muestra un aporte novedoso para deducir las ecuaciones dinámicas de una partícula en rotación y constituye una manera conveniente de familiarizar a los estudiantes con temas contemporáneos de la física (Rozo, 2016)”

Capítulo 2

Implementación de la perspectiva Gauge

En el capítulo anterior se presentaron algunas consideraciones con relación a la intención pedagógica de este documento y su relevancia para los futuros educadores en física. Ahora, por otro lado, se hará uso de la idea Gauge para introducir al lector en una reflexión sobre algunos problemas de la física en relación a los sistemas rotacionales, partiendo por supuesto, desde argumentos de naturaleza simétrica.

Movimiento circular uniforme (Desarrollo matemático tradicional)

En libros de física universitarios, encontramos un desarrollo que plantea la siguiente situación para un objeto que rota. Suponga que tiene un sistema que gira alrededor de un eje fijo en el origen, y describe una trayectoria circular, como se ilustra en la **Figura 7**.

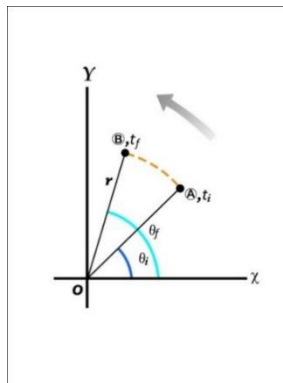


Figura 3. Descripción clásica de un sistema rotando. Se determina la posición del sistema en términos una variable angular.

El móvil o sistema está en un tiempo inicial en el punto A. Trascurrido un tiempo, varía la posición y pasa a ocupar la posición señalada por el punto B. Quiere decir que respecto al eje de coordenadas XY hay unos ángulos que dan cuenta de su posición en el plano. Observe que al ser circular la trayectoria, la distancia al origen del sistema de coordenadas es siempre constante. Basta para dar cuenta de la posición de nuestro sistema una función que defina el ángulo y esté expresada en términos del tiempo, es decir, se desea buscar una función del tiempo. La ecuación 1 sintetiza la idea de una variación de posición. Veamos un ejemplo de esto.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_o \quad (1)$$

Para conservar el orden en nuestro ejemplo podemos escribir la ecuación como sigue:

$$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A \quad (2)$$

Si se desea conocer el valor del desplazamiento angular para un caso concreto se debe evaluar la ecuación (2) y en general, la ecuación (1). Observe el siguiente fenómeno de un sistema en rotación de la Figura 8.

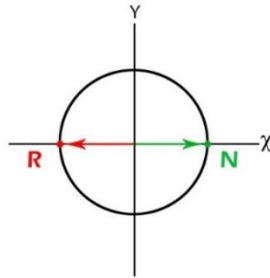


Figura 4. Sistema en rotación de 180°. La medición de los ángulos se toma desde el eje de las equis positivas. El vector de color verde indica la posición inicial en cero grados. El vector rojo indica la posición final en ciento ochenta grados.

Es claro en esta imagen que el punto N ocupa una posición sobre el eje x y que por ende es paralelo a éste y forma un ángulo de 0°. El punto R, por su parte, ocupa una posición antípoda al punto N por lo que el ángulo que lo caracteriza es de 180°. Si evaluamos esta información en la ecuación (2) se observa qué:

$$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A = 180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$$

Lo que quiere decir que el desplazamiento angular fue de 180°. Con esta ecuación termina el desarrollo matemático del lector de un libro de física universitaria con relación a la matemática que subyace en un fenómeno de rotación de un sistema alrededor de un eje fijo para la posición angular.

Movimiento circular uniforme (Desarrollo Gauge)

Para implementar la perspectiva gauge partiremos de una situación geoméricamente análoga. La principal diferencia en este punto estriba en que no asignaremos valores a una magnitud angular como primera medida. Plantearemos unas situaciones y analizaremos qué pasa con relación al fenómeno de rotación. Imagine nuestro sistema de referencia usual en el plano cartesiano XY y la siguiente figura:

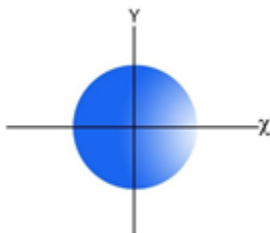


Figura 5. Sistema en cero grados, posición inicial. A ésta situación la llamamos N. Observe que la figura tiene un brillo sobre la parte que está en contacto con el eje equis positivo, el cual sirve de marcador para indicar la posición del objeto.

Ahora llamemos a la situación de la figura 9, situación N. Escogemos este nombre para hacer notar que es una posición Normal o Natural, haciendo referencia a una posición inicial no privilegiada. Observe el lector que la figura muestra hacia la dirección de las x positivas un brillo en la esfera azul, que indica la posición inicial. Vamos a aplicar una transformación (operador) R (rotar) a nuestra figura un ángulo de 180° respecto al eje de las equis positivas. Una vez aplicada esta transformación a nuestro sistema inicial obtenemos el siguiente panorama:

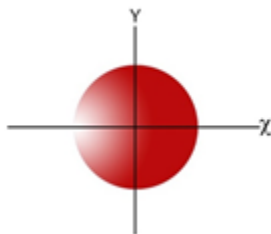


Figura 6. Sistema rotado 180° . A ésta situación la llamaremos R. El brillo de la figura está orientado ahora hacia las equis negativas.

Siendo cuidadosos con la aplicación de la transformación, la Figura 10 ejemplifica lo que se esperaría tener. Llamaremos a esta situación R (de rotación) y se entenderá por R la situación de la Figura 10. Hasta este punto vale la pena preguntarse ¿en qué se ha modificado nuestro sistema? La figura a pesar de variar su orientación respecto al eje

coordinado no ha cambiado en su forma. Se ha elegido el color rojo por conveniencia en el desarrollo matemático posterior. Además de su orientación y su color, la figura no ha sufrido cambio alguno respecto a la rotación. Así, se puede concluir que el sistema mantiene invariante ciertas propiedades (forma, masa e incluso temperatura si fuese el caso de una esfera real) bajo una transformación de rotación a velocidad angular constante y distante respecto a la velocidad de la luz. Veremos que este criterio de invariancia cobrará mayor sentido físico en lo que a conservación de magnitudes se refiere. Así, podemos pasar al siguiente punto de nuestro análisis y es volver aplicar una transformación de rotación al resultado obtenido anteriormente. Observe que si a la Figura 10 se le aplica una rotación de 180° nuevamente, vuelve a quedar en la posición original, mostrada en la figura 9 y que hemos denominado situación N. Esto quiere decir que aplicar dos veces una transformación de rotación la figura permanece totalmente invariante (Luque, Haydee, & José, 2013), es decir, sus coordenadas vuelven a coincidir, no se han modificado. Sin embargo, el concepto de invariancia gauge puede ir un poco más allá. Antes de entrar en estas disquisiciones, sería útil organizar la información que tenemos del experimento de rotar un sistema 180° . Observe la Figura 11.

/	N	R
N	N	R
R	R	N

Figura 7. Tabla en la que ordenamos los resultados del experimento de rotar 180° un cuerpo. Información tomada de “Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables” (Luque, Jiménez, Ángel, 2009).

En símbolos, la Figura 11 se podría leer de la siguiente forma

$$N \circ N \rightarrow N$$

$$N \circ R \rightarrow R$$

$$R \circ N \rightarrow R$$

$$R \circ R \rightarrow N$$

Fíjese que el sistematizar los datos de esta manera, suscita implícitamente que la operación de transformación tiene una simetría, además de mantener invariante el objeto bajo una transformación de 360° . Esto se puede ver en la forma de la *matriz* que se ha representado en la Figura 11. Es una matriz de 2×2 con diagonal N. Una vez llegados a

la importante conclusión de una matriz como *operador* de una transformación de rotación, hemos de considerar un poco más al detalle la descripción de nuestro sistema.

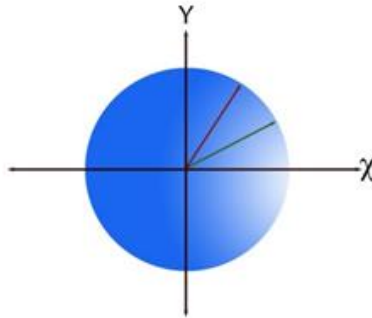


Figura 8. El sistema ubicado en la posición N. Ahora le añadimos dos vectores de posición que nos permita identificar una pequeña rotación en relación con la rotación aplicada inicialmente de 180° teniendo en cuenta dos puntos cualesquiera próximos entre sí.

Suponga de la Figura 12, que el vector que está más próximo al eje de las equis positivas es un estado inicial de rotación y el segundo vector un estado final. Observe el detalle de las componentes de cada vector en la Figura 13.

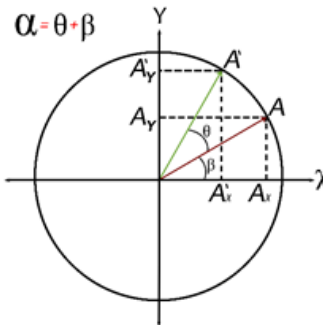


Figura 9. Ésta imagen muestra en detalle las proyecciones de los vectores inicial y final sobre los dos ejes del sistema coordenado.

De aquí se puede observar que

$$\cos \alpha = \frac{A'_x}{A'}$$

Donde α es el ángulo formado por la suma de β y θ . Claramente, este α es diferente del que utilizamos anteriormente para representar los elementos de una matriz pertenecientes al grupo $O(2)$. De aquí se obtiene que:

$$A' \cos \alpha = A'_x$$

Evaluando $\cos \alpha$ y teniendo en cuenta las propiedades trigonométricas adecuadas se tiene que

$$A' [\cos \theta \cos \beta - \sin \theta \sin \beta] = A'_x$$

Observe que

$$\cos \beta = \frac{A_x}{A}$$

Evaluando $\cos \beta$ en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$A' \left[\frac{A_x}{A} \cos \theta - \sin \theta \sin \beta \right] = A'_x$$

Haciendo lo mismo para $\sin \theta$ se tiene que:

$$A' \left[\frac{A_x}{A} \cos \theta - \frac{A_y}{A} \sin \theta \right] = A'_x$$

De la figura 13 se observa que se cumple la siguiente relación:

$$|A'| = |A|$$

En términos de sus magnitudes. Es decir, el valor numérico que representa la longitud de A es igual a la magnitud que representa A' puesto que son radios de un círculo. Así la relación anterior se reduce a

$$[A_x \cos \theta - A_y \sin \theta] = A'_x$$

La relación anterior es importante para el razonamiento siguiente. Observe que, si se repite el procedimiento, pero para el $\sin \alpha$ se tiene que:

$$\sin \alpha = \frac{A'_y}{A'}$$

De esta relación se sigue también que:

$$A' \sin \alpha = A'_y$$

Como α es la suma de β y θ , se tiene que

$$A' [\sin \theta \cos \beta + \sin \beta \cos \theta] = A'_y$$

Evaluando las funciones $\cos \beta$ y $\sin \beta$ se tiene que:

$$[A_y \cos \theta + A_x \sin \theta] = A'_y$$

Si ordenamos estas expresiones para hacer un análisis dimensional se llega a:

$$[A_x \cos \theta - A_y \sin \theta] = A'_x \quad (3)$$

$$[A_x \sin \theta + A_y \cos \theta] = A'_y \quad (4)$$

Si de la Figura 11, que es la forma de una matriz para el sistema rotacional, se interpreta a modo de comparación la situación N como equivalente al vector i de la base cartesiana. Entonces de la misma manera decimos que R es equivalente al vector j de la base ortogonal. Esto permite identificar también la idea de base a partir de la revisión de isomorfismos como es el caso del caso rotacional como se ha comentado. Así la matriz quedaría de forma tal que

	i	j
i	N	R
j	R	N

Figura 10. Tabla cualitativa del fenómeno de rotación en el plano. Aquí se ordena la información obtenida de las ecuaciones y se cambia las letras N y R de las situaciones por los versores de la base en la cual se está trabajando.

Conservando este ordenamiento de acuerdo con el álgebra lineal y, en comparación con nuestras ecuaciones (3) y (4) se ve que la matriz quedara de la forma:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R(\theta) \quad (5)$$

La ecuación (5) es una matriz que permite realizar una transformación de rotación sobre un sistema, que hemos construido bajo argumentos de simetría y puramente geométricos del fenómeno en cuestión. Así pues, *también se puede asumir el operador $R(\theta)$ como una matriz, y la matriz como un operador. Este es otro de los conceptos que permite enlazar con la física moderna que se va a desarrollar posteriormente.*

Por último y para cumplir el objetivo propuesto en esta sección, mostraremos la invariancia gauge a partir de la ecuación (5) obtenida anteriormente. Recuerde que hemos escogido un ángulo (180°) para realizar la síntesis de las ideas que subyacen a los sistemas rotacionales. Ahora, cabría esperar que después de hacer una generalización nuestra matriz permita encontrar las coordenadas de un *vector* cualquiera que es sometido a una rotación.

Ahora, para poder hacer visible la perspectiva gauge en el fenómeno de rotación, es necesario recordar que el operador está en función de un ángulo que denota la posición del

móvil en el espacio respecto a un sistema fijo de coordenadas y es allí donde vamos a trabajar. Sea V un vector paralelo al eje de las equis, podemos afirmar que sus componentes en doblete estarán dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Si el vector V es paralelo al eje equis el ángulo que se forma respecto a eje equis será de 0° . Veamos que pasa al evaluar este ángulo en la matriz y aplicarla al vector V ,

$$\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = R(0^\circ) \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R(0^\circ)$$

De aquí que se obtenga la matriz identidad. Apliquemos ahora esta matriz al vector V .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se probó matemáticamente la situación que se ha llamado N. Se aplica una rotación de cero grados a un vector paralelo al eje equis, evidentemente se mantendrá invariante, y obtendremos el mismo vector. Ahora hagamos el mismo ejercicio pero aplicando la rotación de 180° , que sería la situación R.

$$\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = R(180^\circ) \quad (8)$$

Desarrollando el operador tenemos que,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = R(180^\circ) \quad (9)$$

Apliquemos el operador de la ecuación (9) al vector V , así tendremos qué

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_R$$

Este nuevo vector que podemos llamar V_R estará orientado en la dirección de las equis negativas, de manera análoga a la Figura 10, donde el punto V sería la orientación de V y el punto V_R la ubicación de V_R . Esta situación también se puede ejemplificar en la Figura 15. Recuerde que esta circunferencia es de radio 1. Veamos ahora como aplicar la idea gauge teniendo en cuenta los procedimientos matemáticos seguidos hasta aquí.

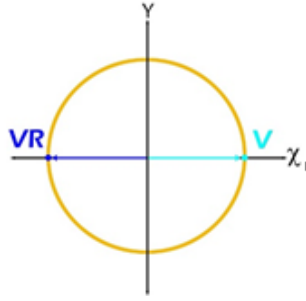


Figura 11. Imagen que retrata la misma situación que la figura 4, ahora en términos de la aplicación de un operador rotacional a un vector V que es transformado en un vector V_R .

Recordemos que la invariancia gauge consiste en tomar una magnitud, la que se quiere mostrar invariante, y sumarle una constante, para realizar la calibración de dicha magnitud. Así, podemos tomar un ángulo y sumarle una constante tal que,

$$\theta' \rightarrow \theta + c$$

Este sería el caso más general. En los siguientes capítulos se tomará este caso general para demostrar la invariancia de algunas magnitudes de nuestro interés. Por ahora, tomemos un caso particular y evaluemos la situación. Para tal efecto, tomemos la constante igual a 45° , así tenemos para el vector V paralelo al eje de las x positivas,

$$\begin{pmatrix} \cos 0^\circ + c & -\sin 0^\circ + c \\ \sin 0^\circ + c & \cos 0^\circ + c \end{pmatrix} = R(0^\circ + c)$$

Y evaluando c ,

$$\begin{pmatrix} \cos 0^\circ + 45^\circ & -\sin 0^\circ + 45^\circ \\ \sin 0^\circ + 45^\circ & \cos 0^\circ + 45^\circ \end{pmatrix} = R(0^\circ + 45^\circ)$$

Y simplificando,

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = R(45^\circ)$$

Aplicando el operador al vector V y resolviendo la matriz tendremos que,

$$\begin{pmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R(45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Advierta los símbolos de la matriz, colocados con la intención de mostrar los aspectos simétricos en relación a la matriz que se generará cuando se evalúe el ángulo de 180° .

Multiplicando la matriz cuadrada por la matriz columna, tendremos que,

$$\begin{pmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = R(45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

La ecuación (10) nos brinda las coordenadas del vector V rotado 45° . Aplicando nuevamente el mismo razonamiento para el ángulo de 180° tenemos que,

$$\begin{matrix} \cos 180^\circ + 45^\circ & -\sin 180^\circ + 45^\circ \\ \sin 180^\circ + 45^\circ & \cos 180^\circ + 45^\circ \end{matrix} = R(180^\circ + 45^\circ)$$

Y simplificando,

$$\begin{matrix} \cos 225^\circ & -\sin 225^\circ \\ \sin 225^\circ & \cos 225^\circ \end{matrix} = R(225^\circ)$$

Aplicando el operador al vector V y resolviendo la matriz tendremos que,

$$\begin{matrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R(225^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz cuadrada por la matriz columna, tendremos que,

$$\begin{matrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} = R(225^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Factorizando -1 se llega a,

$$-1 \begin{matrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} = R(225^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{(11)}$$

La ecuación (11) muestra las coordenadas del vector V_R . Evaluando la ecuación **(10)** en **(11)** se llega a la siguiente ecuación,

$$-1 R(45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R(225^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí podemos, para realizar una generalización, convertir el doblete $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en la letra del vector V , así tenemos que,

$$- R(45^\circ) V = R(225^\circ) V$$

Lo que es equivalente a

$$R(45^\circ) -V = R(225^\circ) V$$

Este resultado se puede generalizar luego de aplicar a diferentes ángulos y construcciones el mismo procedimiento de raciocinio. Para ver el *teorema DE III* con mayor detalle remítase a la sección de teoremas en los *Anexos 2*. Observe que la diferencia de los ángulos de interés, es en esencia la diferencia inicial, con lo que se prueba que la rotación de nuestro vector se mantiene invariante. Sea dicha diferencia,

$$225^\circ - 45^\circ = 180^\circ$$

Esta situación es representada en la Figura 16.

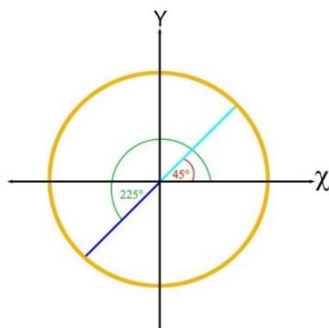


Figura 12. Vectores rotados a partir de la recalibración de los ángulos. Se muestra claramente que la diferencia de dichos ángulos es nuevamente 180° , con lo cual se concluye que la posición angular de un sistema se mantiene invariante ante transformaciones de rotación.

Rotación de un sistema desde el contexto cuántico

A lo largo de este documento hemos indicado una serie de herramientas matemáticas que nos han aportado distintos elementos para el estudio de sistemas rotacionales en el caso clásico. El desarrollo que veremos a continuación se interesa por un sistema cuántico como lo puede ser un núcleo atómico o una molécula. Procederemos a realizar el mismo razonamiento seguido hasta aquí (argumentos de simetría) para formalizar una situación concreta que nos permita obtener ecuaciones que describan o bien la dinámica del sistema, o bien sus propiedades. Iniciaremos formalizando nuestro operador de reflexión del cual se ha hecho hasta el momento un análisis concienzudo.

Suponga que se tiene un sistema de Fluoruro de Hidrógeno como el que se muestra en la imagen

Encontramos que en el posible estado 1 la representación del átomo de Hidrogeno se encuentra hacia la izquierda y el átomo de Flúor enlazado hacia la derecha. Es importante recordar que dicha molécula es polar luego su distribución eléctrica tiene una “dirección privilegiada”. El objeto blanco en esta imagen representa el átomo de Hidrogeno que ya mencionamos y el verde el de Flúor. Las cargas se reordenaran de suerte que un exceso de carga positivo estará en la esfera blanca y el exceso de carga negativo en la verde. Consideramos el estado como invertir dicha distribución de carga (aplicaría para una rotación de 180° también) de modo que se obtenga el estado indicado como 2. En vista de que se trabajará solamente transformaciones de Paridad, rotación y reflexión, no

formalizaremos la inversión de carga en este trabajo, pero se puede proponer por supuesto para trabajos posteriores a propósito del teorema CPT.

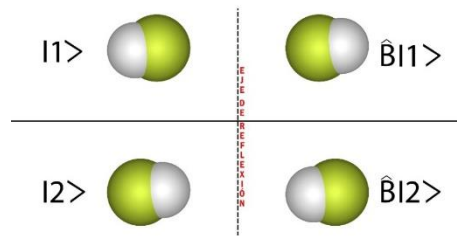


Figura 13. Molécula de Fluoruro de Hidrógeno. Simetría de Reflexión con dos estados posibles para el sistema respecto a un eje previamente establecido.

En el estado 2 se asume que la distribución de carga positiva está hacia la derecha y el exceso de carga negativa hacia la izquierda. Ahora si construimos un eje de reflexión que nos permita aplicar el operador \hat{B} , el cual ya se ha estudiado previamente, obtendremos los estados reflejados como se aprecia en la imagen. Dicha reflexión es válida en términos físicos ya que, como se ha comentado, su densidad de carga presenta una distribución especial pero en esencia el estado 1 y el 2 mantienen dicha densidad invariante y no cambia al rotar o reflejar el sistema. Se reconocen estos dos estados particularmente pero siempre puede existir un estado intermedio entre ellos que sea una combinación lineal de cada uno. Luego de analizar esta imagen podemos deducir que \hat{B} es un operador en el sentido de “hacer algo” sobre un estado para convertirlo en un nuevo estado (Feynman & Sands, 1965) y llegar a ciertas relaciones matemáticas tales que

$$\hat{B} |2\rangle = |1\rangle$$

Y también

$$\hat{B} |1\rangle = |2\rangle$$

Lo cual sugiere que al partir de un estado y operar \hat{B} en dicho estado se tiene que el sistema finaliza en un estado ya definido previamente (Feynman & Sands, 1965). Ciertamente admitimos por la invariancia de la carga que existe una simetría implícita en esta situación. Se ha demostrado previamente según el **TEOREMA DE I** que el operador reflexión cumple ciertas características de estructura y así definido se cumplen también unas propiedades del sistema. Sin embargo una de las consecuencias más importantes del teorema es para qué valores de los parámetros se cumple la estructura de la matriz y claramente que dicho operador tiene una forma matricial bien definida.

Por lo anterior obtenemos que

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Para calcular los coeficientes de la matriz nos valemos de las relaciones de simetría anteriores, así se tiene que

$$B_{11} = \langle 1|\hat{\mathbf{B}}|1\rangle = \langle 1|2\rangle = 0$$

$$B_{12} = \langle 1|\hat{\mathbf{B}}|2\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$$

$$B_{21} = \langle 2|\hat{\mathbf{B}}|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1$$

$$B_{22} = \langle 2|\hat{\mathbf{B}}|2\rangle = \langle 2|1\rangle = 0$$

Y evaluando nuevamente en la matriz se tiene que

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es evidente que debemos movernos en el cuerpo complejo y por lo tanto ésta matriz deberá cumplir las normas de los grupos unitarios. Es fácil comprobar que es Hermitica y su diagonal son valores reales. Hemos deducido de este razonamiento la primera matriz de Pauli, aunque para efectos del caso físico concreto dicha matriz tiene simplemente el efecto de reflexión. Se cumple entonces que

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \sigma_x$$

Para verificar que se cumple el **TEOREMA DE I** y reforzar la idea que se viene argumentando en este texto, se puede verificar que las propiedades de esta matriz se mantienen siendo estas

$$\text{Traza } \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$$

$$\det \hat{\mathbf{B}} = -1$$

Además la matriz es ortogonal simétrica para el caso real y Hermitica para el caso complejo. Ésta conclusión también apoya el **TEOREMA DE II** pues se vio que la matriz reflexión hace parte del operador Paridad y no es anti simétrica como se exige en la mayoría de textos para matrices ortogonales en el grupo $SO(2)$. En los siguientes apartados se estudiará la formalización del operador de Paridad en un contexto físico, que sigue realizando las características matemáticas expuestas a lo largo del texto.

Antes de continuar con el desarrollo de las matrices de Pauli, cabe resaltar que el resultado obtenido anteriormente permite establecer de manera simple el isomorfismo que presentan los grupos $SO(n)$ y $SU(n)$ puesto que trabajando en el grupo Ortogonal para dimensión tres se presenta la misma estructura de algunos elementos del grupo Unitario especial en

dimensión dos. Ciertamente este isomorfismo se puede demostrar más formalmente que por la simple inspección, pero como se ha comentado las propiedades topológicas y el formalismo axiomático escapan del alcance de este texto, que por el contrario busca simplificar algunas ideas para su difusión en niveles básicos de educación superior.

Los resultados experimentales que se obtuvieron a mediados del siglo XIX en relación los observables tuvieron como consecuencia la verificación de hipótesis propuestas en el campo de la Mecánica Cuántica y también supuso la teorización de fenómenos que no se habían tenido en cuenta hasta la fecha. Una de esas confirmaciones propuestas fue los posibles estados para sistemas atómicos influenciados por algún campo magnético no homogéneo. Para el caso de la medición del Espín, verificado por los experimentos de Stern-Gerlach no solamente se pueden inferir los valores propios de sus estados sino la relación directa con el momento angular. Cuando los físicos se vieron en la obligación de caracterizar la rotación de un sistema atómico, se vieron en ciertas dificultades y las teorías propuestas fallaban en aspectos importantes como la conservación de la energía o la deducción de propiedades como el radio de átomos y partículas. Luego de que se experimentara con átomos de plata y la interacción de estos sistemas con un campo magnético se asoció la magnitud de momento angular con el de Espín.

En lo sucesivo, se mostrarán a partir de estos presupuestos experimentales la deducción de las matrices de Pauli, a partir de ellas se llegará a la estructura general de una matriz Unitaria en complemento al capítulo en el que se expuso la teoría de grupos y también se procederá a mostrar cómo se relacionan con las matrices de rotación para sistemas cuánticos y su semejanza con el sistema clásico. En esta sección se apreciará con mayor detalle la importancia de reconocer las estructuras de grupo para el proceso de formalización y teorización que corresponde a cursos de iniciación para futuros licenciados en física.

Como se ha comentado, los valores propios deducidos de los experimentos se pueden resumir en el siguiente conjunto de ecuaciones

$$|\varphi_a\rangle = 1$$

$$|\varphi_b\rangle = -1$$

Sabiendo esto, cuando se hace la medición del observable (recuerde que todo observable debe ser representado como un operador lineal) en un eje dado, se cumple que

$$\hat{O}|\varphi_a\rangle = |\varphi_a\rangle$$

Y también

$$\hat{O}|\varphi_b\rangle = -|\varphi_b\rangle$$

Donde \hat{O} representa el observable en cuestión. Esta representación se cumple para las diferentes mediciones que se harán alrededor de los tres ejes. Comencemos por hacer el desarrollo en el caso de la medición en el eje Z. Escribiendo los correspondientes vectores propios en matriz columna se tiene que

$$|\varphi_u\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\varphi_d\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos ahora la matriz que se pretende obtener en el espacio correspondiente al operador, de modo que

$$\hat{\sigma}_z |\varphi_u\rangle = \hat{\sigma}_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y a su vez esto debe ser igual a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto matricial se tiene que

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego se deduce que

$$\sigma_{11} = 1 ; \sigma_{21} = 0$$

Hacemos el mismo desarrollo para el estado "Down" y se obtiene que

$$\hat{\sigma}_z |\varphi_d\rangle = \hat{\sigma}_z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De donde se sigue que

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto se tiene que

$$\begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\sigma_{12} = 0 ; \sigma_{22} = -1$$

Expresando la matriz con sus coeficientes tenemos que

$$\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ésta es la matriz de Pauli para una medición sobre el eje Z. En páginas anteriores se demostró la matriz de Pauli para la componente en X, pero de forma indirecta, puesto que

lo asociamos directamente con el operador de reflexión. Se dará una demostración más precisa de este para validar la comparación hecha anteriormente. Los vectores propios los podemos escribir como

$$|\varphi_R\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$|\varphi_L\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Estos valores corresponden al proceso de construcción de la teoría ciertamente con la función de onda normalizada. Estas componentes corresponden a la *superposición* los estados “Up” y “Down” descritos anteriormente. Aplicando en la definición original tenemos que

$$\hat{\sigma}_x |\varphi_R\rangle = \hat{\sigma}_x \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Esto debe ser a su vez igual a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Operando las matrices tenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

De la relación anterior se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Podemos factorizar el radical y obtener

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{12} &= 1 \\ \sigma_{21} + \sigma_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el estado “Left” se tiene que

$$\widehat{\sigma}_x |\varphi_L\rangle = \widehat{\sigma}_x \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

En este punto cabe señalar que cuando se habla de un estado “Left” por ejemplo, lo que se pretende indicar es que se ha tomado otro de los ejes de referencia (eje señalado por el subíndice de la matriz de Pauli) para realizar las mediciones correspondientes a la interacción del Espín con el campo magnético. Esto debe ser a su vez igual a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Operando las matrices tenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

De la relación anterior se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Podemos factorizar el radical y obtener

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{12} &= -1 \\ \sigma_{21} - \sigma_{22} &= 1 \end{aligned}$$

En general tenemos un sistema para la componente X tales que

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{12} = 1 \\ \sigma_{21} + \sigma_{22} = 1 \\ \sigma_{11} - \sigma_{12} = -1 \\ \sigma_{21} - \sigma_{22} = 1 \end{cases}$$

Es evidente que el sistema tiene una única solución, tenemos igual número de incógnitas y también de ecuaciones luego tenemos que

$$\sigma_{11} = 0 ; \sigma_{12} = 1 ; \sigma_{21} = 1 ; \sigma_{22} = 0$$

Evaluando en la matriz se llega a que

$$\widehat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \widehat{B}$$

Como se propuso anteriormente. Se procederá por último en este apartado a la obtención de la matriz de Pauli para cuando la medición es sobre el eje de las Y. Definiendo los vectores propios en forma de columna para los estados “In” y “Out”, tenemos que

$$|\varphi_I\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|\varphi_O\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Aquí nuevamente se reitera que los estados “In” y “Out” hacen referencia a una rotación de nuestro aparato experimental que hace coincidir un eje del espacio representado con la dirección de medición de las variables. Aplicando la definición nuevamente tenemos que

$$\hat{\sigma}_y |\varphi_I\rangle = \hat{\sigma}_y \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Esto debe ser a su vez igual a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Operando las matrices tenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{i\sigma_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{2}} + \frac{i\sigma_{22}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

De la relación anterior se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{i\sigma_{12}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{2}} + \frac{i\sigma_{22}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Podemos factorizar el radical y obtener

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + i\sigma_{12} &= 1 \\ \sigma_{21} + i\sigma_{22} &= i \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el estado “Out” se tiene que

$$\widehat{\sigma}_y |\varphi_0\rangle = \widehat{\sigma}_y \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Esto debe ser a su vez igual a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

De la relación anterior se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} - \frac{i \sigma_{12}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{2}} - \frac{i \sigma_{22}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Podemos factorizar el radical y obtener

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - i \sigma_{12} &= -1 \\ \sigma_{21} - i \sigma_{22} &= i \end{aligned}$$

En general tenemos un sistema para la componente Y tales que

$$\begin{cases} \sigma_{11} + i \sigma_{12} = 1 \\ \sigma_{21} + i \sigma_{22} = i \\ \sigma_{11} - i \sigma_{12} = -1 \\ \sigma_{21} - i \sigma_{22} = i \end{cases}$$

Es evidente que el sistema tiene una única solución, tenemos igual número de incógnitas y también de ecuaciones luego tenemos que

$$\sigma_{11} = 0 ; \sigma_{12} = -i ; \sigma_{21} = i ; \sigma_{22} = 0$$

$$\widehat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Y con esto se obtiene la matriz de Pauli para la medición en eje Y del observable que corresponde al Espín.

Una representación adecuada para los operadores de Espín se consigue con las matrices de Pauli y se define el operador como (Sánchez del Río, 2015).

$$\widehat{S} = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

Observe que las matrices de Pauli tienen por determinante -1 . Lo que contrasta con la información brindada en muchos libros de texto en donde se presume que las matrices

unitarias deben tener determinante unidad. Veamos cómo podemos llegar a mostrar que efectivamente las matrices de Pauli están relacionadas con una matriz unidad, pues se estaría tentado a deducir que si dichas matrices no tienen determinante unidad es plausible que formen otra estructura de grupo y por ende tengan un álgebra asociada con otras características. La diferencia es muy sutil, puesto que las matrices de Pauli constituyen una base vectorial del álgebra de Lie que ciertamente pertenece al grupo especial unitario en dos dimensiones como se ha comentado ya. Pero los elementos que constituyen una base, pueden producir cualquier otro elemento del grupo o del espacio, luego de alguna forma se entienden dichas matrices como generadores, pues en términos de una base vectorial, pueden formar por medio de una combinación lineal, cualquier otro elemento del espacio. Por la perspectiva del grupo, se dice que pueden *generar* cualquier otro elemento del grupo, ¿y no son los generadores de un grupo, o los vectores de base, elementos del grupo o del espacio?

Por definición, tenemos que una matriz unitaria se puede escribir de la forma (Salcedo, 2018).

$$U = a_0 - i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Haciendo el desarrollo del producto tenemos que

$$U = I a_0 - i a_1 \sigma_1 - i a_2 \sigma_2 - i a_3 \sigma_3$$

Evaluando las matrices de Pauli se llega a

$$U = I a_0 - i a_1 \sigma_x - i a_2 \sigma_y - i a_3 \sigma_z$$

Luego

$$U = I a_0 - i a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - i a_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} - i a_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

De aquí que

$$U = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & i a_1 \\ i a_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i a_3 & 0 \\ 0 & -i a_3 \end{bmatrix}$$

Restando las ecuaciones obtiene que

$$U = \begin{bmatrix} a_0 - i a_3 & -i a_1 - a_2 \\ -i a_1 + a_2 & a_0 + i a_3 \end{bmatrix}$$

Ésta sería la forma general de una matriz unitaria. Observe que el determinante exige que todas los parámetros de la matriz, o mejor todas los coeficientes, deben estar al cuadrado dentro de una sumatoria, lo cual evidentemente implica que el determinante no puede ser -1 nuevamente entrando en conflicto con lo que se esperaría del determinante de una matriz en el grupo especial unitario. Por lo general se suelen expresar las matrices de Pauli

multiplicadas por la cantidad imaginaria justamente para eludir este problema pues claramente se obliga a las matrices a tomar determinante igual a uno como acabamos de ver para una matriz unitaria general.

Por otro lado es claro notar que la estructura de la matriz recién demostrada también corresponde a la forma que poseen las matrices en el caso de los grupos SO (n) Ortogonales y el hecho de que su determinante sea igual a la unidad, implica que puede tener relación directamente con el grupo especial Ortogonal, pues al ser unitaria se es Hermitica, cumpliendo a cabalidad con los requisitos exigidos por los grupos Ortogonales, y en efecto, existe una correspondencia entre el grupo especial Ortogonal en tres dimensiones y el grupo especial unitario en dos dimensiones. Se puede intuir por el hecho de que las matrices de Pauli tiene dimensión dos y sin embargo, hablamos de mediciones en X, Y e Z. Esta idea se puede apreciar de manera detallada en cursos de topología y variedades, sin embargo se procede a examinar este concepto por medio de un desarrollo matemático y analítico diferente del método axiomático y topológico.

Definamos los operadores de Espín para las tres dimensiones alejándonos un poco del tratamiento dos dimensional que se ha desarrollado hasta el momento. Así tenemos para cada una de las componentes en tres dimensiones del operador de Espín que

$$\begin{aligned}\hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2} \sigma_x \\ \hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2} \sigma_y \\ \hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2} \sigma_z\end{aligned}$$

Por otro lado observe que si obtenemos las matrices exponenciales en términos de la cantidad imaginaria, es decir, utilizando la propiedad de Euler para el cuerpo de los complejos y multiplicando por el inverso de la constante de Planck para este caso obtenemos

$$e^{i\frac{\theta\hat{S}_x}{\hbar}} = e^{\frac{i\theta}{2}\sigma_x}$$

Aplicando la expansión en series del miembro derecho de la ecuación se llega

$$e^{\frac{\theta}{2}i\sigma_x} = \mathbf{I} + \frac{\left[\frac{i\theta}{2}\sigma_x\right]^1}{1!} + \frac{\left[\frac{i\theta}{2}\sigma_x\right]^2}{2!} + \frac{\left[\frac{i\theta}{2}\sigma_x\right]^3}{3!} + \frac{\left[\frac{i\theta}{2}\sigma_x\right]^4}{4!} \dots$$

Y reordenando para potencias pares e impares donde se conserve o desaparezca el factor imaginario tenemos que

$$e^{\frac{i\theta}{2}\sigma_x} = \left[I + \frac{\left[\frac{i\theta}{2}\sigma_x\right]^2}{2!} + \frac{\left[\frac{i\theta}{2}\sigma_x\right]^4}{4!} \dots \right] + i \left[\frac{\left[\frac{\theta}{2}\sigma_x\right]^1}{1!} + \frac{\left[\frac{\theta}{2}\sigma_x\right]^3}{3!} + \frac{\left[\frac{\theta}{2}\sigma_x\right]^5}{5!} \dots \right] \dots$$

Que coincide con la expansión de las funciones trigonométricas para seno y coseno. Observe que las matrices Pauli al cuadrado cumplen siempre con la equivalencia a la matriz identidad y las que están elevadas a una potencia impar coinciden consigo mismas, esto no es difícil demostrarlo. De lo anterior se obtiene

$$e^{\frac{i\theta}{2}\sigma_x} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_x \sin \frac{\theta}{2}$$

La ecuación anterior es de vital importancia no solo porque relaciona con las matrices de Pauli con una rotación, sino también su estructura de grupos se evidencia como se había comentado anteriormente. Se aprecia matemáticamente que se puede capturar la estructura de grupo SO (3) a través del desarrollo en series de matrices SU (2). Como se está interesado en describir rotaciones de 180° evaluamos π en la ecuación de forma que

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sigma_x \sin \frac{\pi}{2}$$

De aquí se llega a

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x} = i \sigma_x$$

Siguiendo el mismo desarrollo para las demás componentes del Operador Espín se obtiene un grupo de ecuaciones tal que

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x} = i \sigma_x$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_y} = i \sigma_y$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_z} = i \sigma_z$$

Este conjunto de ecuaciones sustenta lo que se comentó anteriormente en relación a como se suelen trabajar las matrices de Pauli, multiplicadas por un factor imaginario para evitar que su determinante se -1 y hacerla coincidir con la definición de grupo Unitario. Se ha expresado el Operado de Espín en términos de las matrices de Pauli. Ahora veamos como quedarían estas matrices multiplicadas por el factor imaginario, se tiene que

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x} = i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_y} = i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_z} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Estas serían las matrices que, en efecto, permiten entender rotaciones de sistemas en términos de las matrices de Pauli. En lo sucesivo se mostrará un desarrollo alternativo para el Operador de rotación que nos permitirá llegar a la ecuación dinámica fundamental de la Mecánica Cuántica en la notación de Dirac.

En la sección que corresponde a la Teoría de grupos se mostró como verificar que un grupo es subgrupo invariante de un grupo más general. En este punto es necesario traer ese concepto pues matemáticamente se quiere mostrar que las matrices de Pauli son subgrupos invariantes de un grupo más general que sería aquel conformado por las matrices de rotación que se han analizado hasta el momento. Físicamente cabría la interpretación de que un sistema bajo influencia de un campo se pretende medir su componente X e Y de Espín, entendiéndose que existe dicho sistema en estados superpuestos respecto a la rotación, producto de la influencia del campo. Aquí vale la pena comentar que, dado que un sistema cuántico no posee análogo clásico respecto al Espín, la rotación de una partícula o un átomo se entiende como la variación y superposición de estados del sistema respecto a la característica puntual, que en este caso serían las proyecciones del Espín. Sin embargo, recuerde que en mecánica cuántica se trabaja en un espacio complejo luego la acción de rotar un “vector” en el espacio de Hilbert no corresponde con la imagen misma que se tiene en las descripciones anteriores que se han presentado sobre el grupo de rotaciones en el espacio. De hecho, la “rotación” de un vector propio no depende de las coordenadas espaciales puesto que el Espín no tiene representación como función que dependa de dichas coordenadas, luego pensar en la rotación clásica suele ser una imprecisión conceptual. En este texto se apoya la idea de la “rotación” cuántica como la modificación discreta de la forma de estar de un sistema bajo la influencia de un campo externo en relación a las proyecciones de su Espín como característica intrínseca. Ahora para demostrar ello aplicamos la siguiente ecuación que corresponde a los subgrupos invariantes (*ver anexo 1*) tal que

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x} \sigma_y e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_x} \equiv ghg^{-1}$$

Como se mostrará en el capítulo de subgrupos y generadores. Entonces

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x}\sigma_y e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_x} = i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como las cantidades imaginarias conmutan se tiene que

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x}\sigma_y e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

De lo que se deduce al factorizar -1 que

$$e^{\frac{i\pi}{2}\sigma_x}\sigma_y e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_x} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -\sigma_y$$

Nuevamente la interpretación física al hacer que sobre la matriz de Pauli en el eje Y actuara como Operador rotación compuesto en el que se incluyó la idea de Espín, y hace que el resultado final sea menos la matriz con la que se inició. Se puede verificar este resultado para las diferentes combinaciones posibles. Por otro lado, esto quiere decir que las matrices de Pauli son grupos invariantes al grupo de rotación, y además se verifican los valores propios definidos anteriormente de los experimentos Stern-Gerlach, que si se hace una comparación con la teoría de grupos expuesta en el primer capítulo, correspondería a los elementos del grupo G_p , que básicamente es el grupo que contiene los elementos (valores propios) del operador de Paridad. Existe una estrecha conexión entonces en los conceptos de Rotación, Reflexión, Momento angular y Paridad, incluso en Mecánica Cuántica. En la siguiente figura se muestra dicha relación en términos de la simetría que subyace a cada fenómeno físico que ha sido posible resaltar gracias a la idea de simetría y transformación gauge.

Otra conclusión importante es que al ser un subgrupo invariante y bajo el presupuesto de que las matrices de Pauli son una base vectorial de un grupo Unitario, por la definición utilizada se concluye que las matrices de Pauli son a su vez el subgrupo generador del grupo de rotaciones. No entendemos en Mecánica Cuántica la rotación de manera usual, pero se sabe y se ha demostrado que comparten un aparato matemático análogo y que la idea de “rotación cuántica” implica que a nivel macro se comprenda la rotación como es usual. En otras palabras, no es una coincidencia que el modelo matemático que describe dos fenómenos con representación física en apariencia distinta, tenga que disociarse definitivamente por las escalas de magnitud. Se puede pensar que las “micro rotaciones”

del mundo atómico son una forma fundamental de lo que experimentamos como una rotación a nivel macro.

SIMETRÍA	MAGNITUD
Rotacional (Circular o Esférica)	Momento Angular
Reflexión Especular (respecto al origen)	Paridad

Figura 14. Tabla que relaciona la simetría de un sistema con una magnitud física que se conserva.

Como se han deducido ya las matrices de Pauli y demostrado el operador reflexión, se ha preparado el camino para hablar de Paridad y rotación, desde la perspectiva dinámica puramente y en términos del desarrollo matemático en la notación de Dirac. Se ha dicho que nuestro operador de rotación está definido por \hat{R} para el caso de dos dimensiones. Se extiende para el caso de Mecánica Cuántica la rotación a tres dimensiones y representamos una rotación semejante respecto al eje z como $\hat{R}_z(\theta)$ dependiendo del ángulo de rotación. Suponga un sistema atómico representado por una función de onda φ . Vamos a considerar un caso especial en el que existe una simetría implícita en el sistema como se ha comentado a lo largo del documento, particularmente, el sistema considerado de Fluoruro de Hidrógeno. Éste sistema en dicho estado particular (inducido por simetría) al ser influenciado por un operador tiene la propiedad de producir un nuevo estado que es igual al estado original multiplicado por algún factor de fase (Feynman & Sands, 1965). Luego la ecuación que describe tal situación está dada por

$$\hat{R}_z(\theta) |\varphi_0\rangle = e^{i\delta} |\varphi_0\rangle$$

Como existe una relación directamente proporcional entre el ángulo de rotación θ y el factor de fase, es decir, a mayor ángulo de rotación mayor será el factor de fase tenemos que

$$\hat{R}_z(\theta) |\varphi_0\rangle = e^{im\theta} |\varphi_0\rangle$$

Donde m es un número real de proporcionalidad. Pero si obtenemos el mismo estado del sistema pero con un factor de fase, estamos insinuando que el sistema en sí mismo no ha sufrido modificación alguna y la simetría supone nuevamente la conservación de una magnitud que asociamos a la simetría de rotación. Es claro que cuando se habla de rotaciones es imprescindible comentar el momentum angular de sistema y se llega a la

definición de éste luego de formalizar el fenómeno de rotación brindando así una caracterización en el contexto cuántico. Para ello deberemos hacer un análisis primero de como varía un sistema cuántico temporalmente, y luego de ello extender por comparación la definición de los operadores mecano cuánticos, si bien es cierto que en el proceso de rotación físico está implícita la idea de evolución temporal del sistema. Se define el operador evolución temporal como \hat{U} y para una variación infinitesimal tenemos que

$$\hat{U}(t + \Delta t, t) = \langle \vartheta | \hat{U} | \varphi \rangle = U_{\vartheta\varphi}$$

Suponemos nuevamente que el estado de la molécula de Fluoruro de Hidrógeno se encuentra en un estado inicial φ , y por medio del operador evolución temporal llegara a un estado final ϑ de manera que

$$\langle \vartheta_f | \hat{U} | \varphi_0 \rangle$$

Que representa la amplitud de probabilidad de encontrar el sistema en ese estado al cabo de un tiempo muy corto. Ahora, podemos decir que el sistema en el estado inicial luego de la acción del operador nos brinda un estado tal que

$$| \varphi(t + \Delta t, t) \rangle = \hat{U}(t + \Delta t, t) | \varphi_0(t) \rangle$$

Si multiplicamos por la izquierda por el bra que corresponde al estado final en términos de la base se tiene que

$$\langle \vartheta | \varphi(t + \Delta t, t) \rangle = \langle \vartheta | \hat{U}(t + \Delta t, t) | \varphi_0(t) \rangle$$

Desarrollando la base del estado inicial se tiene que

$$\langle \vartheta | \varphi(t + \Delta t, t) \rangle = \langle \vartheta | \hat{U}(t + \Delta t, t) | \varphi \rangle \langle \varphi | \varphi_0(t) \rangle$$

Recuerde el lector, docente o estudiante, que multiplicar un estado por su correspondiente base arroja por resultado los coeficientes o las componentes del estado vectorial. Luego se tiene que

$$F_{\vartheta} = \langle \vartheta | \varphi(t + \Delta t, t) \rangle$$

$$F_{\varphi} = \langle \varphi | \varphi_0(t) \rangle$$

Y teniendo en cuenta la relación del operador en términos de los elementos de su matriz se llega a

$$F_{\vartheta}(t + \Delta t, t) = \sum_{\varphi} U_{\vartheta\varphi}(t + \Delta t, t) F_{\varphi}(t)$$

Ahora sabemos que si la variación de tiempo infinitesimal tiende a cero, es equivalente a decir que el estado no se ha modificado (Feynman & Sands, 1965), ni siquiera por un factor de fase. De aquí se sigue que los elementos de la matriz que representa la evolución temporal serán unidad para índices repetidos. Se sigue entonces que

$$U_{\varphi\varphi} = \delta_{\varphi\varphi} + K_{\varphi\varphi}\Delta t$$

Puesto que si la variación temporal se hace cero los elementos de U se igualan a la identidad. La constante K la podemos definir como el Hamiltoniano (Diferente de la H para subgrupos y matrices Hermiticas presentadas en el Anexo 1) multiplicado por menos la cantidad imaginaria y dividida la constante de Planck reducida. Así se tiene que

$$U_{\varphi\varphi} = \delta_{\varphi\varphi} - \frac{i}{\hbar} H_{\varphi\varphi} \Delta t$$

En términos de operadores obtenemos que

$$\hat{U} = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t$$

Y éste sería el operador evolución temporal. Observe que dicho operador está relacionado directamente con el operador de Hamilton, que nos brinda la evolución del sistema, luego es coherente tal relación en términos de la dinámica del fenómeno en cuestión. Como lo que se pretende es llegar a formalizar el operador rotación para un sistema molecular, se obtiene por comparación para una variación de un ángulo infinitesimal que

$$\hat{R}(\Delta\theta) = \mathbf{1} + \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z \Delta\theta$$

Y esta ecuación dará la información necesaria en términos dinámicos de un sistema que rota para una variación angular infinitesimal. La simetría y su correspondiente asociación a la conservación de magnitudes (Teorema de Noether) permiten hacer este tipo de asociaciones y analogías pues se sabe que hay “cosas” que se conservan. Se llama a \hat{J}_z al operador momento angular (Feynman & Sands, 1965). De la siguiente ecuación

$$\hat{R}_z(\Delta\theta) |\varphi_0\rangle = e^{im\Delta\theta} |\varphi_0\rangle$$

Se hace el desarrollo en potencias de la cantidad infinitesimal de la misma forma que se trabaja en la sección de grupos (*remita la lectura a la sección de anexos*) para obtener los *paréntesis de Lie*. Para las Transformaciones lineales infinitesimales particularmente la función exponencial se tiene que

$$\hat{R}_z(\Delta\theta) |\varphi_0\rangle = e^{im\Delta\theta} |\varphi_0\rangle = (\mathbf{1} + im\Delta\theta) |\varphi_0\rangle$$

Ciertamente despreciando las potencias superiores a uno pues tales desplazamientos deben ser minúsculos y por tanto las podemos ignorar. Si compara las ecuaciones anteriores es claro ver que

$$im = \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z$$

Y de aquí que

$$\hat{J}_z = m\hbar$$

Que sería la definición del momento angular para un sistema Cuántico bajo la acción de rotación respecto a un eje. El lector puede comprobar que al operar el momento angular con un estado inicial como los que se han venido trabajando se tiene que

$$\hat{J}_z |\varphi_0\rangle = m\hbar |\varphi_0\rangle$$

Donde m es un número entero o semientero dependiendo del tipo de partículas que se esté analizando. Esta ecuación también se puede interpretar como la ecuación de valores propios, fundamental para los procesos de enseñanza aprendizaje en cualquier curso básico de Mecánica Cuántica. Se ha logrado deducir a partir de argumentos de simetría tanto en el caso clásico como en el cuántico los operadores que finalmente dan cuenta de los fenómenos que se ha propuesto mostrar para la construcción de una ruta de aprendizaje de la Mecánica a partir del concepto de simetría. La introducción de la ecuación de Schrödinger genera algunos conflictos de aprendizaje por su alto nivel de abstracción es en muchas ocasiones se omite su estudio y en el mejor de los casos el estudiante la reconoce pero hay poco entendimiento e intelección del tema. El desarrollo que se ha propuesto hasta ahora introduce de forma sencilla conceptos que por lo general requieren de grandes esfuerzos por parte del estudiante para su análisis. Ahora llegaremos a esta famosa ecuación de la misma forma que hasta el momento, es decir, mostraremos una ecuación análoga que se trabaja en algunos textos de física bajo la notación de Dirac y que es coherente que los procesos mostrados hasta ahora. Introduciendo la matriz que representa el operador evolución temporal en la ecuación de las componentes tenemos que

$$F_{\vartheta}(t + \Delta t, t) = \sum_{\varphi} \left[\delta_{\vartheta\varphi} - \frac{i}{\hbar} H_{\vartheta\varphi} \Delta t \right] F_{\varphi}(t)$$

Se tenía por sentado que para elementos temporales infinitesimales se recuperan las componentes de los estados finales de modo que la matriz identidad es en este caso igual a los coeficientes de la amplitud de probabilidad que representan el estado final, tal que

$$F_{\vartheta}(t + \Delta t, t) = \left[F_{\vartheta}(t) - \frac{i}{\hbar} H_{\vartheta\varphi} \Delta t \right] F_{\varphi}(t)$$

Asociando los subíndices y dividiendo por el valor infinitesimal se tiene que

$$\frac{F_{\vartheta}(t + \Delta t, t) - F_{\vartheta}(t)}{\Delta t} = - \frac{i}{\hbar} H_{\vartheta\varphi} F_{\varphi}(t)$$

En esta ecuación cabe hacer una doble observación. Por un lado, en el miembro izquierdo de la ecuación anterior tenemos la idea de calibración de magnitudes, es decir, se aprecia

claramente que se ha sumado una constante temporal infinitesimal y por lo tanto está implícita la calibración gauge que se comentó en los apartados precedentes y a la que subyace la idea de simetría y conservación. Se aprecia en este punto como dichos conceptos convergen luego de ser estudiados aisladamente tanto en el ámbito matemático como en el físico.

Por otro lado se aprecia la relación entre la calibración gauge y el concepto de derivada puesto que el miembro a la izquierda no es otra cosa que la razón de cambio del coeficiente F para el estado final respecto al tiempo. Multiplicando por la cantidad imaginaria y la constante de Planck reducida se tiene que

$$i\hbar \frac{d [F_{\vartheta}(t)]}{dt} = H_{\vartheta\varphi} F_{\varphi}(t)$$

Que no es otra cosa que la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, que relaciona los estados finales e iniciales por medio de la Matriz de Hamilton.

Por último en este apartado se tomara una de las ideas centrales de la calibración gauge encontradas en los referentes para hacer énfasis en la relación de éstas ideas, la simetría y el concepto de derivada. Para ver la relación entre la idea gauge y la razón de cambio observe la sección de *Anexos 1*.

Capítulo 3

Idea de Paridad desde el contexto matemático

Ahora comencemos a examinar el concepto de paridad a partir de establecer una operación dentro del grupo de los números enteros no negativos. Cabe precisar que no se toman los enteros en toda su extensión para brindar una definición intuitiva. En el siguiente apartado veremos la idea de paridad desde el contexto de grupo y se mostrara bajo esta óptica que la definición abarca todo el conjunto de los enteros y además permite hacer una aproximación a ideas físicas si se liga a la idea de grupo y subgrupo invariante. A continuación se dará una definición provisional para hacer la comparación en lo sucesivo y verificar el alcance de la teoría de grupos en el contexto físico-matemático.

Atendiendo al axioma de clausura para la adición (Apostol, 1967), “A todo par de elementos x e y de G corresponde un elemento único de G llamado suma de x e y , designado por $x + y$ ”. En este caso v representa un conjunto no vacío de objetos llamados elementos, que hemos explicitado como números enteros no negativos. Decimos que un elemento de este conjunto tiene paridad siempre que se cumpla

$$r = \frac{v}{2} \quad (13)$$

“Si r es un residuo entero y mayor o igual que la cero y v es el número entero no negativo”, decimos que v es susceptible de ser par. Esta propiedad de ser par la representamos con **P** (Luque, Haydee, & José, 2013). Si r no es un número entero y a su vez es mayor que cero, decimos que v es impar, o que no posee la cualidad de paridad. Esta situación de ser un número impar la llamaremos **I**. Así, observemos casos particulares, siempre que se aplique la operación de adición entre números pares obtendremos otro número par. Si sumamos un número impar con un número par obtendremos un número impar. Y por último si hacemos la adición de un número impar con otro impar tendremos como resultado un número par. Observe los siguientes casos,

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 5 = 7$$

$$5 + 4 = 9$$

$$3 + 5 = 8$$

En general, se tiene que

$$P + P = P$$

$$P + I = I$$

$$I + P = I$$

$$I + I = P$$

Ordenando esta información en una matriz tenemos que,

/	I	P
I	P	I
P	I	P

Figura 15. Tabla que ordena la información analizada previamente en relación a la Paridad de los números. Basada en (Luque, Haydee, & José, 2013).

Que es una distribución análoga a las matrices que hemos mostrado en las Figuras 11 y 14. Observe que en términos de estructura (operaciones u ordenación) matemática las matrices que representan una rotación de 180° y la matriz que resume la propiedad de paridad con la operación suma son equivalentes o isomorfas. En este punto se encuentra sin embargo, una gran diferencia en términos de simetrías. Observe que para el caso de las rotaciones, las transformaciones que se han definido aplican para rotaciones

infinitesimales y las condiciones puestas en el proceso de formalización no entran en conflicto con la continuidad de la transformación. Esto quiere decir que se puede tener una rotación de 180.9999° y el vector suplementario como se ha expuesto anteriormente de 0.9999 y aun así se cumplen los análisis y teoremas expuestos.

El caso de la paridad es diferente. Según la ecuación (13) para poder afirmar que un número es par no debe existir residuo decimal, es decir, se exige que dicho residuo sea entero y por ende, discreto. De lo contrario se asume que el elemento carece de paridad, siempre que siga siendo entero. Para valores que no lo son, se dice que no tienen paridad y tampoco por complemento se puede afirmar que es impar, simplemente no entran estos números en nuestro análisis. Observe el lector también que una de las condiciones iniciales para hablar de esta propiedad es hacer que cada uno de esos números (v) sean enteros, pues no cabe la menor posibilidad de aplicar a la ecuación (13) una equivalencia como $v = \pi$. Sabemos que dicho número hace parte de otro conjunto y además de ser irracional escapa del teorema fundamental de la aritmética.

Con esto, nuevamente se concluye que la propiedad de paridad en términos de transformación y de los principios de simetría, es una simetría discreta. Esta importante conclusión será ampliada en el desarrollo de la idea de paridad en el contexto cuántico, aprovechando también el esquema mental que exige la MC para pensar la idea de estado de un sistema.

Idea de Paridad desde el contexto físico clásico

En los apartados anteriores se discutió una de las diferencias fundamentales de por qué la operación de rotación **R** y la de paridad **P** no son lo mismo, a pesar de que matemáticamente tienen aspectos similares o isomorfos y físicamente resultan en el cambio del signo en las coordenadas espaciales. Se llegó a la conclusión de que la operación **R** es considerada continua, es decir, entre los puntos 0° y 180° como era el caso del ejemplo anterior trabajado hasta ahora, existen una cantidad de valores en principio infinitos que puede tomar el sistema digamos 30° , 45° o 90° . Recuerde que este es el caso de la Figura 13, donde se hizo uso de la idea *gauge* para mostrar la invariancia del sistema bajo una acción de transformación **R**. Para el caso de la paridad los valores intermedios que puedan existir no son admitidos por la definición que daremos a continuación, y además, por las condiciones expuestas en el acápite anterior en relación a la paridad desde el contexto matemático y la ecuación (13).

Por otro lado, es importante hacer notar una vez analizadas las diferencias, cuáles son las similitudes que puedan llegar a tener los operadores. Una de esas similitudes es, a saber,

que tanto **R** como **P** son operadores que podemos expresar como la composición de otros operadores elementales, tales como **B**. Esta idea nos permitirá llegar a una de las conclusiones más llamativas del presente trabajo, puesto que mostrará que el isomorfismo se mantiene no solo en el análisis de magnitudes como se ha visto hasta ahora, sino también en los grupos que conforman las operaciones de transformación. Esta idea se desarrollará en los siguientes apartados. Ahora, para el proceso de formalización iniciaremos con una situación física concreta. Observe la Figura 21, allí se muestra un sistema y se caracteriza su posición con el vector **V**. Se tomará cada una de sus componentes y se buscará ubicarlas espacialmente de tal forma, que al sumar de nuevo dichas componentes, obtengamos el vector **-V**.

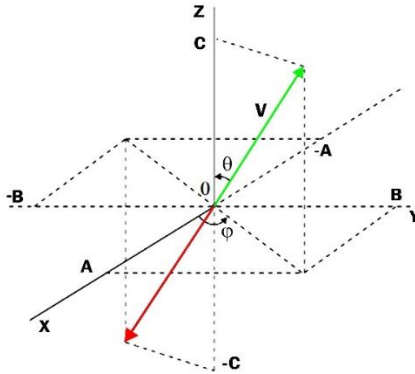


Figura 16. Sistema de coordenadas en tres dimensiones que representa un vector posición antes y después de una Transformación de Paridad. Imagen basada en (Sánchez del Río, 2015).

Se descompone el vector **V** de tal forma que:

$$|V| = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 \quad (14)$$

Sean entonces las siguientes transformaciones sobre las componentes tales que:

$$\begin{aligned} R(180^\circ)^Y \overline{OA} &\rightarrow \overline{OA} \text{ Ahora } B^{XZ}(\overline{OA}) \rightarrow -\overline{OA} \\ R(180^\circ)^Y \overline{OB} &\rightarrow \overline{OB} \text{ Ahora } B^{XZ}(\overline{OB}) \rightarrow -\overline{OB} \\ R(180^\circ)^Y \overline{OC} &\rightarrow \overline{OC} \text{ Ahora } B^{XZ}(\overline{OC}) \rightarrow -\overline{OC} \end{aligned} \quad (15)$$

En estas ecuaciones \overline{OA} y \overline{OC} representan los segmentos del origen del sistema de coordenadas a las componentes de X y Z, respectivamente. Observe que finalmente se ha obtenido un punto que respecto al primer punto está rotado 180°, se ha utilizado la operación de reflexión especular y además no se consideran valores intermedios entre estos. Esta sería una idea de paridad aproximada. Se define entonces la paridad **P** como

la transformación que permite cambiar las coordenadas de un sistema dadas por un vector \mathbf{V} a $-\mathbf{V}$, y que además dicha transformación debe ser discreta. Si generalizamos las ecuaciones descritas en (15) tenemos que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^{XZ} \cdot \mathbf{R}(180^\circ)^Y \quad (16)$$

Observe que (16) está compuesta por la operación de reflexión especular o bilateral y la rotación de 180° . Si la definición formal de paridad incluye una rotación de 180° y algo más, ¿cómo podría pensarse la paridad como una simple rotación de un radián?

Ahora por otro lado, debemos hacer algunas precisiones de corte conceptual, con el ánimo de llegar a la forma matricial del operador de Paridad, uno de los objetivos primordiales en el desarrollo matemático de este trabajo. Para iniciar la construcción del operador de Paridad se problematiza sobre una imagen real y una especular.



Figura 17. Imagen de intérprete musical con simetría bilateral que permite ejemplificar la idea de ruptura.

De las imágenes anteriores, ¿cuál es la real y cuál es la especular? La idea de Paridad tiene implícita la simetría especular de la que hemos venido hablando a lo largo de este trabajo. Coloquialmente se conoce como el problema de la derecha e izquierda. ¿Cómo podemos decir hacia dónde es la derecha, hacia dónde la izquierda? ¿Es acaso una mera convención? ¿El mundo funcionaría igual si lo reflejamos en espejo? Es decir, ¿Las leyes de la física son invariantes si las reflejamos en un espejo?

Ahora bien, el lector y eventualmente el estudiante que se vea en la necesidad de responder estas preguntas, estará de acuerdo con el hecho de que la imagen real es la que está alejada del reloj digital puesto en la barra de tareas en la parte inferior en configuración estándar y la especular la que está más cerca de la posición de éste reloj digital. ¿Por qué se ha llegado a esta conclusión? En efecto, porque la imagen en sí misma no es simétrica. Claramente la guitarra posee una asimetría que se ha procurado dejar lejos de la vista del

lector y ésta consiste en letras sobre la guitarra, las cuales estarán invertidas y no serán del todo legibles en la imagen especular. Cabe señalar en este punto que la asimetría no es propia de la guitarra, sino más bien de algunas letras del español que configuran el nombre del fabricante de dicha guitarra. Como la Figura 22 es en sí misma asimétrica se tiene un buen criterio para decir cuál es la imagen real y cuál es la virtual. Es la ruptura de simetría lo que permite hacer el discernimiento y tener argumentos que sustenten dicha elección. En el caso contrario, si la simetría fuera la norma, hacer la distinción entre lo real y especular sería un tanto más complejo y nos veríamos en la obligación de admitir que la Paridad se conserva, no podemos decir hacia donde es la derecha y hacia donde la izquierda. En el mundo subatómico la cuestión es semejante. Si la partícula está haciendo algo hacia nuestra izquierda, su imagen especular hará lo mismo hacia nuestra derecha. Pero si la actuación hacia la izquierda y la actuación hacia la derecha fuesen igualmente posibles según las leyes de la naturaleza, seguiríamos sin poder distinguir la partícula de su imagen. Y ésta es precisamente la situación imperante, cuando se cumple la ley de conservación de la paridad (Asimov, 1977).

Ahora bien, hasta este punto se ha aclarado un poco más la idea de Paridad en lo tocante al concepto y a la conservación de la misma. También se ha especificado según varios autores el tratamiento matemático de dicho operador en sistemas clásicos, y se ha ilustrado que la Paridad es un operador compuesto, es decir, se entiende como una rotación de 180° y una reflexión especular de cada una de las componentes posicionales del sistema. Según la ecuación

$$P = B^{XZ} \cdot R(180^\circ)^Y$$

Ahora bien, en muchos textos donde se estudia la Paridad se llega a lo sumo a comentar sus valores propios, es decir, más o menos, se brindan explicaciones de tipo teórico y conceptual pero no se llega hacer análisis sobre la estructura matricial del operador y su caracterización a la luz de la teoría de grupos. Para tal efecto, debemos primero obtener las matrices de rotación y reflexión del sistema ejemplificado anteriormente para el caso tres dimensional.

La matriz que da cuenta de la reflexión especular en tres dimensiones de un vector posición respecto al plano XZ deberá ser tal que invierta toda coordenada sobre el eje Y. De aquí se sigue que dicha matriz estará dada por

$$B^{XZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, se ha estudiado en apartados anteriores el operador de rotación, la matriz que da cuenta de la rotación de un sistema en función de un ángulo. Si extendemos ese razonamiento a tres dimensiones y tomamos como eje de rotación el eje Y como se exige en la definición del operador de Paridad tenemos que

$$R(180^\circ)^Y = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & 0 & \sin 180^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 180^\circ & 0 & \cos 180^\circ \end{bmatrix}$$

Evaluando la rotación concreta de 180° se obtiene una matriz simplificada tal que

$$R(180^\circ)^Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora para el operador de Paridad en su forma matricial se llega a

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^{XZ} \cdot R(180^\circ)^Y$$

Luego

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por último se hace el producto de las matrices y se obtiene que el operador de Paridad estará dado por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que para un vector cualquiera la acción del operador tendrá como resultado la inversión espacial, es decir, el cambio de signo en sus componentes como exige la definición. Por otro lado se puede escribir la siguiente relación

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}$$

Donde \mathbf{I} es el operador identidad o la matriz identidad.

Idea de Paridad desde el contexto físico Cuántico

Se ha mostrado hasta este punto la fuerte relación que poseen los operadores que nos interesan para transformaciones físicas de rotación y reflexión de sistemas mecánicos con la idea de simetría y como el análisis de la estructura de grupo brinda valiosos elementos para deducciones formales y de corte teórico. También se ha hecho especial énfasis en comprender como la idea de calibración gauge está implícita en los análisis realizados y como por medio de la aplicación de estas ideas podemos hacer generalizaciones para la

deducción de ecuaciones dinámicas de los sistemas físicos de estudio. La relación física-matemática que se ha resaltado a lo largo de este trabajo concluye en este punto de manera crucial, puesto que se vio que las matrices asociadas a grupos de Lie, y que representan Transformaciones Lineales sobre sistemas físicos, tienen una estructura análoga sobre manera, y a pesar de no poseer características del todo iguales, podemos guiarnos por este tipo de isomorfismo en la construcción y análisis de las teorías físicas. La transición que presupone el estudio de la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica, los procesos de aprendizaje que suponen relacionar ideas básicas de una y otra teoría para el estudiante de física se puede ver beneficiado al mostrar este tránsito en términos de estructuras isomorfas. Dicho esto, nos valdremos justamente de ese isomorfismo para completar la última parte del marco teórico en la formalización del operador de paridad en el contexto Cuántico.

Se ha mostrado la estructura de la paridad desde el contexto matemático y vemos que coincide con las matrices de Pauli, las rotaciones de sistemas macroscópicos y las Transformaciones de Paridad en sistemas clásicos. No es de extrañar que logremos encontrar un operador cuya estructura matricial se conserve y cuyo valor propio corresponda al grupo G_p que se estudió en el apartado de grupos finitos y continuos. Suponemos nuevamente una función de onda que representa el estado inicial del sistema de tal forma que al aplicar el operador de Paridad a dicho sistema cuántico obtenemos un sistema que ha modificado exclusivamente el signo de sus coordenadas y está multiplicado por un factor de fase tal que

$$|\varphi_p\rangle = \hat{P}|\varphi_0\rangle$$

Como el sistema se mantiene invariante respecto a esta reflexión (note que la conservación de la paridad si se omiten interacciones débiles, corresponde a una simetría de reflexión) es conveniente expresar la acción del operador de Paridad como el mismo estado producto una fase, luego

$$\hat{P}|\varphi_0\rangle = e^{i\delta}|\varphi_0\rangle$$

Sería útil mostrar que en efecto, la fase es proporcional a los parámetros dados por el operador y que tiene un comportamiento lineal (Feynman & Sands, 1965), para ello aplicamos el operador nuevamente tal que

$$\hat{P}\hat{P}|\varphi_0\rangle = e^{i\delta}e^{i\delta}|\varphi_0\rangle = e^{2i\delta}|\varphi_0\rangle = [e^{i\delta}]^2|\varphi_0\rangle$$

Pero observe que aplicar una vez el operador implica cambiar el signo a sus coordenadas, de manera que aplicarlo dos veces dejará el sistema como se encontraba inicialmente de modo que

$$\hat{P} \hat{P} | \varphi_0 \rangle = [e^{i\delta}]^2 | \varphi_0 \rangle = I | \varphi_0 \rangle$$

De la ecuación anterior se concluye que

$$[e^{i\delta}]^2 = 1$$

Sacamos raíz a ambos miembros de la ecuación y tenemos que

$$[e^{i\delta}] = \sqrt{1} = \pm 1$$

Aquí δ^1 es un ángulo asociado a esa fase, diferente de la representación para una base ortogonal. Si el factor de fase puede tomar únicamente estos dos valores, por la simetría allí implícita, tenemos que

$$\hat{P} | \varphi_0 \rangle = | \varphi_0 \rangle$$

O bien

$$\hat{P} | \varphi_0 \rangle = - | \varphi_0 \rangle$$

Esto coincide con la descripción que se dio del grupo que continuo y finito cuyos únicos valores eran +1 o -1, a saber, G_p . Naturalmente en un sistema cuántico, hay dos posibilidades, obtenemos el mismo estado o menos el mismo estado. Cuando obtenemos el mismo estado decimos que se tiene paridad par. Cuando se obtiene menos el mismo estado, decimos que se tiene paridad impar (Feynman & Sands, 1965).

Hasta el momento los razonamientos tratados por varios autores muestran en general algunas ideas conceptuales trabajadas que merecen especial atención puesto que se encausan en encontrar los valores propios del operador de Paridad. También se ha brindado en desarrollos anteriores, una matriz de Paridad que actuaría sobre sistemas clásicos y que en definitiva, modifica las coordenadas posicionales como exige la definición. Ahora se procede a deducir el operador de Paridad para el caso de la Mecánica Cuántica. Una de las diferencias principales para el operador de Paridad en Mecánica Cuántica, es que dicho operador no puede decirnos con total certidumbre la forma de estar del sistema, si bien, es un hecho que debe invertir las coordenadas espaciales, dicho operador debe ofrecer en general un resultado en términos de una superposición.

Es posible que al invertir las coordenadas, el sistema esté en el mismo estado, o bien, en menos el mismo estado. Pero, ¿cómo saber cuál es el resultado que el sistema tomará? Ello dependerá de diversos factores asociados a la medición y particularmente de cada sistema. Aquí, cabe señalar que esos factores asociados a la medición, no supone estrictamente la medición simultanea de observables, por lo tanto la incertidumbre como señala el principio de Heisenberg, puede ser entendida como *un valor esperado de la*

magnitud, para este caso del operador de Paridad, será el valor esperado de la posición al cabo de muchas mediciones. Cuando se llegue al tema de los factores experimentales, se mostrará la relación que existe entre ellos.

Suponga una partícula en un determinado estado y que al tomar su respectiva función de onda, esta se puede expresar en función de una coordenada espacial, que al cabo de ciertas mediciones permite la máxima probabilidad de encontrarla en la vecindad de un punto a , siendo a la coordenada espacial. En dicho punto el sistema tiene una función de onda particular que asociaremos al estado inicial o estado 1, como se observa en la Figura 23.

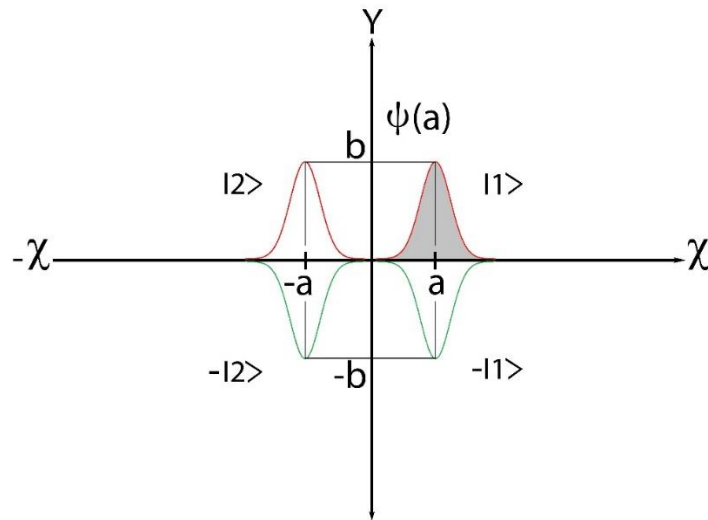


Figura 18. Distribución de Probabilidad para un Fermión antes y después de la Transformación de Paridad.

La imagen anterior muestra cómo se puede asociar a una coordenada espacial un valor general para una función de onda que depende de dicha coordenada. El estado que hemos denominado el estado 2, será el estado en el que se conserva la función de onda, es decir, el sistema físico es el mismo, excepto por su coordenada espacial. Es claro que existe también para ambos casos el estado menos 1 y el estado menos 2, que geoméricamente representarán una reflexión respecto al eje de las x . La Figura 23 muestra dicha reflexión con las convenciones de color. Según los valores propios del operador de paridad y la imagen anterior, se pueden escribir las siguientes relaciones matemáticas sencillas, a saber

$$\hat{P} | 1 \rangle = \begin{cases} + | 2 \rangle \\ - | 2 \rangle \end{cases}$$

Y también para el estado dos

$$\hat{P} | 2 \rangle = \begin{cases} + | 1 \rangle \\ - | 1 \rangle \end{cases}$$

El estado positivo es lo que se denomina paridad par y el negativo paridad impar. Para llegar a la matriz que dé cuenta de la transformación se procede a formalizar un estado y luego el otro. Así, para la matriz de paridad par se tiene que

$$P^+ = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Y siguiendo el mismo razonamiento de las secciones anteriores se tiene que

$$P_{11} = \langle 1|P| 1 \rangle = \langle 1|2 \rangle = 0$$

$$P_{12} = \langle 1|P| 2 \rangle = \langle 1|1 \rangle = 1$$

$$P_{21} = \langle 2|P| 1 \rangle = \langle 2|2 \rangle = 1$$

$$P_{22} = \langle 2|P| 2 \rangle = \langle 2|1 \rangle = 0$$

Luego

$$P^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo el mismo desarrollo pero añadiendo el signo negativo correspondiente se tiene que el operador Paridad impar estará dado por

$$P^- = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, el operador de Paridad debe incluir tanto la cualidad Par como la Impar pues no depende del operador sino del objeto sobre el que actúa. Por tanto, procedemos a combinar el operador de modo que

$$\hat{P} = P^+ P^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Este operador nos permite reflexiones únicamente respecto al origen. Bastaría con dicho operador para el caso de la Mecánica Clásica y de hecho, es la misma matriz que la obtenida anteriormente para el caso tres dimensional. Sin embargo, la Paridad en Mecánica Cuántica nos dice que debemos tener el principio de superposición de presente, y además de esto, se debe obtener antes de la medición el mismo estado y menos el mismo estado, simultáneamente. Dicha interpretación es análoga a la que exige el experimento de la doble rendija cuando se intenta determinar la posición de la partícula, ¿por cuál de las dos rendijas

ingresa? Observe que la Paridad en el contexto clásico se puede interpretar como una transformación de simetría respecto al origen del sistema. Sus coordenadas son reflejadas respecto al origen y ello es lo que genera la inversión espacial.

Sin embargo, la MC exige que se puede obtener, luego de la transformación de Paridad el mismo estado, lo cual obliga a que el aparato matemático tenga algunos términos adicionales que pongan de presente esa posibilidad. Así, de la Figura 25 se puede ver que el mismo estado pero con las coordenadas invertidas se logra haciendo una reflexión respecto al eje Y. Por tanto la matriz que complementa el operador estará dada por

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que a lo largo del documento, siempre se ha buscado la forma de encontrar matrices a partir de hacer el análisis de gráficos y situaciones concretas, es decir, se logra hacer de una manera un poco más sencilla el proceso de formalización al atender a conceptos de simetría y en general a la geometría del problema. Por otro lado, colocando la matriz en términos generales se tiene que

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Donde ε representa un parámetro para analizar sistemas superpuestos. Ahora procedamos analizar un caso muy especial en el que se asume que existe una superposición en los estados que hemos denominado uno y dos y que exhibe la mayor probabilidad de encontrar dicha partícula en el origen del sistema de referencia. Este caso particular se muestra en la siguiente Figura 24.

Este caso se hace muy especial puesto que tiene la mayor probabilidad de encontrarse en una posición igual a cero. Cuando se considera la posición de un sistema en el origen la reflexión respecto al mismo origen carece un poco de sentido, es decir, dicha operación debe mantener invariante al sistema, éste debe encontrarse luego de la reflexión en el origen. Para el caso de la Mecánica Clásica y la matriz definida no existe problema alguno respecto a este caso particular puesto que si el vector de posición es nulo, también lo será después del producto con la matriz de Paridad. El caso de la MC es diferente puesto que si la mayor probabilidad de encontrar el sistema en el origen con determinada forma de estar, es decir, una función de onda específica el operador de paridad deberá conservar la posibilidad de que al aplicar la inversión el sistema se mantenga invariante o cambie a menos el mismo estado. Es decir, en términos geométricos este caso concreto, luego del proceso de medición exige que el sistema esté en alguno de los dos estados, diferente al

caso clásico, y ello equivale a realizar una inversión respecto al eje X. Existe un problema respecto a incluir esta matriz en el operador de Paridad y es que éste es el único caso en el que se debe realizar una reflexión respecto a X (Salvo que exista una superposición más compleja como el estado uno y el estado menos dos) y, además, no se hace un cambio de coordenadas puesto que el elemento vacío al multiplicarse por menos sigue dando el elemento vacío.

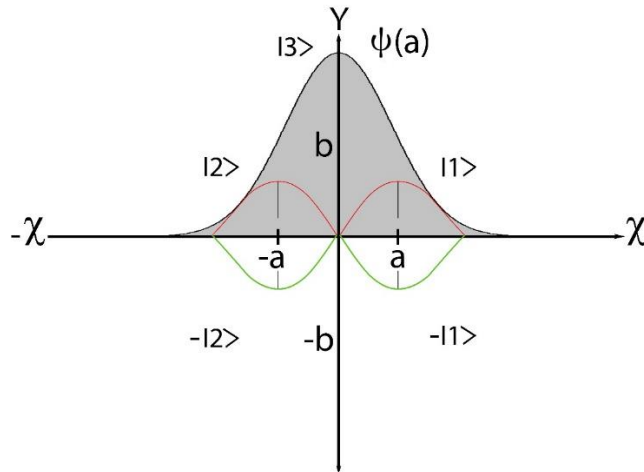


Figura 19. Esquema que representa el caso particular de una superposición con máxima probabilidad cerca del origen.

Para dar solución a dicho inconveniente se debe incluir otro parámetro que permita simplificar el operador de Paridad si se trata de un estado superpuesto y además cuya máxima probabilidad esté en el origen o muy cerca de este. Así el operador de Paridad para el caso de la MC estará dado por

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí el parámetro Δ regula el caso particular que se ha descrito anteriormente y permite reducir el operador a dicho caso para valores de entrada específicos que en última instancia dependerán del caso concreto que se esté analizando en MC. Lo que sigue es verificar la relación entre los parámetros de control que se han establecido, y cuáles son sus posibles valores.

El parámetro Δ puede tomar el valor de la unidad para casos tales que

- Exista superposición de estados en el sistema sobre el cuál se efectuará la operación

- Sistemas cuya máxima probabilidad de posición esté en el origen o un valor muy cercano

Si el parámetro Δ toma este valor (la unidad) el parámetro ε deberá tomar el valor de cero y viceversa.

Si el parámetro ε toma valor de la unidad y Δ valor de cero entonces se debe cumplir que

- Puede existir o no estado de superposición en el sistema sobre el cual se hará la operación
- La máxima probabilidad de encontrar en determinada posición el sistema debe ser diferente del origen o no estar en la vecindad del mismo

Tomando estas consideraciones se verifica la siguiente ecuación que relaciona los parámetros de análisis tal que

$$\varepsilon = (\Delta - 1)^\Delta$$

Se puede ver que si delta es cero, épsilon vale uno y viceversa.

Se puede verificar que para autovectores en esta representación se cumple el objetivo del operador de Paridad que es invertir las coordenadas del sistema, y a su vez, obtener la superposición de los estados o autovalores antes de la medición. Cabe señalar que la descripción en general de los elementos que se mostraron a lo largo de los capítulos precedentes en el área de Mecánica Cuántica son válidos para partículas con Espín un medio. Las partículas de Espín cero no se ven influenciadas por campos magnéticos, luego los razonamientos de deducción y formulación del aparato matemático no son válidos. Las partículas de Espín cero tampoco permiten hacer deducciones importantes para el proceso de formalización a partir de los experimentos de Stern-Gerlach. Por otro lado las partículas de Espín entero tiene otro tipo de formalización a partir de considerar rotaciones que mantienen el sistema invariante para rotaciones de 4π y por lo tanto se les asocia un álgebra distinta de la analizada en este texto, tocante al álgebra de Cuaterniones. Obviando esta diferencia, se comentará más adelante como en el caso de los bosones se produce la ruptura de simetría haciendo una analogía con el caso fermionico, pero sin incurrir en el error de suponer aparatos matriciales iguales para casos distintos. Es necesario hacer precisiones respecto al álgebra de Clifford y de Grassmann para el caso de partículas con espín entero, presupuestos que están fuera del alcance de este documento. Por último, comentar que todo el trabajo expuesto a lo largo de este texto constituye un aporte original y una forma alternativa de enseñanza para abordar la física de una partícula en rotación y

las transformaciones de simetrías concretamente de Paridad, asociadas a un contexto diferente al usualmente establecido, lo cual permite crear un puente entre el conocimiento adquirido por los estudiantes y las nuevas ideas que utilizan los pensadores para la explicación de los fenómenos. En este sentido se procede aplicar la idea gauge para mostrar que la probabilidad de encontrar una partícula en determinadas coordenadas se mantiene invariante bajo una transformación de Paridad.

El operador de Paridad y la Idea Gauge

Se supone que el estado inicial es el que se muestra en la Figura 25. Se procede a señalar las condiciones iniciales, que ciertamente al ser $\varepsilon = 1$ y $\Delta = 0$, se concluye que el operador de Paridad para un estado no superpuesto y con su máxima amplitud lejos del origen estará dado por

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordando que el estado uno está dado en general por el doblete

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donde a es una coordenada espacial unidireccional cualquiera y $b = \varphi(a)$ la función de onda que caracteriza el estado del sistema en función de la coordenada espacial. Para introducir una calibración gauge debemos sumar una constante a la coordenada espacial de modo que

$$|1\rangle^* = \begin{pmatrix} a + c \\ \varphi(a + c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \varphi(f) \end{pmatrix}$$

La letra f de la ecuación anterior representa el nuevo punto donde existirá la mayor probabilidad de encontrar la partícula y el ejercicio de calibración también exige que $\varphi(f) = b = \varphi(a)$. Por lo tanto, el nuevo autovector calibrado estará dado por

$$|1\rangle^* = \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix}$$

Una vez obtenido el nuevo autovector calibrado aplicamos el operador de paridad, entonces

$$\hat{P} |1\rangle^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix}$$

Luego

$$\hat{P} |1\rangle^* = \begin{pmatrix} -f \\ -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f \\ b \end{pmatrix}$$

Este proceso se puede observar en la Figura 25

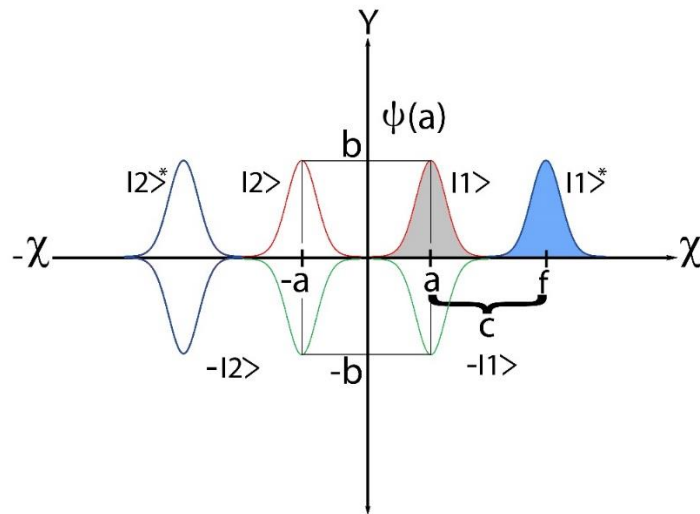


Figura 20. Graficas desplazadas c unidades para realizar la calibración gauge.

Como se puede observar del esquema anterior, la transformación de simetría de reflexión respecto al origen como respecto al eje de las ordenadas se mantiene y se aprecia que el único cambio considerable es el aumento de la distancia de separación entre las distribuciones, consecuencia natural de agregar una constante de calibración. Si usted aumenta la distancia de un objeto frente a un espejo, lo natural será que la distancia de la imagen aumente también en la misma proporción. Sin embargo, la idea de calibración que se ha desarrollado a lo largo de este trabajo, no solamente relaciona una transformación geométrica, en efecto, sino que también exige evidenciar algo que se mantenga invariante. ¿Qué es lo que se mantiene invariante bajo esta transformación? Sin duda alguna, para realizar transformaciones de simetría en este contexto es necesario abordar la idea de distribución de probabilidad. Como se ha expuesto en imágenes anteriores, la función que da cuenta de la probabilidad de encontrar un sistema atómico en determinado lugar estará dado por la función normal cuya forma en este caso será

$$\varphi(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde σ y μ representan parámetros únicos de la distribución estadística y no debe confundirse con las matrices de Pauli o algún otro subíndice trabajado anteriormente. En este caso σ es la desviación típica y μ la media. Es claro que estos parámetros tienen que ver con la toma de datos de fenómenos aleatorios, como es en este caso, las diversas medidas sobre la posición de la partícula. Si se añade una constante de calibración a la coordenada general se tiene que

$$\varphi(a + c) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu+c)^2}{2\sigma^2}}$$

Con esto, garantizamos el nuevo punto de calibración en las coordenadas y como se muestra en la Figura 25, un desplazamiento hacia izquierda o derecha dependiendo de si la constante de calibración es negativa o positiva. Naturalmente, al desplazar la gráfica en c unidades es claro que el área bajo la curva seguirá siendo la misma por lo que es invariante la probabilidad de encontrar un sistema atómico en determinadas coordenadas si se hace una calibración gauge. En resumen, la distribución de probabilidad se mantiene invariante bajo calibraciones gauge.

Sin embargo, esta invariancia no es la que nos interesa del todo, puesto que la probabilidad se garantiza invariante de antemano para la transformación de Paridad. La interpretación de lo que se mantiene invariante deberá ir más allá, y no se debe confundir lo que se hace invariante con lo que ya era invariante antes de la calibración gauge. Observe que cuando se suma la constante y se desplaza la gráfica de distribución normal, lo que sigue siendo lo mismo es el estado físico del sistema caracterizado por la función de onda, es decir, así se varíe la variable independiente, sigue siendo igual la variable dependiente, no cambia. La gráfica sufre desplazamientos horizontales gracias a la calibración gauge y una vez realizados dichos desplazamientos, es claro que el estado físico representado en el eje de las ordenadas sigue siendo el mismo, luego la función de onda se mantiene invariante bajo calibraciones gauge. Cuando se aplica el operador de paridad en este contexto, claramente se mantiene la posibilidad de obtener el mismo estado o menos el mismo estado, lo cual exige la interpretación sobre la inversión espacial en MC, es decir el resultado que ofrece aplicar el operador de Paridad en un autovector seguirá siendo el mismo (es invariante) aún si previamente realizamos una calibración gauge de coordenadas. Esto se puede resumir en la expresión

$$\varphi(f) = b = \varphi(a)$$

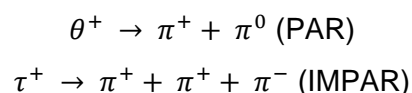
Por último se pretende enunciar una conclusión importante que se puede hacer únicamente luego de hacer el análisis que se ha llevado a cabo a lo largo de este texto. Se hizo en el apartado de teoría de grupos la distinción entre el operador de Rotación, de Paridad y el que denominamos Operador de Reflexión. Llegamos a la conclusión, que también se verifico en el apartado sobre la descripción física, que los operadores se distinguen por diversas características, entre ellas la *continuidad*. Asociamos a cada simetría una descripción física y matemática, donde se convino que la simetría de reflexión

(geométricamente hablando) obedece a un fenómeno de Paridad. Así mismo la simetría de rotación la asociamos a magnitudes como el momento angular, el Espín para partículas de un medio en el caso cuántico, y el momento angular orbital. Se comentó que las transformaciones de Paridad y de reflexión eran transformaciones de carácter discreto tanto para el caso clásico como para el cuántico. Las transformaciones de rotación por el contrario, las asumimos continuas en el caso clásico y, naturalmente, discretas en el caso cuántico. Haciendo esta distinción nuevamente, y teniendo en cuenta la estructura matricial de los elementos asociados al grupo lineal general se puede hacer una generalización que incorpore la conclusión de este apartado. Para ver el teorema DE IV asociado a este apartado revise la sección de teoremas en el anexo.

Ruptura de simetría y Violación de Paridad en Bosones

La ruptura de simetría abarca un espectro amplio y una multitud de casos que podrían comentarse. Sin embargo, se centra de manera inmediata la ruptura de simetría en el contexto de MC a propósito de la Paridad. En el apartado anterior se comentó que efectivamente la calibración gauge mantiene invariante el estado físico del sistema, sin embargo, a lo largo de este trabajo se ha sustentado la idea de que lo invariante ante cualquier transformación o calibración, supone simetría física. ¿Quiere decir esto que la transformación de Paridad en MC es un proceso siempre simétrico? Para responder a ello se debe indagar en las interacciones nucleares débiles para el caso excepcional de algunos bosones, partículas que no se comentaron a lo largo del texto y tampoco se desarrolló un modelo matemático que da cuenta de la rotación, reflexión e inversión espacial, pero que constituyen un excelente ejemplo para enlazar la idea de simetría e invariancia en la mecánica cuántica.

A lo largo del siglo XX se realizaron diferentes investigaciones sobre el decaimiento de partículas con el fin de seguir realizando aportaciones a los modelos teóricos que por entonces estaban en auge. Los experimentos en colisionadores de partículas pusieron de manifiesto la famosa paradoja Tauón-Tetha. La paradoja consiste en que se tienen en principio y de manera aparente, dos partículas con características similares, pero que luego del decaimiento radiactivo producían energías diferentes reflejadas en cantidad que se producían luego de la colisión. Expresado en términos de reacción (Griffiths, 1987) tenemos que



Es claro que en estas reacciones la conservación de la carga se mantiene. Pero si dichas partículas tenían el mismo tiempo de vida y la misma masa, ¿cuál es el motivo de que el número de partículas resultantes en algunos decaimientos sea diferente? En el siglo XX una de los principios irrefutables en la física era la conservación de magnitudes, y esta perspectiva gobernaba el razonamiento de los científicos de la época. Si algo debía ser sacrificado en la teoría, todo podía ser menos el principio de conservación. Por ende la paradoja echaba sus raíces en este prejuicio y alimentaba el desconcierto de los físicos puesto que para la época la Paridad no podía dejar de conservarse. Luego de los experimentos que se realizaron alrededor de esto y se comprendió que en algunos procesos nucleares las partículas mostraban una dirección privilegiada, se pensó en el cambio de supuestos que permitieran poner en armonía los experimentos con la teoría. Entonces, si la Paridad se asumía como magnitud no conservativa a la luz de los nuevos experimentos, se podía concluir que dichas partículas no eran diferentes sino que se trataba de la misma partícula pero que en algunas ocasiones decaía de cierta manera y en otro porcentaje de los experimentos decaía de otra manera, es decir, existía cierta probabilidad de que luego del proceso de decaimiento la partícula tuviese paridad par y en otros casos probabilidad de ser impar. Ésta perspectiva fue adoptada posteriormente y se decidió llamar a la partícula como Kaón y asumir que es la misma partícula pero que al no existir conservación de la Paridad puede ser o bien par o bien impar dependiendo de las condiciones iniciales y de su medición. Esta interpretación se puede evidenciar en la gráfica de la Figura 26 donde el autovector $|1\rangle$ representa el estado inicial del Mesón K y el desarrollo anterior a modo de analogía permite interpretar la Paridad para el caso de Bosones puesto que puede tener paridad Par y en ese caso decaer en dos Piones o también tener cierta probabilidad de que posterior al decaimiento radiactivo obtener Paridad impar y decaer en tres Piones. Para hacer un poco más visible lo anterior observe la Figura 26 donde se muestra la representación posible para la Paridad en el caso del Bosón K.

Entonces, así mismo como en algunos procesos se mostró anteriormente que la conservación supone simetría y la simetría invariancia, ahora el negativo también será cierto y se dice que la no conservación (comprobada experimentalmente) supone una ruptura de simetría y la ruptura de simetría supone la no invariancia de cantidades relacionadas. La falta de simetría en el operador de paridad puede evidenciarse a lo largo de las Figuras 24, 25 y 26 puesto que se parte de una gráfica (estado uno) que resulta luego de la inversión espacial en dos gráficas que representan un estado superpuesto. Si se toma

el eje de las ordenadas como eje de reflexión es evidente la carencia de simetría que supone el operador de Paridad.

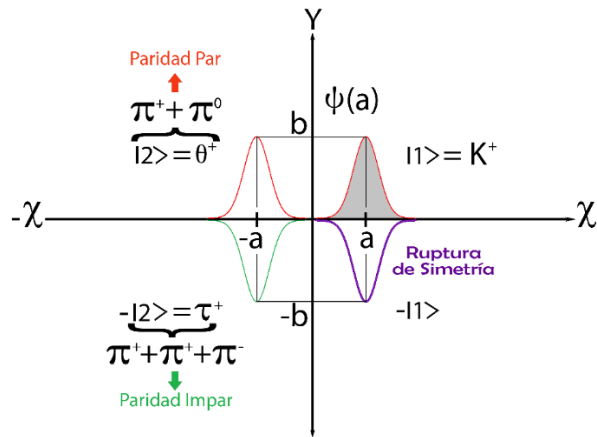


Figura 21. Analogía de transformaciones de Paridad para el caso del decaimiento radioactivo del Bosón K, que ejemplifica la paradoja Tauón-Tetha.

En este punto el lector se estará cuestionando sobre si finalmente las operaciones de Paridad en MC son o no simétricas. Son simétricas para el caso de interacciones que no sean débiles y asimétricas para interacciones que sí lo sean. Si no hay de por medio un proceso de decaimiento el razonamiento se puede pensar como en el caso de los fermiones, como una mera inversión de coordenadas. La relación que se intenta con la Paridad y la física de partículas es de interés en procesos de enseñanza para docentes en formación puesto que la idea de simetría permite enlazar a partir de un desarrollo sencillo sobre la idea de Paridad, algunos conceptos un poco más avanzados como el decaimiento radiactivo. Por último para hacer la conjugación de lo que es simétrico y lo que no, se debe pensar en cómo se evidencia la simetría o la no simetría, así

“La simetría se relaciona con la invariancia en que las transformaciones de simetría dejan el sistema sin cambios. La transformación es una operación sobre el sistema que no tiene influencia y no hace diferencia, como la reflexión de espejo o la rotación de sesenta grados dejan la apariencia de un copo de nieve sin modificaciones. La simetría parece entonces por definición implicar un tipo de inobservable. Si tú dejas la habitación y yo roto el copo de nieve sesenta grados y entonces te invite a volver adentro, tú no estarás presto a decir si la transformación tuvo lugar o no. La operación de simetría es indetectable”

(Kosso, 2000)

Lo anterior pone de manifiesto que para reconocer una simetría es necesario romper esa simetría, puesto que de lo contrario nos quedaremos en observar lo que aparentemente siempre es lo mismo y sin modificaciones. Pero uno de los pilares de la física y en general

de las ciencias es justamente percibir un desequilibrio que permita evidenciar un cambio y a partir de ello hacer las conjeturas e hipótesis pertinentes. Pero si nada cambia sería muy difícil pensar en una ciencia que da cuenta de la dinámica cuando el universo se supone estático e inmutable. En conclusión, para evidenciar la simetría en cualquier tipo de representación se deberá buscar romper con dicha simetría y hacer que nuestros modelos matemáticos la restauren. El operador de paridad al ser uno de los más particulares y especiales en las ciencias, sugiero un proceso inverso, partir de razonamientos que en principio aguardaban simetría, para luego darse cuenta de que en los procesos de inversión espacial lo imperante es la asimetría y que los modelos matemáticos que la definen deben conservar la asimetría y la no invariancia. Pareciera una contradicción pero así lo ha planteado el desarrollo conceptual a lo largo de casi un siglo de trabajo en el tema, y más que una contradicción la idea de Paridad es un oxímoron, puesto que dicho operador de mantener invariante la no invariancia. Otra conclusión importante de este trabajo de investigación es establecer no solo una ruta de aprendizaje sino también una ruta de investigación. Por tal motivo he dejado planteado a lo largo del texto distintas cuestiones que merecen especial atención como el caso de la teoría de grupos y en el área de la enseñanza de la física. La cuestión a la que me refiero es que se ha comentado que la ruptura de simetría, particularmente de la Paridad en MC, tiene que ver con el hecho de la medición y las condiciones iniciales. De los apartados anteriores se puede recordar que un sistema físico tomará el valor de más o menos ese estado luego de la transformación P, y ello depende de la cantidad de mediciones que se hagan y en concreto del proceso de medición. Por tanto, para comprobar la existencia de la simetría se debe realizar alguna acción (medición) sobre el sistema y romper con dicha simetría, lo que conlleva a causar asimetría y esto implica y explica que el principio de incertidumbre de Heisenberg esté formulado en términos de una desigualdad (asimetría matemática). Dichas disquisiciones escapan del alcance de este texto y por tanto merecen todo un análisis independiente.

Conclusiones

- Se obtuvo la forma matricial de los operadores de Paridad, Rotación y Reflexión en paralelo para la MC y la Mecánica Clásica que permitió establecer una alternativa conceptual y de enseñanza-aprendizaje a través del concepto de simetría y la idea gauge.
- Se evidenció por medio de distintas situaciones el isomorfismo matemático que comparten distintos operadores de la física y por medio de esta idea se lograron llevar a cabo procesos de formalización alternativos para el caso de la Mecánica Cuántica y su relación con la teoría de Grupos.
- Por medio de la teoría de grupos se logró resaltar la idea de simetría y calibración gauge que permitió contar diversas herramientas a la hora construir modelos matemáticos alternativos que dieran cuenta de fenómenos físicos concretos.
- Se concluye de manera inequívoca que la aplicación de operadores que representan transformaciones continuas o discretas, poseen una estructura algebraica análoga a los grupos ortogonales y unitarios, mostrando una vía útil de trabajo tanto en el campo de la física como en el de la matemática. Además de ello, la comprensión de este punto puede ser un generador de conceptos básicos que permitan el tránsito natural a temas de mayor abstracción.
- Se evidenció que hay una vía de trabajo alterna que permite construir operadores de la Mecánica en general a partir del concepto de simetría obteniendo los mismos resultados que en el caso tradicional sin la necesidad de acudir a una componente axiomática fuerte.
- Se llegó a la conclusión de que hay una profunda relación entre los operadores reflexión, paridad y rotación, atendiendo a su estructura de grupo, la geometría del sistema, la conservación de observables y la calibración de magnitudes para fenómenos que no tienen en cuenta desintegraciones electrodébiles.
- La Paridad no es lo mismo que una rotación de 180° , uno de los mayores problemas conceptuales que se presenta a la hora de trabajar procesos de formalización.
- Existe un isomorfismo entre el grupo especial ortogonal en tres dimensiones y el grupo especial unitario en dos dimensiones para el caso de sistemas rotacionales.

- Se pueden deducir las propiedades de sistemas físicos, ecuaciones dinámicas y la matemática de los fenómenos atendiendo a ideas novedosas de simetría y conservación.
- Existen cuestiones que no han sido resueltas del todo y por lo tanto, se mostró a partir de un nuevo camino las distintas posibilidades que aparecen a la hora de hacer otro tipo de análisis y cuán fructífera puede ser considerada esta ruta de aprendizaje para la enseñanza de la Mecánica Cuántica.

Anexos

Anexo 1. Teoría de Grupos

Parte del esquema matemático que exige la Mecánica Cuántica está estrechamente relacionado con la teoría de grupos. La teoría de grupos surge como la necesidad de categorizar, axiomatizar y precisar muchas de las definiciones matemáticas trabajadas hasta finales del siglo XIX y en las cuales se fundamentan todos los trabajos matemáticos previos. Familiarizarnos con el álgebra abstracta nos brindará diferentes herramientas para el desarrollo de las ideas que veremos más adelante a propósito de la Física Cuántica.

Cabe resaltar que el objetivo de este proyecto no es hacer un escrito sobre teoría de grupos y su aplicación a la física-matemática. Por este motivo, se trabajarán los aspectos más importantes de la teoría y se revisará cuál es la relación con MC y el concepto de simetría. Para comenzar con los rudimentos, hablaremos sobre la definición de *grupo*.

Sea un grupo G una colección de objetos tales que $G \times G \rightarrow G$ llamada producto y que verifica las siguientes propiedades de grupo (Cordero, 2007):

- **Producto:** Para todo elemento a, b que pertenece a G , existe un elemento ab que también pertenece a G .
- **El producto es asociativo:** se verifica que $a(bc) = (ab)c$
- Existe un **elemento neutro**, denotado con e , tal que $ae = ea = a$ y que se le llama unidad
- A todo elemento a de G le está asociado otro elemento de G , llamado **el inverso multiplicativo** de a , a^{-1} y se cumple que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Recordemos la nomenclatura para el caso de los grupos. Un Grupo G se puede expresar principalmente por extensión o por comprensión dependiendo de sus características. Veamos un ejemplo de esto.

Definición de grupo por extensión:

Si queremos llamar el grupo G de los números dígitos tenemos que:

Sea $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Observe que la nomenclatura por extensión supone llamar al grupo, generalmente por una letra mayúscula y se iguala entre un corchete a los elementos concisos del grupo. Esto se vuelve un tanto problemático cuando el grupo es muy grande y se requieren especificar ciertas cualidades.

Definición de grupo por comprensión:

Para ejemplificar este caso de nomenclatura suponga que queremos nombrar el grupo de todos los números pares. Esta dificultad subyace en el hecho de no poder escribir todos los números. Sin embargo, también se podría escribir el inicio del conjunto e indicar con puntos suspensivos que se extiende de forma infinita, cosa que no es del todo formal. Por tal motivo, lo escribimos como sigue:

Sea $G = \{x|x \text{ son los números pares de la forma } 2n \text{ donde } n \in \mathbb{N}\}$

De esta forma se especifica la característica que se desea y se forma el grupo de tal manera que sea claro cuál es el dominio del mismo. Por otro lado, todos los grupos se pueden separar en tres tipos de grupos: *Grupos finitos*, *Grupos infinitos numerables* y *los grupos infinitos no numerables* (Cordero, 2007).

Para ejemplificar cómo funcionan dichas condiciones de grupo mostraremos tres ejemplos que corresponden a cada categoría y veremos qué relación tienen con la física que es de nuestro interés. Uno de los principales grupos que permite hacer una aproximación al concepto de simetría son los grupos de Lie. En lo sucesivo se detallarán los aspectos más relevantes de dichos grupos. Por ahora, revisemos uno de los grupos que nos interesan para categorizar y relacionar con el fenómeno de rotación.

Grupo Infinito Contable

A finales del siglo XIX una de los problemas más acuciantes heredado por lo escuela griega y en general por diversos matemáticos del mundo, era tratar de definir el infinito y de abogar por una estructura lógica que permitiera trabajar con dicho concepto. Un ejemplo bastante

conocido es la paradoja de Aquiles estudiada por los antiguos y postulada por Zenón de Elea.

Muchos pensadores como Bolzano y Galileo intentaron resolver el problema del infinito llegando a conclusiones no del todo satisfactorias. Por ejemplo, Galileo analizó la posibilidad de establecer una relación biunívoca entre el total de un conjunto y uno de sus subconjuntos. Galileo se dio cuenta de que el número de cuadrados perfectos no era menor que el número de enteros naturales (Ruíz, 2003). Por este motivo Galileo daba como conclusión que los conjuntos infinitos no podían ser mayores, menores o iguales a otro conjunto de carácter infinito como es el caso de los números naturales. El ejemplo que se ha comentado anteriormente, sobre la cardinalidad del conjunto de números cuadrados, fue un antecedente de lo que usualmente se conoce como la paradoja de Galileo. Se ha dicho que Galileo sostenía la idea de que un conjunto de números enteros no podía ser mayor que la del conjunto de números cuadrados (números enteros con raíz cuadrada exacta), y esto desafiaba la convención estipulada hasta la fecha sobre la premisa de que el todo es mayor que la parte. Si los números cuadrados eran parte del conjunto de enteros, ¿por qué considerar igual o mayor el conjunto de números cuadrados? No fue sino hasta entrado el siglo XIX cuando diversos pensadores lograron dilucidar la idea de mayor, menor o igual, en términos de conjuntos infinitos, pues ¿Cuántos números cuadrados podemos encontrar?

Por otro lado, Bolzano introdujo una perspectiva conjuntista como colección de objetos. Una de las principales diferencias entre ésta perspectiva y la actual de perspectiva de grupo, estriba en que el grupo requiere definir una estructura interna que satisface los “axiomas” de grupo, a diferencia del conjunto, cuya estructura interna está dada únicamente por la *colección de objetos*. Bolzano se dio cuenta de que la característica de poner en correspondencia biunívoca un conjunto, con uno de los subconjuntos propios era la clave para su consideración como conjunto infinito (Ruíz, 2003).

En este sentido se orientó el problema del infinito para Cantor, quién tiempo después se percató de que no todos estos conjuntos infinitos eran del mismo tamaño y que por ende no solo se les podía hacer corresponder una cardinalidad como se vio con Bolzano, sino que también podrían dotarse de ordinalidad, es decir se podían pensar como conjuntos bien ordenados y clasificarlos de acuerdo a un orden específico definido previamente. Estas dos características desarrolladas por Bolzano y Cantor sugerían crear una aritmética para el trato del infinito, trabajo el cuál concluye en los números transfinitos.

Una vez comprendido el problema, veamos la situación que dio una solución parcial (digo parcial puesto que existen algunos problemas aún vigentes a este tópicó expresado en términos de, por ejemplo, la paradoja de Russell) y asignemos a un grupo infinito numerable la siguiente definición:

Un conjunto A_R es considerado como *contable* si existe una función inyectiva f desde el conjunto de los números naturales (\mathbb{N}) a A_R , es decir, si a cada valor de un elemento n de \mathbb{N} corresponde un elemento a_r de A_R . Matemáticamente podemos expresar esta definición como:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow A_R$$

Ahora considere un conjunto tal que

$A_R = \{x | x \text{ son los valores posibles para una rotación equivalente } 180^\circ\}$. Observe que se puede obtener en general un valor de rotación de πn que sería el intervalo que corresponde a un ciclo de media circunferencia, si quisiéramos representar éste conjunto geoméricamente, tendremos implícita la idea de un conjunto cíclico pues éste proceso se puede realizar indefinidamente dando valores a n . Por otro lado, se hace evidente que podemos acuñar una correspondencia entre A_R y \mathbb{N} , por medio de n , como es necesario según los trabajos de Cantor y Bolzano.

No se relaciona el conjunto de los números reales puesto que una transformación digamos de un valor de Euler grados no tendría sentido en éste caso. Además hablar de un grado indefinido no tiene sentido para efectos físicos. También se limita la idea de continuidad pues a pesar de que un posible valor de un elemento de A_R pueda ser dos o tres grados o algunos valores entre éstos, nunca consideraremos Euler o el número de oro por ejemplo. Se puede afirmar entonces, bajo estos presupuestos, que dichos conjuntos tienen cardinalidad congruente y por tal motivo, A_R es infinito numerable. Recuerde que en la aritmética de los infinitos los enteros y racionales tienen la misma cardinalidad y por ello, son congruentes. Se podría decir que si el grupo representa valores intermedios no conserva continuidad en un proceso físico, pero clásicamente un sistema no puede pasar de un grado cero a 180° sin barrer los ángulos intermedios. Aquí es donde cobra sentido la idea de continuidad para ésta transformación en particular, a diferencia de la Mecánica Cuántica como se verá más adelante.

Demostración

Sea $A_R = \{\pi\}$ donde π se entiende como un intervalo de 180° y $N = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots n\}$ podemos establecer una relación dando valores a n , se tiene entonces que:

N	A_R
1	π
2	2π
3	3π
4	4π
5	5π
n	$n\pi$

Así, comprobamos que $f : N \rightarrow A_R$, o $f : n \rightarrow n a_r$, donde a_r es cualquier valor de A_R y por ende A_R es un conjunto infinito contable. Este grupo también se conoce como grupo especial ortogonal o SO (2) (por sus siglas en inglés special orthogonal) como se verá más adelante y representa las rotaciones de un sistema en el plano.

Grupo Finito

Para esta sección basta demostrar que un grupo particular cumple con los axiomas de grupo y en su definición se sobreentiende que un grupo finito es aquel que cuenta con un número limitado de elementos que lo componen. Veamos un grupo finito particular de nuestro interés que será definido por extensión como sigue:

Sea $G_p = \{1, -1\}$ y veamos si cumple los axiomas de grupo definidos anteriormente. La primera propiedad a verificar es la del *producto*. El producto de estos dos elementos debe ser un elemento que también pertenece al grupo. Como vemos por simple inspección el producto de 1 por -1 es nuevamente -1, que hace parte del grupo. El segundo "axioma" a verificar es la propiedad asociativa para nuestro grupo. Supongamos un tercer elemento que puede ser el número **1** en negrita, dando a entender que es un elemento de referencia (bien podría ser una constante entera de cualquier valor) para demostrar la segunda propiedad. Observe que:

$$1 \cdot (-1 \cdot \mathbf{1}) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Ahora operemos haciendo otra asociación, para ello se tiene que:

$$(1 \cdot (-1)) \cdot \mathbf{1} = -1 \cdot (\mathbf{1}) = -1$$

Como -1 equivale a sí mismo de aquí vemos que se verifica la *propiedad asociativa* para nuestro grupo. El tercer "axioma" que se exige es el de un elemento neutro o identidad, que

al operar con algún otro elemento se obtiene el mismo elemento que no es el de identidad. Por simple inspección vemos que al multiplicar -1 por el elemento neutro (1) se obtiene igualmente -1. Sin embargo, se dará una demostración de la existencia única de este elemento para dar una luz sobre lo que no es obvio en este tema, pues multiplicar por uno es la parte sencilla, pero ¿por qué el axioma nos exige tener dentro del grupo un elemento neutro y solo uno?

Demostración

- El axioma nos dice que existe un **elemento neutro**, denotado con e , tal que $ae = ea = a$ y que se le llama unidad.

Supongamos que existen dos elementos neutros denotados por e_1 y e_2 . Decimos ahora según el axioma que $e_1 = a$ y $e_2 = e$. Así tenemos en nuestro axioma que:

$$e_1 \cdot e_2 = e_1$$

$$e_2 \cdot e_1 = e_1$$

Ahora si invertimos los papeles para a y e tendremos el siguiente par de ecuaciones:

$$e'_2 \cdot e'_1 = e_2$$

$$e'_1 \cdot e'_2 = e_2$$

Se ha colocado la marca prima en el segundo par de ecuaciones para hacer más llamativo el hecho de que se han invertido los papeles para a y e . De aquí que:

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e'_2 \cdot e'_1 = e'_1 \cdot e'_2$$

Luego $e_2 = e_1$. Con esto verificamos que cualquier otro elemento neutro es idéntico a sí mismo y por ende solo existe uno y solo uno elemento de esta naturaleza y además, debe estar presente en la construcción de cada grupo. Por último verificamos el recíproco de nuestros elementos presentes y vemos por simple inspección que también se verifica ésta propiedad. Así, tenemos que el grupo G_p es en efecto un grupo y verifica todas las propiedades de éstos. Ahora la pregunta que nos atañe, ¿por qué se ha decidido trabajar con este grupo? Pues bien, la respuesta a esta pregunta es simple. Este grupo es el grupo que reúne los posibles elementos para una transformación de paridad, es decir, un sistema puede tomar valores de coordenadas cualesquiera multiplicada por más o menos 1. Tanto en la transformación clásica como en la cuántica verificamos que la transformación de

paridad es discreta y por lo tanto aplica para la misma un grupo finito como el que se ha mostrado en esta sección.

Grupo Infinito no numerable

En la explicación anterior se comentó que un grupo finito e infinito contable, siempre tiene elementos finitos, y se puede encontrar una relación entre el grupo y el conjunto de los números naturales, respectivamente. De esta forma encontramos un poco evidente que el grupo infinito no numerable *será aquel que tenga infinitos elementos* y al cual no le podamos asignar una relación inyectiva con el conjunto de los números naturales.

Lo anterior nos lleva a tratar de hacer una sutil distinción con los denominados grupos cíclicos. En su gran mayoría, los grupos infinitos son cíclicos, es decir, se puede obtener el grupo original a partir de los generadores de grupo que es un subgrupo y se forma un ciclo en dicha obtención de valores.

Sin embargo, no todos los grupos cíclicos son infinitos, puesto que existen conjuntos finitos que cumplen con las propiedades asignadas para tal efecto. Veremos estas propiedades en el siguiente apartado cuando se expliquen subgrupos y generadores. Un ejemplo de un grupo finito y cíclico sería la rotación de un hexágono, donde cada vértice representa un punto específico del plano. El grupo de los puntos en el plano donde queda cada vértice es un grupo finito, ciertamente tenemos seis elementos y además el elemento de orden $n = 0$ debe ser la identidad. Finalmente se verifica que al iniciar las rotaciones desde el "vértice identidad", al cabo de finitas rotaciones el hexágono volverá a su posición original, es decir, se mantendrá invariante y comenzará un nuevo ciclo.

Por otro lado, el grupo infinito no numerable lo podemos ejemplificar con el conjunto de Cantor. Se dará una demostración geométrica y otra analítica para explicar este tipo de grupos. El conjunto de Cantor se puede definir como:

$$C_g = \{x | x \text{ son los números en el intervalo } [0, 1]\}$$

En este apartado mostraremos por qué este grupo es infinito no numerable. Para ello comencemos por hacer una pequeña demostración de tipo geométrico. La **Figura 3** resume la construcción que se tiene en cuenta para realizar dicha demostración. Observe que en esta distribución existen unos números que son de nuestro interés. Por ejemplo para la segunda partición tenemos las características tal que 1) existen 2^n intervalos y 2) la longitud de estos intervalos es 3^{-n} . Así obtenemos el nuevo grupo que estará dado por:



GRUPO DE CANTOR

Figura 22. Grupo de Cantor. Muestra las infinitas particiones que se puede realizar en el intervalo 0 a 1. Imagen basada en (Wikipedia, 2019).

$$\begin{aligned}
 E_0 &= (0, 1) \\
 E_1 &= \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \\
 E_2 &= \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right) \cup \left(\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right) \cup \left(\frac{8}{9}, 1\right)
 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Estos números por definición del grupo (intervalo de cero a uno) corresponden al cuerpo de los números Reales no negativos. Tomaremos los números del intervalo número 2. Y bajo un *reductio ad absurdum* demostraremos que este conjunto es no numerable. Según las equivalencias de los fraccionarios tenemos que:

Fracción	Decimal
$1 \div 9$	0,11111112
$2 \div 9$	0,22222223
$3 \div 9$	0,33333334
$6 \div 9$	0,66666667
$7 \div 9$	0,77777778
$8 \div 9$	0,88888889

Tabla 1. Tabla que resume el proceso de fraccionamiento y su correspondiente decimal

Se puede utilizar una tabla que contenga mayor cantidad de valores, es decir de particiones que están representadas por n en este ejemplo y aun así, conseguir el mismo resultado. Ahora se ordenan los pasos del razonamiento para hacer evidente la demostración.

- Partimos de que el grupo C_g es infinito numerable.
- Como C_g es numerable, podemos realizar una lista u ordenación para ello. Esta lista es la representada por la **Tabla 1**.
- Se sabe que los números comprendidos en este intervalo pueden ser detallados por su homólogo decimal. Esta información también se anexa en la **Tabla 1**.
- Trazamos una diagonal desde la primera fila comenzando por la primera cifra después del cero. Esta información se anexa en la **Tabla 2**.

Decimal
0,11111112
0,22222223
0,33333334
0,66666667
0,77777778
0,88888889

Tabla 2. Tabla que muestra el ordenamiento de los números obtenidos

A estos números que se han señalado con rojo le vamos a sumar uno y la secuencia del resultado luego del cero será el número x que buscamos para verificar la relación entre nuestra lista y el intervalo que se ha considerado. Así, se cumple que:

$$x = 0,234789$$

Este número x hace parte de nuestro intervalo pero no está en nuestra lista. ¿Podremos encontrarlo dentro de las particiones que hemos hecho? En efecto, se verifica que para la segunda partición x debe estar contenido en el segundo intervalo. Luego repugna lógicamente que un número deba estar en un intervalo y que la descripción de nuestro intervalo (o sea la lista) no lo contenga, siendo lo anterior una contradicción. De aquí suponemos que la premisa inicial de que nuestro grupo es numerable carece de valor. Con esto se ha demostrado que C_g es infinito no contable. Cualquier persona estaría tentado a refutar el argumento de que hay una contradicción al no estar x en nuestra lista. Sin

embargo, cuando vamos acercándonos a una cantidad de números mayor, vemos que siguen apareciendo números que se obtienen de los recién añadidos y por ende tampoco estarán en nuestra lista. Siempre habrá un número que añadir, papel representado en este apartado por la variable x . Así demostramos que nuestro grupo es infinito y además no numerable (Galavíz Casas, 1996).

Subgrupos y generadores de un grupo

Hasta el momento se ha considerado los conjuntos desde categorías como cardinalidad y ordinalidad. Se ha dicho que si un conjunto distinto del vacío se relaciona con una operación bien definida, obtenemos un grupo. También se ha dicho que para considerar a un grupo en sí, se deben cumplir algunos criterios que hemos denominado *axiomas de grupo*.

Ahora se comentarán algunos aspectos de importancia para la teoría de grupos como lo son los subgrupos y los generadores. Se mostrará su relación con las transformaciones físicas estudiadas en capítulos anteriores, particularmente con una definición un poco más amplia de los números pares a propósito de la paridad y la relación con la idea de simetría.

Subgrupo

Al igual que en muchos casos el nombre que se ha dado para un concepto suele estar relacionado con su naturaleza. Esto permite hacer uso de la intuición y definir el subconjunto como una parte o parte de la extensión de un grupo, sin embargo se dará una definición más formal siendo un subgrupo:

Sea un grupo \mathbf{G} con un subgrupo \mathbf{H} si sus elementos forman un grupo con la misma ley de multiplicación o composición que \mathbf{G} , y se denota $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$. Los que denominamos *subgrupos triviales* de un grupo siempre serán el mismo grupo y el conjunto formado por el elemento identidad. Si \mathbf{H} es un subgrupo no trivial de \mathbf{G} se dice que el *subgrupo es propio* y se denota por $\mathbf{H} < \mathbf{G}$ (Cordero, 2007).

Ahora fijemos nuestra atención en lo que se llama un *subgrupo invariante o normal*. Se denomina un subgrupo de este tipo si se cumple que:

$$\forall h \text{ de un subgrupo } H \text{ y un } g \text{ de un grupo } G \text{ se verifica } ghg^{-1} \in H$$

Esta definición de subgrupo invariante dará una luz sobre lo que entendemos por paridad en el contexto matemático y su estructura, también brindará en capítulos posteriores una idea mucho más completa de dicho concepto en el campo de la física cuando se introduzca

la idea de invariancia. Básicamente el subgrupo invariante mantiene los elementos de sí mismo inalterados y dentro de sí a pesar de cualquier operación de transformación que se realice con un elemento del grupo. Esto puede iluminar nuevas rutas de enseñanza y aprendizaje en relación al entendimiento que se tiene sobre las transformaciones de rotación y paridad de fenómenos físicos en el contexto de las simetrías. Una de las actividades claves de éste trabajo es mostrar que existen para determinados grupos una relación de invariancia con sus subgrupos. Esto permite reforzar en el estudiante la idea de conservación y entender los fenómenos físicos como un conjunto de transformaciones que cumplen ciertas normas. A continuación se demostrará la relación que se presenta entre los diferentes grupos que se han estudiado hasta el momento y su relación con los sistemas que se han propuesto estudiar en lo sucesivo. Cabe señalar que todos los subgrupos de un grupo abeliano son invariantes.

Demostración

Sea h de un subgrupo H y un g de un grupo G . Queremos demostrar que un subgrupo es invariante si G es abeliano. Tomamos la definición de grupo invariante y hacemos que cualquier elemento de G conmute con su recíproco y tenemos que:

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} \text{ pues } G \text{ es abeliano}$$

$$hgg^{-1} = h \cdot e = h$$

Como sabemos que $h \in H$ concluimos que $ghg^{-1} \in H$ y por lo tanto H es un subgrupo invariante.

Por otro lado, se reconoce un grupo muy particular denominado $O(n)$ y es el grupo de matrices ortogonales $n \times n$ con la operación producto definida de manera usual en el álgebra de matrices. Recuerde que una matriz ortogonal tiene por condición que la inversa de dicha matriz coincide con su traspuesta. Así, no solo se entiende que el determinante debe ser más o menos uno, sino que las matrices asociadas a este grupo son invertibles o no singulares. A su vez, se dice que el grupo $O(n)$ es un subgrupo de un grupo más general denominado Grupo Lineal General, pero que escapa de los propósitos de este escrito. El subgrupo que nos interesa de $O(n)$ se denomina Grupo especial ortogonal y lo representamos por $SO(n)$ por sus siglas en inglés.

Cómo se ha trabajado la rotación en el plano, éste grupo tomará la notación $SO(2)$ para $n = 2$. El grupo especial ortogonal es un grupo de Lie y por éste motivo y por su relación con los conmutadores en Mecánica Cuántica, se brindará una definición formal en el apartado de Grupos de Lie. Por ahora nos interesa mostrar lo siguiente a propósito de la idea de subgrupo:

- $SO(2)$ es Ortogonal y Abeliano
- Que $SO(2)$ es un subgrupo invariante de $O(2)$
- Que el denominado grupo finito G_p es también un subgrupo invariante de $SO(2)$

Con estas demostraciones se garantizan los conceptos mencionados anteriormente y además se contará con otros elementos distintos de los usualmente trabajados para abordar la Mecánica clásica y la Mecánica Cuántica, de particular interés ésta última.

Demostración.

Se quiere demostrar que $SO(2)$ es ortogonal y abeliano. Para demostrar esto tomaremos la siguiente consideración. Se ha dicho que una matriz ortogonal tiene como característica que la matriz inversa coincide con la traspuesta. Si se toma esto como cierto, tenemos que:

$$A^{-1}A = I$$

$$A^T A = I$$

La propiedad de que un elemento por su inverso nos da como resultado la matriz identidad, es de gran provecho para nuestro propósito pues evaluamos el producto de la traspuesta por la matriz original y ésta, si es ortogonal, deberá coincidir con la identidad. La estructura de una matriz de $SO(2)$ tiene la forma de:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A$$

La traspuesta está dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A^T$$

Realizando el producto se tiene que:

$$A A^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Haciendo el álgebra correspondiente:

$$A A^T = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$A A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Y por lo tanto se demuestra que las matrices de ésta forma son ortogonales.

Ahora se quiere verificar que éste tipo de matrices son conmutativas y por ende SO (2) es Abeliano. Para ello haremos un producto entre matrices del conjunto. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix}$$

Verificamos primero el resultado de AB, así:

$$AB = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix}$$

Luego,

$$AB = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \mu - \sin \theta \sin \mu & -\cos \theta \sin \mu - \sin \theta \cos \mu \\ \sin \theta \cos \mu + \cos \theta \sin \mu & -\sin \theta \sin \mu + \cos \mu \cos \theta \end{pmatrix}$$

Utilizando las propiedades trigonométricas se tiene que:

$$AB = \begin{pmatrix} \cos \theta + \mu & -\sin \theta + \mu \\ \sin \theta + \mu & \cos \theta + \mu \end{pmatrix}$$

Para terminar ésta demostración es necesario completar el producto BA, luego:

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Realizando el producto se tiene que:

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \mu \cos \theta - \sin \mu \sin \theta & -\cos \mu \sin \theta - \sin \mu \cos \theta \\ \sin \mu \cos \theta + \cos \mu \sin \theta & -\sin \mu \sin \theta + \cos \mu \cos \theta \end{pmatrix}$$

Evaluando las propiedades y teniendo en cuenta que la suma es conmutativa,

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \theta + \mu & -\sin \theta + \mu \\ \sin \theta + \mu & \cos \theta + \mu \end{pmatrix}$$

Con esto se verifica que AB = BA para cualquier par de elementos de SO (2) y por tanto dicho Grupo es conmutativo o Abeliano.

Ahora se quiere demostrar que SO (2) es un subgrupo invariante de O (2). Para tal efecto se verifica que la estructura de la matriz n x n del grupo O (2) que estará dada por:

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Además se debe mostrar que C es ortogonal y conmutativa para proceder. Observe que:

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{Además si es ortogonal} \quad C^T = \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Ahora se procede a multiplicar las matrices de dónde:

$$CC^T = \begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Luego,

$$CC^T = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma^2 & -\alpha\gamma + \gamma\alpha \\ \gamma\alpha - \alpha\gamma & \gamma^2 + \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Según la propiedad pitagórica y resolviendo el álgebra correspondiente se tiene que:

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último verifiquemos el resultado de $C^T C$ y así se verificará que además de ortogonal es conmutativa. Haciendo el producto tenemos que:

$$C^T C = \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Luego,

$$C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto también se demuestra que un subgrupo de un grupo abeliano, es también abeliano como se comentó anteriormente.

Bajo estos presupuestos ya demostrados, pasamos a demostrar que efectivamente $SO(2)$ es subgrupo invariante de $O(2)$. Para ello se debe cumplir que:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Ésta última parte es prácticamente directa pues como hemos demostrado que C conmuta con su traspuesta y además ese producto da la identidad, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Luego obtenemos la misma matriz A que pertenece a $SO(2)$ como se quería mostrar. Luego $SO(2)$ no solamente es subgrupo como se mencionó sino que además es uno invariante bajo una operación definida y cualquier elemento de $O(2)$.

Por último antes de seguir con el tema de generadores de grupo, verificamos que el denominado grupo finito G_p es también un subgrupo invariante de $SO(2)$. Ésta es una demostración casi directa pues los elementos del grupo son 1 y -1 .

Demostración.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Para verificar que es un subgrupo invariante operamos así,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Como hemos demostrado que los elementos de $SO(2)$ no solamente son ortogonales sino que además éste subgrupo es abeliano, de suerte que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-1) = I \cdot (-1) = -1 \in \mathbf{G}_p$$

Luego tanto para 1 como para -1 se verifica que \mathbf{G}_p es subgrupo invariante de $SO(2)$.

Por último, cabe la pena resaltar que un grupo es simple si solo tiene los subgrupos triviales, él mismo y la identidad. Será semi simple si no posee subgrupos invariantes abelianos propios o no triviales.

Generadores de grupo

Los generadores de grupo son los elementos de un subgrupo llamado subgrupo generador, con la característica de poder expresar cualquier elemento del grupo en términos de los llamados generadores y sus inversos. Más formalmente

Si $S \leq G$ entonces $\langle S \rangle$ es el mínimo subgrupo de G que contiene los elementos generadores de G .

Esto implica que los generadores de grupo tendrán ciertas distinciones dependiendo de su orden o cardinalidad. Para un grupo cíclico solo existe un generador de grupo. Si un grupo muestra que S es conjunto vacío el generador será el elemento identidad. Si el grupo es finito, se dice que es finitamente generado y en éste caso corresponde consigo mismo. No se entra en el detalle de los generadores de grupos infinitos como el que se ha explicado de Cantor puesto que para las transformaciones de rotación y paridad no aplican los grupos infinitos no contables.

Para el grupo A_R que representa rotaciones de 180° en el plano es claro que su elemento generador es 180° o π , pues todos los valores del grupo están expresados en términos de

dicho elemento cuando la rotación es en sentido anti horario, y estará expresado por su recíproco en el caso de que sea una rotación horaria. Así pues expresamos éste generador como,

$$A_R = \langle \pi \rangle$$

Ciertamente existe solamente un generador pues éste grupo se considera cíclico así definido. Todos los grupos cíclicos tienen un solo generador como se ha comentado. Si consideramos el grupo en términos de rotaciones grado por grado el grupo sería infinito no numerable y determinar su generador sería una empresa mucho más compleja, pues se pretendería buscar algún subconjunto de elementos que generen elementos infinitos. Dicho así, parece un problema sin solución y bastante anti intuitivo.

Por otro lado, el generador de grupo de G_p es él mismo puesto que al ser un grupo finito sus elementos están generados por ellos mismos bajo la operación de multiplicación. En otras palabras éste grupo está finitamente generado. Observe que,

$$1 \cdot 1 = 1 \quad \text{también} \quad 1 \cdot -1 = -1$$

Se tiene entonces que,

$$G_p = \langle G_p \rangle$$

Es importante plantear esta cuestión además de poner de manifiesta la relación física matemática en este contexto, sino también por el hecho de que reconocer los subgrupos invariantes y generadores de grupo brinda herramientas que permiten afianzar las ideas sobre simetría y transformaciones gauge a propósito de fenómenos físicos como la rotación y la transformación de Paridad. Estas ideas permiten hacer puentes conceptuales que marcan diferencias y realzan similitudes entre dichas transformaciones. Se verifica que también aporta elementos para la introducción de conceptos como el conmutador y el operador. A continuación veremos la relación entre la traza y el determinante y como dicha relación permite llegar a lo que se conoce como paréntesis de Lie.

Hay una conexión importante entre el determinante y la traza que tiene que ver con el determinante de una Transformación Lineal infinitesimal dada por una matriz $n \times n$ de la forma (Penrose, 2004):

$$I + \epsilon H$$

Para hacer que nuestra H definida sea infinitesimal basta multiplicar por un número que tiene a cero de tal forma que

$$\varepsilon H = \varepsilon \begin{bmatrix} a & b+i \\ c-i & d \end{bmatrix}$$

Ahora aplicando la función exponencial de una matriz se tiene que

$$e^{\varepsilon H} = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon a} & e^{\varepsilon(b+i)} \\ e^{\varepsilon(c-i)} & e^{\varepsilon d} \end{bmatrix}$$

Recordando la expansión en serie de potencia de la función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aplicando a la ecuación anterior tenemos que

$$e^{\varepsilon H} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon H^n}{n!} = I + \varepsilon H + \frac{(\varepsilon H)^2}{2!} + \dots$$

Como indicamos que la cantidad ε es muy pequeña y tiende a cero, el cuadrado de dicha cantidad es tan pequeño que lo podemos despreciar y nuestro análisis sigue siendo una buena aproximación. Por lo tanto

$$e^{\varepsilon H} = I + \varepsilon H \approx \begin{bmatrix} e^0 & e^0 \\ e^0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora aplicamos el determinante a este resultado y confirmamos que

$$\det(I + \varepsilon H) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como todos los elementos de la matriz son la unidad se sigue que

$$\det(I + \varepsilon H) = 0$$

Desarrollando esta ecuación y con un poco de análisis y algebra se llega a

$$\det(I) + \varepsilon \det(H) = 0$$

Luego

$$1 + \varepsilon \det H = 0$$

Para que esta relación sea válida se debe cumplir que

$$\varepsilon \det H = -1$$

Si hacemos que los parámetros a y b sean opuestos tenemos que

$$\text{Traza } H = 0$$

Al multiplicar épsilon por el determinante de H hacemos nuevamente tender este valor a cero más sin embargo no es cero. Así pues retomamos la ecuación

$$\varepsilon \det H = -1$$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por épsilon tenemos que

$$\varepsilon^2 \det H = 0$$

Dado que épsilon elevada a la segunda potencia es un número muy pequeño. Ahora si hacemos algo semejante con la traza tenemos que

$$\varepsilon \text{Traza } \mathbf{H} = \varepsilon \cdot 0$$

Luego sigue dando cero. Así pues se concluye que

$$1 + \varepsilon \det H = 1 + \varepsilon \text{Traza } \mathbf{H} = 0$$

Por último se concluye que

$$1 + \varepsilon \text{Traza } \mathbf{H} = \det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{H})$$

Esta ecuación relaciona la traza y el determinante de una matriz. Una propiedad fundamental a la hora de análisis de elementos de grupos matriciales como es el caso de $GL(n, R)$ y $GL(n, C)$. Poder hacer estas deducciones de las propiedades matriciales a partir de la teoría de representaciones y construir el concepto de grupo de Lie pone de manifiesto un camino claro y sencillo para aprendizajes relacionados con la Mecánica. Ahora bien en este punto hemos dado a grandes rasgos algunas propiedades de los grupos de Lie. La teoría desarrollada por Sophus Lie, conduce a un tratamiento completo de la teoría local de los grupos continuos (Penrose, 2004). Esta teoría depende de un estudio de elementos de *grupo infinitesimales*. Estos elementos infinitesimales definen un tipo de algebra (álgebra de Lie) que proporciona información completa de la estructura local del grupo. Aunque el álgebra de Lie quizá no nos proporcione toda la estructura global del grupo, esto se considera normalmente una cuestión de menor importancia (Penrose, 2004).

Suponga que se tiene una matriz (Transformación Lineal) de la forma

$$\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{H}$$

Que representa un elemento infinitesimal h de un grupo G, donde épsilon se considera pequeño. Cuando formamos la matriz producto hm de los elementos h y m del grupo tenemos que (Penrose, 2004).

$$(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{H})(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{M}) = \mathbf{I} + \varepsilon(\mathbf{H} + \mathbf{M}) + \varepsilon^2(\mathbf{HM})$$

Despreciando épsilon a la segunda potencia tenemos que

$$(I + \varepsilon H)(I + \varepsilon M) = I + \varepsilon(H + M)$$

De acuerdo con esto, la matriz suma $(H + M)$ representa el producto del grupo hm . Esto es análogo a lo que sucedería con las propiedades de un logaritmo puesto que el logaritmo de un producto puede ser expresado como la suma de dos logaritmos separados que contiene los elementos en cuestión.

La suma hace parte del grupo y es conmutativa, mientras que el grupo G muy bien podría ser abeliano, de modo que no captamos mucho la estructura del grupo si consideramos solo sumas (Penrose, 2004). Así pues por las propiedades que se mostraron antes para los grupos y teniendo en cuenta los axiomas de grupo se tiene que

$$h m h^{-1} m^{-1}$$

Ahora escribamos esta propiedad en términos infinitesimales y desarrollando la potencia negativa llegamos a

$$(I + \varepsilon H)(I + \varepsilon M) (I + \varepsilon H)^{-1} (I + \varepsilon M)^{-1}$$

Despreciando las potencias mayores que dos tenemos que

$$(I + \varepsilon H)(I + \varepsilon M) (I - \varepsilon H + (\varepsilon H)^2)(I - \varepsilon M + (\varepsilon M)^2) = I + \varepsilon^2(HM - MH)$$

Nuevamente se aprecia una relación de conmutación que vale la pena resaltar. Observe que el último miembro de la igualdad es

$$I + \varepsilon^2(HM - MH)$$

Esto nos dice que si queremos seguir la pista de la forma exacta en que un grupo G es no abeliano, debemos tomar nota de los conmutadores o *paréntesis de Lie* (Penrose, 2004).

$$[H, M] = (HM - MH)$$

Esto es particularmente importante en Mecánica Cuántica, en la que los propios elementos del álgebra de Lie tienen con frecuencia, y de una manera notable, interpretaciones directas como magnitudes físicas tales como el momento angular, cuando el grupo G es el grupo de rotaciones (Penrose, 2004). Esto refuerza la idea de la relación que subyace entre los grupos ortogonales y unitarios no solo en sus propiedades topológicas sino como elementos que dan cuenta de variables físicas a propósito de sistemas rotando y su relación con otras magnitudes.

Grupos de Lie

Definir los grupos de Lie es un trabajo extenso y nuevamente se hará énfasis en los aspectos más relevantes para los temas sucesivos en relación a la enseñanza de los tópicos de física. Inicialmente se darán ideas poco formales e intuitivas y en la medida que se construyan los conceptos necesarios, se llegará a una idea aproximada pero un poco más formal sobre los grupos de Lie.

Lo primero que se debe comentar es que los grupos de Lie se relacionan directamente con los grupos *finitos* que se muestran en el inicio del *Anexo 1*. Existe también una relación con los grupos *infinitos contables* y se sabe que existe una conexión menos problemática que la que sugieren los grupos *infinitos*. En este orden de ideas, los grupos de Lie se denominan grupos continuos (recuerde que el subgrupo $SO(3)$ en general $SO(n)$ es una transformación continua). Sin embargo, el concepto de continuidad puede tomar diversos significados dependiendo de que sea lo que se entiende por continuidad, puesto que nuestro grupo G_p es finito pero no es en sí una transformación continua. La continuidad a la que se hace referencia en un grupo de Lie hace realmente alusión a la continuidad de dichos grupos como estructuras que están representadas en variedades topológicas con características bien definidas como ser compacto, convexo, vecindad (Localidad) y naturalmente, continuidad. Dichas características se encuentran en ciertas variedades y cuando tienen o no estas propiedades se habla de la *topología de la variedad*. No se hará especial énfasis en topología y tampoco en variedades, puesto que esto no es de especial relevancia para el trabajo. Por el contrario se comentarán aspectos clave de la relación de los grupos de Lie y la explicación de estructuras de variedades y sus topologías.

Por otro lado, es importante reconocer en este proceso lo que se denomina un grupo lineal general. Éste grupo representa las matrices no singulares $n \times n$ en un cuerpo determinado, bien sea en el conjunto de los reales o los complejos. El grupo contiene también algunos subgrupos que se han desarrollado en la sección de subgrupos de este *Anexo* y cuya clasificación se muestra en la siguiente Figura 3. La notación que se usa comúnmente es $GL(n, R)$ para el caso del cuerpo de los reales donde la n representa el grado del grupo y $GL(n, C)$ para el caso de los complejos. Otra posible definición de los grupos de Lie para hacer una aproximación conceptual, son todos los subgrupos del grupo lineal general, es decir, un grupo de Cantor como el que muestra en el inicio de este *Anexo* no es un grupo de Lie. Cabe resaltar que el grupo $GL(n)$ se trabaja en este contexto, precisamente porque en él están descritas simetrías (una buena definición para el grupo lineal general sería entonces grupo de simetrías) de espacios vectoriales y simetrías espaciales en general, lo

cual brinda un sustento coherente para éste trabajo que se propone estudiar y describir por medio de simetrías las rotaciones en el espacio de cuerpos rígidos y las transformaciones de Paridad que puede sufrir un sistema clásico y cuántico.

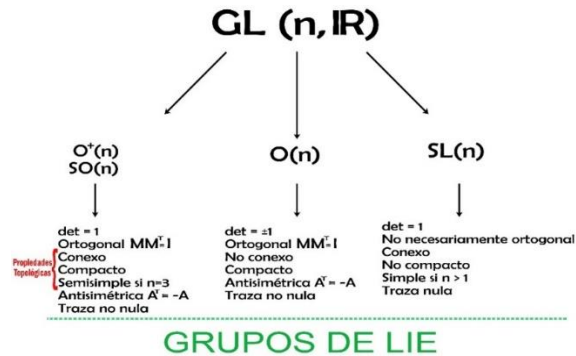


Figura 23. Propiedades de los subgrupos que forman álgebras de Lie en el cuerpo Real a partir del análisis del Grupo Lineal General.

El grupo se denomina lineal ya que tiene relación directa con las *Transformaciones lineales* entendidas también como matrices y como veremos más adelante las matrices son una representación de los operadores, es decir, el grupo lineal general es el grupo que contiene los operadores que actúan sobre funciones que representan sistemas físicos y que describen situaciones concretas de fenómenos naturales independiente de si estos son de un sistema clásico o cuántico. Existe en matemáticas una teoría denominada *Teoría de Representación de Grupos*, o simplemente teoría de representación. Para comprender ésta teoría se expondrá un ejemplo bastante ilustrativo que resalta por medio de argumentos de simetría las características para llegar a la definición de un grupo de Lie y también a los aspectos concretos de la física en la cual se interesa este trabajo.

Pese a todo, y curiosamente, según las teorías físicas del siglo XX, todas las interacciones físicas, incluida la gravedad, actúan de acuerdo con una idea que, estrictamente hablando, depende de forma crucial de ciertas estructuras físicas que poseen una simetría que, en un nivel de descripción fundamental, es necesariamente exacta. ¿Cuál es esta idea? Es un concepto que ha llegado a conocerse como una “conexión gauge” (Penrose, 2004). Esto sugiere que independiente de que nuestros esquemas o representaciones no sean del todo exactas los sistemas físicos cumplen con determinadas pautas en relación a simetrías implícitas que son en esencia de una exactitud apreciable. Suponga que tenemos un cuadrado. Si suponemos que el cuadrado en el plano complejo no admite reflexiones (simetrías no reflexivas) y nos concentramos únicamente en la rotación de éste en ángulos

de 45° “podemos representar estos movimientos en términos de números complejos... Si queremos, podemos considerar que los vértices del cuadrado ocupan los puntos 1, i , -1 , $-i$ en el plano complejo, y nuestra notación básica está representada por la multiplicación por i ” (Penrose, 2004). Observe la Figura 4.

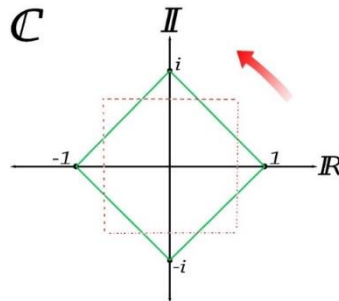


Figura 24. Cuadrado de Penrose. Caracterización de un grupo en el cuerpo Complejo que exhibe propiedades de simetría respecto a la rotación de 45°. Imagen basada en (Penrose, 2004).

Las diversas potencias de i representan todas nuestras rotaciones, de las que hay cuatro diferentes en total (Penrose, 2004), a saber,

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i$$

Es claro que si aumentamos el índice (el índice representa una rotación) volvemos a obtener la unidad, es decir que el cuadrado vuelve a quedar en donde estaba originalmente. Esto quiere decir que no podemos encontrar más elementos asociados a la simetría de rotación de un cuadrado en el plano complejo. Observe que si tomamos cualesquiera elementos “fundamentales” de este proceso y hacemos el producto entre ellos, obtenemos nuevamente un elemento del grupo. También es importante resaltar que en este ejemplo definimos una operación (producto) y cuatro elementos de un conjunto por lo que podemos considerar este ejemplo como uno que describe un *grupo*. Recuerde que el grupo debe cumplir otras propiedades importantes como la ley asociativa de la multiplicación (Penrose, 2004):

$$a(bc) = (ab)c$$

En nuestro ejemplo particular de las rotaciones no reflexivas del cuadrado, tenemos la propiedad *conmutativa* adicional

$$ab = ba$$

Los grupos que son conmutativos en este sentido se denominan *abelianos*, por el matemático noruego Niels Henrik Abel... Evidentemente, cualquier grupo que pueda representarse simplemente por la multiplicación de números complejos debe ser abeliano puesto que la multiplicación de números complejos individuales siempre conmuta (Penrose, 2004).

Esto brinda una luz sobre el análisis realizado hasta ahora. Pero no se puede pasar por alto el hecho de que este subgrupo se “divide en dos” y cuya “suma” conforman lo que se considera el grupo ortogonal $O(n)$. Estrictamente si se considera el determinante de una matriz del grupo ortogonal esto puede tener como resultado que:

$$\det A = \pm 1$$

Luego podemos formar dos subconjuntos de $O(n)$ a saber (De Caria & Schaposnik, 2007),

$$O(n)^+ = \{A \in O(n) : \det A = 1\} \quad y \quad O(n)^- = \{A \in O(n) : \det A = -1\}$$

El subconjunto $O(n)^+$ admite las simetrías no reflexivas además de contener al elemento identidad. El subconjunto restante con determinante negativo representa las simetrías reflexivas. Al admitir simetrías reflexivas el orden del subgrupo aumenta a 8 y además es no abeliano. Básicamente el grupo ortogonal $O(3)$ es una 3-variedad *inconexa* conformada por estas dos piezas (Penrose, 2004) (Nakahara, 2003).

Existe, como se ha mencionado anteriormente, otro subgrupo importante del grupo lineal general denominado grupo lineal especial y denotado por $SL(n)$. El cuadro donde relacionamos los grupos de Lie en el cuerpo de los reales pone de manifiesto una característica importante del grupo lineal especial y es que su determinante es igual a 1. ¿Cuál es la diferencia entonces entre el grupo especial lineal y el grupo especial ortogonal, si ambos subgrupos se definen como subgrupos con determinante igual a la unidad? Existen diferencias importantes. La principal es que $SO(n)$ son matrices ortogonales y son en realidad el subconjunto que se ha denominado $O(n)^+$. Por otro lado $SO(n)$ se define como $O(n) \cap SL(n)$ (Nakahara, 2003), lo que sugiere que todas las matrices de $SO(n)$ tienen determinante unidad y son ortogonales, mientras que no todas las matrices de $SL(n)$ con determinante unidad son ortogonales. El grupo especial lineal también tiene por elementos matrices con traza nula, mientras que el grupo especial ortogonal no necesariamente tiene traza nula. Una característica fundamental tanto de $O(n)$ como de $O(n)^+$ estriba en que sus matrices son anti simétricas lo cual por definición llevaría a concluir que no existe la posibilidad de una matriz simétrica dentro de $O(n)$. Veremos que en este

trabajo se rechaza esa idea y se procede a demostrar lo contrario. Existen otras diferencias topológicas como compacidad y conexividad pero no es objetivo de este trabajo abordar tales diferencias y se estima tema de otro proyecto.

Una conclusión importante de esta primera aproximación a lo que es un grupo de Lie, tiene que ver con la forma de representar grupos y subgrupos. Veremos con mayor detalle en lo sucesivo que el subgrupo $SO(3)$ da cuenta de rotaciones en el espacio y éste es representado por un subconjunto de un grupo más general llamado grupo ortogonal. Sin embargo existe una contraparte de $SO(n)$ y ha sido denominada $O(n)^-$, y que es el subconjunto de $O(n)$ que admite reflexiones especulares del sistema. Esto quiere decir que el aparato matemático expuesto hasta el momento, en términos de argumentos de simetría, constituye una herramienta valiosa para el análisis de sistemas físicos y por tal motivo, no debería ser despreciada su utilización en lo que se refiere a procesos de enseñanza y formalización.

Un aspecto llamativo como se muestra en el tercer capítulo sobre la transformación de paridad, es que dicha transformación se podría analizar desde la idea de “composición” como operador, que consiste en una rotación de 180° y además una reflexión especular, con lo cual se puede formular una generalización alrededor de esto. Para ver el teorema DE I y DE II asociado revise la sección de teoremas en el *Anexo2*.

Grupo General Lineal en el cuerpo Complejo

Se ha hecho un análisis sobre los grupos de Lie en el cuerpo de los números Reales. En este apartado se mostrarán los grupos de Lie que operan en el cuerpo complejo, sus características y cómo dicho análisis facilita el tránsito a conceptos básicos de la MC. Existe una similitud con relación a los grupos ortogonales que hemos trabajado hasta ahora y los denominados grupos unitarios que son aquellos que operan en el cuerpo de los números complejos.

La nomenclatura en este punto será entonces, $GL(n, C)$ y representa el grupo Lineal General sobre el cuerpo de los números complejos. Análogamente al caso anterior existen tres grupos de especial interés, el denominado grupo Unitario, el grupo Especial Lineal Complejo y el grupo Especial Unitario. Empero, no se hará mayor énfasis en el grupo Especial Lineal pues no constituye un grupo trascendente en nuestro futuro análisis. Observe que la distribución y la relación que guardan estos grupos son semejantes a lo expuesto anteriormente.

Primero, el subgrupo más general, el subgrupo unitario, tiene como una de las características más importantes el producto matricial de uno de sus elementos cumple siempre que

$$MM^\dagger = \mathbf{1}$$

Donde \dagger es el conjugado Hermitiano (Nakahara, 2003) o la Traspuesta conjugada. Existe una propiedad de interés fundamental y es que si un elemento pertenece al grupo entonces el determinante de ese elemento es un número complejo de norma unidad (Shaposnik, 2007), tal que

$$M \in U_n(\mathbb{C}), \text{ luego } \det(M) \text{ es un número complejo de norma } 1$$

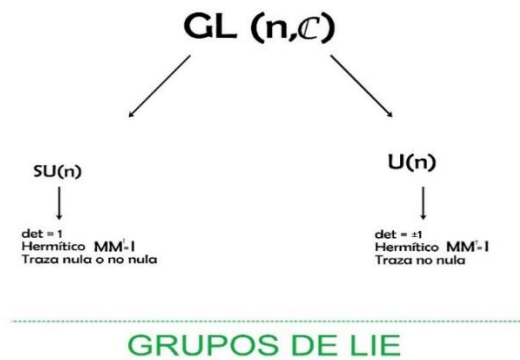


Figura 25. Representación de los grupos Unitarios en el cuerpo de los Complejos.

Descripción de características básicas.

Luego según Shaposnik, se puede señalar que el determinante de una matriz unitaria debe ser un número complejo de norma unidad. Sin embargo, al ser $SU(n)$ un subgrupo de $U(n)$, es claro que no todas las matrices deberán cumplir estrictamente esta condición y por el contrario se deberá cumplir que todas las matrices de $SU(n)$ tengan por determinante la unidad. Ahora nos valdremos de una forma general de una matriz unitaria para mostrar como transformaciones lineales infinitesimales nos permiten aproximar la idea de conmutador, fundamental en Mecánica Cuántica. Es claro que la teoría de grupos permite formalizar diversas ideas que en cursos generales de Física presentan dificultades a los estudiantes debido a su alto nivel de abstracción. La ruta aquí mostrada permite eliminar esta dificultad y llegar a ellos por medio de un análisis sencillo de la teoría de representaciones. Hasta el momento se han comentado los grupos de Lie en el cuerpo de

los números Reales y con una formalización no tan robusta como es el caso en cursos de matemática superior.

Sin embargo, se ha dicho que los grupos ortogonales guardan una relación con los grupos unitarios y existe una equivalencia en términos de isomorfismos matemáticos entre ellos. Es importante comprender dicha relación en términos de la teoría de representaciones. Lo que se denomina matriz simétrica en el cuerpo de los Reales, en el cuerpo de los Complejos se ha comentado que es una matriz Hermitiana. Una matriz Hermitiana es aquella igual a su traspuesta conjugada, y se asume que el estudiante posee conocimientos sobre ello de su curso de algebra lineal. Otro aspecto interesante que vale la pena mencionar es que las columnas de una matriz Unitaria deben formar una base **Ortonormal** en el cuerpo de los Complejos (Salcedo, 2018). En efecto,

$$\delta_{jk} = (U^\dagger U)_{jk} = (U^\dagger)_{ji} U_{ik} = U^*_{ij} U_{ik} = (\widehat{e}_j)_i^* (\widehat{e}_k)_i = \langle \widehat{e}_j | \widehat{e}_k \rangle$$

Por lo que los elementos de $U(n)$ son las matrices de cambio de base entre dos bases ortonormales complejas de C^n (Salcedo, 2018). Ahora sea una matriz H de la forma

$$H = \begin{bmatrix} a & b + i \\ c - i & d \end{bmatrix}$$

Aquí esta H representa una matriz Hermitica general, y es diferente de la H utilizada para representar subgrupos generales mostrados anteriormente. Si probamos que esta matriz es Hermitica podremos llegar a conclusiones cruciales como se hizo en el caso de los grupos ortogonales. Sin embargo, se deja planteada la cuestión del isomorfismo topológico entre dichos grupos pues ello escapa del análisis de este texto. También se deja planteada la cuestión un poco ambigua y delicada sobre si el determinante de una matriz que pertenece a $SU(n)$ es igual a la unidad siempre, pues como se verá más adelante las matrices de Pauli que pertenecen a esta categoría no cumplen la norma y son “subelementos” de matrices que si lo cumplen. Otro aspecto revelador y que plantea dificultades a la hora de capturar la idea de un grupo de Lie con su algebra asociada en el cuerpo de los complejos es que se exige que una matriz Hermitica tenga su diagonal principal conformada por números reales.

Demostración

Bajo la condición de que b y c son iguales tenemos que

$$H = \begin{bmatrix} a & b + i \\ c - i & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c - i \\ b + i & d \end{bmatrix}$$

Donde

$$H^\dagger = \begin{bmatrix} a & c - i \\ b + i & d \end{bmatrix}$$

Con lo cual se verifica que es Hermitica bajo la condición de igualdad de los parámetros b y c . Ahora se debe hacer que H como Transformación Lineal sea infinitesimal para establecer una relación entre el determinante de una matriz y su traza. Dicha relación nos llevó a establecer el *paréntesis de Lie* por una vía diferente y además concretar la aproximación a lo que se entiende por grupo de Lie, que es el todo de este apartado. Observe que en la demostración anterior sobre el paréntesis de Lie se supone H como infinitesimal al multiplicar por un elemento muy pequeño.

En conclusión los grupos de Lie son todos aquellos subgrupos del grupo Lineal General que cumplen propiedades como el paréntesis de Lie y que definen un algebra a partir de su estructura propia como subgrupo. Una de las características más importantes que se han mostrado de los grupos de Lie es que sus elementos mantienen invariantes ciertas cantidades e incluso su estructura se puede entender a través de análisis aportados por argumentos de simetría como se comentó inicialmente. Por tal motivo no sorprende que los grupos de Lie conformen el aparato matemático para el tratamiento de muchos fenómenos físicos en lo tocante a las simetrías que subyacen. Se comentó que los grupos y álgebras de Lie dan cuenta de una estructura local. Dicha representación puede observar en la Figura 6.

**Representación Fiel y Local
de un Grupo de Lie**

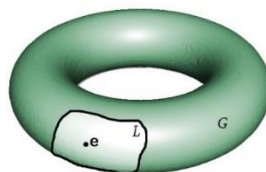


Figura 26. Representación Fiel y Local de un Grupo de Lie. Por medio de la caracterización expuesta por Sophus Lie, se conoce la estructura Local del grupo y no se especifican los aspectos globales del Grupo. Imagen basada en (Penrose, 2004).

A modo de conclusión en este apartado cabe resaltar nuevamente que la principal diferencia encontrada entre el grupo Unitario y el grupo Especial Unitario estriba en el determinante de las matrices de una y otra. Se asume por lo general que los elementos del grupo Especial Unitario son matrices antihermitianas. Existe controversia en las definiciones formales que sustentarían este tipo de afirmaciones. Se entiende entonces por matriz antihermitiana aquella que se multiplica por la cantidad imaginaria y modifica su estructura de grupo.

Para ilustrar este tipo de conflictos que se presentan a la hora de catalogar los grupos y sus propiedades se hará un breve comentario sobre la Paradoja de Russell que ilustra el tipo de aparentes contradicciones y problemas lógicos que acucian aun hoy en día a esta extensa y basta teoría.

La paradoja de Russell

Bertrand Russell fue uno de los pensadores más fructíferos del siglo XIX en diversos campos como lógica, matemáticas, filosofía e incluso política. Russell destaca un argumento que pone en duda la teoría propuesta por Cantor y de la que se han realizado ya bastantes comentarios en el apartado precedente. El argumento se puede entender más o menos como sigue:

Pensemos en la propiedad de un conjunto (Wikipedia, 2019), siendo ésta la capacidad del conjunto para contenerse a sí mismo, o mejor aún, la propiedad de pertenecer a sí mismo. Un claro ejemplo sería por ejemplo el conjunto de bolsas dentro de una bolsa. Existe naturalmente el conjunto que carece de dicha capacidad y que no puede pertenecer a sí mismo. Un ejemplo de este segundo tipo de conjunto sería por ejemplo el conjunto de computadores, puesto que tal conjunto no es un computador.

Bertrand Russell cuestionaba a los creadores de la teoría de conjuntos acerca de esta propiedad y discutía si el conjunto que encierra aquellos que no poseen la propiedad de pertenecer a sí mismos, pertenece a sí mismo. Russell decía que si tal conjunto no pertenece a sí mismo, debía pertenecer al conjunto de aquellos que no poseen la propiedad de contenerse a sí mismos, y por lo tanto, debía pertenecer a sí mismo.

Las ideas expuestas por Russell eran robustas en su análisis y prácticamente desarmaba toda una teoría constituida con este tipo de razonamientos. Este tipo de cuestionamientos son los que a menudo se encuentran en la teoría de conjuntos y como vimos en los grupos Ortogonales y Unitarios, se presentan algunas contradicciones que obligan hacer nuevos

planteamientos a partir de razonamientos distintos. Una forma de plantear la paradoja en lenguaje matemático sería algo como

Llamemos N el conjunto de todos los conjuntos sin la capacidad de contenerse a sí mismo y teniendo en cuenta que es diferente de la representación de los números naturales, es decir

$$N = \{n : n \ni n\}$$

Aquí el símbolo de no pertenece se toma orientado hacia la izquierda. Luego la sentencia anterior se puede leer como N es el conjunto de todos los elementos n tal que n no pertenece a n . En términos de implicación producto de los postulados de Cantor se puede decir que

$$\forall n \quad n \in N \leftrightarrow n \ni n$$

Es decir para todo n se cumple que n pertenece a N si y solo si n no pertenece a n (Wikipedia, 2019). Ahora dado que definimos a N como un conjunto y queremos saber si pertenece a sí mismo podemos sustituir cualquier n por N y tendremos que

$$N \in N \leftrightarrow N \ni N$$

Lo cual se puede interpretar como N pertenece a N (es decir a sí mismo) si y solo si N no pertenece a N (o sea a sí mismo). En este punto es donde se encierra el corazón de la paradoja en relación a las propiedades de algunos conjuntos. Esto no quiere decir que todos los argumentos brindados anteriormente estén “bien” o “mal”. Simplemente se resalta el carácter incompleto de la teoría y los esfuerzos que muchos aunamos en pro del avance científico y educativo. Por último, se podría comparar esta situación con el nacimiento de la geometría diferencial. La geometría no euclidiana surge de negar el quinto postulado de Euclides. Se estaría tentado a pensar que hacer una modificación semejante es ir en contra de la institución, del sentido común e incluso de la tradición intelectual del ser humano. Sin embargo, es ese riesgo que se toma el que produce las grandes revoluciones científicas e intelectuales, incluso, cuando todo parece realmente no intuitivo.

Rotación como doble reflexión

Volvamos al caso de la figura 16. En este caso, nuestro sistema está ubicado en un punto $P(x, y)$. Aquí P representa un punto y es diferente del operador de Paridad utilizado más anteriormente. Los argumentos que vamos a utilizar atienden a construcciones geométricas que descansan en la idea de la simetría bilateral o de reflexión. Primero, vamos a trazar

una línea perpendicular al eje Y desde nuestro sistema en el punto P(x, y), y paralela al eje de las equis como se ilustra en la **Figura 17**, esta proyección es la línea verde punteada. Dicha transformación utiliza el eje de las Y como eje de reflexión. Cabe resaltar que para esta transformación la distancia entre la posición inicial del móvil y el eje de reflexión debe ser congruente con la distancia del eje y al punto Q sobre la circunferencia. Ahora vamos a realizar el mismo proceso de reflexión o aplicación de “*trasformación bilateral*” pero tomando como eje de reflexión el eje de las equis. Nuestro punto de origen será el punto Q que obtuvimos en la transformación anterior, el cual tiene coordenadas generales Q (-X, Y). Observe que al realizar este proceso obtendremos un punto R (-X, -Y). Vemos que realizar una doble transformación de reflexión equivale a realizar una transformación de rotación de 180° (Clemens, 1998). Advierta que los puntos P y R tienen una diferencia evidente y es que el signo de sus coordenadas espaciales ha cambiado, es decir, cambiar el signo de las coordenadas del punto P equivale a obtener el punto R, el mismo punto P rotado 180°. Se puede escribir en términos de “operadores” este proceso de transformación como sigue: Sea **R** nuestro operador de rotación y **B** el operador de reflexión se cumple que:

$$R = B^2 \quad (12)$$

Una conclusión importante de este apartado además de la ecuación (12) es entender el operador **B** como un cambio que me permite modificar el signo de las coordenadas espaciales de tal forma que se obtenga una reflexión respecto a un eje de simetría. La relación íntima que guarda el fenómeno de rotación con la doble reflexión viene a dar una luz sobre la idea de paridad de un sistema, concepto que fue analizado en el capítulo tres.

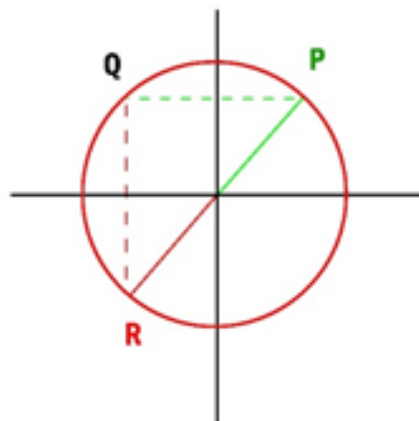


Figura 27. Rotación como doble Reflexión Especular en el plano.

La relación entre razón de cambio y calibración gauge

Sea una función tal que

$$y = f(x)$$

Aplicando la calibración gauge a las dos variables tenemos que

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Reorganizando y multiplicando ambos lados de la ecuación por $1/\Delta x$ (Suarez Bermúdez, 2016).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - y}{\Delta x}$$

Como la definición exige que Y es igual a la función se tiene que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si aplicamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ se obtiene que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Luego

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Que fue exactamente lo mismo que se hizo con la deducción para la ecuación de Schrödinger en capítulos anteriores.

Anexo2. Teoremas

TEOREMA DE I

Sea una matriz de la forma

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ o } \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Con valores $a = 1$ y $b = 0$ para el caso físico de Transformación Especular 2-Dimensional se cumple $\forall \hat{\mathbf{B}}$ así definido que

$$\hat{\mathbf{B}} = O(n) - SL(n) \equiv O^-(n) \rightarrow \hat{\mathbf{B}} \in O^-(n)$$

Donde $O^-(n)$ se denominará **Grupo especial Especular** o $SE(n) \equiv O^-(n)$, y se cumple que $\det \hat{B} = -1$, es ortogonal, su traza es nula, es una matriz simétrica, abeliana y un subgrupo invariante a $O(n)$. Éste operador permite definir el operador de reflexión y clasificar dicho resultado dentro de un grupo específico. Los parámetros a y b pueden tomar valores de 0 y 1 respectivamente para el caso unitario en un cuerpo complejo cuya traza es igualmente nula.

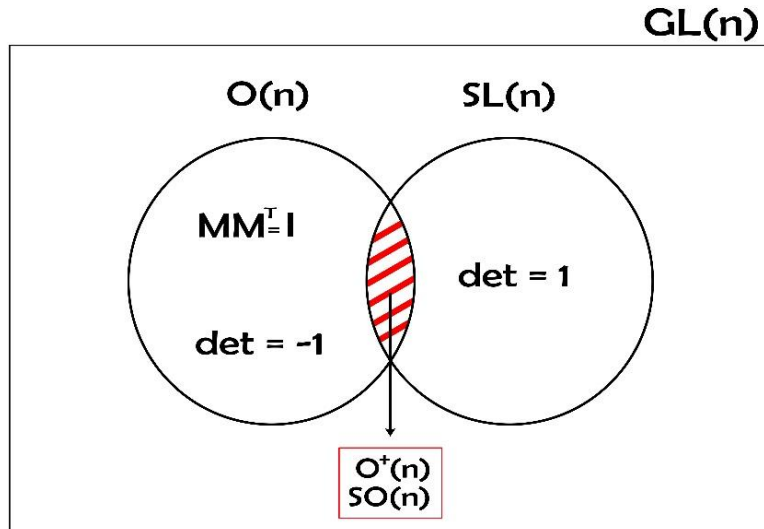


Figura 28. Diagrama que representa la clasificación y ordenación del grupo de rotaciones $SO(n)$ en un cuerpo Real en relación al Grupo Lineal General y otros subgrupos. Imagen basada en (Nakahara, 2003).

TEOREMA DE II

Para el operador de Reflexión especular en el caso 2-Dimensional, se cumple que dicho operador es representado por una matriz no necesariamente antisimétrica y pertenece al grupo especial especular para n igual a 2.

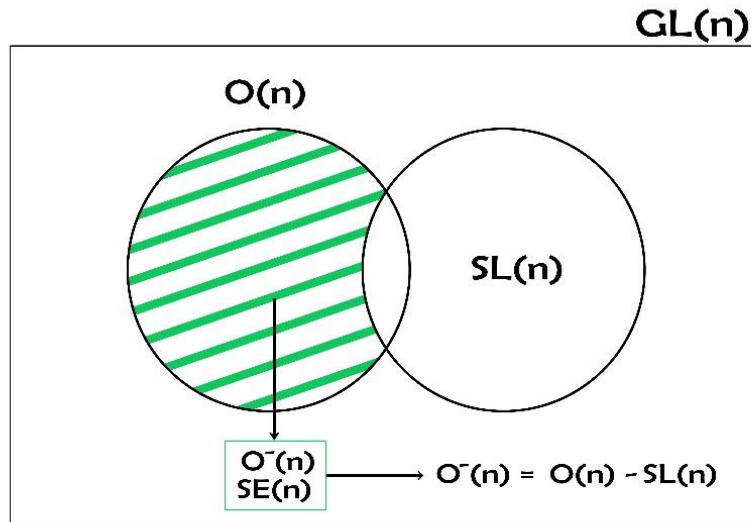


Figura 29. Representación del complemento del grupo Ortogonal. Teorema DEB I para el denominado subgrupo Especular $SE(n)$ en el cuerpo de los Reales.

Demostración

Se ha comentado anteriormente que el grupo ortogonal tiene dos componentes que matemáticamente cumple con algunas condiciones de ortogonalidad y también se verifica que el determinante de cada uno de estos subconjuntos es 1 y -1 en cada caso. Si se toma la definición del operador con los valores $a = 1$ y $b = 0$ tenemos que

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Éste sería el operador que al actuar sobre un vector transformará sus coordenadas como exige la definición parcial de Paridad, es decir se realizará una reflexión especular sobre un determinado eje. La composición de dicha reflexión especular y una rotación de 180° respecto a un eje perpendicular al anterior es lo que se denomina **Transformación de Paridad**. Demostremos ahora las propiedades de nuestro grupo $SE(n)$, además de que es un elemento simétrico, para identificar su relación con los grupos ya mencionados.

$$\det \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1(-1) - 0 = -1$$

Luego se cumple que el determinante es -1 y por lo tanto hace parte del grupo. Para que sea ortogonal se cumple que su inversa es equivalente a su traspuesta por lo tanto

$$\widehat{B}\widehat{B}^T = I \text{ Luego } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego es ortogonal. Por simple inspección se verifica que su traza es nula. En el proceso anterior de mostrar que es una matriz ortogonal mostramos que también es una matriz **simétrica** puesto que se cumple que

$$\widehat{B} = \widehat{B}^T$$

Al ser una matriz simétrica se deduce directamente que es conmutativa y por tanto abeliana. Una de las primeras diferencias que marcamos frente al resto de grupos en el cuerpo de los números complejos es justamente que éste tipo de matrices abelianas permiten reflexiones de sistemas en el momento del análisis de su grupo de simetrías, a diferencia del cuadrado de Penrose que se comentó anteriormente (recuerde que este se trabajó en un plano complejo). Quiere decir que este grupo $O^-(n)$ en el cuerpo de los reales representa isometrías en relación a reflexiones de sistemas físicos. Por último al contener matrices abelianas se sigue por demostraciones anteriores que también es un subgrupo invariante a $O(n)$.

Supongamos un vector sobre el plano en el eje de las equis positivas y de magnitud unidad se representa por

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el operador al vector tenemos que

$$\widehat{B}W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿Por qué el vector no ha sufrido modificación? Resulta que éste vector no tiene componente en el eje de las ordenadas y el operador que hemos tomado en realidad hace transformaciones “incompletas” respecto al eje X. Por tanto vamos a etiquetar nuestro operador \widehat{B} de la siguiente manera

$$\widehat{B}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{B}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hemos visto que la primera matriz no tiene efecto sobre el vector, y este se mantiene invariante. Apliquemos a este resultado la matriz que transforma respecto a Y, se obtiene que

$$\widehat{B}_y \widehat{B}_x W = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este resultado sí modifica el vector de manera especular. Quiere decir que para vectores sobre el eje X o Y, habrá que aplicar los dos operadores pues uno lo mantiene invariante y el otro realiza la operación deseada. Se estaría tentado a pensar que entonces la aplicación sobre vectores de una transformación especular compone el operador de paridad ya que modifica cada una de las componentes espaciales de nuestros sistemas. ¿Pero qué pasa con los vectores compuestos? Verifiquemos ahora que el operador funciona para un vector cualquiera orientado 45° respecto al eje equis positivo dado por

$$W_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Aplicando el operador a este nuevo vector tenemos que

$$\widehat{B}_x W_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \\ 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Nuevamente el operador realizó una reflexión especular de una sola componente. Si queremos lograr la paridad será necesario aplicar siempre los dos operadores reflexión especular tanto en X como en Y de modo que

$$\widehat{B}_y \widehat{B}_x W_{45^\circ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \\ 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Y nuevamente se verifica la inversión de coordenadas espaciales, característica esencial del operador Paridad. ¿Es entonces la paridad una doble reflexión? Por ahora se limitará este espacio a demostrar que cada uno de los operadores \widehat{B}_y y \widehat{B}_x es en realidad la composición de otros dos. Recuerde también que la rotación se puede explicar como una doble reflexión.

Por definición tenemos que

$$\widehat{B}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si utilizamos la matriz de rotación de SO (2) y evaluamos una rotación de 180° obtenemos una matriz tal que

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos esta matriz por el operador de reflexión especular respecto al eje x tenemos que

$$\widehat{B}_x \widehat{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \widehat{B}_y$$

Y de la misma forma

$$\widehat{B}_y \widehat{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \widehat{B}_x$$

Por tanto se concluye que

$$\widehat{B}_y \widehat{B}_x = \widehat{B}_x \widehat{B}_y = \widehat{B}_y \widehat{R} \widehat{B}_x \widehat{R} = \widehat{B}_y \widehat{B}_x \widehat{R} \widehat{R} = \widehat{R} \widehat{R} = R(180^\circ)$$

Así vemos que a pesar de que se pueda pensar la Paridad como una doble reflexión especular o una triple rotación de 180° evidentemente solo las ecuaciones $\widehat{B}_y \widehat{R}$ y $\widehat{B}_x \widehat{R}$ satisfacen las condiciones físicas que exige la inversión espacial o Paridad y de esto se sigue que la Paridad es entonces una reflexión especular seguida de una rotación de 180°. Cabe resaltar que las rotaciones tienen un eje perpendicular al eje de reflexión y por tanto tenemos que

$$\widehat{B}_y \widehat{R}_x$$

Y

$$\widehat{B}_x \widehat{R}_y$$

Como $\widehat{R}_x = \widehat{R}_y = \widehat{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ independiente del eje de rotación se llega a

$$\widehat{B}_y \widehat{R} = \widehat{B}_x$$

$$\widehat{B}_x \widehat{R} = \widehat{R} \widehat{B}_y$$

Luego se demuestra por simple inspección que la matriz rotacional que es en realidad la composición de dos reflexiones es una matriz simétrica. Cabe resaltar que además de las diferencias ya expuestas hasta ahora, que las rotaciones en este sentido (las que componen el operador de paridad) obedecen a un orden específico de las componentes que caracterizan el vector posición del sistema. Éste detalle se comentó en el capítulo 2 y 3. Como se ha demostrado que es conmutativo se tiene que

$$\hat{B}_y \hat{R} - \hat{R} \hat{B}_y = \mathbf{0}$$

Ésta ecuación se conoce como relación de conmutación, conmutador de los operadores o paréntesis de Lie en el subgrupo $SE(n)$. El Teorema propuesto anteriormente permite deducir no solo propiedades del mismo grupo con otros grupos ya trabajados, sino que también nos brinda elementos para hacer análisis de situaciones físicas concretas como es el caso de la inversión espacial en sistemas clásicos.

TEOREMA DE III

Sean D y E dos ángulos cuya diferencia sea igual a 180° donde $E > D$ y B una constante de calibración, se cumple \forall transformación de rotación sobre un vector \mathbf{V} en R^2 que,

$$\mathbf{R}(\mathbf{D} + \mathbf{B})[-\mathbf{V}] = \mathbf{R}(\mathbf{E} + \mathbf{B})[\mathbf{V}]$$

TEOREMA DE IV

La composición o producto de Transformaciones Lineal discretas y continuas, presenta un isomorfismo estructural al grupo $GL(\mathbf{n}, \mathbf{R})$ en el cuerpo de los Reales de modo que se conservan las propiedades de cada grupo, como el determinante, la traza y estructura matricial para el caso clásico, tal que

/	O^+	O^-	
O^+	O^+	O^-	} Operador de Paridad
O^-	O^-	O^+	
			} Rotación como doble reflexión Especular

Figura 30. Tabla que sintetiza la composición de Transformaciones Lineales Continuas y Discretas. Teorema DEB IV.

Así, se verifica que por ejemplo la acción de un operador discreto por uno igualmente discreto, devuelve un operador continuo. La composición de un operador continuo con uno continuo devuelve uno continuo. Esto hecho refuerza y resalta los operadores estudiados en los sistemas clásicos que se vieron en detalle a lo largo del texto.

Bibliografía

- Apostol, T. (1967). *Calculus*. Waltham, Massachusetts: Blaisdell Publishing Company.
- Asimov, I. (1977). *Extracts of the left hand of the electron*. Madrid : Alianza Editorial .
- Brading, K., & Elena, C. (2003). *Symmetries in Physics*. New York: Cambridge University Press .
- Casa, J. G. (1996). El conjunto de Cantor . In J. G. Casa, *El conjunto de Cantor* (p. 15). Ciudad de Mexico : SMM.
- Clemens, S. (1998). *Geometría*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Cordero, P. (2007). *Grupos de Simetría en Mecánica Cuántica*. Retrieved from Universidad de Chile : <https://www.cec.uchile.cl/cinetica/pcordero/todos/GruposEnQM.pdf>
- Cuesta Beltrán, Y. J. (2016). Reflexiones en torno a la Educación en Ciencias: El caso de la Mecánica Cuántica . *Tecné, Episteme y Didaxis*, 921 - 927.
- De Caria, P., & Schaposnik, L. (2007, 08 10). *Universidad Nacional de La Plata*. Retrieved from Grupos Matriciales : <http://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/EA/13.%20Grupos%20Matriciales%20-%20P.%20De%20Caria%20&%20L.%20Schaposnik%20-%202007.pdf>
- Feynman, R., & Sands, M. (1965). *Lectures on Physics*. USA: Addison-Wesley.
- Galavíz Casas, J. (1996). *Instituto de Matemáticas, Universidad Autónoma de México*. Retrieved from <http://www.misclaneamatematica.org/Misc24/galaviz.pdf>
- Griffiths, D. (1987). *Introduction to elementary particles*. WILEY-VCH Verlag GmbH.
- Kosso, P. (2000). The empirical status of Symetries in physics. *Brit. J. Phil. Sci.* 51 , 81-90.
- Luque, C., Haydee, J., & José, Á. (2013). *Representar estructuras algebraicas Finitas y enumerables*. Bogotá D.C: Universidad Pedagógica Nacional .
- Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. Bristol : IOP Publishing.
- Oppenheim, N., & Kedder, D. (2012). *365 días para ser más culto*. Barcelona : Grupo Planeta .
- Penrose, R. (2004). *El camino a la Realidad*. Oxford : Debate .
- Rozo, M. (2016, 12). *Academia de Ciencias Colombiana*. Retrieved from Sobre la dinámica de una Partícula en Rotación : <http://dx.doi.org/10.18257/raccefyn.394>

- Ruíz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas* . Retrieved from <http://www.centroedumatematica.com/aruz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20as%20matematicas.pdf>
- Salam, A., Heisenberg, W., & Dirac, P. (1991). *La unificación de las Fuerzas Fundamentales* . Gedisia.
- Salcedo, L. (2018, 02 13). *Física Matemática* . Retrieved from <http://www.ugr.es/local/salcedo/public/fm/curso.pdf>
- Sánchez del Río, C. (2015). *Física Cuántica*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Serway, R., & Beichner, R. (2002). *Física para Ciencias e Ingeniería* . México D.F: McGraw-Hill.
- Suarez Bermúdez, C. G. (2016, 08 25). *Efectos Dinámicos de los sistemas no Inerciales: Una explicación desde la perspectiva Gauge*. Retrieved from Repositorio Universidad Pedagógica Nacional : <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/2146/TE-19406.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Wikipedia. (2019, 09 02). *Fundación Wikipedia, INC*. Retrieved from https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Russell

