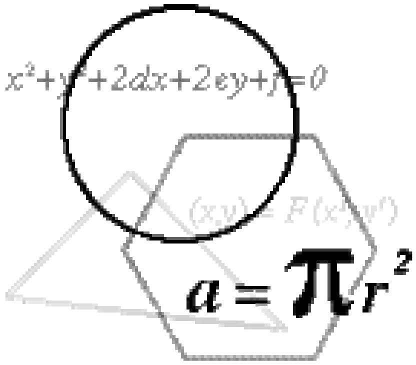
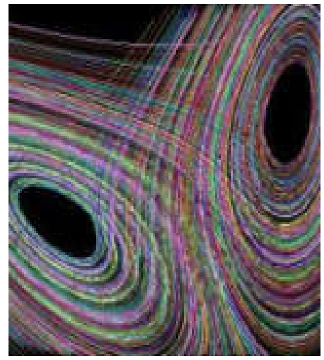
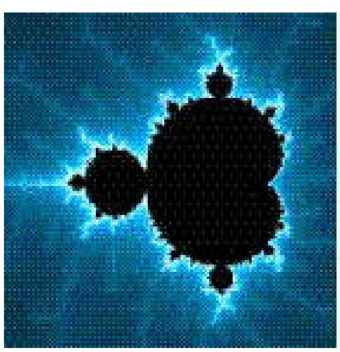
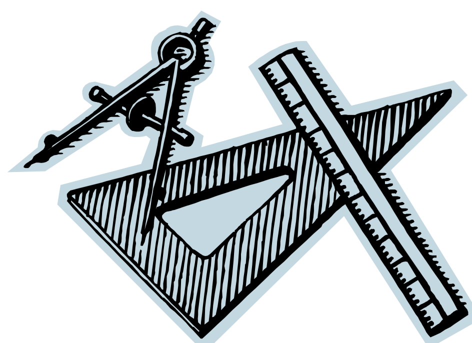




ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DIMENSIÓN DESDE EUCLIDES A MANDELBROT





ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DIMENSIÓN DESDE EUCLIDES A MANDELBROT

LADY YAMILE SIERRA BLANCO

ASTRID LEIDY TRUJILLO GOMEZ

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2006

ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DIMENSIÓN DESDE EUCLIDES A MANDELBROT

LADY YAMILE SIERRA BLANCO

2001140046

ASTRID LEIDY TRUJILLO GÓMEZ

2001140048

Tesis de Grado

Asesora: Claudia Patricia Orjuela

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2006

Nota de aceptación

Firma de la Asesora

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá, mayo 15 de 2006

RESUMEN ANALITICO Y DESCRIPTIVO

TITULO: PARALELO DIMENSIÓN EUCLIDEA Y FRACTAL

AUTOR: LADY YAMILE SIERRA BLANCO
ASTRID LEIDY TRUJILLO GOMEZ

PUBLICACIÓN: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

ENTIDAD: UNIVERSDIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS, (2006)

PALABRAS CLAVES: Geometría Euclidiana, Geometría fractal, fractales, Euclides, Mandelbrot, iteración, fase, dimensión, frontera, traslación, dimensión euclidea, dimensión fractal, fractales escalantes y autosemejanza.

DESCRIPCIÓN: Este trabajo presenta una breve comparación entre la geometría eulidea y fractal desarrolladas por Euclides y Mandelbrot respectivamente, tomando como eje central el concepto de dimensión.

METODOLOGIA: para el desarrollo de esta tesis se realizó:

1. Revisión bibliográfica de textos y documentos en Internet.
2. Categorización de los documentos encontrados con relación al concepto de dimensión.
3. Lectura analítica de dichos documentos.
4. Consolidación del documento escrito enfocado al concepto de dimensión tanto en la geometría euclidea como fractal.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios nuestro Señor,
a nuestros padres y familia que nos
apoyaron y a los maestros que nos
colaboraron para que este escrito
fuera posible.

CONTENIDO

INTRODUCCIÒN

El presente trabajo es el resultado final del ejercicio académico, para consolidar una monografía asociada al grupo de estudio "Fractales".
Nos interesó trabajar un tema relacionado con la geometría, en particular con la geometría fractal, ya que ésta es una rama de la matemática que se ha desarrollado desde hace poco tiempo y aún así propone grandes desafíos. El tema que nos interesó es la concepción de dimensión debido a que partir de ella se presenta una ruptura entre el conocimiento de la dimensión entera (la cual estamos acostumbrados a trabajar en nuestros cursos de geometría) y la dimensión fractal (no entera y definida según las características del objeto).

El documento está dividido en seis capítulos distribuidos de la siguiente manera:
Capítulo 1 titulado un poco de historia de la geometría, se encontrará un recorrido histórico del desarrollo de la geometría Euclidiana, sin el uso de coordenadas y su avance a medida que transcurrieron los años, hasta llegar al momento donde surge la geometría fractal como solución a distintos problemas que no fue posible resolver con los elementos proporcionados por las geometrías existentes hasta ese entonces.
Capítulo 2, se hará una descripción de la vida y aportes de Euclides y Mandelbrot a la geometría.
Capítulo 3 tendrá como objetivo principal presentar de manera organizada lo que se entiende por dimensión Euclidea, haciendo referencia a los elementos allí trabajados y las bases de la definición.

Capítulo 4, presentará objetos fractales, haciendo una clasificación de los mismos y descripción de algunos de ellos teniendo en cuenta las características más relevantes.

Capítulo 5, después de presentar los objetos fractales se dará a conocer algunas definiciones de dimensión fractal.

Capitulo 6, este será la consolidación o en otras palabras resumen y conclusión de la monografía, haciendo énfasis en el concepto de dimensión.

JUSTIFICACIÓN

Una de las grandes inquietudes del ser humano ha sido la de descubrir los misterios que lo rodean y tratar de modelar los objetos de la naturaleza; ya que en ella encontramos gran variedad de formas irregulares, que presentan un alto grado de complejidad en el campo geométrico y con los elementos proporcionados por la geometría Euclidiana, no es posible realizar un análisis de cada una de estas estructuras; por esto se hace necesario implementar un nuevo tipo de geometría, que esta relacionada con la naturaleza y que permita describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a nuevas teorías, identificando una serie de formas que se denominan fractales.

Los fractales forman una amplia familia de objetos matemáticos que permiten estudiar cuerpos naturales muy diversos, como las formas de las costas, nubes, estructuras de los árboles, entre otras; por esta razón Mandelbrot (1924-) creador de la geometría fractal, hace referencia a ella como "*la geometría de la naturaleza*".

Es complicado dar una definición general de objeto fractal, porque muchas de estas no se pueden aplicar a todas las familias de fractales existentes, sin embargo, existen fractales que tienen algo en común, debido a que son el producto de un proceso iterativo generado al infinito.

Aunque los fractales poseen distintas características que los hacen objetos muy peculiares, para algunos matemáticos, la característica esencial de un objeto fractal es su dimensión, no determinada a través de un número natural.

En la geometría euclidiana, se define de manera intuitiva, que los objetos poseen dimensiones enteras (0, 1, 2, 3,…, n), aunque Euclides no lo plantea específicamente, pero las definiciones presentada en los libros I y III (serán explicadas en el capitulo 3) de "*Los Elementos"* hacen referencia a este hecho, de esta manera, encontramos objetos de dimensión 0 como el punto, de dimensión 1 como las rectas, dimensión 2 como las figuras planas y de dimensión 3 como los sólidos, objetos que pertenecen al espacio euclideo.

Ahora, cuando vamos a estudiar la dimensión en la geometría fractal, encontramos muchos objetos que no son posibles encajar en una de las dimensiones establecidas, por esta razón para muchos matemáticos, este tema ha sido de gran interés, notando de esta manera la insuficiencia de los elementos proporcionados por la geometría euclidiana, buscando nuevos elementos y encontrando solución en algunos casos en la geometría fractal.

Basados en la característica de un fractal como un objeto cuya dimensión no es un número natural, sino fraccionario, haremos un acercamiento al concepto de dimensión desde Euclides hasta Mandelbrot.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Cuando se hace referencia al término dimensión, en general está asociado a los valores 0, 1, 2, 3, .. (números naturales); pero no es común escuchar que alguien hable de dimensiones fraccionarias, y aún más extraño que se piense en objetos enmarcados en dimensiones como 1.27, asociada a la curva de koch (caso que se retomará y estudiará en el capitulo 5).

Por lo tanto la dimensión desde el punto de vista de la geometría fractal (definida en el capitulo 4), amplia el panorama de éste objeto de estudio, lo que conlleva al análisis de ciertos objetos y fenómenos que tienen características extrañas, pero muy interesantes en Matemáticas; objetos que son familiares para nosotros y que en ocasiones hacen parte de la naturaleza, como en las montañas, nubes, costas, alvéolos pulmonares, el sistema nervioso humano, la música y muchos otros elementos, a los cuales no es posible asociar la dimensión entera.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Realizar un acercamiento el concepto de dimensión en la geometría Euclidiana y la Geometría Fractal, enfatizando en esta última la dimensión de fractales autosemejantes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conceptualizar la dimensión Euclídea, a partir de los elementos encontrados después de haber realizado un recorrido por dicha geometría.

- Destacar los elementos relevantes de la geometría fractal, en cuanto a los objetos que se estudian, las características y el surgimiento de la misma, como alternativa de solución a problemas que no son posibles modelar a través de la geometría Euclidiana y realizar un acercamiento al concepto de dimensión.

LIMITACIONES

Este trabajo presentará:

- Una breve reseña histórica del surgimiento de la geometría Euclídea y Fractal, ya que el soporte matemático es de índole geométrico.

- Reseña histórica y matemática de los personajes que hicieron aportes a cada una de las geometrías.

- Características principales de cada una de las geometrías y objetos de estudio en cada una de ellas.

- Definición de dimensión Euclídea y dimensión para fractales autosemejantes.

CAPITULO 1

HISTORIA DE LA GEOMETRÌA

1. UN POCO DE HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

Teniendo en cuenta que la rama de la matemática que más se destaca en este trabajo de grado es la geometría, es necesario, hacer referencia a ella desde sus inicios haciendo un breve recorrido histórico con el fin de llegar al punto que más interesa, es decir; el surgimiento de la geometría fractal.

1.1. INICIOS DE LA GEOMETRÍA

1.1.1. Geometría antigua

La Geometría es una de las ramas de la matemática más antigua, los principales trabajos geométricos datan de hace muchos años, y se supone que se originaron a partir de las observaciones realizadas por los hombres, éstas fueron plasmadas en el papel y luego se analizaron, dando de esta manera la creación de teoremas, fórmulas y otra gran cantidad de contribuciones que aún se utilizan en la geometría.

La primera parte de la historia de la geometría hace referencia a lo trabajado sin tener en cuenta el plano cartesiano, a la representación de formas y estructuras geométricas analizadas en el plano, sin estar enmarcadas en el sistema de coordenadas cartesianas.

Parece que muchas circunstancias en la vida diaria, dieron paso a numerosos descubrimientos geométricos: al encontrarse con la necesidad de medir y de limitar terrenos llevaron al hombre a la noción de figuras geométricas como: rectángulos, cuadrados, triángulos. Posterior a esto, se establecen conceptos y relaciones geométricas de paralelismo y perpendicularidad, lo que conllevo a la construcción de paredes de viviendas primitivas. Algunas de las observaciones en la vida diaria pudieron haber encaminado a los primeros seres humanos al inicio de las nociones de curvas, superficies y sólidos. Por ejemplo, los casos de circunferencia fueron numerosos: la periferia del sol, de la luna, las ondas que se forman al lanzar una piedra en un estanque de agua, entre otras.

La noción de secciones cónicas: parábolas, elipses, hipérbolas, pudo haber sido insinuada por las sombras producidas por el sol o una antorcha. Los alfareros primitivos hicieron sólidos de revolución. Además, el cuerpo del hombre, de los animales, las flores y las hojas de muchas plantas, las conchas marinas y algunos frutos, sugieren la noción de simetría.

De esta manera se fue creando en la mente de los seres humanos, una geometría que en un principio tenía como fin solucionar problemas de índole práctico, donde situaciones presentadas en su quehacer diario tenían respuesta en aquello que fue la base para el desarrollo de la geometría tradicional y su formalización.

Inicialmente la geometría no se consideraba como un área del conocimiento con carácter científico, pero a medida que pasaron los años, se reconoce como una ciencia con un estatuto sólido y que muchos se han interesado por profundizarla.

Aunque no es posible establecer el momento en que la geometría se convierte en ciencia, muchos historiadores concuerdan que fue en el Antiguo Egipto, donde la geometría comienza a adquirir su importancia.

En este momento de la historia, encontramos que la humanidad da un gran paso, ya que en un primer ciclo ellos realizaron observaciones, luego gráficas y análisis de las mismas, pero los egipcios utilizaron esto para resolver problemas de índole financiero y gubernamental, contribuyendo así al desarrollo del saber conocido como geometría.

Así como la Aritmética tuvo su origen entre los fenicios, debido a su uso en el comercio y las transacciones, la geometría fue usada por primera vez en Egipto, esto es aceptable, si se tiene en cuenta los escritos del historiador Proclo que concuerdan con los de Herodoto; quien señala en tiempos de Ramsés II:

> *"El rey Ramsés II, dividió la tierra entre los egipcios, de modo que a cada uno le correspondiera un terreno rectangular del mismo tamaño, y estableció un impuesto que se exigía anualmente. Pero cuando el río invadía una parte de alguno, éste tenía que ir al rey y manifestar lo sucedido. El rey enviaba, entonces, supervisores quienes debían medir en cuanto se había reducido el terreno, para que el propietario pagara sobre lo que le quedaba en proporción al impuesto total que se había fijado. Ésta es mi opinión, comenta Herodoto, sobre el origen de la geometría que después pasó a Grecia".*

Así pues, la tradición atribuye los principios de la geometría como ciencia, a las prácticas primitivas de la agrimensura en Egipto; ya que etimológicamente geometría significa medición de la tierra. Aunque no se puede afirmar con seguridad, parece bastante acertado suponer que la geometría surgió de necesidades prácticas.

Actualmente contamos con un documento que nos muestra algunos de los avances de los egipcios en el área de la geometría como es el caso del papiro de Moscú, el cual se presenta a continuación:

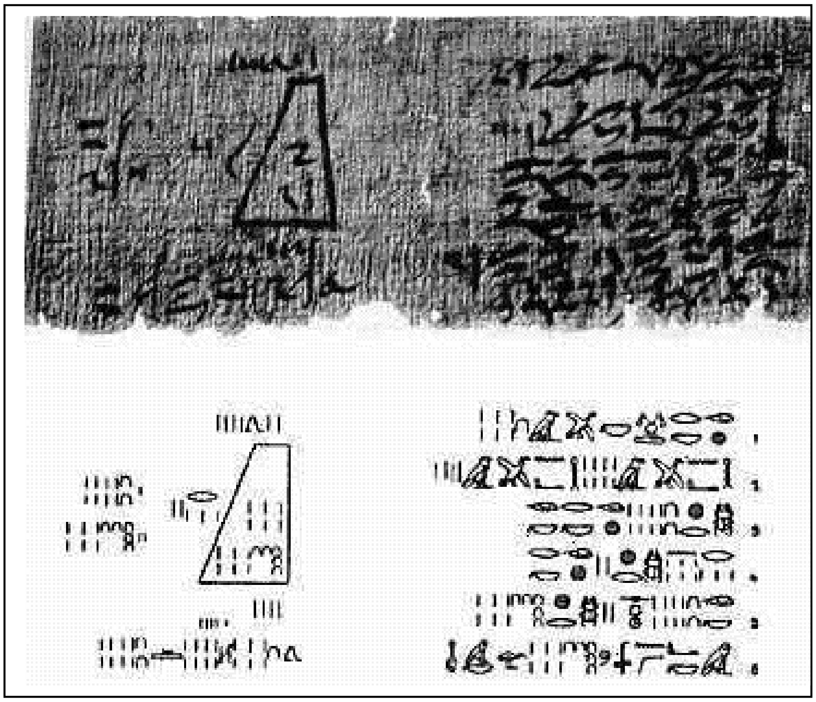


Figura 1. Papiro De Moscú

La parte inferior de la imagen es la transcripción de la parte superior

En el papiro de Moscú, se encuentra un enunciado que evidencia el conocimiento de la fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada. Se han dado varias explicaciones, pero es difícil, incluso hoy, tratar de saber el método empleado por los egipcios y como llegaron a obtener esa fórmula. Los papiros existentes proporcionan poca información sobre la geometría egipcia y las propiedades matemáticas de la pirámide de base cuadrada. Lo que sí se sabe con certeza, es que los que elaboraron esos documentos egipcios, sabían calcular la longitud de los lados de una pirámide y su volumen. La construcción de las pirámides fue, para ellos, la ocasión de utilizar el equivalente de nuestra cotangente.

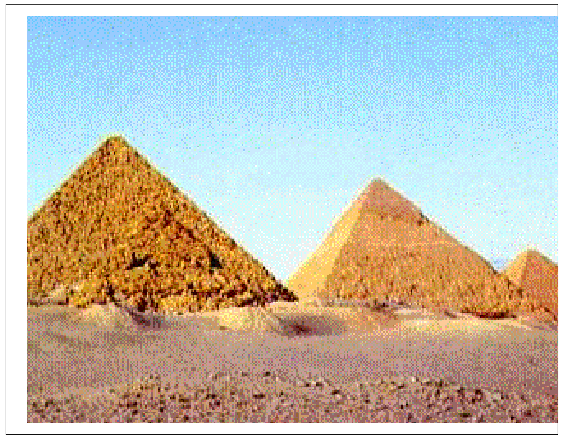


Figura 2. Pirámides de Egipto

Al realizar un recorrido por la geometría egipcia, siendo esta cultura una de las más importantes de la antigüedad y viendo sus aportes a la geometría, es también necesario dar una mirada a los aportes realizados por los babilónicos quienes trabajaron con la geometría aplicándola en la vida cotidiana.

1.1.2. Geometría Babilónica

La civilización babilónica engloba un conjunto de pueblos que vivieron en Mesopotamia, en un período que comienza muchos años antes de Cristo y termina a comienzos de la era cristiana. Sucesivamente estos pueblos: sumerios, arcádicos, caldeos, asirios, babilonios y otros, contribuyeron a establecer las características de la civilización babilónica. Más exactamente, la ciudad de Babilonia fue el centro cultural entre los años 2000 y 550 a. de C.; incluso después de la toma de Babilonia por el conquistador persa Ciro, en el año 538 a. de C., la evolución de las matemáticas babilónicas continuó durante la llamada época seléucida cuyo fin coincide aproximadamente con el nacimiento de Cristo.

Figura 3. Tablilla Babilónica

El estudio de los documentos que proceden de las excavaciones arqueológicas, revela que la geometría babilónica estaba muy ligada a las mediciones prácticas. No había una diferencia esencial entre la partición de una cierta cantidad de dinero, de acuerdo a ciertas reglas, y la división de un terreno en partes de áreas de igual medida. Al igual que los egipcios, los babilonios basaron sus estudios matemáticos a partir de situaciones como: repartición de herencias, relaciones entre medidas, o conflictos concernientes a los salarios. La importancia Matemática de un problema recaía sobre su solución aritmética, la geometría no era sino una herramienta más entre las muchas de la vida diaria, a las cuales era posible aplicarles los métodos aritméticos.

La geometría no era una disciplina especial, sino que era tratada de la misma manera que cualquier otra forma de relación numérica entre objetos de uso práctico. Entre los resultados geométricos conocidos en Mesopotamia, se encuentran métodos para calcular el área de un círculo, con muy buenas aproximaciones del número pi. Los babilonios podían además calcular el área de un triángulo y de un trapecio. Los volúmenes de prismas rectos y cilindros, los calculaban multiplicando el área de la base por la altura. Desarrollaron fórmulas para determinar el volumen de un tronco de cono y pirámides cuadrangulares truncadas.

Los geómetras babilónicos estaban familiarizados con el teorema de Pitágoras, y comprendían su principio general. Conocían también el teorema; atribuido a Thales de Mileto (640-535 a. de C.); según el cual el ángulo inscrito en un semicírculo es recto. Además, sabían que los lados correspondientes de dos triángulos rectángulos semejantes son proporcionales y que la perpendicular trazada desde el vértice de un triángulo isósceles divide la base de este triángulo en dos partes iguales.

Fue necesario realizar este recorrido histórico debido a la importancia en los aportes proporcionados por las culturas egipcia y babilónica donde se establecieron los fundamentos de la geometría Euclidiana, que será estudiada más adelante; en particular, el desarrollo del concepto de dimensión que en ese momento fue de poca importancia para la reflexión geométrica, pero que hoy en día y para este trabajo es el punto principal de estudio.

Es interesante observar que en la geometría egipcia y babilónica, no se encuentra un solo caso de lo que hoy se designa como demostración. En lugar de una argumentación general, se encuentra una descripción detallada de un procedimiento aplicado a un caso particular. Estos trabajos fueron recogidos por los griegos quienes pusieron gran empeño en concluir los hechos geométricos, con base en razonamientos deductivos. Es aquí donde surge en la historia el aporte de los griegos a esta disciplina del conocimiento.

1.1.3. Geometria Griega

Fue Thales de Mileto, uno de los principales geómetras griegos, que vivió hacia el año 600 a.C., quién llevó la geometría de Egipto a Grecia. Y si bien egipcios y babilonios, elaboraron los primeros conceptos geométricos, los griegos transformaron un considerable número de conocimientos particulares, no sistematizados y aproximados, en una disciplina rigurosa basada en la lógica.

Es, especialmente **Euclides** quién se interesa por organizar de manera deductiva la Geometría, creando de esta manera su obra maestra: "*Los Elementos"* en donde se encuentran XIII Libros que hacen referencia a la geometría y a otras ramas de la matemática, de tal manera que convirtió la geometría de entonces en un estudio deductivo, idealizado, del espacio físico y de las formas, tamaños y relaciones (longitud, área, volumen) de objetos físicos en ese espacio. Por lo tanto, para los griegos sólo existía un espacio y una geometría; estos fueron conceptos absolutos. El espacio no era considerado como una colección de puntos, sino más bien como una región, o lugar, en el cual los objetos podían ser movidos libremente y comparados entre sí, teniendo en cuenta el tamaño y la manera de construirlos.

1.1.4.Geometria en la Edad Media

En esta época de la historia no aparecen grandes aportes a la geometría dado que las escuelas y universidades se limitaban a enseñar "*Los Elementos"*, tal vez el único avance en la investigación fue la disputa del V postulado de Euclides. Si bien no se llegó a conclusiones claras sobre este asunto.

Hasta este momento vemos que la geometría de Euclides es la que predomina en el campo de la enseñanza, siendo esto un obstáculo para los avances de la misma.

En la época del renacimiento es cuando las nuevas necesidades de representación del arte y de la técnica empujan a ciertos humanistas a estudiar propiedades geométricas para obtener nuevos instrumentos que les permitan representar la realidad, dando paso a nuevos estudios durante esta época.

1.1.5.Geometría en la Edad Moderna

Aquí se enmarca la figura Lucca Pacioli, Leonardo Davinci y Alberto Durero, por citar algunos, quienes utilizaron matemáticas en sus obras artísticas.

Todos ellos, al descubrir la perspectiva crean la necesidad de establecer las bases formales en la que se fundamente las nuevas formas de Geometría que esta implica: la Geometría Proyectiva, cuyos principios fundamentales no aparecerán hasta el siglo XIX de la mano de Gaspard Monge primer lugar y sobretodo de Poncelet.

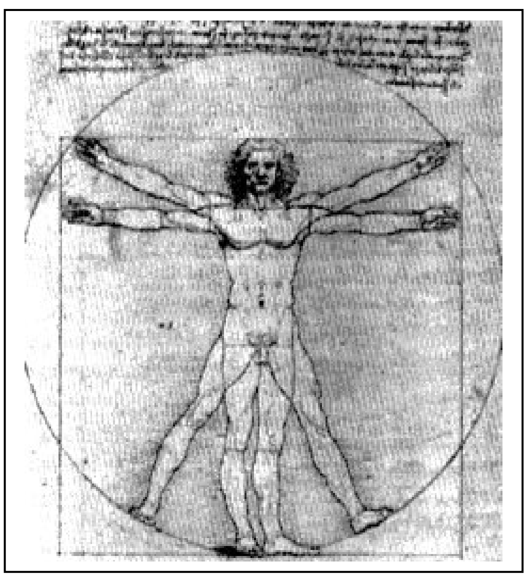


Figura 4. Pintura de Leonardo Da Vinci

En este punto del recorrido por la historia de la geometría, notamos que las culturas en las distintas épocas, trabajaron la geometría sin tener en cuenta sistemas de coordenadas, es por esto que el tema a tratar en la edad moderna es la geometría desarrollada por René Descartes.

1.2 GEOMETRÍA CARTESIANA

La edad moderna se destaca en el ámbito geométrico con la aparición del filósofo René Descartes (1595 - 1650) quién propone y contribuye al avance de la geometría, desde otra perspectiva, trabajada sobre el plano cartesiano.

Existe una cierta controversia (aún hoy) sobre la verdadera paternidad del método cartesiano. Lo único cierto es que se publica por primera vez la Geometría Analítica, en el "*Discurso del método*", si bien se sabe que quien conocía y utilizaba el método antes de su publicación fue Pierre de Fermat (1601 – 1665).

Aunque en el siglo XI Omar Khawam utiliza un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas, es imposible que alguno de los citados matemáticos franceses tuviera acceso a su obra.

La geometría Analítica es muy conocida en nuestra época, ya que el trabajo en el plano cartesiano es usado para la solución de muchos problemas.

Es importante destacar que en ningún momento se desconocen los trabajos de la geometría Euclidiana, al contrario, la geometría cartesiana enriquece y amplia la visión de los estudiosos de la geometría de Euclides.

Teniendo en cuenta que la geometría en los años siguientes empieza a estudiarse de la mano con el álgebra, el cálculo, el análisis matemático, la mecánica y otras ramas de la física y la matemática, junto con sus aplicaciones, se destaca en la edad contemporánea Gauss (1777 –1855) como principal contribuyente a dicha geometría y es por esto que hacemos referencia a él en el siguiente apartado.

1.3. GEOMETRIA EN LA EDAD CONTEMPORANEA

La principal contribución de Gauss a la Geometría, es la creación de la Geometría Diferencial, retomando las ideas sobre las relaciones entre el análisis matemático y la Geometría existentes hasta entonces desarrollándolas ampliamente. Partiendo de la base de que la Geometría estudia el espacio, las superficies, las curvas y establece la noción de curvatura de una superficie. Define geodésica como una curva con menor distancia entre dos puntos sobre una superficie (es decir, si tenemos dos puntos sobre una superficie, el camino más corto entre esos dos puntos sin salirnos de la misma es un segmento de geodésica), concepto totalmente análogo sobre la superficie, al de recta en el plano, existen superficies en las que los triángulos formados por las geodésicas miden más de la medida de dos ángulos rectos, y otras en las que mide menos. Esto, esencialmente, es contradecir el V postulado de Euclides.

En este momento histórico se formula uno de los primeros aportes a la creación de las geometrías no Euclidianas.

1.4 CAMBIO PARADIGMÁTICO: REFORMULACIÓN DE LA GEOMETRIA EUCLIDEA

Como ya se vio anteriormente, Gauss es el primero en construir una geometría (un modelo del espacio) en el que no se cumple el V postulado de Euclides, pero no publica su descubrimiento. Son Bolyai y Lobatchevsky (1793 –1856) quienes, de manera independiente y simultáneamente publican cada uno una geometría distinta en la que no se verifica el V postulado.

Tanto Bolyai como Lobatchevsky parten de un objeto geométrico y establecen sobre él unos postulados que son idénticos a los de Euclides en su obra "***Los Elementos"*** a excepción del quinto postulado. Pretenden originalmente razonar por reducción al absurdo de la siguiente manera: si el V postulado depende de los otros cuatro, cuando lo sustituya por aquél que dice exactamente lo contrario, se llegará a alguna contradicción lógica. Lo sorprendente es que no hay contradicción alguna, por lo tanto:

> 1º El V postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros, no es un teorema, y Euclides hizo bien en considerarlo como un postulado.
>
> 2º Existen modelos del espacio en los que, en contra de toda intuición, por un punto que no esté en una cierta recta no pasa una única recta paralela a la dada. Esto es contradictorio, pues no podemos concebir tal cosa, no podemos imaginar (ni mucho menos dibujar) una situación así, sin volver a interpretar los conceptos de recta, plano, etc. Pero desde el punto de vista lógico es perfectamente válido.

Es importante señalar que las geometrías de Bolyai y de Lobatchevsky, no depende de si se construyen usando métodos analíticos o sintéticos. Existen formas de construirlas tanto de manera sintética como analítica.

Teniendo en cuenta los avances de la geometría hasta el momento, y ya que ninguna de ellas proporciona los elementos necesarios para la modelación de objetos de la naturaleza, da paso al surgimiento de la geometría fractal.

1. 5. INICIOS DE LA GEOMETRIA FRACTAL

A comienzos del siglo XX, surge la necesidad de explorar la estructura geométrica de conjuntos de puntos de la recta, que poseían propiedades que los hacían muy interesantes en su estudio, aunque en principio no se les tomó gran importancia, ya que para algunos, eran objetos poco relevantes.

En 1919 Hausdorf construyó una herramienta fundamental para la medición de dichos conjuntos, introdujo lo que hoy conocemos como medidas y dimensión de Hausdorf. Estos primeros avances de la teoría de la medida fueron los que proporcionaron herramientas para el estudio de la geometría fractal, ya que los conjuntos de puntos y otros un poco extraños que se estudiaron en ella, pasaron a analizarse en la geometría fractal de manera más detallada y organizada por Benoit Mandelbrot quien trabajaba en IBM hacia los años 70 y se interesoó por el estudio de objetos que el dio el nombre de fractales, ya que presentaban estructuras irregulares y un poco difíciles de comprender pero muy comunes en la naturaleza.

Las investigaciones, que dieron origen a la geometría fractal se inician a partir de 1970 con el trabajo de divulgación realizado por Mandelbrot, quien mostró desde una perspectiva intuicionista la relación inmersa que podrían tener las estructuras fractales. Por ejemplo, la semejanza en las fluctuaciones a pequeña y gran escala en los precios del mercado de valores (publicado en 1961), luego continúo con una investigación sobre aquellos fenómenos que involucraban escalas no tradicionales, incluyendo el movimiento turbulento de los fluidos y la distribución de las galaxias en el universo.

Otro trabajo publicado en 1967, del excéntrico meteorólogo inglés Lewis Richarrdson, demostró que la medida de la longitud de la costa de Inglaterra en diferentes escalas indicaba que las líneas costeras eran fractales cuya longitud aumentada al incrementar el grado de detalle medible, es decir, a medida, que se ven más detalles, la longitud de la costa se hace más grande.

Por supuesto, esto es cierto solamente si la forma de la costa se repite en cada escala y esto es lo que sucede en la realidad, estando caracterizadas las líneas costeras por dimensiones fractales que oscilan entre 1.15 y 1.25.

Mas tarde, Mandelbrot investigó otro tipo de fractales. Formas distorsionadas al pasar de una escala a otra. Tales fractales son conocidos hoy en día como multifractales, ya que las relaciones entre sus partes están sujetas a cambios en cada iteración. Presentan algún tipo de autosemejanza, pero es una característica más local que global. La definición general de un fractal exige ser refinada para indicar con mayor precisión qué tipo de estructuras quedan incluidas en el término y cuáles no (esto se retomará en el capítulo 4, estudio de los objetos fractales).

El más seductor de todos los fractales es sin duda alguna, el conjunto de Mandelbrot, nombre propuesto por los fisicos Jhon Hubbard y Adrien Douady, en homenaje a su creador. Este conjunto se ha convertido en el origen de numerosas y atractivas imágenes de gráficas por computador.
El conjunto de Mandelbrot es, en realidad, una lista completa de objetos Matemáticos Dinámicos, esto es, objetos generados a través de un proceso iterativo llamado proceso de julia. Este nombre deriva del trabajo de tesis realizado por el matemático francés Gaston Julia, en la década del veinte, sobre *la iteración de transformaciones no lineales en el plano complejo*. Interesante es mencionar que dicho trabajo de tesis no presenta gráficos. Recientemente con el advenimiento de la tecnología informática, fue factible desarrollar este tema y admirar todo el esplendor de sus representaciones gráficas utilizando diversos colores y distintas tonalidades. A continuación se trata el concepto de dimensión fractal que es el eje central de la reflexión geométrica contemporánea.

1.5.1. Camino al significado de Espacio y Dimensión

De manera informal, se dice que la dimensión es la manera como se pueden ver las cosas, o el punto de vista como se presenta un determinado fenómeno en un contexto determinado. Si se toma de referencia las enciclopedias se definiría el concepto como una de las propiedades del espacio. El espacio, tal y como lo conocemos, es tridimensional. Para definir un volumen se necesitan tres medidas (dimensiones): longitud, anchura y altura. En matemáticas y en física se usa un concepto de dimensión más abstracto; a menudo se utilizan espacios con cuatro o incluso con un número infinito de dimensiones. Dado que, las matemáticas no son una ciencia estática, el estudio de la dimensión no queda allí, de esta manera el siglo XX ocasiono una desesperada necesidad de un nuevo camino al significado de espacio y dimensión. Dos matemáticos Felix Hausdorff y Abram Besicovitch, ellos literalmente descubrieron nuevas dimensiones y "re definieron" el concepto de dimensión misma.

Tradicionalmente cualquier figura tiene una dimensión de cero, uno, dos o tres.

Besicovith expandió sobre el temprano trabajo de Hausdorff, proponiendo que éstas formas tenían *"dimensión no entera"* tales como 1,5 o 2,3. Fractales como el triángulo de Sierpinski y el copo de nieve de Koch podrían entonces caer en dimensiones ordinarias y sus extraños comportamientos podrían ser explicados. Específicamente la dimensión de Hausdorff-Besicovitch está definida como un radio entre los logaritmos del número de copias y el tamaño relativo de cada copia.

En la realidad, la idea de dimensión fraccionaria tiene prodigio de ser mucho más poderosa que lo que sus creadores imaginaron; porque en la naturaleza abundan conjuntos de formas irregulares tales como las costas, montañas, nubes, árboles, flores todas tienen dimensión entre dos y tres.

La dimensión fractal como Benoit Mandelbrot la llamo después, ha sido muy importante para los matemáticos, que obtuvieron de repente un universo entero de formas que fueron previamente inconmensurables. Para los primeros tiempos desde Descartes, en realidad con una nueva medida (metro) del espacio en si mismo fue creado. Ciertamente Sierpinski, Koch y Hausdorff no sospecharon que ellos excursionaron dentro de un infinito más abstracto e "innatural" formas que podrían retomar al comenzar la primera genuina "geometría de la naturaleza".

CAPITULO 2

EUCLIDES Y MANDELBROT

2. EUCLIDES Y MANDELBROT PROTAGONISTAS DE LAS GEOMETRÍAS EUCLIDEA Y FRACTAL

En el capitulo anterior se presentó una reseña histórica de la geometría y en ella se hacia referencia a la geometría griega destacando a Euclides; en el campo de la geometría fractal, el personaje más representativo, por sus estudios, creación y aportes a esta nueva geometría es Benoit Mandelbrot , matemático, de los últimos tiempos, cuyo desarrollo está enmarcado en las últimas tres décadas.

Teniendo en cuenta que es importante documentarnos acerca de los personajes más representativos de las dos geometrías a trabajar (Euclidea y Fractal), en este capítulo presentaremos mas que las biografías de dichos personajes, se destacaran sus aportes en el campo de la Matemática, en particular, algunos descubrimientos que más adelante ayudaron a la creación de la red conceptual para el desarrollo del concepto de dimensión cuyo objeto de estudio se analizará a partir del capítulo siguiente.

2.1 EUCLIDES (365-275 a.c. aprox)

Matemático griego. Poco se conoce a ciencia cierta de la biografía de Euclides, aunque se dice que era hijo de Neucrates y nieto de Zenarco, heleno nacido en Tiro y domiciliado en Damasco; noticias que recoge el libro de los Indices (Kitab-al-Fihrst), donde se lee, además, que la madre del geómetra se llamaba Berenice. El se destaca por ser uno de los matemáticos más famosos de la Antigüedad.

Su vida fue tan oscura que generalmente no se asocia a su nombre algún lugar de nacimiento, aunque es conocido como Euclides de Alejandría ya que según fuentes históricas, fue profesor de Geometría en la Escuela de Alejandrìa fundada por Ptolomeo, como estudiante fue muy brillante y por tanto logro mérito para ser maestro. Por el carácter de su obra se puede suponer que habia estudiado con los discípulos de Platón, y por lo tanto tenía conocimiento de la geometría que ellos trabajaban, aunque no parece que estuviera familiarizado con las obras de Aristóteles.

Durante el reinado de Ptolomeo I Sóter; se cuenta que en cierta ocasión éste lo requirió para preguntarle si para aprender geometría, no habría un camino mas corto que el de Los Elementos, a lo que Euclides respondió ***"En Geometría no hay ningún camino especial para los reyes***[1]".

En esta afirmación, Euclides, da a entender el hecho de que para él no existía una lista de instrucciones que ayudarán a Ptolomeo a entender totalmente las matemáticas, además, todos, no logran el conocimiento de igual manera y querer encontrar el camino mas corto para llegar a donde se quiere no siempre es posible, menos en el caso de las matemáticas, que son una ciencia que requiere, gran interés, estudio y dedicación.

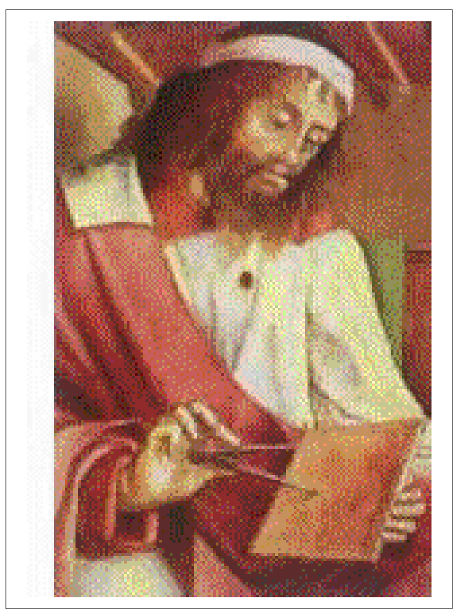


Figura 5. Retrato Euclides

[1] Científicos Griegos. Tomo 1, pag. 689

La tradición ha conservado y transmitido una anécdota relativa a su enseñanza, recogida por Juan Estobeo: un joven principiante en el estudio de la geometría le preguntó qué ganaría con su aprendizaje; Euclides, tras explicarle que la adquisición de un conocimiento es siempre valiosa en sí misma, ordenó a su esclavo que diera unas monedas al muchacho, dado que ***"debe ganar algo necesariamente de lo que aprende".***

2.1.1 Obras y Aportes

Este destacado matemático fue autor de aproximadamente doce libros (que históricamente se conocen como tratados), que cubrían materias como óptica, astronomía, música y mecánica, hasta un libro sobre las secciones cónicas.

Las obras de Euclides que han sobrevivido son aquellas de matemática griega, que se consideran como las más antiguas de la cual se tiene conocimiento, sin embargo, se han perdido más de la mitad de los escritos. Hasta nuestros días han sobrevivido cinco obras: *los Elementos, los datos, la división de figuras, los fenómenos y la óptica*. La última de estas tiene el interés de ser una obra primitiva sobre perspectiva o la geometría de la visión directa, los fenómenos son un tratado de geometría esférica para uso de astrónomos, el libro sobre división de figuras es significativa por su característica de ser una obra que se habría perdido de no haber sido por los árabes. Algo parecido a la división de figuras son los datos por su carácter y finalidad parece que fue escrita para ser usada en la universidad de Alejandría como complemento a los seis primeros libros de "*Los Elementos*"

"*Los Elementos",* son en esencia una compilación de obras de autores anteriores (entre los que destaca Hipócrates de Quíos), que las superó de inmediato por su plan general y la magnitud de su propósito. De los trece libros que la componen, los seis primeros corresponden a lo que se llamó geometría elemental; en ellos Euclides recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver lo que hoy se consideran ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas, e incluyen también la teoría general de la proporción, atribuida tradicionalmente a Eudoxo. Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas y los tres últimos hacen referencia a la geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas, que había sido ya objeto de estudio por parte de Teeteto.

La influencia posterior de los *Elementos* de Euclides fue decisiva; tras su aparición, se adoptó de inmediato como libro de texto ejemplar en la enseñanza inicial de la matemática, con lo cual se cumplió el propósito que debió inspirar a Euclides. Más allá, incluso, del ámbito estrictamente matemático, fue tomado como modelo, en su método y exposición, por autores como Galeno, para la medicina, o Espinoza, para la ética.

De hecho, Euclides estableció lo que, a partir de su contribución, había de ser la forma clásica de una proposición matemática: **un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados**. En el caso de los *Elementos*, los principios que se toman como punto de partida son veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco axiomas o nociones comunes (Libro I).

La naturaleza y el alcance de dichos principios han sido objeto de frecuente discusión a lo largo de la historia, en especial por lo que se refiere a los postulados y, en particular, al quinto (postulado de las paralelas). Su condición distinta respecto de los restantes postulados fue ya percibida desde la misma Antigüedad, y hubo diversas tentativas de demostrarlo como teorema; los esfuerzos por hallarle una demostración prosiguieron hasta el siglo XIX, cuando se puso de manifiesto que era posible definir geometrías consistentes, llamadas «no euclidianas», en las que no se cumpliera la existencia de una única paralela trazada a una recta por un punto exterior a ella.

Aunque no se sabe con certeza la fecha exacta de la muerte de Euclides, es importante destacar que en su obra *"Los Elementos"*, se encuentran las bases fundamentales de la geometría y también las bases de nuestro trabajo, ya que a partir de ella analizaremos las características de las figuras que el trabaja, que son trazadas con regla y compás y no admiten, curvas extrañas, formas muy irregulares y monstruos como los encontrados en la geometría de Mandelbrot; además, para nuestro trabajo acerca de la dimensión, aunque Euclides no presenta una definición formal acerca de ella, de manera intuitiva nos lleva al análisis de objetos con distintas dimensiones (enteras), haciendo un recorrido desde el punto hasta los sólidos, dado que en su mundo no era factible encontrar otro tipo de objetos.

2.2 BENOIT MANDELBROT (1924-)

Nació el 20 de noviembre de 1924 en Varsovia (Polonia), su familia era judía lituana, se interesaba en gran parte por el desarrollo intelectual y Mandelbrot desde muy pequeño fue introducido al mundo de las matemáticas ya que tenía dos tíos que se dedicaban al estudio de ellas. Cuando su familia en 1936 emigra a Francia, su tío Szolem Mandelbrot, profesor de matemáticas en el Collège de France y sucesor de Hadamardost, toma responsabilidad de su educación. Después de realizar sus estudios en la Universidad de Lyon y finalizada la guerra, Benoit ingresó en 1944 a la "Ecole Polytechnique" , bajo la dirección de Paul Lévy quien también lo influenció en el ámbito matemático. En 1945 su tío Szolem le recomendó la lectura de un escrito de 300 páginas cuyo autor es Gaston Julia (1893-1978), titulado *"Memoire Sur l'iteration des fonctions rationelles"* precursos de la moderna teoría de sistemas dinámicos y de acuerdo con las ideas de la escuela de la que formaba parte, añadió: "*olvida la geometría*" . el discípulo no se interesó mucho por la lectura del documento y por un tiempo la olvidó.

Benoit obtiene su titulo de Doctorado en Matemáticas en el año 1952 egresado de la Universidad de París. Fue profesor de economía en la Universidad de Harvard y de ingeniería en Yale, fisiología en el Colegio Albert Einstein de Medicina, y matemáticas en París y Ginebra. Desde el año 1958 trabajó en IBM en el Centro de Investigaciones Thomas B. Watson en Nueva York.

Benoit recobró el interés por la publicación recomendada por su tío en 1970. Con ayuda de los computadores puestos a su disposición en IBM, contribuyó a crear las ilustraciones de su ensayo en 1975.

En 1985 recibió el premio "*Barnard Medal for Meritorious Service to Science*". En los años siguientes recibio la "*Franklin Medal*". En 1987 fue galardonado con el premio "*Alexander von Humboldt*"; también recibió la "*Medalla Steindal*" en 1988 y muchos otros premios, incluyendo la "Medalla Nevada" en 1991.

2.2.1 Obras y Aportes

Se convierte en el Principal creador de la Geometría Fractal, al referirse al impacto de esta disciplina en la concepción e interpretación de los objetos que se encuentran en la naturaleza.

En 1962 publica la memoria "*Sur certains prix especulatifs: faits empiriques et modéle bassé sur les processus stables additifs de Paul Lévy*" su primera referencia sobre series temporales en finanzas.

En 1975 publicó su ensayo titulado “*Les objets fractales: Forme, hassard et dimensión”*

En 1980 con ayuda de un computador VAX sorprendió a la comunidad científica con el primer dibujo detallado de un gráfico deducido de la evolución del sistema dinámico en el campo complejo .

Publicó su libro *Fractal Geometry of Nature (1982)* en el que explicaba sus investigaciones en este campo. La geometría fractal se distingue por una aproximación más abstracta al concepto de dimensión, de la que caracteriza a la geometría convencional.

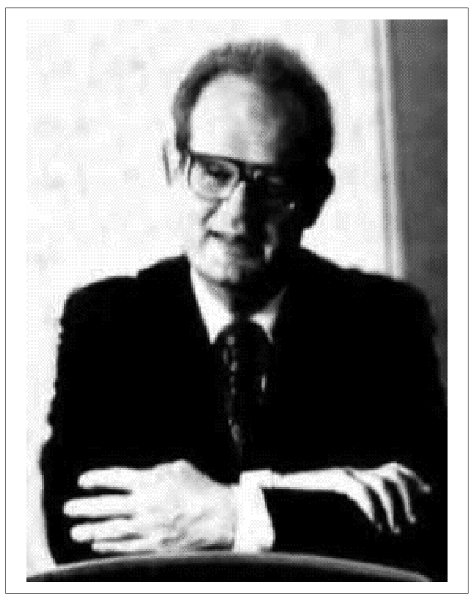


Figura 6. Fotografia Mandelbrot

2.3 EUCLIDES Y MANDELBROT

Al hacer referencia a la vida y obra de estos dos personajes que hicieron aportes a la geometría, destacamos el hecho de que sus trabajos fueron realizados en épocas distintas, llevándose un periodo de aproximadamente 2.000 años de diferencia, cada uno de ellos utilizó instrumentos diferentes para el trabajo de la geometría; Euclides trabajaba con lápiz y papel, ya que en su tiempo, la ciencia no había avanzado tanto como ahora, en cambio para el caso de Mandelbrot, nos damos cuenta que una de las herramientas que el utilizó, fue el computador.

Ambos geómetras realizan aportes a la ciencia matemática y proporcionan los elementos que hacen relevante nuestro estudio de la dimensión en cada geometría.

CAPITULO 3

DIMENSIÓN EUCLIDEA

3. GEOMETRIA EUCLIDIANA

Cuando hablamos de geometría Euclidiana, nos referimos principalmente a la geometría trabajada u organizada por Euclides en su famosa obra de *Los Elementos*. Allí presenta la primera teoría de razonamiento deductivo organizada lógicamente, pero con el fin de llegar a demostraciones geométricas. Por lo tanto, es para nosotros importante destacar algunas características de dicha teoría; pues ella nos ayudará a conceptualizar la dimensión y los cambios que sufre al llegar a la geometría fractal.

Para desarrollar esta disciplina del conocimiento, fue necesario el uso de teoremas, definiciones, postulados, axiomas y figuras, cada uno de ellos, fundamental en el desarrollo de la misma.

Consideremos en primer lugar los **Teoremas** que son enunciados que a partir de afirmaciones lógico deductivas, es posible demostrarlos; generalmente cuando se demuestra un teorema, se hace señalando otros ya justificados. Pero no siempre las demostraciones se realizan de esta manera, ya que la primera no es posible porque en este caso no se encuentran teoremas comprobados. Esto significa que es necesario aceptar algunas afirmaciones sin ser demostradas, dichas afirmaciones, son los **Postulados**. El mismo principio se aplica a las **Definiciones**. La mayoría de las veces, al ofrecer una definición de un nuevo término, se hace empleando otros términos ya descritos. La primera de ellas no se enuncia teniendo en cuenta estos parámetros, porque en este caso no hay términos definidos con anterioridad. Esto significa que deben introducirse algunos términos geométricos no descritos y que no están relacionados con algún elemento anterior.

Un último elemento que se menciona en el desarrollo de la teoría de razonamiento deductivo son las **representaciones gráficas** estas no son totalmente necesarias para una buena argumentación, ya que basados en una gráfica, no es posible fundamentar una teoría matemática, pero si radica su importancia en el hecho de que son de gran utilidad en el razonamiento y el desarrollo de algunas demostraciones geométricas.

La geometría de Euclides además de ser un poderoso instrumento de razonamiento deductivo ha sido extremadamente útil en muchas áreas del conocimiento como la química, ingeniería, astronomía, entre otras. De hecho en siglo II basados en la geometría Euclidiana se formuló la teoría Ptolemaica del Universo, pero no todo lo encontrado en la naturaleza se adapta a ésta, ya que los elementos que ella proporciona no son suficientes para el estudio de algunas estructuras encontradas en la naturaleza.

3.1 DIMENSIÓN EUCLIDEA

Aunque en los tratados de geometría presentados por Euclides **no se define de forma explícita el concepto de dimensión**, esta se encuentra en la base de las definiciones con que empieza el libro primero de *Los Elementos* sobre la geometría del plano; en él se establece lo siguiente:

Definiciones:

1. un punto es lo que no tiene partes [2]

[2] Esta definición de Euclides recoge la idea tradicional de punto como aquello que es indivisible en partes. En la primera mitad del siglo IV a.C. habían empezado a imponerse otras dos denominaciones del punto tomadas al parecer del lenguaje común: como marca y punción, que tenía

Figura 7. Punto

Esta definición presenta un elemento geométrico que existe pero no ocupa un espacio, debido a que es un objeto sin tamaño se la asigna <u>una dimensión nula o de cero.</u>

2. una línea es una longitud sin anchura [3]
3. los extremos de una línea son puntos
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

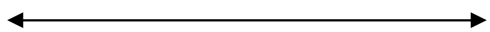


Figura 8. recta

Dado que la línea solamente tiene longitud adquiere una <u>dimensión igual a uno.</u>

5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura
6. Los extremos de una superficie son líneas

---

el significado de signo, señal y otros asociados .

[3] los Griegos se formaron tres representaciones básicas de la línea recta: la de un hilo tenso, la de un rayo de luz, la de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos.

Estas representaciones subsisten en algunas caracterizaciones de la línea recta que hoy aún se mantiene.

Suele considerarse que la definición dada por Euclides acerca de la recta es una elaboración de la definición Platónica, pues ésta contendría implícitamente una alusión al sentido de la vista y supondría, una asimilación del rayo visual al óptico.

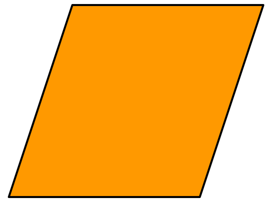


Figura 9. Superficie

Teniendo en cuenta la dimensión realizados del punto y la recta, asignamos a una superficie la dimensión dos dado que tiene longitud y anchura.

Al analizar la definición de superficie, encontramos que figuras como las siguientes no están dentro de la clasificación de Euclides, ya que los extremos de una superficie son líneas, entendidas como rectas, pero son objetos de dimensión dos.

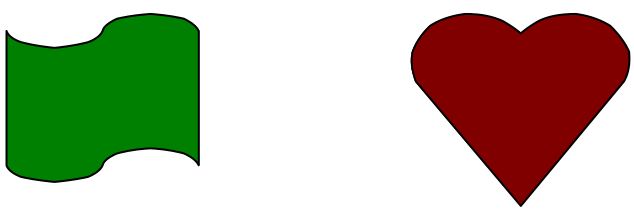


Figura 10. Objetos de dimensión dos.

Después de estas definiciones que se presentan en el libro I, podemos hacer referencia a las definiciones del libro IX sobre la geometría del espacio:

- Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad (parte de los elementos)

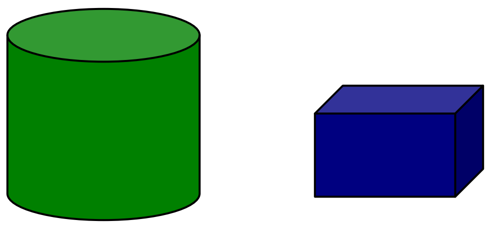


Figura 11. Sólidos

- Un extremo de un sólido es una superficie

Por lo tanto, un cuerpo sólido tiene tres dimensiones.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas por Euclides en su tratado de Geometría, analizaremos como estas conceptualizaciones son de utilidad para desarrollar de manera organizada el concepto de dimensión Euclídea (uno de nuestros tópicos principales en éste trabajo).

La dimensión Euclídea puede ser vista como:

3.1.1 Libertad de movimiento

Se entiende libertad de movimiento como las direcciones ortogonales distintas que sea posible recorrer. De esta manera se entiende que un punto es de dimensión cero, ya que no es posible desplazarse, un segmento o una recta es de dimensión uno o unidimensional, porque es posible realizar desplazamientos de izquierda a derecha o viceversa; en otras palabras encontramos sólo un eje como parámetro. Un cuadrado es de dimensión dos, pues en el desplazamiento de uno de sus puntos necesitamos tanto el largo como el ancho para su descripción.

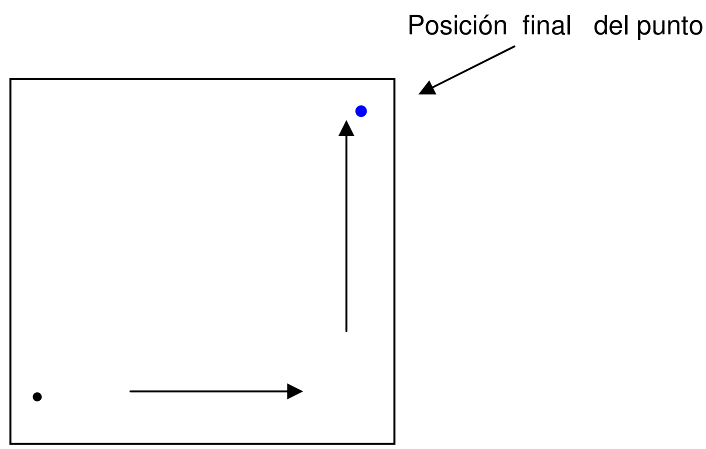


Figura 12. Desplazamiento de un punto en un cuadrado

De manera similar a lo anterior, el espacio en que habitamos le adjudicamos la dimensión tres, pues si imaginamos un punto, un zancudo o cualquier otro objeto dentro de una habitación, dicho objeto tendrá entonces tres posibles direcciones en las que se pueda mover y que sean mutuamente perpendiculares. Mas exactamente, cualquier dirección en la que se pueda mover es una combinación de estas tres direcciones mutuamente perpendiculares.

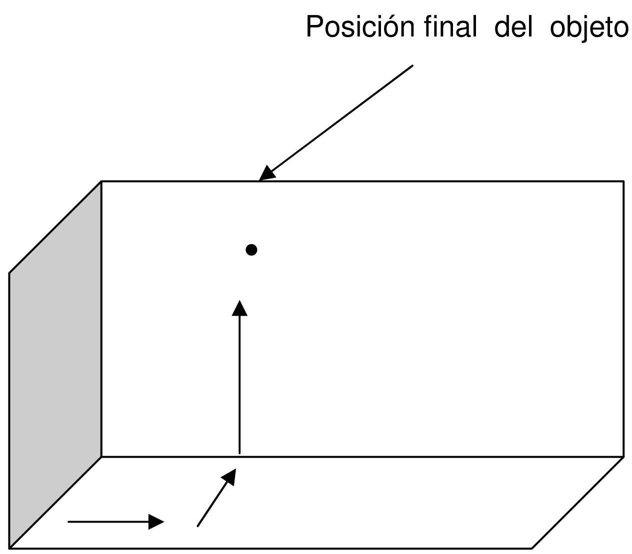


Figura 13. Desplazamiento de un punto en un objeto de dimensión tres.

Nota: las flechas nos indican los desplazamientos a realizar, aunque el movimiento puede ser diagonal, pero este es resultado de una combinación de tomar tres direcciones perpendiculares.

3.1.2 Posición de un objeto (coordenadas a cada uno de sus puntos)

Tomando los objetos de la geometría euclidiana y ayudados de la geometría cartesiana hacemos referencia a la dimensión visualizando las figuras geométricas tridimensionales, dado que para determinar la posición de cada punto de una figura de tres dimensiones, es necesario presentar tres números que son las coordenadas del punto (una vez que se haya fijado un origen y una escala). Cuando tenemos figuras de dos dimensiones cada punto tiene dos coordenadas (en el plano xy). En una dimensión solamente necesitamos una coordenada, y en cero dimensiones no necesitamos coordenadas ya que el único espacio posible es un sólo punto.

Observemos las siguientes representaciones de los objetos de dimensión 1, 2 y 3.

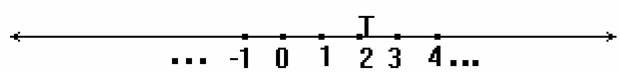


Figura 14. Coordenada T.

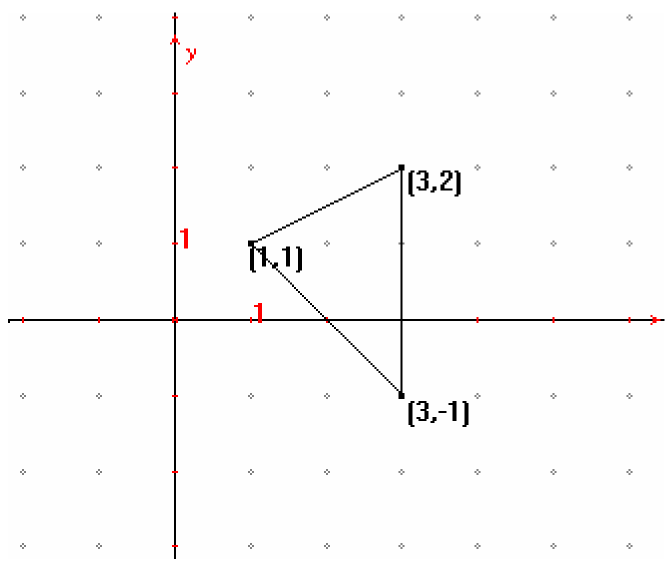


Figura 15. Coordenadas (x,y), vértices de un triángulo

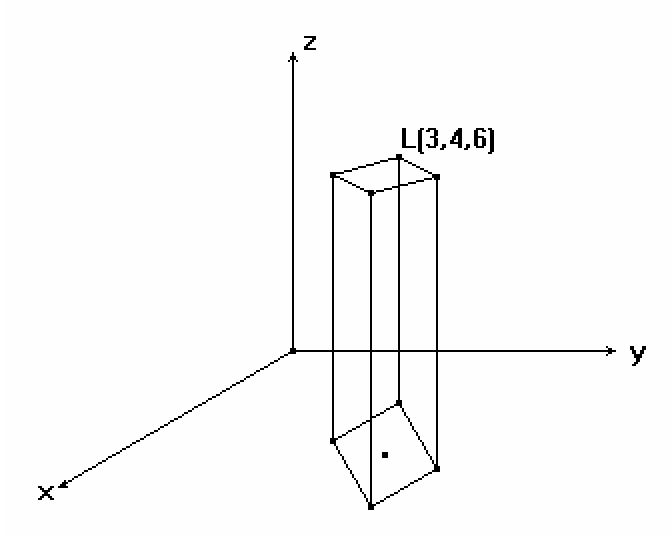


Figura 16. Coordenadas (x,y,z), vértice de un prisma rectangular

3.1.3 Objetos Generados por otros.

Cuando tomamos un segmento o un rayo, podemos decir que dicho objeto es generado por un punto (objeto de dimensión cero), ya que el punto se mueve en línea recta. Figura 17. similarmente un cuadrado es generado por un segmento que se mueve perpendicularmente a la dirección del segmento y por una distancia igual a la longitud del segmento. Figura 18.

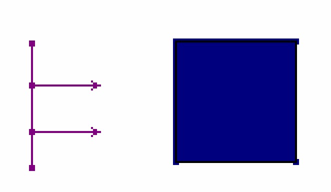


Figura 17. Un punto genera un Segmento

Figura 18. Un segmento genera un cuadrado

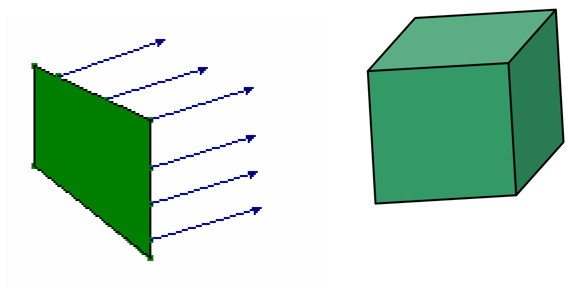


Figura 19. Un cuadrado genera un cubo

De la misma manera un cubo de dimensión tres se puede ver como generado por un cuadrado que se mueve perpendicularmente a la dirección del plano en donde está el cuadrado y por una distancia igual a uno de los lados del cuadrado. Figura 17.

3.1.4 Cantidad de espacio (Euclideo) ocupado por un cuerpo

Como planteamiento final acerca de la dimensión, nos referimos a la cantidad de espacio que ocupa cualquier objeto en su totalidad, estableciendo como restricción el que sea cero o un número natural, ya que los objetos trabajados en la geometría Euclidiana se pueden describir de manera específica través de puntos, líneas, planos y sólidos, lo que permite determinar la posición de cada elemento dentro del espacio; esto es, para toda figura es posible medir su longitud, área y volumen. El conjunto de todas estas medidas determinan la dimensión del objeto.

CAPITULO 4

OBJETOS FRACTALES

4. ESTUDIO DE LOS OBJETOS FRACTALES

Como mencionamos en el capitulo 1, la Geometría fractal, surge a partir de los conjuntos geométricos formados por puntos en el plano o en el espacio, con propiedades aparentemente paradójicas, que en un principio no fue posible estudiar su estructura exacta ya que la geometría euclidiana y las demás conocidas hasta el momento, no aportaban los elementos necesarios para realizar dicho estudio.

Es por esto que surge la necesidad de crear para dichos conjuntos una forma adecuada de medirlos y estudiar su forma y propiedades geométricas; algunos de los campos que se dedican a estos estudios son: la teoría de la medida y la más reciente es la geometría fractal, donde encontramos a Mandelbrot quien fue el primero en definir y utilizar el concepto de fractal. Èl designo fractales a objetos geométricos de estructura irregular y constató por primera vez que se encontraban en cosas y fenómenos de la naturaleza.

La palabra fractal viene del latín fractus, que significa fracturado, roto o irregular.

El concepto que establece Miguel Zapata es:

> *"un fractal es un objeto geométrico compuesto de elementos también geométricos de tamaño y orientación variable, pero de aspecto similar".*

Al analizar esta definición nos damos cuenta que su enfoque está dado hacia los fractales autosemejantes, ya que al establecer que poseen tamaño y orientación variable, pero aspecto similar, hace a un lado otros objetos fractales (aleatorios, brownianos) que pertenecen a esta misma familia pero que no están enmarcados en dicha definición.

Una segunda definición dada por Miguel de Guzmán:

> "*los fractales son objetos matemáticos encuadrados en el campo de la teoría geométrica de la medida, cuya delimitación exacta y definitiva está aún por establecerse*"…
>
> "*un fractal viene a ser el producto final que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especifico. Este proceso geométrico elemental, determina perfectamente la estructura final, que muy frecuentemente, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una compilación aparentemente extraordinaria*".

En general basados en los planteamientos presentados por Miguel De Guzmán podemos analizar detenidamente las siguientes características de un objeto fractal:

Son objetos encuadrados en la teoría geométrica de la medida; ya que dieron origen a la misma y sus características fueron inicialmente estudiadas en el análisis matemático.

Como segunda característica destacamos que éste, es el producto de la iteración infinita de un proceso geométrico; ya que existe un proceso determinado que se establece, a esta repetición se le denomina iteración, y el resultado final es el objeto fractal.
Es conveniente destacar que al trabajar con lápiz y papel es posible construir pasos finitos del mismo, más no se construye el objeto fractal en sí, dado que éste se encuentra cuando se itera infinitamente.

Una tercera definición de fractal la encontramos en topología donde los objetos fractales son considerados como subconjuntos del plano R^2, cuya construcción requiere técnicas como: algoritmos geométricos, gráficas de funciones y muchos es posible obtenerlos construyendo aproximaciones de atractores de sistemas dinámicos.

La cuarta definición de objeto fractal esta dado en el contexto de la teoría de la medida; tomemos un espacio métrico (R^n, d), siendo *d* la distancia euclidea, un fractal es un subconjunto compacto y no vacío de R^n.
El conjunto de los fractales de R^n, junto con la métrica asociada $(H(R^n), h)$ es un espacio métrico completo.
Las definiciones presentadas son una aproximación al concepto de objeto fractal, dado que como lo indica Mandelbrot, este es un concepto geométrico para el cual no existe definición precisa ni teoría única comúnmente aceptada, pero recalcamos que de cada una de las definiciones presentadas resaltamos algunos puntos importantes.

De la definición de Miguel Zapata destacamos el hecho de que los fractales son objetos geométricos, por lo tanto se hace necesario, estudiarlos dentro de este campo.

El aporte de Miguel de Guzmán, establece, en cierto modo, características específicas de los mismos que en adelante nos ayudarán en la construcción del concepto de "*dimensión*", que se estudiarán en el siguiente apartado.

4.1 COMO SE GENERAN LAS FASES DE UN OBJETO FRACTAL

Las fases de un objeto fractal se generan al aplicar en forma repetida y al infinito una función de transformación específica (proceso al que hace alusión Miguel de Guzmán) a los puntos que pertenecen a un espacio en particular.

Si $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto inicial seleccionado de un espacio, cada repetición de una función de transformación F, genera fase (**entiéndase por fase** el resultado de distintas iteraciones) del objeto.

$P_1 = F(P_0), \; P_2 = F(P_1), \; \ldots, \; P_{K+1} = F(P_K) \ldots$ k finito

En general, la función de transformación F se puede aplicar a un conjunto específico de puntos ó a un conjunto inicial de líneas rectas, áreas, superficies o sólidos. Asociado a éste, los procedimientos pueden ser determinísticos o aleatorios en cada repetición.

La función F, puede definirse en términos de transformaciones geométricas o de coordenadas no lineales, de esta manera se pueden generar objetos similares a los encontrados en la naturaleza.
Aunque algunos de los fractales se caracterizan por ser el producto de la iteración de un proceso geométrico bien definido, no todos pertenecen a una misma familia y es así como encontramos distintos tipos, según lo indica Mandelbrot, algunos son curvas o superficies, otros "polvos" inconexos[1], y también los hay con formas tan irregulares que no se encuentran, en las ciencias ni en las artes palabras que los describan correctamente.
A continuación haremos referencia a algunos fractales conocidos y estudiados, debido a sus propiedades matemáticas:

El **conjunto de Cantor o polvo de Cantor,** es uno de los fractales más antiguos, toma su nombre de George Cantor (1845- 1918), que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: ***el continuo matemático***. Este conjunto fue mencionado en 1875 (o antes) por el matemático irlandés Henry Smith. El conjunto de Cantor es un subconjunto de puntos del intervalo [0,1], para el cual se ha definido un algoritmo recursivo de construcción.

La **Alfombra de Sierpinski** es una variante de un Conjunto de Cantor plano en la que el cuadrado inicial se transforma suprimiéndole el cuadrado central de lado 1/3. En cada uno de los 8 cuadrados de lado 1/3 que forman la figura restante se repite esta operación. Y así sucesivamente.

El **Triángulo de Sierpinski,** surge en 1875, es una simplificación de la alfombra de Sierpinski en la que se parte de un triángulo equilátero y se suprime el triángulo central de lado 1/3, y se continua el proceso como en la alfombra. Sierpinski encontró confusión cuando intentó encontrar el área de ésta figura.

La **curva de Koch,** fue creada en 1904 por el matemático sueco Helge Von Koch; inspirado por Weierstrass, quien descubrió una curva continua sin tangente en algún punto, de la misma manera la curva de Koch es una figura continua en todos sus puntos pero no derivable en alguno. La **isla de Koch o copo de nieve,** es una variación de la curva de Koch, ésta ocupa una región limitada del espacio, un área finita y su perímetro es infinito.

Estos fractales se estudiarán detalladamente a continuación; puesto que es necesario realizar la clasificación de los mismos.

4.2 CLASIFICACIÓN DE FRACTALES

Los fractales se destacan por el hecho de presentar una dimensión no entera, y no es posible generalizar las características de los mismos, pues la mayoría de ellos representan formas irregulares variadas y en ocasiones difíciles de comprender, por esta razón es necesario realizar una clasificación (aunque aclaramos que no es la única, dado que se presenta según las necesidades).

Al clasificarlos, tomaremos como puntos de partida algunos conceptos geométricos como: escala, traslación y semejanza. De acuerdo a esto tenemos: fractales escalantes, no escalantes y aleatorios.

4.2.1 Fractales Escalantes

Cuando trabajamos en el espacio Euclideo observamos que las rectas, los planos y hasta el mismo espacio posee dos propiedades:

1.***Son invariantes por traslación***, al desplazar los objetos en cualquier dirección estos siguen presentando las mismas características.

2. ***No varían por cambios de escala***, la figura no se deforma al aplicarle una homotecia.

Cuando encontramos fractales que cumplen con estas propiedades, diremos que son **escalantes**[7] (los objetos euclideos son escalantes, pero no son considerados fractales).

---

[7] La expresión fractal escalante, como lo expresa Mandelbrot, el adjetivo suaviza el significado del sustantivo. "Así, mientras que fractal suena como a desorden y abarca casos de una irregularidad inmanejable, el calificativo escalante da a entender un cierto orden. Si se prefiere, se puede tomar la expresión en orden inverso; escalante como sustantivo que indica un orden estricto y fractal como calificativo que excluye objetos euclideos como rectas, planos, círculos, ractángulos, etc.

Dentro de esta clasificación encontramos los autosemejantes que son invariantes por la transformación geométrica de semejanza. Por lo tanto es necesario hacer referencia al término autosemejanza[8]

La idea de autosemejanza es antigua, aunque Mandelbrot es quien escribe la primera obra que aborda con mayor interés este tema, haciendo énfasis en los aspectos geométricos del cambio de escala no estándar en la naturaleza, este término tampoco es nuevo en otros campos distintos a la matemática

Observemos ejemplos de las fases de fractales escalantes – autosemejantes:

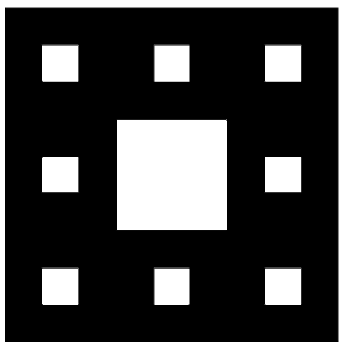
4.2.1.1 La alfombra de Sierpinski

La alfombra de Sierpinski se inicia con un cuadrado de lado y área 1 . A este cuadrado le eliminamos el cuadrado central de lado $\frac{1}{3}$ (como se mencionó en la página 54).

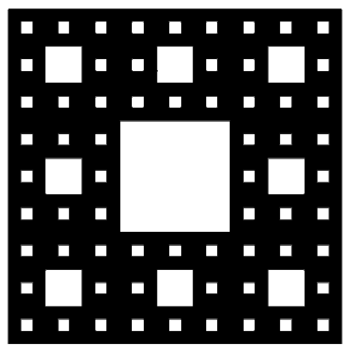
Fase 0 **fase 1**

[8] Lewis F. Richardson postuló en 1926 que en una amplia gama de escalas la turbulencia se puede descomponer en remolinos autosemejantes.

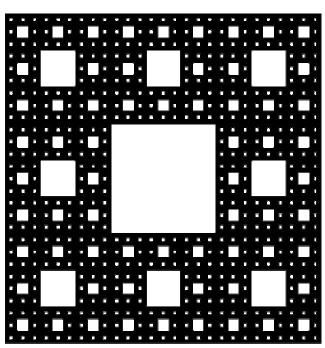
En cada uno de los 8 cuadrados de lado $\frac{1}{3}$ que se forman en la figura restante se suprime el cuadrado central, cuya longitud de lado es ahora $\frac{1}{9}$. El mismo proceso repetimos para los nuevos cuadrados que se forman; esto se ilustra en las siguientes fases de la alfombra de Sierpinski .



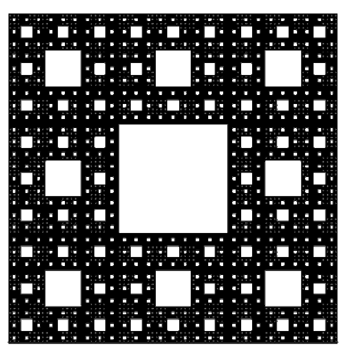
Fase 2



fase 3



Fase 4



fase 5

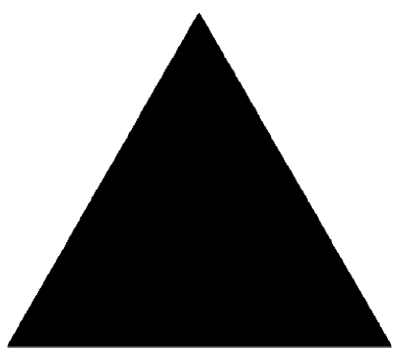
Figura 20. Fases Alfombra de Sierpinski.

La alfombra de Sierpinski se considera un fractal escalante porque no presenta variación cuando se traslada, además, la figura no cambia su forma cuando se amplia o reduce.

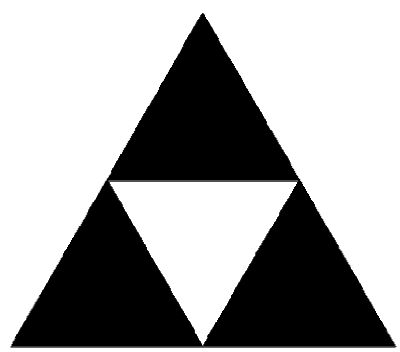
4.2.1.2 El triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es una simplificación de la alfombra de Sierpinski en la que se parte de un triángulo equilátero. Para nuestro caso supongamos que el área es 1.

Del triángulo equilátero inicial eliminamos, el triángulo central cuya área es $\frac{1}{4}$.

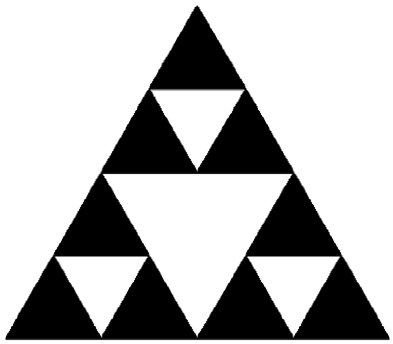


Fase 0

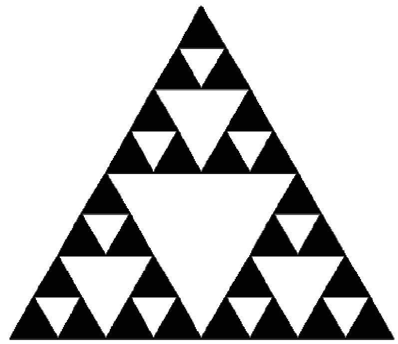


fase 1

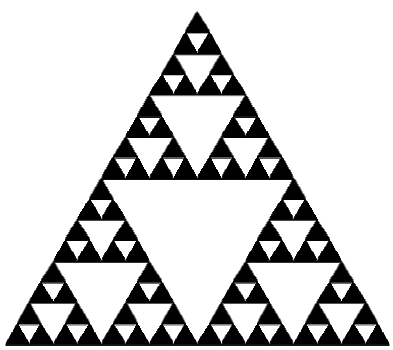
De la misma manera como trabajamos con la alfombra de Sierpinski, trabajamos el triángulo y encontramos las siguientes representaciones gráficas de las siete primeras fases del objeto fractal.



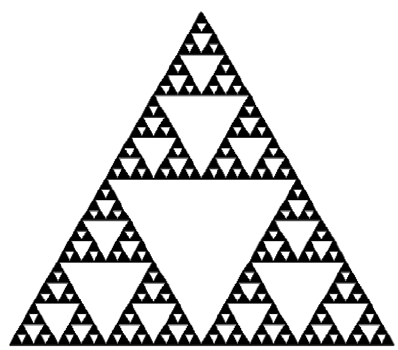
Fase 2



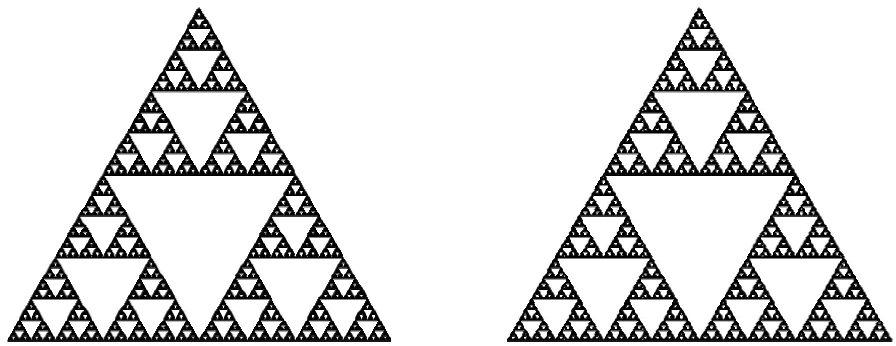
fase 3



Fase 4



fase 5



Fase 6 **fase 7**

Figura 21. Fases triángulo de Sierpinski

Con este tipo de fractales realizaremos nuestro estudio de dimensión. Dado que son conocidos en el ámbito matemático y son considerados (según Mandelbrot) como los mejores objetos fractales.

4.2.2 Fractales no Escalantes

Estos fractales, **varían por traslación o por cambio de escala**, como lo son: el conjunto de Mandelbrot, Red Apoloniana, los autoinversos, los cuales fueron introducidos hacia la década de 1880 por Poncairé y Felix Klein, aproximadamente hacia la misma época en que aparecieron los conjuntos de Cantor, antes que las curvas de Peano y de Koch.

4.2.2.1. Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot se encuentra dentro de los fractales no escalantes dado que, no toda su estructura es una versión a escala del objeto inicial, este fractal es generado por una función de iteración no real, por lo tanto es necesario utilizar variable compleja para la construcción de dicho objeto.

El fractal de Mandelbrot, se genera mediante un algoritmo de escape. Para cada punto se calculan una serie de valores mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumple una condición, momento en el cual se asigna al punto un color relacionado con el número de repeticiones. Los fractales de este tipo precisan de millones de operaciones, por lo cual sólo pueden dibujarse con ayuda del computador.

Una característica especial del fractal Mandelbrot (y de otros tipos afines) es la de generar un infinito conjunto de fractales, ya que por cada punto se puede generar un fractal tipo Julia, que no es sino una ligera modificación en la fórmula de Mandelbrot.

Observemos dos versiones de dicho fractal

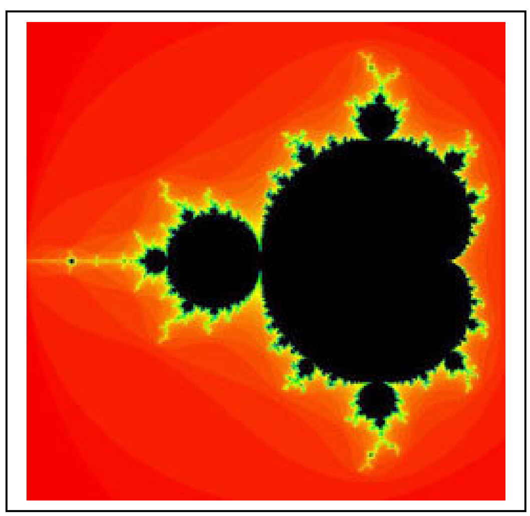


Figura 22. Conjunto Mandelbrot versión 1

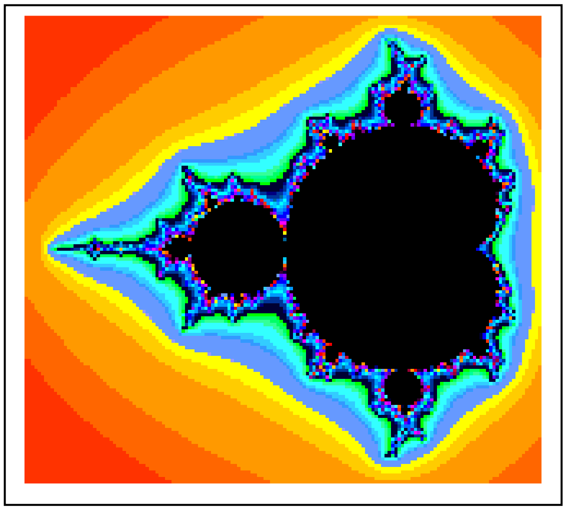


Figura 23. Conjunto Mandelbrot versión 2

Tomemos la segunda versión o gráfico y hagamos una ampliación a la imagen, encontramos lo siguiente:

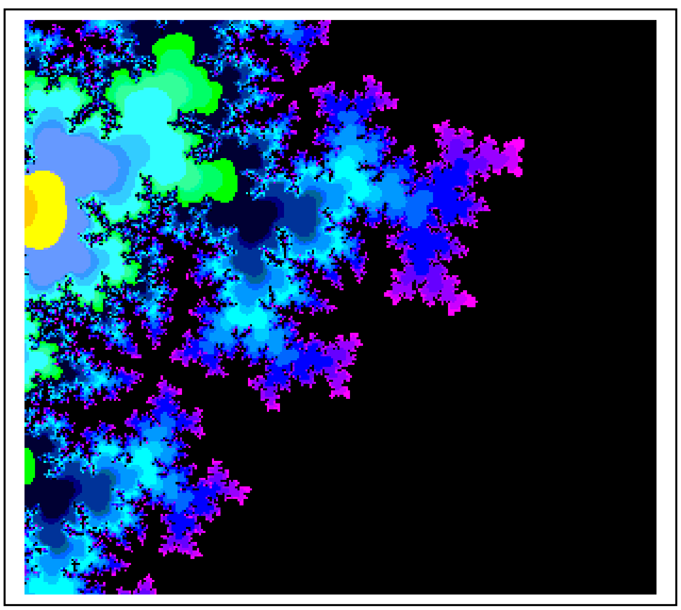


Figura 24. Ampliación uno

Y si seguimos ampliando obtendremos:

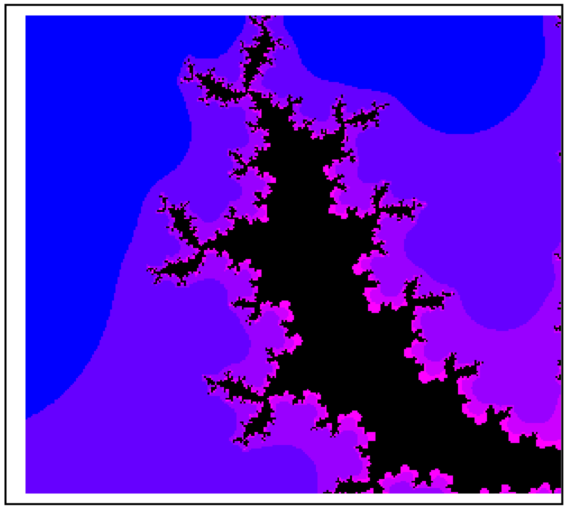


Figura 25. Ampliación 2

Luego de realizar este proceso se puede concluir que el fractal Mandelbrot no es escalante dado que al ampliar dicho objeto su forma cambia, luego no es invariante por cambio de escala.

4.2.2.2 Dragón fractal

Este fractal es derivado del conjunto de mandelbrot, también es un ejemplo de no escalante.

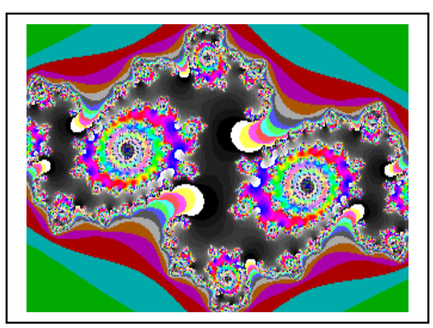


Figura 26. Dragón Fractal

4.2.2.3 Ejemplo de fractal autoinverso

Un conjunto apoloniano (atribuido a Apolonio de Pérgamo, año 200 a.C), se denomina de esta manera a aquellos que consisten en una infinidad de circunferencias junto con sus puntos límite, la condición de fractal de dichos conjuntos se deben solamente a su fragmentación.

Apolonio descubrió un algoritmo para trazar las cinco circunferencias tangentes a otras tres dadas. De estas construcciones surgen algunos fractales autoinversos, como el relleno apoloniano, la red apoloniana y el tamiz apoloniano.

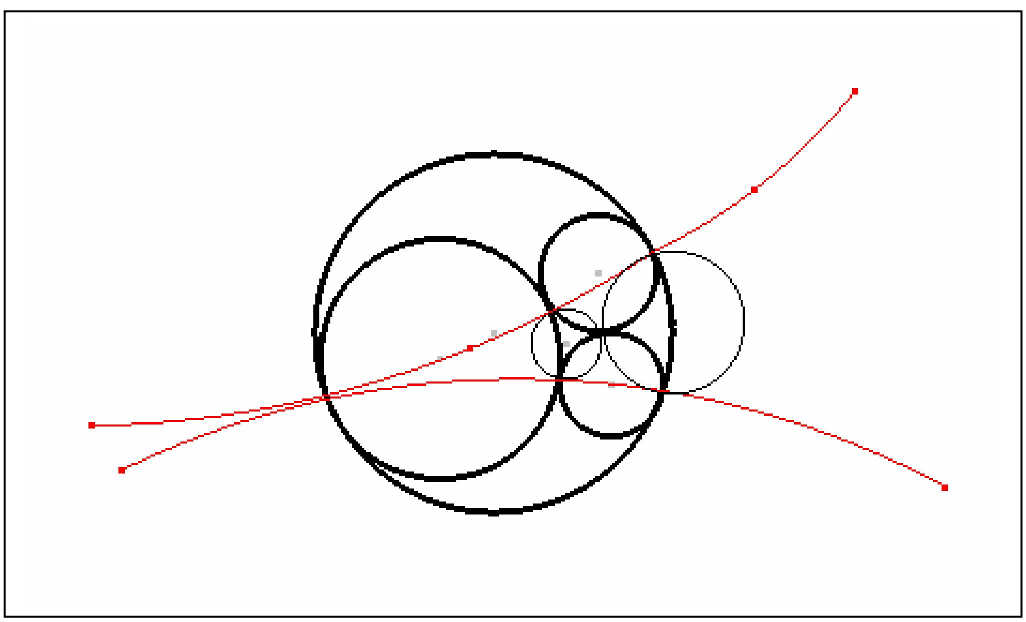


Figura 27. Inicio Red Apoloniana

4.2.3 Fractales Aleatorios

Ciertas categorías de fractal no encajan del todo dentro de los escalantes y los no escalantes, dado que no encontramos una fórmula para describirlos. Estructuras como el plasma o las imágenes de difusión (figura 28) dependen en cierta medida de procesos no determinísticos, y es necesario utilizar la probabilidad, por lo cual éstas imágenes son únicas e irrepetibles, a estas las hemos clasificado dentro de un grupo que denominamos fractales aleatorios, los cuales necesitan de procesos aleatorios para su construcción[9].

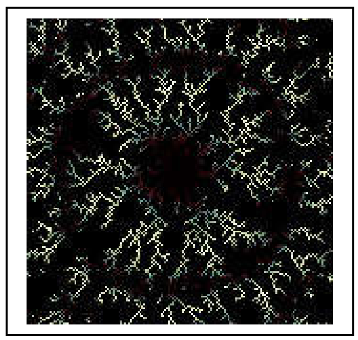


Figura 28. Imágen de Difusión

En este apartado, haremos referencia a la construcción de fractales aleatorios, a partir de los autosemejantes, de esta manera tendremos una idea de ellos.

En primer lugar consideraremos el triángulo de Sierpinski, y luego haremos el tratamiento para la curva de Koch.

---

[9] La Teoría del Caos surgió cuando los científicos comenzaron a preguntarse por el posible orden en las cosas que a primera vista resultaban desordenadas. ¿Podría encontrarse algún patrón de desarrollo en estructuras aparentemente tan desordenadas como la línea costera de un país, o el sistema circulatorio humano, o las dendritas de una neurona? La ciencia ha respondido afirmativamente. Un fenómeno aparentemente desordenado puede responder a una estructura interna.

El desorden aparente en los sistemas caóticos, se debe a que, ante unas condiciones iniciales similares, una pequeña diferencia o perturbación inicial da origen a comportamientos completamente distintos. De ahí que se les llame también sistemas
dinámicos no lineales

4.2.3.1 Triángulo de Sierpinski Aleatorio

Consideremos una variación del triángulo de Sierpinski. En cada etapa, tomamos un punto al azar sobre cada lado del triángulo a dividir, uniendo los puntos resultantes. A continuación, se quita el triángulo (no equilátero) central.

Figura 29. Triángulo de Sierpinski Aleatorio, versión 1.

Nuevamente, volvamos a la subdivisión clásica en triángulos equiláteros. Ahora, en cada etapa, se quita uno de los cuatro triángulos pequeños, elegido al azar. Después de 5 etapas, el resultado se muestra en la figura siguiente.

Figura 30. Triángulo Sierpinski Aleatorio, versión 2.

4.2.3.2. Curva de Koch Aleatoria.

Ahora construiremos un fractal aleatorio a partir de la curva de koch.

De acuerdo con la figura que sigue, hay dos orientaciones posibles para el ángulo de giro. Elegimos al azar una de estas orientaciones en cada etapa y el resultado es una curva de Koch aleatoria.

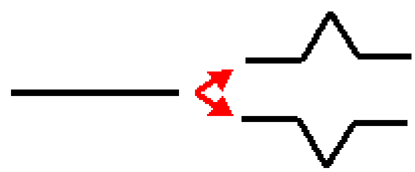


Figura 31. Orientación de giro

El giro elegido al azar da como resultado una variante de la curva de koch (fractal autosemejante que presenta un algoritmo recursivo de construcción).

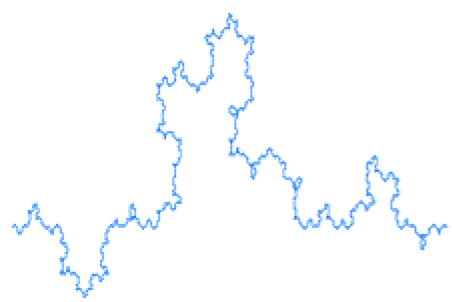


Figura 32. Curva de koch aleatoria.

CAPITULO 5

DIMENSIÓN FRACTAL

5. DIMENSIÓN FRACTAL

Ya hemos visto como se define la dimensión en la geometría Euclidiana, una de las definiciones hace referencia al grado de libertad de movimiento en el espacio Euclideo y otra a la forma como es posible generar objetos a partir de otros.
Algunas definiciones y métodos para calcular la dimensión son: la Topológica, Euclídea, de Autosemejanza, método de conteo por cajas, del compás, y otras más.
Es importante tener en cuenta que este es un concepto complejo de trabajar en matemáticas, ya que se encuentran varias definiciones asociadas a ella, además ha sido un tema de estudio durante mucho tiempo.
En el último siglo este fue uno de los mayores problemas, dado que muchos matemáticos crearon definiciones de dimensión y encontraron objetos que encajaron en cada una de ellas.

Es importante dar una mirada a cada una, para tener una idea del trabajo realizado por algunos matemáticos en este aspecto y de esta manera abrir nuestro panorama acerca de la dimensión.

A continuación presentaremos algunas definiciones y métodos para calcular la dimensión de distintos objetos que no son posibles modelar en la geometría euclidiana.

5.1 DEFINICIONES

5.1.1 Topológica

Para construir el concepto de dimensión topológica es posible basarse en la idea de que la dimensión de una bola es tres y la dimensión de la esfera que limita dicha bola es dos. La dimensión topológica de un conjunto *F* se basa en la dimensión de su frontera que se representa como ∂*(F).*

Tomamos en primer lugar, un objeto fractal como un subconjunto de R^n en este momento no se presenta una dimensión del objeto, se estudia como un conjunto *F* que pertenece a R^n . ahora la definición equivalente de dimensión topológica en este contexto es la dimensión de recubrimiento.

Por lo tanto, se dice que un conjunto F tiene dimensión topológica 0, $D_T(F) = 0$ si y solo si para todo *x* que pertenece a *F* y cualquier conjunto abierto *U* (para la topología relativa de *F*) que contenga a *x*, existe un abierto *V* tal que *x* pertenece a *V* que está incluido en *U* y la frontera de *V* con la intersección a *F* es vacía.

5.2 METODOS PARA CALCULAR LA DIMENSIÓN

Además de definir la dimensión topológica, haremos referencia a distintos métodos para calcular dimensiones a diferentes objetos, en especial fractales encontrados en la naturaleza. A continuación se describen estos métodos.

5.2.1 Conteo por cajas

Uno de los métodos utilizados para el cálculo de la dimensión de un objeto fractal es el llamado *box-counting o Conteo por cajas,* que tiene su antecedente en el descrito por Pontrjagin y Schnirelman en 1932, y fue desarrollado posteriormente (1959) por A.N. Kolmogorov.

Este método consiste en sobreponer a la estructura a analizar una rejilla o cuadrícula con celdas de tamaño *r*, formando un recubrimiento de cajas. El número de cuadrados o celdas que intersecan la estructura a caracterizar es *N*(*r*), variando con el valor de *r* escogido. Para realizar el correspondiente cálculo de la dimensión fractal se procede a calcular *N(r)* para diferentes escalas. El valor de la dimensión corresponde a la pendiente de la representación *log(N(r))* frente a *-log(r).*

A continuación utilizaremos el método de Conteo por cajas para calcular la dimensión del triángulo de Sierpinski. Sobre dicho objeto dibujamos una rejilla de 2x2 cuadrados de lado *r* como lo muestra la figura.

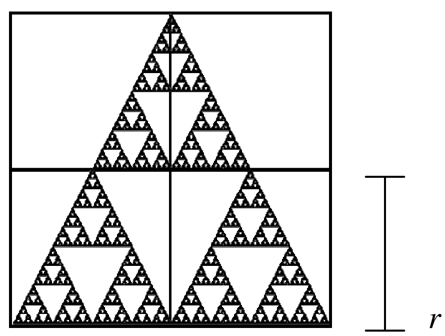


Figura 33. Rejilla 2x2.

Se puede comprobar que el número de cuadrados de lado *r* que intersecan la figura son 4, por lo tanto N(*r*) = 4.

Ahora tomamos una   rejilla de 3x3 cuadrados de lado r_1.

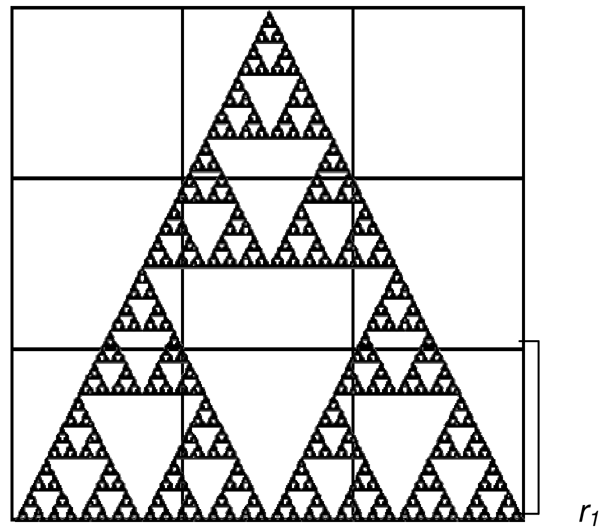


Figura 34. Rejilla de 3x3

Observamos que $N(r_1) = 7$, ya que de todos los cuadrados de la malla, por lo menos un punto pertenece al triángulo de Sierpinski. Los dos cuadrados restantes están vacíos.

Ahora tomamos una rejilla de 8x8 cuadrados de lado r_2.
La longitud del cuadrado va diminuyendo a medida que la malla se divide en un número mayor de cuadrados, en este caso encontramos 64 cuadrados de los cuales 40 intersecan el objeto, por lo tanto $N(r_2) = 40$. Los 24 cuadrados restantes están vacíos.

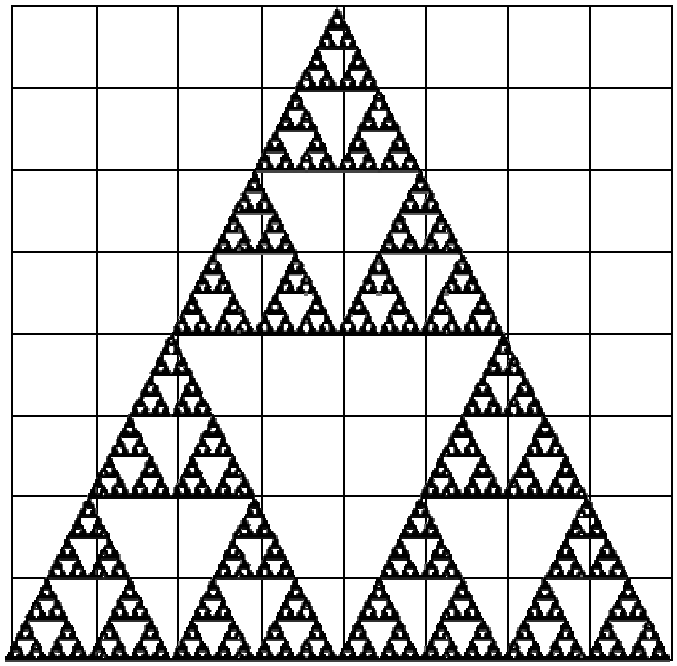


Figura 35. Rejilla 8x8

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, presentamos un gráfico, donde el eje de abscisas representa el logaritmo del inverso del tamaño de lado de las cajas, *Ln(1/r)* y el eje de ordenadas el logaritmo del número de cajas no vacías, *Ln(N(*r*)).* La figura inferior es el resultado de este diagrama.

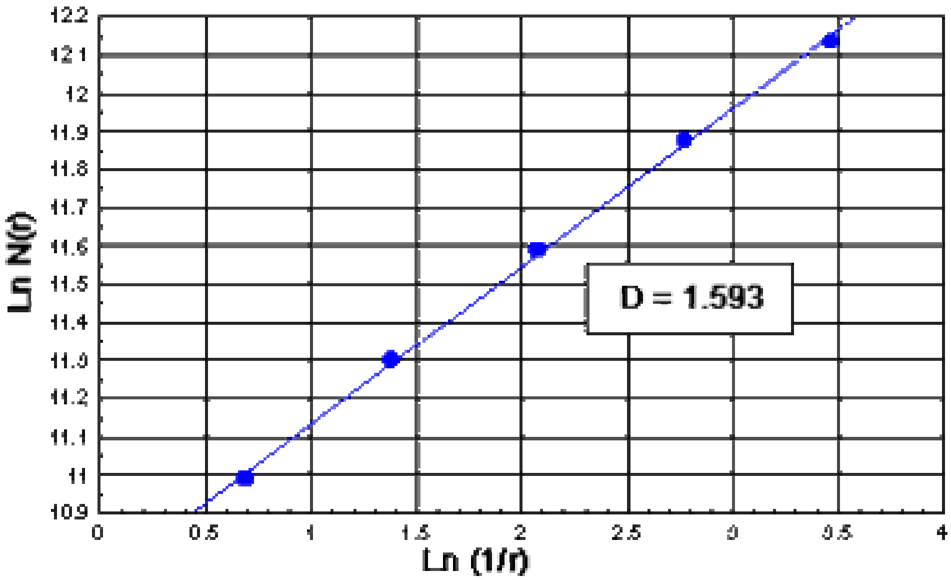


Figura 36. *Ln(1/r)- Ln(N(*r*))*

Observamos que los puntos se sitúan a lo largo de una línea recta de pendiente positiva, y se ajustan a una función como la siguiente:

$$Ln\ N(r) = D * Ln\ (1/r) + C$$

si despejamos *N(r),* tenemos:

$$N(r) = Cte * \partial^{D}$$

Con base en propiedades de los logaritmos, calculamos el valor D = 1.593. El número encontrado por medio del método de conteo de cajas es la dimensión para el triángulo de Sierpinski.

El método de *Box-counting* es sin duda uno de los métodos más conocidos en la literatura científica. Puede aplicarse a distribuciones de puntos, curvas, superficies, volúmenes, obteniendo resultados favorables. En general, se utiliza una rejilla de celdas de lado *r* recubriendo el objeto a explorar. Se contabilizan las celdas N ocupadas por la imagen y se repite la operación para otro tamaño de celda de lado *r*. Donde:

$$N(r) = cte^{*}\partial^{-D}$$

nos determina la dimensión fractal D del objeto fractal.

Otro método extendido y relacionado con el *box-counting* es el método del compás (*Compass o ruler method*). que analizaremos a continuación.

5.2.2 Método del Compás

Se utiliza para encontrar la dimensión fractal de longitud de las costas, las fronteras de los países entre otros. Mandelbrot hizo popular los fractales utilizando este método en su artículo titulado: ***¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?.***

Para entender un poco en que consiste este método, se toma como objeto de estudio una costa y se analiza la forma como es posible medirla. En primer lugar se consideran dos puntos cualesquiera, digamos A y B (Figura 37), sobre la línea de costa. Si primero se observa a una escala 1/*n,* es posible identificar algunas bahías y penínsulas. Ahora si se observa la misma costa, pero teniendo en cuenta una escala de 10/*n,* se podrán notar características que no se veían en el mapa anterior. De esta manera es posible encontrar nuevas bahías y nuevas penínsulas. Así se puede continuar cambiando la escala y de esta manera encontrar nuevos detalles del objeto.

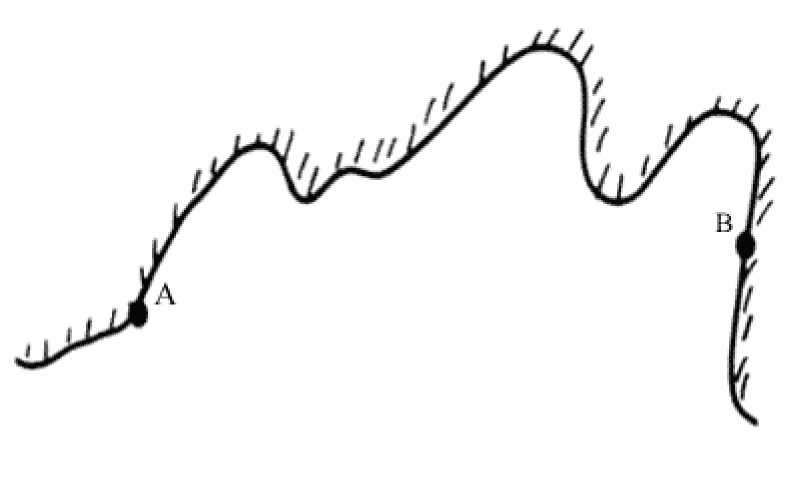


Figura 37. Puntos A y B sobre una costa.

Tomando nuevamente los puntos A y B (figura 34). Una manera de medir la longitud entre ellos, es la que proporciona la línea recta que los une. Sin embargo, como se sabe, la costa es, en general, irregular, por lo tanto su longitud será mayor que la de la línea recta entre sus dos puntos extremos. Ahora se toma una unidad arbitraria de longitud H, por ejemplo una regla. Para medir la longitud de la costa se toma la regla a lo largo de ella (Figura 35) y se cuenta el número de veces que la regla cabe en la costa. A este número, denotado por L^1, se le llamará la longitud de la costa. Se toma otra regla de menor longitud y se repite el procedimiento obteniendo para la longitud el número L^2. Este proceso se puede continuar de manera indefinida, obteniendo de esta manera longitudes L^3, L^4, .. se piensa que en algún momento se encontrará la longitud de la costa pero lo que pasa es que esta sucesión de longitudes aumenta cada vez más y su valor tiende a infinito. Este resultado sorpresivo se debe precisamente al hecho de que al ir cambiando de escala van apareciendo más bahías y penínsulas pequeñas, cada una de estas contribuye a la longitud medida. Por muy pequeña que sea la nueva bahía o península, al ir aumentando la escala, en algún momento se tendrá en cuenta y contribuirá a la medición.

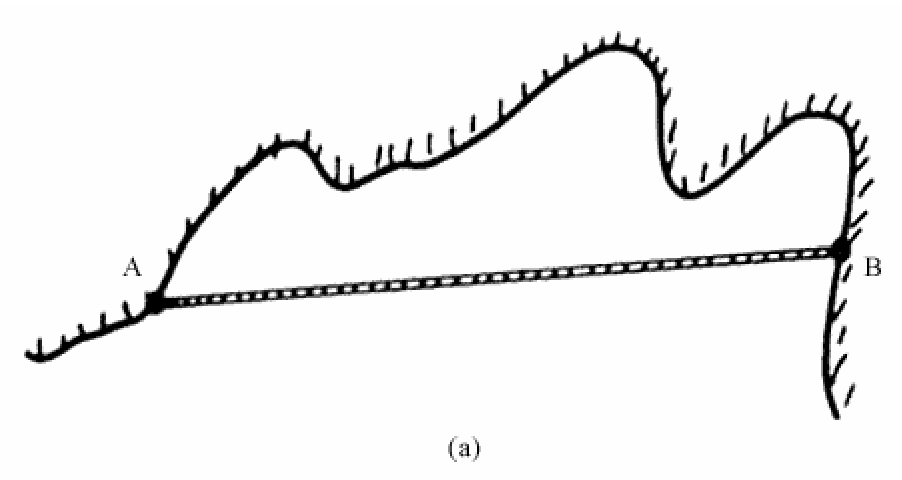


Figura 38 . medición línea recta

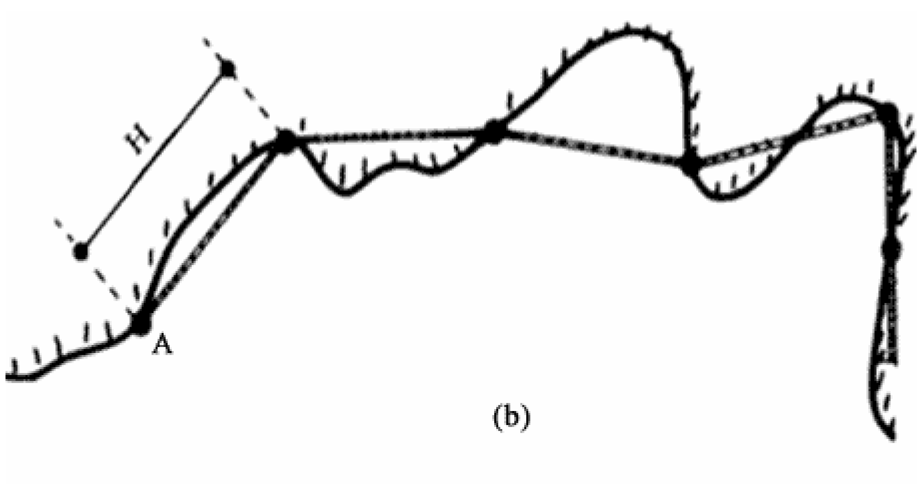


Figura 39. Medición de la costa con regla longitud H.

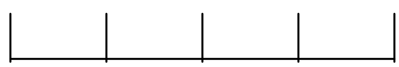
Por lo tanto, la medida de una costa no tiene un sentido definido si no es en referencia a una escala de medida.

5.3 DIMENSIÓN DE ESCALA DE OBJETOS AUTOSEMEJANTES

Para analizar la dimensión de escala, se partirá de objetos trabajados en la geometría Euclidiana y luego se realizará una generalización de la fórmula encontrada.

1. Se toma un segmento de longitud 1.

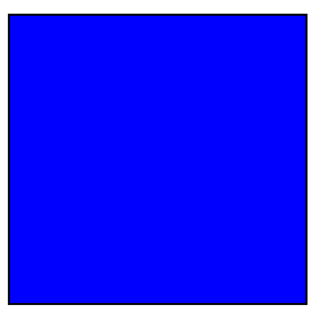
se divide en 4 partes congruentes, por lo tanto la longitud da cada parte es $\frac{1}{4}$.



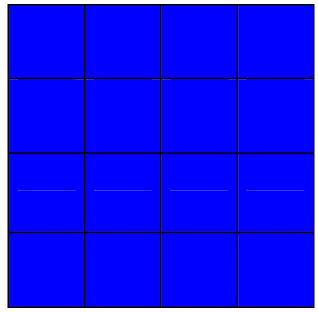
El segmento cuya longitud es $\frac{1}{4}$, es una reducción del segmento unidad.

Si cada segmento de longitud $\frac{1}{4}$, se divide en 4 partes congruentes, la longitud de cada nuevo segmento es $\frac{1}{16}$. Y el segmento inicial queda dividido en 16 partes.

2. Se parte ahora un cuadrado que tiene lado 1.



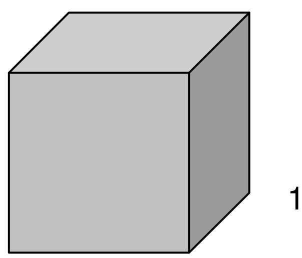
El número de cuadrados de lado $\frac{1}{4}$ que se necesitan para cubrirlo totalmente es 16.



Observando la figura anterior, se encuentra que el objeto quedo dividido en 16 cuadrados congruentes.

Es importante destacar que cada uno de ellos, es semejante al cuadrado de longitud 1. por lo tanto se ha realizado una reducción con factor $\frac{1}{4}$.

3. El tercer objeto que se trabaja es un cubo cuyas aristas miden 1.



El número de cubos de arista $\frac{1}{4}$ que son necesarios para llenar el cubo de volumen 1 es 64.

Hasta aquí se han tomado objetos que se trabajaron en la geometría euclidiana.

Ahora se partirá de un fractal autosemejante para realizar un análisis similar al de los objetos anteriores.

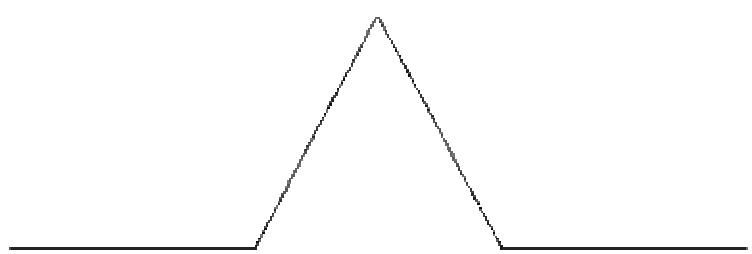
5.3.1 La curva de koch.

1. Partimos de un segmento de longitud 1.

2. Lo dividimos en tres partes congruentes.

3. Construimos un triángulo equilátero cuya base sea el segmento de longitud $\frac{1}{3}$ que se encuentra en la parte central.

4. Luego, borramos la base del triángulo y encontramos la primera fase del objeto, así como lo muestra la figura.



Fase 1

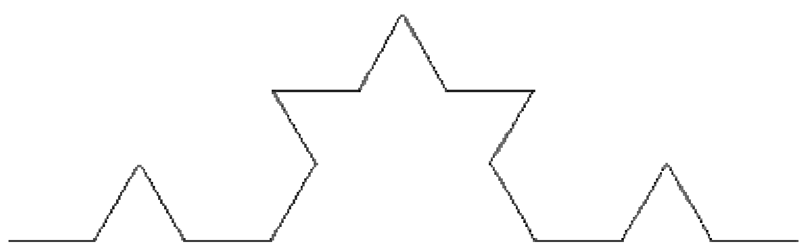
Observando la figura anterior, nos preguntamos lo siguiente:

a) ¿cuál es la longitud de cada segmento? $\frac{1}{3}$

b) ¿Cuántos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$, posee la figura? 4

La siguiente fase, es tomar cada uno de los segmentos de longitud $\frac{1}{3}$ y repetir lo realizado en las cuatro primeras fases.

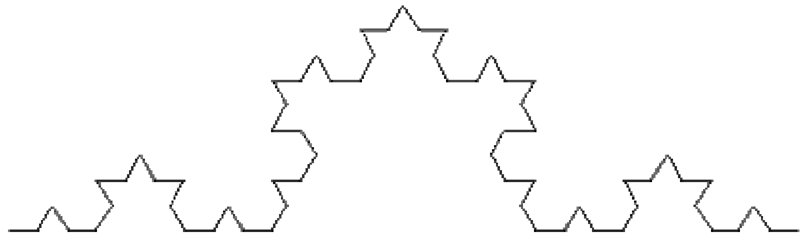
Y la figura que resulta es la siguiente:



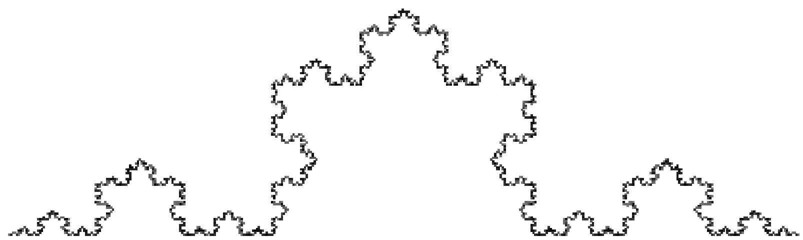
Fase 2

Por lo tanto, cada nuevo segmento tiene longitud $\frac{1}{9}$, y el número de ellos es 16.

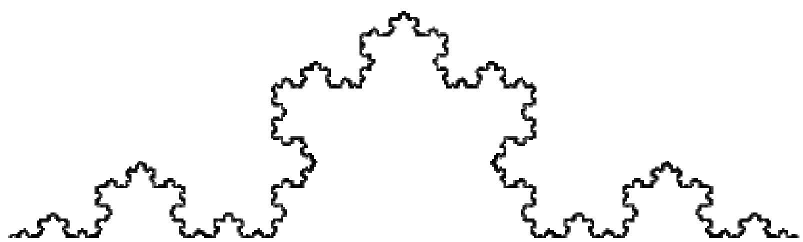
En las siguientes fases, repetimos el mismo procedimiento con los segmentos que van resultando en la curva.



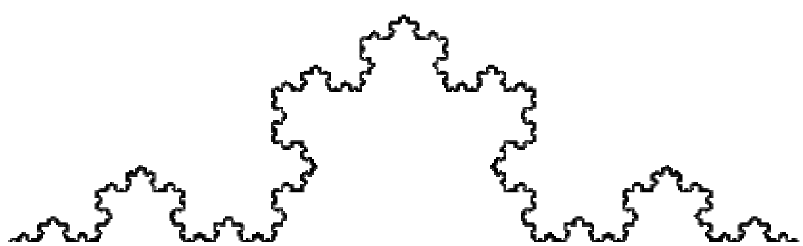
Fase 3



fase 4



fase 5



Fase 6

Figura 40. Fases curva de Koch

Aunque en este momento nos encontramos en la sexta fase del objeto fractal, es posible realizar una comparación de las características de estas con las propiedades de los objetos euclideos presentados en este capítulo.

Partiendo de esto y con la siguiente tabla que muestra información sobre los objetos estudiados en este capítulo, podemos establecer una relación que nos ayude a calcular la dimensión para la curva de koch.

Objeto	Factor de reducción (f)	Número de piezas (p)	Dimensión (D)
Segmento	$\frac{1}{4}$	$4 = 4^1$	1
Segmento	$\frac{1}{2}$	$2 = 2^1$	1
Cuadrado	$\frac{1}{4}$	$16= 4^2$	2
Cuadrado	$\frac{1}{2}$	$4 = 2^2$	2
Cubo	$\frac{1}{4}$	$64 = 4^3$	3
Cubo	$\frac{1}{2}$	$8 = 2^3$	3
Curva de koch	$\frac{1}{3}$	4	
Curva de koch	$\frac{1}{9}$	16	

Tabla 1. Objetos y su dimensión

Teniendo en cuenta la tabla; para el segmento, el cuadrado y el cubo, encontramos que estas estructuras se pueden obtener a partir de la reunión de copias de sí mismas con una escala distinta, sabiendo esto, se afirma quesi al tomar una escala f, un objeto puede ser subdividido en p copias de sí mismo, entonces su dimensión D es el número que satisface la ecuación:

$p = \frac{1}{f^D}$, o lo que es equivalente a $p\, f^{D} = 1$.

Tomemos el caso del cuadrado, cuyo factor de reducción es $\frac{1}{4}$, el número de piezas es 16, y la dimensión es 2. (esta no cambia, así el factor de reducción cambie)

$$16 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{16}\right)} = 16$$

Si de igual manera calculamos la dimensión de la curva de Koch. Tendremos, la tarea de despejar D de las siguientes igualdades:

$$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^D} = 3^D \qquad\qquad 16 = \frac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^D} = 9^D$$

Como $4 = 3^D$ *, aplicando logaritmos obtenemos:*

$\log 4 = D.\log 3$; *por lo tanto* $D = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1.2619$, de esta manera establecemos que la dimensión de la curva de Koch es aproximadamente 1.2619.

En nuestro estudio con los fractales, tomaremos la definición de dimensión de autosemejanza como parte fundamental en el paralelo a realizar, ya que esta será comparada con la concepción intuitiva de Euclides acerca de la dimensión.

5.3.2 Calculo de dimensión a fractales autosemejantes

5.3.2.1 Conjunto de Cantor

De la misma manera como se calculó la dimensión, para la curva de Koch, lo podemos hacer para el conjunto de Cantor (utilizando la fórmula $p = \frac{1}{f^{D}}$), pero antes mostraremos su construcción:

1. Tomamos un segmento de longitud 1,

2. Lo dividimos en tres partes congruentes y quitamos la parte del centro cuya longitud es $\frac{1}{3}$.

3. A cada uno de estos nuevos intervalos los dividimos también en tres partes congruentes y quitamos a su vez la parte central que ahora tendrá longitud $\frac{1}{9}$.

4. Continuamos realizando el mismo proceso .

-- -- -- -- -- -- -- --

Después de observar algunas fases, del Conjunto de Cantor realizamos la siguiente tabla que nos muestra características importantes de dicho conjunto; características que nos ayudarán en el cálculo de su dimensión.

Número de pasos en la construcción	Número de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud del segmento quitado	Representación gráfica
0	1	1	0	
1	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
2	4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$	
3	8	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}$	-- -- -- -- -- -- -- --
…	…	…	…	
N	2^n	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i$	

Tabla 2. Análisis Conjunto de Cantor

De la misma manera como calculamos la dimensión de la curva de Koch, lo haremos para el Conjunto de Cantor. despejando D de las siguientes igualdades:

$2 = 1/(1/3)^D \;\; = 3^D \qquad\qquad 4 = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^D} = 9^D$

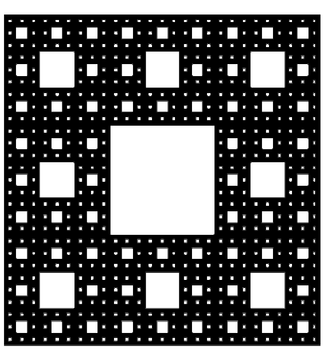
Como $2 = 3^D$ *, aplicando logaritmos obtenemos:*

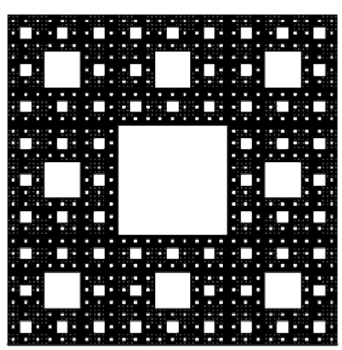
$\log 2 = D.\log 3$; *por lo tanto* $D = \log 2/\log 3 = 0{,}6309...$

de esta manera establecemos que la dimensión de la curva de Koch es aproximadamente 1.2619.

5.3.2.2 La alfombra de Sierpinski

Algunas fases de la Alfombra de Sierpinski se presentaron en el capítulo cuatro, en este momento presentamos las fases 4 y 5, la tabla que resume las características principales de esta figura y el cálculo de la dimensión así como se presentó para el conjunto de Cantor.





Fase 4 **fase 5**

La alfombra de Sierpinski se forma con *p*= 8 piezas, copias semejantes de la pieza inicial, con razón de semejanza 1/3.

Número de pasos en la construcción	Número de cuadrados	Longitud de cada lado	Area de cada cuadrado	Area de la figura
0	1	1	1	1
1	8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	8/9
2	64	$\frac{1}{9}$	1/81	64/81
3	512	$\frac{1}{27}$	1/729	512/729
…	…	…	…	....
N	8^n	$\frac{1}{3^n}$	$(1/9)^n$	$(8/9)^n$

Tabla 3. Análisis Alfombra De Sierpinski

Observamos que en este caso, la escala en la Alfombra de Sierpinski es de $\frac{1}{3^n}$ en cada una de las longitudes y se generan 8^n cuadrados en el paso n-ésimo; por lo tanto la dimensión de la Alfombra de Sierpinski esta dada por:

D= log 8 / log 4 = 1.8928..

CAPITULO 6

ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DIMENSIÓN DESDE EUCLIDES A MANDELBROT

6. ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DIMENSIÓN DESDE EUCLIDES A MANDELBROT

6.1 ANTECEDENTES GEOMETRÍA EUCLIDEA Y FRACTAL

La geometría Euclidea ha sido trabajada desde hace mas de 2000 años teniendo sus orígenes en la antigua Grecia, su principal representante es el matemático Euclides que vivió alrededor del año 300 a.C. y escribió ***"los Elementos"*** , una de las obras más conocidas de la literatura mundial, en la cual establece un método riguroso de razonamiento deductivo y presenta de manera formal el estudio de las propiedades de líneas, planos, círculos, triángulos, esferas, conos, entre otros, es decir de las formas regulares. Los teoremas postulados y definiciones que encontramos en este libro son los que generalmente se aprende en los primeros cursos de Geometría. En su época era considerado como el único libro de matemáticas que hacia referencia a esta área, ya que no existían estudios geométricos de otro tipo.

La geometría Euclidea se conoce como tradicional y en general se considera útil para modelar objetos hechos por el hombre que pueden ser descritos a través de fórmulas.

Con el transcurrir de los años se vio la necesidad de modelar objetos y fenómenos de la naturaleza, trabajo que en muchas ocasiones no fue posible realizar con los elementos por ella proporcionados.

Un nuevo tipo de geometría que ha sido desarrollada desde hace unas tres décadas atrás, es la **Fractal**, que proporciona nuevos elementos para modelar objetos de la naturaleza y generar bellas figuras de gran complejidad que pueden ser descritas en ocasiones por algoritmos recursivos.

Esta geometría ha sido el fruto del trabajo de varios matemáticos como Koch, Fatou, Sierpinski, Julia, Hausdorff, y el más destacado Benoit Mandelbrot, a quien se le denominó padre de la geometría fractal; trabajó en **IBM** donde se dedicó al estudio de series temporales relacionadas con precios y posteriormente con el ruido de las líneas telefónicas para interconexión de computadores. A partir de esto publica su primera referencia sobre series temporales en finanzas. Más tarde publica un ensayo sobre objetos fractales y luego un nuevo libro titulado "***La geometría fractal de la naturaleza***", en estos presenta acercamientos al concepto de fractal y estudio de la dimensión.

6.2. DE EUCLIDES A MANDELBROT

Mandelbrot a diferencia de Euclides crea su geometría partiendo de los avances que sé tenia en esta rama de la matemática, ya que para esta época se habían desarrollado otras geometrías como la de Riemann, Lobatchevsky, Cartesiana, entre otras. Euclides en cambio es quien sienta las bases de la geometría y presenta de manera formal el estudio de esta área del conocimiento.

Al comparar los trabajos de Euclides y Mandelbrot encontramos que cada uno de ellos utiliza instrumentos distintos para trabajar, el primero realizó sus labores con ayuda del lápiz y el papel, ya que en su tiempo, no se encontraban herramientas más avanzadas, en cambio Mandelbrot haciendo uso de la tecnología, desarrolla sus creaciones ayudado del computador, instrumento que fue de gran utilidad y beneficio en su labor.

6.3 ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DIMENSIÓN

6.3.1. Euclidea

En "*los Elementos"* de Euclides, se define de manera implícita, la dimensión. En esta obra no encontramos una expresión que dé ha entender específicamente qué es la dimensión de un objeto. El análisis de este concepto surge a partir de las definiciones que se presentan a medida que se avanza en la lectura de este texto; los objetos que allí se describen se han encajado en una dimensión entera.

A partir de lo presentado en "*Los Elementos"*, surgen distintas interpretaciones de dimensión Euclidea, a las cuales se hace referencia en el capítulo 3 y que a continuación mencionaremos brevemente:

1. Libertad de movimiento: esta definición se presenta a partir del análisis de las posibles direcciones ortogonales diferentes que es posible realizar, dado un objeto. En este caso, si es posible desplazarse hacia la derecha, izquierda, arriba, abajo, o si no es posible realizar movimiento como el caso del punto, objeto al que se asigna la dimensión cero. En la recta es posible desplazarse de derecha a izquierda o viceversa y por lo tanto se le asigna dimensión uno.
2. Se puede definir la dimensión de un objeto de acuerdo a la cantidad de datos necesarios para conocer su ubicación en el espacio. Para ubicar un punto en el espacio no se necesitan datos, luego su dimensión es 0, para ubicar un punto en una recta se necesita un solo dato (longitud), por lo tanto su dimensión es 1, para ubicar un punto dentro de un área se necesitan dos datos (largo y ancho), es decir, su dimensión es dos, y para encontrar un punto ubicado en un volumen se necesitan 3 datos (largo, ancho, profundo), entonces decimos que su dimensión es tres. Esta

definición fue presentada en el capitulo 3 como cantidad de espacio ocupado por un cuerpo.

3. Posición del objeto: este tercer planteamiento de dimensión esta directamente relacionado con el anterior, pero en este caso se agrega un elemento más y es la asignación de uno o varios números para determinar la posición, de esta manera un punto en el espacio de tres dimensiones se presenta con tres números que son sus coordenadas, luego un punto en el plano es determinado por dos números y un punto en la recta solamente necesita un número.
4. Finalmente, se describe la dimensión de un objeto a partir de los elementos que lo generan, como es el caso del segmento (dimensión 1) generado por un punto (dimensión 0), el cuadrado (dimensión 2) generado por un segmento y el cubo (dimensión 3) generado por un cuadrado.

Se concluye por lo tanto, que aunque Euclides no presenta la definición de dimensión, estamos de acuerdo en que el punto es de dimensión cero, la recta de dimensión uno, las figuras planas de dimensión dos y los sólidos de dimensión tres, todas ellas dimensiones enteras, teniendo en cuenta que en la dimensión Euclidea no encontramos fórmula para hallarla y tampoco un método formalizado de cálculo para la misma, solo contamos con los argumentos y los análisis presentados.

6.3.2. Fractal

En la geometría fractal a diferencia de la Euclidea, la dimensión de un objeto es un número fraccionario, convirtiéndose de esta manera en un prodigio, ya que en la naturaleza es posible encontrar conjuntos de formas irregulares como, costas, nubes, flores, todas ellas con dimensiones entre dos y tres.

Teniendo en cuenta que es posible encontrar distintos tipos de fractales nos enfocaremos hacia los autosemejantes, ya que estas estructuras se pueden obtener a partir de la reunión de copias de sí mismas con una escala distinta. Ahora al tomar una escala *f*, y subdividir el objeto en *p* copias de sí mismo, su dimensión D es el número que satisface la siguiente ecuación:

$p = \frac{1}{f^D}$, o lo que es equivalente a $p\,f^D = 1$.

De esta manera se establece a partir de una fórmula el calculo de la dimensión para fractales autosemejantes. (tema desarrollado en el capítulo 5).

Con ayuda de esta fórmula también es posible calcular la dimensión de los objetos Euclideos y los resultados no son distintos a los que ya conocemos.

Es importante destacar, que la fórmula presentada es producto del análisis y trabajo con estructuras autosemejantes. Cabe añadir que la dimensión para los objetos fractales no esta definida de una manera, dado que la gran variedad de ellos lleva a que cada familia existente determine la manera como es posible calcular su dimensión, entre las distintas definiciones de dimensión encontramos algunas que se describieron en el capítulo anterior y que al igual que en la sección de Euclides, en este momento pasaremos a describir brevemente:

1. El Conteo por cajas se aplica dividiendo el lado L de la estructura a analizar en **n** cajas de igual tamaño. Se cuenta el número de cajas que intersecan la figura. Se procede a realizar el mismo procedimiento para distintos tamaño de caja y el valor de la dimensión corresponde a la pendiente de la representación log(N(*r*)) frente a -log(r). Donde N(r) es el número de cajas de tamaño r que intersecan la figura y *r* el tamaño de cada caja.

2. El método del compás es generalmente utilizado para el cálculo de dimensión de fractales con muchas irregularidades y que es posible encontrar en la naturaleza, como es el caso de las costas, en este método la dimensión depende de la longitud de la regla que se utilice para medir dicho fractal, a medida que la regla se hace más pequeña, la longitud crece indefinidamente, por lo cual se concluye que la longitud de las costas analizadas es infinita.

Al dar una mirada a la dimensión desde dos perspectivas diferentes cabe resaltar que:

- La geometría Euclidea establece una definición (intuitiva), de dimensión y en ella encaja todos los objetos existentes, en cambio la geometría fractal establece distintas definiciones de dimensión cada una de las cuáles se ajusta a las características del objeto a estudiar.
- La dimensión Euclidea no se establece a partir de mecanismos o fórmulas para hallarla, caso contrario para la dimensión de fractales autosemejantes, donde se plantea un mecanismo de calculo y una formula.

7. CONCLUSIONES

- En la geometría Euclidea se ha entendido a la dimensión como un número que indica en que espacio habita un objeto geométrico, además se puede entender como el grado de libertad de movimiento del mismo. Teniendo en cuenta que esta es una noción intuitiva.

- El concepto de dimensión fractal no existiría si nos hubiésemos limitado al mundo de la geometría elemental (Euclidiana).

- A partir del surgimiento de la geometría fractal se ha reconocido la existencia de figuras con dimensiones distintas de 1, 2 o 3, a lo que se llamó *dimensión no entera o fraccionaria.* Este evento fue sorprendente ya que casi todas las figuras que conocemos están en uno de los espacios mencionados.

- Los fractales son una idealización, ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero; los objetos reales pueden ser fases de un objeto fractal.

GLOSARIO

AXIOMA: enunciado que no necesita ser demostrado.

BESICOVITCH: matemático ruso que contribuye a la geometría fractal, a partir del estudio de las dimensiones enteras.

DEMOSTRACIÓN: razonamiento desarrollado para probar o garantizar la validez de un enunciado o teorema.

DIMENSIÓN: ha sido entendida como un número que indica en que espacio habita un objeto geométrico. Para los fractales en ocasiones se interpreta como el grado de irregularidad que posee.

EUCLIDES: matemático griego, muy famoso por su obra "Los Elementos".

FRACTAL ESCALANTE: fractal invariante por traslación y cambio de escala.

FASE: resultado de distintas iteraciones sobre un mismo objeto.

GEOMETRÍA ANALITICA: estudio de figuras que utiliza un sistema de coordenadas y los métodos del análisis matemático.

GEOMETRÍA EUCLIDEA: rama de las matemáticas que se encarga de las propiedades y de las mediciones, tales como puntos, líneas, planos y volúmenes. La geometría Euclidea también describe los conjuntos formados por la unión de los elementos antes mencionados cuyas combinaciones forman figuras o formas específicas y además es un poderoso instrumento de razonamiento deductivo.

GEOMETRIA FRACTAL: geometría creada por Mandelbrot, que busca proveer un modelo matemático para las formas y fenómenos de la naturaleza.

GEOMETRÍA PLANA: rama de la geometría que considera las figuras cuyos puntos están todos en un plano.

HAUSDORFF: matemático polaco cuya principal contribución consistió en la creación de la teoría de los espacios topológicos y métricos como continuación de los trabajos de Cantor.

ITERACIÓN: repetir un proceso varias veces. En matemáticas este proceso es casi siempre, la aplicación de una función.

POSTULADO: generalización básica que se acepta sin demostración.

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO: es aquel en donde se parte de unas proposiciones y se usa la lógica, las definiciones, los teoremas demostrados o postulados, para justificar otras proposiciones que llevan a una conclusión.

SEGMENTO: porción de recta comprendida entre dos puntos.

TRASLACIÓN: deslizamiento de una figura en el plano teniendo en cuenta una dirección, una magnitud y un sentido.

FIGURAS

TABLAS

BIBLIOGRAFIA

1. **MANDELBRO. B.** The fractal geometry of nature. W.H. Freeman, 1990.

2. **BOYER CARL,** Historia de la matemática, pág. 140 - 150

3. **E.N. LORENZ**, La esencia del caos: un modelo científico para la disparidad de la naturaleza. Círculo de Lectores, 1993.

4. **EVES, HOWARD**, Estudios de las geometrias, Vol. 1.

5. **J. GLEICK**, Caos: la creación de una ciencia. Seix Barral, 1987.

6. **MARIÑO R**, La geometría en el arte y el diseño, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004

7. **RUBIANO, G,** Fractales para profanos, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.