HISTORIA DE LAS CÓNICAS Y SU APORTE AL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

ÁNGEL DANILO MORENO PRIETO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTA, D.C.
2018

HISTORIA DE LAS CÓNICAS Y SU APORTE AL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

ÁNGEL DANILO MORENO PRIETO

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO
DE MAGÍSTER EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

DIRECTOR
HARRY AUGUSTO GÓMEZ ESPINOSA
Docente del departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTA, D.C.
2018

Dedicatoria

A mis padres, por su constante apoyo a lo largo de toda mi vida, por motivarme a estudiar y a ser mejor persona día a día. A Juan Diego mi hijo, motor de mi vida y eje central del desarrollo de todas mis actividades, que sea un gran ejemplo para su formación y su camino. A mis compañeros de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Universidad Pedagógica Nacional que hicieron alegre mi paso por cada una de estas instituciones.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por llenar mi camino de tantas experiencias gratificantes y permitirme culminar esta etapa de la vida. A cada uno de los profesores de la maestría que contribuyeron a este proyecto, a la profesora Cecilia Agudelo modelo a seguir en la labor docente. A mi director Harry Gómez por su infinita paciencia y sabiduría, por los buenos consejos brindados a lo largo del desarrollo de este proyecto y por su inmensa amabilidad, que Dios lo bendiga y lo llene de éxitos.

ACTA DE VALORACIÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Historia de las cónicas y su aporte al conocimiento del profesor de matemáticas***, presentado por el estudiante:

Ángel Danilo Moreno Prieto, Cód. 2017185015, CC. 1.019.045.215

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 44 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 18 días del mes de febrero de 2019.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: HARRY AUGUSTO GOMEZ (UPN)

Jurados:

Profesora: MARIA NUBIA SOLER (UPN)

Profesor: EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
(Universidad de Nariño)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado en maestría en profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Historia de las cónicas y su aporte al conocimiento del profesor de matemáticas
Autor(es)	Moreno Prieto, Ángel Danilo
Director	Gómez Espinosa, Harry Augusto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 113 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS, HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS, CÓNICAS, HISTORIA DE LAS CÓNICAS.

2. Descripción

Diferentes estudios en educación matemática se han preocupado por los problemas de aprendizaje que presentan los estudiantes frente a determinado concepto matemático. Este hecho se debe principalmente a la preocupación de investigadores y docentes por brindar una mejor educación. Sin embargo, puede que los problemas sobre la enseñanza estén ligados al conocimiento del profesor de matemática; lo cual ocasiona falta de herramientas que les permitan afrontar los retos educativos que se le presentan día a día. Tal es el caso que autores como Grossman, Wilson y Shulman (2005) hacen evidentes las diferentes problemáticas a las que se enfrentan los profesores al iniciar con su trabajo profesional.

Shulman (2005), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), Godino (2009), entre otros, reconocen el conocimiento del profesor de matemáticas como un elemento clave en la enseñanza de las mismas. Estos autores realizan una propuesta en torno a los saberes/competencias que debe poseer el profesor de matemáticas para optimizar su enseñanza. El objetivo de

este trabajo es aportar en el análisis de recursos históricos de acuerdo a dichos conocimientos, de manera específica, sobre las cónicas.

3. Fuentes

Agudelo, C (2007). Explanations of attitudes to change: Colombian mathematics teachers' conceptions of the crucial determinants of their teaching practices of beginning algebra. Journal of Mathematics Teacher Education. 69-93

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*. (8), 30-46. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf.

Ball, D., Hoover, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education.59*,(5), 389-407.

Bocanegra, I., Galeano, O. y Huérfano, H. (2013). *Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial.* (Tesis de maestría) Universidad pedagógica nacional. Bogotá.

Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *SUMA*,(3),17-28. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/2/017-028.pdf

Calderón, W. y Peñuela, S. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza de las cónicas. Ciencia, ingeniería y educación científica*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Castelnoble, M. y González Herrera, F. (2015). Cónicas en la Grecia antigua. Reloj de agua, 12, 17-31.

Colombo, E., Llanos, V. & Otero, M. (2016). La génesis histórica de la Geometría Analítica y la enseñanza de la escuela secundaria. *NÚMEROS: Revista didáctica de las matemáticas.*93, 93-110.

Cortés, G. & García, S. (2003). Investigación documental: Guía de autoaprendizaje apuntes y ejercicios. Secretaria de educación pública: México.

D'Ambrosio, U. (2011). Educação para uma sociedade em transição. Porto Alegre. Cortez.

Erazo, J. (2016). *Categorías de usos de la historia de las matemáticas en la educación en matemáticas.* (Tesis de maestría). Universidad pedagógica nacional. Bogotá.

Fusco, G. (2009). La investigación histórica, evolucióny metodología.Revista Mañongo. 229-245

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas.* (Tesis de doctorado). Universidad del Valle: Cali. Descargado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/10093/1/9405-0525550.pd

Guacaneme, E. (2011) La historia de las matemáticas en la educación de un profesor: Razones e intenciones. *XIII conferencia interamericana de educación matemática CIAEM*. Conferencia llevada a cabo en Recife, Brasil.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de

Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación matemática*,(20),13-31.

Gonzáles, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Suma. 17-28

Gonzáles, P. (2007).Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA*. 30, 205-236.

Gonzáles, P. (2008). Euler y la geometría analítica. Quaderns D' historia de L'Engingerya. 9. 83-116.

Grossman, P. Wilson, S. Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9, (2), 1-25.

Gulikers, I. y Blom, K (2002). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational studies in Mathematics*. (47), 223-248.. Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.622.6126&rep=rep1&type=pdf

Hernández, V. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat :¿Y Apolonio?. *Apuntes de historia de las matemáticas. 1,* (1), 32- 44.

Indaburo, Y. Jimenez, J. Sarmiento, C. (2016). Aportes de la historia de las matemáticas al conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas en formación avanzada sobre las ecuaciones trigonométricas.(Tesis de maestría). Universidad pedagógica nacional. Bogotá.

Llinares, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares.Revista de Teoría, Investigación y Práctica Educativa, ISSN 1130-5371, Nº 10-11, 1995. 103-116

Lupiáñez, J. (2002). Reflexiones didácticas sobre la historia de la matemática. *SUMA*. 40, 59-63.

Martínez, D. (2015). La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 133-140.

Maza, C. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: Un análisis. *SUMA.* 17. *17-26.*

Ministerio de educación nacional. (1998). Lineamientos curriculares matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Colombia.

Ministerio de educación nacional. (2006). Estándares curriculares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Colombia.

Mesa, Y. & Villa, J. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. En Leston, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME, 22. 1315-1323.

Ortíz, A. (2005). *Historia de la matemática*. Vol. 1.Recuperado de http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf

Pérez, B. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Renyi, A. (1990).Diálogo sobre las aplicaciones de la matemática. *Revista de Educación matemática*. 5, 3-19.

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching

Mathematics. *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, 2, 1-35.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9, (5), 1-30.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. Revista EMA, 6(1), 3-26.

Stenhouse, L. (2010). Investigación y desarrollo del currículo. Capítulos VI, VII, VIII. Morata, S. Sexta edición. Madrid.

Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigüedad. *Apuntes de historia de las matemáticas. 1,* (1), 19-31.

Torres, S. (2006). Algunas notas sobre la obra de Kepler. *Biblioteca Universitaria*. 9, (1), 45-52.

Valero, P. (2012). Posmodernismo como una actitud de crítica. Hacia la investigación dominante en Educación Matemática. En Valero,P; Skovsmose,O. (Eds.) Educación matemática critica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 173-192. Bogotá. Una Empresa Docente.

Vanegas, Y. (2014). Competencias ciudadanas y desarrollo profesional. Tesis doctoral universidad de Barcelona, departamento de didáctica de las ciencias experimentales y la matemática.

4. Contenidos

El trabajo cuenta con 7 capítulos, divididos de la siguiente manera: preliminares, antecedentes, marco referencial, metodología, análisis, conclusiones y referencias bibliográficas.

El primer capítulo, denominado preliminares, contiene los objetivos del proyecto que

apuntan a la identificación de aspectos importantes dentro de la historia de las cónicas que aporten al conocimiento del profesor de matemáticas. La justificación del trabajo, que da cuenta de la importancia que tiene el estudio alrededor de los conocimientos del profesor de matemáticas a través de este proyecto, y también las razones que llevaron a encontrar una problemática en cuanto al conocimiento del profesor para la enseñanza de las cónicas.

El segundo capítulo contiene los antecedentes investigativos. En este apartado se presentan trabajos que involucran el uso de la historia para el desarrollo de sus proyectos. Además, se citan trabajos que se enfocan en el conocimiento del profesor de matemáticas, bajo diferentes objetos matemáticos.

En el tercer capítulo se exponen los argumentos teóricos que sustentan el proyecto, estos argumentos se dividen en tres grandes grupos, el primero de ellos se encarga de exponer algunas posturas acerca del conocimiento del profesor de matemáticas, especialmente la propuesta por Godino (2009) que es tomada como referencia para la propuesta de las unidades de análisis. En segundo lugar, se exponen argumentos que muestran que la historia de las matemáticas sirve como fuente de conocimiento para el profesor de matemáticas. Por último, se hace referencia a la historia de las cónicas a través de la realización de 11 reseñas que presentan diferentes momentos históricos de las cónicas.

En el cuarto capítulo se presenta la metodología por la cual se orienta el trabajo, presentando la investigación documental como la herramienta de exploración, recolección, organización y análisis de los documentos elegidos. Se específica e método por el cual cada uno de los documentos se somete al análisis para encontrar su aporte al conocimiento del profesor de matemáticas.

El quinto capítulo da cuenta de los análisis realizados a cada uno de los 11 textos

seleccionados para el proyecto, cada uno de estos se clasifica en algún tipo de categoría de los conocimientos del profesor que presenta Godino (2009), argumentando su presencia en dicha clasificación a la luz de los referentes teóricos expuestos en el capítulo número 3. Finalmente, en el capítulo número 6 se presentan las conclusiones del proyecto en cuanto al aporte de la historia de las cónicas al conocimiento del profesor de matemáticas y en torno a la experiencia vivida durante la elaboración del proyecto, dejando cuestiones abiertas para futuros proyectos relacionados a la temática.

5.Metodología

Este trabajo se propone indagar por los aportes que le puede ofrecer el estudio de algunos documentos históricos al conocimiento del profesor de Matemáticas. Existen trabajos antecedentes que han categorizado los conocimientos del profesor de Matemáticas y también trabajos antecedentes que han resaltado algunos aportes de la historia a dichos conocimientos. Teniendo en cuenta esto, la estrategia de investigación seleccionada es la investigación documental. Para Cortés y García (2003), las investigaciones de este tipo tienen como propósito responder interrogantes o verificar hipótesis a través de sustentos documentales reportados previamente en la historia, estos sustentos pueden ser: archivos, textos, periódicos, artículos, videograbaciones, grabaciones de voz, etc. Para efectos del presente trabajo los documentos elegidos son artículos de tipo histórico sobre las cónicas con estos se realiza un análisis de contenido a la luz de unas categorías de análisis que surgen de la teoría sobre los Componentes del Conocimiento del Profesor de Matemáticas.

Este tipo de investigación se encarga de establecer aspectos importantes acerca del objeto de estudio (cónicas) que se encuentren en cada texto. La identificación de dichos

aspectos permite dar respuesta a la pregunta de investigación en cuanto a los aportes de la historia a los conocimientos del profesor de matemáticas y por ende verificar el cumplimiento de los objetivos planteados en torno al aporte de la historia de las cónicas.

Una vez establecida la postura frente a la metodología de investigación (de tipo documental), Cortés y García (2003) proponen una gama de fuentes de información que pueden servir a este propósito; dentro de estas se encuentran: documentos históricos, documentos estadísticos, informes, estudios, memorias, biografías, etc. Siendo los archivos históricos los que de mejor manera se ajustan a los propósitos de este trabajo.

Debido a que la búsqueda de documentos se realizó en pro de que se encuentren bajo un corte histórico, se debe hacer claridad sobre los tipos de documentos que se pueden encontrar. Fusco (2009) señala diferentes tipos de fuentes, diferenciando las primarias y secundarias: Las fuentes primarias son todos aquellos documentos originales que se encuentran acerca del objeto estudiado (cónicas) en la fecha misma de su concepción. Las fuentes secundarias son los documentos escritos por otras personas, que no se encontraban en el lugar de los hechos pero que narran lo sucedido a partir de una investigación o estudio de fuentes primarias y secundarias.

6.Conclusiones

En cuanto al trabajo de revisar históricamente la evolución del concepto de cónica, es propio decir que fue un trabajo amplio y complejo, ya que en su gran mayoría los trabajos que se enfocan o escogen como eje temático las cónicas, están encaminados hacia el uso de un software dinámico. Sin embargo, gracias a trabajos como el de

Guacaneme (2016), el tipo de búsqueda se logró enfocar bajo diferentes criterios; autor, tema y materia. Dentro de esta revisión fue de gran sorpresa encontrar la influencia de matemáticos de la talla de Descartes, Fermat y Euler en la conformación de la geometría analítica y por ende de las cónicas.

Respecto al análisis realizado a los documentos, se evidencia que hay una riqueza en cada uno de ellos frente al aporte que puede hacer al conocimiento del profesor de matemáticas; sobre todo en la faceta epistémica, exponiendo el proceso de desarrollo de las cónicas y permitiendo así ampliar el conocimiento respecto a la naturaleza del conocimiento, su génesis y su evolución. Además la revisión detallada permite afirmar que este concepto no es ajeno al desarrollo social y cultural de la humanidad como se hizo evidente en el análisis de documentos como los de Renyi (1990) y Torres (2006); donde se observa la influencia del conocimiento de las cónicas en la percepción del mundo y el entendimiento del mismo, así como su uso con fines bélicos o de ayuda para labores del hombre, aportando directamente a la faceta ecológica en la que Godino (2009) reconoce la relevancia que tiene el reconocimiento de los aspectos sociales y culturales por parte del profesor de matemáticas. Se considera que una a una las facetas propuestas por Godino (2009) se ven alimentadas por parte de la historia de las cónicas, y que es función del docente reflexionar sobre la importancia de incluir el aspecto histórico como parte de su formación profesional.

Para lograr la caracterización de la historia en beneficio de los conocimientos del profesor de matemáticas, fue de gran importancia reconocer que el conocimiento del profesor no está determinado solamente por la apropiación temática de los conceptos a enseñar, sino que debe estar permeado de factores de orden didáctico y pedagógico, Ball, Hoover y Phelps (2008). En ese orden de ideas, las facetas propuestas por Godino (2009) fueron las que permitieron establecer un estilo de lectura para cada uno de los textos a analizar, intentando establecer un aporte para alguna de dichas facetas. Un

ejemplo se presenta en el análisis del artículo “algunas notas sobre la vida de Kepler” de Torres (2006). Esta lectura aporta en gran medida a la faceta ecológica del conocimiento del profesor de matemáticas, en tanto que hace evidentes las conexiones interdisciplinares de las cónicas. Pero además muestra su influencia en los desarrollos sociales de la humanidad, ya que los aportes de Kepler cambiaron por completo la visión que sobre el funcionamiento del universo se tenía hasta esa época (1605) sentando las bases de la astronomía.

Uno de los mayores impactos que tuvo el desarrollo de este proyecto, a nivel personal, tuvo eco en lo mencionado por Ball, Hoover y Phelps (2008) sobre el horizonte matemático. Este permitió establecer una conexión de las cónicas como elemento del currículo con otros conceptos matemáticos, ya que antes tenía la percepción de la enseñanza de este concepto de una forma aislada e inconexa dentro del currículo, pero la lectura de los documentos tales como “el papel de galileo en la construcción histórica del concepto de función cuadrática” o “Euler y la geometría analítica” ampliaron la concepción epistemológica que tenía sobre este concepto, permitiendo ver su relación con el desarrollo del pensamiento variacional a través del reconocimiento de la dependencia entre las variables.

El objetivo fundamental de este trabajo fue mostrar que la historia de las cónicas está llena de oportunidades para los docentes en términos de estrategias metodológicas, didácticas y pedagógicas que cualificarán nuestras prácticas de enseñanza. Ya sea llevando al aula problemas o hitos importantes como el problema de Pappus, diseñando la construcción de las cónicas desde un punto netamente geométrico reflejando el trabajo de Apolonio, encontrando conexiones interdisciplinares con la astronomía o la física, permitiendo el desarrollo de lenguajes algebraicos que encuentren correspondencia con las representaciones geométricas etc. Es de vital importancia reconocer que una posible continuación de este trabajo puede llevar al diseño de

diferentes estrategias de enseñanza de las cónicas en la educación media, proporcionando al docente una fuente de conocimiento necesaria para su labor.

Elaborado por:	Moreno Prieto, Ángel Danilo
Revisado por:	Gómez Espinosa, Harry Augusto

Fecha de elaboración del Resumen:	29	11	2018

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN 21
1. PRELIMINARES 23
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 23
1.2 JUSTIFICACIÓN 29
1.3 OBJETIVOS 31
1.3.1 General: 31
1.3.2 Específicos: 31
2. ANTECEDENTES. 32
3. MARCO REFERENCIAL 34
3.1 Respecto al conocimiento del profesor de matemáticas. 34
3.1.1 El modelo de Godino 43
3.2 Respecto al aporte de la historia al conocimiento del profesor de matemáticas. 51
3.2.1 Organizar el currículo. 51
3.2.2 Incorporar acciones específicas en el aula de clase 52
3.2.3 Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas. 52
3.2.4 Ampliar la concepción de los objetos matemáticos. 53
3.2.5 Promover habilidades y competencias en los profesores. 53
3.2.6 Rescatar significados y heurísticas. 54
3.2.7 Comprender la génesis de un objeto. Erazo 54
3.2.8 Mejorar la actitud hacia las matemáticas. Erazo 55
4. Metodología 60
4.1 Investigación documental 60
4.1.1 Fase I (exploratoria) 61
4.1.2 Fase II (organización) 62
4.1.2 Fase III (análisis y elaboración de informe de resultados) 62
5. Análisis 65
5.1 Documentos reseñados 65
5.1.1 Cónicas en la antigua Grecia 66

5.1.2 La elipse a través de la historia. 68
Concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. 68
5.1.3 Diálogos sobre las aplicaciones de la matemática 71
5.1.4 La geometría analítica de Descartes Fermat y ¿Apolonio? 73
5.1.5 El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. 75
5.1.6 Algunas notas sobre la vida de Kepler 76
5.1.7 Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica 77
5.1.8 Apolonio el geómetra de la antigüedad 80
5.1.9 Historia de la matemática 82
5.1.10 La génesis histórica de la geometría analítica y la enseñanza en la escuela secundaria. 85
5.1.11 Euler y la geometría analítica 88
5.2 Reporte de análisis de los documentos. 89
5.2.1 Documento: La elipse a través de la historia 90
5.2.2 Documento: Cónicas en la antigua Grecia 93
5.2.3 Documento: Dialogo sobre las aplicaciones de las matemáticas 97
5.2.4 Documento: La geometría Analítica de Descartes Fermat y ¿Apolonio? 100
5.2.5 Documento: El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática 104
5.2.6 Documento: Algunas notas sobre la vida de Kepler 106
5.2.7 Documento: Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica 109
5.2.8 Documento: Apolonio el geómetra de la antigüedad 112
5.2.9 Documento: Historia de la matemática 113
5.2.10 Documento: La génesis histórica de la geometría analítica y la enseñanza en la escuela secundaria 115
5.2.11 Documento Euler y la geometría analítica 118
6 Conclusiones. 124
7 Referencias Bibliográficas 128
8 Anexos 133
8.1 Observación de clase 133
8.2 Libro de texto. 135

Índice de Figuras

Figura 1. Enseñanza secuencial de las cónicas 26
Figura 2. Facetas y niveles del conocimiento del profesor. 44
Figura 3. Historia de las matemáticas como fuente de artefactos. 56
Figura 4. Intento de la duplicación del cubo. 66
Figura 5. Solución a la duplicación del cubo como la intersección de dos parábolas 67
Figura 6. Cónicas obtenidas de con recto de doble hoja. 68
Figura 7. Elipsógrafo de Da Vinci. 69
Figura 8. Elipsógrafo deVan Schooten. 70
Figura 9. Propiedad de la parábola enunciada por Arquímedes. 72
Figura 10. Movimiento parabólico de los cohetes. 72
Figura 11. Cuadratura de la parábola. 82
Figura 12. Construcción de los pitagóricos para la clasificación de las cónicas (elipse parábola e hipérbola) 84
Figura 13. Comparación simbolización en diferentes épocas del álgebra clásica vs simbolización actual. 87
Figura 14. Euler y el uso de coordenadas en el estudio de las curvas.las curvas. 89

Índice de Tablas

Tabla 1*Concepciones del conocimiento del profesor de matemáticas en diferentes autores* 38
Tabla 2 *Conocimiento del contenido (común especializado y ampliado)* 47
Tabla 3 *Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (aprendizajes)* 48
Tabla 4 *Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.* 49
Tabla 5 *Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares.* 50
Tabla 6 *Facetas del conocimiento y su relación con el posible aporte de la historia de las matemáticas.* 58
Tabla 7 *Tabla de clasificación de búsqueda de documentos.* 61
Tabla 8 *Ejemplo tabla para el análisis de los documentos.* 63
Tabla 9 *Comparación cónicas en Menecmo y Apolonio VS cónicas en descartes y Fermat* 77
Tabla 10 *Descripción (resumen libros de Apolonio)* 83
Tabla 11 *Geometrías clásicas y sus características.* 85
Tabla 12 *Momentos históricos del álgebra clásica* 86
Tabla 13 *Análisis documento de Martínez (2015)* 90
Tabla 14 *Análisis documento de Castelnoble y González Herrera (2015)* 93
Tabla 15 *Análisis documento de Renyi (1990)* 97
Tabla 16 *Análisis documento de Hernández* (2002)..... 100
Tabla 17*Análisis documento de Mesa, Y. Villa, (2009).* 104
Tabla 18 *Análisis documento de Torres (2006)* 106
Tabla 19 *Análisis documento de González (2007)* 109
Tabla 20 *Análisis documento de Tapia (2002)* 112
Tabla 21 *Análisis documento de Ortíz (2005)* 113
Tabla 22 *Análisis documento de Colombo, Llanos & Otero (2016)* 115
Tabla 23 *Análisis documento de González (2008)* 118

INTRODUCCIÓN

Diferentes estudios en educación matemática se han preocupado por los problemas de aprendizaje que presentan los estudiantes frente a determinado concepto matemático. Este hecho se debe principalmente a la preocupación de investigadores y docentes por brindar una mejor educación. Sin embargo, puede que los problemas no se ubiquen únicamente en el sector del aprendizaje, sino que estén ligados al conocimiento del profesor de matemáticas; lo cual ocasiona falta de herramientas que les permitan afrontar los retos educativos que se le presentan día a día. Tal es el caso que autores como Grossman, Wilson y Shulman (2005) hacen evidentes las diferentes problemáticas a las que se enfrentan los profesores al iniciar con su trabajo profesional.

Shulman (2005), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), Godino (2009), entre otros, reconocen el conocimiento del profesor de matemáticas como un elemento clave en la enseñanza de las mismas. Estos autores realizan una propuesta en torno a los saberes/competencias que debe poseer el profesor de matemáticas para optimizar su enseñanza. El objetivo de este trabajo es aportar en el análisis de recursos históricos de acuerdo a dichos conocimientos, de manera específica, sobre las cónicas.

El trabajo cuenta con 7 capítulos, divididos de la siguiente manera: preliminares, antecedentes, marco referencial, metodología, análisis, conclusiones y referencias bibliográficas.

El primer capítulo, denominado preliminares, contiene los objetivos del proyecto que apuntan a la identificación de aspectos importantes dentro de la historia de las cónicas que aporten al conocimiento del profesor de matemáticas. La justificación del trabajo, que da cuenta de la importancia que tiene el estudio alrededor de los conocimientos del profesor de matemáticas a través de este proyecto, y también las razones que llevaron a encontrar una problemática en cuanto al conocimiento del profesor para la enseñanza de las cónicas.

El segundo capítulo contiene los antecedentes investigativos, en este apartado se presentan trabajos que involucran el uso de la historia para el desarrollo de sus proyectos. Además, se citan trabajos que se enfocan en el conocimiento del profesor de matemáticas, bajo diferentes objetos matemáticos.

En el tercer capítulo se exponen los argumentos teóricos que sustentan el proyecto, estos argumentos se dividen en tres grandes grupos, el primero de ellos se encarga de exponer algunas posturas acerca del conocimiento del profesor de matemáticas, especialmente la propuesta por Godino (2009) que es tomada como referencia para la propuesta de las unidades de análisis. En segundo lugar, se exponen argumentos que muestran que la historia de las matemáticas sirve como fuente de conocimiento para el profesor de matemáticas. Por último, se hace referencia a la historia de las cónicas a través de la realización de 11 reseñas que presentan diferentes momentos históricos de las cónicas.

En el cuarto capítulo se presenta la metodología por la cual se orienta el trabajo, presentando la investigación documental como la herramienta de exploración, recolección, organización y análisis de los documentos elegidos. Se específica el método por el cual cada uno de los documentos se somete al análisis para encontrar su aporte al conocimiento del profesor de matemáticas.

El quinto capítulo da cuenta de los análisis realizados a cada uno de los 11 textos seleccionados para el proyecto, cada uno de estos se clasifica en algún tipo de categoría de los conocimientos del profesor que presenta Godino (2009), argumentando su presencia en dicha clasificación a la luz de los referentes teóricos expuestos en el capítulo número 3. Finalmente, en el capítulo número 6 se presentan las conclusiones del proyecto en cuanto al aporte de la historia de las cónicas al conocimiento del profesor de matemáticas y en torno a la experiencia vivida durante la elaboración del proyecto, dejando cuestiones abiertas para futuros proyectos relacionados a la temática.

1. PRELIMINARES

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La necesidad de una re-conceptualización de la educación matemática, que deje atrás los modelos tradicionalistas de enseñanza que privilegian la transmisión de conocimientos, se hace evidente en los Lineamientos curriculares del ministerio de educación nacional (MEN) (1998). Allí se hace hincapié en la importancia de la filosofía de las matemáticas, que contempla, el valor de la génesis del conocimiento, así como su aplicación en ciencia y tecnología y el desarrollo del hacer matemático a lo largo de la historia.

Reflexionar sobre los aspectos filosóficos y epistemológicos de las Matemáticas como lo indica el MEN, lleva a tomar posición sobre la naturaleza de este conocimiento; en donde, desde una perspectiva socio cultural, las Matemáticas pueden ser entendidas como “una construcción humana y como tal están ligadas al ámbito social y cultural que las produce”. (Anacona, 2003, p.36). Recocer el conocimiento matemático de esta manera implica, entre otras cosas, reflexionar sobre el aporte que estas hacen a la formación de los ciudadanos. Al respecto, autores como Vanegas (2014) priorizan el desarrollo de competencias ciudadanas a través de la educación matemática, mostrando que en los procesos de enseñanza se debe promover la cultura política, el pensamiento crítico, el desarrollo de actitudes y valores y la participación activa; el trabajo sobre estos cuatro aspectos exige que el docente promueva la colectividad, coflexión, deliberación y transformación del conocimiento por parte de los estudiantes (Valero, 2012).

El MEN (1998) a través de los lineamientos curriculares y de los Estándares curriculares (2006) señala que la acción del estudiante debe responder a una reproducción de la actividad científica; es decir, que conjeture, presente hipótesis, comunique ideas, pruebe y descarte soluciones fallidas a situaciones específicas, donde él actué reflexivamente sobre su propio trabajo y el de los demás. Esta idea

exige que el trabajo del docente sea el de proporcionar escenarios de micro sociedad científica, donde el estudiante pueda llevar a cabo dichas acciones. Debe entonces el educador re contextualizar el saber de acuerdo a las necesidades y contexto de sus estudiantes, procurando que la construcción del conocimiento surja de una relación con el medio.

Esta visión de la educación matemática, contemplada como una actividad social, implica que el docente acepte que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica y cultural, que reconozca que hay un núcleo de conocimientos que debe dominar todo ciudadano y que los procesos de interacción social son de vital importancia en el proceso de enseñanza aprendizaje MEN (1998).

En el marco del seminario innovación-investigación de la maestría en docencia de la matemática de la universidad pedagógica nacional se llevó a cabo un proceso de recolección de evidencias empíricas acerca de la enseñanza de las cónicas en la educación media. Para ello se realizó una observación de 2 clases de un profesor de matemáticas, en un colegio privado de la ciudad de Bogotá en donde se abordó la introducción a laelipse como espacio geométrico y sus ecuaciones general y canónica en el grado décimo.

En la primera clase observada se aprecia que el docente es el actor principal, proporcionando definiciones y significados (anexo 1).

En la segunda clase observada el docente demuestra el surgimiento de la ecuación general de la elipse y también su ecuación estándar, ejemplifica de manera amplia como se pasa de una ecuación a otra y cómo se grafica en el plano cartesiano. Posteriormente los estudiantes se reúnen por grupos y trabajan algunos ejercicios del libro.

En estas clases se evidencia (sin ánimo de clasificar o enmarcar los métodos del profesor) que el docente es quien guía lo que sucede en su clase. No se reconoce un papel activo de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento, más allá de copiar las definiciones que se dictan sobre la elipse, con el fin de luego replicar las

operaciones que presenta el maestro. Las intervenciones de los estudiantes se limitan a respuestas cortas, que el docente sugiere sobre los procedimientos algebraicos como la factorización o complemento de cuadrados.

La realidad evidenciada en este caso, es un claro ejemplo de lo que sucede de manera frecuente en las aulas de clase durante los procesos de enseñanza de las cónicas, no siendo consecuente con los propósitos educativos puestos de manifiesto en las políticas institucionales propuestas por el MEN; quien a través de los lineamientos curriculares presenta la actividad de la educación matemática como una relación del estudiante con su entorno donde se refleje una micro-sociedad científica.

Se percibe que la enseñanza de las cónicas en la educación media se centra, en algunos casos, en el desarrollo de algoritmos y no profundiza en el desarrollo de otras competencias propias de la actividad matemática. Esta problemática se acentúa al momento de analizar una encuesta realizada a 20 profesores (anexo 2) de matemáticas de educación media de la ciudad de Bogotá; en esta se revela que el 80% de los profesores encuestados acepta que su enseñanza de las cónicas en grado décimo se reduce al paso de la ecuación general a la canónica y su graficación; reconociendo que en muy pocas ocasiones han intentado realizar otro tipo de acciones.

Por otra parte, en la revisión de libros de texto (anexo 3),tales como Hipertexto de matemáticas grado 10, Nuevo alfa matemáticas grado décimo y Aplica matemáticas grado décimo, se puede apreciar que, en la mayoría de los ejercicios propuestos para el estudiante se sugiere el paso de la ecuación general a la canónica y viceversa, además de determinar los elementos de las cónicas para poder graficarlas, sin proponer otro tipo de problemas o formas de trabajar; lo que coincide con lo observado en la clase y con los datos que arrojó la encuesta sobre las prácticas en la enseñanza de este concepto, estas evidencias llevan a cuestionar el uso del libro de texto y su posible incidencia en las prácticas del docente.

Consecuente con los resultados expuestos, para autores como Pérez (2011), el proceso de enseñanza y aprendizaje de las cónicas se ve sujeto a una aceleración de los procesos algebraicos por parte del profesor para determinar sus propiedades; aspecto que perjudica la comprensión del objeto como espacio geométrico. De la misma forma Calderón y Peñuela, (2013) afirman que los propósitos de la enseñanza de las cónicas no van más allá del acercamiento algebraico de las mismas.

De acuerdo a las evidencias empíricas expuestas y a los planteamientos, resultado de trabajos antecedentes, como los reportados por Pérez (2011) y Calderón y Peñuela (2013), es posible señalar que la enseñanza de las cónicas en algunos contextos se encuentra inmersa en una triada que se limita a la presentación de la definición del objeto matemático, al aprendizaje memorístico en el tratamiento de las ecuaciones involucradas y al uso de representaciones gráficas y simbólicas. Como se muestra a continuación.

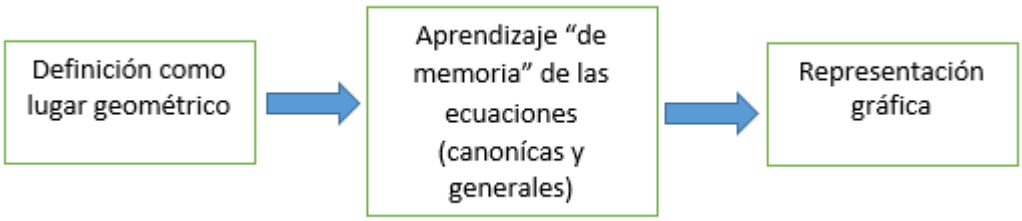


Figura1. Enseñanza secuencial de las cónicas

El uso del libro de texto como guía para la enseñanza tiene de trasfondo una problemática frecuente en la educación matemática, que es la falta de preparación de los profesores para la enseñanza de algunas temáticas. Autores como Grossman, Wilson y Shulman (2005) han mostrado que algunos educadores, cuando apenas inician su labor en la escuela, al encontrarse con un conocimiento

no familiar a ellos, buscan eludirlo o recurren al libro de texto para saber cómo abordarlo en el aula de clase, qué tareas proponer y cómo evaluarlo.

Estos autores señalan que, sin un conocimiento adecuado el docente no puede criticar la información que se presenta allí, más bien estudia la forma en la que el libro de texto presenta la información y la reproduce de la misma manera en sus clases, aceptando que esta forma de enseñanza es la adecuada y depositando un valor de confianza al texto sobre sus prácticas.

Teniendo en cuenta lo anterior, una de las posibles causas que pueden llevar a una enseñanza de las cónicas limitada a estos tres aspectos puede ser el saber del educador matemático. Autores como Shulman (2005), Ball y Schilling (2008), Godino (2009), entre otros, revelan que el conocimiento del docente está conformado por diferentes dimensiones, que no solo se enfocan en el desarrollo matemático del contenido, si no que contemplan el desarrollo pedagógico, didáctico, conocimiento del contexto, conocimiento de los estudiantes entre otros. Es así que el docente debe conocer acerca de cómo enseñar su contenido, para qué enseñarlo y por qué enseñarlo. También debe tener en cuenta que los conocimientos que enseña están en una red de conexiones con otros saberes propios de la matemática, lo que Ball y Schilling (2008) denominan horizonte matemático. Reconocer a sus estudiantes como personas que piensan y como personas que aprenden como mencionan Schoenfeld y Kilpatrick, conocer el contexto curricular y social, etc. Acerca de esto Shulman (2005) reconoce como fuentes de alimentación para el conocimiento del profesor de matemáticas, la lectura de literatura especializada y el conocimiento histórico de lo que se enseña. Por ende, los conocimientos del profesor, sobre este concepto (cónicas), deben ir más allá de su desarrollo algebraico y geométrico.

El uso de la historia cobra entonces una gran importancia como parte del conocimiento del profesor de matemáticas. Autores como Guacaneme (2011), Erazo (2016), reconocen potencialidades de la historia de las matemáticas como parte de dichos conocimientos. En particular, Guacaneme (2011) señala los elementos de la historia como “artefactos” que pueden llegar a ser usados por los

docentes. Este autor los clasifica en “visiones de la actividad matemática”, “visiones de los objetos matemáticos” y “competencias profesionales”. De estos tres, el segundo artefacto mencionado cobra gran importancia, puesto que permite reconocer dentro de la historia relaciones con otras disciplinas, preguntas, problemas, formas de tratamiento entre otras; idea que refuerza Erazo (2016) quien resalta la importancia de la historia como elemento que promueve habilidades y competencias en los profesores.

Resulta importante la indagación acerca de los aportes de la historia de las matemáticas al conocimiento del profesor. Para el caso particular de las cónicas, surge el cuestionamiento sobre ¿Qué elementos de la historia sobre las cónicas benefician un conocimiento más amplio de parte del profesor de matemáticas, que le posibilite reconocer el valor socio cultural del concepto e involucrarlo en su enseñanza? El presente trabajo se ocupa de este interrogante través de la revisión de diversos artículos relacionados con la historia de las cónicas, en búsqueda de hitos, problemas, y otros aspectos importantes que aporten al conocimiento del profesor de matemáticas.

1.2 JUSTIFICACIÓN

La revisión de antecedentes como Bocanegra, Galeano, y Huérfano, (2013) e Indaburo, Jiménez y Sarmiento (2016), en donde se logra identificar aportes de la Historia de las Matemáticas al conocimiento del profesor de matemáticas, al igual que el de Erazo 2016 constituyen algunos antecedentes sobre la búsqueda de la relación entre la historia de las cónicas y los conocimientos del profesor de matemáticas. Estos trabajos fueron desarrollados en el marco de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en donde se reconoce un continuo interés por indagar en cómo la Historia de las Matemáticas aporta a los conocimientos del profesor y cómo estos a su vez, le permiten afrontar de una mejor manera problemáticas reales que surgen en los contextos en los cuales los profesores desarrollan su actividad educativa. A continuación, se exponen los argumentos acerca del por qué trabajar sobre las cónicas y por qué indagar sobre el uso de la historia para alimentar los conocimientos del profesor de matemáticas.

La elección de las cónicas como objeto matemático a trabajar dentro de este proyecto surge inicialmente de la experiencia personal. En el desarrollo del ejercicio profesional docente del autor de este documento, se identificó que la enseñanza de las cónicas causa cierta frustración tanto a él como a otros docentes que reflexionan sobre su ejercicio profesional; esto debido a que comúnmente la enseñanza se limita al trabajo algebraico, del paso de las ecuaciones generales a canónicas. Luego de la indagación a diferentes profesores a través de encuestas, se encontró que la mayoría de colegas tenían el mismo sentir frente a la enseñanza de las cónicas. Además observando algunos libros de texto (herramienta de trabajo del docente) se evidenció que estos también promueven la enseñanza de este concepto del paso de una ecuación a otra, llevando la enseñanza netamente a un campo algebraico que sigue ciertas reglas.

A partir de las reflexiones generadas en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, la evidente preocupación sobre la enseñanza de las cónicas en la educación media se dirigió hacia los

conocimientos que posee el profesor de matemáticas. En este campo se reconocen diferentes posturas frente al conocimiento del profesor de matemáticas como las de Shulman (2005), Ball, Hoover y Phelps (2008) Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Godino (2009) quienes postulan que el conocimiento del profesor de matemáticas va más allá del saber sobre la disciplina y tiene otros componentes de orden didáctico y pedagógico que deben se trabajados.

De esta manera, se reconoció la necesidad de indagar sobre cómo alimentar los conocimientos del profesor de matemáticas, haciendo uso de la historia de las cónicas" (p. 227) esto a través de una serie de documentos históricos bajo la mirada de autores como Apolonio, Copérnico, Kepler, Descartes y Galileo. Se escogió la historia como recurso ya que autores como Gulikers y Bloom (2002),señalan que esta debe formar parte importante de la educación de los profesores ya que conlleva a que ejerza una enseñanza consciente de los contenidos matemáticos, que es en sí un aporte a la construcción de ciudadanos conscientes de su propia práctica.

Por otra parte, Erazo (2016) muestra en su tesis de maestría ocho usos específicos de la historia de las matemáticas y para quienes van dirigidos. De estos ocho usos se resaltan tres que están dirigidos a los docentes, estos son: "ampliar la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas", "promover habilidades y competencias en los profesores" y "rescatar significados y heurísticas". Estas tres categorías de usos de las HM respaldan el trabajo que se quiere llevar a cabo con la historia de las cónicas de este trabajo.

Cuando los docentes tengan un conocimiento más amplio de significados sobre las cónicas esto transformará la visión que tienen sobre las mismas y potenciará el uso de la historia como herramienta para su actividad, puesto que se convierte en fuente de ideas para la enseñanza de este objeto matemático.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 General:

Identificar y caracterizar elementos históricos, en torno al concepto de cónicas, que enriquezcan el conocimiento del profesor de matemáticas, permitiéndole cualificar sus prácticas de enseñanza.

1.3.2 Específicos:

- Realizar una revisión y organización de documentos históricos sobre las cónicas que permitan la identificación de hitos o significados en diferentes autores.
- Caracterizar la historia de las cónicas identificada en diversos documentos, de acuerdo a los beneficios que ofrece para los conocimientos del profesor de matemáticas
- Establecer el aporte de los documentos históricos (acerca de las cónicas) a las diferentes facetas del conocimiento del profesor de matemáticas establecidas por Godino (2009)

2. ANTECEDENTES

Para la elaboración del proyecto se tuvieron en cuenta trabajos realizados en torno al uso de la historia para el desarrollo o la enseñanza de un concepto, y también de aquellos que tuvieran relación con las cónicas directamente, intentando alimentar la problemática identificada, y buscando un modelo metodológico en torno al uso de la historia dentro de un proyecto de investigación, encontrando los siguientes:

Pérez, (2011). En este trabajo se lleva a cabo una propuesta metodológica basada en el uso de regla y compas, y de software dinámico para que el estudiante tenga la capacidad de comprobar cada una de las propiedades que cumplen las cónicas. El trabajo se enmarca en los niveles de los hermanos Van Hiele como referente metodológico y propone una serie de actividades para cada uno de estos niveles. Este proyecto ayuda a la determinación del problema de investigación puesto que muestra a través de su problemática el poco dinamismo en la enseñanza de las cónicas, haciendo evidente la necesidad de diversas estrategias o metodologías de enseñanza.

Calderón, y Peñuela, (2013). Al igual que en Pérez (2011) en esta investigación se propone una alternativa a la enseñanza de las cónicas que beneficie el aprendizaje de las mismas como lugar geométrico desligándolas de su interpretación netamente algebraica, ya que hacen evidente en su trabajo que el trabajo con las secciones cónicas se ha centrado en el desarrollo de algoritmos que van de las ecuaciones general y canónica, para la determinación de los elementos de la parábola. Este trabajo también aporta al planteamiento y justificación del proyecto mostrando como el uso excesivo de las ecuaciones algebraicas desliga el significado geométrico de las cónicas.

Erazo, (2016). Esta investigación realizada en la universidad Pedagógica Nacional el autor logra establecer diferentes usos de la historia de las matemáticas en las que clasifica aquellos usos que pueden ir orientadas al docente que pueden enriquecer sus habilidades en el aula que evidencien el uso de la historia como apoyo en sus prácticas. De allí se evidencian algunos usos que van enfocados hacia la naturaleza del conocimiento, la ampliación del conocimiento matemático, el fortalecimiento de estrategias didácticas que se apoyen en el uso de la historia de las matemáticas etc. Este trabajo aporta metodológicamente al proyecto puesto que muestra cómo se puede orientar la herramienta didáctica a construir para el maestro y que ésta rescate significados que se han producido a través de la historia.

Bocanegra, Galeano, y Huérfano, (2013). En este trabajo de investigación se hace un recorrido histórico con la intención de recopilar algunos elementos que sean de ayuda para el planteamiento de una herramienta didáctica para el docente en torno al concepto de logaritmo y exponencial, donde llegan a la caracterización de lo que es una herramienta didáctica, diferenciándola en 12 formas que permiten una ayuda para el docente de matemáticas. Este proyecto aporta en gran medida al trabajo puesto que da un referente metodológico de cómo llevar a cabo la revisión y clasificación de los documentos históricos que puedan aportar al trabajo.

Indaburo, Jimenez y Sarmiento (2016). En este trabajo se hace una reconstrucción histórica de las ecuaciones trigonométricas, con el fin de apoyar el conocimiento del profesor de matemáticas, bajo la concepción de conocimiento del profesor presentada por “Pinto (2010)”. El trabajo aporta como antecedente de investigación específicamente en la adaptación de alguna de las teorías del conocimiento del profesor de matemáticas como herramienta de análisis para los hallazgos realizados en el estudio de las ecuaciones trigonométricas en la historia, que para efectos de este trabajo se reemplazan por las cónicas.

3. MARCO REFERENCIAL

3.1 Respecto al conocimiento del profesor de matemáticas.

En el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se reconocen diversos factores que pueden ser tenidos en cuenta desde el ámbito investigativo y que inciden en las prácticas educativas y sus resultados, tales como: el razonamiento de los estudiantes, las situaciones que se ponen en juego en el aula, la resolución de problemas y el conocimiento del profesor de matemáticas, entre otros. De manera puntual, para el caso de la enseñanza de las cónicas, en la cual se reconoce que en algunos casos se limita al desarrollo de algoritmos, se ha optado por cuestionar los conocimientos sobre el concepto que el profesor de matemáticas debe tener o desarrollar, para alcanzar unas mejores posibilidades de aprendizaje de sus estudiantes. En ese orden de ideas, se profundiza en los desarrollos teóricos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas (CPM) y se centre la mirada en una de las posturas recientemente desarrolladas, la cual permite contar con elementos de análisis sobre los beneficios que puede brindar el estudio de algunos documentos históricos a los conocimientos del profesor.

Antes de describir algunas directrices en torno al conocimiento del profesor de matemáticas, vale la pena hacer evidentes ciertas causas del por qué se debe cuestionar este conocimiento. Grossman, Wilson y Shulman (2005) citan algunas cuestiones que se deben tener en cuenta en la formación de profesores:

La primera cuestión refiere a la diversidad en las instituciones de formación de profesores, lo que puede desencadenar en que los profesores no se preparen en la misma especialidad. Aunque a primera vista esto pareciera ser “bueno”, puede llevar a que cada docente lleve su práctica a través de sus creencias. La segunda cuestión refiere a la calidad, al parecer “los formadores de profesores intentan formar a los docentes que saben bastante sobre didáctica y sobre la materia a enseñar” (Grossman Wilson y Shulman, 2005, p. 4) pero sobre la materia en particular no. En tercer lugar se encuentra la relación de las materias vistas en la

educación superior y las que va a tener en su práctica el profesor (matemáticas escolares), haciendo evidente que cursos como los de algebra lineal, ecuaciones diferenciales y otros distan de lo que el profesor encontrará en su práctica (aritmética, algebra, geometría etc.). Posición que se ve respaldada por Schoenfeld y Kilpatrick (2008) quienes exponen algunas dimensiones que debe tener el profesor de matemáticas; la primera de ella hace referencia al conocimiento de las matemáticas escolares a profundidad, que le permitan establecer diferentes caminos de abordaje y comprender las preguntas que puedan surgir en torno a estas matemáticas.

Finalmente la cuestión sobre las diferencias entre el conocimiento matemático perse y el conocimiento matemático para la enseñanza muestran como algunas creencias se han arraigado en el común de las personas, Grossman Wilson y Shulman (2005) señalan que una de las creencias tiene eco en que mientras más sabe el profesor sobre el contenido mejor será su enseñanza, o el establecimiento de la correspondencia “entre más sabe el profesor, más aprende el alumno”.

Las cuestiones mencionadas se hacen evidentes en docentes que empiezan sus prácticas profesionales y se encuentran con un cúmulo de inconvenientes en el andar; por ejemplo, cuando un docente no tiene una apropiación adecuada de un contenido lo que hace es evitarlo, pero si necesariamente debe enseñar ese contenido, su principal herramienta es el libro de texto. Entonces será el libro de texto quien proponga la forma de enseñar del docente. (Grossman Wilson y Shulman, 2005).

Llinares (1995) se refiere al conocimiento de los profesores argumentando que este se encuentra permeado de sus creencias y concepciones. Señala que estás permiten al docente escoger lo que para él es importante, aprendan sus alumnos; pero, aunque las creencias hacen parte del conocimiento del profesor estás no pueden ser consensuadas ni evaluables bajo algún parámetro, mientras que el conocimiento se puede validar bajo algunos criterios de calidad.

Lo anterior lleva a pensar entonces en ¿qué es lo que debe saber el profesor de matemáticas? Grossman Wilson y Shulman (2005) muestran que el docente debe

tener: conocimiento de la materia para la enseñanza; que se divide en el conocimiento sustantivo para la enseñanza y el conocimiento sintáctico para la enseñanza. El primero hace referencia a las decisiones que toma el profesor sobre qué enseñar, cuestiones de índole curricular, mientras que el segundo hace referencia a las creencias de los profesores a la hora de enseñar; mostrando que este conocimiento debe ir más allá de la enseñanza de algoritmos y teoremas.

Puesto que la situación de los profesores y su conocimiento se vuelve tan importante, Shulman (2005) hace referencia al conocimiento base del profesor. Este autor muestra diferentes categorías del conocimiento base, estas son: el conocimiento del contenido, conocimiento didáctico general, conocimiento del currículo, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos y conocimiento de los objetivos, finalidades y los valores educativos. Estas categorías recogen aquellas cuestiones mencionadas anteriormente tales como sus creencias y concepciones, su formación en cuanto a la enseñanza y la didáctica de las matemáticas entre otras que afectan el desarrollo de la práctica del docente.

Estas categorías se ven alimentas por unas fuentes que para Shulman (2005) son de vital importancia. La primera de ellas hace referencia al conocimiento histórico y filosófico del docente sobre la historia y la filosofía de las matemáticas; conocer la naturaleza del conocimiento permitirá establecer un modo de llevar a cabo su práctica. La segunda refiere al conocimiento de las políticas educativas generales y las particulares (la institución) como el currículo para tomar decisiones sobre estas. La tercera, y a la cual da una gran importancia, es la literatura educativa especializada, pues el conocimiento constante sobre trabajos que muestren cómo llevar a cabo la enseñanza de diversos contenidos ampliará su visión didáctica y lo incentivará a realizar sus prácticas con un sentido investigativo. La última fuente hace referencia a la sabiduría adquirida por la práctica; haciendo referencia a cómo cada situación vivida durante su desempeño profesional debe ser tenida en cuenta y sistematizada para posibles estudios y reflexiones en torno a ella.

Gracias a la postura de Shulman (2005) sobre el conocimiento base del profesor, diferentes autores desarrollan teorías acerca del conocimiento que debe poseer el profesor de matemáticas. Algunas posturas frente al CPM se resumen en la tabla 1.Las categorías, facetas o componentes propuestas por cada autor, se encuentran relacionadas verticalmente de acuerdo a su argumentación respecto a los conocimientos del profesor de matemáticas.

Tabla 1

Concepciones del conocimiento del profesor de matemáticas en diferentes autores.

Shulman	**Conocimiento didáctico general:** que se preocupa por la enseñanza, cómo enseñar que enseñar con qué lenguaje, etc.	**Conocimiento de los alumnos y sus características:** Se preocupa por las creencias de sus estudiantes, por su estabilidad afectiva frente a los objetos matemáticos que se abordan.	**Conocimiento del contenido:** que se entiende por el conocimiento que posee el docente sobre lo que enseña.	**Conocimiento del currículo:** Da cuenta de las políticas educativas tanto nacionales como internas de cada institución sobre la enseñanza.	**Conocimiento de los objetivos y valores educativos.** Se reconoce que la matemática escolar esta permeada por un contexto al que no se puede ser ajeno y sobre el cual se trazan unos objetivos de actuación.	**Conocimiento de contextos educativos** Reconoce la importancia de conocer de conocer diferentes escenarios para la enseñanza de los conceptos.
Grossman-Wilson y Shulman	**Conocimiento sustantivo** Tiene que ver con el conocimiento que tiene el profesor sobre lo que enseña y			**Conocimiento sintáctico** Este hace referencia a los conocimientos del profesor respecto al currículo, y las decisiones que		

	las creencias que rodean sus prácticas, es importante resaltar la importancia de la naturaleza del cocimiento que posee el profesor.			toma sobre este en torno a qué enseñar, cómo enseñar y para qué enseñar.		
Ball, Hoover y Phelps	**Conocimiento del contenido y la enseñanza.** Que refiere a las estrategias didácticas que pone en juego el docente respecto al conocimiento	**Conocimiento del contenido y los estudiantes** Se preocupa por las creencias de sus estudiantes, por su estabilidad afectiva frente a los objetos matemáticos que se abordan.	**Conocimiento del contenido** Que se divide en el conocimiento común y el especializado, que primero hace referencia al conocimiento que puede tener cualquier persona	**Conocimiento del currículo** Da cuenta de las políticas educativas tanto nacionales como internas de cada institución sobre la enseñanza.	**Horizonte matemático** Tiene que ver con la enseñanza del profesor contemplando las conexiones de lo que está enseñando con futuros conceptos matemáticos que el	

	que tiene sobre el objeto matemático.		para resolver problemas, mientras el segundo hace referencia a la capacidad de crear situaciones y gestionarlas a partir del conocimiento matemático.		niño va a aprender, por lo que se debe enseñar no solo pensando en el aprendizaje del concepto en sí mismo si no en su conexión con otros aspectos de la matemática.	
Schoenfeld y Kilpatrick	**Construir relaciones que apoyen el aprendizaje** El docente debe construir el contenido de tal forma que el estudiante pueda	**Conocer a los estudiantes como personas que piensan.** Permite identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes frente al abordaje de un objeto	**Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud.** Le permite conocer diferentes maneras de abordar el		**Reflexionar sobre la propia práctica** El docente debe hacer una reflexión sobre las acciones que realiza en el aula con el fin de mejorarlas o ratificarlas, teniendo en cuenta	**Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje** Significa gestionar espacios en los que verdaderamente se creen comunidades intelectuales, que puedan tener un reconocimiento como

	establecer una relación con el objeto matemático sin dificultades.	matemático, permitiendo que presente y desarrolle ideas. **Conocer a los estudiantes como personas que aprenden** Darle sentido a las construcciones que el estudiante hace frente a un objeto determinado que quiere aprender, tratar de encaminar los esfuerzos a que el estudiante sea consciente de que es él quien debe	conocimiento y encontrar conexiones con diferentes conceptos matemáticos que se ligan entre sí.		que este proceso reflexivo se debe repetir a lo largo de toda la práctica.	tal y que s dedique a la "investigación" del conocimiento. **Desarrollar las normas de clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la enseñanza para el aprendizaje.** Tiene que ver con las normas de clase en torno al trabajo en diferentes contextos y su relación con las herramientas usadas.

		organizar sus ideas y sacar sus conclusiones.				
Godino (2009)	**Interaccional** Da cuenta de la interacción del docente y los estudiantes para determinar los significados de los objetos matemáticos que se trabajan en el aula.	**Afectiva** Se refiere a las emociones, valores, actitudes y creencias que pone en juego el estudiante con relación a los objetos matemáticos que trabaje.	**Cognitiva** Se entiende por los conocimientos previos que posee el estudiante y los avances que presenta durante el proceso de enseñanza aprendizaje	**Epistémica** Se enfoca en los conocimientos matemáticos institucionales, preocupándose por los problemas, el lenguaje, los argumentos etc.	**Ecológica** Se preocupa por el contexto socio-político y cultural que rodea la educación.	**Mediacional** Conocimiento de la tecnología y su conveniencia en el aula, además de los tiempos elegidos para cada proceso.

En la Tabla 1 se reconocen las posturas de Shulman (2005), Grossman-Wilson y Shulman (2005), Ball, Hoover y Phelps (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Godino (2009), en ellas se establece una relación vertical dentro de la tabla, ya que se encuentran relaciones en torno al conocimiento del profesor en cuestiones de índole curricular, didáctico, pedagógico, que componen los conocimientos del profesor de matemáticas. Cabe resaltar que es Shulman(2005) quien sienta las bases de las teorías propuestas por los demás autores, ya que todos lo referencian para postular los conocimientos que debe poseer el profesor de matemáticas. Respecto a la propuesta realizada por Ball, Hoover y Phelps (2008) cabe resaltar lo que denominan como horizonte matemático, ya que amplía el espectro de enseñanza para el profesor de matemáticas, puesto que implica el reconocimiento de conexiones del conocimiento a enseñar con otros más avanzados. Respecto a la propuesta de Schoenfeld y Kilpatrick hay que resaltar la importancia que dan al conocer a los estudiantes como personas que piensan y participan, para dejar de verlos como simples receptores de información. Además proponen que el docente debe estar en la capacidad de crear entornos de aprendizaje que favorezcan el aprendizaje por parte del estudiante. Puesto que Godino (2009) tiene en cuenta muchas de las ideas presentadas por estos autores, se elige para efectos de este proyecto dicha propuesta ya que dentro de la misma se reconoce la importancia del conocimiento del profesor respecto a los entornos sociales y políticos que se encuentran en el entorno del estudiante.

3.1.1 El modelo de Godino

Godino (2009) recoge muchas de las ideas presentadas por Shulman (2005), Grossman, Wilson y Shulman (2005), Ball, Hoover y Phelps (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y realiza un planteamiento de las categorías que se deben tener en cuenta en el conocimiento del profesor; proponiendo así seis facetas del conocimiento del profesor y cuatro niveles de análisis que se muestran en la siguiente imagen.

Figura2. Facetas y niveles del conocimiento del profesor.

Fuente: Godino (2009)

En la Figura 2 se evidencia una diferencia frente a lo propuesto por Shulman (2005) cada faceta tiene un nivel de desarrollo lo que lleva a pensar en el conocimiento del profesor de un modo más profundo. Una de las facetas importantes que se sugieren en el modelo de Godino (2009) es la ecológica pues en ella se tienen en cuenta aspectos sociales, políticos y culturales que están presenten en los contextos educativos y cómo estos se encuentran en cada uno de los niveles. Cabe resaltar que cada una de estas facetas se relaciona entre sí y no se dan de manera independiente.

Estas facetas del conocimiento están sujetas a una herramienta de análisis que gira en torno a la idoneidad de cada uno de ellos. Para la faceta interaccional debe permitir identificar conflictos potenciales, y también dar solución a los conflictos que se den en el proceso de enseñanza aprendizaje. En la faceta afectiva se tiene en cuenta la experiencia escolar del estudiante, sus comportamientos, los valores que pone en juego en su aprendizaje, las emociones que genera el aprendizaje de las matemáticas. Para la faceta epistémica propuesta por Godino (2009), se tiene en cuenta el grado de importancia que asume un significado de un objeto

matemático en el proceso de aprendizaje, se encarga de verificar la dotación de características a un objeto de tal manera que estás sean acordes al significado del objeto. Respecto a la faceta cognitiva, se reconoce que es importante el grado de relación entre el significado pretendido por el docente y el construido por el estudiante. En la faceta mediacional se da importancia a los espacios y elementos físicos que se necesitan para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Finalmente, para la faceta ecológica es importante la relación del concepto con otras disciplinas y con los contextos socioculturales.

El modelo considera principalmente claves las facetas epistémica y cognitiva, sin dejar de lado las demás. En este sentido, Godino (2009) argumenta que la matemática como actividad humana cobra significado en aquellas circunstancias en las cuales las personas ponen en juego los conocimientos matemáticos en la solución de situaciones-problemas.

Ahora bien, aparte de mencionar las facetas que debe apropiar un profesor de matemáticas, Godino (2009) propone cuatro niveles de análisis para cada faceta: prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos) normas y meta-normas, y por último idoneidad.

Practicas matemáticas y didácticas: se refiere a todas las estrategias que puede poner en práctica el docente para contextualizar el conocimiento y de esta forma promover el aprendizaje de parte de los estudiantes.

Configuraciones de objetos y procesos: identificación de los diferentes objetos matemáticos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje y los posibles procesos que se pueden dar para dotar de significado dichos objetos.

Normas y meta-normas: se refiere a los acuerdos a los que se llegan en el aula para el proceso de aprendizaje que tendrá que ver en cada faceta.

Idoneidad: tiene que ver con la identificación de puntos o aspectos que se puedan mejorar en pro de un mejor aprendizaje.

Godino (2009) sugiere que, en un trabajo donde se pretenda el desarrollo de competencias profesionales, que se encuentren ligadas con el desarrollo de la

práctica, esta se puede llevar a cabo bajo la idoneidad didáctica, puesto que permitirá identificar puntos a mejorar dentro de la propuesta. Además, el mismo autor argumenta que haciendo las modificaciones necesarias, esta propuesta puede ser usada como:

I. La valoración de situaciones introductorias en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales.
II. Como cuestionario de autoevaluación y reflexión del profesor sobre aspectos relevantes de su propia práctica.
III. Cómo instrumento de un evaluador externo para valorar un proceso de estudio implementado.

En concordancia con lo expuesto por Godino (2009) el análisis se realizará bajo la idoneidad didáctica para cada una de las facetas, para ello Godino (2009) propone un sistema que recoge/fusiona más de dos facetas en una sola, proporcionando las categorías de análisis que van a ser usadas en este proyecto. A continuación se presentan las tablas que Godino (2009) presenta con dicho fin.

Tabla 2

Conocimiento del contenido (común especializado y ampliado)

Faceta epistémica	Consigna
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
- Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
- Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
- Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
- Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
- Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
- Conexiones	-Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Nota: Fuente, Godino (2009).

Para este caso la única faceta que se tiene en cuenta es la epistémica, para la cual se extienden algunas categorías como los tipos de problemas, lenguajes, procedimientos, etc. Que servirán de insumo para buscar en la historia cada uno de estos aspectos, de tal forma que hagan un aporte al conocimiento del profesor de matemáticas, específicamente a la faceta epistémica.

Tabla 3

Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (aprendizajes)

Faceta cognitiva + afectiva	Consigna
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,…)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes	Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).
Actitudes, emociones, creencias, valores	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

Nota: Fuente Godino (2009).

En la tabla 3 se fusionan 2 de las facetas propuestas por Godino, que son la cognitiva y la afectiva, esto con el fin de identificar la relación que hay entre el conocimiento y las creencias del profesor en relación con diversas actividades. Para las categorías propuestas en este cuadro se deben hacer las siguientes aclaraciones. En el caso de los errores, dificultades; se verificará en el documento la existencia de dificultades en el surgimiento del concepto de cónicas. En el caso de la evaluación de aprendizajes, para que el docente alcance esta competencia, es necesario que identifique distintos significados que se pueden atribuir a tareas o actividades matemáticas específicas se verificará entonces si el documento permite identificar estos significados en relación al tema de estudio (cónicas). Finalmente frente a las actitudes y creencias se plantea que para que el docente logre alcanzar esto, debe conocer distintas estrategias de solución o maneras de abordar cuestiones matemáticas, por lo que se observará si el documento permite identificar estas distintas maneras.

Tabla 4

Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.

Faceta instruccional (interaccional + mediacional)	**Consigna**
Configuración didáctica: - Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido - Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos; - Recursos materiales - Tiempo asignado	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Nota: Fuente Godino (2009).

En el caso de la tabla 4 se puede observar que se fusiona la faceta interaccional con la mediacional, describiendo los comportamientos del docente frente a sus alumnos y los recursos o herramientas que usa para la enseñanza. Se identificarán entonces aspectos en la historia que potencien el uso de dichas herramientas y faciliten la interacción del docente con el estudiante en términos didácticos.

Tabla 5

Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares.

Faceta ecológica	Consigna
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Nota: Fuente Godino (2009).

La Tabla 5 muestra como el conocimiento adquiere conexiones tanto dentro de las mismas matemáticas como con otras ciencias, al igual que cuestiones de índole curricular. Además se observa como la faceta ecológica se preocupa por los aspectos sociales y culturales que rodean el conocimiento, reconociendo que este está ligado al desarrollo humano.

Recogiendo las ideas de Shulman (2005), Grossman-Wilson y Shulman (2005),Ball, Hoover y Phelps (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Godino (2009) se reconoce la importancia del conocimiento del profesor de matemáticas, pues es el que determinará las formas de enseñanza en el aula y por ende los procesos de los estudiantes y sus construcciones de conocimiento; consecuentemente, es de vital importancia desarrollar proyectos que se enfilen en la mejora o potenciación de estas dimensiones o facetas en los docentes de matemáticas en la enseñanza de las matemáticas escolares.

3.2 Respecto al aporte de la historia al conocimiento del profesor de matemáticas

La historia de las matemáticas ofrece diferentes puntos de vista respecto a la construcción del saber, estos pueden aportar al conocimiento del profesor de matemáticas. Erazo (2016) reporta diferentes posturas de autores como Boero (1989), Gonzáles (1991), Tzanakis y Arcavi (2002), Wen Ki Ho (2008), entre otros, respecto a los usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática de los cuales se reconocen nueve usos específicos; ocho de ellos dirigidos al docente, es decir, se evidencia una amplia gama de aportes de la historia de las matemáticas al conocimiento del profesor. Erazo (2016) recopila y presenta estos usos como: organizar el currículo, incorporar acciones específicas en el aula de clase, ampliar la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas, ampliar la concepción de los objetos matemáticos, promover habilidades y competencias en los profesores, rescatar significados y heurísticas, comprender la génesis de un objeto, mejorar la actitud hacia las matemáticas. Estos usos reportados por Erazo (2016) se listan y explican a continuación.

3.2.1 Organizar el currículo.

Para poder tener una visión de lo que podría ser el aporte de la historia al currículo, se tomará como referencia a Stenhouse (2010), quien realizó un amplio recorrido por el currículo y sus características. Este autor divide o distingue el currículo en: macro-currículo, haciendo referencia a todas las políticas educativas que puedan surgir en un país o estado, respecto a la educación de los niños y niñas; el meso-currículo que está relacionado con las proyecciones de las instituciones en cuanto a los modelos educativos, metas y propósitos y por último, está el micro-currículo que da cuenta de las planeaciones de los profesores para sus clases y la gestión que se da en las mismas.

En torno al macro-currículo, se tiene como ejemplo los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional MEN (1998). En estos lineamientos se hace un recorrido histórico sobre las diferentes corrientes que han

surgido para sustentar la naturaleza del conocimiento en matemáticas; encontrando así posturas platónicas, logicistas, constructivistas, entre otras que tratan de ampliar el marco de referencia de los profesores para sus prácticas.

Para el meso-currículo los aportes de la historia también son importantes, ya que en el PEI de cada institución se debe reflejar un enfoque pedagógico que defina el trabajo de todos los profesores. Así pues, la conexión con el macro currículo se hace evidente en la escogencia de una o más posturas para guiar el trabajo de los profesores en las aulas ya sea desde una visión constructivista, conductista, etc.

Finalmente, para el micro-currículo las planeaciones del profesor de matemáticas y su gestión en el aula se pueden ver enriquecidas desde aspectos como el de tratar de emular en el aula el surgimiento de los conceptos matemáticos a través de la historia, organizar y establecer conexiones entre las temáticas escogidas para trabajar en cada grado de acuerdo a las conexiones encontradas históricamente. Se convierte en una herramienta para el docente, que Guacaneme (2016) define como artefactos, de los cuales se hará referencia con mayor detenimiento más adelante.

3.2.2 Incorporar acciones específicas en el aula de clase.

El profesor puede identificar momentos importantes en la construcción de un objeto matemático, que pueden ir desde características epistemológicas que le permitan anticiparse a posibles errores o caminos de abordaje de sus estudiantes; puede pasar por la identificación de problemas reconocidos históricamente para recontextualizarlos y llevarlos al aula; como también el uso de anécdotas históricas del surgimiento de los objetos matemáticos y sus aportes en diferentes contextos sociales, tecnológicos y científicos.

3.2.3 Ampliar la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas.

Autores como Agudelo (2007), hacen referencia a la naturaleza del conocimiento del docente de matemáticas y cómo esta influye notablemente su forma de

accionar en su práctica; haciendo especial énfasis en cómo el profesor realiza procesos de enseñanza y evaluación de acuerdo a sus concepciones y creencias. Así pues, un docente que se preocupa por la rigidez en el aula y por presentar las matemáticas cómo algo exacto y divino seguramente tendrá una visión conductista del conocimiento; algún otro que se preocupe por el razonamiento del estudiante y su forma de establecer conexiones entre los objetos, estará guiado por una visión constructivista, y así se pueden identificar muchos ejemplos en donde el docente refleja un sistema de creencias (desarrollados históricamente) en su práctica.

La falta de formación en este sentido ha llevado a que las matemáticas en algunos casos se sigan enseñando de una forma tradicional. Erazo (2016) muestra como la historia de las matemáticas es fundamental para conocer el origen del conocimiento, su surgimiento y evolución a través de los años. Además permite identificar los contextos sociales, culturales y políticos que dieron pie para que este conocimiento surgiera y se desarrollara. Por ende, el conocimiento de estos contextos ayudará al profesor a ser consciente sobre su propia práctica y a cuestionar su sistema de creencias con el fin de mejorarlo, basado en el reconocimiento de diferentes perspectivas sobre la naturaleza del conocimiento.

3.2.4 Ampliar la concepción de los objetos matemáticos.

De manera similar a la categoría anterior, las creencias y concepciones del docente sobre un objeto matemático se ven modificadas, permitiéndole reconocer sus características, sus métodos heurísticos de abordaje sus problemas epistemológicos de construcción, etc. Esto sin lugar a duda ampliará su visión sobre el objeto matemático dejándolo ver como resultado de una evolución histórica.

3.2.5 Promover habilidades y competencias en los profesores.

La adopción de la historia de las matemáticas debe promover en el docente la aceptación de diversos caminos de construcción de un conocimiento y diversas formas de abordaje a un problema, es decir, promoverá la pluriculturalidad en el

aula de matemáticas, además de entregarle herramientas que le permitan comprender de mejor manera el pensamiento de los estudiantes frente a diferentes situaciones.

Por otra parte, se desarrollará la habilidad de identificar elementos importantes de la historia que le permitan gestionar de una mejor manera sus clases, tal como se ha mencionado en las categorías anteriores, en la historia se puede identificar muchos elementos que se convierten en herramientas para el docente.

En torno a la mejora de habilidades didácticas puesto que podrá identificar problemas de los estudiantes en la construcción de un conocimiento y gestionar de manera efectiva la superación de dicho problema. Además ampliará sus propuestas didácticas en el aula que tendrán una connotación histórica o no de acuerdo a como el docente lo considere necesario.

3.2.6 Rescatar significados y heurísticas.

El docente podrá reconocer en la historia problemas de gran importancia que puedan ser recontextualizados y llevados al aula, así como modos no convencionales de trabajo en una determinada área. Quiere decir que se aceptarán soluciones como métodos de ensayo y el error, geométricos o aritméticos, que no necesariamente deban responder al algoritmo terminado para los problemas puestos en el aula, si no donde se evidencien las características fundamentales del objeto que se quiere construir, lo que implica una apropiación adecuada del significado de dicho conocimiento.

3.2.7 Comprender la génesis de un objeto.

Beneficia la práctica de la enseñanza ya que esto permitirá que el objeto no se presente en su forma terminada o final, si no que se pueda presentar al estudiante a partir de las necesidades que beneficiaron su aparición en la cultura.

También permitirá diferenciar su surgimiento en diferentes tipos de sociedades, por ejemplo, el trabajo de la solución a ecuaciones en los griegos y en contraste las propuestas de los egipcios u otras culturas, donde se puede tomar elementos

que puedan servir de apoyo en el trabajo del aula desde diferentes puntos de abordaje.

3.2.8 Mejorar la actitud hacia las matemáticas.

Se espera que la adopción de la historia de las matemáticas como herramienta para preparar y gestionar el trabajo en el aula de clase propicie que el docente genere un ambiente de cultura política y de aplicabilidad de las matemáticasen otras ciencias, de tal forma que el estudiante un significado de las matemáticas importante en sus vidas y en la construcción de las sociedades.

Así pues Erazo (2016) muestra que hay una relación entre historia de las matemáticas y el conocimiento del profesor de matemáticas, presentando diferentes aportes de la historia que van a alimentar sus facetas del conocimiento; esta idea también se refleja en autores como Gulikers y Blom (2002), quienes argumentan que la apropiación de la historia de las matemáticas por parte del docente es importante para el desarrollo de las prácticas del mismo. Por un lado, permite que el docente tenga clara la naturaleza del conocimiento y tenga una posición sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos; por otro, permite que el docente reconozca diferentes momentos históricos importantes involucrados en la construcción de un conocimiento, lo que le facilitará anticipar algunos obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de las matemáticas, mejorando las habilidades didácticas del profesor y propiciando una actividad que involucre la cultura y el aprendizaje en contexto.

Por otra parte, Guacaneme (2016) recoge la idea de los aportes de la historia de las matemáticas de diferentes autores en diversos tipos de texto (artículos, libros, etc.), reconociendo la importancia de la enseñanza de la historia de las matemáticas a docentes en formación o en ejercicio. Esto implica pensar nuevamente en cuáles son los aportes que puede realizar la historia de las matemáticas a la formación del docente.

Además de estos usos propuestos por Erazo (2016), como se mencionó en los apartados iníciales el conocimiento del profesor está dividido en diferentes aspectos o facetas que integran un todo. Donde no solo es importante el conocimiento particular del contenido, sino también el conocimiento de aspectos curriculares, pedagógicos, didácticos, sociales y culturales que seguramente pueden ser alimentados por la historia de las matemáticas, cuestión que se hará más específica más adelante.

Según lo mencionado por Guacaneme (2016) la historia se reconoce como una fuente de artefactos que pueden ser usados por el docente. A continuación, se intenta reflejar una idea de esta posición, en la Figura 3.

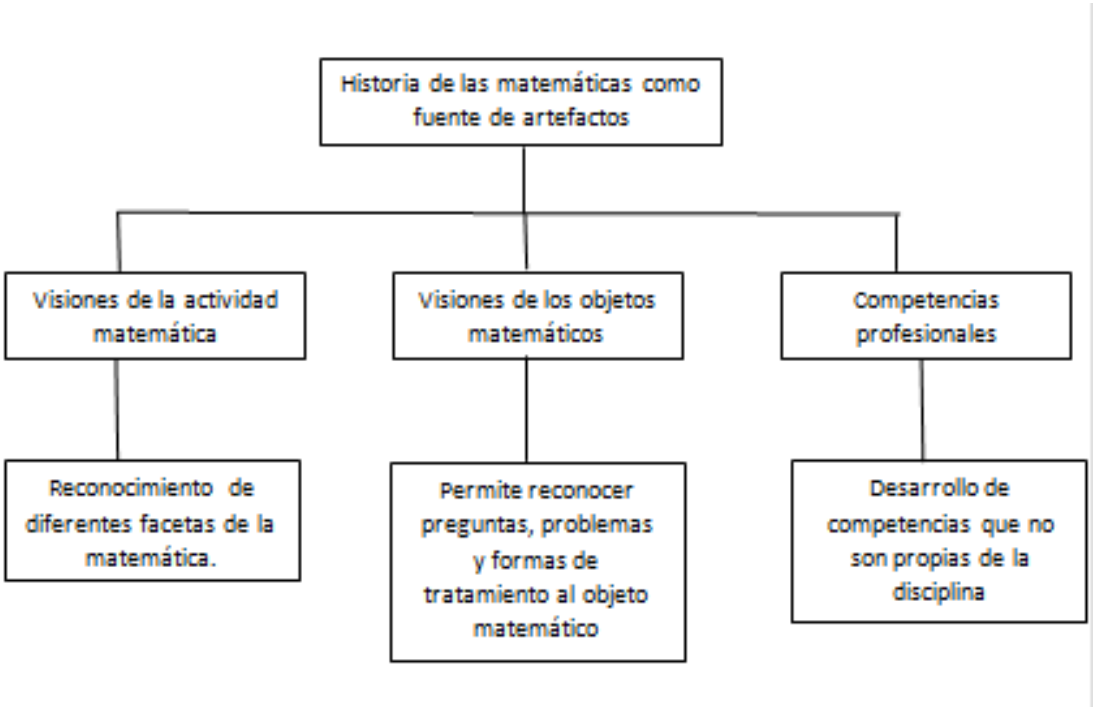


Figura3. Historia de las matemáticas como fuente de artefactos.

Las visiones de la actividad matemática permitirán al docente ampliar su conocimiento en cuanto a las diferentes formas en las que se puede dar la construcción y comunicación de un conocimiento, dando amplitud en su gama de posibilidades para interpretar lo que sus estudiantes pueden llegar a presentar en

el aula de clase. Además, esto permitirá también que el docente elabore una visión que sea más cercana y apropiada para sus estudiantes.

El reconocimiento de la actividad matemática cobra sentido en la actividad humana, mostrando al docente un carácter social, político y cultural de las matemáticas que a través de la historia han sido base de desarrollos tecnológicos y científicos; lo que generará un pensamiento crítico por parte del profesor respecto a las implicaciones sociales que tienen los conocimientos que está enseñando. Esto dota de un carácter humanizador a las matemáticas que propician un ambiente mucho más cercano a las personas, no en vano autores como Skovsmose (2000), D' Ambrosio (2011) y Valero (2012), reconocen la importancia de la historia de las matemáticas como espejo para identificar la incidencia de las matemáticas en el desarrollo de las culturas en aspectos sociales y políticos.

Además, se muestra la segregación que históricamente ha generado la matemática, reconociéndose como un conocimiento reservado para las elites y generando desigualdad en las sociedades. Lo que permite al docente identificar la historia como una herramienta para posicionarse socialmente y tomar decisiones en torno a lo que deben aprender los niños y cómo lo deben aprender.

Las visiones de los objetos matemáticos también tienen estrecha relación con la connotación social que puede llegar a asumir la matemática. En primer lugar, permitirá identificar aquellos problemas o hitos que se dieron históricamente para poder ser llevados al aula de clase. En segundo lugar, permite reconocer la matemática como base de desarrollo de disciplinas como la física, la química, la astronomía, etc. Lo que propicia el desarrollo de un trabajo interdisciplinar que cobre sentido en la realidad del estudiante.

Finalmente, las competencias profesionales son aquellas que dan cuenta de los desarrollos que el docente puede llegar a adquirir con la apropiación de la historia de las matemáticas. Esto se ha presentado y argumentado en los párrafos anteriores, que van desde la mejora de sus estrategias didácticas, ya que puede

predecir y entender de mejor manera los errores que se puedan presentar en el proceso de enseñanza aprendizaje; el empoderamiento de una visión crítica de las matemáticas, dándole un sentido humanizador a las mismas y ayudando a sus estudiantes a asumir una posición crítica respecto de lo que aprenden, hasta la forma de organización de sus clases y el contrato didáctico que pueda establecer con sus estudiantes en sus clases.

Ahora bien, relacionando de manera más especifica el conocimiento del profesor de matemáticas enmarcado en las facetas que presenta Godino (2009) y los aportes que puede tener la historia de las matemáticas a cada una de estas facetas se pretende hacer un esbozo de los posibles aportes en la Tabla 6.

Tabla6

Facetas del conocimiento y su relación con el posible aporte de la historia de las matemáticas.

Faceta	Aporte de la historia
Interaccional	Puesto que se debe identificar conflictos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tal como lo mencionaba Gulikers y Blom (2002), con el conocimiento de la historia se pueden anticipar errores y preguntas durante la construcción del conocimiento.
Afectiva	El reconocimiento de los procesos culturales dan un sentido humanizador a las matemáticas, reconociéndolas como parte fundamental de las diferentes culturas, reconociendo la influencia de las creencias, comportamientos, valores, etc.de las personas en la construcción de los conceptos matemáticos.
Cognitiva	Puede aportar problemas potenciales que permitan la construcción del conocimiento del estudiante, además de identificar los conocimientos que se

	requieren para la adquisición o construcción de un nuevo conocimiento, es decir históricamente cuales fueron los pasos previos antes de poder llegar a la construcción de un conocimiento más elevado.
Mediacional	Puesto que tiene que ver con los recursos tecnológicos, se puede identificar aquellos aportes de la matemática a diferentes ciencias para la creación de diferentes herramientas que beneficiaron la evolución del hombre en diferentes aspectos, de salud, tecnológicos, arquitectónicos entre otros.
Epistémica	Permitirá al docente tener claridad sobre la naturaleza del conocimiento, su génesis y la evolución de sus características a lo largo de la historia, permitiendo que el docente elabore una postura mucho más fuerte y orientada por una corriente definida (constructivista, logicista platónica,) dando herramientas al docente para apropiarse mejor de cada uno de los conceptos matemáticos y por ende propiciar procesos de enseñanza más lógicos.
Ecológica	Permite rescatar el carácter social y político de las matemáticas y su influencia en el comportamiento de las culturas en diferentes épocas históricas, además promueve la interdisciplinariedad y el reconocimiento de las matemáticas como acción natural del hombre en pro de mejorar.

Estas facetas y estos posibles aportes serán los que sustentarán el trabajo en torno a la inclusión de la historia de las matemáticas como aporte al conocimiento del profesor de matemáticas respecto a las cónicas.

4. METODOLOGÍA

4.1 Investigación documental

Este trabajo se propone indagar por los aportes que le puede ofrecer el estudio de algunos documentos históricos al conocimiento del profesor de Matemáticas. Existen trabajos antecedentes que han categorizado los conocimientos del profesor de Matemáticas y también trabajos antecedentes que han resaltado algunos aportes de la historia a dichos conocimientos. Teniendo en cuenta esto, estrategia de investigación seleccionada es la revisión documental. Para Cortés y García (2003) las investigaciones de este tipo tienen como propósito responder interrogantes o verificar hipótesis a través de sustentos documentales reportados previamente en la historia estos sustentos pueden ser; archivos, textos, periódicos, artículos, videograbaciones, grabaciones de voz, etc. Para efectos del presente trabajo los documentos elegidos son artículos de tipo histórico sobre las cónicas con estos se realiza un análisis de contenido a la luz de unas categorías de análisis que surgen de la teoría sobre los Componentes del Conocimiento del Profesor de Matemáticas.

Este tipo de investigación se encarga de establecer aspectos importantes acerca del objeto de estudio (cónicas) que se encuentren en cada texto. La identificación de dichos aspectos permite dar respuesta a la pregunta de investigación en cuanto a los aportes de la historia de las cónicas identificada en cada documento a los conocimientos del profesor de matemáticas y por ende verificar el cumplimiento de los objetivos planteados en torno al aporte de la historia de las cónicas.

Una vez establecida la postura frente a la metodología de investigación (de tipo documental) Cortés y García (2003) proponen una gama de fuentes de información que pueden servir a este propósito; dentro de estas se encuentran: documentos históricos, documentos estadísticos, informes, estudios, memorias, biografías, etc. Siendo los archivos históricos los que de mejor manera se ajustan a los propósitos de este trabajo.

Debido a que la búsqueda de documentos se realiza en pro de que se encuentren bajo un corte histórico, se debe hacer claridad sobre los tipos de documentos que se pueden encontrar. Fusco (2009) señala diferentes tipos de fuentes, diferenciando las primarias y secundarias: Las fuentes primarias son todos aquellos documentos originales que se encuentran acerca del objeto estudiado (cónicas) en la fecha misma de su concepción. Las fuentes secundarias son los documentos escritos por otras personas, que no se encontraban en el lugar de los hechos pero que narran lo sucedido a partir de una investigación o estudio de fuentes primarias y secundarias.

Una vez descrito el tipo de investigación con el cual se desarrolla el presente trabajo, a continuación se describen las fases establecidas para su desarrollo.

4.1.1 Fase I (exploratoria)

Para esta primera fase se establecieron los criterios de búsqueda, teniendo en cuenta que debían responder a un carácter histórico. Los criterios para realizar la búsqueda fueron: por objeto matemático (cónicas, parábola, elipse). Por tema (geometría, álgebra, geometría analítica); por autor (biografías de autores que se encontraban relacionados con el tema) esta se establece gracias a las dos categorías anteriores encontrando los matemáticos que se nombraban en dichos documentos. Gracias a la búsqueda se logró la identificación de 20 documentos que cumplían con alguno de los criterios de búsqueda, de estos documentos se eligieron 11 debido a su carácter histórico, y a su reconocimiento en revistas de matemáticas, para su estudio y análisis y se nombran a continuación.

Tabla7

Tabla de clasificación de búsqueda de documentos.

POR TEMA	POR MATERIA	POR AUTOR
Historia de la matemática. (vol. I)	La génesis histórica de la geometría analítica y la enseñanza en la escuela	Euler y la geometría analítica.

	secundaria.	
Diálogos sobre las aplicaciones de la matemática	Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica	Apolonio el geómetra de la antigüedad
La elipse a través de la historia.	La geometría analítica de Descartes Fermat y ¿Apolonio?	Algunas notas sobre la vida de Kepler
Cónicas en la antigua Grecia		El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática.

4.1.2 Fase II (organización)

Una vez finalizada la búsqueda y selección de documentos, se procede a la organización de la información que Fusco (2009) denomina registro de datos, dicho registro en el presente trabajo se realiza por medio de pequeñas reseñas que proporcionan una visión general del documento e informan al lector sobre el mismo; en caso de que se quiera ampliar la información sobre dicho documento pueden recurrir al texto original.

4.1.3 Fase III (análisis y elaboración de informe de resultados)

El análisis de los documentos se centra en la identificación de aspectos históricos que aporten al conocimiento del profesor de matemáticas de acuerdo a las facetas que conforman el conocimiento del profesor de matemáticas, establecidas por Godino (2009). Estas facetas se adoptaron como categorías de análisis de los documentos. Estas son: faceta epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Cabe aclarar que bajo una mirada de idoneidad didáctica, Godino (2009) propone el análisis a partir de la fusión de dos o más facetas así: para el conocimiento del contenido-faceta epistémica. Para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes-Facetas cognitiva y afectiva. Para el conocimiento del contenido en relación a la enseñanza-faceta interaccional y mediacional. Finalmente para el conocimiento del currículo y

conexiones intra e interdisciplinar. En consecuencia se generó la Tabla 8 como herramienta para llevar a cabo el análisis.

Tabla8

Ejemplo Tabla para el análisis de los documentos.

Nombre del autor del documento a analizar		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	
	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	

	G16 conexiones interdisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores condicionante sociales	

La Tabla 8 se encuentra dividida de la siguiente manera. En la primera fila de la parte superior se encuentra el nombre del autor del documento a analizar. Luego vienen tres columnas, en la primera de ellas aparecen las facetas propuestas por Godino (2009), asignando un color diferente para cada una de ellas. Luego de esto se presenta una serie de códigos (g1, g2, g3, etc.) que hacen referencia a las características de cada una de las facetas presentadas en la columna 1 por lo que también se encuentran con el mismo color. La tercera columna sirve para señalar por medio de una “x” si el documento revisado aporta a cierta categoría. Por ejemplo si en una de las casillas se llegase a marcar G8, significa que el documento permite establecer errores o dificultades en la historia que podrían proporcionar elementos al profesor para predecir posibles errores de sus alumnos, lo que estaría aportando directamente a la faceta cognitiva y afectiva del docente.

Como fase final está la elaboración de las conclusiones que dan cuenta del nivel de cumplimiento de los objetivos trazados y de otros hallazgos y cuestiones abiertas que surgieron con el desarrollo del trabajo.

5. Análisis

5.1 Documentos reseñados.

Como parte del marco de referencia y unidades de análisis para la consecución de este proyecto se elaboraron 11 reseñas de diferentes documentos. Estos dan cuenta del desarrollo de las cónicas en diferentes momentos históricos y bajo la mirada de diferentes autores, los textos fueron seleccionados luego de realizar una revisión de documentos, clasificarlos y descartarlos de acuerdo a las categorías establecidas en la metodología y pensando en los aportes que podrían hacer al conocimiento del profesor de matemáticas

A continuación se presentan las 11 reseñas que van desde el descubrimiento de las cónicas por Menecmo hasta la consolidación de la geometría analítica (por ende también de las cónicas) con Euler.

5.1.1 Cónicas en la antigua Grecia

Marcela Castelnoble Díaz, Facundo González Herrera

En este documento se muestra como las creencias sociales han tenido implicaciones dentro del desarrollo de los conceptos matemáticos, en el caso de las cónicas se muestra la estrecha relación que guarda con uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad, la Duplicación del cubo.

El problema de la duplicación del cubo aparece gracias a una peste que azotaba a la población de Atenas, el Oráculo pidió a los matemáticos de Atenas que duplicarán el volumen del cubo que se había construido en honor a Apolo. Esta tarea se quiso cumplir duplicando el valor de la arista del cubo pero esto dio como resultado un volumen ocho veces más grande que el original (ver Figura 4).

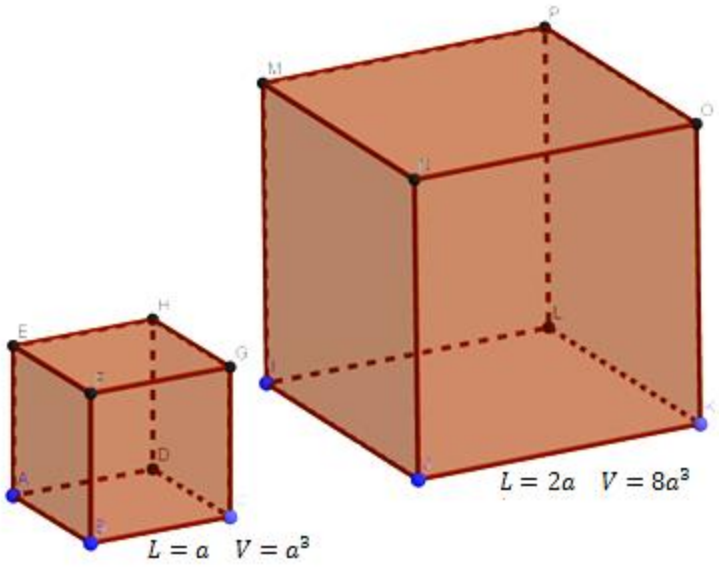


*Figura4.*Intento de la duplicación del cubo.

Fue entonces cuando se dieron cuenta que este problema no podía resolverse con el uso de la regla y el compás, traduciendo esto a otro lenguaje el problema se reducía a encontrar dos medias proporcionales entre el cubo original y el cubo de volumen 8 veces más grande al original, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$; Así pues se tiene que este

problema resulta ser lo que hoy en día se conoce como un sistema de ecuaciones, que tiene como solución la intersección de 2 parábolas.

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

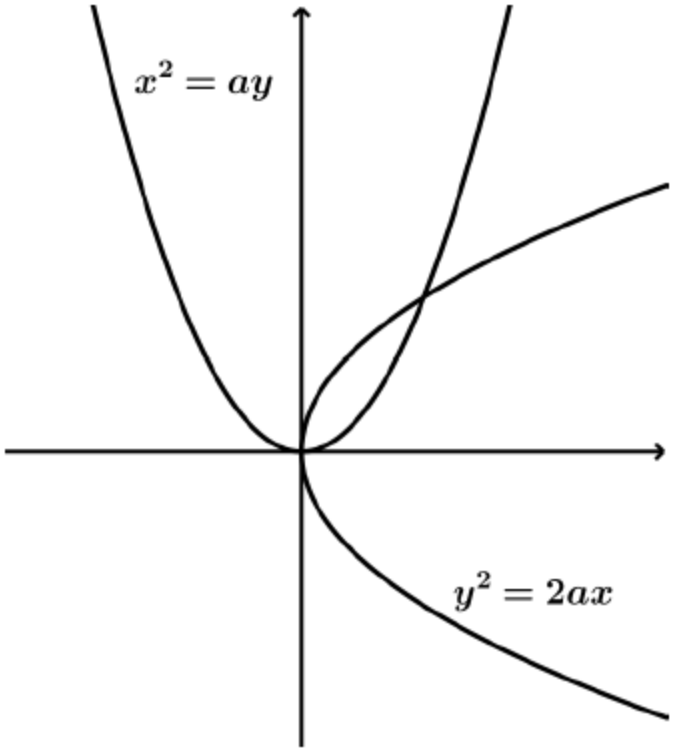


Figura5. Solución a la duplicación del cubo como la intersección de dos parábolas. Fuente: Castelnoble y Gonzáles (2015).

Luego de esto apareció Menecmo quien encontró las cónicas como Figuras geométricas a través del corte perpendicular a una de las generatrices de un cono, así dependiendo si el cono fuese recto o no se encontraba una Figura diferente, elipse, parábola o circunferencia.

Después del descubrimiento de Menecmo con los cortes transversales, llega Apolonio con su tratado sobre Cónicas, demostrando que no necesariamente el cono debe ser diferente para obtener cada cónica, si no que de un cono recto se pueden obtener las diferentes cónicas realizando diferentes cortes transversales al cono (ver Figura 6), es decir ya los cortes no necesariamente son perpendiculares al cono como lo hacía Menecmo.

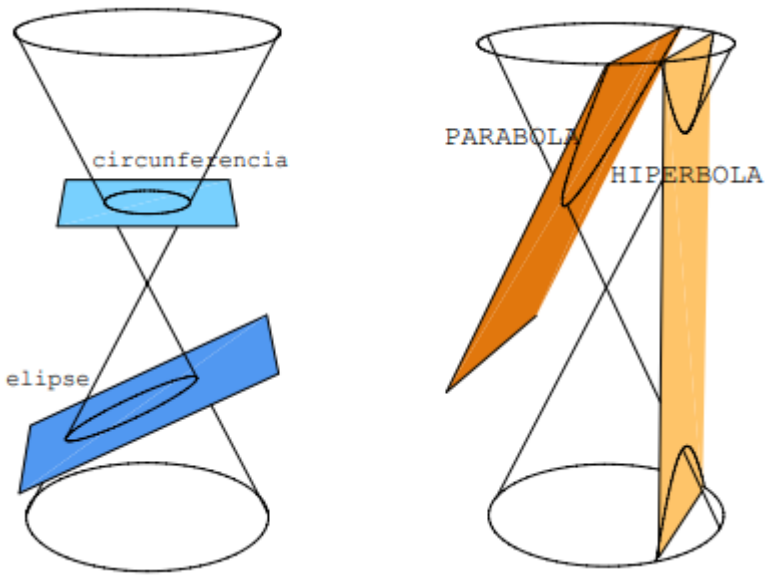


Figura6. Cónicas obtenidas de un cono recto de doble hoja.

El documento entonces realiza un recorrido desde el descubrimiento de las cónicas por parte de Menecmo y sus avances en torno a determinar sus propiedades, hasta llegar al gran trabajo realizado por Apolonio quien realizó grandes avances en la conformación de las propiedades de las cónicas.

5.1.2 La elipse a través de la historia.

Concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes.

David Martínez

El autor reconoce un primer momento histórico en Apolonio y su tratado sobre las secciones cónicas, muestra como a diferencia de lo hecho por Menecmo, Apolonio secciona conos rectos con diferentes ángulos de inclinación, y describiendo sus propiedades a través del uso de la geometría plana.

Luego de esto, se refiere al renacimiento Siglos XV y XVI en donde se da un auge de la inclusión de las maquinas en el conocimiento de la humanidad para demostrar de forma heurística un concepto, la instrumentalización se convierte en una práctica común en las comunidades de matemáticos.

Aparece entonces el elipsógrafo de Davinci, instrumento que sirve para construir elipses, su funcionamiento se basa en un rombo que permite trazar la elipse moviendo uno de los vértices por su diagonal correspondiente. Esta solución se valida haciendo uso de las propiedades del rombo.

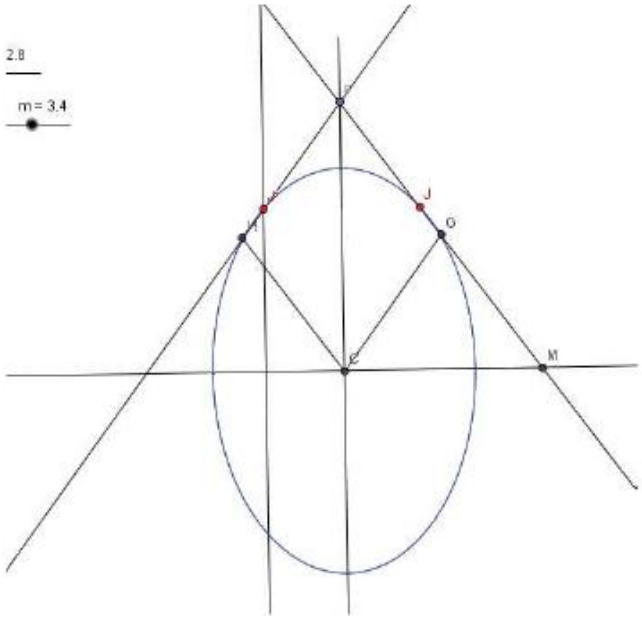


Figura7. Elipsógrafo de Da Vinci.

Fuente: Martínez (2015)

Finalmente aparece la Modernidad que se ve marcada por Descartes y su nueva forma de demostrar, cambiando el paradigma axiomático, y proponiendo el hecho de trabajar con cantidades desconocidas como conocidas, hecho que marco la aparición de lo que hoy se conoce como geometría analítica. Para esta época también aparece un instrumento para trazar elipses, que es el elipsógrafo deVan Schooten, que al igual que el de Davinci permite la construcción de una elipse.

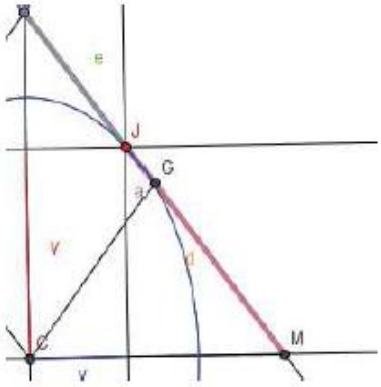


*Figura8.*Elipsógrafo de Van Schooten.

Fuente: Martínez (2015)

En el artículo se resalta la importancia de las épocas culturales ya que cada Matemático debía mostrar que sus construcciones eran verdaderas a través del sistema axiomático que rigiera en la época, ya fuese el euclídeo o el método de Descartes.

5.1.3 Diálogos sobre las aplicaciones de la matemática

Alfred Renyi

Traducción Edgardo Fernández

Este escrito presenta una conversación entre el rey Herón y Arquímedes acerca de las aplicaciones de las matemáticas. Esta conversación se da en un contexto de guerra, luego de que la ciudad de Siracusa lograra repeler un ataque de los romanos a sus tierras, gracias a un método muy particular presentado desarrollado por Arquímedes.

Arquímedes por medio de unos espejos cóncavos de bronce logró incendiar varias flotas enemigas y llevarlas al fondo del mar, Herón agradecido habla con Arquímedes para que este ponga sus conocimientos al servicio de la guerra, pero este se niega pues argumenta que sus creaciones en tiempos de paz habían sido ignoradas, cuando él buscaba hacer bien a la humanidad por medio de máquinas que facilitaran sus trabajos, pero tan pronto asomó la guerra si se le vio importancia a la aplicación que él hacía a la matemática en sus máquinas.

Arquímedes comenta, como a través de la heurística (mecánica) se pueden obtener grandes resultados, que conducen luego a determinar una demostración matemática, además está convencido del poder de las matemáticas para transformar las sociedades. Muestra como las aplicaciones de la matemática en las maquinas simplifica el trabajo del hombre en por ejemplo riegos, cultivos, molinos entre otros.

Específicamente de las cónicas muestra como una de las propiedades de la parábola fue el elemento clave en los espejos que hundieron los navíos, esta propiedad es “toma cualquier punto p de la parábola lo unes al foco y trazas una paralela al eje por p, estas rectas forman ángulos iguales con la tangente a la parábola con el punto p”.(Ver Figura 9). Por otra parte también habla de cómo las piedras lanzadas por las catapultas realizan un recorrido que se asemeja mucho al de una parábola (Ver Figura 10), también como el peso de cada navío, determina

su forma de hundirse de acuerdo a un modelo que se aproxima mucho al parabólico.

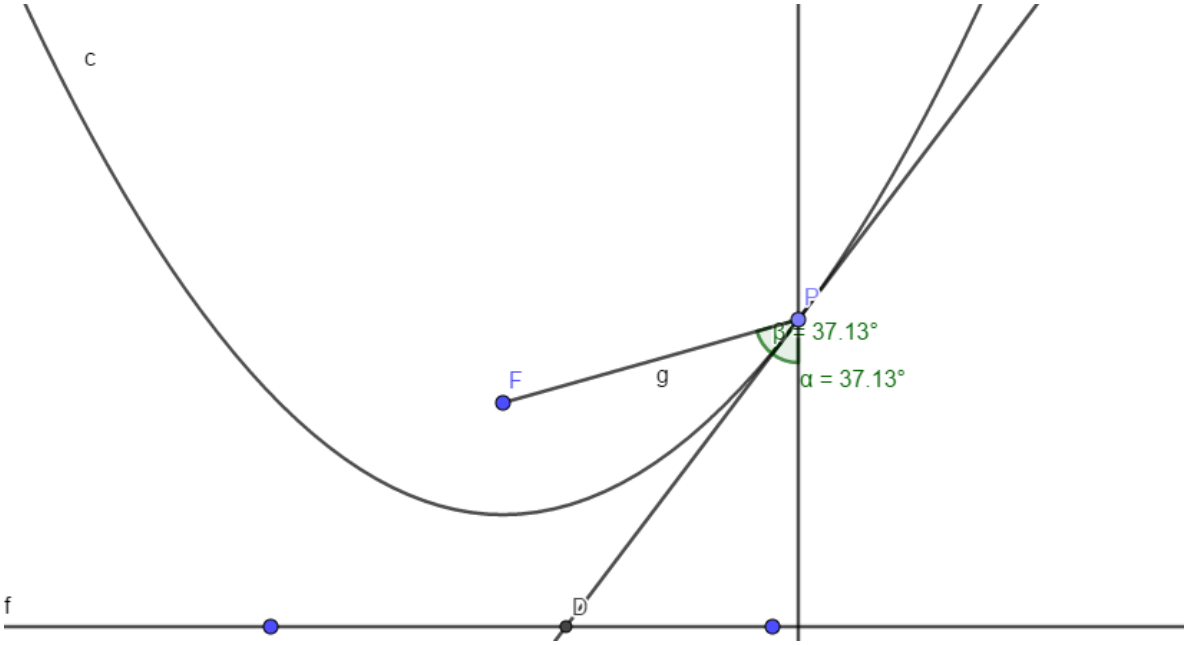


Figura9. Propiedad de la parábola enunciada por Arquímedes.

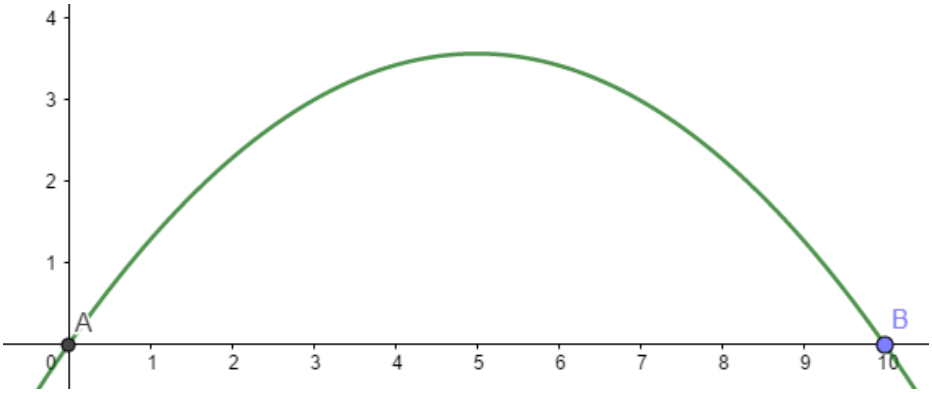


Figura10. Movimiento parabólico de los cohetes.

También enuncia uno de los problemas que solucionó a través del uso de la mecánica y que luego solucionó con los métodos tradicionales: “el área de cualquier segmento de una parábola es $\frac{4}{3}$ del área de un triángulo que tiene la misma base y altura”. Habló siempre de la belleza de las matemáticas y su beneficio para la humanidad.

5.1.4 La geometría analítica de Descartes Fermat y ¿Apolonio?

Víctor Hernández

En este artículo se reconoce el trabajo realizado por Apolonio y su acercamiento a la geometría analítica que se vio truncado tal vez por los pocos avances algebraicos producidos a la fecha.

Por otra parte, Descartes y Fermat si tuvieron a su disposición los avances logrados en el renacimiento, ellos dos aprovecharon dichos avances para solucionar problemas geométricos generando una nueva forma de abordar las cantidades o líneas desconocidas como si existieran o estuvieran dadas, Smith y Lataham (1925) citados por Hernández (2002) describen el plan de Descartes como:

> Si entonces deseamos resolver algún problema primero suponemos que ya disponemos del problema y damos nombre a todas las líneas que parecen necesarias para su construcción, tanto aquellas que son conocidas como las desconocidas, entonces sin hacer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas debemos desembrollar la dificultad de cualquier manera que muestre más naturalmente las relaciones entre esas líneas, hasta que no sea posible expresar una cantidad de dos formas. Esto constituirá una ecuación ya que los términos de una de esas dos expresiones son en conjunto igual a los términos de la otra(2002, p. 34)

Esta nueva forma de trabajar la geometría abrió el camino para la relación entre lo geométrico y lo algebraico, tanto Fermat como Descartes lograron solucionar problemas sobre curvas haciendo uso de este método. Descartes logra hacer un paralelo entre la geometría y la aritmética aprovechándose de la existencia de la unidad para representar la suma, resta, multiplicación, división y el cálculo de la raíz cuadrada.

La obra de Descartes y su nuevo método fue reconocido luego de la solución al problema propuesto por Pappus y resuelto en 1632, dicha solución resulta ser nada más y nada menos que el conjunto de todas las cónicas. Fermat inició su

trabajo partiendo de la expresión algebraica para luego describir las propiedades de las curvas, así pues trabajó la ecuación de segundo grado con dos incógnitas $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, resultando también en el establecimiento de las cónicas de acuerdo a la variación en sus coeficientes.

5.1.5 El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática.

Yadira Marcela Mesa

Jhony Alexander Villa Ochoa

En este artículo se muestra como Galileo Galilei tenia implícito en su trabajo el concepto de función o por lo menos de relación funcional; esta cercanía se interpreta gracias a la relación que él mismo establece, relaciones entre distintas variables en el trabajo con planos inclinados.

Para determinar o describir el pensamiento de Galileo, los autores reseñan unos conocimientos bases que sirvieron a Galileo para llegar a sus construcciones o acercamientos a la función cuadrática. Primero aparece el conocimiento en cuanto a la geometría euclidiana como el concepto de cuadrado que sería extendido por los Árabes en el desarrollo del algebra, progresiones y sucesiones aritméticas como en los números triangulares y cuadrados. El álgebra geométrica también hacia parte de su conocimiento, notando una conexión entre el álgebra desarrollada por los árabes y el libro II de Euclides.

Finalmente, están las cónicas y su relación con fenómenos naturales, es ahí donde se empieza a ver la parábola como un referente para estudiar las relaciones cuadráticas. Además, el artículo es muy claro al mostrar que el concepto de función cuadrática y de parábola surgieron en momentos históricos diferentes y casi sin relación, pero que no vale la pena seguir repitiendo esta historia en el aula, sino más bien unificar conceptos y enseñarlos de manera conjunta.

Se resalta en la obra de Galileo (1638) el carácter deductivo de su razonamiento y el uso de planos inclinados y esferas para extraer datos de las relaciones entre las variables que están implícitas en los experimentos.

5.1.6 Algunas notas sobre la vida de Kepler

Silvia Torres Castilleja

En este artículo se muestra como la obra de Kepler Astronomía Nova se tejió a partir de algunas observaciones hechas en el espacio por otros matemáticos, y cómo este las aprovechó para determinar sus resultados. Se empieza por enunciar la idea de Tolomeo que era la que reinaba en esta época, la cual formulaba que las estrellas y los cinco planetas conocidos hasta ahora giraban en forma de círculos alrededor de la tierra. Kepler en 1543 se propone la idea de que el sol es el centro y que es la tierra y los otros planetas los que giran alrededor del sol; sin embargo, esta idea no fue aceptada por la comunidad científica.

Kepler tuvo grandes inconvenientes gracias a la religión, su condición de luterano lo condenó a ser perseguido por la contra reforma, nació el 27 de diciembre de 1571 y murió el 15 de noviembre de 1630.

Michael Maestin, fue su principal influencia en el mundo de la astronomía y fue quien lo llevó a la idea copernicana de que el sol es el centro y los planetas giran alrededor. Fue así como Kepler resulto trabajando al lado de Tycho para sistematizar algunas observaciones astronómicas, a cambio de este trabajo Kepler solicitó a Tycho acceso a las distancias de los planetas que poseía, pues eran las más precisas hasta el momento. Luego del fallecimiento de Tycho, Kepler terminó las observaciones y pudo trabajar con las distancias que tanto anhelaba, así descubrió que la órbita de Marte no era circular (tenía una excentricidad mayor) si no que describía una elipse; conclusión que más tarde se extendería para los demás planetas y que constituiría la primera ley de Kepler. En total fueron tres leyes las que propuso este Matemático. Todas sus notas fueron escritas en el libro Astronomía Nova que fue referente por más de un siglo.

5.1.7 Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica

Pedro Miguel Gonzáles Urbaneja

El artículo empieza mostrando como los artífices de la geometría analítica son Descartes y Fermat a través del establecimiento de relaciones entre las curvas y las ecuaciones de segundo grado. Este sustento de que son los padres de la geometría analítica muestra también como las contribuciones de los trabajos de Menecmo y Apolonio, con sus observaciones de las cónicas como corte transversal a un cono o varios conos en el caso de Menecmo, y los aportes de Diofanto y Vieta con la incorporación del álgebra sincopada y simbólica respectivamente, dieron lugar a la estructuración de lo que hoy se conoce como geometría analítica.

Se establece una comparación entre los elementos con los que trabajaron Menecmo (350 A.C) y Apolonio (200 A.C) y aquellos con los que contaron Descartes y Fermat en 1637.

Tabla9

Comparación cónicas en Menecmo y Apolonio VS cónicas en Descartes y Fermat

Menecmo y Apolonio	Descartes y Fermat
• Descubrieron las secciones cónicas como corte transversal a un cono. • Describieron algunas propiedades de las cónicas a través de la geometría griega. • El método de áreas era bastante dispendioso. • No contaban con un lenguaje simbólico, más bien como lo que se denomina como algebra geométrica.	• Gracias al intento de la reconstrucción de algunas obras perdidas de Apolonio llegan a sus construcciones sobre geometría analítica. • Contaron con el gran aporte de Vieta y el álgebra renacentista, que entregó elementos de representación simbólica que permitían representar elementos geométricos como ángulos, longitudes, etc.

	• Óreseme introduce un sistema coordenado llamado longitud y latitud (aunque más interesado por lo que hoy se conoce como cálculo infinitesimal y cálculo integral). • Tienen como referencia algunos problemas a resolver. El problema de Apolonio; el problema de Pappus y el problema de las rectas normales a las curvas.

Se reconoce entonces que, Descartes y Fermat con sus obras, *La Geometría* y la *Isagoge*, marcan un punto importante en la historia de las matemáticas y en el modo de hacer matemáticas. Los trabajos de Menecmo y de Apolonio no dejan de ser sorprendentes, mostrando incluso algunos vestigios de construcción de geometría analítica y viéndose limitados por el poco avance del álgebra en su época.

Además de presentar la evolución de las cónicas desde su origen en Menecmo hasta su punto cumbre con Fermat y Descartes, el autor resalta dos problemas importantes que habían sido propuestos y que no se pudieron resolver con la geometría desarrollada hasta antes de Descartes, estos problemas son propuestos por Apolonio y Pappus y se citarán a continuación:

Problema de Apolonio: "Dados tres elementos, punto, recta o circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres" Gonzáles (2007, p. 210) y el problema de Pappus que durante años había sido perseguido por la geometría griega sin poder llegar a resolverlo.

> Dadas tres (cuatro, cinco) rectas en un plano, encuéntrese el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la

> distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos),si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes". (Gonzáles 2007, p. 210)

Este problema le valió a Descartes el reconocimiento de la comunidad científica que entendió y reconoció el método que proponía bajo una solución brillante.

Puede ser entonces que uno de los elementos más importantes que entrega este documento es el reconocimiento de los aportes de Descartes y Fermat, no solo como el más importante de la geometría analítica si no en la historia de las matemáticas ya que marca un punto de inflexión en la forma de hacer matemáticas, quitando a la geometría euclidiana y a sus métodos de áreas el poder que había asumido como medio de validación del conocimiento matemático, para darle paso a la introducción del análisis matemático, usando el álgebra para describir el comportamiento de curvas en un sistema coordenado. Queda entonces constituido el siglo XVII como la época en la que la geometría griega pierde su poder de validación gracias a la nueva forma de hacer matemáticas de Descartes.

Descartes propone un nuevo método que a diferencia de los griegos no busca la construcción geométrica de la solución a un problema; al contrario, propone asumir que la solución está dada para trabajar con ella y llegar a demostrar su existencia. Marcando una metodología que cambia el paradigma de la demostración, dándole gran importancia a los métodos heurísticos en la solución de problemas. Así pues, Descartes propone los siguientes pasos para determinar la solución a un problema geométrico.

1. Suponer el problema resuelto.
2. Dar nombrar todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos.
3. Determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas.
4. Resolver la ecuación resultante.

5. Construir geométricamente la solución.

De esta manera, Descartes acaba con la hegemonía de la geometría griega resolviendo de manera sencilla y efectiva problemas geométricos que para los griegos requerían un gran esfuerzo o no tenían solución.

5.1.8 Apolonio el geómetra de la antigüedad

Francisco Javier Tapia Moreno

El artículo empieza reconociendo la importancia de Apolonio como uno de los tres geómetras de la antigüedad más influyentes, al lado de nombres como los de Euclides y Arquímedes, a pesar de que más de la mitad de su obra haya desaparecido. Apolonio fue ciudadano de Perga y las cónicas su trabajo más brillante (222-205 AC) sabiendo que antes de él fue Menecmo quien descubrió las cónicas por medio de cortes paralelos a alguna de sus generatrices a diferentes conos (rectángulos, obtusángulos o acutángulos).

Las cónicas de Apolonio que fueron publicadas en su primer libro, se divide en varias secciones y pueden ser establecidas bajo el siguiente orden:

I. Modos de obtención de las cónicas y propiedades fundamentales.
II. Diámetros, ejes y asíntotas.
III. Teoremas. Propiedades de los focos.
IV. Número de puntos de intersección de cónicas.
V. Segmentos de máxima y mínima distancia.
VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas.
VII. Relaciones métricas sobre diámetros.
VIII. Teoremas y Proposiciones.

Es Apolonio quien considera dentro de las cónicas elementos como: el lado recto, ejes, diámetros conjugados y tangentes y propone la construcción de la cónica dados diferentes elementos pertenecientes a la misma. Los focos también hacen parte del trabajo desarrollado por Apolonio y se sugiere que su aparición surge de

la aplicación del método de áreas propuesto por los griegos. Así pues a diferencia de Menecmo Apolonio describe muchos elementos que componen y describen a cada una de las cónicas en particular, además de que es el primero en concebir la existencia de la hipérbola.

En el libro VI se propone un problema para el cual dada cualquier cónica resultante del corte a un cono circular recto, hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada. Además también propone el problema de construir el cono recto a partir de una cónica dada. El artículo cierra presentando otras obras de Apolonio como por ejemplo el caso del estudio de la reflexión en espejos curvos y los epiciclos en astronomía.

5.1.9 Historia de la matemática

Volumen I

Alejandro Ortíz Fernández

En este libro se resume la historia de la matemática. Se identifican algunos aspectos referidos a las cónicas en el capítulo 2 “de Arquímedes a la declinación de la matemática Griega” en los apartados 2.2.4 pág. 244 (la cuadratura de la parábola); 2.3.3 Pág. 306 (descripción de los libros de las cónicas) y 2.3.4 pág. 306 (algunos resultados matemáticos: Parábola, hipérbola y elipse).

El primer referente a las cónicas se da en la descripción de la obra de Arquímedes quien fue pionero en el uso de los métodos heurísticos y en la construcción de máquinas, dentro de sus muchos aportes a la matemática se encuentra la cuadratura de la parábola que se enuncia de la siguiente manera:

“Encontrar el área de un segmento parabólico oblicuo ABC cortado por la cuerda AC donde la tangente en B es paralela a AC” (Ortíz, 2005, p. 297)

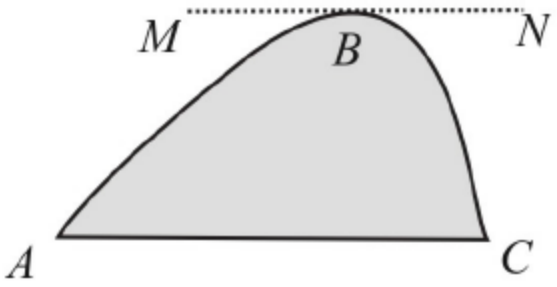


Figura11. Cuadratura de la parábola.
Fuente: Ortíz (2005)

El autor muestra paso a paso la demostración de dicha proposición para la cual Arquímedes propone dos soluciones, una solución geométrica y una solución mecánica. Finalmente Arquímedes concluye que $S = \frac{4}{3}|\Delta ABC|$ que finalmente es la respuesta a la cuadratura de la parábola.

Más adelante dejando atrás la vida de Arquímedes, el autor hace un recorrido por el trabajo de Apolonio a quien se debe un gran desarrollo en la conformación de los elementos de las cónicas (A quien también se debe el nombre de parábola, elipse e hipérbola). El autor hace una descripción de los libros que conformaron la obra de Apolonio Cónicas; dicha descripción se resume a continuación en la Tabla 10.

Tabla10

Descripción (resumen libros de Apolonio)

N° Libro	Características
I	• Se encuentra la generación de las secciones cónicas y las propiedades de cada una de estas.
II	• Diámetros y ejes de las secciones cónicas. • Asíntotas
III	• Teoremas sobre las cónicas.
IV	• Intersección de dos cónicas. • Intersección de una cónica y una circunferencia.
V	• Máximos y mínimos.
VI	• Cónicas iguales o semejantes
VII	• Teoremas relativos a los diorismas.
VIII	• Problemas sobre las cónicas

Luego de describir los libros I a VIII, el autor muestra como los pitagóricos lograron demostrar, con la construcción de un rectángulo, cómo una cónica podía clasificarse como una elipse, una parábola o una hipérbola, de acuerdo a la longitud de su base.

Sea AB el eje principal de la cónica, p un punto cualquiera sobre la cónica y Q al pie de la perpendicular PQ a AB por A el cual es el vértice de la cónica

trazamos una perpendicular a AB y delimitamos sobre ella una distancia AR igual a aquello que actualmente llamamos “lado recto” o parámetro P de la cónica aplicamos al segmento AR un rectángulo, teniendo AQ como un lado y área igual a $(PQ)^{2.}$ (Ortíz, 2005, p. 298)

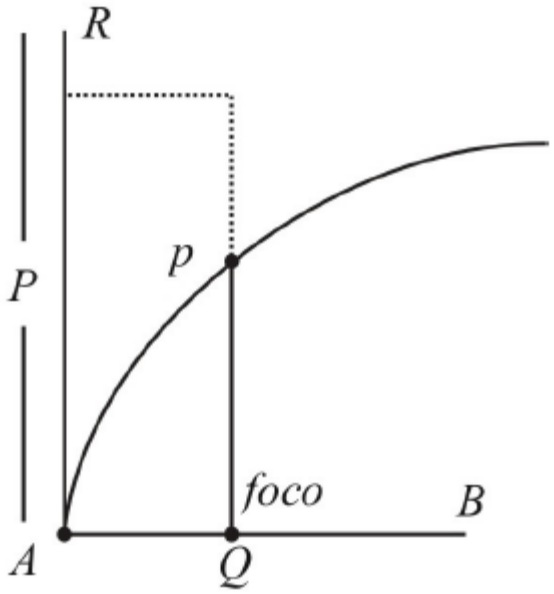


Figura12. Construcción de los pitagóricos para la clasificación de las cónicas (elipse parábola e hipérbola)

Fuente: Ortíz (2005)

Luego de que el autor traduce esta proposición y esta construcción a un lenguaje algebraico actual, termina concluyendo que la geometría analítica fue una invención de los griegos, ya que a pesar de carecer de un lenguaje algebraico que permita la descripción de estás curvas, se reconoce un sistema de referencia muy cercano al cartesiano, con el uso de líneas de referencia. Además, la relación entre las distancias de las bases de los rectángulos para la clasificación de las cónicas, se asemeja al uso del discriminante en la geometría analítica elaborada muchos años después.

Además el autor enuncia diferentes proposiciones que se encuentran en los libros de Apolonio y que pueden ser de gran interés en el trabajo demostrativo, sobre

todo a la luz de los elementos algebraicos e los que se dispone en la actualidad; estas se encuentran en diferentes secciones de la obra de las cónicas.

5.1.10 La génesis histórica de la geometría analítica y la enseñanza en la escuela secundaria.

Emmanuel Colombo Rojas
Viviana Carolina Llanos
María Rita Otero

En este artículo se hace especial hincapié en la importancia histórica de la geometría clásica y el álgebra en la conformación de la geometría analítica. Además, se hace una reflexión respecto a la idea anterior en relación con la enseñanza de la geometría clásica a lo largo del currículo de matemáticas en la escuela.

Luego de que se presenta esta reflexión, sabiendo que son los aportes realizados por Menecmo y Apolonio en geometría y los de Diofanto y Vieta en álgebra, describe las diferentes geometrías clásicas que se dieron en el camino hacia la geometría analítica. Estas se resumen a continuación en la Tabla 11.

Tabla11

Geometrías clásicas y sus características.

Geometrías	Características
Pre-helénica **Babilonios**	• Ligada a la solución de problemas de la vida cotidiana. • Cálculo de áreas de algunas Figuras geométricas (rectángulo, trapecio, triángulo, etc.) • No hay existencia de fórmulas ni demostraciones formales (enfoque en las aplicaciones prácticas)
Griega	• Importancia de la naturaleza del conocimiento y su razón de ser. • Aparición del problema de la

	inconmensurabilidad. • Álgebra geométrica. • Estudio de curvas mediante la intersección de superficies o lugares geométricos. • Desarrollo de la axiomática como método demostrativo.
Alejandrina	• Tiene sus bases en la geometría griega. • Universalidad de las demostraciones. • No se busca una relación directa con el mundo real u otras ciencias. • Recoge trabajos de los matemáticos Griegos (elementos de Euclides).

En cuanto a la importancia de estas geometrías y su relación con las secciones cónicas, se reconoce a Menecmo en la geometría griega como el descubridor de las secciones cónicas, mediante cortes perpendiculares a las generatrices de un cono (recto, obtusángulo y/o acutángulo) y por otro lado Apolonio, a quien se le reconoce por obtener todas las secciones cónicas de un solo cono a través de cortes transversales y además se le atribuye el primer gran acercamiento al trabajo con ejes coordenados.

Por otra parte, también se hace un recorrido histórico por la evolución del álgebra desde los aportes de los babilonios, hasta las matemáticas desarrolladas en la India, dentro de esta evolución se reconocen tres grandes momentos, el álgebra retórica, el álgebra sincopada, y el álgebra simbólica.

Tabla12

Momentos históricos del álgebra clásica

Momentos históricos del álgebra clásica	Características
Algebra retorica Babilonios	• No existen abreviaciones ni símbolos.

	• Se usa el lenguaje verbal y escrito para la representación.
Álgebra sincopada **Diofanto**	• Uso de algunas abreviaturas. • Lenguaje técnico.
Álgebra simbólica **Vietá**	• Uso de símbolos especiales. • Incógnitas • Parámetros

Se destaca el avance del álgebra en el renacimiento por su poder sintáctico de síntesis y "operacionalidad" que permitían traducir problemas geométricos a un lenguaje algebraico y de ahí tratar su solución sin ayuda de las construcciones geométricas. Este avance en el modo de representación algebraico lo hacen evidente mediante el establecimiento de un paralelo entre el lenguaje propio de la época del álgebra clásica y el lenguaje algebraico actual (ver Figura 13).

- Buteo (1559): $1\Diamond P6\rho P9[I\Diamond P3\rho P24$. Forma actual: $x^3+6x+9=x^2+3x+24$.
- Grosselin (1577): $12LMIQP48\ aequalia\ 144M24LP2Q$. Forma actual: $12x-x^2+48=144-24x+2x^2$.
- Viète (c. 1590): $1QC-15QQ+85C-225Q+274N$ aequantur 120. Forma actual: $x^6-15x^4+85x^3-225x^2+274x=120$.
- Descartes (1637): $yy\infty cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$. Forma actual: $y^2=cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$.
- Wallis (1693): $x^4+bx^3+cxx+dx+e=0$. Forma actual: $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

Figura13. Comparación simbolización en diferentes épocas del álgebra clásica vs simbolización actual.

Fuente: Colombo, Llanos y Otero (2016)

Estas dos ramas, la geometría y el álgebra son los instrumentos con los cuales Fermat y Descartes logran sentar las bases de lo que hoy se conoce como geometría analítica, en respuesta, por ejemplo al problema de Pappus, en el caso de Descartes y en la reconstrucción de la obra perdida de Apolonio, en el caso de Fermat.

Finalmente, los autores realizan una reflexión en torno a la relación entre la geometría clásica, álgebra y geometría analítica y su gestión en el currículo de

matemáticas, formulado preguntas como: ¿qué geometría clásica y qué geometría analítica son necesarias en la enseñanza escolar? Estás inquietudes seguramente se resolverán pensado en qué de esas geometrías aporta al desarrollo individual de los estudiantes y a la aplicación que logren tener en sus vidas.

5.1.11 Euler y la geometría analítica

Pedro Miguel Gonzáles Urbaneja

En este artículo se muestra como Euler es considerado como el primer gran universalista, ya que toma los fundamentos de la geometría analítica propuestos por Fermat y Descartes en sus estudios de las curvas y las ecuaciones de segundo grado y los lleva a la perfección, haciendo el mejor acercamiento a lo que se conoce como geometría analítica en la escuela (Propone la ecuación general de las secciones cónicas con 6 términos).

A pesar de que Euler se aleja definitivamente de las cónicas obtenidas por el corte transversal de un plano a un cono y del uso de los diagramas, logra demostrar diferentes propiedades geométricas de las cónicas, únicamente haciendo uso de su método analítico.

En el tomo II de su obra más importante *Introductio in analytin infinitorum* de 1748, trata sistemáticamente la geometría con coordenadas, aunque luego del aporte importantísimo de Descartes y Fermat a la geometría analítica, esta se vio oscurecida, en palabras de Gonzáles (2008) por algunos matemáticos como Van Schooten, Debeaune, Hudde, De Witt, Wallis, entre otros que quisieron estudiar la influencia del álgebra en la geometría sin llegar a tener un modelo universal. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de la recta llegaron a determinar muchos casos diferentes, mientras que Euler logro definir la ecuación de la recta como representante de todas aquellas ecuaciones de primer grado.

Euler distingue entre las curvas algebraicas y las curvas trascedentes y empieza su trabajo con coordenadas, valiéndose de un solo eje horizontal, donde fija un punto A como origen y levanta perpendiculares (coordenadas) en diferentes

puntos del eje horizontal, como se puede ver en la Figura y para las cuales escribe: “la naturaleza de una curva cualquiera vienen dada por una ecuación en dos variables x,y de las cuales x es la abscisa e y es la ordenada, que en conjunto se llaman coordenadas” Gonzáles (2008).

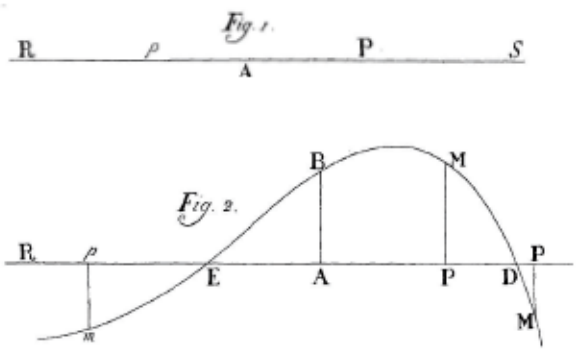


Figura14. Euler y el uso de coordenadas en el estudio de las curvas.las curvas

.Fuente: Gonzáles (2008)

Euler luego de un estudio minucioso sobre las cónicas, determina lo que actualmente se conoce como ecuación canónica de las cónicas, descubriendo así para cada uno de los elementos (focos, vértices, centro, etc.) de las mismas una ecuación que permita saber su ubicación en un plano cartesiano; de esta manera Euler potenció el estudio de las particularidades de las cónicas y sirvió de puente para incluir esta poderosa herramienta a la enseñanza de las Matemáticas.

5.2 Reporte de análisis de los documentos.

Para la elaboración del análisis se tuvo en cuenta la Tabla 8 propuesta en la metodología con dicho objetivo. Para cada documento escogido se propuso una Tabla tratando de establecer la mayor cantidad de aportes de la historia de las cónicas al conocimiento del profesor de matemáticas. Cabe aclarar que no todas las facetas del conocimiento del profesor se ven alimentadas por un mismo texto,

pero si se encuentra una gran variedad en cada uno de ellos, lo que da píe para asegurar que la historia de las cónicas son una fuente amplía de información y de recursos para el profesor de matemáticas. A continuación se encontrará la tabla correspondiente a cada documento y en seguida el respectivo sustento de cada una de las categorías señaladas en la misma.

Para efectos de las justificaciones se codificará por medio del código asignado, así pues por ejemplo, si en un texto se encuentra un aporte al conocimiento del profesor en términos de la identificación de los tipos de problemas, entonces esto será G1. De esta manera cada código representará algunas de las subcategorias propuestas por Godino (2009) según corresponda, G2 lenguajes, G3 procedimientos, etc.

5.2.1 Documento: La elipse a través de la historia

Tabla13

Análisis documento de Martínez (2015)

Martínez (2015)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	X
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	

	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	X
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	X
	G14Trayectoria didáctica	X
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones interdisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	X
	G18 otros factores condicionante sociales	

G5: En el texto el autor muestra como cada una de las épocas mencionadas trae con sigo una forma de argumentar y sustentar las soluciones a problemas o descubrimientos matemáticos. En el caso de los griegos por medio de la axiomática, en la edad media con el uso de artefactos que hicieran palpables los teoremas matemáticos, y el método de Descartes que se valió del álgebra como principal medio de descripción de la elipse. Estas tres formas de validar el conocimiento implican un reconocimiento de diferentes caminos de abordaje y sustentación de la elipse como elemento matemático, tal como lo mencionan Schoenfeld y Kilpatrick (2008), el profesor podrá reconocer diversas formas de sustentar las propiedades de la elipse, y anticiparse a preguntas que puedan surgir por parte de los estudiantes; tal como lo menciona Guacaneme (2016) la

ampliación de la visión del objeto matemático permitirá comprender de mejor manera las construcciones conceptuales de sus estudiantes, sus formas de representación y de argumentación frente al concepto de la elipse.

G10: Puesto que para esta categoría se hace necesario que el docente reconozca diversas formas de abordar cuestiones matemáticas, el documento nuevamente a través de la presentación del desarrollo de la elipse, en tres diferentes épocas proporciona una visión de la incidencia de las creencias culturales de la época en la validación del concepto de la elipse. Lo que en palabras de Gonzáles (2004) permitirá al docente presentar el objeto elipse de una manera más abierta para los estudiantes que buscan más que un adoctrinamiento una independencia intelectual.

G13: Tal como lo menciona Erazo (2016) uno de los aportes de la historia al conocimiento del profesor es la incorporación de acciones específicas en el aula de clase, en este sentido el texto aporta un instrumento que permite trazar elipses aprovechando las propiedades de un rombo, esta construcción realizada por Da Vinci, podría adaptarse al aula de clase; ya que como menciona Lupiañez (2002), citando a Sierra (1997) uno de los aportes de la historia se reconoce en el uso de ejemplos para ilustrar métodos y técnicas, que en este caso están sustentados por el elipsógrafo que se presenta en el documento. (Se presenta el elipsógrafo de Da Vinci y deVan Schooten).

G14: Autores como Erazo (2016), Guacaneme (2016), Lupiañez (2002) reconocen la importancia del conocimiento de la historia de las matemáticas, para la organización del currículo, ya sea en su forma macro, meso o micro. En este sentido el texto puede permitir al docente establecer una ruta didáctica en torno a la enseñanza de la elipse que emule la actividad de la elipse en estas tres épocas distintas adaptadas al aula de clase.

G17: Guacaneme (2016) reconoce la historia como una fuente de artefactos que pueden ser usados por el profesor de matemáticas. Una de las funciones de estos artefactos es mostrar como las matemáticas a lo largo de los años han estado ligadas al desarrollo social y cultural de las personas y por ende al avance de

diferentes ciencias, por lo que no se puede negar la influencia de las matemáticas en el mundo que hoy conoce el hombre buscando su comodidad y beneficio. El texto muestra como el concepto de elipse fue abordado por un gran artista e inventor como Da Vinci, quien diseñó y construyó una máquina que permitía trazar elipses, mostrando la influencia de las matemáticas en la construcción de objetos mecánicos (relación matemática y física).

5.2.2 Documento: Cónicas en la antigua Grecia

Tabla14

Análisis documento de Castelnoble, González (2015)

González (2015)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	X
	G3 Procedimientos	X
	G4 Conceptos/propiedades	X
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	X
	G9 Evaluación de aprendizajes	X
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o	X

	contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	X
	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones interdisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores condicionante sociales	X

G2, G3 y G4: A lo largo del texto, específicamente en la sección final del documento (páginas 25 -30), el autor muestra como del Rio (1996) hace una reconstrucción de lo que posiblemente realizó Menecmo en el descubrimiento de las secciones cónicas y sus propiedades en cuanto a las distancias a los focos (aunque en aquel tiempo no recibieran estos nombres). El autor propone una serie actividades que propician la caracterización de las distancias a través de un lenguaje algebraico que se encuentra apoyado por su representación geométrica; en este sentido, la historia está ayudando según lo mencionado por Erazo (2016) y Guacaneme (2016), a que el docente comprenda de mejor forma la génesis del concepto de cónicas y su configuración epistemológica en la antigua Grecia, ampliando el conocimiento que posee el docente sobre este concepto y por ende diversificando sus posibilidades didácticas. Ya que como lo menciona Gonzáles (2004) y Gulikers y Bloom (2002), la historia es fuente de estrategias didácticas para el docente, porque permite incorporar las actividades propuestas por el autor del texto o bien modificarlas y acomodarlas según demande su contexto académico. Finalmente, este trabajo con los procedimientos propuestos en la

antigua Grecia, llevan al establecimiento de las principales características de las cónicas como lugares geométricos.

G8: Luipiañez (2002) retoma algunas sugerencias realizadas por Avital en torno a la importancia de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las mismas. Dentro de estas se reconoce el "llamado de atención a factores emocionales y afectivos en la creación y aprendizaje de las matemáticas". El texto deja ver como uno de los problemas que dio origen al concepto de las cónicas (la duplicación del cubo) encontró una primera dificultad en su solución; los matemáticos Atenienses intentando duplicar el volumen del cubo, duplicaron su arista obteniendo un volumen 8 veces mayor sin dar respuesta al problema original. Esta confusión o creencia a priori podría replicarse en los estudiantes, ya que como lo señala Gonzáles (2004) los problemas epistemológicos que se dan en el desarrollo histórico de un concepto pueden aparecer también en los estudiantes, por ende es de gran importancia el conocimiento de este problema y de su solución para abordar problemas de este índole.

G9: Uno de los inconvenientes que se enuncian en la problemática del proyecto es la presentación secuencial y casi inconexa entre las ecuaciones general y canónica de las cónicas y su significado como lugar geométrico, por ello se retoma la pregunta planteada por Gonzáles (2004) "¿es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esta forma?" (p.20). La respuesta a esta pregunta es no, así pues el texto ofrece al profesor una mirada al surgimiento de la caracterización de cada una de las secciones cónicas a partir de sus distancias a unos puntos fijos, lo que en palabras de Guacaneme (2016) sería una ampliación de la visión del objeto matemático que sin lugar a dudas permitirá entender de forma profunda el concepto matemático a enseñar (cónicas), por lo menos desde su caracterización geométrica inicial dada por Menecmo y Apolonio.

G13: En este documento se reconoce un aporte a la faceta interaccional ya que a pesar de que no existe la propuesta de una herramienta tangible, si se proponen

una serie de actividades, que se basan en el desarrollo geométrico realizado por Menecmo, por ende se consideran como una herramienta que podría ser implementada en el aula de clase por parte del profesor. Como lo menciona Shulman (2005) dos de las fuentes de alimentación del conocimiento del profesor de matemáticas son el conocimiento histórico de la naturaleza del conocimiento matemático y la lectura de documentos especializados en la enseñanza del concepto matemático.

G11: En relación con lo enunciado en la categoría anterior y en consonancia con lo enunciado por Guacaneme (2016), Gonzáles (2004) y otros autores, la falta de conocimiento de la historia por parte del profesor de matemáticas tiene que ver en su gran mayoría por la formación recibida en su educación universitaria que deja de lado las concepciones históricas de las matemáticas escolares, para priorizar la producción de matemáticas avanzadas como las ecuaciones diferenciales, el algebra lineal entre otras, perjudica la acción del profesor en el aula al enfrentarse a las preguntas de los estudiantes en relación a las matemáticas escolares. Este documento, además de ampliar la concepción epistemológica del concepto de cónicas, muestra al docente una posible vía de acción a través del uso de preguntas que orienten el proceso de construcción de las características de las cónicas. (Cabe aclarar que es responsabilidad del profesor si estas preguntas son adecuadas o si vale la pena modificarlas en pro de realizar una mejor gestión en el aula.)

G18: Sin duda una de las intenciones comunes que se encuentran en autores como Guacaneme (2016), Gulikers y Bloom (2002), Erazo (2016), Gonzáles (2004), Lupiañez (2002) entre otros, es mostrar el carácter humanizador de las matemáticas y su relación con el desarrollo social de las diferentes culturas a lo largo del tiempo, este texto cuenta la historia de los atenienses que azotados por una peste recurren al oráculo (ya que las creencias en diferentes Dioses en esta época era común) para encontrar solución a la peste, este les pide duplicar el volumen del altar cúbico construido en honor a uno de sus dioses. Esta historia deja entrever como las matemáticas tienen relación con aquellas creencias de las

personas y como ayudan a la solución de diferentes problemas. Además, esta historia podría usarse como lo menciona Sierra (1997), citado por Lupiañez (2002), como una anécdota del pasado, o propiciar la construcción de posters, exposiciones u proyectos sobre la duplicación del cubo. El maestro tiene diferentes formas de introducir esta historia al aula de clase según sean sus intenciones de mostrar una cara diferente a las matemáticas acabadas y gastadas.

5.2.3 Documento: Diálogo sobre las aplicaciones de las matemáticas

Tabla15

Análisis documento de Renyi (1990)

Renyi (1990)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	X
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional	G11 Roles del profesor en	

mediacional	relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	X
	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones intradisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	X
	G18 otros factores condicionante sociales	X

G4: El autor muestra en uno de los apartados del dialogo, como Arquímedes le explica al rey Herón como haciendo uso de una de las propiedades de la parábola ha logrado hundir los navíos enemigos, "toma cualquier punto de la parábola, lo unes al foco, y trazas una paralela al foco por P. Estas rectas forman ángulos iguales con la tangente a la parábola en el punto P."(p.8) de esta manera Arquímedes muestra la utilidad de la matemática a Herón en la construcción de diversos mecanismos, lo que puede mostrar al profesor que aprovechando las propiedades de las cónicas se pueden plantear proyectos que lleven a los estudiante a vivencia la matemática a través de la creación de herramientas.

G13: Aunque el documento es netamente narrativo, donde se reseña la conversación entre Arquímedes y el rey Herón, se puede evidenciar que en todo su contenido hay una invitación a vivenciar las aplicaciones de las matemáticas a otras ciencias, dando ejemplos de aplicaciones de las matemáticas, lo que podría dar ideas al profesor de matemáticas para incluir el trabajo por proyectos en el aula de clase, ya que como lo mencionan Schoenfeld y Kilpatrick (2008) el

docente debe tener la capacidad de diseñar y gestionar espacios o ambientes de aprendizaje en los que se vivencie la construcción del conocimiento. Así pues, el diseño de catapultas y su estudio, o el de los mismos espejos pueden ser tomadas como ejemplos para desear herramientas de uso en el aula de clase.

G17: Lo más importante que muestra este texto es la característica interdisciplinar que reciben las matemáticas, viéndose mezclada en otros campos; específicamente, a las ciencias como la física y al avance tecnológico. Respecto a las cónicas, muestra en un inicio como el conocimiento de las parábolas permitió la creación de los espejos parabólicos que finalmente sirvieron para hundir los navíos de la tropa enemiga, también muestra que la trayectoria que siguen las piedras lanzadas por las catapultas pueden seguir un modelo matemático parecido al de una parábola. Arquímedes defiende en repetidas ocasiones que las matemáticas pueden llevar a la construcción de una maquina o herramienta que facilite algunas tareas, tal como lo menciona Guacaneme (2016) la historia de las matemáticas muestra como estas han permitido el avance tecnológico y de las ciencias en general para la evolución de las sociedades.

G18: Uno de los propósitos de reconocer la historia como fuente para apoyar el conocimiento del profesor, es el de vivenciar las matemáticas como un proceso de construcción conceptual que ha tenido que ver con el desarrollo social y político de las culturas Anacona (2003), en este caso el autor muestra como Arquímedes intervino en la guerra haciendo uso de los conceptos matemáticos para vencer a sus oponentes, sin lugar a dudas la connotación social que trae con sigo esta anécdota es innegable, ya que los pueblos antiguos luchaban por colonizar a los demás y construir una nación más fuerte. Pero también muestra la condición humana en la que solo se dio importancia a estos lamentos cuando la guerra se aproximaba ya que Arquímedes hace referencia a otro tipo de máquinas que mejoraban las condiciones de los trabajadores, pero que fueron ignoradas gracias a que el uso de los esclavos para estos trabajos era lo más común. Así pues, como menciona Godino (2009) el docente debe desarrollar su faceta ecológica en torno al conocimiento de los acontecimientos sociales y políticos que rodean los

contextos educativos mismos, que se reflejan en el desarrollo histórico de las matemáticas.

5.2.4 Documento: La geometría Analítica de Descartes Fermat y ¿Apolonio?

Tabla16

Análisis documento de Hernández (2002)

Hernández (2002)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	X
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	X
	G6 Conexiones	X
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	X
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	

	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones intradisciplinares	X
	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores condicionante sociales	X

G1: Erazo (2016) describe dentro de los usos de la historia para el profesor de matemáticas el reconocimiento de problemas históricos que pueden ser recontextualizados y llevados a clase, en este sentido en el texto se identifica un apartado en que se hace referencia al problema propuesto por Galois a Descartes para demostrar la eficacia de su método, este problema es nada más y nada menos el problema de Pappus y su solución da como resultado los espacios geométricos denominados cónicas.

G5: El principal objetivo del autor en este texto es rescatar la producción realizada por Apolonio, como precursora de los adelantos matemáticos realizados por Descartes y Fermat para la geometría analítica; en la que muestra diferentes argumentos que exponen el gran acercamiento que tuvo Apolonio a lo que se conoce como geometría analítica, ya que él llegó a trabajar con algunas línea de referencia (arbitrarias) que se podría comparar con los ejes cartesianos, además de que vio limitado su trabajo por las matemáticas de su época, específicamente por los pocos avances en la rama de álgebra que sí tuvieron Descartes y Fermat. Esto permite, seguramente como lo menciona Guacaneme (2016), ampliar la naturaleza del conocimiento que tiene el docente ya que permite identificar elementos esenciales de las cónicas descubiertos por Apolonio pero limitados por el poco desarrollo algebraico de la época.

G6: Ball, Hoover y Phelps (2008) en su teoría sobre los conocimientos del profesor resaltan la importancia de lo que denominan horizonte matemático, que

hace referencia a la enseñanza matemática pensada hacia los aportes que realiza la construcción de un concepto matemático con otros de mayor complejidad, favoreciendo la comprensión de los mismos. El autor muestra dos momentos históricos importantes en las que se pueden establecer dichas conexiones. El primero de ellos ocupa el grueso del documento y es el gran aporte no solo de Apolonio con su descripción precisa de los lugares geométricos, sino también del álgebra renacentista y los aportes de Vieta en el álgebra simbólica, que se convierten en las bases sólidas de los desarrollos de Fermat y de Apolonio. Teniendo en cuenta lo expuesto por Fauvel (1991), citado por Lupiañez (2002) "la génesis del conocimiento a nivel individual debe seguir el mismo curso que la génesis del conocimiento en la especie" así pues, el docente debe pensar en que los elementos geométricos y algebraicos desarrollados por los estudiantes en cursos anteriores al grado décimo deben ser de vital importancia pues de lo contrario se constituirán en problemas para el estudiante tal como le ocurrió Apolonio quien se vio impedido para avanzar en su estudio de las secciones cónicas por la falta de una herramienta de análisis poderosa como el álgebra.

El otro aspecto en el que se puede identificar una conexión, esta vez del concepto de cónicas con el estudio de conceptos más avanzados, se hace evidente cuando el autor hace referencia a que el método de la geometría analítica desarrollado por Descartes y Fermat, dio pie para la inclusión de nuevas curvas y propicio el desarrollo de técnicas infinitesimales para el estudio de las curvas.

G8: En el texto se puede apreciar que la construcción de las cónicas como actualmente se conocen, llevo más de tres siglos de evolución y progreso. Una de las dificultades que se aprecian y que según autores como Guacaneme (2016), Gulikers y Bloom (2002), Lupiañez (2002) entre otros, el reconocimiento de errores epistemológicos en la historia permite explorar los errores o dificultades que pueden tener los alumnos en el aula de clase, en este sentido el texto permite evidenciar que para Apolonio fue muy difícil seguir avanzando en el estudio de las cónicas ya que carecía de la potente herramienta algebraica para seguir

profundizando en sus ideas, reconociendo el álgebra como un elemento fundamental en el proceso analítico de las cónicas.

G17: En este texto el autor hace referencia a la importancia que tuvo el álgebra renacentista en los avances que lograron tanto Fermat como Descartes, siendo el primero quien más conexión tuvo con el álgebra simbólica de Vieta; ya que Descartes encontró esta álgebra dispendiosa por lo que propuso su "propia álgebra", asignando letras cercanas al inicio del alfabeto a los parámetros y letras cercanas al final del alfabeto para las variables. Se reconoce entonces la gran importancia que tuvo el álgebra renacentista en el avance para la creación de la geometría analítica y por ende de las secciones cónicas.

G18: En el texto se muestra específicamente el trabajo realizado por cada uno de los autores mencionados, Apolonio, Descartes y Fermat en el que se puede identificar un Hito importante no solo en la historia de las cónicas si no en la historia de las matemáticas, qué como lo menciona Erazo (2016) el reconocimiento de los hitos en la historia de las matemáticas permite comprender la génesis y evolución que tuvo un concepto. En este caso no es precisamente el concepto lo más importante, si no el método propuesto por Descartes, ya que cambia radicalmente la forma de trabajar en matemáticas destronando la axiomática griega que dominaba hasta ese momento.

Otro dato muy curioso que se da en el texto es el proporcionado en la historia de Descartes y Fermat y que podría ser usado como lo menciona Lupiañez (2002) como una anécdota del pasado o aludir a los matemáticos que influyeron en la demostración de un teorema o la construcción de un concepto como lo menciona Gonzáles (2004). El autor hace referencia a que en aquella época Descartes y Fermat desarrollaron sus teorías de forma simultánea; sin embargo, Descartes estaba ya posicionado en el sector matemático y público en la geometría sus trabajos anticipándose a Fermat y la Isagoge. Se menciona que hay autores que reconocen a Fermat como el creador de la geometría analítica ya que en Descartes no encuentran una demostración formal como si lo hace Fermat.

5.2.5 Documento: El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática

Tabla17

Análisis documento de Mesa, Y. Villa, (2009).

Mesa, Y. Villa, (2009).		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	X
	G5 Argumentos	X
	G6 Conexiones	X
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	X
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	
	G14Trayectoria didáctica	

Ecológica	G15 orientaciones curriculares	X
	G16 conexiones intradisciplinares	X
	G17 conexiones interdisciplinares	X
	G18 otros factores condicionante sociales	

G4: El reconocimiento de las propiedades y significados de los objetos matemáticos en diferentes momentos históricos puede aportar al conocimiento del profesor de matemáticas, en este caso el autor a pesar de que no tiene como foco las cónicas, si hace referencia a una de ellas, la parábola, presentando la definición dada por Apolonio "… de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el lactus rectum l". En la cual se reconoce que la definición de la parábola esta netamente en términos de construcción geométrica.

G5: El autor luego de reconocer los 5 aspectos de las matemáticas que posiblemente influyeron en el pensamiento de Galileo, especifica porque se puede decir que Galileo tenía una concepción implícita del concepto de función cuadrática, reconociendo las variables dependientes e independientes, donde muestra un argumento de la función lineal, argumentando que el objeto que está en movimiento recorre distancias iguales en tiempos iguales, lo que daba indicios de la concepción de variabilidad en los postulados de Galileo.

G6: El horizonte matemático propuesto por Ball, Hoover y Phelps (2008). se puede reconocer en este documento ya que el autor muestra como Galileo pudo llegar a sus aproximaciones a la descripción de la función cuadrática gracias a los conocimientos previos que poseía Galileo sobre las cónicas y otros conceptos matemáticos como las sucesiones y la geometría euclidiana. En el caso de las cónicas específicamente la parábola le sirvió como representación gráfica del

recorrido de un cuerpo en movimiento que se evidenciaba en sus experimentos con planos inclinados.

G11 y G15: Este texto además de presentar el aporte que realizó Galileo a la construcción del concepto de función cuadrática y a la influenciadel conocimiento de la parábola para la misma, resalta la importancia de reflexionar como quehacer docente entre la separación curricular que se está dando en la enseñanza de la función cuadrática, separada de la parábola como lugar geométrico, proponiendo no replicar la brecha histórica que se dio en el surgimiento de estos dos conceptos, si no por el contrario tratar de unificarlos en su enseñanza, rol que en este caso asumirá el profesor al establecer las relaciones, que podrían venir dadas tal como lo hizo Galileo.

5.2.6 Documento: Algunas notas sobre la vida de Kepler

Tabla18

Análisis documento de Torres (2006)

Torres (2006)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	

	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	X
	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones intradisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	X
	G18 otros factores condicionante sociales	X

G13. A pesar de que el autor del texto no profundiza sobre las observaciones que realizó Galileo y que fueron de gran ayuda para Kepler, hubo un instrumento que propició y permitió el avance de las propuestas de Kepler. El telescopio; se vuelve interesante saber que todas estas observaciones a través de este instrumento permitieron observar que la órbita de Marte no correspondía a una circunferencia, sino más bien describía una elipse. La inclusión de este tipo de herramientas en u proyecto que involucre la astronomía y la matemática (cónicas) seguramente despertaría la curiosidad de los alumnos sobre el funcionamiento del universo.

G17: Sin lugar a dudas en los referentes citados en este trabajo uno de los papeles más importante de la historia de las matemáticas es reconocer su conexión con otros ámbitos como los científicos, tal como lo menciona Maza

(1994). En este texto se puede reconocer una de las mayores y más importantes conexiones de las cónicas con otras disciplinas, en este caso el de la astronomía. Hasta antes de Kepler, la idea de que la tierra era el centro del universo predominaba dentro de la comunidad científica y el común de las personas, pero fue gracias al reconocimiento que Kepler hizo a las observaciones realizadas por Galileo que esta teoría se fue a pique y se posiciono un nuevo paradigma que relacionaba los 6 planetas conocidos hasta el momento girando alrededor del sol. Fueron estás observaciones las que permitieron a Kepler demostrar que la órbita de Marte se describía mediante una elipse, calculando una de las mayores excentricidades de las orbitas de los planetas; fue así comoKepler formuló las tres leyes de Kepler, resaltando la primera que determina que los planetas describen orbitas elípticas teniendo al sol como uno de sus focos. Además de los historiadores, los lineamientos curriculares MEN (1998) proponen que la educación matemática emule la actividad científica, lo que implica no presentar los objetos matemáticos terminados y sin historia.

G18: La historia de las matemáticas no solamente esta permeada de los aspectos científicos con los cuales encuentra puntos de conexión si no también con el contexto social, político y religioso, sustentado por autores como Valero (2012) y Vanegas (2014). Es de particular interés pensar en que este gran científico que cimentó las bases de la astronomía y relacionó los fenómenos físicos con los movimientos de los planetas, fuera perseguido y atormentado por sus creencias religiosas, llevándolo a trasladarse constantemente de ciudad en ciudad huyendo de sus perseguidores. Tal fue la influencia que tuvo la religión sobre la vida de Kepler que en el año 1616 su madre fue acusada de brujería por la iglesia católica. Además, durante su vida tuvo problemas económicos que incluso le impedían imprimir sus anotaciones para divulgarlas a la comunidad científica; de hecho, murió sin trabajo y en busca de un pago que tenía que recibir tiempo atrás. Esto deja verque la construcción de los conocimientos lleva consigo muchos factores diferentes a los académicos, sino que involucra situaciones políticas y sociales y condiciones económicas y morales.

5.2.7 Documento: Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica

Tabla19

Análisis documento de González (2007)

González (2007)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	X
	G2 Lenguajes	X
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	X
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	
	G14Trayectoria didáctica	

Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones interdisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores condicionante sociales	X

G1: Dentro del texto el autor realiza un recorrido histórico de la evolución el concepto de las cónicas, destacando los aportes realizados por matemáticos como Menecmo, Apolonio, Descartes y Fermat. Es así como presenta dos problemas relacionados con las cónicas que no pudieron ser resueltos por Apolonio, pero que más adelante fueron abordados y resueltos por Descartes y Fermat gracias a la geometría analítica. El primer problema que se relaciona es el problema de Apolonio "Dados tres elementos, punto, recta o circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres" (Gonzáles, 2007, p. 210) y el segundo es el problema de Pappus. En este sentido el texto ofrece dos problemas que podrían ser llevados al aula de clase, beneficio que es resaltado en la historia de las matemáticas por parte de Erazo (2016), haciendo referencia a que este tipo de problemas pueden ser adaptados y llevados a los estudiantes por parte del profesor.

G2: El documento en general permite identificar el surgimiento y evolución del concepto de cónica a través de los años, su origen y aquellos aspectos más importantes en su construcción. De esta manera, como menciona Erazo (2016), permite ampliar la concepción sobre el objeto matemático en sí. Pero esta ampliación se presenta en el documento de una forma muy especial, ya que se hace una comparación entre los trabajos realizados por Menecmo y Apolonio y los de Descartes y Fermat, haciendo énfasis en el tipo de lenguajes y herramientas usadas en cada época (ver Tabla9) se observa que el lenguaje usado para las construcciones y avances de Menecmo y Apolonio fue netamente

el geométrico trabajado por los griegos (trabajo con áreas) y como a pesar de que se podía reconocer un trabajo con algunas líneas de referencia (que podría suponer los ejes cartesianos) estas líneas se colocaban a posteriori; es decir, luego de tener la construcción de la cónica se situaban estás líneas de referencia. Mientras que en el trabajo de Fermat y Descartes las líneas de referencia estaban desde un inicio, y permitían describir la curva a través del lenguaje algebraico. Se reconocen entonces dos tipos de lenguaje, el de aplicación de áreas, trabajado por Menecmo y Apolonio y el algebraico apoyado por los ejes coordenados, desarrollado por Descartes y Fermat.

G8: Autores como Gulikers y Bloom (2002), Guacaneme (2016), Erazo (2016), reconocen el poder de la historia para identificar aquellos momentos en los que el desarrollo de un concepto matemático sufrió estancamiento o dificultades en su construcción, en este documento se hace un gran reconocimiento a los trabajos realizados por Menecmo y Apolonio y mostrando algunos vestigios de lo que podría haber llegado a ser la geometría analítica de su época. Sin embargo, se hace un gran énfasis en que no tuvieron más avances debido al poco desarrollo del álgebra en aquella época, por lo que no contaban con esta herramienta poderosa para modelar y describir.

G18: Tal vez uno de los métodos científicos más importantes en la historia de la humanidad se presenta en este documento, Descartes más allá de preocuparse por la representación y estudio de las secciones cónicas, quería comunicar al mundo su nueva forma de hacer ciencia y su nuevo método para hacer matemáticas. Este nuevo método analítico rompería el método tradicional de los Griegos que se basaba en la lógica, mientras el método de Descartes tenía la particularidad de dar por solucionadas algunas cuestiones y trabajar con ellas para descubrirlas. El método se traduce así:

1. Suponer el problema resuelto
2. Dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos

3. Determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas
4. Resolver la ecuación resultante
5. Construir geométricamente la solución.

Este nuevo método supone un cambio de paradigma en cuanto al modo de hacer matemáticas y de sustentar las mismas.

5.2.8 Documento: Apolonio el geómetra de la antigüedad

Tabla20

Análisis documento de Tapia (2002)

Tapia (2002).		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	X
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	

	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	
	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones interdisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores condicionante sociales	

G1: En este artículo el autor intenta presentar la obra y vida de Apolonio, donde resalta algunas de las proposiciones más importantes de sus libros, desde el libro I hasta el libro V, como se ha venido presentando en ocasiones anteriores. Uno de los usos que Reconoce Erazo (2016) sobre la historia de las matemáticas es el reconocimiento de Hitos o problemas importantes que puedan constituir un interés particular en el aula de clase. En este artículo se presenta uno de ellos que consiste en: "Dada la cónica y dado un cono circular recto, hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada" (Tapia, 2002, p. 26).

5.2.9 Documento: Historia de la matemática

Tabla21

Análisis documento de Ortíz (2005)

Ortíz (2005)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	X

	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	X
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	
	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones interdisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores condicionante sociales	

G1: En este artículo el autor presenta dos problemas referidos en la historia que el docente puede en un momento dado llevar al aula de clase de acuerdo al grado de escolaridad. El primer problema es conocido como la cuadratura de la parábola “Encontrar el área de un segmento parabólico oblicuo ABC cortado por la cuerda AC donde la tangente en B es paralela a AC”. Además, presenta el problema de Apolonio “dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia trazar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los elementos dados”. Además, en este libro y particularmente en esta sección se exponen diversas proposiciones de los libros de Apolonio, las cuales son: Proposición 7, proposición 11, Proposición 12, Proposición 47. Como lo menciona Erazo (2016) es importante reconocer en la historia este tipo de problemas potentes para ser llevados al aula, ahora bien, puesto que las proposiciones realizadas por Apolonio se encuentran demostradas bajo argumentos geométricos, por lo que valdría la pena abordar estas cuestiones desde una perspectiva analítica.

G3. La importancia de conocer la génesis de un objeto y su evolución histórica se ha resaltado por parte de autores como Guacaneme (2016), Gulikers y Bloom (2002), Erazo (2016). Por ello este libro es de particular interés ya que además de presentar las proposiciones más interesantes de los libros de Apolonio, recrea su demostración bajo la mirada geométrica. Por ejemplo, se enuncia la proposición 46: “Si una línea recta tocando a una parábola en cuenta el diámetro, la línea recta trazada a través del punto de contacto y paralela al diámetro en la dirección de la sección biseca a las líneas rectas trazadas en la sección paralelas a la tangente”, luego de esto ofrece su representación gráfica y posterior a esto se desarrolla su demostración bajo procedimientos Geométricos que se respaldan con la gráfica.

5.2.10 Documento: La génesis histórica de la geometría analítica y la enseñanza en la escuela secundaria

Tabla22

Análisis documento de Colombo, Llanos & Otero (2016)

Colombo, Llanos & Otero (2016)		
Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	x
	G3 Procedimientos	
	G4 Conceptos/propiedades	
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	X
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	
	G14Trayectoria didáctica	X
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones interdisciplinares	

	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores condicionante sociales	

G2: El autor presenta un recorrido por las nociones que dieron sentido a lo que es la geometría analítica. Godino (2009) reconoce la variedad de lenguajes como un elemento importante para entender las producciones de los estudiantes, ya que no todos expresan sus ideas de la misma manera; por eso, el hecho de reconocer cada uno de los aportes de las ramas de la geometría y el álgebra con el correr de los años se vuelve tan importante. Así pues, el artículo presenta una evolución en cada una de estas ramas en cuanto al lenguaje y las construcciones de acuerdo a las necesidades. (ver Tabla11) Como se ha presentado un lenguaje geométrico ligado a las necesidades cotidianas alejado de la formalidad y las demostraciones, se puede presentar en las aulas y además se debe promover en los inicios de su enseñanza para que luego al igual que se haya presentado en la historia, esta transite hacia un lenguaje más formal. Como lo menciona Maza (1994) cuando define el método genético. De igual manera, no se puede desconocer esta correspondencia con otra de las bases de la geometría analítica; el álgebra, sin lugar a dudas es un lenguaje que debe ser desarrollado desde edades tempranas, empezando por un álgebra retórica para luego pasar por un algebra sincopada y terminar con un álgebra simbólica dotada de sentido para el estudiante. El texto deja ver claramente como a través de la historia han evolucionado estas dos ramas de las matemáticas.

G8:Nuevamente es importante reconocer como lo menciona Gulikers y Bloom (2002), Lupiañez (2002) que el conocimiento de la historia proporciona algunas ideas sobre los posibles errores que pueden cometer los alumnos en el aula de clase, por ello es importante que el docente reconozca, que tanto la geometría como el álgebra (ramas de las matemáticas y bases para la geometría analítica) son el resultado de una evolución de cientos de años y que por ende el trabajo en

la educación no se puede pretender de la noche a la mañana, sino que debe ser un trabajo paulatino que emule la evolución histórica que han tenido estas dos ramas. Esto sin lugar a dudas contribuirá al desarrollo de un pensamiento mucho más analítico y que permita la construcción del concepto de cónica en la geometría analítica.

G14: Una de las ideas más claras del artículo es mostrar que tanto la geometría y el álgebra son dos ramas muy importantes en la construcción del conocimiento humano y por ende de las cónicas, y que no es un trabajo netamente destinado al grado décimo el abordar estas cuestiones analíticas y promover una relación de doble sentido entre la geometría y el álgebra. Mencionando que:

> El desarrollo histórico propuesto en este trabajo, tiene por objetivo establecer un posible marco de referencia para la enseñanza conjunta del Álgebra, la Geometría Clásica y Analítica en el Nivel Medio. Esta síntesis puede resultar un aporte significativo para la comunidad de Educadores en Matemática, dado que permitiría interpretar que la geometría analítica no podría haberse gestado separadamente de la Geometría Clásica y el Álgebra; y como consecuencia, una enseñanza disyunta podría carecer de sentido. (Colombo, Llanos y Otero, 2016, p.107)

Así pues, se marca una posible trayectoria didáctica hacia la enseñanza de las cónicas, fijando el esfuerzo en un desarrollo y comprensión de la geometría clásica y el álgebra por parte de los estudiantes antes de introducirse a la geometría analítica.

5.2.11 Documento Euler y la geometría analítica

Tabla23

Análisis documento de González (2008)

González (2008)

Epistémica	G1 Tipos de problemas	
	G2 Lenguajes	
	G3 Procedimientos	X
	G4 Conceptos/propiedades	X
	G5 Argumentos	
	G6 Conexiones	X
Cognitiva + afectiva	G7 configuraciones cognitivas (estrategias, argumentaciones, representaciones, enunciados)	
	G8 Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje	
	G9 Evaluación de aprendizajes	
	G10 Actitudes, emociones, creencias valores	
Interaccional mediacional	G11 Roles del profesor en relación con la tarea o contenido	
	G12 Modos de interacción profesor alumno, alumno-alumno	
	G13 Recursos materiales	
	G14Trayectoria didáctica	
Ecológica	G15 orientaciones curriculares	
	G16 conexiones interdisciplinares	
	G17 conexiones interdisciplinares	
	G18 otros factores	

	condicionante sociales	

G3. En cuanto a los procedimientos que presenta el artículo, el autor hace referencia a la gran elegancia con la cual Euler demostraba muchos de los teoremas de la geometría clásica haciendo uso de la geometría analítica, Se presenta la forma en la que a través de rectas perpendiculares al eje de ordenadas obtenía las coordenadas para poder describir una cónica. Además se muestra de forma detallada como fue que Euler logro determinar lo que se denomina como la ecuación general de la recta, demostrando a través de la comparación de triángulos semejantes que ninguna ecuación de primer orden puede llegar a representar una curva. Pero no solo se presenta detalladamente el establecimiento de la ecuación de la línea recta sino que también se muestra como estableció las ecuaciones de segundo orden General y canónica para las cónicas. Que como menciona Erazo (2016) brinda una nueva mirada sobre el concepto de las cónicas posibilitando una amplitud en

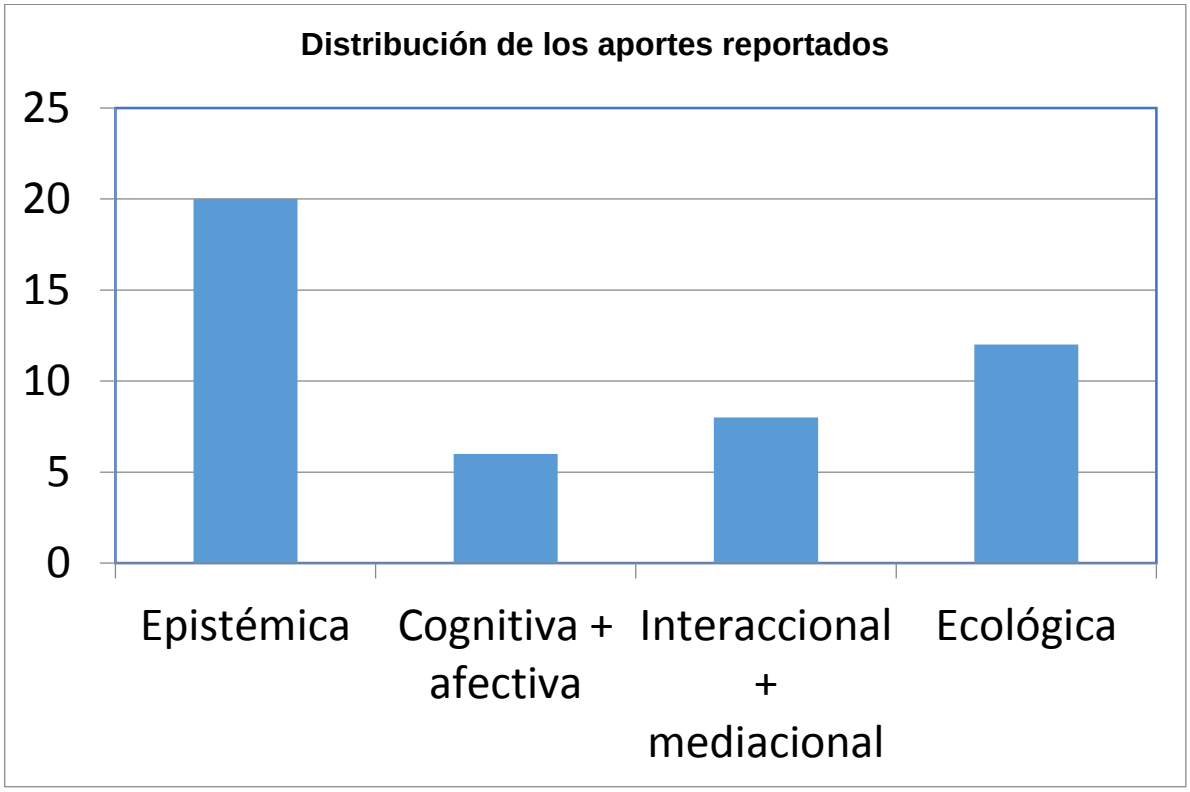
G4. Uno de los aspectos más importantes que presenta en el artículo tiene que ver con la finalización y generalización de los trabajo realizados por Fermat y Apolonio que logro Euler. Dando una forma a la geometría analítica que se asemeja mucho a lo que actualmente se enseña en la educación media. Proponiendo de forma explícita una ecuación general de segundo orden para todas las cónicas pero además presentando la ecuación canónica para las mismas.

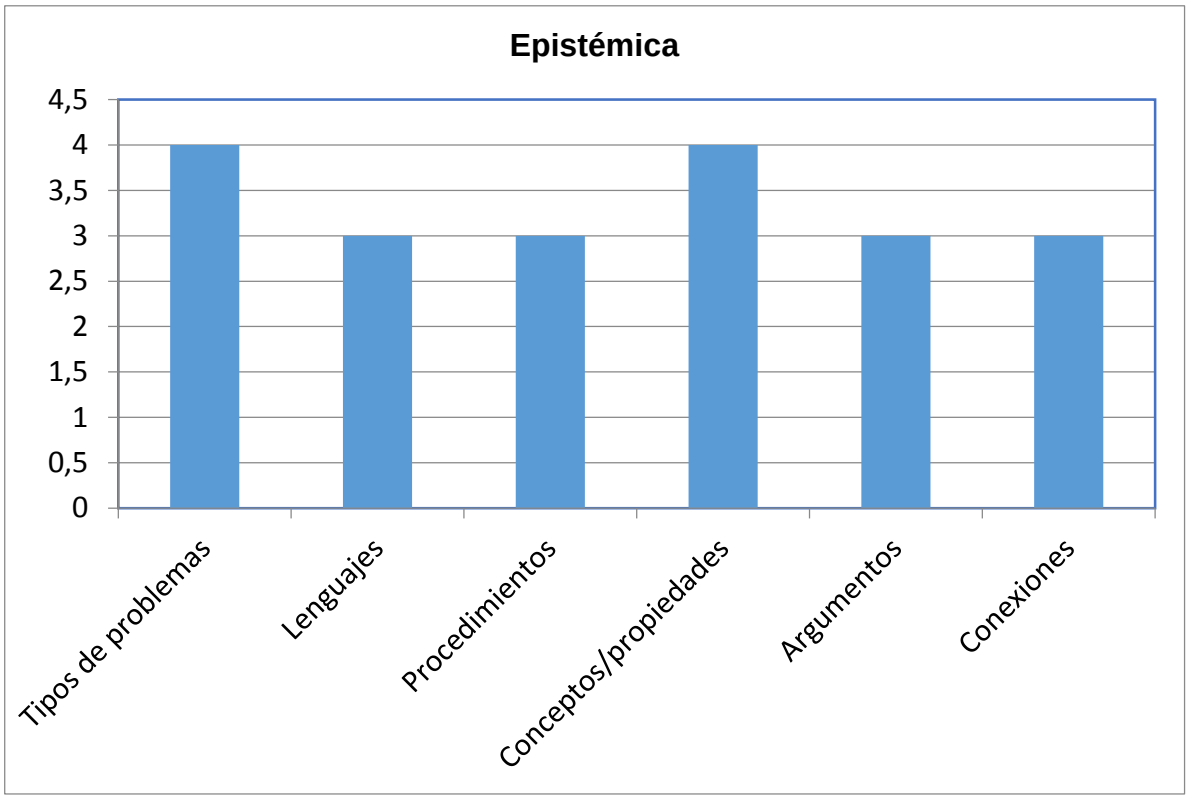
Lo que brinda al profesor una ampliación de la mirada en cuanto al recorrido histórico de las cónicas hasta llegar a consolidarse en sus formas de ecuación general y canónica.

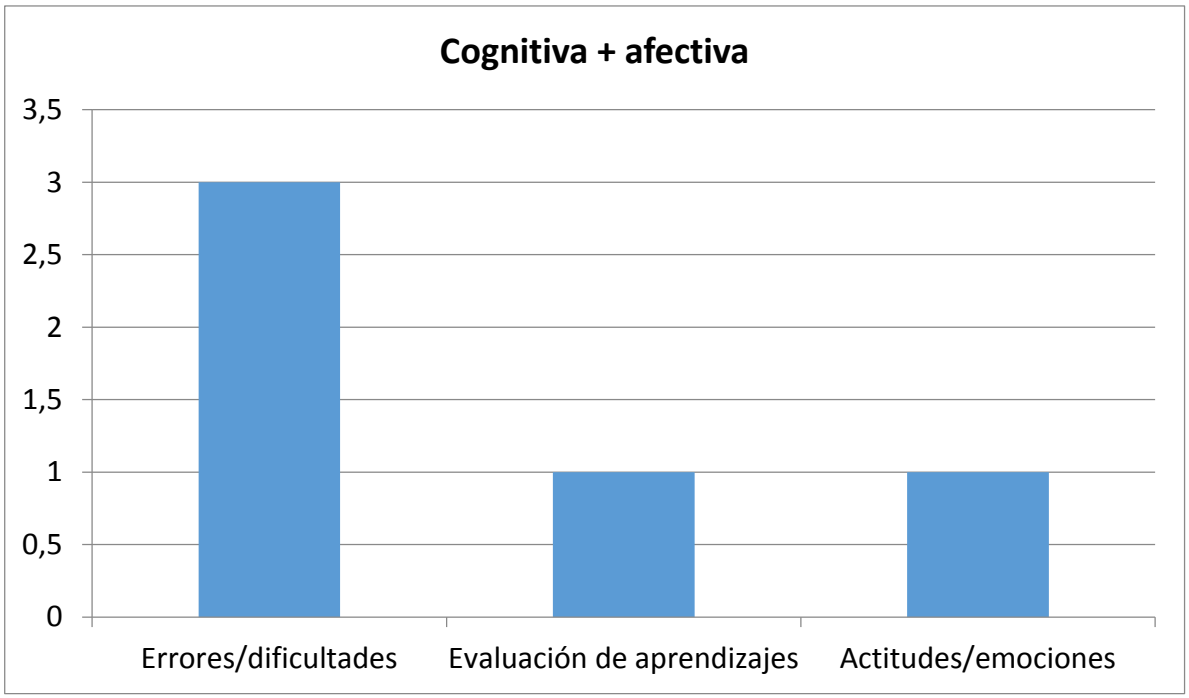
G6: Tal como lo menciona Ball, Hoover y Phelps (2008) la conexión de lo que se enseña con futuros conceptos no puede ser ajena a la visión del profesor de matemáticas, en ese sentido el texto muestra como Euler además de describir las cónicas a través de un sistema coordenado mucho más elaborado, también trabaja las curvas algebraicas que no necesariamente son de segundo orden, describiéndolas también desde el uso de la geometría analítica más precisamente

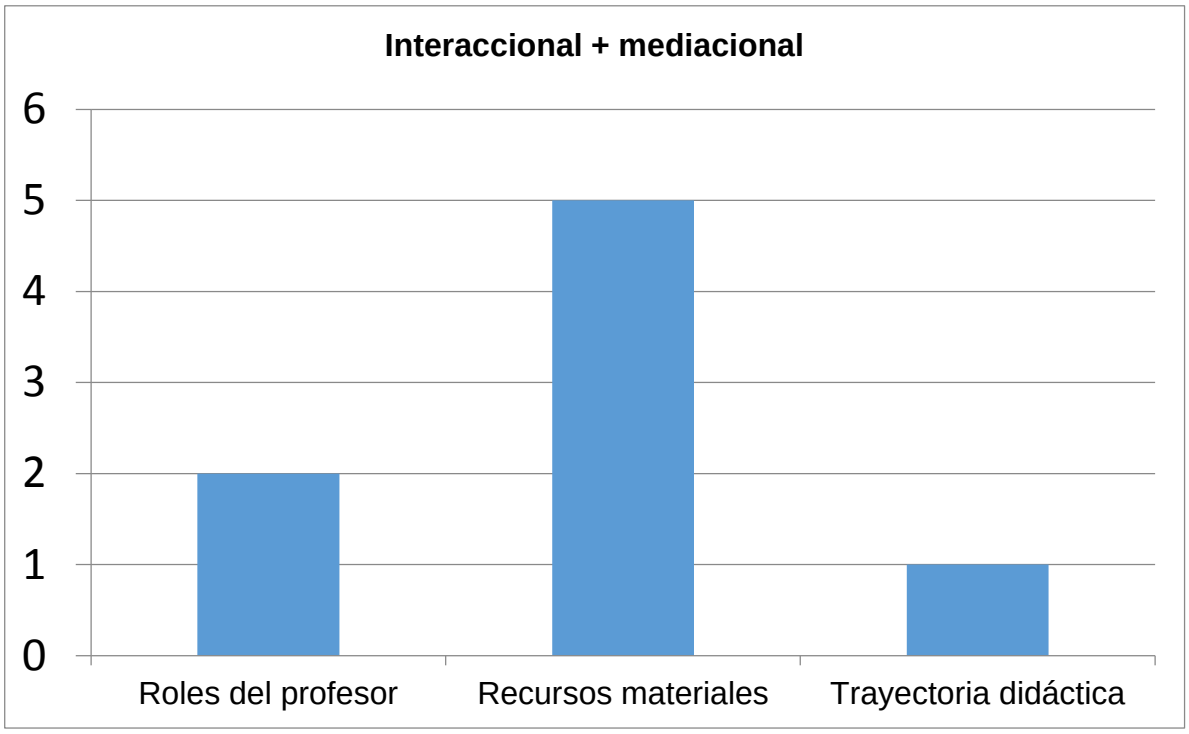
haciendo uso de la herramienta algebraica, lo que permite reconocer al docente que la importancia de la enseñanza de las cónicas reconociendo su implicación en el plano cartesiano, representa un avance en el reconocimiento de relaciones funcionales que varían de acuerdo a una condición. Lo que puede dar pie a que el estudiante desarrolle un concepto sobre función apropiado.

El análisis realizado a los 11 documentos permite establecer de manera concreta un aporte de la historia al conocimiento del profesor de matemáticas, ya que se logra identificar en cada uno de los textos una contribución a cada una de las facetas propuestas por Godino (2009), desde el reconocimiento de hitos y problemas importantes, como la implicación de la naturaleza del conocimiento de las cónicas y de la génesis de las mismas, encontrando posibles orientaciones curriculares, hasta la identificación de posibles errores o dificultades que pueden llegar a presentarse en el aula de clase. A continuación se presentan los gráficos que resumen los aportes encontrados a lo largo del documento en cada una de sus facetas.




Epistémica
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
Tipos de problemas
Lenguajes
Procedimientos
Conceptos/propiedades
Argumentos
Conexiones


Cognitiva + afectiva
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
Errores/dificultades
Evaluación de aprendizajes
Actitudes/emociones



Gracias a este análisis realizado a continuación se presentan las conclusiones que dan cuenta de la importancia de la historia en el conocimiento del profesor de matemáticas, en este caso la historia de las cónicas, pero haciendo un llamado a que sea la historia de la matemática en general la que aporte al conocimiento del profesor de matemáticas.

6 Conclusiones.

- En cuanto al trabajo de lectura y organización de los documentos que sobre la historia de las cónicas refiere, es propio decir que fue una labor amplia y compleja, ya que en su gran mayoría los trabajos que se enfocan o escogen como eje temático las cónicas, están encaminados hacia el uso de un software dinámico como se evidencio en los antecedentes consultados para este trabajo. Sin embargo, gracias a trabajos como el de Guacaneme (2016) el tipo de búsqueda se logró enfocar bajo diferentes criterios; autor, tema y materia. Dentro de esta revisión fue de gran sorpresa encontrar la influencia de matemáticos de la talla de Descartes, Fermat y Euler en la conformación de la geometría analítica y por ende de las cónicas.

- Respecto al análisis realizado a los documentos, se evidencia que hay una riqueza en cada uno de ellos frente al aporte que puede hacer al conocimiento del profesor de matemáticas; sobre todo en la faceta epistémica, exponiendo el proceso de desarrollo de las cónicas y permitiendo así ampliar el conocimiento respecto a la naturaleza del mismo, su génesis y su evolución. Además la revisión detallada permite afirmar que este concepto no es ajeno al desarrollo social y cultural de la humanidad como se hizo evidente en el análisis de documentos como los de Renyi (1990), Torres (2006) donde se observa la influencia del conocimiento de las cónicas en la percepción del mundo y el entendimiento del mismo, así como su uso con fines bélicos o de ayuda para labores del hombre, aportando directamente a la faceta ecológica en la que Godino (2009) reconoce la importancia que tiene el reconocimiento de los aspectos sociales y culturales por parte del profesor de matemáticas. Pienso que una a una las facetas propuestas por Godino se ven alimentadas por parte de la historia de las cónicas, y que es función del docente reflexionar sobre la importancia de incluir el aspecto histórico como parte de su formación profesional.

- Para lograr la caracterización de la historia en beneficio de los conocimientos del profesor de matemáticas, fue de gran importancia reconocer que el conocimiento del profesor no está determinado solamente por la apropiación temática de los conceptos a enseñar, sino que debe estar permeado de factores de orden didáctico y pedagógico, según Ball, Hoover y Phelps (2008). En ese orden de ideas, las facetas propuestas por Godino (2009) fueron las que permitieron establecer un estilo de lectura para cada uno de los textos a analizar, intentando establecer un aporte para alguna de dichas facetas. Un ejemplo se presenta en el análisis del artículo “algunas notas sobre la vida de Kepler” de Torres (2006). Esta lectura aporta en gran medida a la faceta ecológica del conocimiento del profesor de matemáticas, en tanto que hace evidentes las conexiones interdisciplinares de las cónicas. Pero además muestra su influencia en los desarrollos sociales de la humanidad, ya que los aportes de Kepler cambiaron por completo el paradigma que sobre el funcionamiento del universo se tenía hasta esa época (1605) sentando las bases de la mecánica celeste en la astronomía.

- Uno de los mayores impactos que tuvo el desarrollo de este proyecto, a nivel personal, tuvo eco en lo mencionado por Ball, Hoover y Phelps (2008) sobre el horizonte matemático. Este permitió establecer una conexión de las cónicas como elemento del currículo con otros conceptos matemáticos, ya que antes tenía la percepción de la enseñanza de este concepto de una forma aislada e inconexa dentro del currículo, pero la lectura de los documentos tales como “el papel de galileo en la construcción histórica del concepto de función cuadrática” o “Euler y la geometría analítica” ampliaron la concepción epistemológica que tenía sobre este concepto, permitiendo ver su relación con el desarrollo del pensamiento variacional a través del reconocimiento de la dependencia entre las variables.

- El objetivo fundamental de este trabajo fue mostrar que la historia de las cónicas está llena de oportunidades para nosotros los docentes. Ya sea llevando al aula problemas o hitos importantes como el problemas de Pappus, diseñando la construcción de las cónicas desde un punto netamente geométrico reflejando el trabajo de Apolonio, encontrando conexiones interdisciplinares con la astronomía o la física, permitiendo el desarrollo de lenguajes algebraicos que encuentren correspondencia con las representaciones geométricas etc. Es de vital importancia reconocer que una posible continuación de este trabajo puede llevar al diseño de diferentes estrategias de enseñanza de las cónicas en la educación media, proporcionando al docente una fuente de conocimiento necesaria para su labor.
- A través de los análisis realizados a los 11 documentos se logró identificar 46 aportes de la historia de las cónicas a los conocimientos del profesor de matemáticas, divididos de la siguiente manera 20 para la faceta epistémica 6 para la faceta cognitiva y afectiva, 8 para la interaccional y mediacional, y 12 para la faceta ecológica. Cada una de ellas alimentada por sus subcategorias.
- Gracias al análisis realizado se puede identificar que la historia proporciona aportes importantes al conocimiento del profesor de matemáticas en su faceta interaccional y mediacional a través del reconocimiento de diferentes ayudas materiales que podrían adaptarse y adoptarse en el aula de clase, teniendo una alternativa al uso de los software dinámicos o un complemento a los mismos.
- La faceta epistémica es la que mayor aporte obtuvo en cada una de sus subcategorias, mostrando que la historia de las matemáticas es rica fuente para el conocimiento del profesor de matemáticas en el reconocimiento de diversos problemas, lenguajes y procedimientos que pueden ampliar su visión de los objetos matemáticos.

7 Referencias Bibliográficas

Agudelo, C (2007). Explanations of attitudes to change: Colombian mathematics teachers' conceptions of the crucial determinants of their teaching practices of beginning algebra. Journal of Mathematics Teacher Education. 69-93

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*. (8), 30-46. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf.

Ball, D., Hoover, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education.59*,(5), 389-407.

Bocanegra, I., Galeano, O. y Huérfano, H. (2013). *Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial.* (Tesis de maestría) Universidad pedagógica nacional. Bogotá.

Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *SUMA*,(3),17-28. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/2/017-028.pdf

Calderón, W. y Peñuela, S. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza de las cónicas. Ciencia, ingeniería y educación científica*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Castelnoble, M. y González Herrera, F. (2015). Cónicas en la Grecia antigua. Reloj de agua, 12, 17-31.

Colombo, E., Llanos, V. & Otero, M. (2016). La génesis histórica de la Geometría Analítica y la enseñanza de la escuela secundaria. *NÚMEROS: Revista didáctica de las matemáticas.*93, 93-110.

Cortés, G. & García, S. (2003). Investigación documental: Guía de autoaprendizaje apuntes y ejercicios. Secretaria de educación pública: México.

D'Ambrosio, U. (2011). Educação para uma sociedade em transição. Porto Alegre. Cortez.

Erazo, J. (2016). *Categorías de usos de la historia de las matemáticas en la educación en matemáticas.* (Tesis de maestría). Universidad pedagógica nacional. Bogotá.

Fusco, G. (2009). La investigación histórica, evolucióny metodología.Revista Mañongo. 229-245

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas.* (Tesis de doctorado). Universidad del Valle: Cali. Descargado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/10093/1/9405-0525550.pd

Guacaneme, E. (2011) La historia de las matemáticas en la educación de un profesor: Razones e intenciones. *XIII conferencia interamericana de educación matemática CIAEM*. Conferencia llevada a cabo en Recife, Brasil.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación matemática*,(20),13-31.

Gonzáles, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Suma. 17-28

Gonzáles, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA*. 30, 205-236.

Gonzáles, P. (2008). Euler y la geometría analítica. Quaderns D' historia de L'Engingerya. 9. 83-116.

Grossman, P. Wilson, S. Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9, (2), 1-25.

Gulikers, I. y Blom, K (2002). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational studies in Mathematics*. (47), 223-248, Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.622.6126&rep=rep1&type=pdf

Hernández, V. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat :¿Y Apolonio?. *Apuntes de historia de las matemáticas. 1,* (1), 32- 44.

Indaburo, Y. Jimenez, J. Sarmiento, C. (2016). Aportes de la historia de las matemáticas al conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas en formación avanzada sobre las ecuaciones trigonométricas.(Tesis de maestría). Universidad pedagógica nacional. Bogotá.

Llinares, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares.Revista de Teoría, Investigación y Práctica Educativa, ISSN 1130-5371, Nº 10-11, 1995. 103-116

Lupiáñez, J. (2002). Reflexiones didácticas sobre la historia de la matemática. *SUMA*. 40, 59-63.

Martínez, D. (2015). La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 133-140.

Maza, C. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: Un análisis. *SUMA.* 17*. 17-26.*

Ministerio de educación nacional. (1998). Lineamientos curriculares matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Colombia.

Ministerio de educación nacional. (2006). Estándares curriculares de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Colombia.

Mesa, Y. & Villa, J. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. En Leston, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME, 22. 1315-1323.

Ortíz, A. (2005). *Historia de la matemática*. Vol. 1.Recuperado de http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf

Pérez, B. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Renyi, A. (1990). Diálogo sobre las aplicaciones de la matemática. *Revista de Educación matemática*. 5, 3-19.

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, 2, 1-35.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9, (5), 1-30.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. Revista EMA, 6(1), 3-26.

Stenhouse, L. (2010). Investigación y desarrollo del currículo. Capítulos VI, VII, VIII. Morata, S. Sexta edición. Madrid.

Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigüedad. *Apuntes de historia de las matemáticas. 1,* (1), 19-31.

Torres, S. (2006). Algunas notas sobre la obra de Kepler. *Biblioteca Universitaria*. 9, (1), 45-52.

Valero, P. (2012). Posmodernismo como una actitud de crítica. Hacia la investigación dominante en Educación Matemática. En Valero,P; Skovsmose,O. (Eds.) Educación matemática critica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 173-192. Bogotá. Una Empresa Docente.

Vanegas, Y. (2014). Competencias ciudadanas y desarrollo profesional. Tesis doctoral universidad de Barcelona, departamento de didáctica de las ciencias experimentales y la matemática.

8 Anexos

Anexo 1. Observación de clase

En esta clase el profesor inicia su exposición de las secciones cónicas. Lo primero que hace es preguntarles a los estudiantes si saben o han escuchado lo que es una sección cónica, los estudiantes dicen que no. El profesor empieza a contarles cómo se generan las secciones cónicas, sin ayuda de gráficas ni de otra ayuda, sólo les pregunta si recuerdan cómo se ve un cono, les explica que va a cortar ese cono con un plano en diferentes ángulos de inclinación, les cuenta la teoría de las cónicas muy rápidamente hablando de diferentes conceptos sin detenerse en ellos ni aclarar nada, usa términos como por ejemplo lugar geométrico, un punto que se mueve en un plano, focos, etc.

Empieza explicando la elipse, muestra una proyectada en un telón y les cuenta que “la distancia que hay de los focos a cualquier punto de la elipse va a ser igual” no aclara realmente de lo que habla, solo les sigue contando ciertas descripciones de la elipse.

Les cuenta que la elipse es una circunferencia un poco extraña, un poco ovalada, explica que la ecuación de la elipse es la ecuación de un círculo modificada, “la ecuación de un círculo es x 2 más y 2 igual al radio”. Luego propone observar las partes de la elipse, las enumera y describe mostrándolas en la Figura, hace preguntas pero los estudiantes hablan muy tímidamente, poco a poco llega a la ecuación de la elipse, para introducirla les refiere la ecuación de una recta (ya vista), a partir del concepto de distancia entre puntos, expone la obtención de la ecuación canónica de la elipse.

En cierto momento pregunta si recuerdan la fórmula de la distancia entre puntos, entonces una estudiante dice y2, pero el profesor dice mejor empecemos con x ya que y es cero y continúa con su exposición acerca de la elipse.

Cuando habla de esta fórmula no aclara por ejemplo que (x,y) es la coordenada de cualquier punto sobre la elipse, asume que muchas cosas de su discurso

deben ser entendidas por los estudiantes, habla de C (distancia del foco al centro), de $f´$, a, b, constantes, etc., pero no las ubica en la Figura ni aclara su uso durante el procedimiento.

Clase 2. Miércoles.

El profesor inicia su clase con la fórmula canónica de la elipse en el tablero, les indica que esa fórmula ya a conocen y que el día de hoy la van a aplicar a la resolución de ejercicios, empieza resolviendo un ejemplo: “Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (5,0) y $F´$ (−5,0) la distancia entre sus vértices horizontales es de 10 unidades”

El profesor indica que como ya lo habían visto, en este caso a=10 yc=6, y como $b2$=$a2$−$c2$, como ya lo habían visto en la clase anterior, entonces la ecuación de la elipse sería: $x2100$+$y264$=1

“Muy fácil, ¿cierto?” dice el profesor.

Los estudiantes dicen “si” el profesor propone un nuevo ejercicio con los mismos parámetros y siguiendo los mismos pasos que él, algunos estudiantes resuelven el ejercicio. Luego el profesor presenta otro ejercicio diferente: Hallar las coordenadas de los vértices y los focos de una elipse cuya ecuación es: $x225$+$y24$=1

Otra vez realizando un proceso similar al anterior pero inverso, el profesor resuelve y dice que las coordenadas de los vértices horizontales son: V(−5,0) y $V´$(5,0), que las coordenadas de los vértices verticales son B(0,2) y $B´$(0,−2) y que las coordenadas de los focos son: F(−√21,0) y $F´$(√21,0), propone un ejercicio con los mismos parámetros y en este caso los estudiantes tienen más dificultades, él termina resolviendo e ejercicio en el tablero, ahora propone otro ejercicio, más difícil según él:

Encontrar las coordenadas de los focos, las coordenadas de los vértices, la longitud de los ejes mayor y menor y del lado recto de la elipse cuya ecuación es: 36$x2$+49$y2$=1764, los estudiantes están un poco desconcertados, el profesor

explica que es otra forma de presentar la ecuación pero que con ciertas manipulaciones pueden llegar a verla como siempre la han visto y luego de aclarar que 1764=36∗49, divide a ambos lados por 1764 y presenta la ecuación canónica de esta elipse como: x249+y236=1

Anexo 2 Encuesta

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
INNOVACIÓN-INVESTIGACÓN

Nombre: _____

Edad: _____

Profesión: _____

A continuación encontrará tres preguntas relacionadas a las prácticas de enseñanza que ha tenido a lo largo de su experiencia en torno al concepto de cónicas.

1. Describa de forma breve cómo aborda la enseñanza de las cónicas en grado décimo.

2. De los siguientes nombres, ¿cuáles relaciona con el concepto de cónicas?

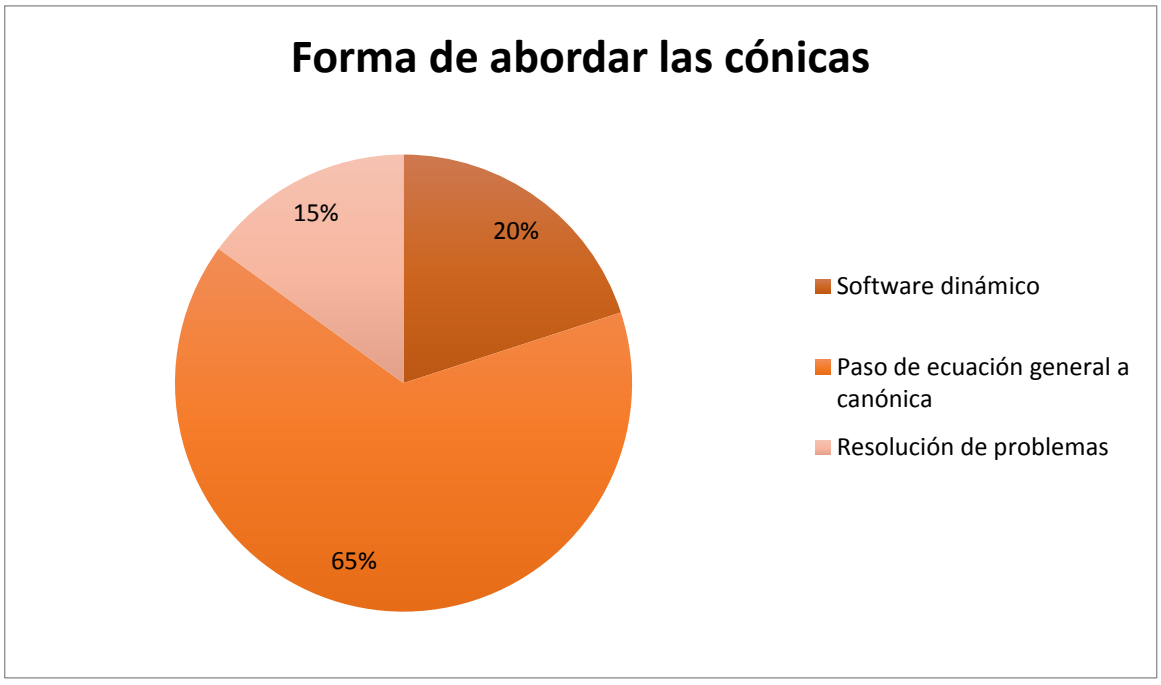
- Menecmo
- Apolonio
- Descartes
- Fermat

3. Siente que en sus clases sobre cónicas prima el desarrollo algebraico en el paso de las ecuaciones general a canónica.

Si No

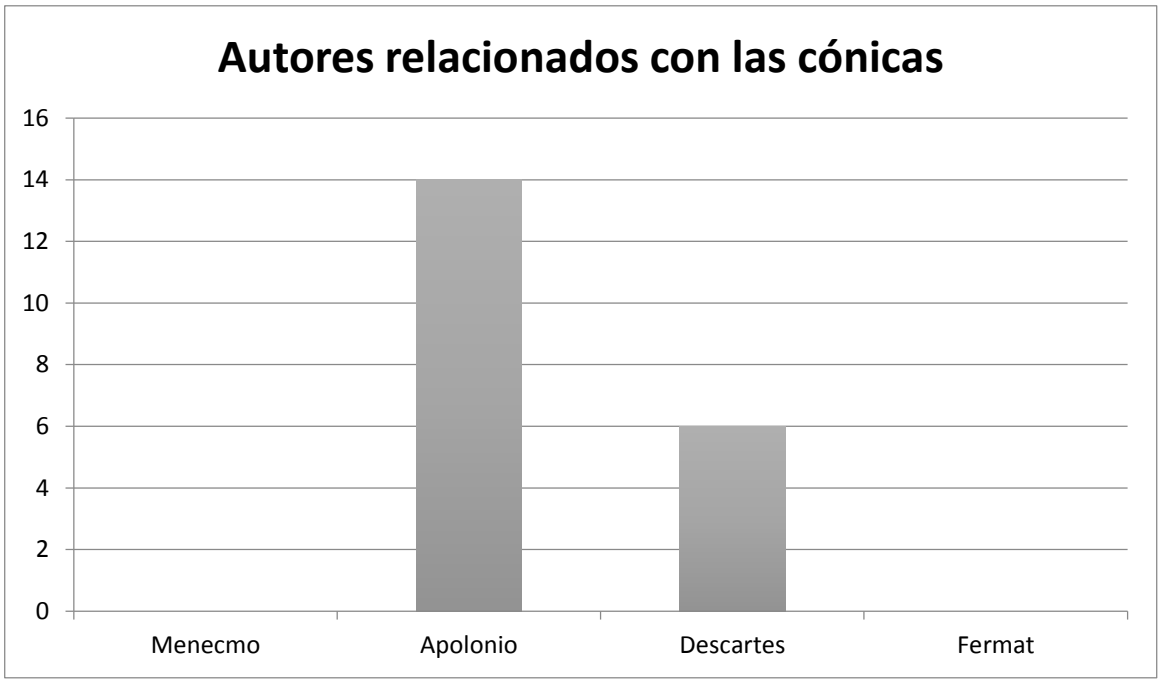
Como parte de la sistematización de las respuestas de los profesores, a continuación se presentan los gráficos que muestran los resultados obtenidos.

Para la primera pregunta, se determinan tres categorías de acuerdo a las respuestas de los profesores que variaban de forma sustancial, estas son: a través de un software dinámico, Paso de ecuación general a canónica y resolución de problemas.



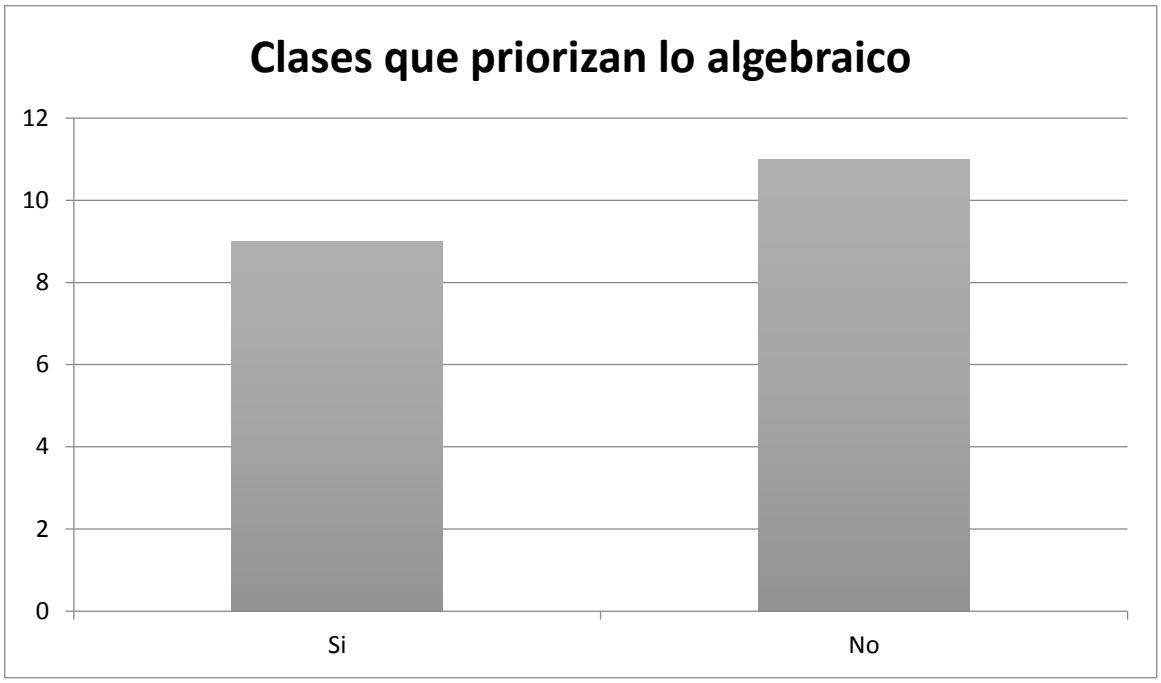
En esta se reconoce que la mayoría de los profesores se inclina por lo que parece una enseñanza que acelera los procesos algebraicos.

Para la pregunta número 2 a pesar de que todos los autores listados tienen una gran influencia sobre el desarrollo de las cónicas se observa que los docentes priorizan a uno de ellos.



Se observa que los profesores relacionan en su gran mayoría a Apolonio con el concepto cónico, aunque se reconoce que fue uno de los geómetras más importantes de la antigüedad y que desarrollo un gran tratado acerca de las cónicas, no se puede desconocer que los demás también tuvieron una gran influencia.

Para la pregunta tres, hay una distribución equilibrada entre los que reconocen que sus clases priorizan lo algebraico y los que dicen que no.



Anexo 3. Libro de texto

Como una de las evidencias empíricas se quiso observar la forma en la que el libro de texto propone la enseñanza de las cónicas, encontrando que al igual que el discurso de la docente muestra las cónicas como el resultado de cortes a un cono recto y de allí se desprenden ciertas características algebraicas de las figuras obtenidas. A continuación se presentan algunos de los ejercicios que propone el libro de texto donde se evidencia un fuerte trabajo en lo algebraico y en la determinación de los elementos de la parábola.

Desarrolla tus competencias

Ejercitación

102 Representa cada parábola.

a. $x^2 + 8x - 12y + 4 = 0$

b. $x^2 + 12x + 12y + 96 = 0$

c. $y^2 + 12x + 10y - 35 = 0$

d. $y^2 - 16x + 8y + 64 = 0$

e. $x^2 - 12y = 0$

f. $y^2 + 16x = 0$

103 Determina la ecuación general de cada parábola a partir de su ecuación canónica.

a. $(x - 2)^2 = 4(y + 2)$

b. $(y + 2)^2 = 16(x - 2)$

c. $(x + 3)^2 = -6(y - 5)$

d. $(y - 1)^2 = 9(x + 1)$

e. $(x - 2)^2 = -12y$

f. $y^2 = -20(x - 2)$

Desarrolla tus competencias

Ejercitación

90 Representa en un plano cartesiano cada una de las siguientes parábolas.

a. $(x - 2)^2 = 4(y + 5)$

b. $(x - 1)^2 = -16(y - 2)$

c. $x^2 = 64(y - 5)$

d. $y^2 = -12(x - 2)$

e. $(y + 3)^2 = -24(x - 7)$

f. $(y - 4)^2 = 1(x - 3)$

91 Determina la ecuación canónica de cada parábola a partir del vértice y el foco dados.

a. $V(2, -1)$ y $F(4, -1)$

b. $V(3, -2)$ y $F(3, 0)$

c. $V(1, -2)$ y $F(1, 1)$

d. $V(-3, -2)$ y $F(-6, -2)$

e. $V(2, 3)$ y $F(5, 3)$

f. $V(0, 4)$ y $F(0, 2)$

Razonamiento

92 Halla la ecuación canónica de cada parábola según las condiciones dadas.

a. La directriz es $y = 3$ y el foco la coordenada $(1, -2)$.

b. El vértice está en $(-2, 2)$ y el lado recto mide 4 unidades y corresponde con el eje Y.

c. El eje de simetría es la recta $x - 5 = 0$, el foco está en $(5, -4)$ y la directriz pasa por $(2, -7)$.

d. Su vértice está en $(3, 0)$ y la directriz es el eje Y.

e. Su vértice está en $(1, 5)$ y pasa por el punto $(-1, 3)$.

93 Determina los elementos de cada parábola a partir de la ecuación.

a. $(y - 4)^2 = -42(x - 3)$

b. $(x + 3)^2 = 9(y - 6)$

c. $x^2 = -8(y + 1)$

d. $y^2 = 16(x + 7)$

e. $(y - 0,5)^2 = -24(x + 1)$

f. $(x - 1)^2 = 3(y - 2)$

g. $y^2 = -28x$