TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN TEXTOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA

RICARDO BUITRAGO ROA.

COD. 2000140053.

JUAN CARLOS RODRIGUEZ RODRIGUEZ

COD. 2000240059.

BOGOTÁ D.C.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL.

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS.

2006

TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN TEXTOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA

RICARDO BUITRAGO ROA.
JUAN CARLOS RODRIGUEZ RODRIGUEZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el titulo de Licenciado en Matemáticas.

Asesor: LUIS EDUARDO ESPITIA.
Profesor Universidad Pedagógica Nacional

BOGOTÁ D.C.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL.
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS.
2006.

A toda mi Familia; por su apoyo incondicional, poniendo el hombro siempre que lo he necesitado; creyendo en mí y acompañándome constantemente en esta ardua tarea; pues todo esto no hubiese sido posible sin el ese apoyo moral y afectivo de todos ustedes.

A mi esposa, compañera y amiga de quien he recibido solamente apoyo desde el día en que nos conocimos. Por la confianza y la fe que siempre ha depositado en mí. Por animar el deseo de superación profesional; por su incondicional apoyo compartiendo conmigo sueños, ilusiones, pequeños y grandes logros. Por el cuidado y cariño a nuestro hijo; y sobre todo, por hacerme sentir cada día un hombre afortunado.

RICARDO B. ROA.

A mi Madre; quien con su optimismo, fe y fortaleza, es siempre ejemplo y motivo de superación; a mis hermanas; que me han dado todo a cambio de poco; A mi Novia; quien siempre me ha brindado una voz de aliento y compromiso en este largo, pero valioso camino. Puesto que de ellas he aprendido los valores fundamentales de la vida.

A mi verdadero amigo Humberto, que partió dejando el vació en el alma de quienes disfrutamos de su compañía; un hombre íntegro, un modelo de coraje, voluntad y alegría de vivir, aún en los momentos más difíciles. Por lo mucho que aprendí de él como persona, padre y educador.

JUAN C. RODRIGUEZ

A todos Nuestros amigos y amigas de aquí y de allá; por mantenernos en su mente y corazón a pesar del tiempo y la distancia.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a los Profesores; que participaron desinteresadamente en este trabajo; que con su colaboración y sus aportes tanto en la dirección del trabajo como en el enriquecimiento de nuestros conocimientos.

Así mismo por enseñarnos a ser profesionales reflexivos y fomentar nuestro compromiso con la educación.

A nuestros compañeros y amigos de la Universidad; a quienes agradecemos muchos buenos momentos y las múltiples oportunidades de compartir nuestras ideas y preocupaciones tanto académicas como existenciales.

RESUMEN ANALITICO.

TITULO.

TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN TEXTOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA

AUTORES

BUITRAGO Roa, Ricardo

RODRIGUEZ Rodríguez, Juan Carlos.

PUBLICACION
Bogotá D.C. Universidad Pedagógica Nacional 2006

DESCRIPCION

La adopción de un determinado libro de texto por parte de los centros educativos para el área de matemáticas, representa una decisión con repercusiones muy significativas en el aprendizaje de los estudiantes, principalmente si los profesores no hacen un buen uso crítico de tal material curricular. Ordóñez y Contreras (2003),

Gracias a esto se viene generando una serie de investigaciones relacionadas con el estudio del contenido de los textos, así mismo se vienen efectuando algunas categorizaciones de los textos según sus contenidos. Teniendo en cuenta estas investigaciones se pretende generar un estudio significativo frente al concepto de límite en los libros de texto utilizados en la educación media.

Para poder aplicar el análisis de texto se han tomado tres libros de Bachillerato, teniendo en cuenta la fecha de elaboración, la editorial y su alto grado de aceptación en las diferentes instituciones. El procedimiento utilizado consistió en observar el texto en las secuenciación de sus unidades y clasificar estas unidades según el tema de límite, primero a nivel general, luego el tratamiento que se le da al límite en cada una de estas unidades que se desempeñan de acuerdo con las categorías establecidas posteriormente. A continuación se ha realizado un análisis en profundidad de dichos textos, tomando tres categorías de análisis: conceptual, didáctico cognitivo, fenomenológico. Finalmente se da un perfil del texto gracias a las dimensiones de análisis utilizadas, así mismo se presentan las conclusiones generales

CONTENIDO

En este primer capítulo pretendemos describir algunos planteamientos que dan pautas al desarrollo del trabajo de grado, en un primer momento nos preocupamos del papel importante del texto en el aula de matemáticas, de igual forma se nombran algunas investigaciones relacionadas con el análisis de texto, ya sea en otras ciencias o en matemáticas, esto con el fin de dar sustento a este trabajo, posteriormente se mencionarán algunas investigaciones acerca del concepto de límite, luego se definen lo que es una concepción, así mismo las concepciones identificadas con el concepto de límite según Sánchez Gómez, C y Contreras de la Fuente (1998), Ana Cecilia Medina (2002), por último se definen las dimensiones para el análisis, estas dimensiones permitirán elaborar el perfil del texto, ya sea expositivo, tecnológico o comprensivo.

En el segundo capitulo se pretende observar los lineamientos y estándares curriculares para identificar a cuáles de las propuestas curriculares obedece cada texto. Posteriormente se dará un vistazo a los libros de texto seleccionados con el fin de dar pautas para el análisis que se realizará en el siguiente capitulo, para tal fin se elaboraran fichas con los datos fundamentales del libro: título, autores, editorial, año de edición, plan de estudios, y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite.

En el tercer capitulo se elaborará el análisis de cada uno de los textos, tomando las categorías (conceptual, didáctico- cognitivo, fenomenológico) y las dimensiones que estipularon en los dos capítulos anteriores, así mismo dará un perfil de cada texto, atendiendo a las categorías de análisis y a las dimensiones, posteriormente se justificará el porqué del perfil de los textos y por último se nombrarán las conclusiones del trabajo.

CONCLUSIONES

La primera conclusión a la que llegamos es que el análisis de libros de texto es una tarea bastante difícil de modelizar y trabajar aquí en Colombia, ya que no se posee la suficiente información y las pocas investigaciones que se han hecho arrojan otros resultados distintos a los que en este trabajo se exponen, por tal motivo tuvimos que recurrir a fuentes externas como investigadores, tesis doctorales, articulos encontrados en la red.

Hemos encontrado que existen unos parámetros estipulados para efectuar un análisis de texto, que a saber de muchos profesores y estudiantes no conocíamos, esta es una conclusión relevante, ya que sin tener una formación concisa y completa sobre el análisis de los textos nos sumergimos en este tema sin conocer el rumbo que esto nos deparaba, por lo tanto creemos importante resaltar la asesoria por parte de los Doctores: Maria Teresa Astudillo y el señor Modesto Sierra, quienes vía e_mail nos brindaron varios de sus artículos e investigaciones y además con sus aportes significativos ayudaron a centrar las bases de este trabajo.

A pesar de que no se hizo un análisis histórico del concepto de límite, se pudo evidenciar en los textos seleccionados que este concepto ha venido sufriendo ciertas modificaciones con respecto a su exposición y desarrollo dentro de la reforma educativa.

Como se observa cada uno de los textos tiene un perfil diferente, esto se debe a la evolución del concepto de límite en la educación, y principalmente depende de las directrices y leyes que rigen los parámetros para la enseñanza. Si bien es cierto lo que se quería con este trabajo es dar pautas para un análisis de texto mas completo que quizás arroje algunos buenos resultados que contribuyan a la enseñanza del concepto de limite en la educación media.

Por ultimo, estamos de acuerdo con Cecilia Medina cuando afirma que el concepto de limite, no solo tiene las concepciones descritas en el capitulo uno, sino que existe una concepción algebraica que se desarrolla en el seno de la educación media, esto implica que un estudiante pueda ver el limite como una ampliación del algebra.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.

En un mundo lleno avances y luchas por alcanzar mejoras en la educación, no podemos sentarnos a esperar que los demás hagan las cosas por nosotros. Por el contrario, debemos animarnos en crear y buscar nuevos proyectos, nuevas alternativas que generen un cambio en la educación, desde esta perspectiva los estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional deben tener expectativas y grandes esperanzas, para quienes algún día anhelan llegar a ser maestros.

El estudio de los conceptos y nociones matemáticas que aparecen en los programas curriculares de matemáticas para la educación básica (lineamientos, estándares) requiere la participación de toda la comunidad educativa, por tal motivo se debe tener en cuenta que el estudiante es parte fundamental de la educación, por ello es importante estudiar e investigar la forma como se enseña y explica un determinado tema.

Como problemática, nos ha interesado el concepto de límite que se desarrolla en algunos textos de educación media, estamos de acuerdo con Cecilia Medina (2002) y Sánchez, G (1998) cuando afirman que *"…El concepto de 'límite" ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo y su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Primero por su carácter estructural que lo constituye el eje central y concepto básico sobre el cual se construye la estructura del Cálculo diferencial e integral y otros conceptos de otras ramas de la matemática; también por su carácter instrumental como herramienta para la solución de problemas tanto al interior de las matemáticas como de ciencias aplicadas como la Física, la Ingeniería y finalmente, como objeto matemático que se gesta en diferentes contextos: geométrico, aritmético, métrico, topológico y asociado a otros objetos matemáticos.."*.

OBJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL.

Mediante un análisis de textos escolares identificar el tratamiento didáctico para la enseñanza del concepto de límite en la educación media.

OBJETIVOS ESPECIFICOS.

Seleccionar los textos que serán objeto de estudio.
Elaborar las categorías para organizar la unidad relativa al concepto de límite.
Analizar los textos.

JUSTIFICACIÓN

Los fines de la educación enmarcan las características que debe poseer ese ser “integral” al que se pretende educar; por lo tanto nosotros como futuros docentes, debemos ser capaces de producir conocimientos en el campo educativo y pedagógico; de reflexionar frente al tradicional método de enseñanza, de garantizar que los estudiantes se apropien del mejor saber disponible en la sociedad y de crear condiciones agradables para dicha enseñanza.

Gracias a la experiencia que hemos adquirido como docentes en nuestra práctica educativa, observamos que el conocimiento del estudiante adquirido durante su formación académica no está bien fundamentado y al enfrentarse a cualquier carrera universitaria choca con la realidad, esto lo lleva a una desorientación.

En la transmisión del conocimiento, ha constituido un eje importante la aparición del texto escolar, se puede considerar un elemento cultural reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos específicos que deben conocer o manejar los estudiantes según los parámetros del ministerio y secretaria de educación, el cual impone una determinada forma de estructurarlos y que plantea a la siguiente generación cierto tipo de problemas. En este sentido, Choppin (1980) considera*”…el libro de texto es a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de estudiantes como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes...”.*

Por tanto el análisis de los libros de texto se hace, pues, una tarea importante en la investigación educativa. A pesar de ello, no ha sido un temática que haya merecido la atención precisa en relación con su peso específico en la enseñanza, como se mencionó anteriormente, *"…aunque recientemente comienza a despertar de su letargo…"* (Alambique, 1997). Este hecho quizás responda a la identificación del libro de texto como un instrumento al servicio de la metodología de la transmisión del conocimiento y así mismo en la recepción del mismo. A esto se refiere (Tonucci, 1985, p. 9) cuando afirma:

"…Si la escuela considera que su finalidad principal es la transmisión de los conocimientos, mediante un maestro que representa el saber oficial, a todos los estudiantes (que no saben) para que todos alcancen un nivel común, previamente organizado, de nociones, entonces el libro de texto resulta un instrumento necesario y coherente…".

Por este hecho vemos la necesidad de analizar algunos libros de texto relacionados con el tema del límite a nivel escolar, ya que hemos observado que el tratamiento que se le hace con respecto a su desarrollo como tema importante en la educación media no es el mejor y en algunos casos no es el apropiado, por lo tanto tiende a ser erróneo, en cuanto al sentido matemático con el que se enseña, de igual forma en algunos textos escolares la fundamentación matemática no es la adecuada para un concepto tan importante como lo es el límite de una función, ya que solo se limita a la práctica algorítmica del calculo de un límite.

Según esto se puede evidenciar que muchos de los libros de texto de matemáticas de grado once que circulan en las instituciones educativas y que son utilizados por los maestros, hacen énfasis que el cálculo del límite de una función se halla en procesos de reemplazar valores numéricos, reforzando así la creencia de que el límite de una función se resume solo a reemplazos algebraicos (Ana Cecilia Medina ,2002).

METODOLOGÍA

El trabajo de grado hace parte del proceso de formación de docentes e investigadores en el campo de la matemática y Didáctica de las Matemáticas, respectivamente y en este está implicado un proceso de análisis, selección o diseño de metodologías de investigación acordes con el objeto de estudio, por lo tanto el análisis de texto que se pretende realizar se basa en dos artículos resultado de dos proyectos de investigación, en primer lugar esta el articulo *"Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y cursos de orientación universitaria (COU, 1940-1995)"* en segundo lugar se encuentra el articulo *"Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos de la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*". Aunque el análisis se basa en estos dos artículos lo que se tendrá en cuenta para ello será la metodología que se utiliza, ya que cada artículo hace un análisis de la evolución histórica de cada concepto (límite y derivada). El primero nos da pautas para realizar los análisis correspondientes a cada texto y el segundo nos brinda la idea para la categorización de los textos. Por ende se elaborarán las siguientes etapas:

SELECCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE TEXTOS

Se tomaran 3 libros de texto publicados desde el 2000 hasta nuestros días. Además se relacionaran los planes de estudio vigentes, lineamientos, estándares, que corresponden a la época de los libros seleccionados. Esto con el fin de determinar si los textos siguen los planes ministeriales o no. Los criterios para la selección de los libros de texto serán en primer lugar porque son textos de edición relativamente reciente y todos ellos pretenden responder a las disposiciones curriculares del Ministerio de Educación Nacional, aunque en la mayoría de los textos no sea explícito a cual disposición responden. En segundo lugar el de los autores más conocidos. Por último de las editoriales más reconocidas.

Luego de la selección de libros de texto se observarán los lineamientos y estándares curriculares para identificar a cuáles de las propuestas curriculares obedece cada texto, así mismo se elaborarán fichas con los datos fundamentales del libro: título, autores, editorial, año de edición, plan de estudios, y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite.

ANALISIS DE TEXTOS SELECCIONADOS

Se consideraran tres tipos de análisis para cada texto:

a) Análisis conceptual, que se refiere a cómo se define (Tipo de concepción: topológica, métrica, geométrica y aritmética) y organiza el concepto a lo largo del texto (se elaborará un listado de las definiciones y propiedades relacionadas con el límite, numerándolas según su orden de aparición), representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos de los libros de texto que determinan la presentación del concepto (Modo de introducción del concepto: formal, heurístico y constructivo). (Sierra ,1999)

b) Análisis didáctico-cognitivo, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (Duval, 1995).

c) Análisis fenomenológico, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión, en nuestro caso el de límite funcional. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (Puig, 1997).

Análisis conceptual	Análisis didáctico-cognitivo	Análisis fenomenológico
Secuenciación de contenidos Definiciones: tipo y papel que juegan en el texto Ejemplos y ejercicios Representaciones gráficas y simbólicas.	Objetivos e intenciones del autor. Capacidades que se quieren desarrollar. Teorías de enseñanza-aprendizaje	En torno a las propias matemáticas En torno a otras ciencias Subyacente. Fenómenos de la vida diaria

PERFIL DEL TEXTO

Por último nos preocuparemos por la elaboración de un sistema de perfiles prácticos que permitirán clasificar los libros de texto en:

- ✓ **EXPOSITIVO.** Son libros en los que se considera el conocimiento matemático como una acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados, y relativamente inconexos y desconectados de la realidad, pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva, en la que, partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen algunos pocos ejemplos: es una estructura ciertamente prescriptiva. Esta estructura implica, en cuanto a la enseñanza, que los objetivos son conceptuales: incita a la exposición magistral y a la ejercitación repetitiva. Este tipo de libros induce a un aprendizaje de tipo memorístico, en los que importa más la estructura matemática que la comprensión de los conceptos, a pesar del énfasis que se pone en las definiciones y teoremas.

- ✓ **TECNOLÓGICO.** Se conciben las matemáticas como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para pensar sobre los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones. Las distintas ramas de las matemáticas aparecen totalmente desconectadas. A partir de objetivos terminales u operativos, y por medio de una estructura secuencial en la enseñanza, se intenta una ejercitación productiva, proponiéndose para ello numerosas aplicaciones con la intención de dotar de sentido a las distintas reglas. Aunque los procedimientos y conceptos están organizados y estructurados de una forma lógica, se hace más énfasis en la memorización de reglas y la aplicación en ejercicios y problemas.

- ✓ **COMPRENSIVO.** Se conciben las matemáticas como un instrumento para interpretar la realidad entendida ésta en sentido amplio. En este caso se parte de objetivos flexibles, de forma que para conseguirlos se requiere la experimentación, por lo que el tipo de enseñanza adecuada es la realizada por descubrimiento, permitiendo de esta forma la construcción de redes conceptuales. El aprendizaje de las matemáticas se adquiere mediante el establecimiento de una red de relaciones con otros contenidos que pueden ser matemáticos o no, dando así sentido a las matemáticas. Se considera que los conceptos se adquieren partiendo de situaciones propias de la realidad que permiten la construcción de conceptos y reglas.

Los perfiles anteriormente mencionados se pueden sintetizar en la siguiente tabla:

		Perfil		
		Expositivo	**tecnológico**	**Comprensivo**
Saber	Saber	Acumulación de enun-ciados	Lógica de enunciados, reglas y procedimientos	Matemáticas como un instrumento para interpretar la realidad
Profesor	Enseñanza	Incitan a la exposición magistral y a la ejercitación repetitiva	Numerosas aplicaciones con la intención de dotar de sentido a las distintas reglas.	Se adquiere mediante el establecimiento de una red de relaciones con otros contenidos
Estudiante	Aprendizaje	De tipo memorístico, en los que importa más la estructura matemática que la comprensión de los conceptos	Énfasis en la memorización de reglas y la aplicación en ejercicios y problemas.	Situaciones propias de la realidad que permiten la construcción de conceptos y reglas.

A pesar de disponer de un sistema de categorías para poder caracterizar los libros de texto, se hace necesario elaborar otros instrumentos que permitan profundizar en cada uno de los análisis elaborados, por tal motivo se trabajará con unas *dimensiones de análisis* que ayudaran a dar el perfil del cada texto y así se puede expresar si los libros de texto tienen un perfil: Expositivo, tecnológico o comprensivo. Esto se sintetiza en la siguiente tabla, en esta se presentará para cada categoría (análisis conceptual, análisis didáctico cognitivo, análisis fenomenológico) de tres a 5 dimensiones, la lectura horizontal permitirá comparar las tendencias de los diferentes tipos de texto, la lectura vertical permitirá identificar las diferentes dimensiones que se han tenido en cuenta, esto muestra el tipo de análisis realizado.

			PERFIL DEL TEXTO.		
CATEGORIAS	**Nº**	**DIMENSIONES**	**EXPOSITIVO**	**TECNOLÓGICO**	**COMPRENSIVO**
Conceptual	1	Modo de introducción del concepto	Formal	Heurístico	Constructivo
	2	Papel de las definiciones	Teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	3	Estructura de los problemas	Clásica	Aplicación	Explicación
	4	Función de los ejercicios	Usuales	aplicación	deducción
	5	Representaciones gráficas y simbólicas	Visualización	Construcción.	Interpretación
Didáctico - cognitivo	6	Enseñanza	Ejercitación repetitiva	Sentido a las distintas reglas.	Red de relaciones con otros contenidos
	7	Aprendizaje	Memorístico	Memorístico y aplicación	Construcción de Conceptos y reglas.
	8	Propuestas curriculares.	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	9	Capacidades que se intentan desarrollar	Memorizar y prácticar resolviendo ejercicios	Dotar de sentido a las distintas reglas	La conexión de la realidad y con otras ciencias
Fenomelógico	10	Entorno a las propias matemáticas	Matemáticas-formales	Matemáticas-Razonables	Matemáticas- Existentes
	11	Entorno a otras ciencias	No hay	En torno a la tecnología	Si hay
	12	Fenómenos de la vida diaria	No hay	Aplicación	Interpretación

Para dar un perfil de cada texto se completara la tabla anterior para cada texto, indicando con una "x", respecto a cada dimensión, en la casilla correspondiente. El texto quedara clasificado en la columna en que aparezca mayor número de "x"

Este último aspecto es el propósito del trabajo que aquí se presenta, además, desarrollar un instrumento de análisis de las secuencias didácticas de libros de texto de matemáticas, en relación con el concepto de límite que posibilite, disponer de unos indicadores relativos a la metodología de enseñanza en cada texto

CAPITULO UNO

MARCO TEORICO

1.1 INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo pretendemos describir algunos planteamientos que dan pautas al desarrollo del trabajo de grado, en un primer momento nos preocupamos del papel importante del texto en el aula de matemáticas, de igual forma se nombran algunas investigaciones relacionadas con el análisis de texto, ya sea en otras ciencias o en matemáticas, esto con el fin de dar sustento a este trabajo, posteriormente se mencionarán algunas investigaciones acerca del concepto de límite, luego se definen lo que es una concepción, así mismo las concepciones identificadas al concepto de límite según Sánchez Gómez, C y Contreras de la

Fuente (1998), Ana Cecilia Medina (2002), por último se definen las dimensiones para el análisis, estas dimensiones permitirán elaborar el perfil del texto, ya sea expositivo, tecnológico o comprensivo.

1.2. MARCO TEORICO.

1.2.1. LA IMPORTANCIA DEL TEXTO EN EL AULA DE MATEMATICAS.

La utilización de los libros de texto es una de las principales vías de transmisión de la ciencia escolar en nuestras aulas. Para este fin, la realidad viene a demostrar que el libro de texto es el medio más ampliamente usado y aceptado por los miembros de la comunidad educativa (profesores, estudiantes y padres) MaríaTeresa Astudillo (2003).

La implementación del libro de texto en el aula de matemáticas se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación hasta nuestros días, ejerciendo para ello diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver. González Astudillo, M. Teresa y Sierra Vázquez, Modesto (2004).

En consecuencia se ha originado una práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad.
Los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos. (Schubring, 1987).

En los últimos años varios investigadores se han Interesado por relacionar el aprendizaje de los estudiantes con los libros de texto, realizando algunos estudios de tipo general de forma que pudieran aplicarse a todas las áreas; pero son muy pocos los que se han ocupado del área de matemáticas. Por tal motivo es importante mencionar algunos de los autores e investigadores que han considerado dentro de sus trabajos el análisis de texto.

Entre los investigadores en educación matemática que, han trabajado en torno al libro escolar, cabe destacar a Schubring (1987), que considera que el análisis de textos de matemáticas permite: extraer información sobre difusión y evolución de los saberes en una época determinada, interpretar fenómenos que tienen relación con los procesos de enseñanza-aprendizaje (representación, concepciones, aplicaciones, entre otras).

Dormolen (1986) hace una clasificación de los elementos que son imprescindibles en un libro de texto de matemáticas, Lowe y Pimm (1996) consideran que hay una tétrada asociada a un libro de texto: el lector, el escritor, el profesor y el mismo libro y que las características de cada uno de ellos, así como sus interacciones determinan el uso de este material en el aula.

Radford (1997) y Otte (1997) consideran que es la actividad social la que determina el conocimiento y según Fisher (1988), se puede decir que la matemática es un constructo social que tiene sus raíces no sólo en el pensamiento individual, sino en las interacciones de las personas.

Chevallard (1985); Chevallard y Joshua, (1982) afirman que la forma de hacer matemáticas en las aulas depende en gran medida de un contexto más amplio en el que está inmersa dicha enseñanza y que es el que determina las formas culturales de un determinado país. Hay que destacar los trabajos de Chevallard, en los que se utiliza la noción de transposición didáctica relativa a las transformaciones entre el saber sabio y el saber enseñado y entre los que existe un escalón intermedio correspondiente al saber a enseñar que se refleja en el texto cuyo contenido y estructura reflejan esas transformaciones del “saber sabio”.

Schubring (1987, p. 47), afirma que el análisis de los libros de texto constituye un instrumento muy útil cuando se busca estudiar los significados institucionales y los conflictos semióticos inherentes a este momento de la transposición didáctica o, como denomina de los procesos de elementarización. Este texto es lo que el profesor piensa que tiene que enseñar una vez que se han publicado las reformas, estándares, lineamientos, orientaciones y se ha fijado la interpretación del currículo a través de diversos proyectos de aula.

La caracterización de un libro de texto exige disponer de instrumentos adecuados a los objetivos de la investigación. Cuando éstos son muy generales o se persigue una descripción muy amplia, es frecuente utilizar variables de análisis complejas que introducen juicios inevitablemente subjetivos. (Parcerisa 1996); Del Carmen y Jiménez, 1997).

González Astudillo, M. Teresa y Sierra Vázquez, Modesto (2004). El interés del análisis sobre libros de texto parte de la hipótesis de que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos, lineamientos, estándares y algunas órdenes ministeriales, como por los libros de texto utilizados en el aula. La producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas en uso.

Sierra, González y López, (1999). Los libros de texto hacen que su estudio aporte gran información tanto acerca de las concepciones en relación con el contenido matemático que desarrollan como acerca del proceso educativo con el que están relacionados.

Schubring (1985,1987), justifica el uso de los libros de texto como instrumento de análisis de la enseñanza en las aulas, al afirmar: *"…Un medio tradicional para el estudio del desarrollo de la enseñanza es el análisis de los programas. Pero éstos,* *que son instrumentos de una política centralista del Estado, pueden únicamente servir para analizar los significados dominantes sobre los contenidos que deben enseñarse, sobre su secuenciación y sus métodos a aplicar. No pueden dar ninguna indicación sobre los contenidos y los métodos realmente puestos en práctica en las clases…".*

En conclusión podemos decir que el contenido y la intencionalidad de los libros de texto han sufrido importantes modificaciones con el tiempo. Como señala Bachelard (1948, pp. 28-29), en el siglo XVIII los libros hablaban de la naturaleza, de la vida cotidiana, con un lenguaje accesible al lector. Sin embargo, los libros de este siglo se han vuelto autosuficientes, ellos hacen las preguntas y las responden, se prestan a presentar la matemática como algo organizado y elevado por encima de los conocimientos e intereses del lector.

Esta renovación de los libros de texto bajo una visión constructivista, tendiendo a considerar los conocimientos espontáneos de los lectores y presentando el contenido matemático conectado con el contexto permite al lector la familiarización del concepto con su entorno.

1.2.2. ALGUNAS INVESTIGACIONES SOBRE EL TRATAMIENTO DIDÁCTICO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS

Robert (1988), estudió los ejercicios propuestos en los libros de texto de Matemáticas, indicando que: *"Un análisis completo de ejercicios y de su previsible papel en la adquisición de conocimientos no puede realizarse sin tener en cuenta el contexto general y la organización de la enseñanza impartida."* y proponiendo diversas categorías de análisis según el tipo de conocimiento que son capaces de movilizar en el alumno.

Kang y Kilpatrick (1992), estudiaron los libros de texto de Matemáticas desde el modelo epistemológico de la transposición didáctica, afirmado que: "*Un libro de texto de Matemáticas es un modo de conservar el conocimiento matemático. Es decir, es un punto de encuentro esencial en el camino de las transposiciones didácticas en las matemáticas escolares. Proporciona un recurso, por medio del cual pueden ser investigados aspectos de la transposición didáctica"* aunque señala limitaciones ligadas al hecho de que el conocimiento depende del entorno didáctico en el que se desarrolla, no siendo estable, por tanto, la forma de dicho conocimiento matemático en el texto.

Morgan (1996), realiza una aproximación lingüística a los libros de texto de Matemáticas distinguiendo unos de otros según varias categorías.Love y Pimm (1996), sostienen que: *"...la idea de que el libro de texto para el estudiante pueda verse como una transposición de los textos matemáticos "reales", se ha de rechazar"*. Consideran la noción de transposición didáctica como una concepción de las dependencias y relaciones entre escritos matemáticos educativos. Citan a Freudhental (1986) para señalar la complejidad de la relación y la dificultad para indicar desde qué "altura" las Matemáticas (saber sabio) contienen la matemática escolar particular (saber enseñado) que es supuestamente transportada.

En Schubring (1997), se critica la tendencia de la historiografía a centrarse en el análisis de textos de eminentes matemáticos. En Contreras y otros (1999) se realiza un estudio de libros de texto de primer curso de Universidad y Bachillerato-LOGSE en cuanto a las concepciones y obstáculos, los ejemplos y la introducción respectivamente, estableciendo en cada caso diversas categorías.

En Ordóñez y Contreras (2003), se realizó un estudio de los libros de texto de primero y segundo de Bachillerato-LOGSE, respecto al concepto de integral definida, donde se expusieron diversas dimensiones y algunos ejemplos.

1.2.3. INVESTIGACIONES ASOCIADAS AL CONCEPTO DE LÍMITE, ANÁLISIS DE TEXTOS.

En una primera aproximación a algunos documentos (informes de investigación, artículos de divulgación, libros, etc.) consultados durante el período de diseño del proyecto de grado se construyó una primera clasificación de los mismos, la cual atiende esencialmente al objeto de estudio. De esta forma se describieron aproximadamente cuatro grupos así:

Metodología de investigación 1.

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE FUNCIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO Y CURSOS DE ORIENTACIÓN UNIVERSITARIA (CUN): 1940 A 1995. MaríaTeresa Astudillo y Modesto Sierra ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 1999, 17 (3), 463-476

En la investigación Se realiza un análisis de libros de texto estudiando los cambios que se han producido a lo largo de más de cincuenta años en un concepto clave para la enseñanza del análisis como es el de *límite funcional*. Para esta investigación se usaron diversas ediciones de algunos de los libros analizados, su comparación con otros libros del mismo periodo y su relación con los programas oficiales de aquel momento, estos proporcionaron los datos esenciales para concretar cuál ha sido la evolución de dicho concepto. Esto se lleva a cabo realizando tres análisis claves como:

Análisis conceptual: como se define y organiza el concepto a lo largo del texto.

Análisis didáctico cognitivo: se refiere a la explicación de los objetivos.
Análisis fenomenológico: se caracteriza por los fenómenos que se dan en torno a la vida, otras ciencias y propia matemática.

En síntesis se analizaron manuales de Matemáticas, correspondientes a tres periodos relevantes de los planes de estudios de Bachillerato y COU, según diversas categorías de análisis: conceptual, didáctico cognitivo y fenomenológico, en torno a los conceptos de límite y continuidad.

Metodología de investigación 2.

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS. LOS PUNTOS CRÍTICOS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA EN ESPAÑA DURANTE EL SIGLO XX González Astudillo, M. Teresa y Sierra Vázquez, Modesto ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 2004, 22(3)

En este artículo se analiza la presentación que hacen los libros de texto de los contenidos relativos a los puntos críticos. En un primer momento se realizó una selección de libros de texto teniendo en cuenta los autores más famosos o las editoriales más sobresalientes en cada uno de los periodos.

Dada la magnitud de manuales encontrados y teniendo en cuenta investigaciones anteriores realizadas por ese grupo investigador, se realizo una selección más afinada procurando que la pérdida de información en relación con la cantidad de libros fuera mínima. En la investigación establecieron que los libros se pueden clasificar, dentro de cada uno de los periodos, en tres grupos según las orientaciones que dan a los conceptos de análisis matemático, por lo que se eligió un libro de cada uno de dichos grupos que representa a otros que son similares. Estos grupos vienen caracterizados por:

- ✓ Segir las orientaciones establecidas en el periodo anterior;

- ✓ Ser fieles a las orientaciones y normativas del periodo al que pertenece;
- ✓ Ser precursores de nuevos métodos y formas de entender la enseñanza de las matemáticas.

Metodología de investigación 3.

ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS EN TORNO AL OBJETO DE LÍMITE DE FUNCIÓN: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL ANÁLISIS Espinoza, Lorena y Azcárate, Carmen ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 2000, 18 (3), 355-368

La secuencia de pasos que se siguieron para el propósito de la investigación es la siguiente:

Análisis de los libros de texto: antecedentes para la Investigación.

Este trabajo fue motivado en gran parte por los resultados obtenidos en la tesis de maestría (Espinoza, 1994; Espinoza y Azcárate, 1995) previamente realizada sobre la enseñanza del concepto de límite en secundaria. Se trataba de un estudio experimental en el cual comenzaron a introducir los elementos teóricos del enfoque antropológico que por entonces se conocían. De ahí que el análisis de la organización matemática en torno a los límites de funciones realizado en dicho trabajo fuera ampliamente mejorado en esta investigación. Para efectuarlo, se analizaron primero los programas oficiales en torno a este concepto por entonces vigente. Posteriormente, se escogió una muestra de cuatro libros de texto,

Búsqueda y recogida de información: para tal efecto se tomaron los siguientes aspectos:

- ✓ cintas de vídeo de todas las sesiones de clase;
- ✓ observaciones de campo de cada clase;

- ✓ entrevista grabada en casete del profesor antes de empezar el tema;
- ✓ dispositivo didáctico utilizado por el profesor.

Recogida y material de los estudiantes:

- ✓ apuntes de clase de los estudiantes;
- ✓ exámenes sobre el tema de límites de funciones;
- ✓ respuestas al cuestionario elaborado por el investigador.

Metodología de investigación 4

CONCEPCIONES HISTÓRICAS ASOCIADAS AL CONCEPTO DE LÍMITE E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS *Ana Cecilia Medina M* TECNE EPISTEME Y DIDAXIS REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA U.P.N Número 9 Año 2001

Este estudio interpretativo y descriptivo pretende analizar las concepciones que manifiestan los estudiantes universitarios acerca del concepto de límite para determinar factores que obstaculizan o favorecen la comprensión del concepto.
Se desarrollo bajo el enfoque sistémico, le implicó hacer un análisis histórico-epistemológico, didáctico y cognitivo en relación con el concepto de límite.

Para este análisis cognitivo se tomó el texto Leithod sexta y séptima edición, con el cual se trató de mirar la secuencia de contenidos, tipo de definición, ejemplos y ejercicios.

Contienen la perspectiva teórica que orientó el desarrollo del trabajo, el proceso investigativo y los resultados del análisis epistemológico, didáctico y de las concepciones y modelos de límite que expresan los estudiantes. Se presentan las conclusiones generales, junto con algunas reflexiones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite.

En conclusión para hacer un análisis de un libro de texto se deben tener en cuenta dos aspectos:

1. Si se van a analizar los aspectos de tipo lingüístico las categorías más apropiadas serían: sintáctico, semántica, pragmática.
2. Si se pretende realizar un análisis con aspectos sobre el contenido cómo están estructurado y secuenciado, qué aspectos se enfatizan, las categorías más convenientes son: conceptual, didáctico-cognitivo, fenomenológico.

Por lo tanto nuestro análisis se enfatiza en el segundo aspecto, ya que la idea es tratar de observar la estructura didáctica de los textos seleccionados, para tal fin se debe definir las concepciones asociadas a la educación matemática y especialmente las concepciones asociadas al concepto de límite.

1.3. CONCEPTOS Y CONCEPCIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Existen representaciones mentales, conjunto de imágenes, conceptos, nociones, ideas, creencias, concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que esté asociado a dicho objeto. *"Permiten una mirada del objeto en ausencia total de est*é". Las representaciones mentales están ligadas a la interiorización de representaciones externas, de la misma manera que las imágenes mentales lo están a una interiorización de los preceptos. (Kline, 1992)

Los términos 'concepto' y 'concepción' se utilizan con frecuencia en la investigación en didáctica de la matemática para describir los conocimientos de los sujetos, incluso también, para designar razones de tipo institucional. Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999).

Sfard (1991) usa la palabra 'concepto' (a veces sustituida por "noción") para referirse a "una idea matemática en su forma 'oficial' - como un constructo teórico dentro "del universo formal del conocimiento ideal". Por el contrario, el término "concepción" designa "al moldeado completo de representaciones internas y asociaciones recordadas por el concepto.

Tanto para los conceptos como para las concepciones Sfard (1991) propone distinguir dos tipos de descripciones una operacional y la otra estructural, a las cuales atribuye una complementariedad mutua. Juan D. Godino (1994) establece que el concepto puede verse como un objeto abstracto, con una cierta estructura descrita mediante definiciones estructurales; esto lleva a considerarlo como una cosa real o una estructura estática que existe en algún lugar del espacio y del tiempo. Esto supone reconocer la idea a primera vista y a manipularla como un todo, sin especificar los detalles.

En la descripción que hace Artigue (1990) se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción: el punto de vista epistémico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento, que viene a corresponder al concepto según lo describe Sfard) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular).

En las últimas décadas han puesto énfasis en el estudio de las concepciones acerca de los diferentes objetos de conocimiento como punto de partida de la enseñanza, debido a que sostienen que para que el aprendizaje sea significativo es necesario partir de las concepciones e interactuar con ellas a fin de identificarlas, siendo esto último lo más simbólico de cada uno de las publicaciones realizadas, se pretende generar de igual manera un estudio que tenga como finalidad reconocer e identificar cada una de las concepciones que se refieren al trabajo del límite en los textos de la educación media.

1.3. CONCEPCIONES IDENTIFICADAS EN LA NOCIÓN DE LÍMITE

Las teorías del aprendizaje desarrolladas en las últimas décadas han puesto énfasis en el estudio de las concepciones de los estudiantes acerca de los diferentes objetos de conocimiento como punto de partida de la enseñanza, debido a que sostienen que para que el aprendizaje sea significativo es necesario partir de ellas e interactuar con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas. En ocasiones, las concepciones pueden, además, interferir en la adquisición de un nuevo conocimiento

1.4. CONCEPCIONES LIGADAS A LA NOCIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

1.4.1. CONCEPCION GEOMETRICA.

Está relacionada con situaciones ligadas al contexto geométrico y tienen su génesis en el origen de las matemáticas, cuyo énfasis fue geométrico, por ejemplo, la aproximación de las áreas de polígonos inscritos en un círculo según se aumenta su número de lados, en esta concepción se han considerado tres subcategorías de concepciones correspondientes a tres épocas:

CONCEPCION GEOMETRICA RIGUROSA EUDOXO EUCLIDES.
Antigüedad Griega época clásica. (S. VI a. C, hasta el S. III a. C.

El paso al límite no es una operación matemática sino que está oculta en el método de exhaución para probar ciertas relaciones entre magnitudes. (Sierpinska, 1987).

CONCEPCIÓN GEOMÉTRICA HEURÍSTICA - RIGUROSA – ARQUÍMEDES.

Época Greco – Alejandrina (S. III a. C. – S II)

El pasó al límite esta implícito en el método heurístico de “aproximaciones sucesivas” que conduce a hallazgos gracias a la intuición geométrica y conocimiento sobre mecánica

CONCEPCION GEOMÉTRICA HEURÍSTICA DE APROXIMACIÓN INFINITA - CAVALIERI – KEPLER

Renacimiento primeras versiones de métodos infinitesimales.

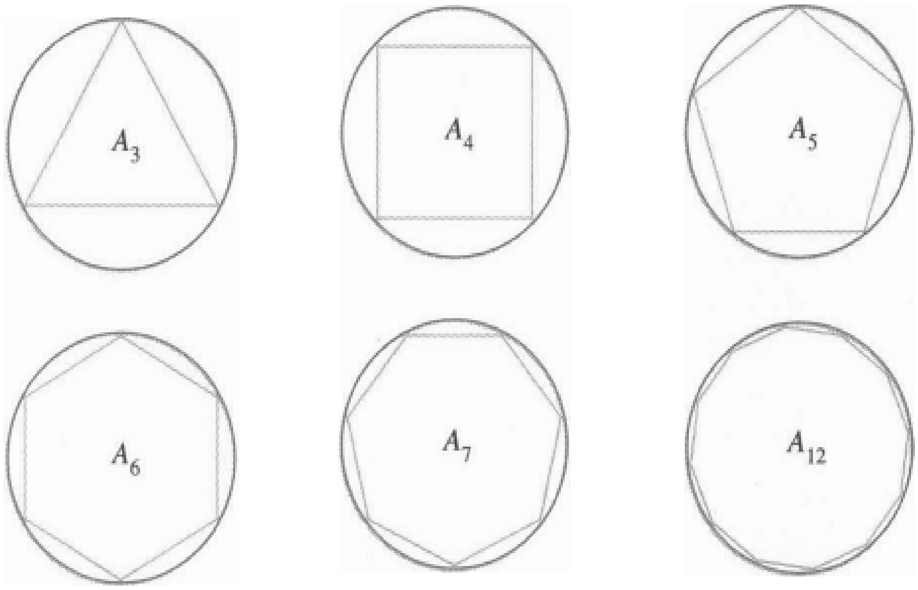
El paso al límite no es una operación matemática, pero está Implícito en un método heurístico que permite la búsqueda de lo que no conocemos más que aproximaciones.

En conclusión en esta concepción el límite se aplica a magnitudes geométricas como áreas, volúmenes, superficies barridas, ángulos de rotación. En la época griega se considera como una aproximación de procesos infinitos geométricos, dada por la Intuición geométrica o espacial

Ejemplo:

Si A_n es el área del polígono inscrito de n lados, cuando n aumenta, el valor de A_n se hace más y más cercano al del área del círculo. Por eso, afirmamos que el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos inscritos, y escribimos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n ;\ n \geq 3$$



1.4.2. CONCEPCIÓN NUMÉRICA – ARITMETICA.

Concepción numérica, ligada a la utilización de valores de la variable independiente y las correspondientes a la variable dependiente

El límite se refiere a una "variable numérica dinámica". Se pasa de límite de una "cantidad variable" a límite de una variable numérica dinámica, como cantidad que se considera, tiene que tomar sucesivamente muchos valores unos de los otros (Cauchy). La definición de límite de Cauchy al no mencionar la variable independiente se ha interpretado como la definición de límite de una sucesión. El límite *es* una nueva operación aritmética y representa un número, el cual una variable puede alcanzar o no.

Ejemplo:

En la función $f(x) = (x-2)^2$ cuando el valor de x tiende a 2,

¿Hacia dónde tiende el valor de $f(x)$?

Para contestar a esta pregunta, se construye una tabla dándo a x valores próximos a

2, tanto mayores como menores que él, y calculamos los respectivos valores de la función.

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	1	0,25	10^{-2}	$1o^{-4}$	10^{-6}	?	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	0,25	1

$x < 2$ x se acerca a 2 por la izquierda y x *se acerca a* 2 *por la derecha* $x > 2$

Si observamos que cuando nos acercamos a 2 tanto por derecha como por izquierda la, función f(x) tiende a cero.

De igual forma consideremos ahora el concepto de límite de una **sucesión de números reales**. Una tal sucesión es, técnicamente hablando, una función con valores reales definida sobre un conjunto

$$I = \{m, m+1, m+2, m+3, \ldots\},$$

Donde m es un entero no negativo. Denotemos por x_n a la imagen de *n* bajo tal función. Nos referiremos a tal número real como al n-ésimo término de la sucesión.

Aunque la sucesión considerada es, por definición, una función, en la práctica consideramos como tal, justamente al conjunto de valores producidos por la función. Notaremos mediante

$$\{x_n\}_{n-m}^{\infty}$$

a la sucesión considerada arriba.

Intuitivamente hablando, el límite, si existe, de la sucesión en cuestión, es un número real *L* si "a medida que *n* va creciendo", los términos de la sucesión (para esos valores crecientes de *n*) se "acercan" a *L*. La formalización de tal hecho implica el uso de las propiedades "métricas" del conjunto de los números reales, esto es la consideración de tal conjunto como un espacio métrico, es decir que para *n* "suficientemente grande" (a partir de un cierto término) se puede hacer que la distancia, $|x_n - L|$ sea tan "pequeña" como se quiera. Esto último significa que tal distancia puede hacerse siempre menor que cualquier número positivo (el famoso epsilón), no importa que tan pequeño sea tal número, escogiendo *n* mayor (o igual) que un cierto valor entero $n_0 \geq m$. Se llega así, a la formalización del concepto de límite de una sucesión real:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

Si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero $n_0 \geq m$, tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

De aquí a la definición de límite de una sucesión en un espacio métrico arbitrario (una función como la considerada antes pero con valores sobre el espacio métrico) hay una generalización directa, considerando ahora la distancia $d(x_n, L)$ en lugar de $|x_n - L|$ que es su forma específica en el espacio métrico específico de los reales con la métrica del valor absoluto

Ejemplo:

Para la siguiente sucesión

$$x_n = \left\{ \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n} \right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

1.4.3. CONCEPCION ANALÍTICA O MÉTRICA.

Relacionada con la introducción de las variables lógicas ε, δ .

En principio, la idea de límite está ligada a nociones métricas. Intuitivamente se dice que una cierta variable real tiende a un valor determinado, digamos *L*, lo que quiere decir que tal variable toma valores "cercanos" a *L*. Tal "cercanía" lleva implícita la noción de distancia. En nuestro caso, tal distancia entre números (los valores de la variable y el límite) es interpretada como distancia entre puntos de un cierto conjunto de naturaleza geométrica: la recta euclídea, por ejemplo. A partir de la introducción de un sistema de coordenadas unidimensional se logra la identificación de los puntos de tal recta con números reales, y viceversa. La distancia entre puntos de la recta puede entonces expresarse en términos de los reales correspondientes según tal identificación (las coordenadas de los puntos). El beneficio es mutuo: el conjunto de los reales puede entonces dotarse de una métrica o distancia. Para reales x, y tal distancia se define como $d(x, y) = |x - y|$.

Con tal distancia o métrica, el conjunto de los reales es un espacio métrico. Una primera aproximación a una definición de tales espacios es, entonces, la de considerarlos como "conjuntos en los cuales es posible medir distancias entre sus puntos". Formalmente hablando, un espacio métrico es un conjunto con una función d que asigna a cada par (x, y), de sus elementos un número real no negativo (la distancia entre tales elementos) $d(x, y)$. Por supuesto, tal función debe satisfacer ciertos requisitos los cuales son extraídos de las propiedades básicas del valor absoluto (o, si se quiere, de algunas nociones intuitivas que de "distancia" se tienen). No nos referiremos a tales requisitos aquí. Dado que tal función distancia da la estructura métrica al conjunto, al hablar de espacio métrico hacemos referencia no solo al conjunto (como reserva o colección de puntos) sino también, y fundamentalmente, a la estructura suministrada por la métrica.

MODELOS DE LÍMITE EN LA CONCEPCIÓN ANALÍTICA

- ✓ El límite se refiere a una función en un punto determinado del dominio.
- ✓ El límite se aplica a funciones asumidas como correspondencias arbitrarias donde prima el invariante “unicidad” de función y se manejan variables

estáticas. Para formalizar el concepto de límite, hubo que precisar los conceptos de función , número real y aceptar el infinito actual y así poder establecer y encapsular procesos infinitos en el dominio y la imagen de la función mediante la definición formal de $\varepsilon - \delta$.

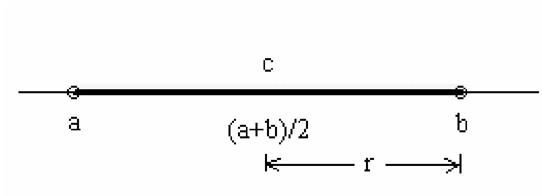
LA CONCEPCIÓN ARITMÉTICA, ANALÍTICA RIGUROSA ESTÁTICA WEIERSTRASS.

"L es el límite f en $x = a$ *, si* $\forall \varepsilon > \delta, \exists \delta > 0$ *, tal que* $|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$ *"*

En esta definición se excluyen las expresiones dinámicas que dan la idea de variabilidad continua y de aproximación y los procesos infinitos los cuales son encapsulados mediante el uso del valor absoluto y operaciones y relaciones en R. La noción de aproximación como diferencia o medida entre valores numéricos, queda reemplazada por la de "métrica" que define la distancia entre dos números reales como el valor absoluto de su diferencia. De la noción de "cercanía" vista como "medida" (longitud de segmento) se pasa a la noción de distancia como "métrica" El Límite es el objeto creado por la coordinación de dos procesos Infinitos.

1.4.4. CONCEPCIÓN TOPOLÓGICA

La concepción topológica. es la definición más general y en la que se utiliza el concepto de punto de acumulación. Los intervalos abiertos de longitud finita (es decir, representables geométricamente por segmentos de recta que no incluyen sus puntos extremos) son conjuntos de reales (o puntos, si se quiere) que pueden describirse en términos de la distancia a un punto fijo. Así, un intervalo (a, b) puede definirse como el conjunto de todos los reales cuya distancia a $c = \frac{a+b}{2}$ (el "centro" del intervalo) es menor que $r=\frac{b-a}{2}$ (el "radio" del intervalo). Gráficamente lo anterior se puede representar como:



La generalización de tal concepción lleva a la definición de **bolas abiertas** (centradas en un punto y con un determinado radio) en espacios métricos arbitrarios. En tales espacios un **conjunto abierto** es un conjunto que se obtiene mediante uniones (finitas o infinitas) de bolas abiertas. Las propiedades esenciales de tales conjuntos (la unión de cualquier familia, así como las intersecciones finitas, de conjuntos de esa clase son de la misma clase, y el conjunto soporte de la estructura, así como el conjunto vacío son abiertos) permiten independizar la noción de abierto de la estructura métrica dando origen a una generalización mediante el concepto de **topología** como una colección T, de subconjuntos de un conjunto dado, colección cuyos elementos gozan de las propiedades ya indicadas para los conjuntos abiertos. El resultado es una estructura conocida como **espacio topológico**.

Así, los espacios métricos tienen también una estructura topológica, mediante la topología inducida por la métrica (los abiertos son uniones de bolas abiertas). En ese sentido, la misma definición de límite, vista en términos de bolas abiertas (intervalos abiertos, en el caso real) admite reescribir la definición en los siguientes términos (topológicos, pero aún ligados a la noción de métrica):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

Si y solo si toda bola abierta (intervalo abierto, en el caso real) centrada en *L* (de radio epsilón) contiene a todos los términos de la sucesión a partir de un cierto término (el correspondiente a n_0). Puesto que todo conjunto abierto (en la topología inducida por la métrica) que contenga a *L*, contiene una bola abierta centrada en tal punto, podemos también afirmar:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

Si y solo si, todo abierto que contenga a L(toda vecindad de L) contiene a todos los términos de la sucesión a partir de un cierto término (el correspondiente a n_0).

En la última afirmación eliminamos cualquier referencia a la métrica, dejando libre la vía hacia una definición de límite de sucesiones en espacios topológicos. La existencia o no de una métrica que induzca la topología correspondiente, es decir, el hecho de que el espacio sea o no metrizable, es ahora irrelevante en cuanto a la definición, aunque la no metrizabilidad del espacio puede producir resultados insospechados (por ejemplo, la unicidad del límite no está garantizada en espacios topológicos generales).

$$f:(a,+\infty)\to R,$$

Cuando la variable real x crece indefinidamente. Ahora la variación de x es continua, recorriendo valores no solo enteros. Sin embargo, la definición correspondiente sigue la línea de la definición para una sucesión real. Así, si existe un real L tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante positiva K tal que $|f(x)-L| < \varepsilon$ Siempre que $x \geq K'$, se tiene entonces que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

Para el caso en que x tiende hacia un punto de acumulación, c, del dominio de una función real de variable real *f*, nuevamente la estructura métrica de los reales permite definir el límite, si existe, en términos de distancia. Concretamente, si $f: L \to R$ es una función real, siendo I un intervalo abierto, y c un punto interior de I, la expresión "x tiende hacia c", significa que x toma valores sobre un intervalo abierto centrado en c y con radio muy pequeño, de forma que está contenido en $f:(X,r)\to(Y,r')$. Esto a su vez quiere decir que la distancia de x a c se toma suficientemente pequeña. Si el límite de la función, en ese caso, existe, entonces la distancia de $f(x)$ a L (el límite de la función) es también pequeña. Nuevamente, como en el caso del límite de sucesiones, expresamos esto diciendo que la distancia de $f(x)$ a L puede hacerse tan pequeña como se quiera, escogiendo x " suficientemente cerca" de c. Así, llegamos a la definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ Si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$ con x en I.

Las generalizaciones a funciones sobre espacios métricos y topológicos constituyen una "interpretación" de la misma definición en los correspondientes términos (métricos y topológicos, respectivamente). En el primer caso, tenemos que si f es una función entre espacios métricos (X,d) y (X',d'), entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$ Si, y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $d'(f(x), L) < \varepsilon$, siempre que $d(x,c) < \delta$. Para el segundo, se tiene que si f es una función entre espacios topológicos, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *Si, y solo si*, para todo abierto $G \in$ r$'$, con $L \in$ G, existe un abierto $U \in$ r o con $c \in$ U, tal que $f(x) \in$ G siempre que x esté en U.

Como en el caso de sucesiones, cualquier referencia a propiedades métricas ha sido eliminada en la última definición. En ese sentido expresiones como "tender a" (un punto de un cierto espacio) no pueden ser interpretadas siempre en términos de distancias pequeñas, sino como pertenecer a ciertos conjuntos que arbitrariamente se consideran como conjuntos abiertos. De hecho, en espacios no metrizables, como se dijo antes, tal noción de distancia es inexistente. Esto muestra porqué en ciertos niveles de abstracción el exclusivo recurso a la intuición puede llevar a conclusiones erróneas.

1.5. DEFINICIONES PRELIMINARES

1.5.1. MODO DE INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO. (FORMAL, HEURISTICO Y CONSTRUCTIVO)

Formal.

Hace referencia a los axiomas, las definiciones y teoremas como expresiones formales que se ensamblan a partir de símbolos, que son manipulados o combinados de acuerdo con ciertas reglas o convenios preestablecidos. En la actividad matemática, una vez fijados los términos iniciales y sus relaciones básicas, ya no se admite nada impreciso u oscuro; todo tiene que ser perfecto y bien definido, las demostraciones tienen que ser rigurosas, basadas únicamente" en las reglas del juego deductivo respectivo e independiente de las imágenes que asociemos con los términos y las relaciones. (Lineamientos curiculares ,1998)

Heurístico

La heurística existe desde la Grecia antigua, un estudio importante relacionado con la heurística en matemáticas es el trabajo pionero de George Polya (1887-1985) el cual desarrolla una teoría heurística para la resolución de problemas en matemáticas y da descripciones detalladas de varios métodos heurísticos, o estrategias que guían el descubrimiento y fortalecen el conocimiento.

Para este trabajo se destaca la heurística que se refiere a cosas concretas como estrategias, reglas, silogismos y conclusiones.

Constructivo

En matemáticas lo constructivo se interesa por las condiciones en las cuales se realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y la aplicación que les da; todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta que el maestro haya hecho las construcciones mentales, cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar. (Lineamientos curiculares ,1998)

La visión constructivista implica ciertamente que la adquisición de conocimientos y de habilidades, es un proceso activo en el sentido que requiere de un procesamiento cognitivo por parte de los estudiantes (Shuell, 1992).

Ello significa que los estudiantes no son recipientes pasivos de la información, sino activos constructores de sus conocimientos y habilidades (Cobb, 1994; De Corte, 1990; Glaser, 1991).

1.5.2. PAPEL DE LAS DEFINICIONES (TEÓRICAS, APLICACIÓN A PROBLEMAS, INTERPRETACIÓN)

Una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas es considerar que, en las primeras, los objetos se describen, mientras en las segundas, se definen. En ambos casos se utiliza el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, sea matemático, sea del mundo externo y para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Pero en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial) mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Se puede decir que para adquirir un concepto matemático se debe realizar un esquema conceptual del mismo. Saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza comprender su significado, pero cuando se efectúa una buena comprensión del concepto se pueden asignar: imágenes mentales, propiedades, procedimientos y experiencias.

La mayoría de los libros de texto y algunas clases de matemáticas parecen basarse en que los conceptos se adquieren mediante su definición y que los estudiantes utilizaran las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas. Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa *"Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos".*

Por tanto los autores de libros de texto y muchos profesores dan por hecho que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y realización de tareas son éstas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso.

Definiciones teóricas

En ellas se establece el significado de un término nuevo en un contexto teórico y bastante abstracto que queda por lo tanto descontextualizada. Esto se puede simplificar en la secuencia: definición- ejemplos- ejercicios.

Definiciones aplicación a problemas

Son definiciones en las cuales se explica la necesidad del nuevo concepto, Así mismo suelen analizar los problemas y cuestiones planteadas utilizando los conocimientos teóricos disponibles, es importante señalar que además las nociones han sido ampliamente estudiadas. Esto se puede simplificar en la secuencia: Ejemplos – definición – ejemplos – propiedades – ejercicios.

Definición de Interpretación

En este caso las definiciones provienen de ejemplos de la vida real, que muestran la necesidad del concepto objeto de estudio, estos se utilizan para reforzar la definición formal previamente establecida. Se rompe la secuencia ejemplo - definición - propiedades - ejercicios, convirtiéndola en presentación de diversos fenómenos - análisis de estos fenómenos - introducción del concepto organizador - nuevos fenómenos - ejercicios.

1.5.3. FUNCIÓN DE LOS EJERCICIOS (USUALES, APLICACIÓN, DEDUCCIÓN)

Ejercicios usuales

Se toman los ejercicios usuales como aquellos donde se enfatiza en la práctica o la aplicación de conocimientos relacionados (definiciones, axiomas, teoremas, entre otros). Además se caracterizan por ser una práctica algorítmica y dependiente de ejemplos anteriormente expuestos en el desarrollo del tema, de igual forma se tendrán muy en cuenta los ejercicios o problemas relacionados con las demostraciones.

Ejercicios aplicación

Se definen los ejercicios de aplicación como aquellos que son utilizados para la enseñanza/aprendizaje de un contenido cuyo objetivo es el avance en la capacidad de resolución de problemas.

Ejercicios deducción

Los ejercicios de deducción son aquellos que se enfatizan en la enseñanza/aprendizaje de estrategias utilizadas en la resolución de problemas, y en el proceso de reflexión y discusión. Suponen un procedimiento sencillo y al alcance de los estudiantes para llegar a la matematización de situaciones de la vida diaria y son el campo donde los estudiantes ensayan y practican la aplicación del lenguaje matemático (Martínez Montero, 2000).

1.5.4. ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS (CLÁSICA, APLICACIÓN, EXPLICACIÓN)

Estructura clásica

Estos problemas se caracterizan por ser cerrados, es decir, son fácilmente solucionados mediante la utilización de determinados algoritmos. Por lo tanto son problemas para reforzar y aplicar la teoría.

Estructura aplicación

Estos problemas se caracterizan por enfatizar en cálculos destinados al logro de destrezas algorítmicas y aplicación de reglas, para que el estudiante elija y valore las herramientas más adecuadas en su solución y cuyo objetivo es despertar el interés o que suponga un reto, siempre apoyándose en conocimientos ya adquiridos. Además utiliza procedimientos esenciales en la solución de problemas como:

- ✓ Propuesta de soluciones
- ✓ Diseño de estrategias,
- ✓ Comprobación de hipótesis,
- ✓ Análisis de resultados.

Estructura de explicación

Estos problemas se caracterizan por ser abiertos, es decir que demandan la utilización del pensamiento productivo para el diseño de estrategias de solución, entre los que se incluirían también actividades de laboratorio, útiles para el desarrollo de procedimientos y actitudes hacia la ciencia y sus métodos de trabajo

1.5.5. REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y SIMBÓLICAS (VISUALIZACIÓN, CONSTRUCCIÓN, INTERPRETACIÓN)

Representaciones de visualización

Son representaciones que poseen una estructura muy simple, basadas en la definición de conceptos, las funciones más frecuentes son la definición y aplicación de conceptos.

Representaciones de construcción.

La ilustración tiene una función muy específica ya que la mayor parte del peso de la secuencia recae sobre la definición de conceptos, para interpretar fenómenos cotidianos.

Representaciones de interpretación

Utilizar las gráficas para explicar la realidad mediante los conceptos teóricos y representarla con los signos que simbolizan los conceptos, es decir, una actividad de modelización, por lo tanto el propósito es provocar en el alumno la traslación de unas representaciones a otras, es decir, de representaciones simbólicas a gráficas y de gráficas a simbólicas.

1.5.6. ENSEÑANZA (EJERCITACIÓN REPETITIVA, SENTIDO A LAS DISTINTAS REGLAS, RED DE RELACIONES CON OTROS CONTENIDOS)

Enseñanza por ejercitación repetitiva

En este tipo de enseñanza se considera*"… la matemática como un "objeto de enseñanza", este puede transmitirse. Quien posee el conocimiento puede* *ofrecerlo a quien no lo posee, sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión, el estudiante, por su parte, no puede modificar la estructura del discurso, su tarea consiste en decodificarlo..."* (Lineamientos curiculares ,1998)

Enseñanza por sentido a las distintas reglas

Las tareas que fomenten en el estudiante la búsqueda, construcción y comprobación de conexiones entre distintas piezas de conocimiento, mediante las discusiones en pequeño y gran grupo, con otros estudiantes y con el profesor, que pueden apuntar en la dirección deseada.

Enseñanza por red de relaciones con otros contenidos

Se pretende construir nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas; asimismo, al participar en los procesos de discusión, han de explicitar, contrastar, modificar y extender las conexiones formadas. De esta forma se enriquece y consolida progresivamente la red cognitiva que, según Hiebert y Carpenter (1992), determina el grado de comprensión matemática del estudiante.

1.5.7. APRENDIZAJE (MEMORÍSTICO, MEMORÍSTICO Y APLICACIÓN, CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS Y REGLAS)

Memorístico

Se busca que los estudiantes acepten pasivamente la información y la focalicen para memorizarla con el fin de soló reproducirla Marton, Hounsel y Entwistle, (1989). Otro aspecto destacable es la ausencia casi absoluta de la transición descripción - interpretación. Se espera que describan situaciones con procesos algorítmicos a través de los conceptos teóricos, dando lugar a un proceso memorístico. Lemeignan y Weil-Barais, 1994; Viennot,(1996).

Aprendizaje memorístico y aplicación

Este se enfatiza en diseñar y evaluar adecuados ambientes de enseñanza-aprendizaje, es decir, situaciones y contextos que puedan lograr en los estudiantes una adecuada adquisición de procesos y de actividades orientadas a que los mismos fortalezcan una marcada disposición hacia un aprendizaje productivo.

Aprendizaje por construcción de conceptos y reglas.

Se refiere a la base de lo que los estudiantes ya conocen y pueden hacer, que ello pueden procesar de modo activo las nuevas informaciones que encuentren y como consecuencia, derivar significados y adquirir nuevas capacidades. Así mismo se propone una concepción social y contextualizada del aprendizaje y del pensamiento. Destacándose que el aprendizaje es producto, esencialmente de la interacción con el contexto cultural y social. Esto se refleja en actividades tales como: intercambiar ideas, comparar estrategias de solución y discutir argumentos.

1.5.8. PROPUESTAS CURRICULARES (CLÁSICA, ADAPTADA AL CURRÍCULO, NOVEDOSA)

Propuesta clásica

Obedece a la propuesta que se hace frente a las matemáticas modernas.

Propuestas adaptada al currículo

Se refiere a la adaptación que se hace frente a la reforma educativa a partir de 1994 con la ley general de educación, así mismo los lineamientos y estándares de calidad.

Propuesta novedosa

Presenta una innovación y no sigue ninguna de las anteriores propuestas.

1.5.9. CAPACIDADES QUE SE INTENTAN DESARROLLAR (REGLAS Y PROCEDIMIENTOS, DOTAR DE SENTIDO A LAS DISTINTAS REGLAS, LA CONEXIÓN CON LA REALIDAD Y OTRAS CIENCIAS)

Reglas y procedimientos

Se presenta una matemática formal en la que a partir de los axiomas se deducen los diferentes teoremas y propiedades, así mismo se pretende desarrollar en el estudiante destreza en la aplicación de algoritmos y definiciones.

Dotar de sentido a las distintas reglas (Técnicas o destrezas)

Se resaltan las propiedades de la definición, para que el estudiante posteriormente resuelva y efectúe ejercicios de aplicación, observando cuáles de las estrategias planteadas es la más conveniente para llegar a una solución óptima. Además hace referencia al conjunto de conocimientos que se utilizan para explicar, interpretar y justificar tanto las técnicas que se utilizan como las prácticas que se realizan.

La conexión con la realidad y con otras ciencias (Interpretar la realidad)

Se pretende contextualizar el concepto, permitiendo así familiarizar al estudiante para lo interprete, así mismo abarca todos aquellos elementos propios de la disciplina matemática que garantizan y dan un sentido a situaciones distintas dentro y fuera de la misma. En esta dimensión se hace referencia a la necesidad de la explicación y justificación de la realidad y la utilidad del concepto en otras ciencias. En conclusión, se trata de dar sentido al concepto.

1.5.10. ENTORNO A LAS PROPIAS MATEMÁTICAS (MATEMÁTICAS-FORMALES, MATEMÁTICAS- RAZONABLES, MATEMÁTICAS- EXISTENTES)

Matemáticas-formales

Desde la perspectiva formalista, la matemática puede ser concebida como un objeto de enseñanza. Podríamos afirmar que el matemático “descubre” el conocimiento en una realidad externa a él, es decir, el cocimiento matemático ya existe y está ahí esperando a ser puesto de manifiesto. Una vez descubierto, tan sólo es necesario 'justificarlo' dentro de una estructura formal y queda listo para ser enseñado. Para la comunidad de la educación matemática, las prácticas son privilegiadas en el sentido de que se basan en un conocimiento formal común que incluye algoritmos, sistemas de representación, hechos, conceptos y teorías, así como convenios para probar y realizar demostraciones e investigaciones. (Lineamientos curriculares ,1998)

Matemáticas- Razonables

Las matemáticas que se intentan presentar están basadas fundamentalmente en la utilidad dentro de la propia matemática. Es una matemática funcional. María Teresa Astudillo (2006).

Matemáticas- Existentes

Las prácticas matemáticas compartidas en diversos sectores sociales y profesionales y las necesidades presentes y futuras de la sociedad en general constituyen una referencia fundamental. El autor tiene en cuenta estos conocimientos y sistemas de prácticas compartidos a la hora de definir los límites de los objetivos cognitivos que serían deseables para los estudiantes. Además, hace uso de las contribuciones de disciplinas como la psicología, la pedagogía, la sociología y la epistemología, para construir conocimiento acerca de cómo lograr los mencionados objetivos cognitivos (Rico, 1997, p. 335).

1.5.11. FENÓMENOS DE LA VIDA DIARIA (APLICACIÓN, INTERPRETACIÓN)

Aplicación

Se refiere a hechos o sucesos no cotidianos que se suponen desconocidos por el estudiante y que permiten a portar un contexto necesario, ya que la argumentación se sustenta sobre la definición de conceptos y su aplicación a situaciones ejemplares muy sencillas

Interpretación

Se plantean interrogantes que no pueden resolverse con los conceptos ya definidos. Su finalidad es incitar a los estudiantes a poner a prueba sus ideas o estimular el interés por el tema presentando problemas que posteriormente justifican una interpretación o un nuevo enfoque. La importancia de este tipo de actividad ha sido destacada por Ogborn (1996) en lo que llama creación de diferencias entre el pensamiento de los estudiantes y las ideas que se quieren introducir.

CAPITULO DOS.

SELECCIÓN DE LIBROS DE TEXTO.

2. INTRODUCCIÓN.

Gracias a la ley 115 de 1994 y los decretos posteriores a esta ley, a la reforma educativa que se ha venido generando desde hace algunos años, hoy por hoy podemos afirmar que dentro de la nueva educación se ha producido un aumento en la elaboración y publicación de libros de texto, que tratan de incorporar las recomendaciones didácticas que están estipuladas en estas leyes propuestas tanto por el Ministerio de Educación Nacional como por la Secretaria de Educación.

Por tal motivo en este capitulo se pretende observar los lineamientos y estándares curriculares para identificar a cuáles de las propuestas curriculares obedece cada texto. Posteriormente se dará una revisión a los libros de texto seleccionados con el fin de dar pautas para el análisis que se realizará en el siguiente capitulo, para tal fin se elaborarán fichas con los datos fundamentales del libro: título, autores, editorial, año de edición, plan de estudios, y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite.

2.1. PROPUESTAS CURRICULARES (1994-2006)

El sistema educativo ha de dar solución a los estudiantes con necesidades educativas, gracias a esto el sistema actual de enseñanza ha de hacer llegar a todos los estudiantes las mismas posibilidades de formarse, en el sentido de la equidad, es decir, de dar a todos los estudiantes la enseñanza que les corresponde para ser unos ciudadanos que puedan comprender y descifrar los códigos de la civilización actual, por tanto es importante resaltar cada una de las propuestas que se han generado tanto en el Ministerio de Educación como en la Secretaria, para darnos una idea lo que ha hecho el estado frente a la educación y la enseñanza; no obstante, cabe resaltar que la idea es tratar de resumir las propuestas realizadas del año 1994, hasta el año 2006, con el fin de posteriormente, mencionar a cuáles de estas propuestas están sujetos los libros de texto mencionados.

2.1.1. LEY 115

Desde la aparición de la ley 115 en febrero de 1994, la cual "*…señala las normas generales para regular el servicio publico de la educación que cumple una función social acorde a las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad…"*, (Ley general de la educación, 1994) además creó algunas directrices para la educación, definió un conjunto de áreas fundamentales y obligatorias, de igual forma dio la posibilidad de introducir algunas materias optativas, adecuadas y necesarias de acuerdo con las características del entorno sociocultural donde se presenta la educación. Asimismo, dio autonomía a las instituciones educativas para definir el Proyecto Educativo Institucional (PEI) atendiendo a las normas producidas por el Ministerio de Educación Nacional.

2.1.2. DECRETO 1860

El decreto 1860 de 1994, el cual reglamenta parcialmente la ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales, éste establece que el educando es el centro del proceso educativo y que el objeto del servicio es lograr el cumplimiento de los fines de la educación definidos en la ley 115 de 1994.

De acuerdo con lo dispuesto en los articulo 77, 78 de la ley 115 de 1994, las instituciones de educación formal gozan de autonomía para estructurar el currículo en cuanto a contenidos, métodos de enseñanza, organizaciones de actividades formativas culturales y deportivas. Además se establece que cada establecimiento educativo mantendrá actividades de desarrollo curricular que comprendan la investigación el diseño y la evaluación permanente del currículo.

2.1.3. RESOLUCIÓN 2343

En consecuencia algunos docentes e instituciones implementaron una serie de estrategias para dar cumplimiento a esta ley. A raíz de esto en 1996, el Ministerio de Educación Nacional publica la resolución 2343, esta propone: *"...Los lineamientos generales de los procesos curriculares del servicio público educativo, y establece los indicadores de logros curriculares para la educación formal, especificando unos logros a nivel nacional para todos los estudiantes. No obstante esta política no le ofrece a la comunidad marcos referenciales para desarrollar los fundamentos curriculares, criterios organizacionales y estructurales en los proyectos curriculares ni definir el tipo de conocimiento deseable en cada* *una de las áreas obligatorias, atendiendo el tipo de necesidad y a sus especificidades...”* (Claudia Salazar Guía para el docente Desafíos)

2.1.4. ESTANDARES CURRICULARES DE MATEMÁTICAS.

La construcción de estos estándares, no surge de manera asilada, se enmarcan en el desarrollo de las políticas establecidas por el proyecto de educación en América Latina y el Caribe, para el periodo 1993 y 1996, donde se afirma al respecto: *“tanto el contexto externo vinculado a la educación como al interior de los sistemas educativos, se ha generado un conjunto de condiciones, posibilidades y necesidades que reclaman el establecimiento de políticas para la superación del endémico desfase entre las características del sistema educacional y los requerimientos individuales y sociales”.*(Salazar, Claudia)

Con el propósito de superar los problemas existentes se formulan objetivos para alcanzar la calidad y eficiencia de los sistemas educativos; los cuales deben lograrse mediante la incorporación de estándares nacionales y sistemas de mediación y evaluación de los productos del proceso educativo; se asigna al Ministerio de Educación la responsabilidad de ejecutar esta gestión y se les insta a proponer estándares cada vez más exigentes para cada grado, dirigidos al nivel de aprendizaje de nivel superior.

Cada propuesta de estándares puede constituirse en apoyo para construir currículos de calidad y mejorar los sistemas de educación, o puede restringirse la autonomía escolar y la creatividad curricular.Lo anterior significa que se pueden enviar señales positivas o inhibir la experimentación y la innovación.

2.1.5. LINEAMIENTOS CURRICULARES

En 1998 el Ministerio de Educación Nacional en un intento por elevar la calidad de la educación propone los lineamientos curriculares, los cuales contienen avanzadas conceptualizaciones de las áreas fundamentales y obligatorias del currículo, además *"…son un soporte para comprender y manejar los logros e indicadores, los proyectos pedagógicos y demás conceptos contenidos en el decreto 1860 y la resolución 2343…"* (Lineamientos curriculares 1998, Presentación). En estos lineamientos se proponen para cada una de las áreas obligatorias, documentos en los cuales se presentan planteamientos para el debate y la reflexión sobre lo curricular. En particular en el área de matemáticas el documento inicia con una discusión acerca de la naturaleza de las mismas, en la cual se invita a los profesores a debatir y a tomar posición frente a este tema y es establecer las distinciones requeridas para las matemáticas escolares y con el papel de la didáctica de la matemática en la actualidad.

Así mismo, proponen una organización del currículo con base en tres aspectos:

1. Los procesos generales asociados al aprendizaje de las matemáticas. Tienen que ver con el aprendizaje tales como:

    - ✓ Razonamiento.
    - ✓ La resolución y planteamiento de problemas.
    - ✓ La comunicación.
    - ✓ La modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

2. Los conocimientos básicos relacionados con las características específicas del pensamiento matemático los sistemas propios de las matemáticas, estos procesos específicos son:

- ✓ Desarrollo del pensamiento numérico.
- ✓ Desarrollo del pensamiento espacial.
- ✓ Desarrollo del pensamiento métrico.
- ✓ Desarrollo del pensamiento aleatorio.
- ✓ Desarrollo del pensamiento variacional.

3. Los contextos que tienen que ver con los ambientes que rodean a los estudiantes y que le dan sentido a las matemáticas que aprenden, estas son variables tales como:

- ✓ Condiciones sociales y culturales.
- ✓ Tipo de interacciones.
- ✓ Intereses que se generan.
- ✓ Las creencias.
- ✓ Las condiciones económicas.

Sin embargo, aunque este documento ofrecía unas directrices generales para la organización del currículo, no se pronunciaba acerca de cuales debían ser los referentes para seleccionar los contenidos de los sistemas en los que se organizaba el conocimiento matemático escolar.

Con el objetivo de solucionar este inconveniente, *"…se propone la elaboración de un documento de estándares curriculares que orienta a los profesores en las decisiones que debe tomar en cuanto a cuál debe ser el conocimiento, los procesos y los contextos que deben ofrecer a los estudiantes en la matemática escolar"* (Claudia Salazar, Guía para el docente Desafíos). Así, los estándares curriculares aparecen como elementos dinamizadores del currículo que atendiendo a la autonomía institucional, permite el diseño de un proyecto educativo que considere las necesidades sociales de la comunidad en la cual se encuentra la institución educativa, además proponen expectativas ambiciosas y desafiantes para el aprendizaje de las matemáticas que orienten los desarrollos curriculares de las instituciones.

Los estándares, promulgados por el Ministerio de Educación Nacional en mayo de 2003, proponen que los y las estudiantes comprendan que la matemática puede despertarles curiosidad, interés y gusto, y que a través de la exploración, clasificación y comunicación, descubran que las matemáticas están relacionadas con las situaciones que los rodean. Básica secundaria y media. (Celly S, Carmen S, Espiral 2005)

De este modo la nueva política de los estándares curriculares posee elementos comunes con las políticas anteriores y responden en conjunto a los fines establecidos desde la ley general de educación, por lo tanto las políticas antes mencionadas (resolución 2343, lineamientos curriculares y estándares) intentan ofrecer algunas directrices y establecer ciertos parámetros de unidad, equidad e identidad como nación; así mismo, estas regulan en definitiva las acciones del docente, directivos docentes y comunidad escolar en relación con el PEI, el proyecto curricular y las interacciones que se dan en el aula entre el estudiantes, profesor y saber

2.1.6. COMPETENCIAS.

La ley de educación introduce un cambio sustancial en el sistema educativo colombiano, exigiendo que la evaluación sea cualitativa por tanto la propuesta de centrar la evaluación del logro educativo se efectué por medio de las **competencias**, con esto se busca desplazar la evaluación del manejo de contenidos curriculares al *aprendizaje significativo*[1] asociado con el uso comprensivo de sistemas simbólicos y conceptuales como el lenguaje (oral y escrito), las matemáticas o las ciencias.

Las competencias propias del mundo escolar como la escritura y la lectura, señalan un desarrollo muy particular en relación con la vida cotidiana, para ello la escolarización no se reduce al contacto con unos "contenidos de aprendizaje" ;por el contrario su mayor sentido es el de promover el despliegue de nuevas competencias y por lo tanto, de nuevas formas de relacionarnos con el mundo a través de la escritura, la notación matemática o las reglas del pensamiento científico, es por esto que una de las interpretaciones más adecuadas a las competencias es "saber y saber hacer en contexto". Son en otras palabras, las acciones que un estudiante realiza en el contexto de una disciplina del conocimiento o de una problemática.

En matemáticas particularmente las competencias están relacionadas con tres aspectos fundamentales, de los cuales todos los estudiantes deben poder dar cuenta, ellos son:

- ✓ **El conocimiento matemático en sus componentes (conceptual y procedimental):** se consideran los conceptos, los hechos, terminología, notación, así como las destrezas, estrategias y razonamientos necesarios para trabajar cada concepto como parte de una estructura matemática.
- ✓ **Las situaciones problema:** en èstas se logra evidenciar el uso que el estudiante hace del conocimiento matemático que ha construido durante su proceso escolar.
- ✓ **La comunicación matemática:** el estudiante sea capaz de comprender el lenguaje utilizado. Cada estudiante debe reconocer en las situaciones

[1] Aprendizaje significativo: se quiere enfatizar el lugar central que ocupa el proceso de construcción de significados en la dinámica del aprendizaje. Ausubel, Novak y Heneisan (1983).

plantadas todos lo aspecto o elementos que puede matematizar.

Estos tres aspectos se tienen en cuenta para el diseño de las situaciones y de los problemas que se formulen a partir de ellas, las acciones para lograr este objetivo se enfatizan en la:

- ✓ **Interacción:** se refiere a las posibilidades del estudiante para dar sentido a una situación a partir de la matemática.
- ✓ **Argumentación:** se refiere a las razones o los porqués que el estudiante pone de manifiesto ante un problema.
- ✓ **Proposición:** se refiere a la manifestación del estudiante en cuanto a los hechos que le permiten generar hipótesis, estableciendo conjeturas, encontrar deducciones posibles ante las situaciones propuestas.

Los ejes conceptuales: se conciben como una manera de organizar el conocimiento matemático escolar y se han estructurado atendiendo ha aspectos propuestos en los lineamientos curriculares de matemáticas. La clasificación que se ha propuesto es:

- ✓ Conteo.
- ✓ Medición.
- ✓ Variación.
- ✓ Aleatoriedad.

A continuación se reseñan las políticas antes mencionadas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional, con el fin de observar las directrices propuestas para la enseñanza de las matemáticas en grado 11, especialmente en lo referente al concepto de límite.

RESOLUCION 2343.
CODIGO EDUCATIVO V.
PROCESOS CURRICULARES E INDICADORES DE LOGRO.
5 DE JUNIO DE 1996.

- ✓ Da razones del porqué de los números reales y explica por qué unos son racionales y otros irracionales.
- ✓ Utiliza el sentido de las operaciones y de las relaciones en sistemas de números reales.
- ✓ Interpreta instrucciones, expresiones algebraicas, diagramas operacionales y de flujo y traduce de nos a otros, en el sistema de los números reales.
- ✓ Investiga y comprende contenidos matemáticos a través del uso de distintos enfoques para el tratamiento y resolución de problemas; reconoce, formula y resuelve problemas del mundo real aplicando modelos matemáticos e interpretar los resultados a la luz de la situación inicial.
- ✓ Elabora modelos de fenómenos del mundo real y de las matemáticas con funciones polinómicas, escalonadas, exponenciales, logarítmicas, circulares y trigonométricas; las representa y traduce mediante expresiones orales, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.
- ✓ Aplica modelos de funciones para tratar matemáticamente situaciones financieras y transacciones comerciales frecuentes en la vida real.
- ✓ Analiza situaciones de la vida diaria generadoras de las ideas fuertes del cálculo, tales como tasa de cambio, tasa de crecimiento y total acumulado; descubre y aplica modelos de variación para tratarlas matemáticamente.
- ✓ Hace inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficos que recojan datos de situaciones del mundo real; estima, interpreta y aplica medidas de tendencia central, de dispersión y de correlación.
- ✓ Reconoce fenómenos aleatorios de la vida cotidiana y del conocimiento científico, formula y comprueba conjeturas sobre el comportamiento de los mismos y aplica los resultados en la toma de decisiones.

- ✓ Formula hipótesis, las pone a prueba, argumenta a favor y en contra de ellas y las modifica o las descarta cuando no resisten la argumentación.
- ✓ Elabora argumentos informales pero coherentes y sólidos para sustentar la ordenación lógica de una serie de proposiciones.
- ✓ Detecta y aplica distintas formas de razonamiento y métodos de argumentación en la vida cotidiana, en las ciencias sociales, en las ciencias naturales y en las matemáticas; analiza ejemplos y contra ejemplos para cambiar la atribución de necesidad o suficiencia a una condición dada.
- ✓ Planifica colectivamente tareas de medición previendo lo necesario para llevarlas a cabo, el grado de precisión exigido, los instrumentos adecuados y confróntalos resultados con las estimaciones.
- ✓ Disfruta y se recrea en exploraciones que retan su pensamiento y saber matemáticos y exigen la manipulación creativa de objetos, instrumentos de medida y materiales y medios.

ESTÁNDARES CURRICULARES PARA MATEMÁTICAS
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL.

DOCUMENTO DE ESTUDIO

Autores: MAURICIO BAUTISTA, MARÍA LUCÍA BOCK, MARÍA CRISTINA CORRALES, MARÍA VICTORIA LEÓN, ENTRE OTROS.

Al terminar el undécimo grado, el programa de matemáticas que los estudiantes hayan completado de acuerdo con el currículo implementado en cada institución, deberá garantizar, como mínimo, los siguientes estándares para cada componente.

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- ✓ Reconoce una sucesión y sus propiedades.
- ✓ Reconoce una serie y sus propiedades.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- ✓ Analiza las propiedades de la gráfica de una variedad de funciones en el plano cartesiano.
- ✓ Comprende la relación entre la integral definida y el área de la región bajo una curva en el plano cartesiano.
- ✓ Calcula el área entre dos curvas en el plano cartesiano por medio de las técnicas del cálculo.
- ✓ Comprende la fórmula para un volumen de rotación y la aplica con propiedad.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

- ✓ Encuentra e interpreta algunas medidas de dispersión (rango, desviación de la media, desviación estándar, varianza, etc.), de una colección de datos.
- ✓ Comprende el concepto de variable aleatoria (discreta o continua).
- ✓ Conoce y aplica las reglas básicas de la probabilidad y las utiliza para resolver una variedad de problemas.
- ✓ Comprende lo que es una distribución de probabilidad y conoce las propiedades y aplicaciones fundamentales de las distribuciones binomial y normal.
- ✓ Aplica las medidas de tendencia central y de dispersión en el manejo, interpretación y comunicación de información.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

- ✓ Comprende el concepto de función real de variable real.
- ✓ Comprende los conceptos de dominio y rango de una función y desarrolla herramientas para hallarlos.
- ✓ Analiza funciones de una variable investigando ratas de cambio, interceptos, ceros, asíntotas y comportamiento local y global.
- ✓ Explora las distintas maneras de representar una función (tablas, gráficas, etc.).
- ✓ Combina y transforma funciones mediante operaciones aritméticas o la composición e inversión de funciones.

- ✓ Utiliza con propiedad una calculadora graficadora para trazar y analizar gráficas de funciones y sus diversas transformaciones.
- ✓ Explora y comprende el concepto de límite de una sucesión y de una función.
- ✓ Desarrolla las propiedades del límite de una función y calcula el límite de una variedad de ellas.
- ✓ Investiga y comprende límites infinitos y en el infinito.
- ✓ Distingue entre sucesiones divergentes y convergentes.
- ✓ Comprende el concepto de función continua.
- ✓ Comprende la derivada como la razón de cambio o como la pendiente de la recta tangente a una función continua en un punto dado.
- ✓ Desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas.

- ✓ Explora la segunda derivada de una función y desarrolla sus propiedades y aplicaciones.
- ✓ Explora y comprende los conceptos de antiderivada e integral indefinida.
- ✓ Explora y comprende la integral definida y desarrolla herramientas para hallar la integral de algunas funciones fundamentales.
- ✓ Comprende el teorema fundamental del cálculo.

PROCESOS MATEMÁTICOS

a. Planteamiento y resolución de problemas

- ✓ Resuelve una amplia gama de problemas matemáticos y de otras disciplinas mediante el uso de herramientas de distinto tipo y el desarrollo de estrategias apropiadas.
- ✓ Verifica la validez de la solución a un problema identificando casos excepcionales.

b. Razonamiento matemático

- ✓ Hace razonamientos matemáticos coherentes; explica y justifica sus deducciones e inferencias.

c. Comunicación matemática

- ✓ Lee, comprende y asume una posición frente a una variedad de textos que utilizan lenguaje matemático.

- ✓ Se comunica por escrito y de manera oral en forma clara, concisa y precisa, mediante el uso adecuado y riguroso del lenguaje matemático.

ESTANDARES BASICOS DE MATEMATICAS

GRADOS 10º Y 11º

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL EN MAYO DE 2003.

Autores: GLORIA GARCÍA, PEDRO JAVIER G, LIGIA AMPARO TORRES, ENTRE OTROS.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos	1. Analiza representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racional e irracional.
	2. Reconoce la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
	3. Compara y contrasta las propiedades de los números (enteros, racionales, reales), sus relaciones y operaciones (sistemas numéricos)
	4. Utiliza argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucren números naturales.
	5. Establece relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos	1. Identifica las propiedades de las curvas en los bordes obtenidos mediante cortes (longitudinal y transversal) en un cono y en un cilindro.
	2. Identifica características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, esféricos,...)
	3. Resuelve problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras conocidas de manera algebraica.

	4. Usa argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
	5. Describir y modelar fenómenos pedidos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
	6. Reconocer y describir curvas o lugares geométricos.

Pensamiento métrico y sistemas medidas	1. Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
	2. Resolver y formular problemas que involucren mediciones derivadas para atributos tales como velocidad y densidad.
	3. Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.	1. Comparar estudios provenientes de medios de comunicación
	2. Justificar inferencias de medios o de estudios diseñados en el ámbito escolar.
	3. Diseña experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.
	4. Describir tendencias que se observa en conjuntos de variables relacionadas.
	5. Interpretar notaciones básicas relacionadas con el manejo de información (como población, muestra, variable, estadígrafo y parámetro).
	6. Usar comprensivamente algunas medidas de centralización, localización dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad)
	7. Interpretar concepto de probabilidad condicional e independencia de eventos.
	8. Resolver y formular problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio maestral, muestreo

	aleatorio, muestreo con remplazamiento)
	9. Proponer inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y	1. Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
	2. Interpretar la noción de derivada como razón de cambio y desarrollar métodos para hallar la derivada de funciones básicas.
	3. Analizar las relaciones entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.
	4. Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.

ESTANDARES BASICOS DE MATEMATICAS

GRADOS 10º Y 11º.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL.

PROYECTO MEN – ASCOFADE.

MAYO 2003.

Pensar con los números	✓ Avanzo en la comprensión de la diferencia entre los números racionales e irracionales al representarlos en forma decimal.
	✓ Practico todo lo que sé sobre los números reales para comparar, identificar y diferenciar propiedades, relaciones y operaciones de los números enteros, racionales e irracionales; argumento mis respuestas.
	✓ Propongo diferentes formas de notación de números reales y digo cuál es la más adecuada en una situación o en otra.

Pensar con la geometría.	✓ Identifico las características y propiedades de las figuras cónicas (elipse, parábola, hipérbole) y utilizo sus propiedades en la resolución de problemas.
	✓ Hago la representación grafica de una misma figura en diferentes sistemas de coordenadas (cartesianas, polares, esféricas) y comparo.
	✓ Resuelvo problemas en los que veo cómo se relacionan las propiedades de las figuras cónicas con el algebra.
	✓ Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias.
	✓ Reconocer y describir curvas o lugares geométricos

Pensar con las medidas.	✓ Encuentro estrategias que me permiten hacer mediciones muy exactas.
	✓ Utilizo procesos de aproximación sucesiva y rasgos de variación para llegar al concepto de límites en situaciones de medición.
	✓ Resuelvo y formulo problemas que involucren velocidad y densidad utilizando mediciones derivadas.

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.	✓ Comparo investigaciones que encuentro en los medios de comunicación o que hacemos en el colegio; analizo y justifico los resultados.
	✓ Diseña experimentos aleatorios relacionados con las ciencias físicas, naturales y sociales para estudiar un problema o resolver una pregunta.
	✓ Interpreto datos de información (datos de población, muestras, variables, estadígrafos y parámetros).
	✓ Comprendo y utilizo medidas de centralización, localización dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad)

	✓ Interpreto conceptos de probabilidad condicional y eventos independientes.
	✓ Resuelvo y formulo problemas de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazamiento); propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas
	✓ Proponer inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Pensar con variación y con algebra.	✓ Utilizo las técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos.
	✓ Interpreto la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos (velocidad y aceleración).
	✓ Observo las propiedades y analizo las relaciones entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones.
	✓ Utilizo las funciones trigonométricas para diseñar situaciones de variación periódica.

2.2. TEXTOS SELECCIONADOS.

Al menos cuatro razones motivaron la decisión de seleccionar estos textos. En primer lugar, estos textos son utilizados regularmente por los profesores colombianos en las actividades escolares

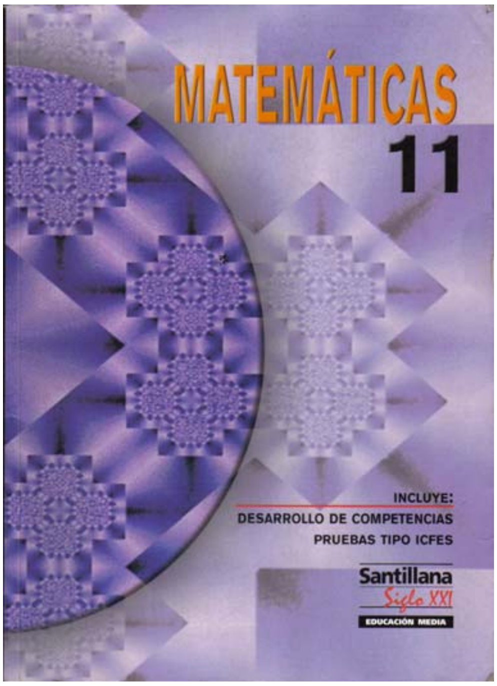
En segundo lugar, porque es en el grado undécimo que usualmente aparece el tratamiento del límite.

En tercer lugar, porque son textos de edición relativamente reciente y todos ellos pretenden responder a las disposiciones curriculares del Ministerio de Educación Nacional, aunque en la mayoría de los textos no sea explícito a cual disposición responde.

Finalmente, se decidió analizar tres libros de texto, ya que por motivos de tiempo, recursos monetarios y al trabajo que requeriría estudiar los textos escolares es bastante amplio, y en estos momentos no contamos con este tiempo, ya que nos encontramos terminando otras actividades.

2.2.1. MATEMATICAS 11.

Titulo	**MATEMATICAS 11.**
Autores	**CHAVEZ López, Hugo; CASTIBLANCO Genoveva, Sandra.**
editorial	**SANTILLANA**
Año de edición	**2000**
Influencia didáctica	**DESARROLLO DE COMPETENCIAS.**



UNIDAD	TEMAS	MANEJO DE CALCULADORA	SOLUCION DE PROBLEMAS
LA LINEA RECTA. NUMEROS REALES	1. La línea recta 2. Sistema de números reales. 3. Desigualdades, inecuaciones. 4. Valor absoluto.	Resolución de desigualdades con la graficadora.	Imaginar el problema resuelto.

FUNCIONES	1. Función real de variable real. 2. Dominio y rango de una función real de variable real. 3. Clasificación de funciones. 4. Grafica de una función. 5. Operaciones con funciones. 6. Funciones inversas.	Análisis y trazado de gráficas de funciones.	Transformar gráficas de funciones.
LÍMITES Y CONTINUIDAD	1. Introducción. 2. Exploración de límites de sucesiones con calculadora 3. Límite de una función 4. Límites laterales. 5. Cálculo de límites aplicando sus propiedades. 6. Cálculo de límites. Indeterminaciones. 7. Límites infinitos y en el infinito. 8. Continuidad.	Verificación de la propiedad del valor intermedio.	Aproximaciones sucesivas.

MATEMATICAS 11, te hace competente para...

Según esto el texto da pautas para el desarrollo de las competencias, ya que se menciona lo siguiente:

“Resolver problemas mediante el desarrollo de habilidades relacionadas con la comprensión, la planeación, la ejecución y la comprobación de un problema, así mismo te capacitan para entender el planteamiento de los problemas, planear razonable su ejecución y resolverlo adecuadamente".

Por lo anterior y observando cada una de las corrientes expuestas anteriormente afirmamos que: estas habilidades constituyen el fundamento de las competencias, ya que cuando se refieren al planteamiento del problema se esta describiendo la **competencia interpretativa**, de igual forma cuando se habla de planear razonablemente su ejecución se refieren a la **competencia argumentativa**, finalmente cuando se expone sobre resolver problemas adecuadamente se hace referencia a la **competencia prepositiva**.

Antes de desarrollar cada uno de los capítulos se presenta información y ejercicios orientados a revisar los prerrequisitos que se deben tener para iniciar el estudio de la unidad y se recomienda tenerlos en cuenta o se sintetizan en algunas páginas los elementos más significativos, nombrado "**ten en cuenta**". A continuación se mencionan cada uno de los enunciados que se presentan en los capítulos relacionados con el límite.

RECUERDA.

Antes de iniciar el estudio de la unidad es pertinente hacer un repaso de los conceptos y procedimientos que se estudiaron en grados anteriores.

Recuerda

Factor de racionalización

- *El factor de racionalización del binomio* $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})$ *es* $(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b^2}+\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})$

  de modo que:

  $$a-b=(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b}+\dots+\sqrt[n]{b^{n-1}})$$

- *Si* $n=2$, *entonces* $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

RECUERDA:

Buena parte de los contenidos de la unidad se han estudiado en cursos anteriores, aunque lo más importante lo resumimos a continuación (Definición rigurosa de función, dominio y rango, notación funcional, gráficas de funciones).

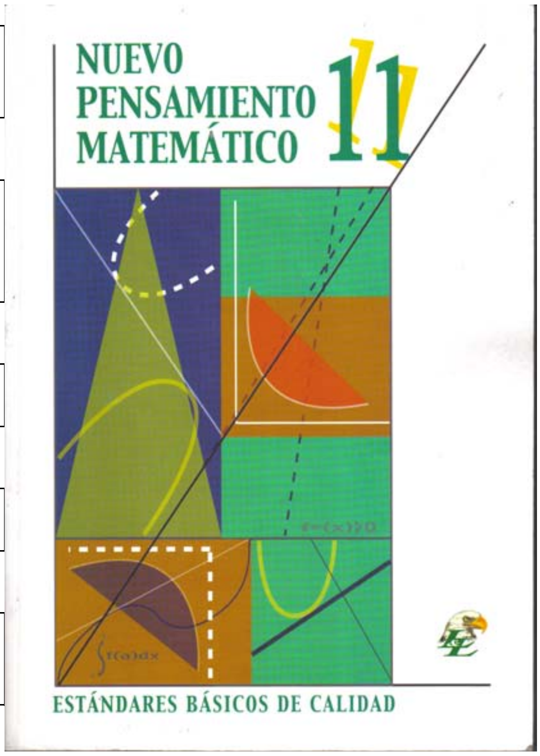
RECUERDA:

Antes de abordar el contenido de la unidad, es necesario que tengas la suficiente "destreza" en el uso de procedimientos de factorización, racionalización e identidades trigonométricas, además de haber aprendido los conceptos y procedimientos de las unidades anteriores, de entre los cuales recordaremos los siguientes (Valor absoluto, ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, sucesiones).

Al finalizar se hace un resumen de toda la unidad donde se sintetiza la información básica del tema, se presentan actividades de refuerzo y evaluación clasificadas por temas con actividades que pretenden incorporar el manejo de la calculadora graficadora que tiene como propósito aplicar la tecnología en el aula, se tiene en cuenta que estos problemas que se plantean también pueden ser resueltos sin utilizar la calculadora. De igual forma presentan algunas estrategias específicas para resolver problemas, además se encuentra un modelo de prueba para preparar el examen de estado ICFES.

2.2.2. NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO 11

Titulo	NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO 11
Autores	DIAZ, Ricardo Nelson; DÍAZ, Faberth Alberto; CENTENO R, Gustavo
editorial	Libros & Libros S.A.
Año de edición	2004
Influencia didáctica	ESTANDARES BASICOS DE CALIDAD.



PENSAMIENTO NUMERICO	PENSAMIENTO VARIACIONAL.
NUMEROS REALES. Lección 1. – Los números reales. Números naturales Números enteros Números racionales Números irracionales Lección 2. – Desigualdades e Inecuaciones. Propiedades de las desigualdades. Intervalos.	FUNCIONES Y LÍMITES. Lección 1. –Trazado e interpretación de gráficas. Ubicación de puntos para construir una grafica. Intersecciones de gráficas con los ejes. Simetrías. Cálculo del dominio y del rango. Transformaciones básicas de las gráficas. Lección 2. –Funciones reales. Tipo de funciones reales. Funciones polinómicas.

Solución de inecuaciones de primer grado. Inecuaciones simultaneas de primer grado. Inecuaciones cuadráticas. Inecuaciones racionales. Lección 3. –valor absoluto. Propiedades de valor absoluto. Ecuaciones con valor absoluto. Inecuaciones con valor absoluto. Evaluación de competencias. Ideas clave. Tecnología.	Funciones racional. Funciones trascendente. Funciones especiales. Funciones inversas. Álgebra de funciones. Lección 3.- sucesiones. Representación grafica de sucesiones. Clasificación de sucesiones. Sucesión monótona creciente. Sucesión monótona decreciente. Sucesión monótona constante. Sucesiones acotadas. Límite de sucesiones. Sucesiones convergentes y sucesiones divergentes. Propiedades de los límites de sucesiones. Lección 4.- límites de funciones. Límites laterales. Propiedades de los límites. Formas indeterminadas. Límites trigonométricos especiales. Límites infinitos. Límites al infinito. Continuidad. Continuidad en un intervalo abierto. Evaluación de competencias. Ideas claves. Tecnología.

En cada uno de los capítulos se presenta el pensamiento que se pretende desarrollar en los estudiantes, en este caso el pensamiento numérico y variacional, conjuntamente se muestran los estándares de calidad o metas que se deben alcanzar como consecuencia de estudiar cada pensamiento matemático. Estas metas se presentan a través de los indicadores de desempeño que son los criterios de evaluación que indican lo que el estudiante sabe y sabe hacer.

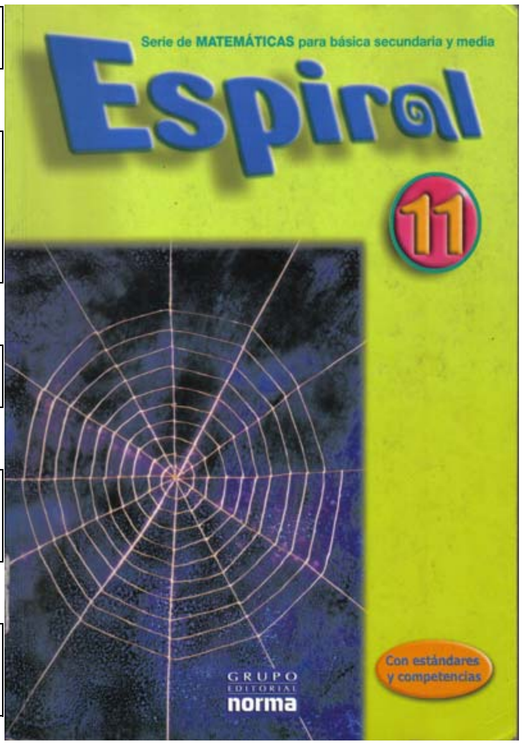
En cada unidad se exhibe una reseña histórica, una biografía o una información clave relacionado con el tema que se estudiara; de igual forma, se presenta una lectura contextualizada aplicable a una situación matemática especificada, en cada lección se indica al estudiante lo que va a aprender, para qué le sirve y cuáles saberes previos requiere para abordar el tema.

Al finalizar la unidad se propone una evaluación de competencias, la cual se realiza a partir de una variedad de problemas referentes a los distintos dominios de la matemática, cada pregunta presenta varias opciones de respuesta, igualmente se hace un resumen de la unidad denominado “ideas claves”, de igual forma se plantean diversas estrategias de utilización del computador donde se tiene en cuenta el programa que más se ajusta a la temática del pensamiento.

Por lo tanto este texto obedece a los estándares básicos de calidad propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en Mayo de 2003 (Matemáticas), escritos por Gloria García, Pedro Javier G, Ligia Amparo Torres, entre otros, así mismo se refiere a los lineamientos curriculares de matemáticas y a las competencias.

2.2.3. ESPIRAL.

Titulo	**ESPIRAL 11.**
Autores	**ARDILA Rebolledo, Raquel; PÉREZ Ruiz, Mario Ernesto; SAMPER Caicedo, Carmen; SERRANO Plazas, Celly.**
editorial	**GRUPO EDITORIAL NORMA**
Año de edición	**2005**
Influencia didáctica	**CON ESTANDARES Y COMPETENCIAS.**



PENSAMIENTO NUMERICO.

Números reales.
Propiedades del sistema numérico de los reales.
Orden de lo números reales.
Subconjuntos acotados de los números reales.
Métrica.
Estándares de evaluación.
Lectura comprensiva.
Pruebas Icfes.
Taller de profundización.

PENSAMIENTO VARIACIONAL.

Funciones.
Función en general.
Funciones polinómicas.
Funciones racional.
Funciones definidas a trozos.
Funciones no algebraicas.
Funciones en la resolución de problemas.
Álgebra de funciones.
Composición de funciones.
Transformaciones de funciones.
Función inversa.
Sucesiones y series.
Estándares de evaluación.
Lectura comprensiva.
Prueba Icfes.
Taller de profundización.

Límites y continuidad.
Noción de límite de una función.
Propiedades de los límites.
Límites laterales y continuidad.
Límites infinitos, al infinito y asintotas.
Límites trigonométricos.
Límites de funciones exponenciales y logarítmicas.
Estándares de evaluación.
Lectura comprensiva.
Prueba Icfes.
Taller de profundización.

Al inicio de cada unidad se encuentran una situación contextualizada relacionada con el tema que se va a desarrollar titulada “**explorando**”, también sepresentan los estándares que se van a trabajar, según el tipo de pensamiento y los procesos a desarrollar. Del mismo modo aparece una sección de actividades preparatorias con situaciones y actividades previas al concepto.

En algunas páginas del desarrollo de los temas, aparecen las sesiones conexión con la vida y comentario. En la primera, se presentan situaciones de la vida real en las cuales se aplican los conceptos que se están trabajando. En los comentarios se hacen breves aclaraciones sobre algún aspecto del contenido.

Al final de cada unidad se proponen problemas y actividades de aplicación agrupados según el proceso de pensamiento a desarrollar los cuales son: comunicación, resolución de problemas, conexión y razonamiento lógico. Luego , aparece una sección titulada estándares de evaluación la cual establece el nivel de competencia que alcanzó el estudiante, incluye autoevaluación y coevaluación.

Igualmente se encuentra una lectura comprensiva que contiene aspectos relacionados con los temas de la unidad, seguidamente aparece un cuestionario tipo icfes en el cual se encuentran preguntas del núcleo común y del núcleo de profundización, posteriormente se halla un taller de profundización con más actividades para repasar los contenidos vistos.

Este texto obedece a los estándares básicos de calidad propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en Mayo de 2003 (Matemáticas), escritos por Gloria García, Pedro Javier G, Ligia Amparo Torres, entre otros, así mismo se refiere a los lineamientos curriculares de matemáticas y a las competencias, esto se puede evidenciar mediante lo siguiente:

Organiza las unidades temáticas según el tipo de pensamiento, numérico, espacial, métrico aleatorio y variacional; así mismo se enfatiza en el desarrollo de los cuatro procesos asociados al aprendizaje de las matemáticas: planteamiento y resolución de problemas, razonamiento, comunicación y conexiones. De igual forma agrupa los ejercicios, actividades y problemas según el proceso que se pretende desarrollar. Promueve las competencias ciudadanas al enfrentar a los estudiantes a situaciones que los llevan a reflexionar sobre la realidad del entorno social en que viven.

CAPITULO TRES.

ANALISIS DE LOS TEXTOS.

3. INTRODUCCION.

En este capitulo se pretende elaborar el análisis de cada uno de los textos, tomando las categorías (conceptual, didáctico- cognitivo, fenomenológico) y las dimensiones que estipularon en los dos capítulos anteriores, así mismo se elaborará un perfil de cada texto, atendiendo a las categorías de análisis, posteriormente se justificar el porqué del perfil de los textos y por último se nombran las conclusiones del trabajo.

3.1. ANALISIS DE TEXTOS SELECCIONADOS.

A la presentación del tema de "límite", en los tres textos precede una exposición axiomática de los números reales y una amplia exposición sobre funciones reales, en donde se caracterizan las funciones racionales, polinómicas, valor absoluto, algebraica, definidas a trozos, trascendente y se presentan operaciones entre funciones. La mayoría de ejemplos y los numerosos ejercicios tratan de graficar funciones e identificar dominio y rango de las funciones reales, de igual forma se introducen en los ejemplos y los ejercicios funciones como modelos matemáticos en la sección de funciones.

En relación con la presentación del tema de límites en los textos analizados se aprecia primero un amplio preámbulo con ejemplos y ejercicios antes de presentar la definición formal, como se muestra en la siguiente tabla:

	UNIDAD DE LÍMITE.		
	MATEMATICAS 11.	**NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO.**	**ESPIRAL**
Introducción.	• Idea intuitiva del límite. • Mediante un ejemplo ilustrativo dirigido a la concepción geométrica del límite. • Se incorpora el uso de calculadoras como una preparación a la introducción del concepto de límite. • Aproximación a la idea de límite de una función mediante ejemplos dirigidos a la concepción aritmética del límite	• Aproximación a la idea de límite de una sucesión mediante ejemplos dirigidos a la concepción aritmética del límite. • A partir del límite de una sucesión muestra la idea de límite de una función.	• Idea intuitiva del límite. • Noción de límite de una función aparece mediante ejemplos ilustrados dirigidos a la concepción aritmética del límite.

	MATEMATICAS 11.	NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO.	ESPIRAL
Definición.	Definición aritmética, geométrica informal. Definición formal métrica.	Definición aritmética informal. Definición formal topológica.	Definición aritmética informal. Definición formal métrica.
Ejemplos.	Funciones como modelos matemáticos, funciones reales, en donde se caracterizan las funciones racionales, polinómicas, algebraicas, trascendentes.	Sucesiones convergentes y divergentes, así como funciones reales, en donde se caracterizan las funciones definidas a trozos, polinómicas, racionales.	Funciones reales, en donde se caracterizan las funciones polinómicas, definidas a trozos, racionales, trascendentes.
Ejercicios.	Los ejercicios propuestos son de manejo de desigualdades, propiedades del valor absoluto para encontrar al valor de δ dado en un valor de ε, de igual forma se proponen ejercicios similares a los ejemplos	Los ejercicios propuestos son similares a los ejemplos.	Los ejercicios propuestos son de manejo de desigualdades, propiedades del valor absoluto para encontrar al valor de δ dado en un valor de ε, de igual forma se proponen ejercicios similares a los ejemplos

En la tabla anterior se muestra que en los textos Matemáticas 11 y Espiral la introducción al “límite“ se hace mediante algunos ejemplos, usando tablas de valores y la grafica de una función racional y polinómica, posteriormente esta presentación se omite y con base en la gráfica y en la representación tabular de f(x), para algunos valores cercanos al punto en cuestión, se conduce hacia la definición formal de límite de una función, mediante la consecución de proposiciones equivalentes. Primero, usan lenguaje verbal para describir el comportamiento de las variables de la función, en donde predomina el uso de expresiones como "tiende a”, "se aproxima”, “se acerca”, “este tan cerca”, suficientemente cerca” luego mezclan el lenguaje verbal con la simbología matemática, para llegar a la notación simbólica de la definición formal $\varepsilon - \delta$.

Después se trata de explicar esta definición simbólica, primero verbalizando la definición, luego presentando ciertas aclaraciones como:

- ✓ No es necesario que la función esté definida en el punto en cuestión y que el valor de δ depende del valor dado ε y por último “establecen” la notación simbólica del límite de una función como una nueva operación. $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (Matemáticas 11, Santillana, p. 88).

- ✓ Para que el $\lim_{x \to a} f(x)$ exista $f(a)$ no tiene por qué estar definido. (Nuevo Pensamiento matemático, libros & libros S.A. p. 130)

- ✓ Cuando llamamos el límite L de una función f en punto a, calculamos imágenes de puntos cercanos a a, podemos decir que hemos encontrado un posible valor para el límite. Solo cuando mostramos que la distancia de f(x) a L se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomamos valores de x suficientemente cercanos a, hemos probado que L es el límite de f(x) cuando x tiende hacia a. (Espiral, norma, p. 125.)

Esta introducción se puede catalogar según Sfard (1991) de tipo "estructural”, ya que se busca la "comprensión estructural' del concepto en torno a la definición $\varepsilon - \delta$. Se parte de una definición intuitiva basada en un ejemplo, luego se Induce una aproximación a la definición formal, para posteriormente formularla simbólicamente, explicarla y justificarla. Se trata de ver la noción de límite como un objeto, una estructura estática que se reconoce "con una mirada” Instantánea, Se pretende la estructuración conceptual, haciendo énfasis en el dominio de la técnica $\varepsilon - \delta$, apoyados en el sistema simbólico de los números reales, desigualdades, valor absoluto, la lógica y el álgebra.

Esta presentación estructural, se ratifica con los teoremas sobre límites, ejemplos y ejercicios los cuales se plantean para enseñar las técnicas $\varepsilon - \delta$ y métodos de calcular los límites. Estos ejercicios están más relacionados con rutinas y artificios algebraicos que con el análisis. La tendencia a este énfasis induce a los estudiantes a creencias implícitas acerca del concepto y de la forma que ellos deben operar (Cornu, 1991, p.154)

Mientras que en el texto **NUEVO PENSAMIENTO** libros y libros s.a. la introducción a este tema se realiza utilizando el concepto sucesión, sucesiones crecientes, decrecientes, convergentes, divergentes. Posteriormente se da la idea intuitiva del límite de una sucesión a través de la representación grafica de ella sobre una recta real, de igual forma se presenta el siguiente ejemplo $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,\ n\in Z^{+}$, hallando los términos de la sucesión y mostrando la tendencia que tiene cada uno de estos términos, para luego manifestar que el límite de la sucesión es igual a 1.

A partir de esto se presenta la definición formal de límite de una sucesión dando algunos ejercicios para la aplicación del concepto, consecutivamente define la convergencia, divergencia de sucesiones y las propiedades de los límites de sucesiones.

En la unidad de límites se inicia con límites laterales partiendo de un ejemplo ilustrado de una función a trozos para posteriormente dar la definición formal de límite de una función, luego esta presentación estructural, se ratifica con los teoremas sobre límites, ejemplos y ejercicios para calcular los límites.

En los textos se observo que independientemente de la definición que se utiliza al exponer las propiedades de los límites se dan algunos ejercicios de aplicación que están más relacionados con rutinas y artificios algebraicos que con el análisis.

De igual forma se presentan algunos comentarios importantes como:

Para comprender la noción de límite es muy útil el trabajo de tablas y gráficas. Sin embargo, trabajar en esta forma no es muy eficiente para calcular límites por varias razones:

- ✓ A veces no conocemos la grafica de la función o es muy difícil de trazar.
- ✓ Para algunas funciones puede ser difícil la elaboración de la tabla utilizando únicamente una calculadora sencilla.
- ✓ No siempre el valor que se puede deducir de la tabla es correcto.

El uso adecuado de las propiedades de los límites facilita el cálculo y nos da certeza sobre los resultados obtenidos. (Espiral, norma, p. 130)

Algunos límites de funciones de la forma $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ con $g(x)\neq 0$, no se puede calcular aplicando la propiedad del cociente, ya que es posible que el límite del denominador sea cero. Esto no necesariamente significa que el límite no exista. Si el límite del denominador es cero, podemos eliminar la indeterminación (cuado sea posible), recurriendo a procesos de factorización o racionalización, de tal manera que al simplificar factores iguales se destruya la indeterminación. (Nuevo Pensamiento matemático, libros & libros S.A., p130).

En el texto **Matemáticas 11** norma**,** no se hace ningún comentario con respecto a la aplicación de las propiedades de los límites, pero se muestra un amplio repaso de factorización y racionalización en cada uno de los temas, de igual manera se sugiere al lector utilizar estos artificios algebraicos para dar solución a los ejercicios propuestos.

Posteriormente al tema de los límites en los textos se presenta continuidad de funciones, para disponer el camino a la diferenciación y la integración. Según Medina este es el orden lógico al interior de las matemáticas impuesto por Cauchy en su Tours d'Analysi en 1821. Pero es el orden inverso al desarrollo cronológico de la evolución de la noción de límite.

3.1.1. ANALISIS CONCEPTUAL

3.1.1.2. TIPO DE DEFINICION, PAPEL QUE JUEGA EN EL TEXTO MATEMATICAS 11, Santillna.

Definición intuitiva de límite.

La función f tiende hacia el límite L cerca de a, si se puede hacer que f(x) este tan cerca como queremos de L haciendo que x este suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a. se representa por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad f(x) \to L \quad \text{cuando } x \to a$$

Decir que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que la diferencia entre f(x) y L se puede hacer arbitrariamente pequeña con tal que x esté lo suficientemente cerca de a pero diferente de éste.

Después de presentar la definición informal aritmética, se presentan ejemplos relacionados a esta definición, luego se muestra la definición formal de límite que obedece a la concepción métrica del límite, así:

Definición rigurosa o formal del límite.

La función f tiende hacia el límite L en a, y significa: para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / \forall x \in Dom(f),\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

A continuación se hace uso de una secuencia de representaciones cartesianas de funciones abstractas para especificar que la función no requiere estar definida en el punto en el cual se calcula el límite y que el valor de δ depende del valor de ε dado, concluyendo que "cada valor pequeño de ε requiere una elección diferente de δ", esto se enfatiza en los ejemplos y ejercicios.

Consecutivamente se da la definición intuitiva de los límites laterales que corresponde a la concepción aritmética informal del límite, así:

Definición intuitiva de límite lateral.

Límites por la derecha y por la izquierda. Decir que el $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ significa que cuando x esta cerca, pero a la derecha de a, entonces f(x) esta cerca de L.
En forma semejante, decir que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ significa que cuando x esta cerca, pero a la izquierda de a, entonces f(x) esta cerca de L.

En el ejemplo que se muestra se relaciona la función $f(x) = [\![x]\!]$ para cuando x se aproxima por derecha y por izquierda a 2. Luego se da la definición formal de los límites laterales que corresponde a la concepción métrica del límite así:

Definición rigurosa o formal de limite lateral .

- ✓ Decir que el $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ significa para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- ✓ Decir que el $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ significa para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < a - x < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Límites infinitos y en el infinito

Si el valor de f(x) de una función crece o decrece sin cota cuando x tiende a a, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, sin embargo se puede escribir $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \vee \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ para indicar que f(x) crece o decrece sin límite.

Por último se dan algunos ejemplos relacionados con la aplicación de las definiciones dadas en el texto, a continuación se dejan ejercicios que dan evidencia del manejo de propiedades y relaciones aritméticas y algebraicas.

NUEVO PENSAMIENTO MATEMÁTICO, libros y libros s.a

En la introducción del tema de límites en este texto se empieza por el concepto de sucesión, definiendo en primer lugar el límite de una sucesión, esta definición tiene la concepción aritmética informal del límite, así:

$\lim_{n \to \infty} a_n = k$ Si para cualquier intervalo abierto (a,b) tal que $k \in (a,b)$ solo un número finito de término de a_n están fuera de (a,b).

El tratamiento que se le da a los límites de funciones corresponde en primera medida a una idea intuitiva de los límites laterales, la definición de esto tiene la concepción topológica formal del límite así:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ Si para cualquier intervalo abierto $(L-d, L+d)$ alrededor de L (tan pequeño como queramos), es posible encontrar un intervalo abierto $(a-e, a+e)$ alrededor de a, tal que para cualquier $x \in (a-e, a+e)$ entonces $f(x) \in (L-d, L+d)$.

Una vez expuesta la definición se da un ejemplo en el cual se muestra la aplicación de la misma, posteriormente se definen las propiedades de los límites y su aplicación en diversos ejercicios.

Límites infinitos.

Luego se muestra la definición de los límites infinitos, la cual corresponde a la concepción topológica del límite así:

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ Si para cualquier M>0 es posible encontrar un intervalo abierto $(a-e, a+e)$ alrededor de a, tal que para cualquier $x \in (a-e, a+e)$ con $x \neq a,\ f(x) > M$.

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ Si para cualquier M<0 es posible encontrar un intervalo abierto $(a-e, a+e)$ alrededor de a, tal que para cualquier $x \in (a-e, a+e)$ con $x \neq a,\ f(x) < M$.

En este texto los ejercicios que se proponen se enfatizan en las propiedades de los límites mas no en la utilización de la definición, este énfasis es básicamente algebraico, ya que el cálculo de los límites se reduce a la aplicación de factorizaciones y racionalizaciones.

ESPIRAL, grupo editorial norma.

Antes de presentar la definición, se traduce a lenguaje verbal así:

Si f es una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a, no necesariamente en a (la función puede no estar definida en a), y existe un número L tal que f(x) se aproxime cada vez más a L cuando x se acerca más y más a a, entonces se dice que el **límite de f(x) cuando x tiende hacia a es L** y se escribe

$\lim_{x \to a} f(x) = L$.

A partir de esta definición verbal se da la definición formal de límite de una función, la cual corresponde a la concepción métrica del límite así:

Si f es una función definida en un intervalo abierto que contenga el punto a, no necesariamente en a, decir que $\lim_{x \to a} f(x)$ es L, significa que para todo número positivo $\varepsilon > 0$ escogido arbitrariamente, se puede encontrar un número positivo $\delta > 0$ que depende de ε, tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Por último se definen los límites laterales de manera formal que corresponde a la concepción aritmética del límite así:

Límites laterales.

Si f es una función definida en un intervalo abierto que contenga el punto a, excepto posiblemente en a:

- ✓ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$
- ✓ si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ entonces el $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.
- ✓ Si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ no existe o el límite $\lim_{x \to a-} f(x)$ no existe, entonces tampoco existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$

Los ejemplos que se dan son para aplicar la definición de ε y δ se centran en el trabajo con desigualdades, propiedades del valor absoluto y algunas temáticas relacionadas con propiedades y relaciones aritméticas y algebraicas.

En síntesis lo que se puede observar en los tres textos es una presentación de las definiciones y propiedades que en numerosos ejercicios consisten en utilizar algoritmos y artificios algebraicos en el cálculo de límites, donde el límite queda determinado con el uso de formulas y algoritmos algebraicos, como lo manifiesta Cornu:

Se trata de extender el pensamiento algebraico *haciendo ver el cálculo como* una *extensión del álgebra. En la historia se presentó este hecho; muchos matemáticos se mostraban* reticentes al concepto de límite *y no lo admitían en el campo de las matemáticas (Cornu, 1982, p.2)*

3.1.1.3. EJEMPLOS Y EJERCICIOS.

La resolución de ejercicios no se contempla como un bloque de contenidos específico sino que constituye una aplicación de toda el área de matemáticas. En él, se incluyen ideas como que la resolución de problemas, el cual, es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, a la vez que es el método de aprendizaje más conveniente para el área de las matemáticas.

La estructura general, de los textos, hace uso de ejemplos ilustrativos para Introducir no tanto el significado de los conceptos, sino para aproximar a las definiciones de los conceptos, y funcionan como ejemplos modelo para resolver los ejercicios propuestos.

Además, tanto ejemplos como ejercicios se traducen en medios para reconocer la definición formal y ejercitar las notaciones correspondientes.

En los textos **Matemática 11**, **Espiral**, los ejemplos ilustrativos sirven para introducir la definición de “límite", se presentan utilizando una función polinómica y función racional, que no está definida en el punto en el cual se calcula el límite, pero el límite existe en ese punto, esta presentación se hace utilizando las representaciones gráficas y tabulares.

Los ejercicios pretenden reforzar la manipulación de la definición formal. Son ejercicios dedicados a demostrar límites utilizando la definición ε y δ, calcular el valor de δ para un ε dado o haciendo traslación de representaciones algebraicas de funciones de la forma $y = f(x)$ a representaciones tabulares, representaciones gráficas en un diagrama cartesiano y luego contrastar con las propiedades de los límites.

Ejemplo 2

Enunciado

Calculemos el límite de $f(x) = 2x - 1$ cuando x tiende a 2 y mostremos, usando la definición, que el número que hemos hallado efectivamente corresponde al límite buscado.

Solución

Estimemos el límite.

$\rightarrow 2 \leftarrow$

x	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
$2x - 1$	2,8	2,98	2,998		3,002	3,02	3,2

$\rightarrow 3 \leftarrow$

Tabla 3.7

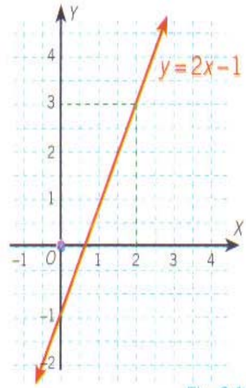


Fig. 3.12a

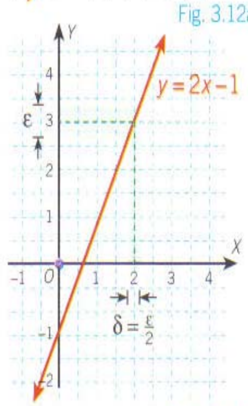


Fig. 3.12b

Analizando la tabla 3.7 y observando la gráfica de la función que se muestra en la figura 3.12a, parece que, cuando x se acerca a 2, $f(x)$ está cada vez más cerca de 3. Estimamos que $\lim_{x \to 2} 2x - 1 = 3$

- Para demostrar esto escojamos, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}01$, y hallemos el correspondiente δ que dependerá de ε, tal que si $|x - 2| < \delta$ entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

Tenemos que
$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= (2x - 1) - 3 \\ &= 2x - 1 - 3 \\ &= 2x - 4 \\ &= 2(x - 2) \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que $|f(x) - 3| = 2|x - 2|$ y por el supuesto, $|f(x) - 3| < \varepsilon$, con $\varepsilon = 0{,}01$, entonces:

$2|x - 2| < 0{,}01$ luego $|x - 2| < \frac{0{,}01}{2}$.

Concluimos entonces que $\delta = \frac{0{,}01}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$, ya que $|x - 2| < \delta$.

Vemos que basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ con $\varepsilon = 0{,}01$ para que $|f(x) - 3| < 0{,}01 = \varepsilon$ (figura 3.12b).

Así como se escogió $\varepsilon = 0{,}01$, habíamos podido escoger cualquier otro valor y con el mismo razonamiento encontraríamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Hemos probado entonces que $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$ porque para cualquier $\varepsilon > 0$ que escojamos, hallamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tal que si $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$. ■

Comentario

Cuando hallamos el límite L de una función f en un punto a, calculando imágenes de puntos cercanos a a, podemos decir que hemos encontrado un posible valor para el límite. Sólo cuando mostramos que la distancia de $f(x)$ a L se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando valores de x suficientemente cercanos a a, hemos probado que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a.

ESPIRAL, norma

3. Sean las funciones $F(x) = \begin{cases} -2, \text{ si } x < 0 \\ x + 1, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$, y $H(x) = [\![x]\!]$

a. Halla dominio y rango de cada función y traza su gráfica.

b. Estima un valor posible para cada uno de los límites que se piden, si ellos existen.

i. $\lim_{x \to -1} F(x)$ ii. $\lim_{x \to 0} F(x)$

iii. $\lim_{x \to 2} F(x)$ iv. $\lim_{x \to -1} H(x)$

v. $\lim_{x \to 0} H(x)$ vi. $\lim_{x \to 1{,}5} H(x)$

4. Traza la gráfica de cada función y estima el valor de cada límite.

a. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

b. $\lim_{x \to 0} [\![x]\!]$

c. $\lim_{x \to 0} \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x^2}$

e. $\lim_{x \to 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, \ si \ x \leq 0 \\ \cos x, \ si \ x \geq 0 \end{cases}$

f. $\lim_{x \to 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2, \ si \ x \leq 0 \\ \sqrt{x} - 1, \ si \ x > 0 \end{cases}$

g. $\lim_{x \to 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \ si \ x \geq 0 \\ 1 - x, \ si \ x < 0 \end{cases}$

h. $\lim_{x \to 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, \ si \ x \leq 0 \\ 1 - \cos x, \ si \ x > 0 \end{cases}$

Comunicación

5. Analiza cada una de las afirmaciones que se hacen sobre la función cuya gráfica se muestra en la figura 3.14 para decidir si son verdaderas o falsas. Compara las respuestas con las de un compañero o compañera y juntos busquen explicaciones para los acuerdos e intenten llegar a consensos en los desacuerdos.

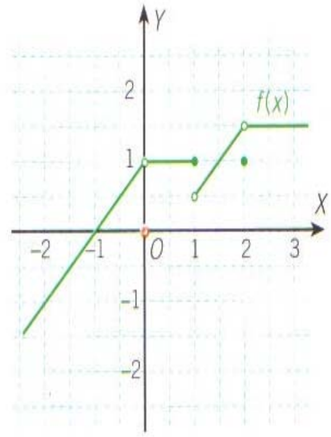


Fig. 3.14

a. $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ b. $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

c. $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe d. $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

e. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe para toda $x \neq 1$

6. Para la función h, cuya gráfica se muestra en la figura 3.15, discute con un compañero o compañera si tiene sentido hablar de $\lim_{x \to 3} h(x)$. (Ayuda: revisen la definición formal de límite.)

ESPIRAL, norma

Ejemplos:

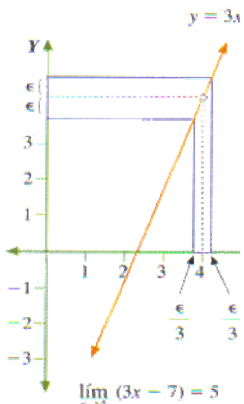
1. *Probemos que el* $\lim\limits_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

Análisis preliminar. Sea ϵ un número positivo cualquiera, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 4| < \delta \;\Rightarrow\; |(3x - 7) - 5| < \epsilon$$

Consideremos la desigualdad de la derecha:

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |3x - 12| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |3(x - 4)| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |3|\,|x - 4| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |x - 4| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$



$\lim\limits_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

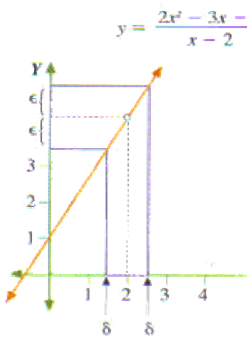
Veamos ahora cómo escoger δ, en concreto, $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$. Por supuesto, también funcionaría cualquier valor menor para δ, por ejemplo $\delta' = \dfrac{\epsilon}{6}$.

Prueba formal. Sea $\epsilon > 0$, escogemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$. Entonces, $0 < |x - 4| < \delta$ implica:

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3\,|x - 4| < 3\delta = \epsilon$$

Si se lee esta cadena de igualdades y desigualdades de izquierda a derecha y se usan las leyes transitivas, concluimos que

$$|(3x - 7) - 5| < \epsilon$$



$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

2. *Probemos que el* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

Análisis preliminar. Dado $\epsilon > 0$, estamos buscando un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \epsilon$$

Ahora, para $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5\right| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |(2x + 1) - 5| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |2(x - 2)| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |2|\,|x - 2| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |x - 2| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Esto indica que $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ funcionará (véase la figura del margen).

Prueba formal. Sea $\epsilon > 0$. Escogemos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, $0 < |x - 2| < \delta$ implica $\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2 - 5}\right| = \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2 - 5}\right| = |2x + 1 - 5|$

$$= |2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2\delta = \epsilon$$

La cancelación del factor $x - 2$ es legítima porque $0 < |x - 2|$ implica que $x \neq 2$; es decir, que se ha evitado la división entre 0.

En el texto **Matemáticas 11**, se incorpora el uso de las calculadoras graficadoras como medio para obtener valores de la función dada cercanos al punto, para luego expresarlos y organizarlos en una tabla y posteriormente utilizar los resultados para encontrar el "límite" de la función.

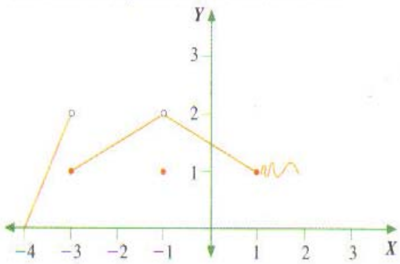
MATEMATICAS 11, santillana

3. Utiliza tu calculadora para obtener valores de la función dada cercanos al punto límite a. Organiza estos valores en una tabla y utiliza los resultados para encontrar el punto límite o para concluir que éste no existe. Asegúrate de poner tu calculadora en MOD RAD .

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ **e)** $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ **g)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

b) $\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} 2x}$ **d)** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ **f)** $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x-1}$ **h)** $\lim_{u\to \pi/2} \frac{\tan u}{u}$

4. Dada la gráfica de la función f que aparece en la figura, encuentra el límite indicado y/o el valor de la función, o establece que el límite no existe.



a) $\lim_{x\to -3} f(x)$ **c)** $f(1)$ **e)** $f(-3)$ **g)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $f(-1)$ **d)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ **f)** $\lim_{x\to -1} f(x)$ **h)** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

Nota: $x \to 1^-$ *significa "x se aproxima a 1 por la izquierda".*

$x \to 1^+$ *significa "x se aproxima a 1 por la derecha"*

En los ejercicios 5 al 7 bosqueja la gráfica de la función, encuentra cada uno de los límites indicados o establece que no existen.

5. $g(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ si } x < 1 \\ x-1 \quad \text{si } 1 < x < 2 \\ 5-x^2 \quad \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **a)** $\lim_{x\to 1} g(x)$, **b)** $\lim_{x\to 2} g(x)$

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 5-x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **a)** $\lim_{x\to 0} f(x)$, **b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

7. $f(x) = x - [\![x]\!]$ **a)** $\lim_{x\to 0} f(x)$, **b)** $\lim_{x\to 1/2} f(x)$

8. Bosqueja, lo mejor que puedas, la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a) $\text{Dom}(f) = [0, 4]$ **c)** $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ **e)** $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$

b) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$ **d)** $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ **f)** $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$

Además se introducen ejercicios cambiando el orden de traslación entre sistemas de representación como Gráfica cartesiana - ecuación algebraica de la función.

En el texto **Nuevo Pensamiento Matemático** la introducción al concepto de límite se hace por sucesiones, el ejemplo que se muestra es una sucesión convergente. En el ejemplo de la presentación de límite de una función se utiliza una función a trozos.

Pero estos ejemplos funcionan únicamente como modelo para resolver problemas similares en los ejercicios propuestos.

Ejemplo 5. *Límites de formas indeterminadas con procesos de racionalización*

Halla $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-5}-2}$.

Solución

Para hallar el dominio de la función realizamos: $\sqrt{x^2-5}-2 \neq 0$, luego:

$$\sqrt{x^2-5} \neq 2$$
$$x^2-5 \neq 4$$
$$x^2 \neq 9$$
$$\boxed{x \neq \pm 3} \text{ y}$$
$$x^2-5 \geq 0 \to x^2 \geq 5$$
$$x > \sqrt{5} \text{ ó } x < -\sqrt{5}$$
$$\text{Dm}f = [(-\infty, -\sqrt{5})] \cup [(\sqrt{5}, \infty)] - \{3, -3\}$$

Recuerda que...

El conjugado de $(a+b)$ es $(a-b)$.

El conjugado de $(a-b)$ es $(a+b)$.

El conjugado de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Si aplicamos la propiedad del cociente, obtenemos:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}-2} = \frac{-3+3}{\sqrt{(-3)^2-5}-2} = \frac{0}{0}, \text{ lo cual es una indeterminación.}$$

Racionalizamos la expresión $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-5}-2}$ multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Entonces:

$$\frac{(x+3)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)} = \frac{(x+3)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{x^2-5-4} = \frac{(x+3)\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{x^2-9}.$$

Factorizando el denominador y simplificando:
$$\frac{\cancel{(x+3)}\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{\cancel{(x+3)}(x-3)}$$

NUEVO PENSAMIENTO, libros y libros s.a

Entonces $f(x)$ puede expresarse como:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{x-3} \text{ para } x \neq 3 \text{ y } x \neq -3. \text{ Por tanto:}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}-2} = \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x-3} = \lim_{x \to -3} \frac{\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{x-3} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

131

Ejercicio 23.

1. Calcula los siguientes límites, si existen:

a. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-8}{x^4}$

c. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+2}{x+1}$

d. $\lim\limits_{x \to -8} \frac{x+3}{x^2-64}$

e. $\lim\limits_{x \to -10} \frac{x^3-x}{x-10}$

f. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

2. Halla el límite en cada uno de los siguientes ejercicios.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x+1}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3+3x+1}{2x^2+4x-5}$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^3+x}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^3+x}$

e. $\lim\limits_{x \to \infty} x^4$

f. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3+1}$

g. $\lim\limits_{x \to \infty} 3x+2$

h. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^5-6x^4+3x^2}{3x^3+5x+6x}$

i. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+5}{x+3}$

j. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$

k. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+1}{4x^2+x+1}$

l. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2-2x}+x$

m. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3+2}{x^3+x}$

n. $\lim\limits_{x \to \infty} x-\sqrt{x^2+x}$

o. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{25x+1}{x+2}$

p. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4+3x}{3x^3+4x^2}$

q. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

r. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x}-x$

s. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

NUEVO PENSAMIENTO, libros y libros s.a

3.1.1.4. REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y SIMBÓLICAS

Las definiciones de los contenidos matemáticos que aparecen en los libros de texto son productos que esconden el proceso histórico que las ha generado. Por ello, para comunicar estos contenidos en el proceso de enseñanza aprendizaje, los libros de texto no se limitan únicamente a dar su definición, sino que se valen también de diferentes recursos para facilitar la comprensión a sus estudiantes. Entre los diferentes recursos que se suelen utilizar, se destaca de forma preferente el uso de representaciones gráficas y simbólicas. Carmen Azcarate (2003.)

Para el análisis de las representaciones gráficas y simbólicas podemos citar las tomadas por Medina (2001) en donde se observa que sistema de representación requieren para tratar de interpretar el significado de límite.

Por ejemplo:

- ✓ Representaciones geométricas de aproximaciones de áreas, volúmenes, longitudes (Concepción Geométrica)

- ✓ Representaciones numéricas como sucesiones de números o sumas numéricas Infinitas (Concepción Aritmética),

- ✓ Representaciones tabulares, gráficas como puntos en la recta real o curvas en el plano cartesiano (Concepción Newton, Concepción Leibniz, Concepción Euler), razones entre magnitudes variables (Concepción Newton, Concepción Leibniz)
- ✓ Representaciones y algoritmos algebraicos (Concepción Algebraica),
- ✓ Representaciones simbólicas especificas del tipo $\varepsilon - \delta$, con uso de cuantificadores, valores absolutos, desigualdades en el conjunto de los números Reales, o $\lim f(x)$ (Concepción Analítica), tipo de curvas utilizadas para explicar el concepto de límite de una función (Concepción Analítica) expresiones verbales informales del tipo dinámico como: los valores “se acercan cada vez más”, "se aproximan Indefinidamente”, "tienden a” (Concepción Aritmética. D'Alembert. Cauchy).

MATEMÁTICAS 11.

Representaciones gráficas.

En el texto las representaciones gráficas son abundantes, de igual forma hay cuadros resumen de las operaciones con límites donde aparecen las indeterminaciones. Así mismo se da una interpretación geométrica del límite y se utiliza la representación gráfica de algunas funciones polinómicas, racionales, a trozos y trascendentes, esto se hace en ocasiones con la ayuda de una calculadora graficadora. Las representaciones gráficas empleadas son cartesianas. Otras representaciones gráficas son tablas-resumen tanto de operaciones con límites como de expresiones indeterminadas y de síntesis de la unidad.

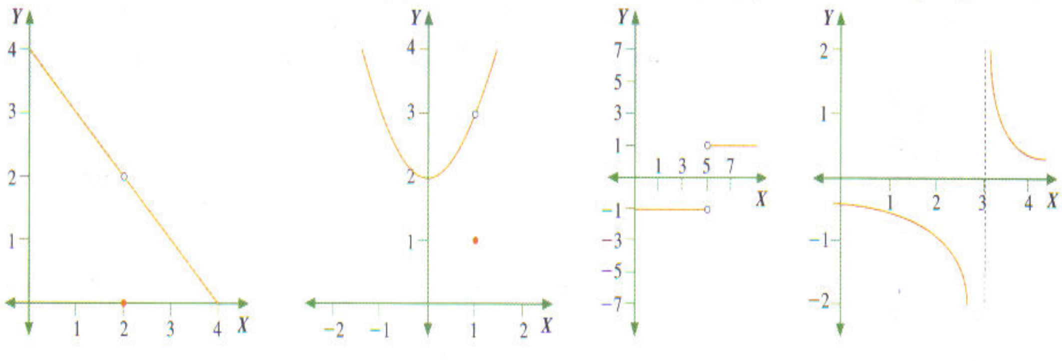
2. A partir de cada gráfico, estima el límite de la función (si existe).

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\qquad$ $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $\qquad$ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{|x - 5|}{x - 5}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

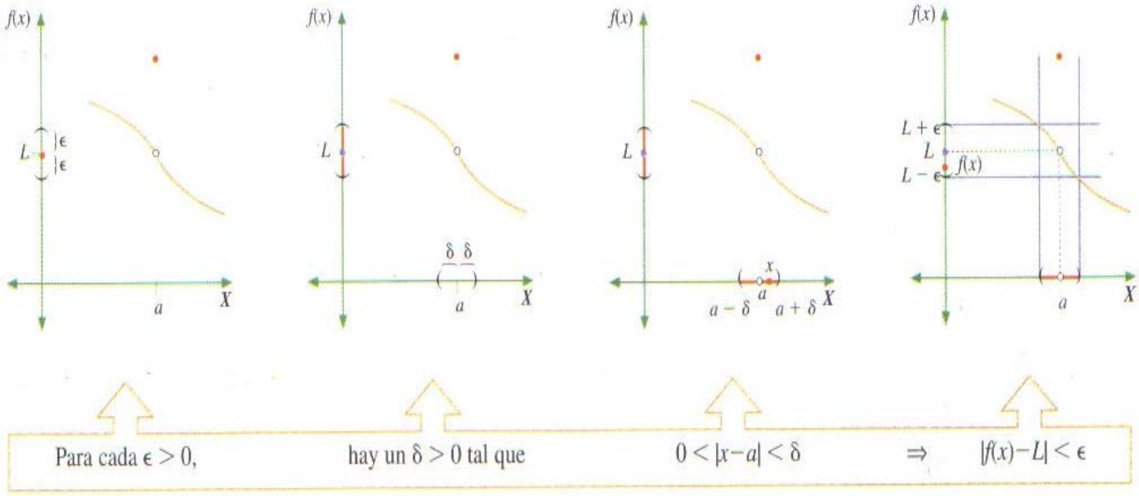


Definición rigurosa o formal de límite

La función f tiende hacia el límite L en a, y *significa: para todo* $\epsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que, para todo x, si* $0 < |x - a| < \delta$, *entonces* $|f(x) - L| < \epsilon$, *es decir:*

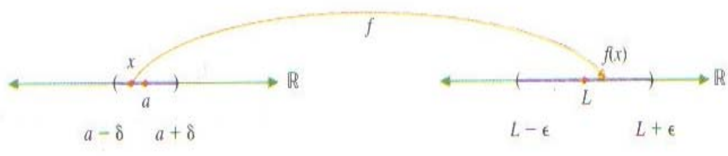
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in Dom(f), 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Las siguientes gráficas nos ayudarán a comprender mejor esta definición.



Es importante enfatizar que primero se da el número ϵ y se debe hallar el número δ, con cierta condición.

La definición de límite dice que si se da cualquier intervalo pequeño $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ con centro en L, entonces se puede encontrar un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con centro en a, tal que f aplica todos los puntos de $(a - \delta, a + \delta)$ (excepto posiblemente a) en el intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.



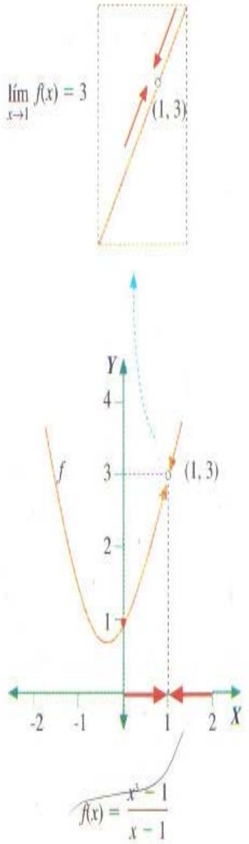
Representaciones simbólicas

La notación que se usa para el límite está orientada a la idea de variable. Las variables se representan con las letras minúsculas del abecedario y los infinitésimos con las letras griegas correspondientes a las utilizadas para las variables. Se utiliza el símbolo ∞ para representar el infinito. Asimismo, se hace uso del valor absoluto (con la notación clásica de las barras) en algunas pruebas de límites. Además de las expresiones simbólicas, aparecen expresiones verbales a lo largo del texto como: “x se aproxima a”, “tan pequeño como se quiera”, “n crece infinitamente”, “x este lo suficientemente cerca de a”, “x que equidista de”, “x este cerca de”. También aparece una simbolización del límite, los autores escriben: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, o bien la diferencia entre f(x) y L se puede hacer arbitrariamente pequeña con tal que x este lo suficientemente cerca de a, pero diferente de este.

Algunas representaciones planteadas son:

- ✓ Si A_n es el área del polígono inscrito de n lados, cuando n aumenta, el valor de A_n se hace más y más cercano al del área del círculo. Por eso, afirmamos que el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos inscritos, y escribimos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n;\ n \geq 3$$



4. *La función* $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ *no está definida en el punto de abscisa* 1.

Cuando x se aproxima a 1, *¿hacia dónde tiende la función?*

Para contestar a esta pregunta, utilizaremos dos conjuntos de valores x: uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro por la derecha. La siguiente tabla muestra los correspondientes valores de $f(x)$.

$x < 1$ | x se acerca a 1 por la izquierda → ← x se acerca a 1 por la derecha | $x > 1$

x	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25	1,5
$f(x)$	1,750	2,313	2,710	2,970	2,997	?	3,003	3,030	3,310	3,813	4,750

$f(x)$ se acerca a 3 → ← $f(x)$ se acerca a 3

Al marcar estos puntos, observamos que la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto (1, 3). Aunque x no puede ser igual a 1, podemos acercarnos cuanto queramos a 1, y como resultado $f(x)$ se aproxima cuanto queramos al valor 3. Utilizando notación de límites, afirmamos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3, y lo denotamos por:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \quad \vee \quad \frac{x^3 - 1}{x - 1} \to 3 \text{ cuando } x \to 1$$

Para estar seguros de que estamos en la pista correcta, necesitamos una clara comprensión del significado de la palabra límite.

$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5} 2x^2 - \lim_{x\to 5} 3x + \lim_{x\to 5} 4 \qquad \bullet \text{ propiedad 3 y 4.}$$

$$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \qquad \bullet \text{ propiedad 5.}$$

$$= 2(5)^2 - 3(5) + 4 \qquad \bullet \text{ propiedad 8,2 y 1}$$

$$= 39$$

NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO.

Representaciones gráficas

En el texto las representaciones más utilizadas corresponden a tablas, gráficas cartesianas y otras ligadas al tipo de definición que se utiliza. Cuando se presenta el concepto de límite mediante la concepción aritmética, es decir por sucesiones, aparecen tablas con los valores de dichas sucesiones y las correspondientes tablas para los valores de f(x). En cuanto a la definición topológica se utilizan las gráficas cartesianas que aparecen presentando las características que se interesan resaltar, además se usan para comprobar que se verifica dicha definición en casos particulares Por ejemplo, se representan entornos de un punto, incluso cuando se trata del infinito. Conjuntamente hay otros tipos de representaciones gráficas como la recta numérica en el tema de límites de una sucesión.

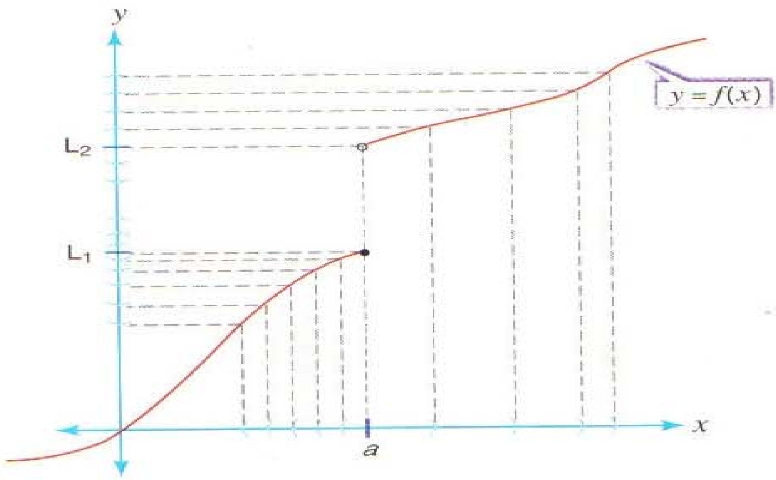
LÍMITES DE FUNCIONES

En lecciones anteriores hemos hablado de intervalos pequeños, de números cercanos a otros, de cantidades acercándose a cero, etc. Sin embargo, el significado de estas expresiones no es muy preciso y por eso es necesario interpretarlas de manera más formal. Para esto estudiaremos el concepto de límite de una función.

Comenzaremos estudiando el comportamiento de una función cuando los valores del dominio se aproximan a un valor fijo "a". Este valor "a" puede estar o no en el dominio de definición de la función.

Límites laterales

Determinar los límites laterales de una función significa analizar el comportamiento de la función $f(x)$ cuando los valores de x que pertenecen al dominio de $f(x)$ se aproximan al valor fijo "a" tanto por la derecha como por la izquierda. Analicemos esto en la gráfica de $y = f(x)$.



Observa que para cualquier intervalo abierto en y alrededor de L_1 (tan pequeño como se quiera), siempre es posible encontrar un intervalo abierto (x_1, a) en x, tal que las imágenes de los valores de este último pertenezcan al intervalo escogido en y.

De igual forma, para cualquier intervalo abierto en y alrededor de L_2, siempre es posible encontrar un intervalo abierto (a, x_2) en x, tal que las imágenes de los valores de este último pertenezcan al intervalo escogido en y.

Lo anterior se simboliza así:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

Se lee: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es L_1.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Se lee: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es L_2.

Representaciones simbólicas

Todos utilizan $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Las notaciones evolucionan desde las correspondientes a la definición de límite por sucesiones hasta la definición topológica, adaptándose a cada tipo de definición, aparecen referencias a entornos. En el texto se utilizan representaciones simbólicas de entornos centrados $(a-e, a+e)$ y se tratan de forma exclusivamente verbal, por ejemplo:

Si los dos límites laterales son diferentes o cualquiera de ellos no existe, entonces el límite de la función no existe. Esto significa que para cualquier intervalo abierto en Y alrededor de L (por pequeño que este sea), es posible encontrar un intervalo abierto de x alrededor de a, tal que las imágenes de los valores de este último intervalo pertenezcan al intervalo escogido en y.

Algunas representaciones planteadas son:
Analicemos esta propiedad (límite de un producto) desarrollando el siguiente ejemplo:
Si $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 5x + 1$ Calculemos $\lim_{x \to 4}\left[f(x) \bullet g(x)\right]$:
Evaluemos el límite pedido:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4}\left[f(x) \bullet g(x)\right] &= \lim_{x \to 4}\left[(3x+2)(5x+1)\right] \\ &= \lim_{x \to 4}\left[15x^2 + 3x + 10x + 2\right] \\ &= \lim_{x \to 4}(15x^2 + 13x + 2) \\ &= 15(4)^2 + 13(4) + 2 = 240 + 52 + 2 = 294\end{aligned}$$

Evaluamos por separado el límite de cada una de las funciones:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4}(3x+2) &= 3(4) + 2 \\ &= 14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4}(5x+1) &= 5(4) + 1 \\ &= 21\end{aligned}$$

Efectuamos el producto de los límites:

$$\lim_{x\to 4} f(x) \bullet \lim_{x\to 4} g(x) = 14 \times 21 = 294$$

Es decir:

$$\lim_{x\to 4}\left[f(x) \bullet g(x)\right] = \lim_{x\to 4} f(x) \bullet \lim_{x\to 4} g(x)$$

ESPIRAL.

Representaciones gráficas

Se ha notado un aumento considerable de representaciones gráficas respecto a los libros analizados anteriormente, manteniéndose la relación existente entre el tipo de definición presentada y la representación gráfica utilizada. Las tablas que aparecen, se utilizan para aproximarse al valor de la variable estudiando los correspondientes valores de f(x), es decir se va calculando la diferencia entre los valores de la función y el candidato al límite. Todo ello acorde con la definición que se utiliza. Las gráficas cartesianas como apoyo a las distintas definiciones de límites. El énfasis que los autores ponen en los límites infinitos se traduce en una propagación de representaciones gráficas de asíntotas por medio de líneas punteadas. Otras representaciones gráficas son tablas-resumen tanto de operaciones con límites, como de expresiones indeterminadas y otras de síntesis de la unidad.

Analicemos la función $h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ en las proximidades de 0.

Si hacemos una tabla tomando valores de x cercanos a 0, pero de tal manera que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ sea fácil de calcular, tenemos:

$\rightarrow 0$

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Tabla 3.6

A medida que x se aproxima a 0, $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ toma todos sus posibles valores entre -1 y 1 y vuelve a empezar; nunca se quedará estable. Lo mismo ocurre si tomamos valores negativos cercanos a 0. Por tanto, el límite de $h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ cuando x tiende a 0 no existe.

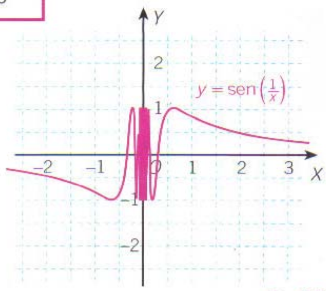


Fig. 3.8

La figura 3.8 nos muestra una gráfica aproximada de la función en las proximidades de 0.

En los ejemplos que trabajamos y en la definición de límite que hemos utilizado, usamos expresiones como "*estar próximo a*", "*acercarse a*" pero no precisamos su significado en términos matemáticos. Esta precisión es necesaria para dar una definición formal de límite.

Analicemos la figura 3.9.

- Los puntos del intervalo abierto (0, 2) están próximos a 1. Su distancia a 1 es menor que 1; $|x - 1| < 1$.
- Los puntos del intervalo (0,5, 1,5) están más próximos a 1. Su distancia a 1 es menor que 0,5; $|x - 1| < 0{,}5$.
- Si queremos puntos más próximos a 1, tomamos valores menores para la distancia a 1. $|x - 1| < a$, significa que la distancia de x a 1 es menor que a.

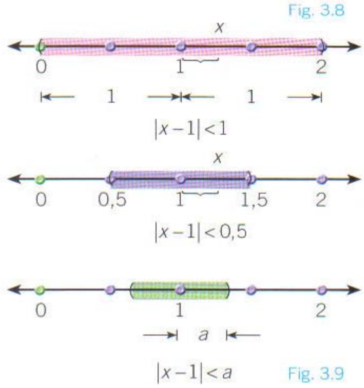
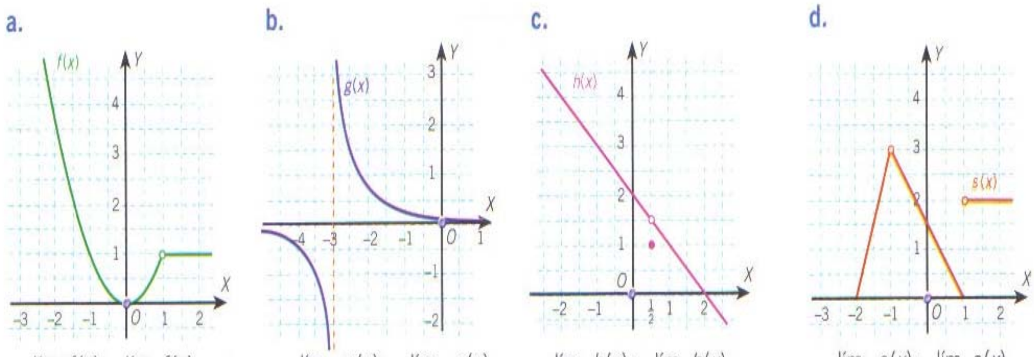


Fig. 3.9

2. Para cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.13 determina si los límites indicados existen. En caso de que existan estima un posible valor. Explica tus respuestas.



a. $\lim_{x \to 1} f(x)$; $\lim_{x \to 2} f(x)$

b. $\lim_{x \to -2} g(x)$; $\lim_{x \to -3} g(x)$

c. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} h(x)$; $\lim_{x \to 0} h(x)$

d. $\lim_{x \to -1} s(x)$; $\lim_{x \to 1} s(x)$

Fig. 3.13

Enunciado

Mostremos que el límite de $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ cuando x tiende a 0 es 0.

Solución

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

Sin embargo, podemos aplicar la propiedad L5.

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ y $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ para todo x, entonces $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

La gráfica de la figura 3.21 muestra el comportamiento de la función en las proximidades de 0.

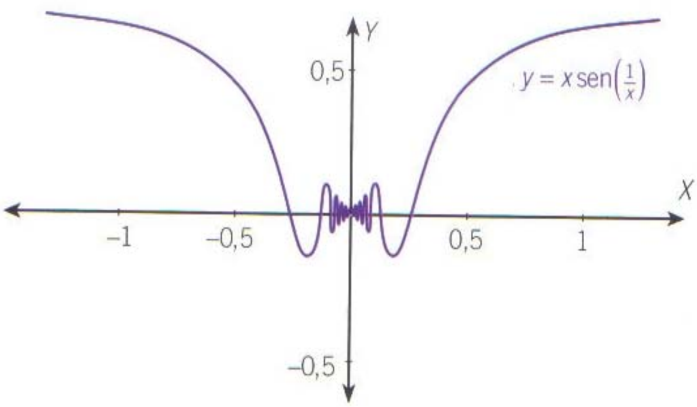


Fig. 3.21

Representaciones simbólicas

Las representaciones simbólicas son muy abundantes en todo el texto considerado el lenguaje de ε y δ, además aparecen símbolos, subíndices, valores absolutos, flechas, etc., aunque no aparecen los símbolos de los cuantificadores, se nombran verbalmente de la siguiente forma: …"**para todo** número positivo… se **puede encontrar un número**"…

Igualmente utiliza la notación l$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, El uso del lenguaje de valor absoluto viene determinado por el peso que los autores dan a la definición métrica, dicha definición juega un papel importante, ya que las representaciones utilizadas son acordes con lo que se expone. Sin embargo durante el desarrollo de la unidad los autores tienen una tendencia a la simplificación del simbolismo, existiendo un aumento en el uso de expresiones del tipo: “x tiende hacia a”, “se aproxima cada vez mas”, “valores muy cercanos a”.

Algunas representaciones planteadas son:

Para cada una de las siguientes funciones hallemos el límite indicado

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-3x-3}{x+1}$

Aplicamos las propiedades vistas para hallar el límite del numerador y el denominador

$$\lim_{x\to 2}(x^3+x^2-3x-3)=(2)^3+(2)^2-3(2)-3=3$$
$$\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$$

Por tanto el l $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-3x-3}{x+1}=\frac{3}{3}=1$

El predominio de la concepción métrica lleva a apoyarse en los registros de representación simbólica de la definición formal acompañada de traducción verbal en forma retórica y la notación como operación. El trabajo en el marco algebraico lleva las representaciones asociadas a la función como expresión analítica, representación cartesiana y tabular. (Ana C, Medina 2001, p.147)

Las representaciones gráficas y tabular resultan ser de carácter notorio en la justificación de la definición formal pero aportando a los significados del concepto.

Por ejemplo, en la tabla se pierde la idea de considerar infinitos acercamientos que trascienden lo numerable y lo sucesivo. En la grafica cartesiana el concepto de límite es una manifestación de “aproximación local”, lo cual involucra la idea de infinito en un proceso de razonamiento abstracto, no visualizable ni sensible. (Llorens, 1996, p.14, citado por Medina, 2001)

Al comparar la presentación del concepto de "límite” en los libros de texto se observó que el modelo didáctico que se expone es similar y se ajusta al modelo teoría - práctica, ya que los ejemplos ilustrativos dan pie para presentar la definición, seguida de ejemplos y ejercicios que pretenden desarrollar destreza para su manipulación y aplicación, presentando una visión estática del concepto de límite.

En los textos Nuevo Pensamiento Matemático y Espiral se refleja cierta intención de insertar problemas de obtención de funciones como modelos de situaciones del mundo real, así como para mostrar algunas aplicaciones del cálculo.

Por ejemplo:

“*A medida que una partícula se acerca a la velocidad de la luz, su longitud se contrae aproximándose a cero. Esto se puede expresar como* $\lim_{V \to C} L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} = 0$*, lo cual significa matemáticamente que:*

a. La velocidad del cuerpo nunca puede alcanzar la velocidad de la luz.

b. Si tomamos una longitud L_1 *cercana a cero, encontramos velocidades cercanas a la de la luz para las cuales la longitud del cuerpo se contrae más que* L_1*.*

c. Cuando un cuerpo se mueve a la velocidad de la luz se desaparece, porque su longitud se volverá cero.

d. *El límite de la velocidad de un cuerpo es la velocidad de la luz.* (Nuevo pensamiento matemático, 2004, p 149).

"*En un tanque que contiene 200 litros de agua se introduce agua salada con una concentración de 0,05 kg de sal por litro.*

a. *Si entra 1.5 litros por minuto halle una expresión para el volumen V de agua y la cantidad S de sal en el tanque en función del tiempo y en minuto.*
b. *Encuentre una expresión para hallar la concentración C de sal en el tanque después de t minutos.*
c. *Calcula la concentración de sal en el tanque después de media hora.*
d. *¿Cuánto tiempo se requiere para que la concentración de sal en el tanque sea de 0,025 kg por litro?*
e. *Halle el límite de C cuando t tiende a más infinito. Analiza y explica el resultado.*
f. *¿Es posible que la concentración de sal en el tanque llegue a ser mayor que 0,05 kg de sal por litro después de un determinado tiempo? Explica tu respuesta usando el resultado obtenido en el ítem anterior".* (Espiral, 2005, p 154.)

Cabe anotar que este tipo de problemas se encuentran en el texto nuevo pensamiento matemático en una sección llamada "Evaluación de Competencias", mientras que en el Espiral se encuentran a lo largo del tratamiento del concepto de límite.

3.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO-COGNITIVO

Como ya se mencionó anteriormente, los prólogos o las introducciones a las diferentes unidades nos dan un indicio sobre las capacidades que los autores pretenden desarrollar en los estudiantes.

MATEMÁTICA 11.

En el texto se presenta una introducción sobre el concepto de límite afirmando que *"La idea de límite es una de las más profundas y creativas de la matemática y, además, es intuitivamente muy clara..."* luego se expone una reseña histórica sobre la aparición de la idea de límite. Terminando la introducción se muestra una fotografía describiéndola así: "...se ve el corte de un caracol nautilus, que viene a ilustrar de manera natural el "punto límite" al que "tendería" la curva espiral." A partir de esto observamos que la intención del autor es introducir al lector, mediante un ejemplo real, a la idea intuitiva de límite.

Los autores exponen en un cuadro al comienzo de cada unidad titulado "aprendemos" donde se muestran claramente las capacidades que los autores pretenden desarrollar en los estudiantes, de mencionaremos dichas capacidades:

- ✓ A explorar límites de sucesiones con calculadora.
- ✓ A calcular límites de funciones.
- ✓ A calcular límites laterales.
- ✓ Técnicas para calcular límites aplicando sus propiedades.
- ✓ A calcular límites infinitos y en el infinito.
- ✓ A analizar la continuidad de funciones.
- ✓ Cómo verificar soluciones a ecuaciones con la calculadora usando la propiedad del valor absoluto.
- ✓ Como solucionar problemas mediante aproximaciones sucesivas.

El método predominante para alcanzar estos objetivos consiste en presentar muchos y variados ejemplos y ejercicios intercalados en el texto. Al final de cada capítulo aparecen numerosos ejercicios de revisión y recapitulación.

Las demostraciones no son totalmente rigurosas, sino que tienen ciertos elementos intuitivos. La idea es la de una matemática ya hecha que el alumno debe memorizar y prácticar resolviendo ejercicios. De acuerdo con las ideas anteriormente mencionadas, las capacidades que se pretenden desarrollar son las siguientes: aprendizaje de las definiciones, no sólo desde el punto de vista verbal, sino desde el simbólico, reglas lógicas, conocimiento del método deductivo, la aplicación de las definiciones a la resolución de ejercicios y el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas, con algunas actividades para desarrollar el uso de la tecnología en el aula, como lo es, la calculadora.

NUEVO PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

En el texto se presenta la siguiente introducción: *"En las lecciones anteriores hemos hablado de intervalos pequeños de números cercanos a otros, de cantidades acercándose a cero, etc. Sin embargo, el significado de estas expresiones no es muy preciso y por eso es necesario interpretarlas de manera más formal. Para esto estudiaremos el concepto de límite de una función."* La intención del autor es dar sentido a los temas anteriores, formalizándolos mediante el concepto de límite de una función, para ello se basa en la concepción de aritmética del límite.

Como se mencionó anteriormente aparece un recuadro en la parte izquierda del texto que deja ver lo que se va a aprender, para qué sirve y cuáles saberes previos se necesitan para abordar el tema. Esto sirve como evidencia para observar las intenciones que el autor quiere desarrollar, específicamente lo que se va a aprender y para que sirve:

¿Qué vas a aprender?

- A analizar por medio del concepto de límite, el comportamiento de una función cuando los valores del dominio se acercan a algún valor o tienden a infinito.

¿Para qué te sirve?

- Para identificar los límites de una función.
- Para hallar las asíntotas horizontales y verticales.
- Para analizar la variación de dos magnitudes dependientes.

Ideas previas

- Manejar el concepto de función.
- Saber graficar funciones.
- Saber determinar el límite de una sucesión.

Por lo tanto suponemos que las capacidades que se pretenden desarrollar son: adquisición del lenguaje de la matemática moderna, el conocimiento de la definición de límite en este lenguaje, el aprendizaje de las definiciones mediante actividades dirigidas, adquisición de las herramientas necesarias para la resolución de ejercicios y comprensión de algunas propiedades fundamentales, ya que lo que se pretende es: Hallar unas reglas sencillas que permitan calcular con seguridad y rapidez el límite de variables complicadas en las que intervienen operaciones algebraicas y algunas trascendentes.

ESPIRAL.

En el texto se presenta un problema de funciones como modelo de situaciones del mundo real relacionada con una ilustración que se da como introducción relacionada al tema de la unidad, durante el desarrollo de la misma se da solución a la situación.

En este texto el concepto de limite es concebido como una preparación para la derivada, esto se evidencia cuando los autores afirman *“En esta sección trataremos de comprender este concepto trabajando casos sencillos, con el objetivo de prepararnos para comprender el concepto de derivada”*

Las actividades que se presentan en el texto buscan que el alumno investigue, conjeture y rectifique, si es preciso, aportar materiales para el trabajo de los estudiantes como son las pruebas de estado “icfes” las cuales están dirigidas a “aquellos estudiantes más exigentes consigo mismos o a aquéllos que necesiten de repeticiones o mayor práctica”. De igual forma al final del capitulo presentan un taller de profundización, que tiene como fin desarrollar algunas competencias.

En este libro observamos las siguientes características:

- ✓ La presentación intuitiva de los conceptos antes de su desarrollo formal.
- ✓ El apoyo en la historia de las matemáticas y en sus aplicaciones.
- ✓ La actividad intensa de los estudiantes a través de la realización de numerosos ejercicios y problemas, siendo éstos de diferentes tipos.
- ✓ La conexión con la realidad y con otras ciencias, que se manifiesta en la presentación de diversos fenómenos que se pueden organizar desarrollando los conceptos matemáticos.
- ✓ El énfasis puesto en los procedimientos de resolución de problemas.
- ✓ La incorporación de apoyos didácticos como resúmenes, utilización de la calculadora, orientación en el uso de herramientas matemáticas y ejercicios de autoevaluación y coevaluación.
- ✓ La presentación de anécdotas, hechos curiosos y llamativos para resaltar el aspecto social, lúdico y cultural de las matemáticas, “lectura comprensiva”

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: aprendizaje comprensivo de la definición partiendo de las intuiciones hasta llegar a su formalización, desarrollo de estrategias de pensamiento (experimentar, observar, buscar pautas y regularidades, formular conjeturas), comprensión, interpretación y predicción de ciertos fenómenos y reconocimiento de la aplicabilidad de las matemáticas a otras ciencias.

3.3. ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

MATEMATICAS 11.

En torno a las propias matemáticas.

En el texto se presentan ejemplos relacionados a la matemática, un ejemplo ya mencionado, es el calculo del área de un circulo utilizando como marco de referencia el área de algunos polígonos inscritos, además se muestra otro ejemplo el cual es:

- ✓ El matemático italiano Bonaventura Cavalieri propuso que el volumen del sólido en devolución podría encontrarse si se consideraba al sólido como formado por un conjunto de cilindros centrados a lo largo de sus ejes de revolución, donde el radio de cada uno de esos cilindros iría dando el perfil del sólido de revolución. El volumen del sólido en principio se podría conocer con exactitud si supiéramos a que cantidad se acercan las sumas de los volúmenes de los cilindros.

En cada unidad aparece un recuadro titulado Historia y matemática, donde se dan algunos apuntes históricos relacionados con el concepto de límite, en esta unidad se encuentra una pequeña bibliografía de Arquímedes, Bonaventura Cavalieri, Agustín Cauchy, Pierre Fermat. Así mismo aparece la paradoja de Zenón de Elea “Aquiles y la tortuga”.

Historia y Matemática

Augustin Cauchy

(1789 – 1854)

Matemático francés que sobresalió en diversos campos de la ciencia, y cuyas obras más importantes atañen al Análisis (teoría de las sucesiones, creación de la teoría de las funciones analíticas). Su definición ϵ y δ del límite continúa hoy en uso.

Historia y Matemática

Pierre Fermat

(1601 – 1665)

Matemático francés, cuyos trabajos fueron el origen del cálculo infinitesimal que, poco después de su muerte, descubrieron Leibniz y Newton.

En torno a otras ciencias.

En el texto se muestra un titulo “problemas de aplicación” donde se propone un único ejercicio con respecto a la continuidad de funciones, en el desarrollo de la unidad del concepto de límite y límite de una función, no se hace ninguna referencia a otras ciencias, el ejemplo es:

- ✓ **Física.** El espacio recorrido en un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & si \;\; 0 \le t < 2 \\ 3t + a & si \;\; 2 \le t \le 5 \\ -t^2 + 13t + b & si \;\; 5 < t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b para que la función sea continua en los instantes $t = 2 \quad y \quad t = 5$

Fenómenos de la vida diaria.

Los fenómenos que se presentan aparecen mediante un titulo "APROXIMACION A LA IDEA DE LÍMITE DE UNA FUNCION", estos se muestran únicamente en este titulo, en el resto del texto no se menciona ninguna otra situación relacionada al concepto de límite, un ejemplo es:

- ✓ *"Ana se dirige todos lo días al colegio en bicicleta; ella vive a 10 km de distancia. Como no le gusta llegar tarde y las clases comienzan a las ocho y treinta minutos de la mañana, sale de la casa a las ocho.*

  Al principio pedalea a un buen ritmo; a medio camino va algo más despacio y al final aumenta de nuevo el ritmo.

  A medida que el tiempo va trascurriendo, la distancia que la separa de su casa va aumentando hasta que ésta llega a ser 10 km.
  Conforme transcurre el tiempo, la distancia tiende a diez: $D \to 10$ *"*

En este texto cuando se trata el concepto de variable se hacen algunas referencias a fenómenos naturales como: distancia - tiempo transcurrido, temperatura - tiempo y circunstancias meteorológicas. Igualmente hace referencias a aspectos matemáticos cuando presentan los conceptos de límite y continuidad como: propiedad del valor intermedio, de áreas bajo ciertas condiciones, de sucesiones de circunferencias; cabe anotar que los aspectos antes mencionados son muy escasos, en consecuencia los ejemplos, ejercicios y problemas se reducen a funciones polinómicas, radicales, logaritmos, cocientes de polinomios y funciones trigonométricas.

NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO.

En torno a las propias matemáticas.

Dentro de la propia matemática se observa un tratamiento hacia la manipulación de símbolos y aspectos puramente algebraicos. El componente más sobresaliente es el geométrico referido al estudio de límites hallando asíntotas verticales y horizontales de una función. Observamos que no se hace ningún otro comentario o referencia en torno a las propias matemáticas.

En torno a otras ciencias.

En el texto se presenta el titulo "evaluación de competencias" donde se exhiben algunos problemas relacionados con situaciones o fenómenos propios de otras ciencias distintas de las matemáticas resaltando en un recuadro la importancia de la aplicación de los conocimientos en la resolución de problemas, así:

"La siguiente prueba te será útil como fuente de información para saber cómo están tus competencias en matemáticas, y más específicamente en pensamiento variacional. La prueba esta conformada por una variedad de problemas cuya respuesta son de selección múltiple…"

Es importante resaltar que las situaciones o problemas que se presentan en el texto, solo aparecen en esta sección, en ningún otro momento del desarrollo de la unidad del límite se hace alguna referencia a dichas situaciones. Una de las situaciones que se plantean es la siguiente:

- ✓ *"La formula* $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}}$*, significa que a medida que la velocidad de un cuerpo se aumenta, su masa se va incrementando hasta volverse excesivamente grande. La relación física se puede representar matemáticamente como* $\lim_{V \to C} \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}} = +\infty$*, lo cual significa que:*

a. *Cuando un cuerpo alcanza la velocidad de la luz, su masa se vuelve infinita.*
b. *Para cualquier valor* M *que escojamos para la masa de un cuerpo, podemos encontrar velocidades cercanas a la velocidad de la luz* (C)*, para las cuales la masa* m_0 *se aumenta hasta sobrepasar a* M *.*
c. *La masa del cuerpo no puede ser infinita.*
d. *La velocidad de un cuerpo aumenta a medida que se aumenta la masa".*

ESPIRAL.

En torno a las propias matemáticas.

Al finalizar cada unidad aparece el titulo "lectura comprensiva" la lectura que se expone se relaciona con la historia de la matemática, en este caso se muestra la Biografía e historia de Agustín Louis Cauchy, acompañada de la competencia lectora, donde se sugieren algunas preguntas relacionadas con la lectura.

El concepto de límite no sólo está ligado a funciones expresadas de forma algebraica, sino que aparece en relación con otras ramas de la matemática, como la geometría, referido al estudio de límites hallando asintotas verticales y horizontales de una función

Las matemáticas, además de los aspectos antes mencionados, son un instrumento para comprender, interpretar y predecir diversos fenómenos; esta concepción se refleja a lo largo del texto.

En torno a otras ciencias.

Al final del capítulo se resuelve el problema planteado en "explorando" así mismo aparecen varias situaciones dedicadas a la aplicabilidad de la matemática donde se presentan las relaciones entre las matemáticas, la física, la economía y ciencias naturales. Una de estas situaciones es:

- ✓ *"Si se invierte un capital C a razón de 12% de interés compuesto mensual, la cantidad A acumulada al cabo de t años esta dada por:*

$A=C\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12t}$*. Si para* $t=0$ *se obtiene* $A=1.000.000$ *se concluye que:*

a. *El capital acumulado al cabo de un año es de* $1.000.000$ *por que* $\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12(0)}=1$*.*
b. *El capital invertido inicialmente es de* $1.000.000$ *por que el comienzo de la operación se considera que* $t=0$*.*
c. *No se puede obtener ningún otro valor en el problema por que faltan datos.*
d. *El capital después de un tiempo muy largo es de* $1.000.000$ "

Fenómenos de la vida diaria.

En relación con los dos entornos: entorno a otras ciencias, entorno a las propias matemáticas, las referencias tanto a situaciones de la vida diaria como a diversos fenómenos de la naturaleza en los cuales interviene el concepto de límite son muy escasas.

En las ocasiones en que se presentan dichas situaciones aparecen como un ejemplo de aplicación directa, en donde se destaca el concepto o los procesos más relevantes en el desarrollo del tema, este se presenta en un recuadro titulado "conexión con la vida". Las situaciones planteadas son las siguientes, referidas a la relación entre:

- ✓ El volumen y concentración de sal en un tanque.
- ✓ Cantidad de pulgadas de lluvia y el tiempo transcurrido.

A pesar que los fenómenos de la vida diaria que se presentan son escasos los autores tratan de mostrar la importancia de las matemáticas aplicadas a situaciones reales. Este hecho se resalta en la siguiente oración: "Las funciones exponenciales y logarítmicas tiene muchas aplicaciones en situaciones prácticas". Esta oración se señala gracias al ejercicio de la presentación que tiene como titulo "**exploremos**"

3.4. PERFIL DE LOS TEXTOS ANALIZADOS.

Nuestro análisis nos permitió elaborar un perfil del texto, atendiendo a cada una de las dimensiones planteadas en el capitulo uno, así mismo la tabla que se origino de las categorías enmarcan cada una de las características de este análisis, permitiendo así identificar el tratamiento didáctico para la enseñanza del concepto de límite en la educación media

PERFIL DEL TEXTO MATEMATICA 11.

CATEGORIAS	Nº	DIMENSIONES	EXPOSITIVO	TECNOLÓGICO	COMPRENSIVO
			PERFIL DEL TEXTO.		
Conceptual	1	Modo de introducción del concepto	X		
	2	Papel de las definiciones	X		
	3	Estructura de los problemas		X	
	4	Función de los ejercicios	X		
	5	Representaciones gráficas y simbólicas		X	
Didáctico - cognitivo	6	Enseñanza	X		
	7	Aprendizaje		X	
	8	Propuestas curriculares.		X	
	9	Capacidades que se intentan desarrollar		X	
Fenomelógico	10	Entorno a las propias matemáticas	X		
	11	Entorno a otras ciencias		X	
	12	Fenómenos de la vida diaria		X	

Como se puede evidenciar en la tabla, el texto tiene una tendencia hacia el perfil **tecnológico**, en cuanto al desarrollo del concepto de limite, ya que se considera la matemática como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos, así mismo se destaca la gran cantidad de ejercicios propuestos para prácticar las reglas que se han expuesto y para las que se ha utilizado una formulación de carácter abstracto-formal, lo cual favorece el carácter riguroso y estático que posee este texto. El tipo de expresiones utilizadas no están enfocadas hacia la comprensión de los conceptos sino, como hemos dicho, hacia su utilización y por ello resulta de igual forma tener una tendencia hacia el perfil **expositivo**, ya que se utilizan ciertas representaciones que tratan de dotar de significado a los conceptos y de abarcar diferentes posibilidades.

De igual manera el autor se limita a definir los conceptos y las demostraciones, estas tienen el sentido de ser simples comprobaciones; esto se evidencia en la demostración de la definición rigurosa de limite, la cual se presenta como una comprobación grafica del concepto, así mismo las definiciones posteriores y los ejemplos propuestos son guiadas durante la exposición de la lección, obteniéndose de una forma casi deductiva.

La noción de matemática que se muestra es de una matemática ya hecha, que sólo hay que memorizar. La estructura de los enunciados es la típica utilizada en la formulación matemática, tanto en relación con los problemas como con las definiciones y las reglas de cálculo. Las soluciones que se obtienen en los problemas son de tipo algorítmico. Las presentaciones de conceptos, problemas, definiciones, etc. son totalmente estáticas, se debe destacar en este texto que se incluyen contextos referidos a la tecnología y muy pocos hacen referencia a contextos económicos, físicos o de naturaleza cotidiana.

PERFIL DEL TEXTO NUEVO PENSAMIENTO MATEMATICO.

			PERFIL DEL TEXTO.		
CATEGORIAS	Nº	DIMENSIONES	EXPOSITIVO	TECNOLÓGICO	COMPRENSIVO
Conceptual	1	Modo de introducción del concepto	X		
	2	Papel de las definiciones	X		
	3	Estructura de los problemas	X		
	4	Función de los ejercicios	X		
	5	Representaciones gráficas y simbólicas	X		
Didáctico - cognitivo	6	Enseñanza	X		
	7	Aprendizaje		X	
	8	Propuestas curriculares.		X	
	9	Capacidades que se intentan desarrollar	X		
Fenomelógico	10	Entorno a las propias matemáticas	X		
	11	Entorno a otras ciencias	X		
	12	Fenómenos de la vida diaria	X		

El texto se puede considerar un libro **expositivo**, como se puede observar en la tabla, en cuanto al desarrollo del concepto de limite, en el que destacan el tipo de definiciones características de la matemática moderna y la ausencia de ejercicios y problemas para practicar los conceptos o reglas, ya que la matemática se encierra en sí misma y se explica por sí misma, igualmente se considera el conocimiento matemático como una acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados, de igual forma se puede evidenciar que los diferentes conceptos matemáticos aparecen clasificados, pero no se relacionan unos con otros, esto se observó en el desarrollo del tema de limite de una sucesión, donde se pretende introducir el concepto de limite y no se relaciona para nada con el concepto de limite de una función, clasificando cada una de las lecciones o unidades por separado.

Los términos usados son formales, la estructura de los enunciados es rigurosa y utiliza para esto tantos símbolos matemáticos, como oraciones. Se hace hincapié en las técnicas que debería aprender el alumno de forma teórica, se incluyen contextos referidos a algunas áreas distintas de las matemáticas aunque en menor número. Estos contextos hacen referencia a contextos económicos, físicos o de naturaleza cotidiana.

La mayoría de funciones se indican simplemente como f(x) y los ejemplos y ejercicios que se exponen son todos expresiones polinómicas, es decir, algebraicas. La interacción entre las diferentes representaciones siempre se hace gráfica-tabular o viceversa, además la representación algebraica de las funciones elegidas en los ejemplos se basa en la aplicación de técnicas y destrezas algebraicas.

PERFIL DEL TEXTO ESPIRAL.

			PERFIL DEL TEXTO.		
CATEGORIAS	Nº	DIMENSIONES	EXPOSITIVO	TECNOLÓGICO	COMPRENSIVO
Conceptual	1	Modo de introducción del concepto		X	
	2	Papel de las definiciones		X	
	3	Estructura de los problemas			X
	4	Función de los ejercicios			X
	5	Representaciones gráficas y simbólicas			X
Didáctico - cognitivo	6	Enseñanza			X
	7	Aprendizaje			X
	8	Propuestas curriculares.		X	
	9	Capacidades que se intentan desarrollar			X
Fenomelógico	10	Entorno a las propias matemáticas			X
	11	Entorno a otras ciencias			X
	12	Fenómenos de la vida diaria		X	

El perfil que posee este libro es de tipo **comprensivo**, en cuanto al desarrollo del concepto de limite, el cual induce a pensar que el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza, ya que plantea situaciones en la que es el alumno el que tiene que investigar, conjeturar y rectificar, si es preciso, para alcanzar el conocimiento, siendo el papel del maestro el de gestor del aprendizaje. Los enunciados se expresan de forma explicativa, por lo que no poseen la estructura de los típicos problemas estándar, es decir, se entiende hacer matemáticas como la actividad intensa del alumno estudiando diversos fenómenos, con los conceptos matemáticos que sirven para organizarlos e interpretarlos.

En cuanto a la forma de presentación de las diferentes unidades de información hay un notable uso del color azul para resaltar las representaciones gráficas y para resaltar cada uno de los procesos a desarrollar (conexiones, comunicación, resolución de problemas, razonamiento lógico).

En cuanto al tipo de funciones utilizadas hay una gran variedad, desde las más sencillas polinómicas hasta otras de tipo racional, trascendente, y unas que contienen valor absoluto. Las interpretaciones y las soluciones se centran tanto en los aspectos cuantitativos como en relacionar dichos resultados con la teoría presentada.

La estructura de los enunciados de los ejercicios no es totalmente rigurosa, dan paso a la interpretación, tanto de reglas como de procedimientos, dentro de esto se incluyen contextos referidos a algunas áreas distintas de las matemáticas como: económicos, físicos o de naturaleza cotidiana.

CONCLUSIONES.

La primera conclusión a la que llegamos es que el análisis de libros de texto es una tarea bastante difícil de modelizar y trabajar aquí en Colombia, ya que no se posee la suficiente información y las pocas investigaciones que se han hecho arrojan otros resultados distintos a los que en este trabajo se exponen, por tal motivo, tuvimos que recurrir a fuentes externas como investigadores, tesis doctorales, artículos encontrados en la red.

Hemos encontrado que existen unos parámetros estipulados para efectuar un análisis de textos, que a saber de muchos profesores y estudiantes no conocíamos, esta es una conclusión relevante, ya que sin tener una formación concisa y completa sobre el análisis de los textos nos sumergimos en este tema sin conocer el rumbo que esto nos deparaba, por lo tanto creemos importante resaltar la asesoria por parte de los Doctores: Maria Teresa Astudillo y el señor Modesto Sierra, quienes vía e_mail nos brindaron varios de sus artículos e investigaciones y además con sus aportes significativos ayudaron a centrar las bases de este trabajo.

Consideramos que es importante entender que un libro de texto en muchas ocasiones enmarca la enseñanza de un determinado concepto y éste viene dado por la concepción que reconozca y manifieste el autor, así mismo vienen influenciados por las propuestas curriculares desarrolladas en un determinado periodo. Por tal motivo, cabe resaltar que se debe tener en cuenta el tipo de texto se debe elegir para fomentar un buen aprendizaje de las matemáticas en la educación.

La forma y presentación de un determinado concepto no está estipulada por unos parámetros equivalentes para cada texto, por tal motivo el resultado del análisis arrojo diferentes perfiles para cada uno de ellos, seria muy conveniente elaborar un análisis de texto con respecto a la evolución histórica del concepto de limite, ya que en esta se podría observar el desarrollo didáctico que se ha generado en este concepto,

A pesar de que no se hizo un análisis histórico del concepto de límite, se pudo evidenciar en los textos seleccionados que este concepto ha venido sufriendo ciertas modificaciones con respecto a su exposición y desarrollo dentro de la reforma educativa.

La enseñanza del concepto de límite no tiene unos parámetros establecidos dentro de las propuestas curriculares vigentes, es decir que cada institución y docente tienen vía libre para enseñar este concepto como él crea conveniente, siempre y cuando atienda a los estándares y normas establecidas por el Ministerio de Educación.

Como se observa cada uno de los textos tiene un perfil diferente, esto se debe a la evolución del concepto de límite en la educación, y principalmente depende de las directrices y leyes que rigen los parámetros para la enseñanza. Si bien es cierto lo que se quería con este trabajo es dar pautas para un análisis de texto mas completo que quizás arroje algunos buenos resultados que contribuyan a la enseñanza del concepto de limite en la educación media.

Por último, estamos de acuerdo con Cecilia Medina cuando afirma que el concepto de limite, no solo tiene las concepciones descritas en el capitulo uno, sino que existe una concepción algebraica que se desarrolla en el seno de la educación media, esto implica que un estudiante pueda ver el limite como una ampliación del algebra.

BIBLIOGRAFIA:

AZCÁRATE, C. (1995) “Sistemas de representación.” Revista Uno, 4, 53-61.

CALVO, C. (2001) Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Barcelona: Universidad de Barcelona. Tesis doctoral.

CASTRO, E.; RICO, L. y ROMERO, I. (1997) “Sistemas de representación y aprendizaje de las estructuras numéricas.” Enseñanza de las Ciencias, 15 (3), pp. 361-371.

CHOPPIN, A. (2000) “Los manuales escolares de ayer a hoy. El ejemplo de Francia.” Historia de la educación, 19, pp. 13-37.

CONTRERAS, A. (1999). “Una metodología de análisis, en cuanto a los ejemplos que aparecen en los libros de texto, del concepto de límite de una función. Estudio de un manual de primer curso de Universidad.” IX Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), Lugo.

FONT, V. (2001) “Expresiones simbólicas desde y para el aula.” EMA, 6 (2), pp. 180-200.

GARBIN, SABRINA Y AZCÁRATE, CARMEN. “Infinito actual e inconsistencias acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de estudiantes de 16-17 años.” Revista Enseñanza de las ciencias, 2002, 20 (1), 87-113

GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. TERESA Y SIERRA VÁZQUEZ, MODESTO.

“Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX.” Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca, publicado en enseñanza de las ciencias 2004.

GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. TERESA Y SIERRA VÁZQUEZ, MODESTO. “Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y cursos de orientación universitaria (cun): 1940 a 1995. Enseñanza de las ciencias, 1999, 17 (3), 463-476

GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. TERESA, MODESTO SIERRA VÁSQUEZ, , CARMEN LÓPEZ ESTEBAN. “Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre limite funcional y continuidad.” Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 3, 01 marzo de 2000, pp. 71 – 85.

JIMÉNEZ, J. y otros (2001) “Aplicación del análisis secuencial al estudio del texto escrito e ilustraciones de los libros de Física y Química de la ESO.” Enseñanza de las Ciencias, 19 (1), pp. 3-19.

LACASTA, E. y PASCUAL, J.M. (1995) “Las funciones en los gráficos cartesianos.” Síntesis.

LINEAMIENTOS CURRICULARES MATEMATICAS, magisterio, 1998.

LEY GENERAL DE EDUCACION, magisterio, 1994.

ORDÓÑEZ, L. y CONTRERAS, A. (2003). “El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida, en E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L, Rico y A. Vallecillos.” Investigación en Educación Matemática, pp. 277-287.

RESOLUCION 2343, Código educativo V, “procesos curriculares e indicadores de logro”, magisterio 1996.

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1998), “Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde los obstáculos.” Enseñanza de las Ciencias, 17, 1, págs. 73-84.

SIERRA, M., GONZÁLEZ, M.T. y LÓPEZ, C. (1999). “Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria, 1940-1995.” Revista Enseñanza de las Ciencias, 17(3), pp. 463-476.

SIERRA, M.; GONZÁLEZ, M. T. y LÓPEZ, C. (2000) Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad. RELIME, 3 (1), pp. 71-85.