

Sobre el potencial vector. Un análisis físico-matemático en el lagrangiano de Darwin y su extensión a la mecánica cuántica

Cristian Antonio Moscoso Riaño

Asesor:

Ignacio Alberto Monroy Cañon

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN: LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA
RELACIÓN FÍSICA - MATEMÁTICA

8 de abril de 2019

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Sobre el potencial vector. Un análisis físico matemático en el lagrangiano de Darwin y su extensión a la mecánica cuántica.
Autor(es)	Moscoso Riaño, Cristian Antonio
Director	Monroy Cañón, Ignacio Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018, 49
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	POTENCIAL VECTOR, LAGRANGIANO, HAMILTONIANO, METACOGNICIÓN, MAGNETISMO, QUARK

2. Descripción
<p>El trabajo se enmarca dentro de los supuestos de la línea de investigación: Enseñanza de la física y su relación físico matemática, ya que tiene en su base las ideas de la importancia de esta relación, su extensión más allá de una algo instrumental. Es un análisis con referentes conceptuales, tanto en la parte pedagógica como en la parte disciplinar teórica. Bajo estas precisiones, el análisis sobre el potencial vector en el lagrangiano de Darwin y su extensión a la mecánica cuántica permite entender la profundidad de la relación entre la matemática y la física, además de la relación de estas con los procesos de aprendizaje.</p>

3. Fuentes
<ol style="list-style-type: none"> 1. Bustingorry, S. O., Mora, S. J. (2008). METACOGNICION: UN CAMINO PARA APRENDER A APRENDER. Chile 2. Lucia, N. L., Hocevar, S. O. (2008). Cognición Cognición, metacognición y escritura. Revista Signos, 231-255 3. Diaz, R.O., (2015) Mecánica Cuántica: Nota de clase. 4. Jirimutu, Wang H.J., Zhang W. N. (2009). Meson spectra governed by the Fermi-Breit potential. 5. Griffiths, C., (2005) Introduction to quantum mechanics. 6. Jackson John D, (1998). Classical electrodynamics. 7. Darrigol, O., (2000). Electrodynamics from Ampère to Einstein. 8. Ayala, E., (2017). CURSO DE FISICA ATÓMICA Y MOLECULAR. 9. Gomez, F.J., (2013). El problema global en la ecuación de Schrödinger con una clase de potenciales confinantes de potencias. 10. Rivas, M., (2000). Kinematical Theory of Spinning Particles. 11. Healy, R., (2006). Gauging What's Real The Conceptual. Foundations of Contemporary Gauge Theories. 12. Sen, K, D., (2014). Electronic Structure of Quantum Confined Atoms and Molecules. 13. González, A., (2014) Manual de mecánica clásica.14.

14. Fischer, CH., Tachiev, G., (2004). Breit-Pauli energy levels, lifetime, and transition probabilities for the beryllium-like to neon-like sequences.
15. Bacelar, M., (2001). Conceptual problems in quantum electrodynamics: a contemporary historical-philosophical approach.

4. Contenidos

Este trabajo está dividido esencialmente en 4 capítulos, el primero contextualiza el trabajo en un aspecto pedagógico, junto a las razones que conllevan a este, en el segundo capítulo, se realiza una reconstrucción de algunas expresiones, además se realiza la derivación de un término de vital importancia para este trabajo: el término de interacción de Darwin para cargas en movimiento. En el tercer capítulo, se generaliza estas expresiones para representar los efectos dinámicos del término de Darwin, finalmente, en el cuarto capítulo, el término de interacción, junto a las demás expresiones, se trasladan al campo de la mecánica cuántica para que se puedan entender los efectos dinámicos del mismo.

5. Metodología

El pilar central en el que se basa este trabajo es la profunda relación existente entre la matemática y la física más allá de la instrumental, por lo que las matemáticas deben ser vistas como un pensamiento formador y utilizadas para desarrollar una descripción cuantificable de la fenomenología que se involucra en la comprensión de los conceptos estudiados por la física; Levy -Le Blond dice que La matemática y la física no debe pensarse como un lenguaje para describir esta última, debe verse como un pensamiento , una formador para la creación de teorías, como un método de representación de los fenómenos en conjuntos a las leyes físicas previas, por tanto, la relación entre la física y la matemática debe trascender de una relación instrumental, debe ser una relación constituyente, ahora, un caso puntual de un fenómeno físico puede permitir evidenciar la relevancia de lo dicho por Le Blond, además de las ventajas y las herramientas que genera para el proceso de aprendizaje

6. Conclusiones

Es posible evidenciar la relación constituyente de la física y la matemática situándose en un caso específico de la física, además de que, partiendo de un fenómeno bastante aplicado y conocido en la física, se puede generalizar, basándose en la importancia de esta relación este concepto a otros campos de la misma, entendiendo el porque y el para que se realizan ciertos análisis matemáticos y su conexión con el fenómeno en sí. También, entender todo el proceso permite una asimilación de conceptos e ideas muchos más fructífera.



FORMATO

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB

Versión: 01

Fecha de Aprobación: 10-10-2012

Página 3 de 2

--

Elaborado por:	Moscoso Riaño Cristian Antonio
Revisado por:	Monroy Cañón Ignacio Alberto

Fecha de elaboración del Resumen:	04	03	2019
--	----	----	------

Índice

Lista de figuras	2
1. Marco Pedagógico	2
1.1. Relación física - matemática	3
1.2. Relación física - matemática en el electromagnetismo	5
2. Electrodinámica Clásica y término de Darwin	7
2.1. Término de Darwin	19
3. Lagrangiano y hamiltoniano de Darwin	24
4. Término de Darwin en el campo cuántico	2
4.1. Hamiltoniano del sistema charmonium	5
4.1.1. Potencial de interacción fuerte	5
4.1.2. Término de acople de espín y término de Darwin	6
4.1.3. Término de Fermi	8
4.1.4. Hamiltoniano cinético y de masas	9
4.1.5. Hamiltoniano total del sistema	9
4.2. Espectro del sistema	9
4.2.1. Estudio de la solución radial del sistema quark - anti-quark	11
4.2.2. Metodo variacional y espectro de masa del sistema	12
4.3. Términos perturbativos	16
4.3.1. Inclusión del término de acople de espín	16
4.3.2. Inclusión del término de Fermi	18

Índice de figuras

1.1.	<i>Diagrama de relación entre las interrogantes para el proceso metacognitivo</i>	3
2.1.	Esquema de densidad de corriente. Recuperado de Introduction to electrodynamics. Griffiths, D. 1999, 212	8
2.2.	<i>Corrientes atravesando una superficie cerrada. Recuperado de Introduction to electrodynamics. Griffiths, D. 1999, 256</i>	10
2.3.	<i>Parte izquierda: Posición de las cargas que generan la densidad de corriente con respecto al origen (vector r'), la posición del punto P desde donde se mide dicha densidad y el vector de separación entre estas $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ Parte derecha: Posición del diferencial de la carga volumétrica $d\tau'$ respecto al origen.</i>	11
2.4.	<i>Divergencia de las líneas de campo vectorial \vec{A} propuesto alrededor de una carga cualquiera q_i, las líneas de campo nunca se cruzan, esto es $\nabla \cdot \vec{B} = 0$</i>	14
2.5.	<i>Campo vectorial \vec{A} en dirección z, perpendicular al campo magnético \vec{B} y en la misma dirección de \vec{J}</i>	15
2.6.	<i>Gran cantidad de cargas en una sección tubular tomadas como una densidad de carga que generan una densidad de corriente</i>	17
2.7.	<i>Velocidad de la partícula expresada en sus componentes</i>	20
2.8.	<i>Vectores \vec{y}, \vec{r} y la diferencia entre ellos</i>	21
2.9.	<i>Vector $\vec{y} - \vec{r}$ proyectado en el plano xy y formando un ángulo θ</i>	22
3.1.	<i>Gráfica de la trayectoria de la partícula con respecto al centro de masa sin el término de interacción de Darwin</i>	31

3.2.	<i>Gráfica de la trayectoria de una de las partículas con respecto al centro de masa en el término de interacción de Darwin</i>	33
4.1.	Espectro experimental del charmoniun. El umbral corresponde a la energía umbral en la cual mesones $c\bar{d}$ y $\bar{c}d$ pueden ser creados	4
4.2.	(a) Mesón antes de suministrarle energía. (b) Después de suministrarle energía para intentar separarlo, generando uno nuevo, en negro las partículas originales (quark y antiquark) y en rojo los nuevos (antiquark y quark)	6

INTRODUCCIÓN

El electromagnetismo ha sido una de las grandes ramas de la física a lo largo de su historia. Los alcances que ha tenido esta teoría han sido numerosos en dentro de la física, como en la descripción de osciladores armónicos en circuitos RLC o en la de las fuerzas que gobiernan las partículas en sus dinámicas más fundamentales; pero sus alcances no se limitan solo a la física, en la ingeniería se ve reflejado en la optimización de ordenadores, en la biología en el estudio de las conexiones nerviosas de los cuerpos vivos. Su campo no se extiende solamente en el contexto teórico o práctico en el nivel académico, sino que también va hasta el nivel tecnológico y aplicativo: esto se refleja en la sociedad, en el uso de tecnologías usadas en las comunicaciones, en el diseño de redes satelitales, el desarrollo de la tecnología LED, sistemas eléctricos, etc. . . Que pertenecen al entorno cotidiano como la necesidad innata de energía eléctrica en los dispositivos, hogares, que son indispensables en el diario vivir de la sociedad actual.

En el contexto disciplinar, el electromagnetismo se consolida en las cuatro ecuaciones de Maxwell, las cuales describen la dinámica de los campos eléctricos y magnéticos y su conexión con el potencial eléctrico y el potencial vector. Estas ecuaciones han sido establecidas tanto en el vacío como en la materia. La importancia de las ecuaciones de Maxwell trasciende a teorías como la mecánica newtoniana o la termodinámica.

El desarrollo físico matemático del electromagnetismo ha tenido un rol importante en el tratamiento del potencial tanto eléctrico como magnético, el cual refleja su importancia de muchas maneras, como en caso del tensor electromagnético en la relatividad especial, y la determinación de términos magnéticos energéticos en la mecánica cuántica o en el efecto Aharonov-Born.

El presente proyecto está enmarcado en realizar una revisión físico-matemática a un caso particular del potencial vector, para cargas puntuales en movimiento, el cual ha sido tratado en diferentes textos de literatura pero, muchos de estos textos presentan la temática de una manera desconectada de su desarrollo histórico y los tratamientos teóricos en las ramas de la física (véase por ejemplo, Introduction to quantum mechanics, Griffiths 2005, classical electrodynamics, Jackson, John D, 1998), haciendo que el proceso de enseñanza-aprendizaje desde esta temática tenga sus limitaciones, como

en la generación de conceptos propios de la mecánica cuántica y sus implicaciones (Moreira 1997). Se pretende resaltar su relevancia e importancia, no solo en el electromagnetismo, sino que también en los campos de la física que han hecho uso de dicha temática.

De manera que, mostrar un desarrollo físico - matemático de un caso particular de la electrodinámica clásica evidenciará como este formalismo matemático permite la formación de un conocimiento mas elaborado y, de igual manera, generar un proceso crítico y autorregulado siempre encaminado en el en una dirección en particular de una manera bastante óptima. Posterior a esto, el mostrar la extensión de este desarrollo clasico a otra rama de la física, también evidenciará el alcance que tiene la teoría electromagnética.

PROBLEMÁTICA

La problemática del presente proyecto se puede concebir desde dos aspectos, uno matemático y uno físico que están inherente ligados debido a la relación codependiente que llevan, así que, exponer la problemática del trabajo se hace en pro de entender cual camino se debe seguir para su desarrollo y entender a que da respuesta (o por lo menos intenta).

En 1813 Hans Christian Ørsted (1777-1851) predijo la existencia de los fenómenos electromagnéticos, fenómenos que relacionaban la electricidad y el magnetismo, pero su afirmación hasta el momento carecía de un respaldo experimental, por lo cual, no fue tomado en consideración por los físicos de la época. Ørsted en 1820 realiza un experimento con el cual respalda sus afirmaciones anteriores iniciando el estudio del electromagnetismo; los trabajos de Ørsted sirvieron de inspiración a los grandes físicos que consolidaron esta nueva rama de la física.

Cuando Michael Faraday (1791-1867), en 1821, empieza a estudiar las dinámicas eléctricas, basándose en los trabajos de Ørsted, comienza a entender que, además de las corrientes eléctricas, también se hallan involucradas otras cantidades físicas, entre ellas el magnetismo; desde allí basa su trabajo en la idea de corrientes inducidas, logrando una explicación al experimento de Ørsted desde la electricidad. A partir de los trabajos de corrientes inducidas se acerca poco a poco a lo que sería su mayor contribución a la física: **la inducción magnética**. En 1831 hace su gran descubrimiento e intenta dar una explicación para este introduciendo la idea de un estado particular que llamó estado electrotónico, diciendo que era un estado que se resiste a la formación de una corriente inducida en sus experimentos, pero esta explicación no fue aceptada por la comunidad científica y Faraday la abandona en ese momento y recurre a ella tiempo después. “Incapaz de describir los fenómenos matemáticamente, utilizó su intuición geométrica para prever el espacio alrededor de un imán por las líneas de campo de fuerza. Hay una “tensión” en el espacio, que se llama estado electrotónico. Variación con el tiempo de la tensión genera la electricidad, de acuerdo con las ideas de Faraday” [Ning, 2006]

El formalismo matemático del estado electrotónico aparece por primera vez en los trabajos de E.T. Whittaker (A History of the theories of aether and electricity, 1910) quien, en sus trabajos, atribuye su primer uso a Franz

Ernst Neumann en 1845, en una discusión sobre corrientes eléctricas inducidas a partir de la segunda ley de Ampere, usa dicho estado para explicar la dinámica en los procesos electromagnéticos. Conforme avanza el estudio del campo magnético, los físicos hacen uso de este formalismo introducido por Neumann y se presentan variaciones de este, como la expuesta por Wilhelm Eduard Weber en 1846. De manera paralela a los trabajos de Weber, William Thomson (Lord Kelvin), en su trabajo “On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic and Galvanic Forces,” atribuye propiedades a esta expresión a partir de la idea de estado electrotónico propuesto por Faraday, las cuales posteriormente, serian generalizados en una visión holística del electromagnetismo. En 1865, James Cleark Maxwell retoma los trabajos de Faraday y Ampere y unifica años de resultados experimentales, introduciendo los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético. Las ideas de Maxwell de un campo electromagnético tienen un soporte conceptual en la idea de estado electrotónico de Faraday, debido a que respondía a sus inquietudes metafísicas de la acción a distancia y renombraría este estado como potencial vector.

La primera edición del Tratado sobre la electricidad y el magnetismo, en la cual Maxwell recoge todos los resultados experimentales y los trabajos teóricos de todos aquellos que contribuyeron a la consolidación de esta nueva rama de la física (como Poisson, Laplace y Coulomb), se publicó en 1873 y Oliver Heaviside (1850-1925) decide estudiarlo y, como resultado de todo el análisis a dichos trabajos, en 1885, de forma paralela a Heinrich Hertz (1857-1894), transforma las ecuaciones de Maxwell a una notación vectorial, reduciéndolas a las cuatro que se utilizan actualmente. El uso del potencial vector tuvo, históricamente, un tratamiento como base a la solución de las ecuaciones de Maxwell, es decir, el potencial vector surge en una ecuación de onda no homogénea y su solución permite obtener el campo eléctrico y magnético sin fuentes. Al potencial vector no se le dió una importancia relevante por el hecho de que **no es una observable física directa en las experiencias de Faraday** (a pesar de la idea de estado electrotónico), ya que lo eran los campos eléctricos y magnéticos. También fue porque los efectos magnéticos producidos por el potencial vector eran pequeños en contraste a los efectos eléctricos en dichas experiencias.

Un rol histórico importante fue hecho por Charles Galton Darwin, en el cual describe la interacción instantánea de Coulomb de dos partículas cargadas que se mueven en una aproximación relativista. En 1920 Darwin propone un potencial vector para dos cargas puntuales en movimiento, y obtuvo un lagrangiano para este tipo de sistemas que se conoce como el lagrangiano de Darwin. La importancia de este término tiene muchas implicaciones en la estructura fundamental de las leyes básicas del electromagnetismo y se ve reflejada en la generalización a la mecánica cuántica, conocida como la interacción de Fermi-Breit realizada en 1930 por Enrico Fermi y Gregory Breit como una reducción a la interacción relativista entre el núcleo del átomo y el electrón. La reducción de Fermi-Breit tiene términos que dan cuenta de distintos tipos de interacciones en el átomo y ha demostrado ser una ventaja en el tratamiento con partículas de masas similares, debido a que toma en cuenta los efectos de retroceso en el orden $\frac{1}{c^2}$. En este contexto, la problemática del presente proyecto se basa en la realización de un trabajo en el cual se haga una descripción físico-matemática del potencial vector a partir de las ecuaciones de Maxwell resaltando la importancia física del término energético de Darwin para cargas eléctricas en movimiento hasta las aplicaciones más recientes en el contexto de la mecánica cuántica, en el cual, se refleje la importancia de esta magnitud física. Además, un desarrollo físico-matemático de este término desde una mirada clásica y una cuántica, podría permitir una asimilación de las diferencias entre estas miradas de la física de una manera más óptima en base a los trabajos de autores que se han dedicado al estudio de la enseñanza de la física cuántica como Marco Antonio Moreira o las reflexiones de Gastón Bachelard.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

1. Proponer un desarrollo físico - matemático que presente el contexto del potencial vector basado en el término de Darwin y su importancia en los procesos de aprendizaje de esta temática.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Hacer una revisión físico-matemática del potencial vector en el contexto de la electrodinámica clásica para cargas puntuales.
2. Realizar un análisis cuantitativo de los efectos dinámicos del termino de Darwin como corrección a la interacción electrostática clásica de partículas en movimiento.
3. Realizar un análisis cuantitativo de la generalización del término de Darwin a la interacción de Fermi-Breit en el contexto de la mecánica cuántica para sistemas como el átomo de hidrogeno y un sistema específico de quark-antiquark de la interacción fuerte.
4. Realizar una conclusión sobre los análisis clásicos y cuánticos y su repercusión, con énfasis de los fenómenos eléctricos y magnéticos y de interacciones relacionadas con el potencial vector.
5. Realizar un proceso metacognitivo el cual resalte la importancia del desarrollo físico - matemático y su relevancia en el proceso de aprendizaje de esta temática en la electrodinámica clásica y en el contexto cuántico.

Capítulo 1

Marco Pedagógico

El presente trabajo busca mostrar la relevancia e importancia de realizar un desarrollo físico - matemático de procesos físicos, reflexionar frente a los mismos, por lo que en él se identifican una serie de procesos y conceptos nuevos que, en distintos niveles de especialización académica, no son brindados o se quedan cortos en poder proporcionar las herramientas necesarias, herramientas de tipo matemático o conceptos propios de la física y de las ramas de ésta, al igual que la relación entre ellos y la forma en cómo concebir estas relaciones, las cuales se hacen desde un proceso que en ocasiones se da por sentado, de manera que se continúa con los planes propios de cada temática dejando grandes vacíos. Por esta razón, el estudio de esta temática demanda un proceso de auto aprendizaje. Teniendo en cuenta que es un proceso de asimilación propio, el presente trabajo se enmarca bajo la visión de la metacognición.



Figura 1.1: *Diagrama de relación entre las interrogantes para el proceso metacognitivo*

Siendo la metacognición la capacidad de cada sujeto para autorregular su aprendizaje, postulando sus estrategias que le permitirán llegar a un conocimiento auto reflexivo, así puede percibir si existen fallas en la manera de cómo está conociendo (Bustingorry y Mora, 2008), puede plantearse un camino a seguir en el presente trabajo, siempre bajo la noción de la metacognición y el aprendizaje autorregulado, ¿Cómo? Planteando una serie de interrogantes complementarias entre si (Figura 1.) que serán la base del proceso a lo largo del desarrollo físico y matemático realizado: El ¿Por qué? (que hace referencia a una motivación general del proceso), el ¿Para qué? (refiriéndose a los casos más específicos de los que se va a hacer), y el ¿Cómo? (que es para el aspecto técnico del proceso), de ciertos procedimientos y concepciones, ya sean nuevas o algunas que se han dado por sentadas y son retomadas. Estas interrogantes en ocasiones puede que no se hagan explícitas pero en cada momento de desarrollo se busca la respuesta a las mismas.

1.1. Relación física - matemática

La matemática en la física no debe pensarse como un lenguaje para describir esta última, debe verse como un pensamiento; uno formador para la creación de teorías, como un método de representación de los fenómenos en conjunto a las leyes físicas previas, por tanto, la relación entre la física y la matemática debe trascender de una relación instrumental, debe ser una relación constituyente que de cuenta de una construcción, de una

representación adecuada de la realidad y, de manera más puntual, de los fenómenos físicos, de las teorías y las experiencias (Lévy-Leblond, 1984). La importancia de la relación de la física y la matemática ha tenido un rol histórico que se ha desarrollado de muchas maneras. Uno de estos roles es que, en la descripción de los fenómenos físicos ha sido realizada a partir de proyecciones teóricas sin tener una evidencia experimental que lo sustente, ejemplo de esto es la teoría general de la relatividad, donde Einstein plantea los postulados de una nueva estructura del espacio-tiempo que, al principio, dichas ideas carecían de evidencia, pero, a lo largo del tiempo, se empezaron a confirmar con observaciones astronómicas como las hechas por Arthur Eddington en la primera mitad del siglo XX o, de manera más reciente, las detecciones de las ondas gravitacionales hechas por el Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO).

Entonces, ¿Por qué es relevante esta relación? Porque gracias a esta relación se han hecho gigantescos avances en la física a falta de corroboración experimental (sea por inconvenientes técnicos o de otro tipo).

De manera que, todo el desarrollo físico - matemático es codependiente, trasciende de una relación instrumental, permite una asimilación más fructífera de distintos conceptos donde, la explicación puramente matemática o, la conceptualización física, dejaría unos grandes vacíos. Sin embargo, en la forma tradicional en que se presenta el conocimiento científico a los alumnos, no se suele hacer referencia al proceso histórico de producción del mismo (Otero, 1985). De hecho, existe una distinción entre contexto de descubrimiento (que tiene que ver con el contexto y los factores que conducen a la producción del nuevo conocimiento) y el contexto de justificación (que tiene que ver con el anclaje del nuevo conocimiento en las estructuras conceptuales existentes)(Brush, 1974). La transmisión del conocimiento científico a los alumnos hace referencia, fundamentalmente, al contexto de justificación, siguiendo casi exclusivamente una retórica de las conclusiones (Otero, 1985), con escasa atención a los problemas que lo originan. Esto conlleva a que la ruptura de los dos contextos (el de justificación y el de descubrimiento) deje unos vacíos conceptuales enormes y se pasen por alto demasiadas cosas. Una forma de incidir en el desarrollo de la metacognición puede ser precisamente destacar el aspecto problemático de la física en la medida en que impulsan el desarrollo de los conceptos de ésta.

1.2. Relación física - matemática en el electromagnetismo

En el caso puntual del potencial vector en el electromagnetismo, las relaciones físico - matemáticas que se establecían de los campos eléctricos y magnéticos en termino de los potenciales eléctrico y magnético eran claras en el aspecto matemático, pero sus efectos físicos eran desconocidos antes de 1920, año en el que Darwin plantea un modelo hecho desde el formalismo provisto desde las ecuaciones de Euler - Lagrange que contiene un término energético magnético asociado a este potencial vectorial. Su importancia y relevancia aparecen en la mecánica cuántica cuando este se generaliza en la interacción de Fermi-Breit y aplicada a otros sistemas como los de quarks, al igual que en el estudio del efecto Aharonov-Born. Así, una vez más, está remarcada la importancia del desarrollo físico-matemático, el cómo se pasa desde una mirada y un tratamiento clásico a uno cuántico que algunos libros de texto dan por sentado, esto sin tener en cuenta las muchas consideraciones tanto físicas como matemáticas que se hacen en el desarrollo.

El término de energía magnética estuvo propuesto en un contexto clásico, pero fue cuando se usó en sistemas atómicos que se le da relevancia a los efectos producidos por éste. En este contexto, un desarrollo físico - matemático desde una mirada clásica y una cuántica de este término de interacción asociado al potencial vector es relevante para la enseñanza y aprendizaje de la física acorde a las temáticas usadas en las investigaciones de campo realizadas por Marco Antonio Moreira en Brasil (La enseñanza de conceptos fundamentales de Mecánica Cuántica a alumnos de graduación en Física, 2014), en este caso en particular, no solo de los fenómenos eléctricos y magnéticos, sino que se ha generalizado a otros sistemas de interacciones en la naturaleza diferentes a estas. Así que, ¿Para que hacer relevante la relación física - matemática? En el caso del electromagnetismo, para entender que la parte teórica de esta rama de la física es realizada a partir de concepciones e ideas arraigadas desde unas evidencias experimentales, las cuales permiten que quienes se han dedicado al trabajo teórico puedan basar sus ideas en un soporte concreto e ir creando sus concepciones a partir de allí.

Un estudio físico matemático del potencial vector no solo desde las ecuaciones de Maxwell sino abordando la interacción de Darwin permitiría una visión más general de esta interacción magnética y el rol que ha tenido en

la física a lo largo de la historia. De manera que, un desarrollo de este tipo permite generar un conocimiento mas crítico frente a la construcción de las ecuaciones que describen el fenómeno físico aquí propuesto, entender el porqué es una aproximación y no un resultado exacto, el orden de aproximación que se tiene y los distintos cambios de variables y las consideraciones que se hacen de las mismas, todo realizado en pro de que el proceso de asimilación de los conceptos sea mas fructífero. De manera que ¿Cómo hacer relevante la relación física - matemática? Desde el estudio del potencial vector en la electrodinámica clásica y extendiendo este a otro campo de la física, la mecánica cuántica, para un caso particular de interacción entre dos partículas subatómicas teniendo en cuenta el término de interacción de Darwin, permitirá entender mejor la forma en que ellas interactúan desde una mirada teórica teniendo en cuenta el término; al igual que la generalización de éste en la ecuación de Fermi - Breit como se muestra en algunos trabajos (por ejemplo *A generalization of the Fermi - Breit equation to noncoulombic spatial interactions*, De Sanctis, M. 2014) donde se realiza dicho desarrollo pero, de manera análoga a la parte clásica, se dan por sentados demasiados conceptos e ideas. Así, un desarrollo tanto clásico como cuántico permite esa asimilación de procesos y aclaración de conceptos mas amplia.

Capítulo 2

Electrodinámica Clásica y término de Darwin

Uno de los problemas principales en el electromagnetismo es la descripción de un sistema de cargas, la interacción, ya sea eléctrica o magnética entre ellas; ¿Por qué estudiar este problema? Porque hallar y analizar estas interacciones resulta ser piedra angular en el estudio del electromagnetismo y de la física en general, tanto en la parte clásica como en la moderna, además el estudio de este problema es de vital importancia en el presente trabajo. ¿Para qué hacer un estudio de esta rama de la física? Para poder entender que, en sus inicios, el estudio del electromagnetismo tuvo unas ideas basadas en demostración empírica (sobre todo la parte eléctrica) pero, a raíz del avance más acelerado de la parte teórica, quienes estudiaron este campo se vieron obligados a conjeturar distintas ideas y concepciones que serían demostradas tiempo después.

Basado en el tratamiento matemático que se hace para la interacción de dos partículas, ahora se puede analizar el caso de muchas partículas interactuando con otras. Resulta engorroso (además de inexacto debido a que no se toma en cuenta los efectos, por más débiles que sean, generados por las otras) estudiar el caso de dos cargas puntuales interactuando y de manera similar para todas y cada una. Este problema se logra simplificar un poco asociando una magnitud vectorial que mida el movimiento promedio de las cargas en un material, magnitud llamada **densidad de corriente**, que tendrá unidades de corriente debido al movimiento de las cargas por unidades

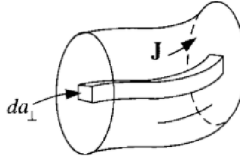


Figura 2.1: Esquema de densidad de corriente. Recuperado de Introduction to electrodynamics. Griffiths, D. 1999, 212

de longitud. Una vez asociada una magnitud de este tipo, se debe generalizar ésta para todo el espacio, lo cual se logra al centrarse en el caso de la densidad de corriente volumétrica, la cual permite dicha generalización; una densidad de corriente en una región de tres dimensiones definida como "la corriente por unidad de área perpendicular al flujo" (Griffiths 2005) (Figura 2.1) de manera que si se considera una región tubular con un corte infinitesimal da_{\perp} (con unidades de volumen) con un flujo de corriente perpendicular al mismo, y con una corriente dI (con unidades de corriente, Amperios), la densidad de corriente volumétrica será [1]

$$\vec{J} = \frac{dI}{da_{\perp}} \quad (2.1)$$

Expresión que facilita los cálculos matemáticos de ahora en adelante. Como comprobó experimentalmente Ørsted en 1821, existe relación entre los campos eléctricos y magnéticos, pero cada uno responde a unas dinámicas independientes por lo que la fuerza magnética pasó a ser un campo completamente nuevo de estudio en la física, tanto en la parte teórica como en la experimental. Como es bien sabido, en la electrostática las corrientes estáticas producen campos eléctricos pero no magnéticos, de igual manera, las corrientes constantes en el tiempo, producen campos magnéticos y eléctricos (Griffiths, 2005), o sea, existe una dependencia explícita de la existencia de los campos magnéticos hacia las corrientes eléctricas lo que supone la existencia de una expresión matemática que relacione el campo magnético y la corriente eléctrica.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \times \hat{r}}{r^2} dl' \quad (2.2)$$

Donde dl' (medido en unidades de longitud) es un tramo infinitesimal de longitud por donde pasa la corriente, \hat{r} el vector unitario, r la distancia a dl' (N/A^2), lo que da finalmente que las unidades del campo magnético \vec{B} sean Teslas. Un tesla se define como el campo magnético que ejerce una fuerza de 1 N (newton) sobre una carga de 1 C (culombio) que se mueve a velocidad de $1m/s$ dentro del campo. Dicha expresión es conocida como la Ley de Biot Y Savart; esta ley permite evidenciar la relación existente entre las corrientes y los campos magnéticos, la dependencia entre ellos, además, esta expresión se escoge por su dependencia explícita de la distancia y no del tiempo, de lo cuál se puede concluir que el campo magnético y las magnitudes asociadas (algunas que se verán posteriormente) cambien en función de la distancia. Para el caso en el que es una corriente en una región volumétrica, la expresión anterior se convertirá en ¹

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} dl' \quad (2.3)$$

Al ser un campo vectorial, el campo magnético debe poseer unas características, entre las más relevantes se encuentran la divergencia y el rotacional, que hasta ahora son desconocidos. En el caso donde se tiene un arbitrario radio s , implica que el rotacional no puede ser cero, por lo que el resultado será expresado mediante la solución de la integral de \vec{B} a partir de la ley de Biot y Savart (2.3) con la diferencia de que será una integral de camino por ser una región cerrada; quedará como

$$\oint \vec{B} dl = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s} dl = \mu_0 I \quad (2.4)$$

Si se hace a partir de coordenadas esféricas, con la corriente fluyendo a lo largo del eje Z se obtiene que:

$$\oint \vec{B} dl = \mu_0 I \int_0^{2\pi} \int_{-z}^z \int_0^s dl \quad (2.5)$$

Al ser una integral triple, el diferencial dl pasará a estar en coordenadas esféricas, por lo que la integral quedará

$$\oint \vec{B} dl = \mu_0 I \int_0^{2\pi} \int_0^z \int_0^s dz d\theta d\varphi \quad (2.6)$$

¹Para saber mas de 2.2 y 2.3 vease[1]

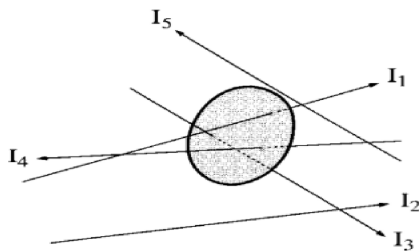


Figura 2.2: *Corrientes atravesando una superficie cerrada. Recuperado de Introduction to electrodynamics. Griffiths, D. 1999, 256*

Y su solución

$$\oint \vec{B} dl = \mu_o I \quad (2.7)$$

Ahora en el caso de un conjunto de corrientes que atraviesan una región cerrada (Figura 2.2), se tiene que fuera de la parte encerrada no hay contribución por parte de las que se encuentran allí (fuera de la región), por lo que se tendrá una integral igual a la Ley de Biot y Savart, teniendo en cuenta que la corriente nueva que ahora atraviesa a la región mas la corriente de la región encerrada, se puede tomar la densidad volumétrica de corriente \vec{J} con la cual la integral toma la forma

$$\oint \vec{B} da = \mu_o \oint \vec{J} d\hat{a} \quad (2.8)$$

Donde $d\hat{a}$ será un diferencial de área de la región.

Aplicando el teorema de Stokes $\oint \vec{F} dr = \int (ds \times \nabla) \cdot \vec{F}$ donde s es un radio arbitrario nombrado anteriormente y, por tanto ds es un segmento infinitesimal de este y \vec{F} es un campo vectorial que, en el caso que se está estudiando, son el campo magnético y la densidad de corriente.

$$\int \nabla \times \vec{B} d\hat{a} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\hat{a} \quad (2.9)$$

Al final se obtiene la expresión del rotacional del campo magnético.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.10)$$

Para la divergencia, tomando la forma general de la ley de Biot y Savart 2.4 que mide el campo magnético en un punto a una distancia r de coordenadas (x, y, z) , pero la densidad de corriente no tiene estas mismas coordenadas como se ve en la Figura 2.3, en esta las coordenadas serán x', y', z' y al ser un volumen, quedará definido por $d\tau' = (x', y', z')$

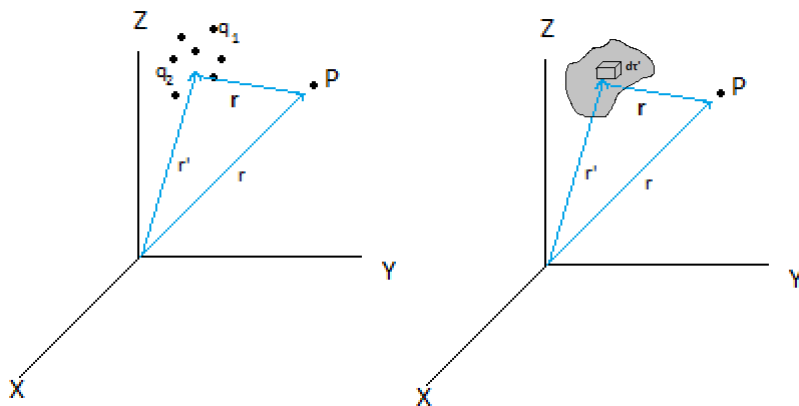


Figura 2.3: *Parte izquierda: Posición de las cargas que generan la densidad de corriente con respecto al origen (vector r'), la posición del punto P desde donde se mide dicha densidad y el vector de separación entre estas $r = r - r'$ Parte derecha: Posición del diferencial de la carga volumétrica $d\tau'$ respecto al origen.*

Lo que permite mostrar que la divergencia y el rotacional son sobre las coordenadas no prima (x, y, z)

Al aplicar la divergencia en la (2.3) se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau' \quad (2.11)$$

Usando la identidad vectorial para el lado derecho de la ecuación

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot (\nabla \times \vec{J}) - \vec{J} \cdot (\nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2})$$

Pero como el operador ∇ depende de las coordenadas no primas (x, y, z) y \vec{J} depende de las coordenadas primas entonces $\nabla \times \vec{J} = 0$ al igual que

$$\nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2} = 0$$

Lo que da como resultado

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.12)$$

Al realizar el calculo del rotacional de \vec{B} no se tomó en cuenta la dependencia de \vec{J} hacia las coordenadas prima, por lo que ahora, aplicando el rotacional se tiene que:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau'$$

De nuevo, utilizando identidades vectoriales se obtiene

$$\nabla \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \vec{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - \vec{J} \cdot \left(\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) \quad (2.13)$$

Aqui se han omitido algunos terminos debido a que sucede igual que en la divergencia, J depende de las coordenadas prima, lo que permite la reducción de terminos. Teniendo en cuenta que

$$\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r} = 4\pi\delta^3\vec{r}$$

Como $\vec{r} = (r - r')$, esta parte no es cero, por lo que la solución será

$$\vec{B} \times \nabla = \frac{\mu_0}{4\pi} \int J(\vec{r}') 4\pi\delta^3(r - r') \quad (2.14)$$

Con

$$\int f(x)\delta(x - a) = f(a)$$

El rotacional del campo magnético B será

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J}_r \quad (2.15)$$

Esta última expresión (el rotacional del campo magnético) fue propuesta por André-Marié Ampère en 1831, en la cual relaciona el campo magnético con lo que lo causa, en este caso, similar a la ley de Biot y Savart, las corrientes que son constantes en el tiempo. Esta ley de Ampère es en la magnetostática lo que la ley de Gauss es para la electrostática, permite

conocer el valor del campo en función de su causa.

Junto a las expresiones del rotacional y la divergencia del campo magnético, las expresiones del rotacional y la divergencia del campo eléctrico completan un conjunto de ecuaciones que describen dinámicas de dichos campos. Estas ecuaciones fueron ampliamente aceptadas en el siglo XIX ya que en muchos casos se acoplaban a los resultados experimentales de manera muy eficiente.

Cerca del año de 1821 Michael Faraday empieza a estudiar las dinámicas eléctricas y magnéticas basándose en un trabajo puramente experimental, dichos trabajos muestran que estas ecuaciones no son apropiadas para describir estas dinámicas ya que los resultados teóricos discrepan de los resultados experimentales, comenzando así, una nueva visión hacia éstas bajo las consideraciones experimentales de Faraday. Cuando Faraday realiza sus estudios empieza a dar una explicación argumentada de sus resultados y, de esta manera, introduce la idea de estado electrotónico, en respuesta a las dinámicas magnéticas y su relación con la corriente. Basado en las ideas y observaciones de Faraday, es James Clerk Maxwell quien encuentra los problemas en la teoría eléctrica y magnética, y es él quien, después de un largo trabajo, modifica las ecuaciones de esta teoría y, junto a otras consideraciones, da como resultado un conjunto de expresiones que describen el electromagnetismo (que tiempo después se reducirían a las cuatro ya conocidas), las Ecuaciones de Maxwell.

Para la ley de Ampere (la más relevante para el presente trabajo), la inconsistencia que encuentra Maxwell es respecto a "la alteración en el tiempo de los campos, tanto el eléctrico como el magnético" (Darrigol, 2000) y en efecto, las ecuaciones no guardan una dependencia explícita o implícita del tiempo.

Para que la divergencia del campo magnético \vec{B} sea cero, se requiere que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$:

$$\mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\nabla \times B)$$

Y como la divergencia de un rotacional es igual a cero, se puede ver que, despejando el rotacional de \vec{J}

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Esta ecuación es válida para problemas en los cuales las corrientes son estables en el tiempo, por lo que la corriente debe ser continua en el tiempo,

así que la expresión con la densidad de corriente y la continuidad de la carga ρ (que es quien genera la corriente) estará dada por la suma de las dos:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La ya conocida Ecuación de continuidad.

En la electrostática se da un tratamiento especial al campo eléctrico debido a que es un campo vectorial con rotacional igual a cero, por dicha razón se puede expresar en términos de un escalar, el potencial eléctrico. De manera similar al campo eléctrico, el campo magnético también es un campo vectorial, con la diferencia de que su rotacional no es cero, quien es cero es la divergencia, por lo que no puede ser expresado en términos de un escalar como el campo eléctrico, para el campo magnético se introducirá un campo vectorial \vec{A} como sigue. Expresando el campo magnético en función del campo \vec{A}

$$\vec{B} \equiv \nabla \times \vec{A} \quad (2.16)$$

Esto se puede hacer debido a que el campo magnético tiene una divergencia

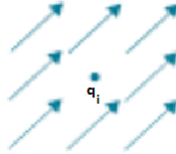


Figura 2.4: *Divergencia de las líneas de campo vectorial \vec{A} propuesto alrededor de una carga cualquiera q_i , las líneas de campo nunca se cruzan, esto es $\nabla \cdot \vec{B} = 0$*

igual a cero. Ahora, utilizándolo en la Ley de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.17)$$

Al ser un campo vectorial, el campo \vec{A} tiene unas características en lo referente a su divergencia y rotacional, en este caso, estas características son similares a las del campo magnético, o sea su divergencia es cero, lo que genera que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ reduciendo la ecuación anterior a

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.18)$$

al ser visto en términos tensoriales. Visto de manera gráfica, significa que el operador diferencial ∇^2 aplicado al campo \vec{A} , genera un campo vectorial, en este caso \vec{J} (Figura 2.5).

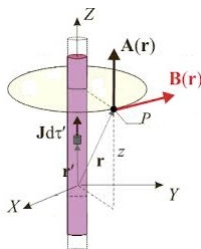


Figura 2.5: Campo vectorial \vec{A} en dirección z , perpendicular al campo magnético \vec{B} y en la misma dirección de \vec{J}

Como se puede ver, se escogió en campo A de una manera arbitraria respetando siempre la condición del rotacional, pero para definirlo completamente, se debe definir su divergencia de manera formal.

Al analizar el presente caso, se observa que tiene una geometría esférica, por lo que se puede pensar dos escenarios, el primero donde es una esfera de radio finito, por lo cual la densidad de corriente $J \neq 0$ y el segundo donde $J = 0$ en el infinito

En el primer caso, para encontrar una expresión del potencial que genera el campo \vec{A} (llamado de ahora en adelante potencial vector), se puede ver que la última expresión obtenida, en su forma es similar a la ecuación de Poisson, por lo que su solución será analoga a esta para el potencial eléctrico.

Partiendo del resultado del rotacional del campo magnético \vec{B} , es posible concluir que la expresión para el potencial vector será dado por:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r') d^3(r')}{|r - r'|} \quad (2.19)$$

Siendo \vec{J} la densidad de corriente volumétrica y $|r - r'|$ el módulo de la distancia entre los dos radio vectores de las cargas uno y dos nombrados anteriormente. Como \vec{J} es una densidad volumétrica, se puede definir como

una suma de componentes, uno longitudinal y otro transversal.

$$\vec{J} = \vec{J}_t + \vec{J}_l \quad (2.20)$$

Con esta expresión del potencial vector y, escribiendo las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales, da como resultado una ecuación de onda y no homogénea, es decir, una función que satisface

$$c^2 \nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{dt^2} \neq 0,$$

donde c es una constante relacionada con la propagación de la onda. Ahora, siguiendo la condición expuesta en las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.21)$$

Y con la ecuación de continuidad para ϕ , el potencial escalar que genera el campo eléctrico

$$\frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \int \frac{\nabla' \vec{J}(x', t) \partial^3 r'}{|r - r'|} \quad (2.22)$$

Como se puede ver se sigue usando \vec{J} y no uno u otro de sus componentes, no se conocen las características de éstos, por lo cual se hace necesario analizar cual de los dos se debe usar. Si \vec{J} es una corriente generada una carga cuya distancia al origen es r' y, además \vec{J} es un campo vectorial definido (con rotacional y divergencia), $\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t$.

Entonces si $\nabla \times \vec{J}_l = 0$, $\vec{J} = \vec{J}_t$ y comprobándolo por identidades vectoriales

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}_l) = \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_l) - \nabla^2 \vec{J}_l \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 \vec{J}_l = \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_l) \quad (2.24)$$

La cual es una expresión que no satisface la ecuación de onda no homogénea por lo que queda descartada la parte longitudinal de la densidad de corriente para los cálculos posteriores. Por otro lado, la parte transversal de la densidad de corriente sí satisface la ecuación como se ve a continuación.

$$\nabla \cdot \vec{J}_t = 0 \quad (2.25)$$

$$\vec{J}' = \vec{J}'_t \quad (2.26)$$

Por identidades vectoriales

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{J}'_t) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{J}'_t) - \nabla^2 \vec{J}'_t \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{J}'_t) &= -\nabla^2 \vec{J}'_t \end{aligned}$$

La cual es una ecuación de Poisson y su solución será

$$\vec{J}'_t = \nabla \times \nabla \times \int \frac{\vec{J}'_t d^3 r'}{|r - r'|} \quad (2.27)$$

La ecuación resultante para la parte transversal si satisface la ecuación de onda, la cual se usará de ahora en adelante. Como se habla de una gran cantidad de cargas interactuando entre sí, se puede tomar como una densidad de carga, de igual manera se puede pensar que esta densidad de carga genera una densidad de corriente, por lo tanto se puede decir que

$$\vec{J} = q\vec{v}_i\delta = \rho\vec{v}_i = q\delta(\vec{x} - \vec{x}')\vec{v}, \quad (2.28)$$

o visto graficamente

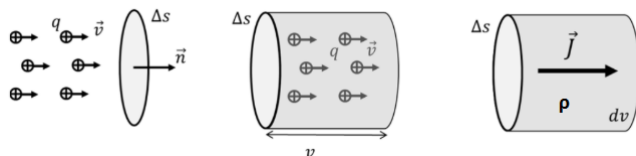


Figura 2.6: Gran cantidad de cargas en una sección tubular tomadas como una densidad de carga que generan una densidad de corriente

donde v_i es la velocidad de la carga i -ésima, q la carga, δ el delta de Dirac, x la posición de la carga uno al origen y x_2 la posición de la carga i -ésima respecto a la carga uno.

Utilizando nuevamente identidades vectoriales y pasando del sistema de unidades gaussiano (como está en, por ejemplo, 2.22) al sistema internacional de unidades S.I.

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{q\delta(\vec{x} - \vec{x}_2)\vec{v}_i d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} = \vec{J}'_t \quad (2.29)$$

18CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CLÁSICA Y TÉRMINO DE DARWIN

Sacando las constantes

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \frac{q\vec{v}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \int \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{J}'_t \quad (2.30)$$

Entonces

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \frac{q\vec{v}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} = \vec{J}'_t \quad (2.31)$$

Con las identidades vectoriales usadas anteriormente se llega a

$$\frac{1}{4\pi} \left[\nabla \cdot \nabla \frac{q\vec{v}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} - \nabla^2 \frac{q\vec{v}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \right] = \vec{J}'_t \quad (2.32)$$

Como

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{(|\vec{x} - \vec{x}_2|)} \right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}_2)$$

Aplicando en la ecuación anterior esta identidad y organizando términos

$$q\vec{v}_i\delta(\vec{x} - \vec{x}_2) + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \frac{q\vec{v}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} = \vec{J}'_t \quad (2.33)$$

Utilizando

$$\nabla(\phi\vec{F}) = \vec{F}\nabla\phi + \phi\nabla\vec{F}$$

Se obtiene

$$q\vec{v}_i\delta(\vec{x} - \vec{x}_2) + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{q\vec{v}_i\nabla}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} + \frac{\nabla q\vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \right] = \vec{J}'_t \quad (2.34)$$

Como \vec{v}_i es la velocidad de la partícula i -ésima respecto al origen y no depende de la posición de la misma respecto a la carga uno (coordenada x_2) entonces

$$q\vec{v}_i\delta(\vec{x} - \vec{x}_2) + \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{v}_i\nabla}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} = \vec{J}'_t \quad (2.35)$$

Con

$$-\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \right) = \frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3}$$

y

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \right) = -\frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3}$$

La ecuación queda reemplazada por

$$q\vec{v}_i\delta(\vec{x} - \vec{x}_2) - \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{v}_i\nabla(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} = \vec{J}'_t \quad (2.36)$$

2.1. Término de Darwin

En 1920, Charles Galton Darwin describe la interacción instantánea de Coulomb, además propone una expresión para describir la interacción magnética entre dos partículas cargadas en una aproximación relativista, este término es llamado **Término de Darwin**, el cual es una expresión del potencial vector en función de las velocidades de dichas partículas obtenido desde un tratamiento matemático a la expresión del potencial vector (2.19), partiendo desde la última expresión de la densidad de corriente obtenida. Ahora, reemplazando \vec{J} en la ecuación del potencial vector se obtiene que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{q\vec{v}_i\delta(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} - \frac{q}{4\pi} \frac{\nabla\vec{v}(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} d^3x \right] \quad (2.37)$$

Separando las integrales

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[q\vec{v}_i \int \frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}_2)d^3x}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} - \frac{q}{4\pi} \int \frac{\nabla\vec{v}_i(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3(\vec{x} - \vec{x}_2)} d^3x \right]$$

Reduciendo términos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q \vec{v}_i}{4\pi(\vec{x} - \vec{x}_2)} - \frac{\mu_0 q}{16\pi^2} \int \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \frac{\vec{v}_i(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} d^3x$$

Realizando un cambio de variable donde $x - x_2 = x'$, $\frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{1}{c}$, $y = x' - x_2$ se obtiene que

$$\vec{A} = \frac{qv_i}{cx_2} - \frac{q}{4\pi c} \int \nabla \left(\frac{1}{y - x_2} \right) \left(\frac{\vec{v} \cdot y}{y^3} \right) d^3y \quad (2.38)$$

Para resolver la parte de la integral y hallar la expresión final del potencial vector se hace un cambio respecto al laplaciano, para que quede dependiendo de las coordenadas prima: $-\nabla \simeq \nabla'$ la integral quedará como:

$$\int \frac{1}{|y - r|} \nabla' \frac{\vec{v}_i \cdot y}{y^3} d^3y$$

Debido a que las líneas de corriente transversal se desplazan hasta el infinito por su geometría esférica, también en todas direcciones, se puede considerar

una esfera de volumen infinito.

Para pasar a coordenadas esféricas el diferencial d^3y será $r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$ de manera que la integral, realizando de nuevo el cambio de $-\nabla \simeq \nabla'$ para la dependencia nuevamente a las coordenadas no primas quedará

$$-\nabla \int \frac{1}{|y-r|} \frac{v_i \cdot y}{y^3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.39)$$

Como el vector \vec{r} está en la dirección del eje z, el vector velocidad estará orientado en la dirección del plano xz

Tomando las direcciones de cada componente

$$v_i = \hat{z}v_z + \hat{x}v_x,$$

esto es

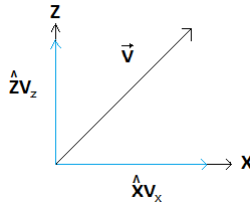


Figura 2.7: *Velocidad de la partícula expresada en sus componentes*

Y en coordenadas esféricas

$$v_i = r \cos \theta v_z + r \sin \theta \cos \phi v_x$$

Debido a que el vector \vec{r} barre toda la esfera en todos los ángulos (no el de la distancia entre las dos cargas, ya que ese es \mathbf{r}), puede tomarse orientado en el eje z, además, reemplazando en la integral anterior los componentes del vector velocidad se obtiene que

$$-\nabla \int_0^\infty y^2 dy \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{y(\cos \theta v_z + \sin \theta \cos \phi v_x)}{y^3} \frac{1}{|y-r|} d\phi \quad (2.40)$$

Como y , \vec{r} son vectores que forman un ángulo γ , junto al vector diferencia entre ellos, y \vec{r} forman un triángulo, esta diferencia se puede expresar mediante el teorema del coseno

$$|y-r| = \sqrt{y^2 + r^2 - 2yr \cos \gamma}$$

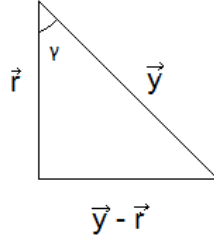


Figura 2.8: Vectores \vec{y} , \vec{r} y la diferencia entre ellos

Donde γ es el ángulo entre los vectores y , \vec{r}
 Reemplazando este cambio en (2.39) se obtiene que

$$-\nabla \int_0^\infty \int_0^\phi \int_0^{2\pi} \frac{y^2 \sin \theta y (\cos \theta v_z + \sin \theta \cos \phi v_x)}{y^3} dy d\theta d\phi \frac{1}{\sqrt{y^2 + r^2 - 2yr \cos \gamma}}$$

Reduciendo terminos

$$-\nabla \int_0^\infty \int_0^\phi \int_0^{2\pi} \sin \theta (\cos \theta v_z + \sin \theta \cos \phi v_x) dy d\theta d\phi \frac{1}{\sqrt{y^2 + r^2 - 2yr \cos \gamma}}$$

Como el termino $v_x \sin \theta \cos \phi$ depende explicitamente de ϕ y como $\int_0^{2\pi} \cos \phi = 0$ la integral se reduce a

$$-\nabla \int_0^\infty dy \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \frac{v_z \cos \theta}{\sqrt{y^2 + r^2 - 2yr \cos \gamma}} d\phi \quad (2.41)$$

Estando \vec{r} en la dirección del eje z, v_z se puede escribir como $v_z : v_z \frac{\vec{r}}{r}$, transformando la ecuación en

$$-\nabla \left[v_z \frac{\vec{r}}{r} \int_0^\infty dy \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \frac{\cos \theta}{\sqrt{y^2 + r^2 - 2yr \cos \gamma}} d\phi \right] \quad (2.42)$$

Cuando \vec{r} es restado del vector y , se genera un vector con un ángulo entre z y el plano xy , que corresponde a θ por lo que se puede inferir que $\theta = \gamma$

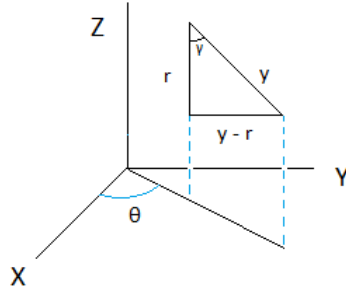


Figura 2.9: Vector $\vec{y} - \vec{r}$ proyectado en el plano xy y formando un ángulo θ

y haciendo el cambio se obtiene

$$-\nabla \left[v_z \frac{\vec{r}}{r} \int_0^\infty dy \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \frac{\cos \theta}{\sqrt{y^2 + r^2 - 2yr \cos \theta}} d\phi \right] \quad (2.43)$$

(Para ver en detalle la solución de las integrales y demás procedimientos, véase Apéndice A)

Finalmente

$$-2\pi \nabla v_z \frac{\vec{r}}{r} \int_0^\infty dy \frac{2}{r} - \frac{3y^2 r - r^3}{3y^2 r^2}$$

Como la integral se puede inferir de manera inmediata y, reemplazando este resultado en (2.38) se obtiene la siguiente expresión

$$\vec{A} = \frac{q}{2cr} \left[\frac{v_2}{r} - \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{v_2 \cdot \mathbf{r}}{r} \right) \right] \quad (2.44)$$

Donde la velocidad ya no está expresada en términos de su componente z ya que ésta es su dirección y se especifica que es la velocidad de la partícula 2.

Realizando la derivación exigida por el término ∇ , un gradiente respecto a las coordenadas no primas, en las cuales está expresada la velocidad, de manera inmediata se puede ver que la expresión final será

$$\vec{A} \simeq \frac{q}{2cr} [v_2 + \hat{r}(\hat{r} \cdot v_2)] \quad (2.45)$$

Este término final es el **Término de Darwin**, un término que da cuenta de la interacción magnética entre dos partículas cargadas en función de sus

velocidades y la separación entre las mismas.

Como se puede observar no es una integral inmediata como se expresa de manera explícita en alguno libros de texto (por ejemplo [9][10]). Esta es la expresión que da cuenta del potencial vector medido desde una carga de prueba Q y es generada por la carga q_2 a la carga q_1 , el campo magnético de la carga q_2 interactuando con la otra carga.

Así que, partiendo de las ideas de carga, corriente, densidad de corriente, etc. Se ha podido realizar un proceso de reformulación y redefinición del potencial vector, ¿cómo? desde un desarrollo matemático siempre ligado a los conceptos físicos y sus magnitudes que intervienen en los procesos de interacción de partículas cargadas, sus campos en función de sus distancias y sus velocidades, las cuales por lo general no son tomadas en cuenta en los cálculos del potencial vector.

Capítulo 3

Lagrangiano y hamiltoniano de Darwin

Para describir la dinámica de un sistema, se puede hacer una descripción desde el formalismo proporcionado por las ecuaciones de Euler - Lagrange, esto para ver como cambian los sistemas y sus magnitudes en función de nuevos parámetros o términos surgidos desde un desarrollo matemático ligado al fenómeno físico de la interacción de partículas cargadas.

Cuando se hace una descripción lagrangiana de una partícula relativista cargada que se está moviendo o interactuando con un campo electromagnético externo, no surgen problemas en dar un tratamiento electrostático con un potencial vectorial usado frecuentemente pese a la arbitrariedad de su elección y el sentido físico del mismo, al igual que con las ecuaciones de Maxwell usadas en estos casos o las distintas consideraciones relativistas de interacción que se hagan, de esta manera la descripción lagrangiana para una partícula cargada interactuando con un campo externo está dada por la expresión:

$$L_{int} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{e}{mc} \right) (p \cdot \vec{A}) = \left(\frac{e\vec{v} \cdot \vec{A}}{c} \right) - e\phi^1 \quad (3.1)$$

Donde e , m , y p son la carga, la masa y el momento de la partícula; γ es el factor de Lorentz, c la velocidad de la luz, \vec{A} es el potencial vector y ϕ el

¹Para saber más del lagrangiano de interacción vease [9]

potencial escalar.

Cuando se decide analizar la interacción magnética de dos cargas que interactúan en campos generados por la otra con velocidades relativistas surge el primer problema: realizar una descripción lagrangiana del sistema, o sea, generar una función escalar que permita conocer como se comporta el sistema, su evolución temporal y el comportamiento de otras propiedades. Es un problema debido a que este tipo de descripción se hace solo para velocidades no relativistas, además se hace con base en las coordenadas generalizadas, (unas coordenadas que permiten describir de manera unívoca la configuración del sistema) y las velocidades instantáneas de las partículas, lo cual va en clara contraparte con el formalismo relativista, por lo que para lograr hacer una descripción lagrangiana del sistema se hace necesario tomar una serie de consideraciones: En primer lugar, las correcciones relativistas deben ser de bajo orden para poder despreciar los efectos de retardo, esto es, las velocidades de las partículas deben ser considerablemente bajas con respecto a la velocidad de la luz; esto se hace porque el potencial escalar ϕ debido a una de las partículas y su contribución relativista ya es conocida gracias al gauge de Coulomb y está en el orden de $\frac{v}{c}$ por el potencial instantáneo de Coulomb, por lo que el término faltante es uno de que de cuenta de la interacción magnética debida al potencial vector \vec{A} de la partícula y así completar el lagrangiano con sus respectivas correcciones relativistas. De manera que, el lagrangiano que describe por completo el sistema viene dado por una parte cinética debida al movimiento de cada una de las partículas, esto es, un lagrangiano de una partícula libre para cada una de las partículas que están interactuando, mas un lagrangiano de interacción entre las mismas, esto es[5]

$$L = L_1 + L_2 + L_{int}$$

El lagrangiano de interacción L_{int} en el límite estático no relativista estará dado por:

$$L_{int} = \frac{q_1 q_2}{r}$$

Recordando que r es la separación relativa entre las partículas cargadas. Como lo que se quiere realizar es una generalización lagrangiana mas allá del límite estático se debe determinar tanto ϕ como A con sus correspondientes correcciones relativistas. Como se ha dicho antes, ϕ ya está dado

correctamente por el gauge de Coulomb en el orden $\frac{v}{c}$, por lo que solo queda por determinar la expresión del potencial vector debido a una u otra partícula, la cual fue realizada con anterioridad.

Multiplicando la última expresión obtenida para el potencial vector por $\frac{q_1 v_1}{c}$ para obtener la expresión de interacción correspondiente

$$\vec{A} \simeq \left[\frac{q}{cr} \left(v + \frac{r(v \cdot \hat{r})}{r^2} \right) \right] \left[\frac{q_1 v_1}{c} \right]$$

Realizando las multiplicaciones

$$L_{int} = \frac{q_1 q_2 (v_1 \cdot v_2)}{2c^2 r} + \frac{q_1 q_2 (r \cdot v_1)(v_2 \cdot \hat{r})}{2c^2 r^3}$$

Factorizando

$$L_{int} = \frac{q_1 q_2}{r} \left(\frac{1}{2c^2} (v_1 \cdot v_2) + \frac{(v_1 \cdot \hat{r})(v_2 \cdot r)}{r^2} \right)$$

Como $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, la ecuación quedará reducida a

$$L_{int} = -\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_2}{2c^2 r} (v_1 \cdot v_2) + (\hat{r} \cdot v_1)(\hat{r} \cdot v_2) \quad (3.2)$$

Una vez obtenido el lagrangiano que da cuenta de la interacción magnética de las partículas, faltan los lagrangianos cinéticos de cada una, los cuales están dados por la expresión ²

$$L_i = -m_i c^2 \gamma^{-1}$$

Donde $i = 1, 2, 3, \dots$

Por expansiones de serie de Taylor, el lagrangiano que describe la contribución cinética de cada una de las partículas será [5]:

$$-m_i c^2 \gamma^{-1} = -m_i c^2 + \frac{m v_i^2}{2} + \frac{m v_i^4}{8c^2}$$

²Vease[5]

Con las expresiones de los tres lagrangianos, se puede obtener finalmente el lagrangiano de Darwin.

$$L = m_1 c^2 + \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_1^4}{8 c^2} + m_2 c^2 + \frac{m v_2^2}{2} + \frac{m v_2^4}{8 c^2} - \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_2}{2 c^2 r} [(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + (\hat{r} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r} \cdot \vec{v}_2)], \quad (3.3)$$

donde el último término, es el que da cuenta del potencial vector generado por la interacción de las dos partículas cargadas.

Una vez hallada una descripción lagrangiana del sistema, para realizar una descripción en terminos de operadores cuanticos es necesario obtener una función hamiltoniana que de cuenta de la energía del sistema.

Para hallar una función hamiltoniana, se debe encontrar una expresión para el momento conjugado canonico. Desde

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = P_i$$

La derivada parcial del lagrangiano respecto a v_1 será

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} = m_1 \vec{v}_1 + \frac{1}{2 c^2} m_1 \vec{v}_1^3 + \frac{q_1 q_2}{2 c^2 r} (\vec{v}_2 + \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{v}_2))$$

Definiendo $k_i \simeq m_i \vec{v}_i + \frac{m_i v_i^2 \vec{v}_i}{2 c^2}$, una aproximación de la energia cinética, se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} = k_i + \frac{q_1 q_2}{2 c^2 r} (\vec{v}_2 + \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{v}_2))$$

Con $\frac{m_2}{m_2} = 1$ y con $k_j \simeq m_j v_j$ (una aproximación de energía cinética no relativista debida al factor de orden $\frac{1}{c^2}$), se tiene que el momento conjugado canonico P_i será

$$P_i = k_i + \frac{q_1 q_2}{2 c^2 r m_j} (k_j + \hat{r}(\hat{r} \cdot k_j)) \quad (3.4)$$

Una vez obtenida una expresión para los momentos conjugados canónicos,

se puede hallar la función hamiltoniana desde la forma estandard, la transformación de Legendre ³

$$H = \Sigma \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i - L$$

(Para ver en detalle la obtención del hamiltoniano, véase Apéndice B) Con las expresiones necesarias para el hamiltoniano se tiene

$$H = \frac{m_1^2 v_1^2 + \frac{m_1^2 v_1^4 \vec{v}_1^2}{4c^4}}{m_1(1 + \frac{v_i^2}{2c^2})} + \frac{m_2^2 v_2^2 + \frac{m_2^2 v_2^4 \vec{v}_2^2}{4c^4}}{m_2(1 + \frac{v_j^2}{2c^2})} +$$

$$\frac{q_1 q_2}{r} - \frac{q_1 q_2}{2rc^2} ((\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) + (\hat{r} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r} \cdot \vec{v}_2))$$

Teniendo en cuenta que el momentum de una partícula, sin tener en cuenta la interacción con otras está dado por $p_1 = m_1 v_1 + \frac{m_1 v_1 v_i^2}{2c^2}$ (idéntico al término k_i), la función hamiltoniana estará dada en términos p_1 , p_2 y r . Introduciendo $\frac{m_1}{m_1} = 1$ y $\frac{m_1^3}{m_1^3} = 1$ al igual que los términos de m_2 para completar las expresiones del momentum, se obtiene finalmente que

$$H = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{p_1^2}{m_1^2 c^2}\right) \frac{p_1^2}{2m_1} + \left(1 - \frac{1}{4} \frac{p_2^2}{m_2^2 c^2}\right) \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{q_1 q_2}{r} - \frac{q_1 q_2}{2m_1 m_2 r c^2} ((p_2 \cdot p_1) + (\hat{r} \cdot p_1)(\hat{r} \cdot p_2))$$

Una vez hallados el lagrangiano y el hamiltoniano de Darwin, se pueden hallar las ecuaciones de movimiento para poder ver los efectos dinámicos del término de Darwin en términos del centro de masa.

Realizando unos primeros cálculos sin tener en cuenta el término de interacción de Darwin, solo el potencial de Coulomb

³[17]

$$L = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Kq_1q_2}{r}$$

Con $\vec{x}_{cm} = 0$ (posición del centro de masa del sistema), $\vec{x} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)r$ (posición de la primera partícula con respecto al origen) y $\vec{x}' = \left(\frac{-m_1}{m_1 + m_2}\right)r$ (posición de la otra partícula con respecto al origen)[1], las velocidades estarán definidas como

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

Reemplazando estas nuevas expresiones de velocidad en el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)^2 - \frac{Kq_1q_2}{r}$$

Definiendo $M = m_1 + m_2$

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{-m_1}{M}\vec{v}\right)^2 - \frac{Kq_1q_2}{r}$$

Factorizando

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2M}{M^2}\vec{v}^2 - \frac{Kq_1q_2}{r}$$

Tomando $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$ (masa reducida del sistema), se obtiene finalmente que

$$L = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - \frac{Kq_1q_2}{r} \quad (3.5)$$

Transformando a coordenadas polares donde, el vector velocidad está dado por la expresión

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Reemplazando en la expresión anterior se obtiene que

$$L = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - \frac{Kq_1q_2}{r} \quad (3.6)$$

Ahora, hallando las ecuaciones de movimiento ⁴

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(Ecuaciones de Euler-Lagrange), con las coordenadas r y θ se obtiene que
Para la coordenada r

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r}$$

Realizando las respectivas derivadas, finalmente se obtiene que

$$\ddot{r} = -\frac{kq_1q_2}{\mu r^2} + r\dot{\theta}^2 \quad (3.7)$$

De manera similar para la coordenada θ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

⁴Vease [18]

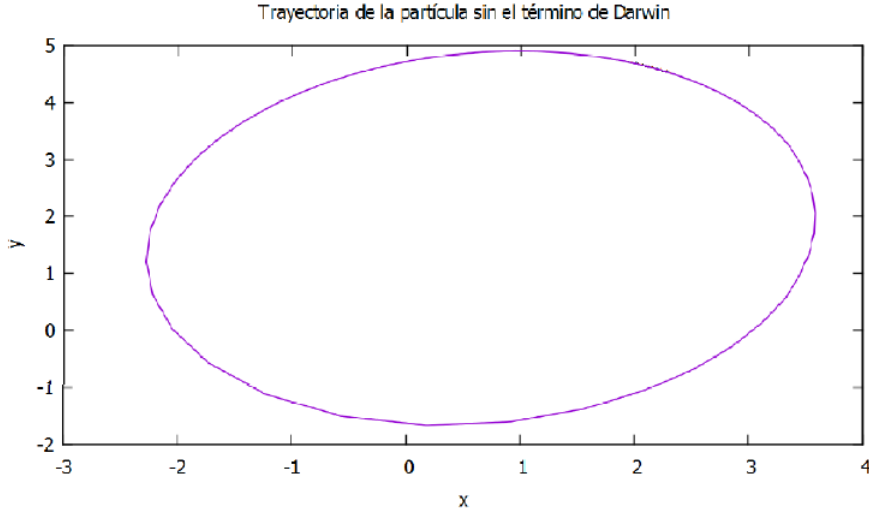


Figura 3.1: Gráfica de la trayectoria de la partícula con respecto al centro de masa sin el término de interacción de Darwin

Se obtiene que

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \quad (3.8)$$

Con las ecuaciones de movimiento obtenidas (expresiones de \ddot{r} y $\ddot{\theta}$) y transformadas en coordenadas polares usando $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$, se puede generar una gráfica que muestra la trayectoria de la partícula debidos a los efectos dinámicos de la interacción de Coulomb entre las partículas (Figura 3.1), o sea, una trayectoria que no se ve afectada por términos de interacción magnética generados por el potencial vector en su forma generalizada (el término de Darwin).

Incluyendo el termino de Darwin, sin incluir los términos relativistas, el lagrangiano tomará la forma

$$L = Mc^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - \frac{q_1q_2}{r} + \frac{q_1q_2}{2c^2r} \left[\left(\frac{m_2}{M}\vec{v}\right) \cdot \left(\frac{m_1}{M}\vec{v}\right) + \left(\frac{m_2}{M}\right) (\hat{r} \cdot \vec{v}) \left(\frac{-m_1}{M}\right) (\hat{r} \cdot \vec{v}) \right]$$

En términos de la masa reducida y realizando el cambio de la velocidad en coordenadas polares

$$L = Mc^2 + \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - \frac{q_1q_2}{r} \\ + \frac{q_1q_2}{2c^2r} \left[-\mu(\dot{r}^2\hat{r} + r^2\dot{\theta}^2\hat{\theta} + (\hat{r} \cdot (\dot{r}\hat{r} + r\theta\hat{\theta}))(\hat{r} \cdot (\dot{r}\hat{r} + r\theta\hat{\theta})) \right]$$

Realizando las operaciones de los vectores unitarios y los componentes de la velocidad en coordenadas polares

$$L = Mc^2 + \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - \frac{q_1q_2}{r} - \frac{q_1q_2\mu}{2c^2r} (2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (3.9)$$

Hallando las ecuaciones de movimiento de manera similar al procedimiento anterior. Para la parte angular θ

$$\ddot{\theta} = \mu r^2 - \frac{q_1q_2r}{c^2M} \quad (3.10)$$

Para la parte radial r

$$\ddot{r}\mu - \frac{2\mu\dot{r}q_1q_2}{c^2rM} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{q_1q_2}{r^2} + \frac{\mu\dot{r}^2q_1q_2}{c^2r^2M} + \frac{\mu\dot{\theta}^2q_1q_2}{2c^2M} + \frac{\mu\dot{\theta}^2q_1q_2}{c^2M} = 0$$

Despejando \ddot{r} se tiene

$$\ddot{r} = \left(\frac{1}{(r\mu - \beta)} \right) \left(\mu r^2\dot{\theta}^2 - \frac{q_1q_2}{r} - \frac{\beta\dot{r}^2}{r} - \frac{3}{2}\beta\dot{\theta}^2r \right) \quad (3.11)$$

donde $\beta = \frac{q_1q_2\mu}{c^2M}$

Similar al procedimiento anterior, con las expresiones de $\ddot{\theta}$ y \ddot{r} convertidas a coordenadas cartesianas, se genera una gráfica que permite visualizar los cambios en la trayectoria generados por la inclusión del término de Darwin (Figura 3.2)

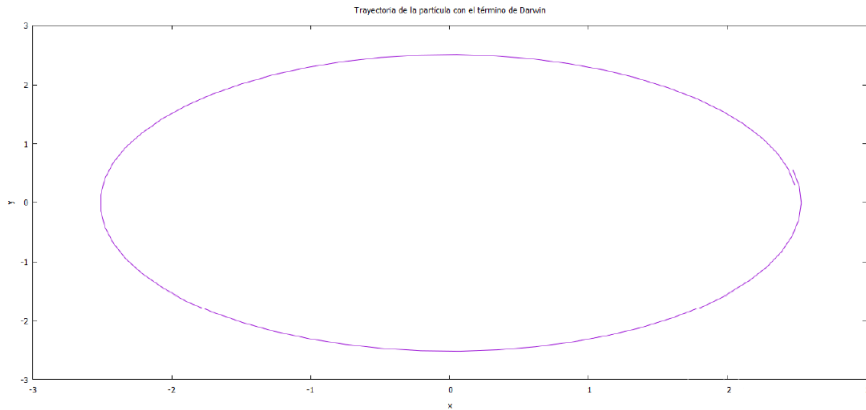


Figura 3.2: Gráfica de la trayectoria de una de las partículas con respecto al centro de masa en el término de interacción de Darwin

Análisis de resultados

Este análisis se hace con el fin de comprender de una manera mas acertiva lo expuesto hasta ahora, tanto en la parte matemática, como su relación con la parte física.

Al realizar las gráficas que describen las trayectorias, es evidente el cambio que se da cuando es incluido el término de Darwin. Este cambio generado en la excentricidad de la elipse que describe la trayectoria es debido a los términos centrífugos que traen consigo las ecuaciones de movimiento generadas por la inclusión del término en el lagrangiano.

A pesar de que hay un cambio en la expresión de la aceleración angular sin el término de Darwin (3.8), despues de que se incluye (3.10), no es tan drástico como el cambio que se genera en la parte radiál, es dicha parte la que genera el cambio de la elipse, es la que posee el término centrífugo, además de que, como es una interacción de dos partículas en movimiento, se generan cambios en las trayectorias de las dos, de esta manera puede decirse que la inclusión de este término, tanto en el tratamiento matemático como la parte gráfica, permite acercarse un poco mas a las ideas teóricas que se tienen respecto al comportamiento de las partículas. Desde una explicación física, desde las leyes de esta, el cambio es generado porque el término de interacción de Darwin, primero está dado en función de la velocidad y de la distancia que separa a las partículas. Segundo, al estar en función de las velocidades, significa que la interacción magnética es proporcional al término de Darwin y afecta la fuerza a la que se somete una partícula por la presencia de la otra (a saber, la fuerza de Lorenz). Así que, a pesar de que es un extenso tratamiento matemático, en cada momento se ha procurado tener en cuenta la relación matemática y física dando a entender como se generan campos vectoriales en función de otros(como la densidad de corriente y el potencial vector), las distancias y las velocidades, todo con el apoyo de gráficas y figuras para la asimilación del como se hizo todo el procedimiento, las concepciones y reformulaciones.

Capítulo 4

Término de Darwin en el campo cuántico

La mecánica cuántica ha dedicado su desarrollo al estudio de las partículas atómicas y subatómicas, su interacción y demás propiedades que éstas poseen, entonces, pasar de una mirada clásica a una cuántica debe hacerse para poder entender los alcances que han tenido ciertas teorías y, en este caso, el papel que juega el potencial vector en sistemas cuánticos, sus transformaciones matemáticas y como se generaliza posteriormente en el término de Fermi - Breit. A pesar de que el potencial vector tiene su más estrecha relación con el término de Fermi - Breit, para conocer la manera en que influye en los sistemas cuánticos (en especial en un sistema) debe también verse algunos otros términos que, en conjunto, generan unas ciertas correcciones en resultados de algunos procedimientos.

En 1930 las partículas conocidas eran el electrón, el protón, el neutrón y el fotón. Al pasar de los años se encontraron nuevos tipos de partículas, unas parecidas a los electrones como los muones, y otras parecidas a los protones como kaones, los piones y otras más pesadas que los protones se encontraron en los rayos cósmicos como las partículas Delta, las Sigma y otras. A finales de los 50 había una gran cantidad de partículas que eran clasificadas como mesones y bariones. En 1964 los físicos estadounidenses Murray Gell-Mann y George Zweig introducen de forma independiente que las partículas nombradas anteriormente estaban compuestas por otras, unas partículas más elementales, las cuales Gell-Mann denomina quarks[8]. Hasta

la fecha se acepta que se conocen seis tipos de quarks; encanto, arriba, abajo, extraño, cima y fondo (en inglés charm, up, down, strange, up y bottom respectivamente). Los bariones que son partículas de espín semi entero como el protón están compuestos de tres quarks. Los mesones son partículas de espín entero y que están constituidos por un quark y antiquark [17].

Cuando se empieza a estudiar el sistema de mesones de quark - antiquark, el espectro experimental muestra que los niveles mas bajos de energía, son semejantes a los del positronio, un sistema en el cual, la interacción de las dos partículas (electrón y positrón) es gobernada por un potencial de tipo Coulomb[2], pero conforme se presentan los estados excitados del sistema quark - antiquark, se observa que estos son muy diferentes a los del positronio, por lo que se concluye que el potencial que gobierna la interacción en el sistema no es de tipo de Coulomb, lo que conlleva a que para calcular el espectro de energía del sistema, es necesario proponer distintos potenciales que permitan reproducir el espectro del sistema. En 1974 el estado mesónico J/Ψ fue descubierto, con lo cual se dió a los quarks una realidad definitiva. Este sistema esta compuesto de un quark encanto (charm) y un antiquark encanto (anticharm) de masas iguales, en este sentido es un sistema muy parecido al positronio, con la diferencia de que la interacción es fuerte. Este sistema en el ambito de las partículas también tiene un espectro, la diferencia es que el espectro son nuevas partículas con estados excitados de momento angular y de energía.

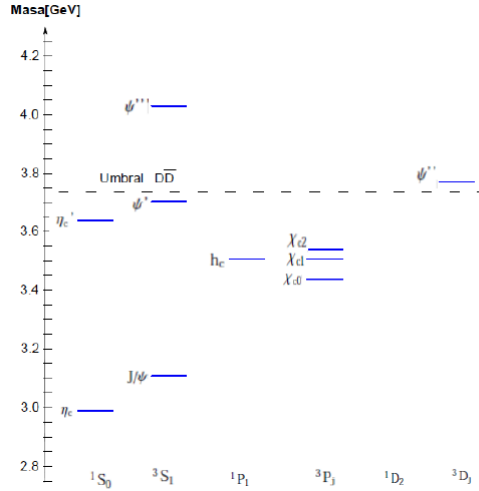


Figura 4.1: Espectro experimental del charmonium. El umbral corresponde a la energía umbral en la cual mesones cd y $\bar{c}\bar{d}$ pueden ser creados

En la Figura 4.1 se muestra el espectro experimental del charmonium. En el eje vertical se encuentran los valores de las masas, horizontalmente son valores correspondientes al momento angular y su relación con el espín de la forma $(2s+1)L_J$, donde s es el valor del espín, L el momento angular y $J = L + s$ hace referencia al acoplamiento espín - orbita, además las letras S , P , D son relacionadas al estudio espectroscópico y al momento angular así: $L = 0 \rightarrow S$, $L = 1 \rightarrow P$ y $L = 2 \rightarrow D$.

La posición de los niveles más bajos del espectro muestra semejanza con los niveles del positronio. Pero las diferencias de energía en los estados excitados permiten concluir que el potencial de interacción entre quarks es de forma disimil a la de un potencial tipo Coulomb. Además, si el potencial fuera de verdad tipo Coulomb, con cierta cantidad de energía sería posible liberar los quarks del sistema, lo cual hasta el momento no ha sido observado. Por lo tanto, se tiene la necesidad de proponer un potencial que cumpla con las características del confinamiento (concepto aclarado posteriormente) y reproduzcan el espectro del Charmonium y dar un correcto tratamiento a este sistema.

4.1. Hamiltoniano del sistema charmonium

El charmonium puede tratarse como un sistema de un cuerpo con masa reducida μ . Las interacciones serán descritas desde el centro de masa. El hamiltoniano tiene diferentes componentes como cinéticas (debidas al movimiento de las partículas), términos que describen la interacción entre el momento magnético de la partícula con el momento magnético de otra (interacción espín - espín) y que de ahora en adelante se llamará acoplamiento espín - espín, el momento magnético con el movimiento orbital alrededor de otra partícula o centro de masa (interacción espín - orbita) que de ahora en adelante se llamará acoplamiento espín - orbita y que están asociados a la interacción fuerte de color. Las interacciones eléctricas son despreciables por la predominancia de la interacción fuerte.

4.1.1. Potencial de interacción fuerte

En 1974 fue propuesto un potencial por el grupo de E. Eichten para describir el estado base y alguno de los estados excitados que posee el sistema quark - antiquark. El potencial que fue propuesto tiene la forma de un potencial de Coulomb mas uno lineal

$$V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s + br$$

el cual es conocido como potencial de Cornell [12].

La constante Coulomb en el aspecto clásico: Kq^2 , es cambiada en este caso por la constante $-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}$ en el primer término que surge en analogía con el potencial de Coulomb en el positronio y describe la interacción a cortas distancias propia de la interacción fuerte, el número $\frac{4}{3}$ representa el número cuántico de color relacionado con las matrices de Gell-Mann del grupo de simetría $SU(3)$, $\alpha_s = 0,5461$ es la constante de acoplamiento fuerte cuyo valor es determinado de manera esencialmente fenomenológica, un número adimensional que juega el rol de acoplamiento, describiendo la fuerza generada en la interacción de espín - espín.

La carga de color de los quark y antiquark está sujeta al confinamiento, lo cual hace referencia al hecho de que nunca se ha encontrado un quark libre porque cuando se intenta separar un quark y un antiquark, la fuerza

atractiva entre ellos aumenta con la distancia (diferente a la interacción gravitacional o la electromagnética), por lo que se requiere aún mas energía para separarlos lo que conlleva a que surgan dos pares quark- antiquark. Este confinamiento es representado por el segundo término en función de la distancia r y con b que tiene unidades de GeV^2 . Este potencial de confi-

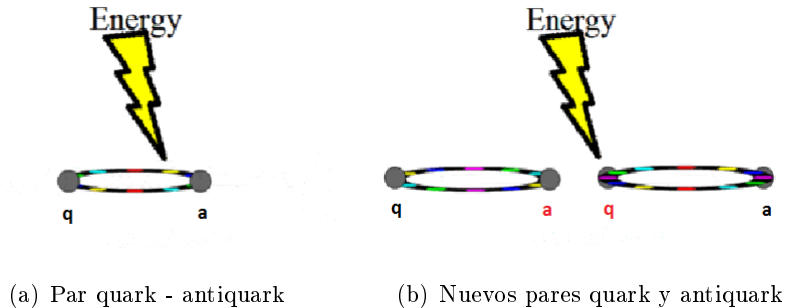


Figura 4.2: (a) Mesón antes de suministrarle energía. (b) Después de suministrarle energía para intentar separarlo, generando uno nuevo, en negro las partículas originales (quark y antiquark) y en rojo los nuevos (antiquark y quark)

namiento es nombrado debido a que nunca se ha observado un quark libre, siempre se observa con su respectivo antiquark (como se describió anteriormente), así que, de una manera indirecta, el confinamiento obliga a que se hable del potencial vector, de la interacción magnética entre las partículas, del acoplamiento de espín - espín, etc.

4.1.2. Término de acople de espín y término de Darwin

Debido a la visualización de algunas líneas espectrales inesperadas en el estudio espectroscópico del átomo, se debieron realizar unas correcciones perturbativas en el hamiltoniano del sistema. Las correcciones se hicieron con el fin de describir las líneas espectrales observadas, a esto se le conoce como *Estructura fina*, entre las correcciones mas relevantes se encuentran las de orden relativista, la ocasionada por el término de Darwin y el acoplamiento espín - orbita, la cual, se puede decir que es la causa principal de la estructura fina, entendido como la interacción del movimiento orbital

de una partícula alrededor de otra y el espín de la misma. Además de la estructura fina, existen estructuras aún más finas que esta, entre ellas la *Estructura hiperfina*, la cual es ocasionada, principalmente, por la interacción magnética del espín con su movimiento orbital generando un momento dipolar magnético. Cuando dos partículas interactúan, se genera una energía en esa interacción, por lo que también debe ser tomada en cuenta una energía de interacción de espín - espín para el tratamiento del sistema quark - antiquark.

La energía de interacción espín - espín para el sistema está asociada en forma similar al término de contacto de Fermi ¹ en el átomo de hidrógeno. Cada partícula tiene un momento magnético (medido en Julios sobre Teslas J/T) asociado a su espín, su momento angular intrínseco (con momento angular $L = 0$), dado por [17]

$$\mu_i = \frac{q_i}{m_i} S_i$$

donde q_i es la carga de la partícula (medida en coulombs), m_i es la masa (medida en gigaelectronvolts GeV.) y S_i es el espín de esta (medido en unidades de momentum).

La energía de interacción del término de contacto asociada a un momento magnético de color es dada por[2]

$$V_S = -\frac{8\pi}{3}\alpha\mu_i \cdot \mu_j \delta(r_i - r_j)$$

donde μ_i y μ_j son los momentos magnéticos de las partículas interactuando, $\alpha = \alpha_s$ es la constante de acoplamiento fuerte, δ es el delta de Dirac y r_i , r_j son los vectores de posición de las partículas al origen.

Retomando las constantes $K = \frac{4\alpha_s}{3}$ (proveniente del acople de color) y con $|r_i - r_j| = \mathbf{r}$, se puede transformar la expresión, en términos del espín y las constantes en

$$V_S = -\frac{8\pi\alpha_s k}{3m^2} S_i \cdot S_j \delta(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

además, el término de acople de espín $S_i \cdot S_j$ para el sistema quark - antiquark, que poseen un espín $s_a = s_q = \frac{1}{2}$ será

$$S_q \cdot S_a = S^2$$

¹Para saber más de este término de contacto y sus implicaciones en el estudio del átomo de hidrogeno, vease[2]

donde S^2 es el valor del número cuántico del espín total. Entonces

$$S^2 = (S_q + S_a)^2 = S_q^2 + 2S_q S_a + S_a^2$$

Para la magnitud de S_q se tendrá que $|S_q| = \sqrt{s_q(s_q + 1)}\hbar$, para S_a será $|S_a| = \sqrt{s_a(s_a + 1)}\hbar$ de manera que

$$S^2 = s_q(s_q + 1)\hbar^2 + s_a(s_a + 1)\hbar^2 + 2S_a \cdot S_q$$

Reemplazando valores y operando, finalmente se tiene

$$S_a \cdot S_q = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ si} & S = 1 \\ -\frac{3}{4} \text{ si} & S = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Un término también proporcional al delta de Dirac es el término de Darwin, que, como ya se ha visto con antelación, es generado por la interacción magnética. Este término es dado en correcciones perturbativas análogo al átomo de hidrógeno, cuyo origen es dado como una corrección que tiene en cuenta la energía estática medida en su origen, y es dado por [2]

$$V_D = -\frac{\pi}{2m^2} \alpha_s K \delta(\mathbf{r}) \quad (4.3)$$

En comparación con el término en el campo clásico, la constante de acoplamiento (la carga eléctrica q_i) es cambiada por la constante de acoplamiento fuerte α_s y también K , además de $\delta(r)$ que da cuenta de la dependencia del radio que tiene el término de manera explícita en el campo clásico.

4.1.3. Término de Fermi

En el caso del átomo de hidrógeno, esta interacción tiene su origen en el acople del potencial vector \vec{A} con la corriente del electrón. Puede entenderse como una corrección a la interacción de Coulomb debida al movimiento de las cargas y una generalización del término de Darwin, además, para sistemas hadrónicos (como el que se está estudiando), el término está ligado con el acoplamiento fuerte entre los quarks y la estructura fina del espectro de masa de estos. Este término genera un potencial. [7]

$$V_f = -\frac{\alpha_s K}{2m_i m_j} \left[\frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j}{r} + \frac{(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{r})(\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right] \quad (4.4)$$

4.1.4. Hamiltoniano cinético y de masas

En una aproximación no relativista la energía cinética es dada por el término cuadrático en el momentum y se incluye la energía en reposo de los quarks. Esto es:

$$V_k = \frac{P^2}{2\mu^2} + 2m_q$$

donde P es el momentum, $2m_q$ es la masa en reposo de los quarks y μ es la masa reducida del sistema.

4.1.5. Hamiltoniano total del sistema

Con las expresiones anteriores el hamiltoniano total en el centro de masa es es dado por:

$$H = \frac{P^2}{2\mu^2} + 2m_q + V(r) + V_D + V_S + V_f,$$

escritos estos potenciales de manera explícita se tiene

$$H = \frac{P^2}{2\mu^2} + 2m_q - \frac{4\alpha_s}{3r} + br - \alpha_s K \frac{\pi}{2} \delta(r) \left[\frac{2}{m^2} + \frac{16}{3m^2} S_a \cdot S_q \right] \\ + \frac{\alpha_s K}{2m^2} \left[\frac{\mathbf{P}^2}{r} + \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right].$$

Para el tratamiento del charmonium, los tres primeros términos son los que generan una mayor aportación, por lo que los demás pueden ser incluidos de manera perturbativa.

El último término, el potencial de Fermi es la generalización del potencial vector en el campo cuántico, guarda las mismas relaciones de proporcionalidad y dependencia de las velocidades y la distancia entre las partículas (en el caso clásico cargas, en el cuántico quarks).

4.2. Espectro del sistema

Una vez se han hecho las correcciones generadas por el término de Darwin en el estudio de la electrodinámica clásica y cargas puntuales en movimiento, visto los efectos dinámicos de este termino y encontrado las expresiones correspondientes al lagrangiano y el hamiltoniano, se puede realizar

un análisis para un sistema cuántico, en este caso, el sistema quark - anti-quark del charmonium desde el formalismo proporcionado por la Ecuación de Schrödinger sin tener en consideración, en primera instancia, el término de interacción de Darwin.

Tomando como observables a H , L^2 , L_z (el hamiltoniano, el momento angular al cuadrado y el momento angular en dirección z respectivamente) como en el átomo de hidrogeno, y como estas tres observables conmutan entre sí, esto es, por ejemplo, $[H, L^2] = 0$, las funciones de onda para para H serán de la forma[9]

$$\begin{aligned} H\Psi(r) &= E\Psi(r) \\ L^2\Psi(r) &= l(l+1)\hbar\Psi(r) \\ L\Psi(r) &= m\hbar\Psi(r) \end{aligned}$$

Donde l, m, \hbar son, el número cuántico azimutal u orbital, el número cuántico magnético, la constante de Planck reducida que, de ahora en adelante, se tomará como $\hbar = 1$ para simplificar los cálculos y E el valor propio de la energía del sistema.

Para una partícula que está bajo la acción de un potencial que actua en todas las direcciones, esto es, un potencial esférico, la función de onda de la partícula se puede manipular con mucha mayor facilidad si se recurre al uso de coordenadas esféricas. De este modo, en vez de tener una función de onda descrita en coordenadas rectangulares cartersianas, $\Psi(x, y, z)$, lo que se tiene es una función de onda $\Psi(r, \theta, \phi)$. Se puede recurrir a la separación de variables para separar la función de onda Ψ en el producto de funciones de onda pertinentes a las coordenadas esféricas que están siendo utilizadas [17]:

$$\Psi(r) = R_{l,k}(r)Y_{l,m}(\theta, \phi) \tag{4.5}$$

esto debido a que estas expresiones para la parte radial y angular son funciones propias de L^2 y L_z y la parte radial es quien da cuenta del confinamiento como se argumentará mas adelante. Aquí $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ es la parte angular, los armónicos esfericos, la cual está normalizada y sus componentes θ y ϕ forman una base ortonormal, por lo que se debe determinar $R(r)$ (la parte radial de la función) para que $\Psi(r)$ sea función propia de H

Con la Ecuacion de Schrödinger no relativista independiente del tiempo [12]

$$-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\Psi(r\theta, \phi) + V(r)\Psi(r, \theta, \phi) = E\Psi(r, \theta, \phi)$$

donde μ es la masa reducida del sistema, Ψ es la función de onda y E es el valor propio de H .

4.2.1. Estudio de la solución radial del sistema quark - antiquark

Para hacer un correcto tratamiento al sistema, ya se ha dicho que se manejará un potencial esférico, de manera que el potencial debe moldearse en función de las coordenadas esféricas y con la función radial, esto último debido a que el potencial depende explícitamente de la distancia, del radio. Con Ψ en función de sus términos radiales y angulares reemplazada en la Ecuación de Schrödinger, la ecuación en función de estos será:

$$-\frac{1}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] R(r) + \left[V(r) + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R(r) = (E - 2m)R(r)$$

donde $E - 2m$ es la energía en reposo del sistema ya que se está hablando de una aproximación relativista. Haciendo las sustituciones $R(r) = \frac{1}{r}u(r)$ y $E' = E - 2m$

$$\left[-\frac{1}{2\mu r} + V(r)r + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] \frac{1}{r}u(r) = \frac{1}{r}E'u(r)$$

Y multiplicando por r , se obtiene finalmente

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u(r) = E'u(r), \quad (4.6)$$

la conocida ecuación radial. La solución de esta ecuación diferencial no existe analíticamente. En lo concerniente a la determinación del espectro de masas del charmonium una alternativa es hacer uso de funciones de prueba y obtener las energías de las resonancias a partir del método variacional (método en el cual se hará énfasis más adelante). Una primera instancia es considerar sólo el potencial de interacción de confinamiento, y las masas en reposo; los otros términos pueden incluirse en forma perturbativa. Ajustando las constantes a

$$V(r) = -\frac{K}{r} + br$$

donde $K = \frac{4\alpha_s}{3} = 0,7281\text{GeV}$. y $b = 0,1425\text{GeV}$. Reemplazando en (4.6)

$$-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{K}{r} + br + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u(r) = E'u(r)$$

Sustituyendo $r = \frac{y}{\beta}$, donde y es un término adimensional y $\beta = 0,5952$ es un término que tiene unidades de GeV para que se conserven las unidades de r que estan dadas en femtómetros

$$-\frac{\beta^2}{2\mu} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{K\beta}{y} + \frac{by}{\beta} + \beta^2 \frac{l(l+1)}{2\mu y^2} \right] u(r) = E'u(r)$$

Multiplicando por $\frac{2\mu}{\beta^2}$ e igualando la ecuación a 0

$$-\frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{2\mu K}{\beta y} + \frac{2\mu by}{\beta^3} + \frac{l(l+1)}{\beta^2 y^2} + \frac{2E'\mu}{\beta^2} \right] u(r) = 0$$

Como el término $\frac{2\mu b}{\beta^3}$ se puede igualar a 1 por ser adimensional, se puede decir que $\beta = (2\mu b)^{\frac{1}{3}}$ y reemplazando en la expresión anterior.

$$-\frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{2\mu K}{y(2\mu b)^{\frac{1}{3}}} + \frac{2\mu by}{((2\mu b)^{\frac{1}{3}})^3} + \frac{l(l+1)}{y^2((2\mu b)^{\frac{1}{3}})^2} + \frac{2E'\mu}{((2\mu b)^{\frac{1}{3}})^2} \right] u(r) = 0$$

Reduciendo términos y resolviendo los exponentes, se obtiene que

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{2\mu K}{\beta y} + y + \frac{l(l+1)}{y^2} + \frac{2\mu E'}{\beta^2} \right] u(r) = 0 \quad (4.7)$$

Y la energía puede ser reescrita como

$$\epsilon = \frac{2\mu}{\beta^2} E' \quad (4.8)$$

4.2.2. Metodo variacional y espectro de masa del sistema

Una vez halladas expresiones para la energía y los valores propios, se puede utilizar un metodo que consiste en encontrar aproximaciones al estado

propio o estado más bajo de energía y algunos estados excitados. Se tomará una función de prueba en función de un parametro que, al hallarlo, permitirá encontrar una aproximación al estado base, este metodo es llamado metodo variacional.

Sabiendo que el teorema del valor medio [17] para la energía puede ser expresado como

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int \Psi^* \hat{\epsilon} \Psi d^3r}{\int \Psi^* \Psi d^3r}$$

donde $\hat{\epsilon}$ es el operador energía.

En cooredenadas esfericas la expresión se convierte

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int Y^* R^* \hat{\epsilon} Y R r^2 dr \text{sen}\theta d\theta d\phi}{\int \Psi^* \Psi d^3r}$$

donde R es la parte radial y las demás son los componentes angulares. Como la parte angular está normalizada (debido a que sus componentes forman una base ortonormal), esto es: $\int Y^* Y \text{sen}\theta d\theta d\phi = 1$, se tiene que

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int R^* \hat{\epsilon} R r^2 dr}{\int \Psi^* \Psi d^3r}$$

Con $R^* R = |R|^2$ y $u = rR$ entonces

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int \frac{u^2}{r^2} \hat{\epsilon} r^2 dr}{\int \Psi^* \Psi d^3r}$$

Cancelando el término de r^2

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int u^2 \hat{\epsilon} dr}{\int \Psi^* \Psi d^3r}$$

Para saber que forma tiene el término $u^2 \bar{\epsilon}$ y poder hallar la energía promedio, se debe despejar $E u^2$ desde (4.7), de manera que

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2\mu K u}{\beta y} + y u + \frac{l(l+1)u}{y^2} = -\frac{2\mu}{\beta^2} u E'$$

Multiplicando la expresión por u , reescribiendo el lado derecho tal como dice 4.8 y reduciendo algunos términos

$$-u \frac{d^2}{dy^2} + \left(\frac{\eta}{y} + y + \frac{l(l+1)}{y^2} \right) u^2 = \epsilon u^2.$$

Reemplazando esta expresión en la de la energía promedio $\bar{\epsilon}$, finalmente

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int \left[-u \frac{d^2}{dy^2} + \left(\frac{\eta}{y} + y + \frac{l(l+1)}{y^2} \right) u^2 \right] dy}{\int u^2 dy} \quad (4.9)$$

donde $\eta = \frac{2\mu K}{\beta} = \frac{4m\alpha}{3\beta}$.

Para el caso de $L = 0$, se propone una función de prueba de la forma

$$u = Ny^2 e^{-\frac{a^2 y^2}{2}},$$

donde N es una constante de normalización y a es el parametro al cual se le busca el valor.

Hallando el término

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = N e^{-\frac{a^2 y^2}{2}} [2 - 5a^2 y^2 + a^4 y^4] \quad (4.10)$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^2 dy &= \int_0^\infty (Ny^2 e^{-\frac{a^2 y^2}{2}})^2 dy \\ \int_0^\infty u^2 dy &= N^2 \int_0^\infty y^4 e^{-a^2 y^2} dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\int_0^\infty u^2 dy = \frac{3N^2 \sqrt{\pi}}{8a^5} \quad (4.12)$$

Con el siguiente término

$$\int_0^\infty u \frac{d^2 u}{dy^2} dy = \int_0^\infty (Ny^2 e^{-\frac{a^2 y^2}{2}}) (N e^{-\frac{a^2 y^2}{2}}) (2 - 5a^2 y^2 + a^4 y^4) dy$$

Finalmente se tiene que

$$\int_0^\infty u \frac{d^2 u}{dy^2} dy = N^2 \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2a^3} + \frac{15\sqrt{\pi}}{8a^3} - \frac{15\sqrt{\pi}}{16a^3} \right) \quad (4.13)$$

Para el siguiente término

$$\int_0^\infty u^2 \frac{\eta}{y} dy = \int_0^\infty \frac{\eta N^2 y^4 e^{-a^2 y^2}}{y} dy$$

Como resultado, después de evaluar la integral

$$\int_0^\infty u^2 \frac{\eta}{y} dy = \frac{N^2 \eta}{2a^4} \quad (4.14)$$

Para el término final

$$\int_0^\infty y u^2 dy = \int y^4 N^2 e^{-a^2 y^2} dy$$

El resultado será

$$\int_0^\infty y u^2 dy = \frac{N^2}{a^6} \quad (4.15)$$

(Para ver en detalle la solución de las integrales, vease Apéndice C). Una vez hallados los términos, se pueden reemplazar en (4.9)

$$\bar{\epsilon} = \frac{-\frac{N^2 \sqrt{\pi}}{2a^3} + \frac{N^2 \sqrt{\pi}}{8a^3} - \frac{N^2 15 \sqrt{\pi}}{16a^3} + \frac{N^2 \eta}{2a^4} + \frac{N^2}{a^6}}{\frac{3N^2 \sqrt{\pi}}{8a^5}}$$

Factorizando y realizando algunas operaciones se obtiene

$$\bar{\epsilon} = \frac{7}{6}a^2 + \frac{4\eta}{3\sqrt{\pi}}a + \frac{8}{3\sqrt{\pi}a}$$

Como se busca el estado base o mínimo de energía, con esta expresión se halla el valor del parámetro a , esto es

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{da} = 0$$

Derivando se obtiene

$$7a + \frac{4\eta}{\sqrt{\pi}} - \frac{8}{\sqrt{\pi}a^2} = 0$$

Al hallar el valor numérico del parámetro a , se tiene que $a = -1,6702 GeV^{-1}$ (unidades asociadas al radio que tiene unidades de femtómetros), reemplazando este valor en la expresión de la energía media, se obtiene que $\bar{\epsilon} = 0,1857 GeV$.

Utilizando la expresión $\epsilon = \frac{2\mu}{\beta^2} E'$ y $E' = (E - 2m)$, resulta que la expresión final será:

$$E = \frac{\beta^2}{2\mu} \bar{\epsilon} + 2m \quad (4.16)$$

Hasta este punto no se han tenido en cuenta distintos términos de interacción que podrían cambiar las expresiones halladas, se deben tener en cuenta los términos de acople espín - espín (donde se tiene en cuenta el término de interacción de Darwin) y el término de Fermi que se verá mas adelante.

4.3. Términos perturbativos

Como se mencionó anteriormente, al usar el método variacional solo se tomó en cuenta el potencial de Cornell, el problema es que de esta manera, la expresión obtenida no es correcta porque no se tiene en cuenta otros términos, por lo que ahora se deben agregar al tratamiento no relativista del sistema, unos términos de forma perturbativa que modificarán la ultima expresión que se consiguió, logrando así, una mas exacta.

4.3.1. Inclusión del término de acople de espín

Con un hamiltoniano mas completo, se pueden incluir los términos en el tratamiento no relativista del sistema. Empezando con el término V_S [2]

$$V_S = -\frac{8\pi\alpha_s K}{3m^2} S_q \cdot S_a \delta(r)$$

Recordando que $K = \frac{4}{3}$ se obtiene

$$V_S = \eta_s S_q \cdot S_a \delta(r)$$

donde $\eta_s = \frac{32\pi\alpha_s}{9m^2}$ Hallando el valor esperado de $\delta(r)$ [17]

$$\langle \Psi(r) | \delta(r) | \Psi(r) \rangle = |\Psi(0)|^2$$

como las correcciones debidas a este término son para los niveles de energía s, y con ayuda del teorema virial se puede decir que [2][17]

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi} \left\langle \frac{dV}{dr} \right\rangle$$

donde V es el potencial de confinamiento tratado hasta ahora. Multiplicando por $\frac{1}{r}$ y reemplazando V , la expresión se transforma en

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi} \left(b + K \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right) \quad (4.17)$$

Para hallar $\langle \frac{1}{r^2} \rangle$ se puede usar la misma función de prueba u que se usó con anterioridad, esto debido a que es solo para el potencial de confinamiento

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{\int \frac{1}{r^2} u^2 dy}{\int u^2 dy} \quad (4.18)$$

Realizando un cambio igual al hecho en el potencial de confinamiento $y = \beta r$, la expresión toma la forma

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{\int \frac{\beta^2}{y^2} N^2 y^4 e^{a^2 y^2} dy}{\int N^2 y^4 e^{a^2 y^2} dy}$$

Realizando sustituciones similares anteriormente en el uso del metodo variacional en el potencial de confinamiento para solucionar las integrales, finalmente se tiene

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{2\beta^2 a^2}{3}$$

aquí, el parametro a tiene el mismo valor hallado anteriormente, ya que se está usando el mismo potencial.

Reemplazando en (4.15)

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi} \left(b + K \frac{2\beta^2 a^2}{3} \right)$$

y con el potencial de interacción espín - espín V_S , se obtiene la energía promedio de la misma

$$\bar{\epsilon}_s = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{\eta_s}{\beta^2} \frac{\mu}{2\pi} \left[b + K \frac{2\beta^2 a^2}{3} \right] & \text{si } S = 1 \\ -\frac{3}{4} \frac{\eta_s}{\beta^2} \frac{\mu}{2\pi} \left[b + K \frac{2\beta^2 a^2}{3} \right] & \text{si } S = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Incluyendo este término en la expresión del espectro del sistema (4.10), esta se transforma en

$$E = \frac{\beta^2}{2\mu} (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_s) + 2m \quad (4.20)$$

4.3.2. Inclusión del término de Fermi

Con la corrección debida al potencial V_F generado por el término de Fermi que, expresándolo en términos del centro de masa [7]

$$V_f = \frac{\alpha K}{2m^2} \left[\frac{P^2}{r} + \frac{(P \cdot \mathbf{r})(P \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right]$$

ya que $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$

Expresando \mathbf{r} en términos de sus componentes

$$V_f = \frac{\alpha K}{2m^2} \left[\frac{P^2}{r} + \frac{(P \cdot r\hat{r})(P \cdot r\hat{r})}{r^3} \right]$$

Como no se conocen los valores de P , se debe encontrar el valor esperado de este, esto es

$$V_f = \left\langle \left[\frac{\alpha K}{2m^2 r} P^2 + (P \cdot \hat{r})(P \cdot \hat{r}) \right] \right\rangle$$

Debido a que los términos α_s , K y m son valores determinados, pueden ser apartados del tratamiento que se realizará para hallar el valor esperado de P^2 y r , además, se tiene que el valor esperado de P^2 puede ser hallado como

$$\langle P^2 \rangle = \int \psi^* P^2 \psi dp = \int P^2 |\psi|^2 dp$$

con $P = i\hbar\nabla$, la expresión se transforma en

$$\langle P^2 \rangle = - \int \nabla^2 |\psi|^2 dp$$

Utilizando la ecuación en función de sus componentes angulares y radiales se obtiene que

$$\langle P^2 \rangle = \int dr \left[((u'(r))^2 - \frac{2u'(r)u(r)}{r} + \frac{(u(r))^2(1+l(l+1))}{r^2}) \right] \quad (4.21)$$

(Para ver la obtención en detalle de 4.21 véase Apéndice D) Para el valor esperado de $(P \cdot \hat{r})(P \cdot \hat{r})$ se tiene que

$$\langle (P \cdot \hat{r})(P \cdot \hat{r}) \rangle = - \int d^3r |\hat{r} \cdot \nabla \psi|^2$$

Reemplazando por los componentes angulares y radiales, finalmente se tiene

$$\langle (P \cdot \hat{r})(P \cdot \hat{r}) \rangle = \int dr \left[((u'(r))^2 - \frac{2u'(r)u(r)}{r} + \frac{(u(r))^2(1+l(l+1))}{r^2}) \right] \quad (4.22)$$

(Para ver la obtención en detalle de 4.22 véase Apéndice D). Al ser dos expresiones iguales, sumandolas se tiene la expresión final para poder hallar el valor esperado del potencial de Fermi. Incluyendo los valores que ya estaban determinados, se reduce a realizar un tratamiento similar al término del potencial debido al espín, una función u y con $l = 0$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\alpha K}{2m^2 r} [P^2 + (P \cdot \hat{r})(P \cdot \hat{r})] \right\rangle \\ &= \int_0^\infty dr \frac{1}{r} \left[2((u'(r))^2 - \frac{4u'(r)u(r)}{r} + \frac{2(u(r))^2}{r^2}) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Con la función de prueba

$$u = Ny^2 e^{-\frac{a^2 y^2}{2}}$$

y con una expresión para buscar la energía promedio generada por el potencial de Fermi

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{\alpha K}{2m^2} \frac{\int_0^\infty dr \frac{1}{r} \left[2((u'(r))^2 - \frac{4u'(r)u(r)}{r} + \frac{2(u(r))^2}{r^2}) \right]}{\int_0^\infty (u(r))^2 dr} \quad (4.24)$$

Debido a que la función depende de r y debe depender de y para un correcto tratamiento, se debe cambiar la dependencia de la función como sigue. Por regla de la cadena

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dr} = \beta \frac{du}{dy},$$

debido a que $y = \beta r$

Realizando un cambio de variable similar al hecho en el tratamiento de la

²Véase [7]

ecuación radial, $y = \beta r$ y con la nueva dependencia de u se tiene que la expresión se transforma en

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{\alpha K}{2m^2} \frac{\int_0^\infty dy \frac{\beta}{y} \left[\beta^2 2((u'(y))^2 - \frac{4u'(y)u(y)\beta^2}{y} + \frac{2(u(y))^2\beta^2}{y^2}) \right]}{\int_0^\infty (u(y))^2 dy} \quad (4.25)$$

Procediendo a hallar los términos

$$\int_0^\infty \frac{2(u'(y))^2\beta^2}{y} dy = 2\beta^2 \int_0^\infty \frac{(2yNe^{-\frac{a^2y^2}{2}} - a^2y^3Ne^{-\frac{a^2y^2}{2}})^2}{y} dy \quad (4.26)$$

Se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{2(u'(y))^2\beta^2}{y} dy = \frac{2N^2\beta^2}{a^2} \quad (4.27)$$

Con el siguiente término

$$\int_0^\infty \frac{4u'(y)u(y)\beta^2}{y^2} dy = 4\beta^2 \int_0^\infty \frac{\left(2yNe^{-\frac{a^2y^2}{2}} - a^2y^3Ne^{-\frac{a^2y^2}{2}}\right)Ny^2e^{-\frac{a^2y^2}{2}}}{y^2} dy \quad (4.28)$$

El resultado será

$$\int_0^\infty \frac{4u'(y)u(y)\beta^2}{y^2} dy = \frac{2N^2\beta^2}{a^2} \quad (4.29)$$

Para el siguiente

$$\int_0^\infty \frac{2(u(y))^2\beta^2}{y^3} dy = 2\beta^2 \int_0^\infty \frac{N^2y^4e^{-a^2y^2}}{y^3} dy \quad (4.30)$$

Su solución

$$\int_0^\infty \frac{2(u(y))^2\beta^2}{y^3} dy = \frac{N^2\beta^2}{a^2} \quad (4.31)$$

Para el ultimo término

$$\int_0^\infty (u(y))^2 dy = \int_0^\infty N^2y^4e^{-a^2y^2} dy \quad (4.32)$$

Finalmente

$$\int_0^\infty (u(y))^2 dy = \frac{3N^2\sqrt{\pi}}{8a^5} \quad (4.33)$$

Una vez hallados los resultados, se puede reemplazar en 4.25

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{\alpha_s K \frac{2N^2\beta^3}{a^2} - \frac{2N^2\beta^3}{a^2} + \frac{N^2\beta^3}{a^2}}{\frac{3N^2\sqrt{\pi}}{8a^5}}$$

Operando

$$\bar{\epsilon}_f = \frac{\alpha K \beta^3}{2m^2} \left[\frac{16}{3\sqrt{\pi}} a^3 - \frac{16}{3\sqrt{\pi}} a^3 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} a^3 \right]$$

Por último, se obtiene que la energía media es $\bar{\epsilon}_f = -0,0927$ Gev.

Incluyendo este término en la expresión del espectro del sistema 4.16, esta se transforma en

$$E = \frac{\beta^2}{2\mu} (\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_s + \bar{\epsilon}_f) + 2m \quad (4.34)$$

A continuación se presenta una tabla con todos los datos, el valor experimental del espectro (E_{exp}), la energía incluyendo el término de acople de espín ($E_{\bar{\epsilon}_s}$) y por último incluyendo el término de Fermi ($E_{\bar{\epsilon}_f}$)

Mesón	L	S	$E_{exp}(GeV)$.	$E_{\bar{\epsilon}_s}(GeV)$.	$E_{\bar{\epsilon}_f}(GeV)$.
η	0	0	2,9816	2,9793	2,9728
J/Ψ	0	1	3,0900	3,0117	2,9995

Cuadro 4.1: Datos teóricos y experimentales del espectro del charmonium.

Análisis de resultados

Los resultados mostrados referentes al campo cuántico muestran como van cambiando los resultados teóricos a medida que se toman en cuenta nuevos términos que generan modificaciones que permiten aproximarse, cada vez más, a los resultados experimentales del espectro de masa.

Teniendo en cuenta los primeros potenciales (el de confinamiento, en cinético y de masas), se puede ver que son quienes contribuyen de una manera significativa en los resultados teóricos, es necesario tenerlos en cuenta ya que la forma que tienen estos potenciales permite entender como distintos valores generan estos cambios, pero hasta este punto, no se ha tomado en cuenta el papel que juega el potencial vector en este campo cuántico. Cuando se introducen los demás potenciales (el de Fermi, el de acople de espín y de Darwin), a pesar de que sus contribuciones por separado no son significativas, las formas que tienen estos potenciales tienen en cuenta valores que generan dichos cambios, o sea, estos potenciales tienen dependencia del radio que separa las partículas, de la igual manera, el potencial de Fermi, incluye el término de Darwin clásico de manera mas general, con su dependencia explícita del radio y las cargas de las partículas, así en conjunto, estos potenciales generan correcciones en los valores teóricos nuevos, incluyendo, ya sea de manera implícita o explícita, el potencial vector y la interacción magnética que genera este

Bibliografía

- [1] Introduction to electrodynamics. Griffiths, D. (1999)
- [2] Fayyazuddin, A Modern Introduction To Particle Physics. Fayyazuddin-Riazuddin (2000)
- [3] M.B. Voloshin. Charmonium. Prog.Part.Nucl.Phys., 61:455–511, (2008).
- [4] Bustingorry, S. O., Mora, S. J. METACOGNICION: UN CAMINO PARA APRENDER A APRENDER. Chile (2008).
- [5] De Santis, M. A generalization of the Fermi-Breit equation to noncoulombic spatial interactions (2014)
- [6] E.G. Bessonov, On the Darwin Lagrangian, preprint arXiv:physics/9902065v3. (2006)
- [7] J. Eiglsperger, Quarkonium Spectroscopy: Beyond One-Gluon Exchange. (2007)
- [8] Zweig, G., Memories of Murray and the Quark Model (2010).
- [9] Griffiths, C., Introduction to quantum mechanics (2005)
- [10] Jackson, John D., Classical electrodynamics (1998)
- [11] Darrigol, O., Electrodynamics from Ampère to Einstein. (2000)
- [12] Gomez, F.J., El problema global en la ecuación de Schrödinger con una clase de potenciales confinantes de potencias.

- [13] Campanario, J., EL DESARROLLO DE LA METACOGNICIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS: ESTRATEGIAS PARA EL PROFESOR Y ACTIVIDADES ORIENTADAS AL ALUMNO (2000)
- [14] De Luca, J., Equations of Motion for Variational Electrodynamics (2016)
- [15] Rivas, M., Equations of Motion for Variational Electrodynamics (2000)
- [16] Itoh, T., Derivation of Non relativistic Hamiltonian for Electrons from Quantum Electrodynamics (1965)
- [17] Sakurai, J., Modern Quantum Mechanics (1994)
- [18] Goldstein, H., MECÁNICA CLASICA (2006)