SOFTWARE PARA ABORDAR EL TEMA FACTORIZACIÓN EN GRADO OCTAVO DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

JOHANA JESSICA SANABRIA
JOSÉ FERNANDO CORTÉS CAICEDO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTA D. C.
2006

SOFTWARE PARA ABORDAR EL TEMA FACTORIZACIÓN EN GRADO OCTAVO DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

JOHANA JESSICA SANABRIA Cód. 1999140042
JOSÉ FERNANDO CORTÉS CAICEDO Cód. 2000140015

Trabajo de Grado presentado al Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia para optar el titulo de Licenciado en Matemáticas con énfasis en Computación.

EDWIN CARRANZA
Profesor Asesor del departamento de Matemáticas.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTA D. C.
2006

Nota de Aceptación:

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá DC. 15 de Mayo de 2006.

C O N T E N I D O

R E S U M E N   A N A L Í T I C O

Programa Académico: Licenciatura en Matemáticas con énfasis en computación.

Titulo del Trabajo: Software para abordar el tema factorización en grado octavo de la Educación Básica Secundaria

Autores: Johana Yessica Sanabria Código: 1999140042
José Fernando Cortés Caicedo Código: 2000140015

Palabras Claves: Diseño, Implementación, Mediador, Tecnología, Procedimiento, Algoritmo, Polinomios Primos, Factores, Expresión Algebraica, Términos, factorización.

Descripción: Este trabajo es una propuesta para abordar el tema factorización de grado octavo de la Educación Básica Secundaria, se encuentra formado por dos partes una escrita y un software educativo, la primera esta compuesta por una revisión teórica desde la matemática, el análisis de varias propuestas de enseñanza, la intervención del computador como mediador en el proceso de enseñanza - aprendizaje y algunos aspectos del aprendizaje del álgebra relacionados con el pensamiento variacional y los procedimientos; La segunda parte es un software que contiene una propuesta para abordar la factorización teniendo en cuenta los aspectos mencionados en la primera parte.

Fuentes: Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docente: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, MEN; Lineamientos Curriculares de Matemáticas, MEN; Educación en Tecnología, Editorial Magisterio; Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa, Teresa Rojano, Editorial Grupo Iberoamericano; Rutas Hacia el Álgebra, Jhon Mason traducido por Cecilia Agudelo; Teoría de los Polinomios, Frank Ayres; Historia de las Ideas Algebraicas, Luis Puig; Evolución y Tecnología, Luis Moreno; Educación Matemática y Tecnología en el nuevo siglo, Teresa Rojano y Luis Moreno; Las Computadoras en la Nueva Visión Educativa, Rafael Campo.

Procedimiento Metodológico: Para el diseño e implementación del software se llevaron a cabo varias fases, en la primera se realizó una consulta de las propuestas que se han venido implementando en diferentes procesos educativos para la factorización, la segunda fase consistió en hacer una revisión teórica sobre el proceso enseñanza – aprendizaje del álgebra, de los conceptos que intervienen en la factorización y de la influencia que tiene el uso del computador como mediador en el proceso de aprendizaje, estas fases tienen como objetivo contribuir de forma didáctica y pedagógica en el diseño del software. Para la tercera fase se realizó el diseño e implementación de las actividades que conforman el software *"Aprendamos a Factorizar"* que tiene como objetivo el aprendizaje de la factorización.

I N T R O D U C C I Ó N

Este trabajo es una propuesta de enseñanza para abordar el tema factorización en grado octavo, para la que se diseñó e implemento en un ambiente computacional un software educativo titulado *Aprendamos a Factorizar*, el cual esta fundamentando en varios aspectos teóricos que se encuentran descritos en el presente documento, entre estos la revisión de diferentes propuestas de enseñanza de la factorización, posteriormente se realizó un contraste con variados procedimientos matemáticos, dando paso al análisis del contenido matemático donde se pretende realizar un propuesta para descomponer polinomios relacionada con la descomposición prima de números realizada en la aritmética.

Posteriormente se realizó una revisión de varias propuestas de enseñanza para la factorización, es un aspecto destacable que existen varias propuestas para el algebra empleando medios tecnológicos para otros temas como ecuaciones y funciones pero no una especifica para la factorización por ello se revisaron textos escolares analizando las propuestas de enseñanza , destacando unos aspectos favorables y unas posibles dificultades que se puedan presentar en el proceso de aprendizaje, otro aspecto fue una revisión teórica de algunos parámetros tenidos en cuenta para la enseñanza de procedimientos en el álgebra y para el desarrollo del pensamiento variacional que sirvieran como base en la propuesta planteada en el software, teniendo en cuenta que éste es un mediador entre el estudiante y el conocimiento, aspecto que fue estudiado en el capitulo 4 del presente documento, donde se analizó la importancia que tienen los medios tecnológicos en la educación.

Finalmente tomando como referente los aspectos mencionados se realizó el diseño de la propuesta y las actividades que conforman el software *Aprendamos a Factorizar,* que se encuentran en el CD ROM que acompaña este trabajo escrito. Esta es una propuesta diseñada para estudiantes y profesores que pretendan desarrollar una clase diferente con una propuesta alternativa para aprender a factorizar una expresión algebraica, al finalizar el documento se encuentran como anexos el software y los manuales tanto del usuario como del profesor.

J U S T I F I C A C I Ó N

En el desarrollo de la actividad educativa ha sido de gran preocupación la generación de acciones que contribuyan al desarrollo de los procesos de aprendizaje que viven los estudiantes; por esto, es importante crear mecanismos y herramientas que ayuden a superar las deficiencias que se presentan tomando como referencia, entre otras, las investigaciones y avances tecnológicos que en el mundo se realizan por distintos maestros y profesionales; una de las deficiencias se encuentra en el área de matemáticas cuando se trabaja la factorización, que generalmente se aborda sin realizar conexiones con otros procedimientos generando así una dificultad, convirtiéndose en un obstáculo para el aprendizaje de procedimientos algebraicos en un futuro cercano.

Es importante tomar como un punto de partida, uno de los objetivos que plantea la Ley General de Educación en Colombia (Ley 115 de 1994); que en el área de matemáticas busca el desarrollo, en el estudiante, de la capacidad para dominar los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos y analíticos sus operaciones y relaciones, con el fin de que interprete y solucione problemas tanto en la matemática propia como en la vida diaria. La naturaleza propia de la matemática se define en los estándares curriculares (MEN, 1998) como una manera de pensar, un medio de comunicación que nos permite descubrir, analizar, describir y predecir las situaciones que encontramos en el mundo; por estas razones es importante que el estudiante experimente e interactúe con su entorno físico y social de tal forma que pueda abstraer las ideas matemáticas.

Una de las formas en que los estudiantes abstraen ideas matemáticas y las usan para resolver distintas situaciones, es desarrollando el pensamiento variacional que, según los estándares curriculares de matemáticas (MEN,1998), lo describen como una habilidad en la interpretación y resolución de un problema; para el caso específico de la factorización se pretende que el estudiante "*Desarrolle técnicas para factorizar polinomios, en particular, la diferencia de dos cuadrados, la suma y diferencia de potencias impares, los trinomios cuadrados perfectos y otros trinomios* *factorizables*[1]", para ésto, es necesario realizar acciones que le permitan alcanzar este estándar y que contribuyan con el desarrollo de su pensamiento variacional.

Por otra parte, es innegable que la tecnología informática ha incursionado en el campo educativo, permitiendo la interacción con instrumentos computacionales, lo que genera sistemas de representación ejecutables virtuales que antes eran privativos de los seres humanos; esto cambia el papel del estudiante llevándolo a que desarrolle procesos de interpretación, deducción y razonamiento. El profesor Luis Rico[2] menciona que el trabajo con tecnologías implica "*abandonar el objetivo tradicional de fluidez algorítmica y sustituirlo por el objetivo de fluidez representacional*"…"*la tecnología pasa inicialmente, por un proceso de amplificación y posteriormente por un proceso más complejo, de reorganización*[3]" lo que convierte el trabajo con tecnologías en una opción para el diseño de situaciones que desarrollen el pensamiento variacional.

Con el propósito de asumir como parte de la actividad docente la creación de mecanismos que superen las deficiencias en los procesos de enseñanza – aprendizaje, en especial para este caso, en el tema de la factorización, se tendrán en cuenta los requerimientos planteados en la ley general de educación, los estándares curriculares en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional y los planteamientos sobre el uso de tecnologías como una opción que replantea el papel del estudiante, se propone entonces el diseño de una situación en un ambiente computacional, que lleve al estudiante a interactuar con una representación relacionada con la descomposición en factores primos que se realiza a los números en la aritmética y que se puede realizar de forma análoga en el álgebra , permitiéndole al estudiante comprender la factorización de expresiones algebraicas.

---

[1] Estándares Curriculares, MEN; 1998

[2] RICO L, *"Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas"*, del libro Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, MEN (2000).

[3] La *amplificación* según el profesor Rico se traduce en "hacer lo de antes, pero mejor". Y la *reorganización*, es "hacer nuevas cosas y reorganizar las anteriores en función de las nuevas posibilidades".

O B J E T I V O   G E N E R A L

Diseñar e implementar[4] una propuesta didáctica para la factorización en grado octavo de educación básica, utilizando el medio computacional.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Consultar algunas propuestas que existen para el aprendizaje de la factorización.
- Realizar una revisión teórica sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra.
- Revisar desde la matemática los conceptos que intervienen en la factorización.
- Realizar una revisión teórica sobre la influencia que tiene el uso del computador como mediador en el proceso de aprendizaje.
- Diseñar las actividades que van a conformar el software.
- Implementar el software en un ambiente computacional adecuado.

[4] En la elaboración de un software la fase de implementación se refiere a la construcción que se realiza bajo un programa computacional.

CAPITULO 1

ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

1.1 RESEÑA HISTÓRICA

Hablar de la historia de la factorización es remitirse al álgebra en sí, que comenzó en Egipto y Babilonia proponiendo métodos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, uno de estos se conoce hoy en día como "completar el cuadrado" y consecuencia de sus estudios, la factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado.

El método "completar el cuadrado" tuvo trascendencia en los griegos y los árabes, pues para mostrar hechos algebraicos acudían a la geometría usando áreas de figuras, un ejemplo de ello es el II libro de los Elementos de Euclides que dice en una de sus proposiciones *'si hay dos rectas y una de ellas se cortan en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos obtenidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos'*. Esto equivale hoy en día con notación moderna a la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y también corresponde al caso de factor común de la factorización.

Los conceptos básicos de la factorización de los números, encontrados en los libros VII, VIII y IX de los *Elementos,* fue recopilado y planteado por *Euclides de Alejandría* mostrando él que las proposiciones acuden a la geometría, los números representan segmentos y algunas expresiones como "esta medido por" y "mide a" se refiere a los conceptos de múltiplo y divisor, respectivamente (Luque C; Mora L; Torres J; 2004).

En el siglo XVI los matemáticos italianos Scipione del Ferro, Nicolo Fontana Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación, pero años más tarde fue Ludovico Ferrari quien encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado empleando un procedimiento similar al de completar cuadrados, así que "el desarrollo moderno de la factorización se inicia en el Renacimiento Italiano, hacia el año 1545" (Luque C; Mora L; Torres J; 2004). Siglos posteriores al XVI, los matemáticos encontraron una fórmula para resolver ecuaciones de quinto grado, pero fue el matemático Noruego Niels Abel y el Francés Evariste Galois quieres demostraron que la fórmula encontrada es errónea, siglo XIX.

Al no encontrar soluciones a las ecuaciones polinómicas de grado mayor de cuatro se centro el interés de la matemática en mejorar los métodos para resolver ecuaciones y en estudiar la estructura de los sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas. Otro hecho que encontraron los matemáticos era los teoremas de factorización en el dominio de integridad de los polinomios, llevándolos a demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra que fue planteado como conjetura en el siglo XVI y sólo en 1797 *Gauss* demostró rigurosamente este teorema tras de cinco pruebas diferentes.

El Teorema Fundamental del Álgebra, tiene su equivalencia con el Teorema Fundamental de la Aritmética, pues "la única diferencia entre los dos, es que en la aritmética existe un procedimiento sistemático para llegar a la factorización, basada en divisiones sucesivas, mientras que en los polinomios no existe procedimiento alguno." (Luque C; Mora L; Torres J; 2004).

1.2 CONTENIDO MATEMÁTICO

Para abordar el procedimiento de la factorización de polinomios se requiere el manejo de algunas definiciones propias del álgebra, la de expresión algebraica, términos algebraicos y polinomios que se enuncian a continuación.

Expresiones Algebraicas: Es la combinación de variables y números que son operados a través de la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

a ; a + b ; 3ax

Términos Algebraicos: En una expresión algebraica cada uno de los miembros operados con la adición se le denomina término. Los términos están compuestos por un coeficiente numérico y un factor literal.

Ejemplo:

a + b + c;	a, b, c son los términos de la expresión.
-2x + 3;	primer término -2x, segundo término 3.
-15xy;	esta expresión algebraica esta compuesta de un sólo término que consta de coeficiente numérico -15, factor literal xy.

Polinomios: La función f definida mediante la expresión $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, donde n es entero no negativo, $a_0, a_1, ..., a_n$ son números reales y x es una variable, $x \in \Re$ recibe el nombre de función polinómica. La expresión algebraica $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, es conocida como polinomio en x de grado n,.

Ejemplo:

$2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4$; Polinomio de grado 4

$x^3 + 2x^2 - x + 5$; Polinomio de grado 3

$3x^3 - 3x^2 - x$; Polinomio de grado 3

Clases de Polinomios

Polinomio Constante: Los polinomios de la forma $7x^0$, $-6x^0$ donde el exponente de la variable x es cero son considerados como polinomios constantes debido a que $a_0 = a_0 x^0$.

Polinomio Nulo: Los polinomios que tienen coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ cada uno siendo cero son considerados polinomios nulos y no tienen grado.

Polinomios de acuerdo al número de términos:

Monomios: Son aquellos polinomios que sólo tienen un término.

Ejemplo: 2, x, $-x^2$, $3x^3$

Binomios: Son aquellos polinomios que tienen dos términos.

Ejemplo: $x+a$, $2x+3$, $3x^2-2$

Trinomios: Son aquellos polinomios que tienen tres términos

Ejemplo: $3x^3 - 3x^2 - x$

Polinomios Asociados: Dos polinomios son asociados cuando a partir de multiplicar uno de los polinomios por un polinomio constante se obtiene el otro polinomio.

Ejemplo:

Polinomio Original	Polinomios Asociados
$x + 1$	$2x+2$; $3x+3$, $4x+4$
$x^3 + 2$	$6x^3 + 12$; $3x^3 + 6$; $7x^3 + 14$

Polinomios Mónicos: Un polinomio es mónico o normalizado cuando el coeficiente del término de mayor grado es uno.

Ejemplo:

$x^3 + 12$; $x^3 + 2x^2 + 5$

Polinomios Primos o irreducibles: Un polinomio *P(x)* es primo o irreducible si los únicos divisores posibles son sus polinomios asociados y los polinomios constantes, que son conocidos como divisores triviales.

Ejemplo:

$x+1;\ x^2 + x + 1;\ 7$

Polinomios Reducibles: Un polinomio *P(x)* es reducible, factorizable o compuesto si existen polinomios no constantes y no nulos *g(x)* y *h(x)* tales que *p(x) = g(x)h(x).*

Teorema de factorizacion única: Todo polinomio p(x) de grado m $\geq$ *1* es el producto de un elemento diferente de cero y polinomios mónicos irreducibles en los reales. Salvo el orden de los factores la factorización es única.

Demostración:

Sea p(x) un polinomio de grado m $\geq$ *1,*

Si p(x) es un polinomio primo, es irreducible por tanto la descomposición de p(x) = p(x) luego es única. Si p(x) es reducible puede expresarse como producto de polinomios mónicos de grado positivo menor que el grado de p(x), Sea $p(x) = b(x)^{m5}q(x)^{m6}$ luego si ambos polinomios son primos entonces el teorema queda demostrado.

Ahora si uno de los dos o los dos polinomios son reducibles y pueden escribirse como producto de polinomios mónicos tenemos:

$$b(x) = a_1(x)^{m1}a_0(x)^{m2} \qquad \text{y} \qquad q(x) = a_3(x)^{m3}a_4(x)^{m4}$$

si $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$ son primos el teorema queda demostrado, sino los polinomios pueden descomponerse en polinomios reducibles máximo hasta obtener la expresión :

$p(x) = a_1(x)^{m1} \ldots a_k(x)^{mk}$ tal que $\sum_{i=1}^{k} mi = m$, donde $a_1(x)^{m1}, \ldots, a_k(x)^{mk}$ son polinomios primos con esto queda demostrado que todo polinomio puede ser expresado como producto de polinomios primos.

Ahora es necesario demostrar que la factorización es única, para ello vamos a suponer que:

P(x) es un polinomio primo luego: P(x) = h (x) y P(x) = g (x) así que h(x) = g(x) por tanto la factorización es única; por el contrario si p(x) es un polinomio reducible, supongamos que tiene dos factorizaciones primas:

$P(x)_n = h(x)_1 ... h(x)_n$ y $P(x)_n = g(x)_1 ... g(x)_n$ para un polinomio con n factores, multiplicamos el polinomio p(x) por un factor $h(x)_{n+1}$ y $g(x)_{n+1}$ respectivamente, obteniendo las dos factorizaciones del polinomio con n+1 factores:

$P(x)_{n+1} = h(x)_1 ... h(x)_n h(x)_{n+1}$ y $P(x)_{n+1} = g(x)_1 ... g(x)_n \; g(x)_{n+1}$ sustituyendo $p(x)_n$ en las dos expresiones obtenemos:

$P(x)_{n+1} = p(x)_n h(x)_{n+1}$ y $P(x)_{n+1} = p(x)_n g(x)_{n+1}$, igualando las dos expresiones tenemos: $p(x)_n h(x)_{n+1} = p(x)_n g(x)_{n+1}$ por tanto $h(x)_{n+1} = g(x)_{n+1}$ lo cual contradice que $p(x)_{n+1}$ tiene dos factorizaciones primas, por lo que se concluye que todo polinomio se puede descomponer en una única factorización prima.

Descomposición en Polinomios Primos

Las expresiones algebraicas están formadas por distintos términos que a su vez se encuentran formados por variables y coeficientes numéricos, que están relacionados por la multiplicación para la que ya no se usa el signo *x* o (.) expresando a *x* b si no ab, donde a y b son los factores de la expresión, al igual que los números pueden ser descompuestos en una única factorización de números primos los polinomios también pueden ser descompuestos en una única factorizacion de polinomios primos, para ello se realiza el siguiente procedimiento:

Caso 1 Monomio

Con el objetivo de mantener un orden en el procedimiento se descompone primero el coeficiente numérico precedido de la descomposición del factor literal variable por variable ambos en sus polinomios primos.

Ejemplo:

$4x^2 = 2.2.x.x$

Con el fin de mantener este procedimiento familiarizado con la descomposición en factores primos que se realiza en la aritmética, se usará de aquí en adelante una línea vertical auxiliar al lado derecho del monomio de forma análoga a las propuestas de descomposición en factores primos realizadas en la aritmética para números naturales procediendo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 & 2 \\ 2x^2 & 2 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

Donde los polinomios primos quedaran ubicados al lado derecho de la línea auxiliar.

Ejemplo 1

$$\begin{array}{r|l} -8x^2y & 2 \\ -4x^2y & 2 \\ -2x^2y & 2 \\ -x^2y & -1 \\ x^2y & x \\ xy & x \\ y & y \\ & \end{array}$$

$$-8x^2y = 2.2.2.(-1).x.x.y$$

Caso 2 Binomio

Para descomponer binomios que se encuentran expresados como el producto de un monomio por un binomio como en el siguiente ejemplo, se procede de la siguiente forma:

Ejemplo 1

$$\begin{array}{r|l} 2y\,(x+a) & 2 \\ y(x+a) & y \\ (x+a) & (x+a) \\ 1 & \end{array}$$

$$2y\,(x+a) = 2\,.y\,(x+a)$$

Si el binomio se encuentra expresado como la suma de dos monomios el procedimiento para descomponer un binomio en sus polinomios primos, es análogo al usado en los monomios ya que se descompone independientemente cada término del binomio, con su respectivo signo, usando la línea vertical auxiliar para cada término.

Ejemplo 2

$$2x^2 + 3y^3$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & 2 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} 3y^3 & 3 \\ y^3 & y \\ y^2 & y \\ y & y \\ 1 & \end{array} \qquad 2x^2 + 3y^3 = 2.x.x + 3.y.y.y$$

Ejemplo 3

$$-10x^2 + 9x^3y$$

$$\begin{array}{r|l} -10x^2 & -1 \\ 10x^2 & 2 \\ 5x^2 & 5 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} 9x^3y & 3 \\ 3x^3y & 3 \\ x^3y & x \\ x^2y & x \\ xy & x \\ y & y \\ 1 & \end{array}$$

$$-10x^2 + 9x^3y = 2.5.(-1).x.x + 3.3.x.x.x.y$$

Es importante enfatizar que por notación algebraica cuando se multiplica por (-1) sólo se escribe el signo menos es decir (-1)x = - x pero el -1 es el coeficiente numérico de este monomio.

Ejemplo 3

$$x(x+1) - (x+1)$$

$$\begin{array}{r|l} x(x+1) & x \\ (x+1) & (x+1) \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} -(x+1) & -1 \\ (x+1) & (x+1) \\ 1 & \end{array}$$

$$x(x+1) - (x+1) = x(x+1) + (-1)\ (x+1)$$

En este último ejemplo es visible que cuando se descompone el segundo término se hace con el signo menos que lo antecede ya que este le pertenece a este término, el signo más se coloca porque es la operación aditiva la que relaciona los términos en un polinomio[5]

Caso 3 Trinomio y otros polinomios

Para descomponer trinomios y otros polinomios de más de cuatro términos, se procede al igual que en los binomios descomponiendo cada término por aparte.

Ejemplo 1

$$4x^3 - 2x^2 + 5x$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 & 2 \\ 2x^3 & 2 \\ x^3 & x \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} -2x^2 & 2 \\ -x^2 & -1 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} 5x & 5 \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

$$4x^3 - 2x^2 + 5x = 2.2.x.x.x + 2.(-1).x.x + 5.x$$

El proceso de la factorización

El proceso de factorizar consiste en expresar números o expresiones algebraicas en términos de sus factores primos lo que permite en ocasiones una manipulación algebraica más sencilla y conveniente, a continuación se realizará la factorización de expresiones algebraicas usando la descomposición en polinomios primos y la clasificación de los casos de factorización.

[5] Ver definición de polinomio.

Casos de Factorización

Factor Común:

El caso de factorización denominado factor común esta sustentado en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números reales, que se enuncia de forma general de la siguiente manera: $ax + ay + az = a(x + y + z)$

Para aplicar este caso es necesario que todos los términos del polinomio tengan un factor común diferente de 1, para identificarlo descomponemos el polinomio en sus polinomios primos así:

$$3x^3 + 2x^2 + 6x$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 & 3 \\ x^3 & x \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} 2x^2 & 2 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} 6x & 2 \\ 3x & 3 \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

Luego se busca en los factores de cada término que están a la derecha de la línea vertical un factor o varios factores que se encuentran presentes en todos los términos del polinomio, para este caso es el factor x

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 & 3 \\ x^3 & x \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} 2x^2 & 2 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} 6x & 2 \\ 3x & 3 \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

El factor x es común a todos los términos, por tanto se escribe fuera de un paréntesis que agrupa a los factores restantes de cada término, obteniendo la expresión factorizada

.

$x\,(3.x.x + 2.x + 2.3)$ Reduciendo los términos obtenemos;

$x\,(3x^2 + 2x + 6)$

Ejemplo 1

$$-\ x^2 - x^3 - x^3y$$

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & -1 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} -x^3 & -1 \\ x^3 & x \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} -x^3y & -1 \\ x^3y & x \\ x^2y & x \\ xy & x \\ y & y \\ 1 & \end{array}$$

$$(-1)x\,(x + x.x + x.x.y) = -x\,(x + x^2 + x^3y)$$

Ejemplo 2

$$x\,(n-1) - x$$

$$\begin{array}{r|l} x\,(n-1) & x \\ (n-1) & (n-1) \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

$$x(\,(n-1) + (-1))$$

Ejemplo 3

$$2y^3 + y^2 + y$$

$$\begin{array}{r|l} 2y^3 & 2 \\ y^3 & y \\ y^2 & y \\ y & y \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} y^2 & y \\ y & y \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} y & y \\ 1 & \end{array}$$

$$y\,(2y^2 + y + 1)$$

Es notorio que en el último ejemplo el factor común de todos los términos es y y que al colocar los otros factores dentro del paréntesis queda faltando el factor del último término, por esto se coloca 1, este procedimiento se usará siempre que no queden factores al lado derecho de la línea en el proceso de factorización por factor común, ya que $y = 1.y$ por la propiedad de la existencia del elemento neutro para la multiplicación en los reales.

Factor Común Por Agrupación:

El caso de factor común por agrupación es un caso especial de la factorización por factor común por tal razón se sustenta en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números reales y se enuncia de forma general así:

$$ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (x+y)(a+b)\ ; \ a, b \in \Re$$

La factorización por agrupación de términos se usa en polinomios que no tienen un factor común diferente de 1,en todos sus términos, pero si tienen factores comunes en dos de sus términos, por lo que el procedimiento de factorización por factor común se realiza dos veces.

Ejemplo 1

$$x^2 + ax + bx + ab$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} ax & a \\ x & x \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} bx & b \\ x & x \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} ab & a \\ b & b \\ 1 & \end{array}$$

$$x(x+a) \qquad + \qquad b(x+a)$$

En este ejemplo se factorizó el primer término con el segundo, el tercer y cuarto término, por el caso de factor común, ahora se repetirá el procedimiento de descomposición en polinomios primos.

$$\begin{array}{r|l} x(x+a) & x \\ (x+a) & (x+a) \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} b(x+a) & b \\ (x+a) & (x+a) \\ 1 & \end{array}$$

$$x^2 + ax + bx + ab = (x+a)\,(x+b)$$

Ejemplo 2

$2xy + 6 - 3x - 4y$

$$\begin{array}{r|l} 2xy & 2 \\ xy & x \\ y & y \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \\ & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} -3x & 3 \\ -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} -4y & 2 \\ -2y & 2 \\ -y & -1 \\ y & y \\ 1 & \end{array}$$

En el ejemplo anterior se observa que la factorización no se hace necesariamente entre los términos que se encuentran seguidos si no entre aquellos que tengan un factor común, para este caso el primer y tercer término tienen a x como factor común, el segundo y el cuarto tienen como factor común al *2* obteniendo la siguiente factorización:

$$2xy + 6 - 3x - 4y = x(2y-3) + 2(3-2y)$$

Esta factorización tiene algo en especial, es necesario transformar uno de los términos de la siguiente forma:

$$2(3-2y) = -2(-3+2y) = -2(2y-3)$$

con el fin que la expresión tenga un factor común en el primer y segundo término permitiendo así realizar el proceso de factor común la segunda vez:

$$\begin{array}{r|l} x(2y-3) & x \\ (2y-3) & \boxed{(2y-3)} \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} -2(2y-3) & 2 \\ -(2y-3) & -1 \\ (2y-3) & \boxed{(2y-3)} \\ 1 & \end{array}$$

$$2xy + 6 - 3x - 4y = x(2y-3) + 2(3-2y) = x(2y-3) - 2(2y-3) = \boxed{(2y-3)}(x-2)$$

Diferencia de Cuadrados

Este caso es una aplicación especial del caso de factor común, consiste en la factorización de binomios de la forma $a^2 - b^2$, para realizar la descomposición se procede de la siguiente forma: Se buscan las raíces de los dos términos, se multiplican obteniendo la expresión ab, luego por la propiedad del elemento inverso se obtiene $-ab + ab = 0$, expresión que es sumada a la diferencia de cuadrados, de lo cual se tiene: $a^2 - ab + ab - b^2$

Posteriormente se realiza la descomposición en factores primos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} a^2 & \boxed{a} \\ a & a \\ 1 & \\ & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} -ab & -1 \\ ab & \boxed{a} \\ b & b \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} ab & a \\ b & \boxed{b} \\ 1 & \\ & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} -b^2 & -1 \\ b^2 & \boxed{b} \\ b & b \\ 1 & \end{array}$$

Así que se tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{a}(a-b) + \boxed{b}(a-b) = (\boxed{a} + \boxed{b})(a-b)$$

Factorización de Trinomios

Para factorizar polinomios de tres términos es necesario considerar tres casos, que se enuncia a continuación.

Caso 1: Trinomio Cuadrado Perfecto (T.C.P.)

Un polinomio de tres términos (trinomio) es cuadrado perfecto cuando corresponde al cuadrado de un binomio , para verificar si es un TCP debe tener raíz cuadrada exacta en el primer y en el último término del polinomio y el segundo término debe ser el doble producto el la raíz del primer y tercer término.

Ejemplo

$$(x + 2y)^2 = (x + 2y) (x + 2y) = x^2 + 4xy + 4y^2$$

Así que: $x^2 + 4xy + 4y^2$ es Trinomio Cuadrado Perfecto porque es el cuadrado de $(x+2y)$

Método para factorizar un Trinomio Cuadrado Perfecto.

1. Se ordena el polinomio $p(x)$ tomando como referencia una de las variables.
2. Se expresa el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.
3. Se desarrolla una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio.
4. Se halla el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.
5. Se halla el factor común de los dos últimos términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del último término.
6. Se halla el factor común de la expresión algebraica obtenida en los dos pasos anteriores.
7. Se expresa el producto de los dos binomios iguales como cuadrado del binomio.

Justificación Matemática para Factorizar un Trinomio Cuadrado Perfecto.

La factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto aplicando el método anterior se sustenta de la siguiente manera:

Sea $a^2 + 2ab + b^2$ un polinomio de tres términos, donde la raíz cuadrada del primer y último término del polinomio es exacta; por propiedad de los números reales[6] se puede

[6] Propiedad: *Si a, b pertenece a los Reales entonces a+b pertenece a los reales.*

expresar $a^2 + 2ab + b^2$ como $a^2 + ab + ab + b^2$, aplicando la propiedad distributiva de los Reales se tiene que:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a(a+b) + b(a+b),$$

usando nuevamente la propiedad distributiva se obtiene: $a(a+b) + b(a+b) = (a+b)(a+b)$, como el conjunto de los Reales es cerrado para la multiplicación y se tiene el producto de dos binomios iguales, se puede expresar $(a+b)(a+b)$ como $(a+b)^2$.

Ejemplo

Factorice el siguiente polinomio $p(x)= x^2 + 4xy + 4y^2$:

1. Ordene el polinomio $p(x)$ tomando como referencia una de las variables (x).

$$p(x)= x^2 + 4xy + 4y^2$$

2. Exprese el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = x^2 + 2xy + 2xy + 4y^2$$

3. Desarrolle una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio $p(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \\ & \\ & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} 2xy & 2 \\ xy & x \\ y & y \\ 1 & \\ & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} 2xy & 2 \\ xy & x \\ y & y \\ 1 & \\ & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} 4y^2 & 2 \\ 2y^2 & 2 \\ y^2 & y \\ y & y \\ 1 & \end{array}$$

4. Halle el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \\ & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r|l} 2xy & 2 \\ xy & x \\ y & y \\ 1 & \end{array} \qquad x\,(x + 2y)$$

5. Halle el factor común de los dos últimos términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del último término.

$$2y\,(x+2y) \qquad \begin{array}{r|l} 2xy & 2 \\ xy & x \\ y & y \\ 1 & \end{array} \qquad + \qquad \begin{array}{r|l} 4y^2 & 2 \\ 2y^2 & 2 \\ y^2 & y \\ y & y \\ 1 & \end{array}$$

6. Halle el factor común a la expresión algebraica obtenida en los dos pasos anteriores.

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = x^2 + 2xy + 2xy + 4y^2 = x\,(x+2y) + 2y\,(x+2y)$$

Use el factor común en la expresión anterior para obtener lo siguiente:

$$x\,(x+2y) + 2y\,(x+2y) = (x+2y)\,(x+2y)$$

7. Exprese el producto de los dos binomios iguales como cuadrado del binomio.

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = (x+2y)\,(x+2y) = (x+2y)^2$$

Trinomios No Cuadrados Perfectos

Un polinomio de tres términos no es cuadrado perfecto cuando no corresponde al cuadrado de un binomio si no al producto de dos binomios diferentes.

Ejemplo

Determine si el siguiente polinomio $x^2 + 5x + 6$ es Trinomio Cuadrado Perfecto:

$x^2 + 5x + 6$ *No es Trinomio Cuadrado Perfecto*, ya que la raíz cuadrada de 6 no es entera (exacta) y su descomposición es $(x+2)(x+3)$, donde estos dos binomios no son iguales entre sí.

Caso 2: Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se caracteriza por:

I. El polinomio es de segundo grado.
II. El coeficiente del primer término de izquierda a derecha es 1.
III. Uno de los términos del polinomio es constante, sólo está el número.

Método para Factorizar Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

1. Se ordena el polinomio $p(x)$ tomando como referencia una de las variables.
2. Si el segundo término del trinomio es impar, se multiplica toda la expresión por 4; si es par no se debe multiplicar.
3. Se expresa el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.
4. Se desarrolla una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio.
5. Se halla el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.
6. Se multiplica los polinomios primos constantes del Segundo Término que no fueron seleccionados en el paso anterior y el resultado elévelo al cuadrado.
7. El número elevado al cuadrado ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto, para eso se debe sumar y restar un término adecuado para que nos dé el número elevado.
8. Se halla el Trinomio Cuadrado Perfecto, para ello debe factorizar el número elevado al cuadrado (del paso anterior) y el término que tiene la variable.
9. Se escribe la expresión como una diferencia de cuadrados.
10. Se efectúa las operaciones indicadas teniendo en cuenta que si al inicio se multiplicó por 4, debe dividirse la expresión resultante en 4 para no alterar la factorización del trinomio.

Justificación Matemática para Factorizar Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

La factorización de Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ aplicando el método anterior se sustenta de la siguiente manera:

Si b es par

Sea $x^2 + bx + c$ un polinomio y b es de la forma $b = 2k$, donde k pertenece a los enteros, se tiene: $x^2 + bx + c = x^2 + (2k)x + c$, como el conjunto de los Reales es cerrado para la adición se puede expresar el segundo término como dos cantidades iguales:

$$x^2 + (2k)x + c = x^2 + kx + kx + c,$$

teniendo en cuenta la propiedad de la existencia del elemento neutro para la adición en los Reales, se tiene:

$$x^2 + kx + kx + c = x^2 + kx + kx + c + 0,$$

sustituyendo 0 por $-c + k^2 - (-c + k^2)$ en $x^2 + kx + kx + c + 0$, se obtiene:

$$x^2 + kx + kx + c + 0 = x^2 + kx + kx + c + -c + k^2 - (-c + k^2),$$

aplicando la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se tiene:

$$x^2 + kx + kx + c + -c + k^2 - (-c + k^2) = x(x+k) + kx + c + -c + k^2 - (-c + k^2),$$

la existencia del elemento inverso para la adición como propiedad de los Reales sirve para justificar que:

$$x(x+k) + kx + c + -c + k^2 - (-c + k^2) = x(x+k) + kx + k^2 - (-c + k^2)$$

usando la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se obtiene que:

$$x(x+k) + kx + k^2 - (-c + k^2) = x(x+k) + k(x+k) + c - k^2 = (x+k)(x+k) + c - k^2,$$

empleando la cerradura para la adición y multiplicación del conjunto de los Reales da lugar a: $(x+k)(x+k) + c - k^2 = (x+k)^2 - (k^2 - c)$, usando la diferencia de cuadrados en el caso anterior tenemos que: $(x+k)^2 - (k^2 - c) = (x + k - \sqrt{k^2 - c})(x + k + \sqrt{k^2 - c})$.

Por tanto el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ queda escrito como el producto de dos binomios mónicos primos $(x + k - \sqrt{k^2 - c})(x + k + \sqrt{k^2 - c})$, donde $k = \dfrac{b}{2}$ y b es par.

Si b es impar

Sea $x^2 + bx + c$ un polinomio y b es de la forma $b = 2k+1$, donde k pertenece a los enteros, se tiene: $x^2 + bx + c = x^2 + (2k+1)x + c$, la propiedad de la existencia del elemento neutro para la multiplicación sirve para sustentar que:

$$x^2 + (2k+1)x + c = 1\left[x^2 + (2k+1)x + c\right]$$

sustituyendo *1* por $\frac{4}{4}$ en $1\left[x^2+(2k+1)x+c\right]$ y aplicando la propiedad distributiva de los Reales, se obtiene:

$$\frac{4}{4}\left[x^2+(2k+1)x+c\right]=\frac{1}{4}\left[4x^2+4(2k+1)x+4c\right]$$

como el conjunto de los Reales es cerrado para la adición y el producto se puede expresar el segundo término como dos cantidades iguales:

$$\frac{1}{4}\left[4x^2+4(2k+1)x+4c\right]=\frac{1}{4}\left[4x^2+2(2k+1)x+2(2k+1)x+4c\right]=\frac{1}{4}\left[4x^2+2x(2k+1)+2x(2k+1)+4c\right]$$

teniendo en cuenta la propiedad de la existencia del elemento neutro para la adición en los reales, se tiene:

$$\frac{1}{4}\left[4x^2+2x(2k+1)+2x(2k+1)+4c\right]=\frac{1}{4}\left[4x^2+2x(2k+1)+2x(2k+1)+4c+0\right]$$

sustituyendo *0* por $-4c+(2k+1)^2-(-4c+(2k+1)^2)$ en $\frac{1}{4}\left[4x^2+2x(2k+1)+2x(2k+1)+4c+0\right]$, se obtiene:

$$\frac{1}{4}\left[4x^2+2x(2k+1)+2x(2k+1)+4c-4c+(2k+1)^2-(-4c+(2k+1)^2\right],$$

aplicando la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{1}{4}\left[2x(2x+(2k+1))+2x(2k+1)+4c-4c+(2k+1)^2+4c-(2k+1)^2\right],$$

la existencia del elemento inverso para la adición como propiedad de los Reales sirve para justificar que:

$$\frac{1}{4}\left[2x(2x+(2k+1))+2x(2k+1)+(2k+1)^2+4c-(2k+1)^2\right]$$

usando dos veces la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se obtiene que:

$$\frac{1}{4}\left[2x(2x+(2k+1))+(2k+1)(2x+(2k+1))+4c-(2k+1)^2\right]=\frac{1}{4}\left[(2x+(2k+1))(2x+(2k+1))+4c-(2k+1)^2\right]$$

empleando la cerradura para la adición y multiplicación del conjunto de los Reales da lugar a: $\frac{1}{4}\left[(2x+(2k+1))(2x+(2k+1))+4c-(2k+1)^2\right]=\frac{1}{4}\left[(2x+(2k+1))^2-(-4c+(2k+1)^2)\right]$, sustituyendo *2k+1* por *b* y usando la diferencia de cuadrados, en el caso anterior tenemos que:

$$\frac{1}{4}\left[(2x+b)^2-(-4c+b^2)\right]=\frac{1}{4}\left[(2x+b)^2-(b^2-4c)\right]=\frac{1}{4}(2x+b-\sqrt{b^2-4c})(2x+b+\sqrt{b^2-4c}).$$

Por tanto el trinomio de la forma x^2+bx+c queda escrito como el producto de polinomios primos $\frac{1}{4}(2x+b-\sqrt{b^2-4c})(2x+b+\sqrt{b^2-4c})$, cuando b es impar.

Ejemplo 1 (Cuando b es Par)

Factorice el siguiente polinomio $p(x)= x^2 + 10x + 24$

1. Ordene el polinomio $p(x)$ tomando como referencia una de las variables.

$$p(x)= x^2 + 10x + 24$$

2. Si el segundo término del trinomio es impar, multiplique toda la expresión por 4; si es par no debe multiplicar.

$$p(x)= x^2 + 10x + 24$$

3. Exprese el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.

$$p(x)= x^2 + 10x + 24 = x^2 + 5x + 5x + 24$$

4. Desarrolle una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio $p(x)$.

x^2	x	+	$5x$	5	+	$5x$	5	+	24	2
x	x		x	x		x	x		12	2
1			1			1			6	2
									3	3
									1	

No es necesario descomponer el término independiente, pues, lo que se busca es completar un Trinomio Cuadrado Perfecto.

5. Halle el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.

$$\begin{array}{c|c} x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c|c} 5x & 5 \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad x\,(x+5)$$

$$p(x) = x^2 + 10x + 24 = x^2 + 5x + 5x + 24 = x\,(x+5) + 5x + 24$$

6. Multiplique los polinomios primos constantes del Segundo Término que no fueron seleccionados en el paso anterior y el resultado elévelo al cuadrado.

$$\begin{array}{c|c} 5x & 5 \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

Como x fue el factor común de los dos primeros términos, no se tiene en cuenta; en cambio, se tiene presente el *5* y el *1*, pues son polinomios primos que no fueron seleccionados como factor común de los dos primeros términos.

Se multiplica: $5 \bullet 1 = 5$
Se eleva al cuadrado: $5^2 = 25$

7. El número elevado al cuadrado ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto, para eso se debe sumar y restar un término adecuado para que dé el número elevado.

Como *25* fue el número que ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto y el polinomio tiene como término independiente al *24*, se debe buscar un número que sumado o restado con *24* de *25*, el número propio es *1*; así que se tiene lo siguiente:

$$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 5x + 5x + 24 = x\,(x+5) + 5x + 24 + 1 - 1 = x\,(x+5) + 5x + 25 - 1$$

8. Halle el Trinomio Cuadrado Perfecto, para ello se halla el factor común de *25* y *5x*.

$$
\begin{array}{r|l}
5x & 5 \\
x & x \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad 5\,(x+5)
$$

Así que tenemos: $x^2 + 10x + 24 = \quad x\,(x+5) + 5x + 25 - 1 \quad = \; x(x+5) + 5(x+5) - 1$

$$= (x+5)\,(x+5) - 1$$

$$= (x+5)^2 - 1$$

9. Escriba la expresión como una diferencia de cuadrados.

$$x^2 + 10x + 24 = \; (x+5)^2 - 1 = (x + 5 - 1)\,(x + 5 + 1)$$

10. Efectué las operaciones indicadas teniendo en cuenta que si al inicio multiplicó por 4, debe dividir la expresión resultante en 4.

$$x^2 + 10x + 24 = (x + 5 - 1)\,(x + 5 + 1) = (x + 4)\,(x + 6)$$

Ejemplo 2 (Cuando b es Impar)

Factorice el siguiente polinomio $p(x) = \; x^2 - 3x - 10$

1. Ordene el polinomio $p(x)$ tomando como referencia una de las variables.

$$p(x) = x^2 - 3x - 10$$

2. Si el segundo término del trinomio es impar, multiplique toda la expresión por 4; si es par no se debe multiplicar.

$$4\,(x^2 - 3x - 10) = 4x^2 - 12x - 40$$

3. Exprese el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.

$$p(x) = 4x^2 - 12x - 40 = \; 4x^2 - 6\,x - 6x - 40$$

4. Desarrolle una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio $p(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 & 2 \\ 2x^2 & 2 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -6x & 2 \\ -3x & 3 \\ -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -6x & 2 \\ -3x & 3 \\ -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

No es necesario descomponer el término independiente, pues, lo que se busca es completar un Trinomio Cuadrado Perfecto.

5. Halle el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 & 2 \\ 2x^2 & 2 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -6x & 2 \\ -3x & 3 \\ -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad 2x\,(2x-3)$$

$$p(x) = 4x^2 - 12x - 40 = 4x^2 - 6x - 6x - 40 = 2x\,(2x-3) - 6x - 40$$

6. Multiplique los polinomios primos constantes del Segundo Término que no fueron seleccionados en el paso anterior y el resultado se eleva al cuadrado.

$$\begin{array}{r|l} -6x & 2 \\ -3x & 3 \\ -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

Como 2 y x fueron el factor común de los dos primeros términos, no se tiene en cuenta; en cambio, se tiene presente el *3* y el – *1*, pues son polinomios primos que no fueron seleccionados como factor común de los dos primeros términos.

Se multiplica: $3 \bullet -1 = -3$

Se eleva al cuadrado: $(-3)^2 = 9$

7. El número elevado al cuadrado ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto, para eso se debe sumar y restar un término adecuado para que dé el número elevado.

Como *9* fue el número que ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto y el polinomio tiene como término independiente al *40*, se debe buscar un número que sumado o restado con *40* de *9*, el número propio es *49*; así que se tiene lo siguiente:

$$4x^2 - 12x - 40 = 2x\,(2x - 3) - 6x - 40 + 49 - 49 = 2x\,(2x - 3) - 6x + 9 - 49$$

8. Halle el Trinomio Cuadrado Perfecto, para ello halle el factor común de $-6x$ y 9.

$$\begin{array}{r|rr|l} -6x & 2 & 9 & 3 \\ -3x & 3 & 3 & 3 \\ -x & -1 & 1 & \\ x & x & & \end{array} \qquad\qquad 3\,(-2x + 3) = -3(2x - 3)$$

Así se tiene: $4x^2 - 12x - 40 = 2x\,(2x - 3) - 6x + 9 - 49 = 2x\,(2x - 3) - 3(2x - 3) - 49$

$$= (2x - 3)\,(2x - 3) - 49$$

$$= (2x - 3)^2 - 49$$

9. Escriba la expresión como una diferencia de cuadrados.

$$4x^2 - 12x - 40 = (2x - 3)^2 - 49 = (2x - 3 - 7)\,(2x - 3 + 7)$$

10. Efectué las operaciones indicadas teniendo en cuenta que si al inicio multiplicó por 4, debe dividir la expresión resultante en 4.

$$\frac{1}{4}(2x - 3 - 7)(2x - 3 + 7) = \frac{1}{4}(2x - 10)(2x + 4) = \left(\frac{2x - 10}{2}\right)\left(\frac{2x + 4}{2}\right) = (x - 5)(x + 2)$$

Por tanto: $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)\,(x + 2)$

Caso 3: Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$

Un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ se caracteriza por:

I. El polinomio es de segundo grado.
II. El coeficiente del primer término de izquierda a derecha es diferente de 1.
III. Uno de los términos del polinomio es constante, sólo está el número.

Método para Factorizar Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

1. Se ordena el polinomio *p(x)* tomando como referencia una de las variables.
2. Si el segundo término del trinomio es impar, se multiplica toda la expresión por 4; si es par no se debe multiplicar.
3. Se multiplica toda la expresión (polinomio) por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión.
4. Se expresa el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.
5. Se desarrolla una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio.
6. Se halla el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.
7. Se multiplica los polinomios primos constantes del Segundo Término que no fueron seleccionados en el paso anterior y el resultado se eleva al cuadrado.
8. El número elevado al cuadrado ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto, para eso se debe sumar y restar un término adecuado para que dé el número elevado.
9. Se halla el Trinomio Cuadrado Perfecto, para ello se debe factorizar el número elevado al cuadrado (del paso anterior) y el término que tiene la variable.
10. Se escribe la expresión como una diferencia de cuadrados.
11. Se efectúa las operaciones indicadas teniendo en cuenta que si al inicio multiplicó por 4 y por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión, se debe dividir la expresión resultante en 4 y por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión.

Justificación Matemática para Factorizar Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

La factorizacion de Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ aplicando el método anterior se sustenta de la siguiente manera:

Si b es par

Sea $ax^2 + bx + c$ un polinomio y b es de la forma $b = 2k$, donde k pertenece a los enteros, se tiene: $ax^2 + bx + c = ax^2 + (2k)x + c$, la propiedad de la existencia del elemento neutro para la multiplicación sirve para sustentar que:

$$ax^2 + (2k)x + c = 1\left[ax^2 + (2k)x + c\right]$$

sustituyendo *1* por $\dfrac{a}{a}$ en $1\left[ax^2 + (2k)x + c\right]$ y aplicando la propiedad distributiva de los Reales, se obtiene:

$$\frac{a}{a}\left[ax^2 + (2k)x + c\right] = \frac{1}{a}\left[a^2x^2 + a(2k)x + ac\right]$$

como el conjunto de los Reales es cerrado para la multiplicación y la adición se puede expresar el segundo término como dos cantidades iguales:

$$\frac{1}{a}\left[a^2x^2 + a(2k)x + ac\right] = \frac{1}{a}\left[a^2x^2 + 2akx + ac\right] = \frac{1}{a}\left[a^2x^2 + akx + akx + ac\right],$$

teniendo en cuenta la propiedad de la existencia del elemento neutro para la adición en los Reales, se tiene:

$$\frac{1}{a}\left[a^2x^2 + akx + akx + ac\right] = \frac{1}{a}\left[a^2x^2 + akx + akx + ac + 0\right],$$

sustituyendo *0* por $-ac + k^2 - (-ac + k^2)$ en $\dfrac{1}{a}\left[a^2x^2 + akx + akx + ac + 0\right]$, se obtiene:

$$\frac{1}{a}\left[a^2x^2 + akx + akx + ac - ac + k^2 - (-ac + k^2)\right],$$

aplicando la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{1}{a}\left[ax(ax + k) + akx + ac - ac + k^2 + ac - k^2\right],$$

la existencia del elemento inverso para la adición como propiedad de los Reales sirve para justificar que:

$$\frac{1}{a}\left[ax(ax+k)+akx+ac-ac+k^2+ac-k^2\right] = \frac{1}{a}\left[ax(ax+k)+akx+k^2+ac-k^2\right]$$

usando la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se obtiene que:

$$\frac{1}{a}\left[ax(ax+k)+akx+k^2+ac-k^2\right]=\frac{1}{a}\left[ax(ax+k)+k(ax+k)+ac-k^2\right]=\frac{1}{a}\left[(ax+k)(ax+k)+ac-k^2\right],$$

empleando la cerradura para la adición y multiplicación del conjunto de los Reales da lugar a: $\frac{1}{a}\left[(ax+k)(ax+k)+ac-k^2\right]= \frac{1}{a}\left[(ax+k)^2-(k^2-ac)\right]$, usando la diferencia de cuadrados en el caso anterior tenemos que:

$$\frac{1}{a}\left[(ax+k)^2-(k^2-ac)\right]=\frac{1}{a}(ax+k-\sqrt{k^2-ac})(ax+k+\sqrt{k^2-ac}).$$

Por tanto el trinomio de la forma ax^2+bx+c queda escrito como el producto de polinomios primos $\frac{1}{a}(ax+k-\sqrt{k^2-ac})(ax+k+\sqrt{k^2-ac})$, donde $k=\frac{b}{2}$ y b es par.

Si b es impar

Sea ax^2+bx+c un polinomio y b es de la forma $b=2k+1$, donde k pertenece a los enteros, se tiene: $ax^2+bx+c=ax^2+(2k+1)x+c$, la propiedad de la existencia del elemento neutro para la multiplicación sirve para sustentar que:

$$ax^2+(2k+1)x+c=1\left[ax^2+(2k+1)x+c\right]$$

sustituyendo *1* por $\frac{4a}{4a}$ en $1\left[ax^2+(2k+1)x+c\right]$ y aplicando la propiedad distributiva de los Reales, se obtiene:

$$\frac{4a}{4a}\left[ax^2+(2k+1)x+c\right]=\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+4a(2k+1)x+4ac\right]$$

como el conjunto de los Reales es cerrado para la adición y el producto se puede expresar el segundo término como dos cantidades iguales:

$$\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+4a(2k+1)x+4ac\right]=\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+2a(2k+1)x+2a(2k+1)x+4ac\right]=\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+2ax(2k+1)+2ax(2k+1)+4ac\right]$$

teniendo en cuenta la propiedad de la existencia del elemento neutro para la adición en los Reales, se tiene:

$$\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+2ax(2k+1)+2ax(2k+1)+4ac\right]=\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+2ax(2k+1)+2ax(2k+1)+4ac+0\right]$$

sustituyendo 0 por $-4ac+(2k+1)^2-(-4ac+(2k+1)^2)$ en $\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+2ax(2k+1)+2ax(2k+1)+4ac+0\right]$, se obtiene:

$$\frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+2ax(2k+1)+2ax(2k+1)+4ac-4ac+(2k+1)^2-(-4ac+(2k+1)^2\right],$$

aplicando la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{1}{4a}\left[2ax(2ax+(2k+1))+2ax(2k+1)+4ac-4ac+(2k+1)^2+4ac-(2k+1)^2\right],$$

la existencia del elemento inverso para la adición como propiedad de los Reales sirve para justificar que:

$$\frac{1}{4a}\left[2ax(2x+(2k+1))+2ax(2k+1)+(2k+1)^2+4ac-(2k+1)^2\right]$$

usando dos veces la propiedad distributiva en los Reales en la expresión anterior se obtiene que:

$$\frac{1}{4a}\left[2ax(2x+(2k+1))+(2k+1)(2ax+(2k+1))+4ac-(2k+1)^2\right]=$$

$$\frac{1}{4a}\left[(2ax+(2k+1))(2ax+(2k+1))+4ac-(2k+1)^2\right]$$

empleando la cerradura para la adición y multiplicación del conjunto de los Reales da lugar a: $\frac{1}{4a}\left[(2ax+(2k+1))(2ax+(2k+1))+4ac-(2k+1)^2\right]=\frac{1}{4a}\left[(2ax+(2k+1))^2-(-4ac+(2k+1)^2)\right]$,

sustituyendo $2k+1$ por b y usando la diferencia de cuadrados, en el caso anterior tenemos que:

$$\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(-4ac+b^2)\right]=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)\right]=\frac{1}{4a}(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac})(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})\cdot$$

Por tanto el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ queda escrito como el producto de polinomios primos $\frac{1}{4a}(2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac})(2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac})$, cuando b es impar.

Ejemplo 1 (Cuando b es par)

Factorice el siguiente polinomio $p(x) = 3x^2 - 2x - 21$

1. Ordene el polinomio $p(x)$ tomando como referencia una de las variables.

$$p(x) = 3x^2 - 2x - 21$$

2. Si el segundo término del trinomio es impar, multiplique toda la expresión por 4; si es par no debe multiplicar.

$$p(x) = 3x^2 - 2x - 21$$

3. Multiplique toda la expresión (polinomio) por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión; en este caso es 3, tenemos:

$$3\,(3x^2 - 2x - 21) = 9x^2 - 6x - 63$$

4. Exprese el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.

$$9x^2 - 6x - 63 = 9x^2 - 3x - 3x - 63$$

5. Desarrolle una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio $p(x)$.

$9x^2$	3
$3x^2$	3
x^2	x
x	x
1	

$-3x$	3
$-x$	-1
x	x
1	

$-3x$	3
$-x$	-1
x	x
1	

-63	3
-21	3
-7	7
-1	-1
1	

No es necesario descomponer el término independiente, pues, lo que se busca es completar un Trinomio Cuadrado Perfecto.

6. Halle el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.

$$\begin{array}{r|l} 9x^2 & 3 \\ 3x^2 & 3 \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3x & 3 \\ -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad 3x\,(3x-1)$$

7. Multiplique los polinomios primos constantes del Segundo Término que no fueron seleccionados en el paso anterior y el resultado elévelo al cuadrado.

$$\begin{array}{r|l} -3x & 3 \\ -x & -1 \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad 3x\,(3x-1)$$

Como 3 y x fueron el factor común de los dos primeros términos, no se tiene en cuenta; en cambio, se tiene presente el – 1, pues es polinomios primos que no fue seleccionado como factor común de los dos primeros términos.

Se multiplica: $1 \bullet -1 = -1$
Se eleva al cuadrado: $(-1)^2 = 1$

8. El número elevado al cua
para eso se debe sumar y restar un término adecuado para que nos dé el número elevado.

Como *1* fue el número que ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto y el polinomio tiene como término independiente al *63*, se debe buscar un número que sumado o restado con *63* de 1, el número propio es *64*; así que tenemos lo siguiente:

$$9x^2 - 6x - 63 = 3x\,(3x-1) - 3x - 63 + 64 - 64 = 3x\,(3x-1) - 3x + 1 - 64$$

9. Halle el Trinomio Cuadrado Perfecto, para ello debe factorizar $-3x$ y *1*.

$$\begin{aligned} 3x\,(3x-1) - 3x + 1 - 64 &= 3x\,(3x-1) - 1(3x-1) - 64 \\ &= (3x-1)\,(3x-1) - 64 \\ &= (3x-1)^2 - 64 \end{aligned}$$

10. Escriba la expresión como una diferencia de cuadrados.

$$(3x - 1)^2 - 64 = (3x - 1 - 8)\ (3x - 1 + 8)$$

11. Efectué las operaciones indicadas teniendo en cuenta que si al inicio multiplicó por 4 y por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión, debe dividir la expresión resultante en 4 y por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión.

$$\frac{1}{3}(3x - 1 - 8)(3x - 1 + 8) = \frac{1}{3}(3x - 9)(3x + 7) = \left(\frac{3x - 9}{3}\right)\left(\frac{3x + 7}{1}\right) = (x - 3)(3x + 7)$$

Por tanto: $3x^2 - 2x - 21 = (x - 3)\ (3x + 7)$.

Ejemplo 2 (Cuando b es impar)

Factorice el siguiente polinomio $p(x) = 2x^2 + 7x + 6$

1. Ordene el polinomio $p(x)$ tomando como referencia una de las variables.

$$p(x) = 2x^2 + 7x + 6$$

2. Si el segundo término del trinomio es impar, multiplique toda la expresión por 4; si es par no debe multiplicar.

$$4(2x^2 + 7x + 6) = 8x^2 + 28x + 24$$

3. Multiplique toda la expresión (polinomio) por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión del polinomio inicial.

$$2(8x^2 + 28x + 24) = 16x^2 + 56x + 48$$

4. Exprese el término de la mitad (segundo término) como dos cantidades iguales.

$$16x^2 + 56x + 48 = 16x^2 + 28x + 28x + 48$$

5. Desarrolle una descomposición prima de cada uno de los términos del polinomio $p(x)$.

$$
\begin{array}{r|l c r|l c r|l c r|l}
16x^2 & 2 & + & 28x & 2 & + & 28x & 2 & + & 48 & 2 \\
8x^2 & 2 & & 14x & 2 & & 14x & 2 & & 24 & 2 \\
4x^2 & 2 & & 7x & 7 & & 7x & 7 & & 12 & 2 \\
2x^2 & 2 & & x & x & & x & x & & 6 & 2 \\
x^2 & x & & 1 & & & 1 & & & 3 & 3 \\
x & x & & & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Es bueno recordar que no es necesario hacer la descomposición prima del término independiente.

6. Halle el factor común de los dos primeros términos que debe coincidir con la raíz cuadrada del primer término.

$$
\begin{array}{r|l c r|l}
16x^2 & 2 & + & 28x & 2 \\
8x^2 & 2 & & 14x & 2 \\
4x^2 & 2 & & 7x & 7 \\
2x^2 & 2 & & x & x \\
x^2 & x & & 1 & \\
x & x & & & \\
1 & & & &
\end{array}
\qquad 4x\,(4x + 7)
$$

7. Multiplique los polinomios primos constantes del Segundo Término que no fueron seleccionados en el paso anterior y el resultado elévelo al cuadrado.

$$
\begin{array}{r|l}
28x & 2 \\
14x & 2 \\
7x & 7 \\
x & x \\
1 &
\end{array}
$$

Como 2, 2 y x fueron el factor común de los dos primeros términos, no se tiene en cuenta; en cambio, se tiene presente el 7, pues es polinomio primo que no fue seleccionado como factor común de los dos primeros términos.

Se multiplica: $7 \bullet 1 = 7$

Se eleva al cuadrado: $(7)^2 = 49$

8. El número elevado al cuadrado ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto, para eso se debe sumar y restar un término adecuado para que nos dé el número elevado.

   Como *49* fue el número que ayuda a completar el Trinomio Cuadrado Perfecto y el polinomio tiene como término independiente al *48*, se debe buscar un número que sumado o restado con *48* de 49, el número propio es *1*; así que tenemos lo siguiente:

$$16x^2 + 28x + 28x + 48 = 4x\,(4x + 7) + 28x + 48 + 1 - 1 = 4x\,(4x + 7) + 28x + 49 - 1$$

9. Halle el Trinomio Cuadrado Perfecto, para ello debe factorizar $28x$ con 49.

$$\begin{aligned} 4x\,(4x + 7) + 28x + 49 - 1 &= 4x\,(4x + 7) + 7\,(4x + 7) - 1 \\ &= (4x + 7)\,(4x + 7) - 1 \\ &= (4x + 7)^2 - 1 \end{aligned}$$

10. Escriba la expresión como una diferencia de cuadrados.

$$(4x + 7)^2 - 1 = (4x + 7 - 1)\,(4x + 7 + 1)$$

11. Efectué las operaciones indicadas teniendo en cuenta que si al inicio multiplicó por 4 y por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión, debe dividir la expresión resultante en 4 y por el coeficiente que acompaña al primer término de la expresión.

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2}(4x + 7 - 1)(4x + 7 + 1) = \frac{1}{8}(4x + 6)(4x + 8) = \left(\frac{4x + 6}{2}\right)\left(\frac{4x + 8}{4}\right) = (2x + 3)(x + 2)$$

Por tanto $2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)\,(x + 2)$.

CAPITULO 2

ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA

La factorización de polinomios es un tópico propio del álgebra escolar, en la que existen diferentes propuestas para su enseñanza, unas con base en la geometría y otras en la misma álgebra, a continuación se presentaran algunas propuestas que hacen variados autores en sus libros escolares, teniendo en cuenta algunos casos de la factorización.

Caso I: Factor Común

La primera propuesta de enseñanza que se va ha analizar es la realizada por Aurelio Baldor en su libro *Álgebra,* esta tiene como eje fundamental la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en sus ejercicios.

Al estudiar el caso de factor común se consideran dos opciones, la primera "factor común monomio" que hace referencia a la propiedad mencionada usándola en polinomios donde el factor común es un monomio, en cambio la segunda, "factor común polinomio" muestra que el factor común es un polinomio, que en la mayoría de los ejercicios son de dos o tres términos y para obtenerlo escriben la expresión como un cociente, con el fin, que el estudiante visualice cual es el factor que tiene en común la expresión y lo desarrolle, un ejemplo de ello es:

Descomponer, $2x\,(a-1) - y\,(a-1)$

El factor común es $(a-1)$, dividendo los términos de la expresión dada entre el factor común $(a-1)$; tenemos,

$$\frac{2x(a-1)}{(a-1)} = 2x \quad , \text{y}, \qquad \frac{-y(a-1)}{(a-1)} = -y$$

obteniendo, $2x\,(a-1) - y(a-1) = (a-1)\,(2x-y)$.

Otra propuesta para realizar la factorización de un polinomio a través del caso de factor común, es presentada en el texto escolar *Desafíos Matemáticos* de octavo grado[7], donde antes de empezar a abordar el caso de factor común realizan un trabajo previo caracterizado porque los estudiantes busquen el número en sopas numéricas, figuras y crucigramas a partir de sus factores primos, de igual forma lo realizan para los monomios.

Posteriormente a este trabajo realizado, se presentan los requerimientos para factorizar por factor común, manifestando que es necesario "calcular el máximo común divisor de los coeficientes y el máximo común divisor de las partes literales, el producto de los resultados obtenidos es el factor común", luego dividen cada término del polinomio entre el factor común, los cocientes obtenidos por el factor común conforman la expresión factorizada, es notorio que no se explica como se obtiene el máximo común divisor de los factores literales, asumiendo que los estudiantes lo realicen como los coeficientes del polinomio.

Ejemplo:

Factorice $6x^2y - 15x$:

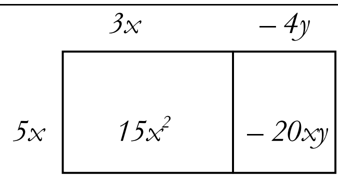
El m.c.d. $(6, 15) = 3$ y m.c.d. $(x^2y, x) = x$ entonces el factor común es $3x$, realizando la división se obtiene: $\dfrac{6x^2y}{3x} = 2xy$ y, $\dfrac{-15x}{3x} = -5$

Luego la expresión factorizada es $6x^2y - 15x = 3x\,(2xy - 5)$.

Otro enfoque a la propuesta de enseñanza al caso de factor común es realizado por el libro *Matemáticas 8 Aplicaciones y Conexiones*[8], donde muestran como obtener los factores primos y el máximo común divisor MCD de los números, luego desarrollan un trabajo similar como lo hace la propuesta del libro *Desafíos Matemáticos* con la diferencia que retoma la multiplicación de

[7] Martines, Soraya (2003); Desafíos Matemáticos, Ed. Norma, Bogotá, Diciembre 2003.
[8] Foster, Alan; Burrill Gail (2000); Matemáticas – Aplicaciones y Conexiones, Ed. Mc Graw Hill, Bogotá, Septiembre 2000.

polinomios y un modelo geométrico, con el fin de establecer ciertas relaciones con temas estudiados con anterioridad; un ejemplo de ello es:

Modelo	**Multiplicación de polinomios**	**Factorización de Polinomios**
	$5x(3x - 4y) = 15x^2 - 20xy$	$15x^2 - 20xy = 5x(3x - 4y)$

Factor Común por Agrupación

La propuesta de enseñanza de Aurelio Baldor para el caso factor común por agrupación de términos, toma la propiedad asociativa como el primer paso para desarrollar la descomposición factorial con el fin de encontrar los términos que hay en común, luego obtienen el factor común usando dos veces la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, logrando la factorizacion del polinomio.

Ejemplo:

Factorizar $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$

"Los dos primeros términos tienen el factor común *3m* y los dos últimos términos el factor *4*, agrupando, tenemos:"

$$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n) = 3m(m - 2n) + 4(m - 2n) = (m - 2n)(3m + 4),$$

obteniendo que: $3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (m - 2n)(3m + 4)$.

Trinomio Cuadrado Perfecto

El trinomio cuadrado perfecto es el caso más reconocido por los estudiantes del álgebra y Aurelio Baldor en su libro lo desarrolla siguiendo una serie de pasos.

El primer paso explica que es un cuadrado perfecto y como se obtiene la raíz cuadrada de un monomio, el segundo paso muestra porque un trinomio es cuadrado perfecto y el tercero es la regla para factorizar, resaltando en este último que se debe extraer la raíz cuadrada del primer y tercer término del trinomio, teniendo en cuenta que el signo que está entre ellos es el signo del segundo término del trinomio, luego se eleva al cuadrado toda la expresión; un ejemplo de ello es:

Factorizar $1 - 16ax^2 + 64\,a^2x^4$

Extrayendo la raíz cuadrada del primer y tercer término del polinomio se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & - & 16ax^2 & + & 64\,a^2x^4 \\ \downarrow & \searrow & & & \downarrow \\ 1 & & - & & 8ax^2 \end{array}$$

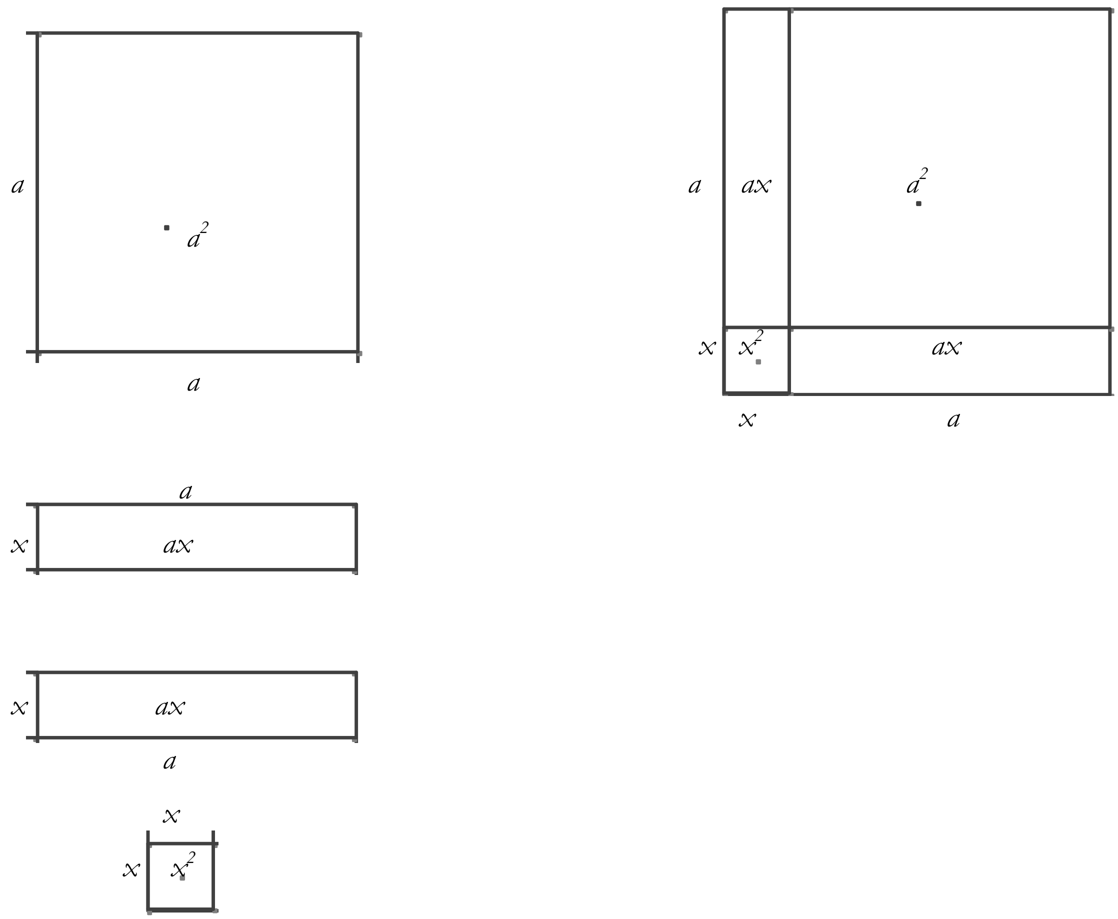
Elevando al cuadrado se obtiene: $1 - 16ax^2 + 64\,a^2x^4 = (1 - 8ax^2)^2$.

Otra forma en que se puede abordar los Trinomios Cuadrados Perfectos es a través de su interpretación geométrica, como lo propone el texto escolar[9] *Matemáticas 8º*, donde simultáneamente al mostrarle la representación geométrica le muestra que es un Trinomio Cuadrado Perfecto.

---

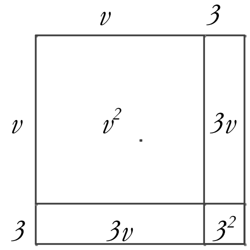
[9] Martín, Hugo (1999); Matemáticas 8º, Ed. Santillana, Bogotá, Noviembre 1999.

El esquema es el siguiente,



El área es $a^2 + ax + ax + x^2 = a^2 + 2ax + x^2 = (a + x)^2$.

La propuesta del libro *Matemáticas 8 Aplicaciones y Conexiones* para la enseñanza del Trinomio Cuadrado Perfecto, muestra un trabajo similar al propuesto por Aurelio Baldor con la diferencia que relaciona temas estudiados, que son plasmados en una tabla para determinar si un polinomio de tres términos es factorizable y porque se le denomina un trinomio cuadrado perfecto; un ejemplo de ello es el siguiente cuadro que recopila toda la información con respecto a un sólo ejercicio.

Modelo	**Elevando un binomio al cuadrado**	**Factorizando un cuadrado perfecto trinómico**
	$(v + 3)^2 = v^2 + 2(v)(3) + 3^2$ $= v^2 + 6v + 9$	$v^2 + 6v + 9 = v^2 + 2(v)(3) + 3^2$ $= (v + 3)^2$

Diferencia de Cuadrados

La Diferencia de Cuadrados hace referencia a los productos notables, así que Aurelio Baldor toma este hecho y muestra la diferencia de cuadrados como el producto de la suma de la raíz cuadrada de sus dos términos por la diferencia de la raíz cuadrada de sus dos términos.

Ejemplo:

Descomponer $16x^2 - 25y^4$

Como la raíz cuadrada de $16x^2 = 4x$ y la raíz cuadrada de $25y^4 = 5y^2$.

Ahora 'multiplico la suma de estas raíces $(4x + 5y^2)$ por su diferencia $(4x - 5y^2)$', así que:

$16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$.

Trinomios de la Forma $x^2 + bx + c$

Este caso de factorización se usa normalmente para resolver ecuaciones de segundo grado, Aurelio Baldor propone para descomponer trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ se debe encontrar la raíz cuadrada del primer término del trinomio y colocarlo como primer factor de los dos binomios, luego buscar dos números que sumados den b y multiplicados den c, para ubicarlo como segundo término de los dos binomios.

Un ejemplo de ello es:

Descomponer $x^2 + 5x + 6$, el trinomio se descompone en dos binomios, la raíz cuadrada del primer termino es x, luego $x^2 + 5x + 6 = (x \quad)\ (x \quad)$, se busca posteriormente dos números que multiplicados den 6 y sumados den 5, los números son 2 y 3, así que: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)\ (x + 3)$.

En algunos casos Aurelio Baldor propone hacer la descomposición en factores primos del tercer término con el fin de encontrar dos números cuyo producto de el tercer término del trinomio y su suma de el coeficiente del segundo término del polinomio.

Un trabajo similar hace el libro *Desafíos Matemáticos 8*, que propone formalmente que la factorización de este tipo de trinomio sea de la siguiente manera:

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ donde m y n son enteros tales que $m + n = b$ y $m\,n = c$

La parte interesante es que proponen el trabajar con una tabla auxiliar que relaciona los números n y m su producto y su suma, concluyendo que si no se encuentra dichos números el trinomio no es factorizable por este método.

Ejemplo

Factorizar $x^2 + x - 6$ y $x^2 - 10x - 6$

m	n	$m\,n$	$m + n$
1	-6	-6	-5
2	-3	-6	-1
-1	6	-6	5
-2	3	-6	1

Es claro que m y n son los divisores de – 6, luego se toman – 2 y 3 obteniendo, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ y $x^2 - 10x - 6$ no es factorizable ya que no existen un par de números que sumados den – 10.

Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$

Para resolver ecuaciones de segundo grado algunas veces es necesario factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, Aurelio Baldor propone que su descomposición se debe realizar de la siguiente manera: amplificar todo el trinomio por el coeficiente de x^2, dejar indicado el producto del segundo término y hacer la descomposición de factores primos del término independiente con el fin de encontrar dos números cuya suma de el coeficiente de x y su producto de ac. Como la descomposición de un trinomio es el producto de dos binomios donde el primer término de los dos binomios es la raíz cuadrada del primer término del trinomio amplificado y el segundo término de los binomios son los números encontrados que cumplen con las condiciones mencionadas anteriormente, un ejemplo de ello es:

Descomponer $6x^2 - 7x - 3$

Multiplicamos todo el trinomio por 6,
$36x^2 - (6)7x - 18 = (6x)^2 - 6(7)x - 18$

Buscamos dos números tal que: $9 - 2 = 7$ y $(9)(2) = 18$. Hallamos la raíz cuadrada de $(6x)^2$ que es $6x$. El trinomio se descompone en dos binomios $(6x - \quad)(6x - \quad)$ con los números encontrados lo ubicamos como segundo término de los dos binomios obteniendo lo siguiente: $(6x - 9)(6x + 2)$, como al principio se multiplico todo el trinomio por 6, ahora se debe dividir por 6 toda la expresión, para no alterar el trinomio.

$$\frac{(6x-9)(6x+2)}{6} = \frac{(6x-9)(6x+2)}{3 \qquad 2} = (2x-3)(3x+1), \text{ luego}: 6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(3x+1)$$

Otra manera para abordar este caso, es usar el caso previamente estudiado de factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y el factor común, es así como en el texto escolar *Desafíos Matemáticos* de octavo grado propone:

Halla n y m enteros tales que $mn = ac$ y $m + n = b$ se reemplaza b como $m + n$ se agrupa y factoriza en cada binomio el término que hay en común.

Ejemplo: Factorizar $6x^2 + 23x + 20$

Descomponer $120 = (6)(20)$ en factores primos: 120 = ((2)(2)(2))((3)(5))= (8)(15)

$$6x^2 + 23x + 20 =$$

$$6x^2 + 8x + 15x + 20 =$$

$$(6x^2 + 8x) + (15x + 20) =$$

$$2x\,(3x + 4) + 5(3x + 4) =$$

$$(3x + 4)(2x + 5)$$

Luego, $6x^2 + 23x + 20 = (3x + 4)\,(2x + 5)$.

Factorización de Trinomios

En el texto escolar *Hacia la Matemática* de grado octavo del profesor *Yu Takeuchi* y otros autores, proponen que los trinomios se pueden factorizar "sumándole y restándole un término adecuado", trasformándolo así en una diferencia de cuadrados.

$$x^2 + px \text{ se puede convertir en un cuadrado sumándole } \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 + px = \left(x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Ejemplo

Descomponer $x^2 + 6x + 5$

Para factorizar este polinomio es necesario sumar y restar *4*.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= (x^2 + 6x + 5 + 4) - 4 \\ &= (x^2 + 6x + 9) - 4 \\ &= (x + 3)^2 - 2^2 \\ &= (x + 3 - 2)\,(x + 3 + 2) \\ &= (x + 5)\,(x + 1) \end{aligned}$$

2.1 SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA

Propuesta. (Libro). / Casos de Factorización.	**Álgebra Editada por Baldor.**	**Desafíos Matemáticos de Octavo Grado.**	**Matemáticas: Aplicaciones y Conexiones.**	**Matemáticas de Octavo Grado.**	**Hacia la Matemática. (Yu Takeuchi).**
Factor Común.	Se basa en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Para obtener el factor común, en algunos casos, escriben la expresión como un cociente obteniendo el polinomio factorizado.	Calcula el máximo común divisor de los coeficientes y de las partes literales, el producto de los resultados obtenidos es el factor común. Luego dividen cada término del polinomio entre el factor común, dando como resultado la expresión factorizada.	Calcula el mcd. de los números plasmándolo posteriormente a los polinomios, luego relaciona la multiplicación con la factorización y usan un modelo geométrico, para dar una representación a la multiplicación.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.
Factor Común por Agrupación.	Toma la propiedad asociativa como primer paso y luego se basan en el caso anterior para obtener la expresión factorizada.	Este caso no es considerado por los autores, pues está propuesto como ejercicio.	Este caso no es considerado por los autores.	Este caso no es considerado por los autores, pues está propuesto como ejercicio.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor y está considerado dentro del caso de factor común.
Diferencia de Cuadrados	Toma como referencia los productos notables y muestra la diferencia de cuadrados como el producto de la suma de la raíz cuadrada de sus dos términos, por la diferencia de la raíz cuadrada de sus dos términos.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Hace una exploración usando la geometría con el fin de visualizar que es una diferencia de cuadrados. Luego usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.

Propuesta. (Libro). / Casos de Factorización.	**Álgebra Editada por Baldor.**	**Desafíos Matemáticos de Octavo Grado.**	**Matemáticas: Aplicaciones y Conexiones.**	**Matemáticas de Octavo Grado.**	**Hacia la Matemática. (Yu Takeuchi).**
Trinomio Cuadrado Perfecto (T.C.P)	Explica porque son trinomios cuadrados perfectos, luego realiza el procedimiento para factorizar, teniendo en cuenta que se debe obtener la raíz cuadrada del primer y tercer término, el signo que está entre ellos es el signo del segundo término del trinomio y toda la expresión se eleva al cuadrado.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Realiza un trabajo similar al libro *álgebra* editado por Baldor, con la diferencia que hace una relación con la geometría, específicamente a la noción de áreas; esté trabajo es plasmado en un tabla.	Usa la geometría como una manera de representar TCP.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.
Trinomio de la Forma $x^2 + bx + c$	Usan la descomposición de factores primos del tercer término, con el fin de encontrar dos números que sumados de el coeficiente del segundo término y multiplicados de el tercer término del trinomio.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor, basado en una tabla auxiliar que hace una relación de los números encontrados con su suma y su producto.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Convierte el trinomio en una diferencia de cuadrados, para ello deben sumar y restar un término adecuado.
Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$	Amplifica todo el trinomio por el coeficiente del primer término, luego descompone en factores primos el nuevo término independiente y acuden al caso anterior (trinomios de la forma $x^2 + bx + c$) para no alterar la expresión realizan una división por el coeficiente del primer término.	Realiza un trabajo similar al libro *Álgebra* editado por Baldor, con la diferencia que agrupa y factoriza en cada binomio el término que hay en común.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Usa la propuesta del libro *álgebra* editado por Baldor.	Convierte el trinomio en una diferencia de cuadrados, para ello deben sumar y restar un término adecuado.

CAPITULO 3
ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE

En la actualidad, la educación matemática pretende que los conocimientos trabajados en la escuela con los estudiantes tengan un mayor alcance, que sean más duraderos rompiendo con esquemas tradicionales que sólo enseñaban procedimientos y aprendizaje de conceptos, restándole importancia al desarrollo de diferentes pensamientos, (numérico, espacial, métrico, aleatorio, variacional,(MEN, 1998))y procesos que se pretenden desarrollar en la educación matemática actual, los cuales permitan que los estudiantes hagan uso y trasciendan sus conocimientos a situaciones dentro y fuera de la matemática en especial en su vida y labores cotidianas.

Teniendo en cuenta los pensamientos y procesos que se pretenden alcanzar en una clase de matemáticas en especial en una de álgebra los lineamientos curriculares proponen algunos grandes aspectos que rodean la organización del currículo y por supuesto de las propuestas de enseñanza que se hagan sobre las mismas, entre estos tenemos[10]:

Conocimientos Básicos: Estos se encuentran relacionados con procesos específicos donde se desarrollan pensamientos matemáticos conectados directamente con sistemas propios de la matemática.

Procesos Generales: Estos procesos son actividades que los estudiantes deben desarrollar en el proceso de aprendizaje tales como el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Tomando como referente estos dos elementos organizadores y de una forma más específica es de nuestro interés el abordar algunos elementos relacionados con los conocimientos básicos

[10] Lineamientos Curriculares Matemáticas, MEN, 1998

que tienen que ver con el desarrollo del pensamiento variacional, los sistemas algebraicos y analíticos[11]; realizando una conexión con los procesos generales por el lado de la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Cuando se hace referencia al desarrollo del pensamiento variacional se hace énfasis en que las propuestas de enseñanza desarrollen actividades para el aprendizaje de los conceptos algebraicos, pero de manera muy importante la enseñanza de *"procedimientos interestructurados*[11] que relacionan los procedimientos aprendidos en la aritmética y que pretenden transformar las expresiones algebraicas que modelen diferentes situaciones problema tanto de actividades propias de las personas como de la matemática misma.

Es un aspecto importante y apropiado cuando se realiza una propuesta de enseñanza que pretende abordar un procedimiento y es que "*las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse sofisticado"* (Filloy E, Rojano T; 1999), de igual forma realizar la propuesta de nuevas situaciones con mayor grado de dificultad llevaran al estudiante a replantear y a realizar conceptualizaciones matemáticas.

De otro lado se hace necesario considerar que un proceso muy importante a desarrollar en el aprendizaje del álgebra es el de la modelación, proceso en que el estudiante formula matemáticamente un problema o situación real, a través de un modelo matemático sobre el cual puede sacar conclusiones, calcular, transformar, revisar y trasladar nuevamente al problema original, validando el modelo o dejando claro que debe plantear otro.

Es claro que el estudiante desarrolla varias etapas en su aprendizaje entre la formulación de un modelo matemático y la validación del mismo, entre estas la de mayor interés en este trabajo de grado, hace referencia a cuando el modelo matemático es una expresión algebraica y se deben realizar varias transformaciones para poder encontrar una solución o una expresión equivalente en donde hará uso de varias estructuras aprendidas en la aritmética que presuponen que el estudiante tiene un amplio dominio de procedimientos y rutinas usuales y secuenciales,

[11] Lineamientos Curriculares, MEN

denominadas como algoritmos o *métodos de calculo* entendidos como pasos específicos que llevan a un resultado y que están ligados *en su mayoría a elaboraciones sintácticas de las expresiones simbólicas del lenguaje matemático.*

A continuación se mencionan algunos aspectos relacionados con las etapas descritas en el párrafo anterior correspondientes con los procedimientos y las transformaciones realizadas a una expresión para hallar un resultado o para obtener una expresión equivalente, a estos procedimientos se les denomina *Procedimientos Analíticos.*

3.1 Procedimientos Analíticos

Existen varios procedimientos asociados al aprendizaje del álgebra entre los que se encuentran procedimientos de tipo Aritmético, Métrico, Geométrico y Analítico este subdividido en actividades tales como calcular, graficar, medir y transformar.

El proceso que se pretende desarrollar en esta propuesta es el concerniente al proceso analítico de transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes a través de operaciones y propiedades matemáticas

La aplicación de un procedimiento conlleva mucho más que *Saber Hacer,* es saber en que ocasiones se aplica, que modificaciones pueden hacerse de acuerdo a la situación especifica y como verificar que los resultados obtenidos son correctos es decir validar la transformación, es así que como se puede concluir que *"el conocimiento procesal implica diferenciar procedimientos de los que funcionan como de los que no y del sustento matemático que lo sustenta*[12]

El procedimiento de la factorización se encuentra considerado como analítico y de transformación en expresiones equivalentes, o también denominado como reordenamiento y manipulación caracterizado por pasos e instrucciones que le permiten al estudiante transformar

---

[12] Rico Luís, Consideraciones sobre el currículo escolar de Matemáticas, Lineamientos curriculares, MEN,1998

las expresiones, es importante mencionar que la ejecución de dichos pasos puede tomar tiempo y requiere un trabajo cuidadoso que no debe precipitarse en el afán de buscar una solución al problema para el cual fue planteada la expresión, se conocen cuatro aspectos que deben tenerse en cuenta cuando se reordenan y manipulan expresiones[13]

Descubrir la posibilidad de manipular expresiones como el resultado del encuentro de diferentes expresiones para la misma situación.

- Darse cuenta de que una expresión es una entidad propia
- Concebir una expresión algebraica que se ha construido y que por lo tanto se puede deshacer o desbaratar.
- Decidir cómo manipular expresiones y con que fin.

Estos cuatro aspectos deben desarrollarse con el suficiente tiempo para que los estudiantes entiendan cada una, en especial el hecho que comprendan que no hay una única expresión que modela la situación si no que se plantean varias teniendo en cuenta distintos aspectos geométricos o aritméticos de la situación propuesta, llevando a cabo procedimientos como medir, contar y generalizar posteriormente hacer un registro fiable que permita encontrar regularidades y establecer comparaciones que den lugar a expresiones equivalentes de la situación planteada.

El hecho de registrar las diferentes expresiones que van surgiendo cuando se pretende resolver una situación, permiten aplicar variadas reglas algebraicas, observando que expresiones cambian, cuales permanecen iguales, si diferentes secuencias de símbolos pueden expresar la misma generalidad, pasando por preguntas como:

- Las dos expresiones tendrán la misma respuesta
- Se puede verificar que las dos expresiones son equivalentes.
- Puede llegarse de una expresión a la otra o viceversa.

[13] Masón J, Rutas hacia el álgebra.

- Es así como se puede concluir que "La *idea que una expresión puede ser reordenada es un paso grande que se da en cualquier ruta hacia el álgebra"*[14] .

Por otra parte tenemos el hecho que los estudiantes deben considerar las expresiones como entidades propias vistas como la solución de un problema, que exhiben la estructura del mismo permitiendo una vinculación entre problema y expresión lo que pone de manifiesto que conociéndola se pueden analizar aspectos de que como fue construida y por lo tanto de como puede ser modificada o en un lenguaje común como puede deshacerse.

Cuando se comprende de donde fue planteada la expresión, como es su estructura y se visualizan algunas posibilidades de deshacerla, se percibe como un resultado de varios pasos y operaciones donde intervienen variadas reglas algebraicas, que algunas ocasiones pueden dar lugar a transformar expresiones complejas en expresiones simples conociendo el paso de la una a la otra. Esta actividad de conocer el paso de la una a la otra permite que se comprenda por parte de los estudiantes el principio general de "*Construir y Deshacer*" pasando en algunas ocasiones por el proceso de reordenar, obteniendo como resultado que los estudiantes transformen expresiones algebraicas a través de variadas percepciones de manipulación algebraica

Tomando como referentes los aspectos mencionados en los párrafos anteriores se realizó la propuesta de enseñanza para la factorización interpretada como un proceso procedimiento analítico, que transforma expresiones algebraicas en otras equivalentes que se evidencia en el software titulado "*Aprendamos a Factorizar*", el cual propone actividades desde una visión relacionada con la aritmética pasando por la descomposición en factores primos de un número y luego de expresiones algebraicas en polinomios primos, trabajando progresivamente por monomios, binomios y trinomios.

---

[14] Masón J, Rutas hacia el álgebra.

Las actividades que se proponen en el software se realizan con base en el caso de factor común, llevando al estudiante a que complete las expresiones con los términos necesarios para aplicar la propiedad distributiva, con el fin que el estudiante encuentre una relación directa entre el trabajo que ha realizado por años en la aritmética y que ahora realizara en el álgebra; otro aspecto importante es el hecho que las actividades hacen un intento por mantener una serie de instrucciones similares en todos los casos de factorización a fin de que el estudiante no se encuentre saturado de muchas instrucciones particulares para cada caso planteado, lo que permitirá la facilidad del aprendizaje del algoritmo para factorizar.

De otro lado se proponen diferentes secciones del software, dentro de las que se encuentran: *Recuerda,* esta sección pretende recordarle al estudiante algunas definiciones o propiedades que el ha trabajado en el transcurso de su vida escolar y que serán de gran importancia en la actividad que va a desarrollar; *Conclusión Sugerida,* esta parte incluye una posible solución o conclusión de alguna situación o pregunta realizada dentro de la actividad a fin de que el estudiante sea capaz de analizar, modelar, comunicar y realizar un procedimiento, de forma individual, grupal y con el software; *Aplica lo Aprendido,* este es un espacio para que el estudiante revise lo que ha venido trabajando en las actividades, a través de diferentes tipos de ejercicios que le permiten poner en juego las distintas representaciones que tienen una expresión algebraica y que a su vez pueda evaluar si los procedimientos empleados son correctos con un link llamado *Revisar.* El software ofrece un juego como actividad complementaria que a su vez permite evaluar los procedimientos trabajados a lo largo del mismo en un ambiente apropiado para la edad y actividades propias de los estudiantes de grado octavo.

CAPITULO 4

EL USO DEL COMPUTADOR COMO MEDIADOR EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE

El computador es una de las herramientas de la tecnología que ha tenido un gran auge en los últimos años, esto indica que se abren nuevas perspectivas intelectuales y formas de abordar el conocimiento, produciendo en los estudiantes, nuevas estrategias cognitivas que favorecen el desarrollo de ciertos aspectos del individuo como lo es la creatividad. Así que la tecnología no sólo sirve para divertir a las personas, sino contribuye en la formación académica de los seres humanos.

Incorporar la tecnología en una ambiente escolar no se limita al uso de un objeto o artefacto moderno que ayuda a obtener un resultado u optimizar una tarea, debe también crear espacios y tiempos para desarrollar el pensamiento, las habilidades y las competencias que tienen los estudiantes. Entonces la educación ya no basta con formar personas educadas, sino educables, capaces de aprender y adaptarse durante toda su vida a un ambiente que está en constante evolución (Soto A, 1998), en donde la tecnología es un facilitador de esto.

Un estudiante que en la escuela le generan un espacio con tecnología desarrolla una actitud reflexiva, social, comunicativa y creativa; *Reflexiva*, porque analiza instrumentos tecnológicos con el fin de detectar problemas o encontrar cierta funcionalidad a una necesidad determinada; *Social*, el trabajo en equipo fortalece el conocimiento de sí mismo y del grupo, además genera seguridad y confianza en lo que realicen; *Comunicativa*, al existir un trabajo en equipo, la comunicación de las ideas, propuestas, logros y dificultades deben hacerse en un lenguaje adecuado y entendible, de tal forma que el desempeño que realicen, esté acorde con lo que se ha planteado; *Creativo*, la posibilidad que el estudiante diseñe o actué con actividades usando o manipulando herramientas y equipos, potencializa el ingenio y el pensamiento del educando.

Todo esto muestra que la tecnología no sólo es un dispositivo didáctico, sino hace parte de nuestra concepción del mundo y de cómo nos relacionamos con éste, que hace parte de nuestra cultura y en consecuencias de unos conocimientos.

La tecnología por si sola no genera el desarrollo que se desea en el estudiante, si no se tiene claro qué es lo que se *puede* y se *debe hacer* con una tecnología específica, pues se ha creído que la introducción de un objeto moderno automáticamente impacta la calidad educativa, a menos que sepan que es lo que se debe hacer, obteniendo resultados concretos. Según Schank R[15], 1995 en su libro *Engines for education*, "los computadores ya están en las aulas. Infortunadamente la mayoría de lo que hay es horrible. Hasta hoy, los computadores en el medio educativo vienen siendo usados para juegos y para enseñar a los estudiantes a utilizar una hoja electrónica. Parece que nadie se ha preocupado lo suficiente por comenzar a construir lo que se necesita." Quiere decir que si no se tiene claro hacia donde se quiere apuntar con la tecnología, los aparatos modernos se convierten en sistemas de procesamiento de información más no en herramientas educativas adecuadas a la necesidad de cada área.

4.1 La tecnología como mediador en la clase de matemáticas

Los seres humanos por naturaleza poseen instrumentos tangibles y simbólicos que contribuyen al funcionamiento mental, tanto a nivel individual como a nivel de grupo; la presencia de estos instrumentos en una actividad cognitiva es la de ser mediadores entre el estudiante y el conocimiento, así que la mediación de un instrumento transforma la raíz de la actividad cognitiva del educando y más si estos instrumentos son medios tecnológicos.

Si se tiene claro que la tecnología por si sola no es el objetivo central de una clase, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de algún aparato tecnológico, se aumenta la capacidad de ofrecer medios alternativos de expresión matemática y formas de manipular objetos matemáticos, generando en los educandos ideas que ayudan a consolidar un conocimiento.

[15] Citado por Campo Rafael, 2000; en su libro *Los computadores, en la nueva visión educativa*.

Trabajar en un medio computacional genera en los estudiantes un mundo virtual, el cual tiene que explorar y describir las abstracciones de la estructura matemática que encuentra, con el fin de organizar sus propias ideas, lograr una sistematización de ello y establecer conexiones con el tema abordado; esto se evidencia cuando los lineamientos curriculares de matemáticas hacen referencia a que los aparatos tecnológicos como calculadoras "*aligeran y superan la capacidad de calculo de la mente humana, por eso su uso en la escuela conlleva a enfatizar más la comprensión de los procesos matemáticos que a la mecanización de ciertas rutinas.*"(MEN 1998).

Cuando el medio computacional contribuye a generar en el estudiante otro sistema de representación virtual y que es ejecutable, aparte de que él posee, el papel de estudiante cambia, pues es llevado a desarrollar y consolidar procesos de interpretación, deducción y razonamiento, que finalmente se ve reflejado cuando comprende un concepto. Un ejemplo de esto es la capacidad de cálculo que posee las herramientas tecnológicas, pues amplían la serie de problemas asequibles a los alumnos y los capacita para ejecutar procedimientos con rapidez y seguridad, permitiendo la optimización del tiempo para desarrollar conceptos y poder modelar ciertas situación. Así que los sistemas de representación virtual no sólo sirven para registrar datos sino ampliar la capacidad de procesamiento de la mente humana.

El profesor Luis Rico[16] menciona que el trabajo con tecnologías implica "*abandonar el objetivo tradicional de fluidez algorítmica y sustituirlo por el objetivo de fluidez representacional*"…"*la tecnología pasa inicialmente, por un proceso de amplificación y posteriormente por un proceso más complejo, de reorganización*[17]" lo que convierte el trabajo con tecnologías en una opción para el diseño de situaciones que desarrollen el pensamiento variacional. Esto se refleja cuando los estudiantes deben resolver problemas planteados por un software (tutorial) o cuando el mismo software espera que el estudiante formule y resuelva el problema (Cabri).

---

[16] RICO L, "Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas", del libro Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, MEN (2000).

[17] La *amplificación* según el profesor Rico se traduce en "hacer lo de antes, pero mejor". Y la *reorganización*, es "hacer nuevas cosas y reorganizar las anteriores en función de las nuevas posibilidades".

La tecnología inventada por el hombre sirve para amplificar y re-organizar su cognición, así como en su momento lo hizo el lápiz, el papel, el abecedario, hoy en día es el computador, los software y las calculadoras, entre otros instrumentos tecnológicos. Así que entre más instrumentos que sirvan como mediadores, existen más formas de comprender ciertas situaciones que conlleven a un conocimiento.

4.2 Una visualización a los instrumentos computacionales.

Uno de los programas computacionales que tienen gran capacidad de graficación y muestra micromundos es Cabri, que es un programa de geometría Dinámica que hace que los estudiantes realicen simulaciones, exploren y experimenten situaciones con el fin de confrontar una idea y obtener una conclusión. Por consiguiente este entorno computacional permite comprender como los recursos del programa estructuran la exploración y como los recursos expresivos del medio favorecen la sistematización (Moreno L, 2001)

Un ejemplo de lo anterior es cuando se construye un triángulo y se quiere tener un desplazamiento de este, mostrando ahí mismo una familia de triángulos virtuales a la que pertenece el original, entonces dependiendo a lo que se quiera en la clase, esta situación ayuda a descubrir algunas propiedades y cuestionar al estudiante el porque sucedió, obteniendo una argumentación de esto.

Otro entorno computacional es la calculadora TI-92, esta a diferencia de otros instrumentos, el estudiante experimenta las relaciones entre el código simbólico propio del lenguaje y los fenómenos visuales que aparecen en la pantalla de la computadora, contribuyendo en el proceso de amplificación y reorganización conceptual; entonces la calculadora es una herramienta que complementa el pensamiento del estudiante, generando efectos de amplificación, lo que significa que no cambia la estructura del objeto a estudiar; algo semejante ocurre cuando la calculadora genera en los estudiantes efectos de reorganización cognitiva, pues este instrumento hace pensar y visualizar aspectos que no se pueden presenciar a simple vista[18], estos dos procesos (amplificación y reorganización) se desarrolla uno primero que el otro y su paso no es automático, ya que genera una actividad matemática.

Es bueno aclarar que estos instrumentos tecnológicos no sustituyen al docente, pues su trabajo está en la decisión si emplea ciertos entornos computacionales, cuándo y cómo hacerlo, además cuando el profesor con sus estudiantes usa un instrumento, él tiene la oportunidad de observarlos, seguir los procesos que desarrollan los estudiantes y tomar alguna decisión con respecto al estudio que realizan. Por tanto la tecnología ayuda a los profesores a relacionar el desarrollo de las destrezas y los procedimientos con el desarrollo más general del conocimiento matemático. (Principios y Estándares para la Educación Matemática, 2003).

4.3 Acerca del software "Aprendamos a Factorizar".

El software "Aprendamos a Factorizar" pretende abordar el tema factorización de polinomios, donde se pretende que el estudiante "*Desarrolle técnicas para factorizar polinomios, en particular, la diferencia de cuadrados, los trinomios cuadrados perfectos y otros trinomios factorizables*[19]".

Este software permite mostrar información a los estudiantes en forma interesante, significativa y secuencial, interesante porque proyecta fondos e imágenes que actúan para mantener la atención de los estudiantes; significativa porque permite a los estudiantes asumir un papel activo en el aprendizaje por medio de la interacción física - virtual con la información, además lo que el estudiante puede apreciar en la pantalla, le sirve también de retroalimentación de las acciones y decisiones que toma él durante su exploración, un ejemplo de esto es cuando el estudiante tiene que escribir ciertas expresiones, reflexionar sobre una situación especifica y compararla con la sugerida por el software; y secuencial porque está organizado no sólo por temas, sino que cada procedimiento necesita del anterior.

[18] Un ejemplo análogo es el microscopio, pues podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta.

[19] Estándares Curriculares, MEN; 1998

“Aprendamos a Factorizar”, es un instrumento de mediación para abordar el tema de factorización de polinomios, pues por una parte aumenta la capacidad de ofrecer otra forma de realizar la factorización, sin salirse de la manera como se ha venido trabajando ; así que este software es un instrumento de amplificación y reorganización dentro de un procedimiento algorítmico. Por otra parte el papel del docente dentro del software es la de confrontar, supervisar y tomar alguna decisión acerca de cómo los estudiantes están abordando el tema de la factorizacion de polinomios.

4.4 Elaboración del Software y Algunos Aspectos de la Codificación del mismo.

En esta parte se describirá aspectos relevantes y generales de la codificación e implementación del software, partiendo de que este es un tutorial y sirve para abordar el tema factorizacion de grado octavo de la educación básica.

El software *“Aprendamos a Factorizar”* fue elaborado en Visual Basic 6.0 (VB), consta de 26 formularios y un módulo, este último tiene una variable de tipo entero llamada *rta*, que captura el valor de respuesta cuando el usuario quiere salir del programa, esta variable está en todos los formularios y su aplicación es la siguiente:

```
rta = MsgBox("Está Seguro que desea salir del programa?", vbYesNo, "Confirmación.")
If rta = vbYes Then End
```

Al correr el programa se encuentran con un formulario llamado Frm_MPrincipal, que es el menú principal, este formulario consta de 7 commandbutton que es un control estándar de VB, cada uno de ellos lo llevan a los casos de factorización y al juego, al hacer clic en uno de ellos el Frm_MPrincipal se oculta y muestra el formulario que se desea ver, esto se hace con los método hide y show que significa ocultar y mostrar respectivamente, un ejemplo de ello es:

```
Private Sub cmd_Descomposición_Click()
Frm_MPrincipal.Hide
Frm_Descomposición1.Show
End Sub
```

Todos los formularios tienen una barra de menú en la parte superior, esta fue elaborada a través del editor de menú que ofrece VB, en ella encuentra ciertas opciones como información al usuario, pasar a la página siguiente (formulario), volver al menú principal y cerrar el programa, estas últimas se encuentran cuando el usuario despliega la opción de menú que hay en los formularios de los casos de factorización, así mismo estas opciones tienen una ejecución rápida, que fue realizada usando la propiedad *shortcut* que tiene el editor de menú, un ejemplo de ello es:

Para ir al Menú Principal el usuario puede hacer clic en menú principal o usando CONTROL + P del teclado.

El Frm_MPrincipal también tiene otros controles estándar como Image, Picture y Text, este último el usuario no lo puede modificar, pues sólo tiene una información, esto se realizó con la propiedad *Locked = True*.

Los formularios donde están los casos de factorización tienen la barra de menú en la parte superior descrita anteriormente, además de esta, en todos los formularios encontrarán al lado derecho una barra de herramientas, que fue elaborada usando los siguientes controles: Image y Commandbutton; el Image usa la propiedad *Picture* que es un mapa de bit (en esta parte se describió en donde estaba el archivo) y la propiedad *Stretch = True,* la cual deja la imagen en su posición normal. Otro control fue el commandbutton, se usaron de 4 a 7, cada uno de ellos tiene la propiedad *blackcolor = blanco*, su apariencia es blanca; *downpicture* es un mapa de bit (en esta parte se escribió la ubicación del archivo), cada vez que el usuario hace clic, cambia la imagen del botón, esto es con el fin de obtener una animación; *Picture* es la imagen que tiene el botón sin hacer clic, esta fue importada desde un archivo especifico; *style = gráfico* esta propiedad hace que el botón acepte sin ningún problema la imagen que se desea y finalmente el *tooltiptext* que es el mensaje cuando el usuario acerca el cursor en este objeto.

Los cuatro primeros Commandbutton (cmd) tiene una programación especifica y lleva al usuario al formulario siguiente, un ejemplo de esto es:

Private Sub Cmd_Siguiente_Click()

Frm_FactorComún_Ejercicios.Show

Frm_FactorComún2.Hide

End Sub

Private Sub Cmd_MenuPrincipal_Click()

Frm_FactorComún2.Hide

Frm_MPrincipal.Show

End Sub

Private Sub Cmd_anterior_Click()

Frm_FactorComún1.Show

Frm_FactorComún2.Hide

End Sub

Private Sub mp_Click()

Frm_MPrincipal.Show

Frm_FactorComún2.Hide

End Sub

En algunos formularios como frm_factorcomun2 encontrarán el quinto botón (Commandbutton) revisar o evaluar, en él el usuario confronta su respuesta, en esta parte se encuentra una sentencia "*if then else if*" el objetivo de esta sentencia es revisar las respuestas que hace el usuario a través de la caja de textos (control Text), si el valor escrito por el usuario es correcto se usa la propiedad *visible* = *True*, con el fin de mostrar el objeto que se quiere, adicional a esto se muestra una caja de mensaje que fue creada usando la función msgbox (se escribe el mensaje, el botón que se va a emplear y el titulo), el ejemplo que se describe a continuación corresponde al formulario frm_factorcomun2 y a la pregunta ¿Cuál es el factor común de *m(a+1) + n(a+1)*?

Private Sub Cmd1_Evalua_Click()

If Text4.Text = "" Then

MsgBox "No Escribio El Término Que Hay En Común" & vbCrLf & "Favor Intentarlo Nuevamente.", vbExclamation, "Error."

Else

If Text4.Text = "a+1" Or Text4.Text = "A+1" Or Text4.Text = "1+a" Or Text4.Text = "1+A" Then

```
    MsgBox "¡Muy Bien!", vbInformation, "Felicitaciones."
    Text5.Visible = True
    Text6.Visible = True
    Text7.Visible = True
    Label1.Visible = True
    Picture2.Visible = True
    Cmd1_Evalua.Visible = False
    cmd2_evalua.Visible = True
    Text4.Locked = True
    Text4.BorderStyle = 0
    Text4.BackColor = &HFAE2BA
    Text4.ForeColor = &H80FF&
    Cmd1_Evalua.Visible = False
    Else
    MsgBox "¡Amigo! Revisa nuevamente", vbCritical, "Error."
    End If
End If
End Sub
```

El sexto Commandbutton es el de cerrar el programa, en él está la variable rta y la función de Msgbox, esta ultima recibe el valor asignado por el usuario y de acuerdo a esto actúa a su programación, veamos:

```
Private Sub Cdm_Salida_Click()
rta = MsgBox("Está Seguro que desea salir del programa?", vbYesNo, "Confirmación.")
If rta = vbYes Then End
End Sub
```

En algunos formularios como frm_tcp2 tienen otro control (Commandbutton) que se llama *Conclusión Sugerida*, la función de este es mostrar alguna información y dar el paso a la siguiente página habilitando el botón siguiente, en esta parte intervienen los objetos de Image, Text y

Label con la propiedad *visible = True*, en los casos que el usuario tiene que escribir en la caja de texto (Text), la propiedad que intervienen es *locked, borderstyle, blackcolor y forecolor* de la siguiente manera: *Text4.Locked = True, Text4.BorderStyle = 0, Text4.BackColor = HFAE2BA, Text4.ForeColor = H80FF.*

Nota: Los códigos *HFAE2BA* y *H80FF* son los colores del fondo del formulario.

En la secciones *Aplica lo Aprendido*, aparece la barra de herramientas a la derecha y la barra de opciones en la parte superior, adicional a esto, estas secciones se caracteriza por tener ejercicios donde el usuario debe escribir la solución, seleccionar la respuesta o hacer clic. Cada formulario tiene dos o tres secciones, cada sección fue elaborada con un Frame y dentro de este está la caja de textos, label e Image; en algunos Frame también intervienen los controles Checkbox y Optionbutton, este último, cada vez que el usuario hace clic revisa si esta correcto o no, un ejemplo de ello es el formulario frm_Diferencia_Ejercicios de la sección de *Diferencia de Cuadrados*, donde la respuesta correcta esta en el siguiente Optionbutton:

```
Private Sub Option2_Click()
MsgBox "¡Muy Bien!", , "Felicitaciones."
Frame2.Visible = True
Cmd1_Evalua.Visible = True
End Sub
```

En esta codificación interviene la función Msgbox, la cual felicita al usuario, muestra el Frame y el botón evaluar, lo hacen visible, para que el estudiante continué con el segundo ejercicio propuesto por el software.

En tres formularios de *"Aplica lo Aprendido"* se muestra en un Frame las claves para entrar al juego y entrar a cada nivel, los formularios son frm_Trinomios_Ejercicio1, frm_Descomposición_Ejercicios y frm_Agrupación_Ejercicios, una vez terminado los ejercicios correctamente se muestra las claves, esto se hace usando un Frame, Image y Label con la propiedad *visible = True.*

Para entrar al juego el usuario debe hacer clic en el botón de juego, inmediatamente se le solicita una clave, esto se hizo de la siguiente forma:

```
Private Sub Label1_Click()
contraseña = InputBox("Dígite la clave para entrar a jugar.", "Juego, Aprendamos a Factorizar.")
    If contraseña = "término" Or contraseña = "TERMINO" Or contraseña = "termino" Or contraseña = "TÉRMINO" Then
    frm_juego1.Show
    Frm_Juego_Entrada.Hide
    Else
    MsgBox "Dígite la clave correctamente.", vbCritical, "Error."
    End If
End Sub
```

Se uso un control (label1) con la propiedad *BackStyle = Transparent = 0* con el fin de mostrar la imagen que tiene el formulario, que fue elaborada usando un Image y las propiedades *Picture* y *Stretch;* cuando el usuario hace clic en el control label1 se usa la función Inputbox, esta muestra una caja de entrada, la cual el usuario debe digitar los datos, después de hacer con el mouse Aceptar, la sentencia "if then end" revisa si la contraseña guardada por el programa es valida o no, en caso negativo muestra un Msgbox diciendo que la clave es incorrecta, caso contrario, muestra el primer nivel del juego.

En los tres niveles hay una imagen distinta, el usuario debe hacer clic de acuerdo a las pistas que de darán cada vez que conteste correctamente, esta parte fue necesario emplear los controles Frame, Commandbutton, Label y Text. Un ejemplo de esto es el Frame4 del formulario Frm_Juego2, el cual tiene dos cajas de textos, 4 etiquetas y dos botones, uno de los botones es para cerrar el cual usa la propiedad *Visible = false*, de la siguiente forma:

```
Private Sub cmd_cerrar4_Click()
Frame4.Visible = False
```

```
End Sub
```

El otro botón sirve para evaluar o revisar las respuestas hechas por el usuario, usa la sentencia "if then end if" y la propiedad *Visible* de los objetos. Un ejemplo de esto es:

```
Private Sub cmd_evaluar4_Click()
If (Text4.Text = "a+2bc" And Text5.Text = "a-2bc") Or (Text5.Text = "a+2bc" And Text4.Text = "a-2bc") Or (Text4.Text = "A+2BC" And Text5.Text = "A-2BC") Or (Text5.Text = "A+2BC" And Text4.Text = "A-2BC") Or (Text4.Text = "2bc+a" And Text5.Text = "a-2bc") Then
Label15.Visible = True
cmd_cerrar4.Visible = True
Else
MsgBox "Revisa Nuevamente", vbCritical, "Error."
End If
End Sub
```

Cuando el estudiante termine de jugar aparece un Mgsbox felicitándolo por su labor, este fue codificado de la siguiente forma:

```
Private Sub Label17_Click()
Frame4.Visible = False
MsgBox "¡MUY BIEN!" & vbCrLf & "Has pasado todos los niveles y eres acredeedor de un premio, preguntale a tu Profe cuál es." & vbCrLf & "" & vbCrLf & "Te felicitamos y te sugerimos que ahora en adelante, debes practicar un poco más." & vbCrLf & "!ANIMO¡", vbSystemModal, "!FELICITACIONES!   HAS TERMINADO EL JUEGO."
End Sub
```

R E F E R E N C I A S   B I B L I O G R Á F I C A S

AYRES, FRANK; (1989)*Teoría de los polinomios,* Series y compendios Shaum.

BALDOR, AURELIO (1968); *Álgebra,* Editorial Rvmbos, Barcelona, España. 25ª Edición.

CAMPO RAFAEL, MELENDEZ ALFONSO, (2000); *Las computadores en una visión educativa,* pp 52 - 54 , Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería, Nov 2000, Bogotá, Colombia.

CINDY K. WILSON, SUSAN L JONES, JOHN M. HAIL, (2003); *Aulas con un solo computador, como transformar un solo computador del Aula en una herramienta poderosa de Aprendizaje.* Traducción al español realizada por EDUTEKA del artículo original "Projecting Knowledge" escrito por y publicado en el Número 1 del Volumen 31 de la revista Learning & Leading with Technology http://www.iste.org/inhouse/publications/ll/31/1/index.cfm?Section=LL_31_1.

FILLOY EUGENE, ROJANO TERESA, (1999); *Aspectos teóricos del álgebra educativa,* En Cáp. 8 *Procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra,* Grupo editorial Iberoamérica., México.

FOSTER, ALAN (2000); *Matemáticas aplicaciones y conexiones*, Editorial Mc Graw Hill, Septiembre 2000, Bogotá, Colombia.

GARCIA, JAVIER; RODRIGUEZ, JOSE; BRAZALEZ, ALFONSO; (1999) *Aprenda Visual Basic 6.0 como si estuviera en primero,* Escuela Superior De Ingenieros Industriales, Universidad De Navarra, España.

GOLDENBERH PAUL, (2003); *"Pensando (y hablando) sobre tecnología en la clase de matemáticas"*, traducción al español realizada por EDUTEKA del artículo \"Thinking (and Talking) About Technology in Math Classrooms\"

(http://www.eduteka.org/"http://www2.edc.org/mcc/iss_tech.pdf/"), publicado por Education Development Center Inc.
http://www.eduteka.org/"http://www2.edc.org/mcc/key.asp/"

"Ideas y actividades para enseñar Álgebra". Grupo Azarquiel. Editorial Síntesis. Caravaca, A. Vol.:20 pp. 102, 1991.

LUQUE C, TORRES J, MORA L, (2003); *"Factorización Algebraica"*, XIV Encuentro de Geometría y sus aplicaciones y II Encuentro de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá Colombia; Junio de 2003.

MARTÍN, HUGO (1999); *Matemáticas 8º*, Editorial. Santillana, Noviembre 1999, Bogotá, Colombia.

MARTINEZ ARROZA, J (1986); "*La computadora tiene sus limitaciones",* Revista Epsilon, Vol. 6-7, pp. 125-131.

MARTINEZ, SORAYA (2003); *Desafíos Matemáticos,* Editorial Norma, Diciembre 2003, Bogotá, Colombia.

MASON, JOHN, GRAHAM ALAN;(1999) *Raíces del álgebra*, UPTC, Traducción Celia Agudelo Valderrama, Cáp. 2 Raíz 2 *Reordenamiento y Manipulación.*

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, (1998) *Lineamientos curriculares, Bogotá*, Colombia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, (1998) *Estándares curriculares de calidad para Matemáticas, Bogotá*, Colombia.

MORENO LUIS, (2001); *Evolución y tecnología,* En *Memorias del seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*, MEN, Bogotá, Colombia.

MORENO LUIS, WALDEGG GUILLERMINA (2001); *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas,* En *Memorias del seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*, MEN, Bogotá, Colombia.

MORENO LUIS, (2001); *Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas,* En *Memorias del seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*, MEN, Bogotá, Colombia.

MORENO LUIS, (2003); *Cognición y computación, el caso de la geometría y la visualización.* Encontrado en http://eduteka.org/reportaje.php3?ReportID=0004 para el Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas.

NATIONAL COUNCIL THE MATEMATICS OF TEACHERS, (2003), *Principios Y Estándares Para La Educación Matemática*, Andaluza, España.

SILVA, J; ROSENDO, A (1991); "*El computador en el aula de matemáticas: importancia de las herramientas educativas"*, Revista Epsilon, Vol.: 21, pp.21.

SOTO, ANGEL (1997); *Educación en tecnología un reto y una exigencia social,* Editorial Magisterio, Bogotá, Colombia.

TAKEUCHI YU, (1982); *Hacia la Matemática,* Bedout Editores S.A, Bogotá Colombia.

VELÁSQUEZ, F (1991). "*Desalgebrizar la Educación Básica?"*, Revista Epsilon, Vol.:19 pp. 59 a 66, 1991.

RICO L,(2000); " *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas",* del libro Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, MEN.

ANEXOS

¡ Bienvenido !

Este documento es un manual del usuario correspondiente al software educativo titulado "*Aprendamos a Factorizar",* el cual se encuentra diseñado para estudiantes de grado octavo de la educación básica secundaria, para abordar el tema factorización de monomios, binomios y trinomios.

Utilidad y Servicio del Software.

El software es una propuesta innovadora para abordar el tema factorización, ya que realiza una conexión directa con el trabajo de descomposición en factores primos que los estudiantes han venido realizando en su trabajo con la aritmética, hecho que facilita el aprendizaje y ejercitación del procedimiento.

El software esta diseñado de tal forma que el estudiante tenga el tiempo suficiente para desarrollar las actividades es decir que puede aplicarse en varias sesiones de clase, con la tutoría del profesor quien desempeña un papel importante en la ejecución del mismo.

De otro lado se proponen diferentes secciones del software, dentro de las que se encuentran: *Recuerda, Conclusión Sugerida, Aplica lo Aprendido, Revisar*. El software ofrece un juego como actividad complementaria que a su vez permite evaluar los procedimientos trabajados a lo largo del mismo en un ambiente apropiado para la edad y actividades propias de los estudiantes de grado octavo.

Opciones de Instalación

Para instalarlo es necesario que usted cierre todas las aplicaciones que tenga abierta en su computador. Al abrir el CD encontrará una carpeta que se llama Instalar Factorización, ábrala, luego encontrará otra llamada Factorización, ahí observará una carpeta Instalador, en ella está un archivo que se llama Setup, haz doble clic y siga las instrucciones, después de seguir los pasos se recomienda reiniciar su computador y ejecutar el programa desde el CD.

Ahora si usted quiere ejecutar el programa desde el CD, debe primero instalarlo en el computador y luego abrir la carpeta Factorización y haz doble clic en el icono que dice Aprendamos a Factorizar, cuya extensión es exe. Pues para correr el programa es necesario instalar varios archivos a su computador, como: GIF89.DLL, Marchoso.DLL y Msmcces.DLL, estos ayudan a animar y escuchar el sonido. *No se recomienda* que al abrir el CD hagan doble clic en el ejecutable, ya que necesita los archivos mencionados anteriormente y por tanto no puede ejecutarse.

Elementos del Software

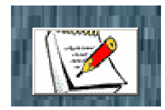
Barra Principal: Esta se encuentra ubicada al lado derecho de la pantalla se encuentra en tonos grises y en ella se encuentran algunos botones que permiten la navegabilidad por todo el software, al desplazar el cursor sobre cada uno se despliega una palabra que indica la función, entre estos están:

Siguiente: Sirve para desplazarse a la pantalla de trabajo que se encuentra disponible en seguida de la que se está trabajando, en algunos casos esta oculto esperando que el estudiante complete algunas actividades de forma correcta, lo que genera que el botón sea visible.

Anterior: Este botón cumple las funciones inversas del botón siguiente, es decir sirve para desplazarse a la pantalla de trabajo que precede a la actual.

Menú Principal: Este botón regresa a la pantalla principal del software, desde donde se puede trabajar en cualquier otra pantalla.

Conclusión Sugerida: Este botón guarda la conclusión esperada a alguna de las actividades o preguntas formuladas en las pantallas de trabajo, se espera que solo se active cuando se haya elaborado una conclusión propia y se halla socializado con los compañeros de la sesión de clase.



Revisar: Este botón le permite al estudiante verificar si las respuestas que ha colocado a las preguntas y actividades realizadas son correctas.

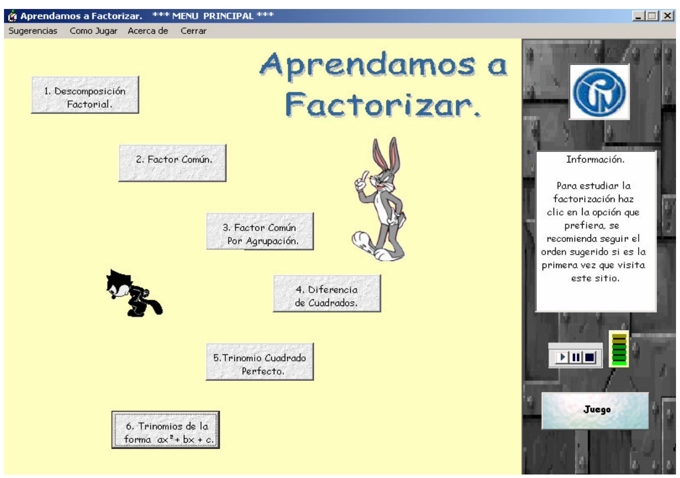
Salir: Este botón finaliza el programa, y tiene en mensaje para verificar que se desea cerrar la aplicación.

Barra Estándar: En esta barra se encuentran cuatro acciones, la primera denominada menú donde se despliegan las opciones; menú principal y salir que cumplen con la misma función que los botones de la barra principal; la segunda muestra una opción de ayuda para trabajar en la pantalla actual; la tercera es siguiente que se encuentra disponible en todas las pantallas de trabajo de la aplicación y por último la opción anterior que cumple una función similar al botón de la barra principal.

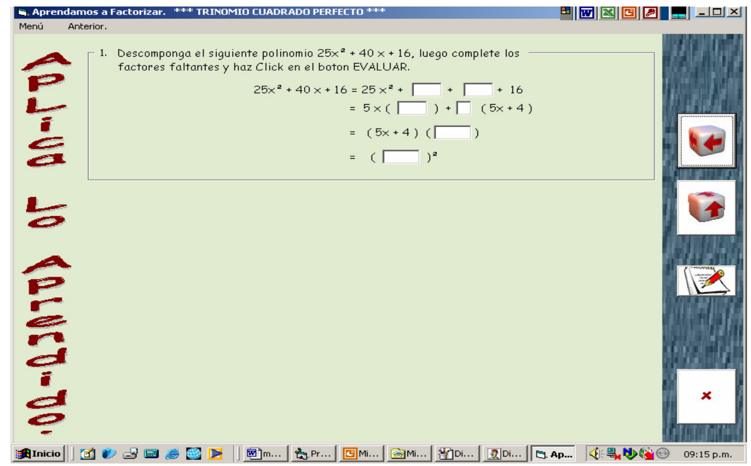
Secciones del Software

Pantalla Principal o Menú Principal

Esta es el primer contacto que tiene el estudiante con el software, en el puede encontrar diferentes links que lo llevaran a cada uno de los casos de factorización lo que permite que pueda iniciar por cualquiera, aunque se recomienda desarrollarlos de forma ordenada de acuerdo al número que los acompaña, de igual forma en esta pantalla se encontrara con un link que lo lleva a un juego donde para entrar le será solicitada una contraseña y unas claves que puede descubrir al desarrollar las actividades del software.

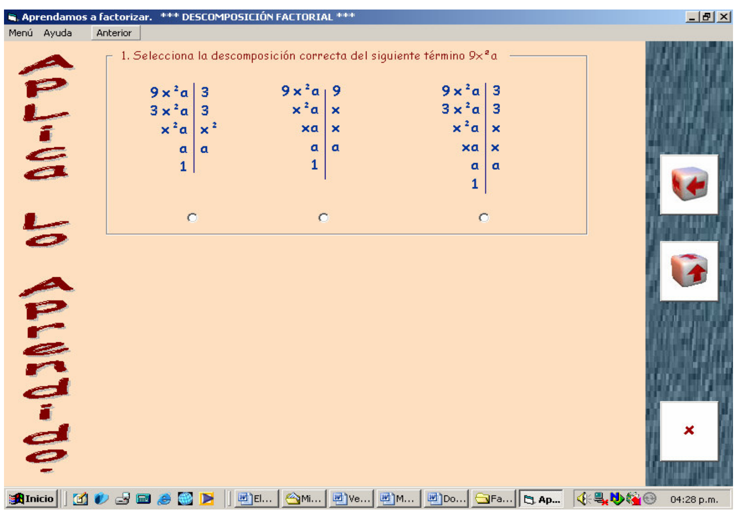


En cada una de las secciones encontrará un caso de factorización, que incluye una forma de abordar el tema que será desarrollado de forma compartida con el estudiante a través de preguntas que el estudiante debe contestar para poder así continuar.



También encontrara secciones compartidas para cada caso como lo son: *Recuerda,* esta sección pretende recordarle al estudiante algunas definiciones o propiedades que el ha trabajado en el transcurso de su vida escolar y que serán de gran importancia en la actividad que va a desarrollar; *Conclusión Sugerida,* esta parte incluye una posible solución o conclusión de alguna situación o pregunta realizada dentro de la actividad a fin de que el estudiante sea capaz de analizar, modelar, comunicar y realizar un procedimiento, de forma individual, grupal y con el software; *Aplica lo Aprendido,* este es un espacio para que el estudiante revise lo que ha venido trabajando en las actividades, a través de diferentes tipos de ejercicios que le permiten poner en juego las distintas representaciones que tienen una expresión algebraica y que a su vez pueda evaluar si los procedimientos empleados son correctos con un link llamado *Revisar.*

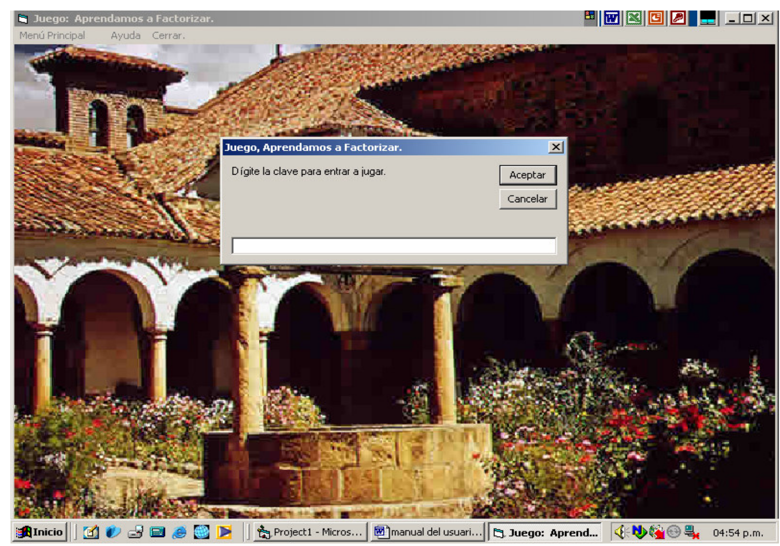
Con el fin de familiarizarse con la sección *Aplica lo Aprendido* a continuación mostraremos dos entornos de esta maravillosa sección.



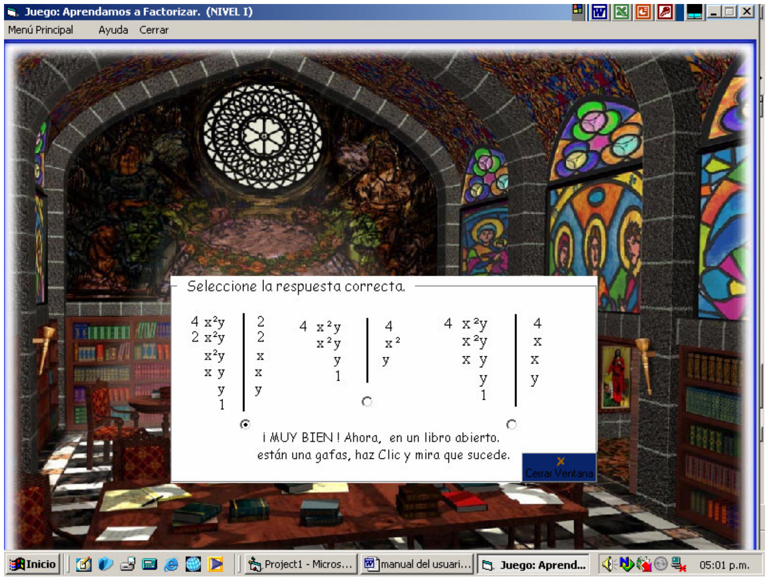
Instrucciones para Jugar.

El juego esta diseñado con el fin que el estudiante ponga a prueba sus conocimientos, además es una herramienta propia que ayuda a evaluar si el educando logró factorizar expresiones algebraicas.

Para iniciar el juego se solicita una contraseña, esta se encuentra en la parte "Aplica lo Aprendido" de la Descomposición Factorial, dicha clave es visible sólo cuando el estudiante contesta correctamente los ejercicios propuestos.



El juego tienen tres niveles, en cada nivel se encuentra una serie de pistas, cada una de estas lleva consigo unos ejercicios que deben desarrollar correctamente, caso contrario el juego queda suspendido y no le dará la pista siguiente.



Para entrar a cada uno de los niveles, es necesario digitar una clave que se encuentra en la parte "Aplica lo Aprendido", de algunos casos de factorización, luego de escribirla sigue las pistas correspondientes.

Nota: Al escribir las expresiones algebraicas, favor escribirla todas en minúscula o toda en mayúscula.

¡ Bienvenido !

Este documento es un manual para el profesor acerca de como se utiliza el software educativo titulado "*Aprendamos a Factorizar",* el cual se encuentra diseñado para estudiantes de grado octavo de la educación básica secundaria, para abordar el tema factorización de monomios, binomios y trinomios, se recomienda al docente que antes de leer este manual, lea el manual del usuario.

Generalidades del software

"*Aprendamos a Factorizar*" es un software tutorial elaborado en Visual Basic 6.0, en este usted encontrará una propuesta distinta acerca de la factorización de los trinomios.

El software se puede ejecutar desde una plataforma de Windows 95 o superior, requiere un memoria mínima de 128MB y un procesador Intel Pentium I. Se recomienda usarlo en equipos cuyo monitor es de 14 pulgadas.

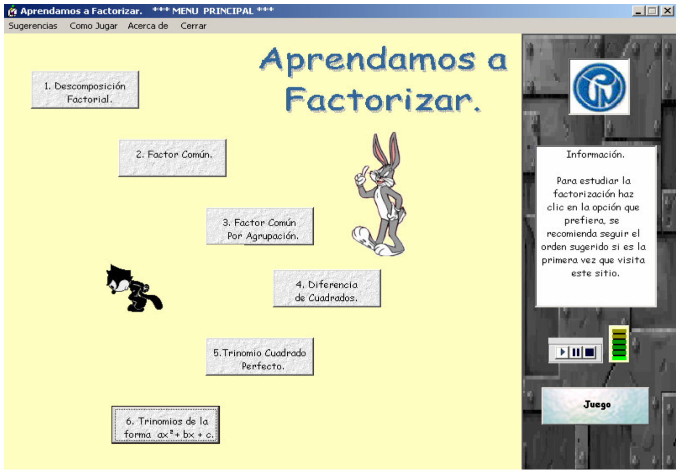
Opciones de Instalación

Para instalarlo es necesario que usted cierre todas las aplicaciones que tenga abierta en su computador. Al abrir el CD encontrará una carpeta que se llama Instalar Factorización, ábrala, luego encontrará otra llamada Factorización, ahí observará una carpeta Instalador, en ella está un archivo que se llama Setup, haz doble clic y siga las instrucciones, después de seguir los pasos se recomienda reiniciar su computador y ejecutar el programa desde el CD.

Ahora si usted quiere ejecutar el programa desde el CD, debe primero instalarlo en el computador y luego abrir la carpeta Factorización y haz doble clic en el icono que dice Aprendamos a Factorizar, cuya extensión es exe. Pues para correr el programa es necesario instalar varios archivos a su computador, como: GIF89.DLL, Marchoso.DLL y Msmcces.DLL, estos ayudan a animar y escuchar el sonido. *No se recomienda* que al abrir el CD hagan doble clic en el ejecutable, ya que necesita los archivos mencionados anteriormente y por tanto no puede ejecutarse.

El Papel del Docente En El Software.

El profesor debe ser una guía dentro del desarrollo de la aplicación del software desde su inicio, ya que en la primera pantalla de trabajo el estudiante va ha encontrar diferentes casos para factorizar expresiones algebraicas que aun no conoce y es el profesor quien debe aclararle dicha clasificación, de otro lado el estudiante puede escoger cualquier caso para iniciar pero en algunas situaciones se verá obligado a desarrollar la aplicación en el orden sugerido.

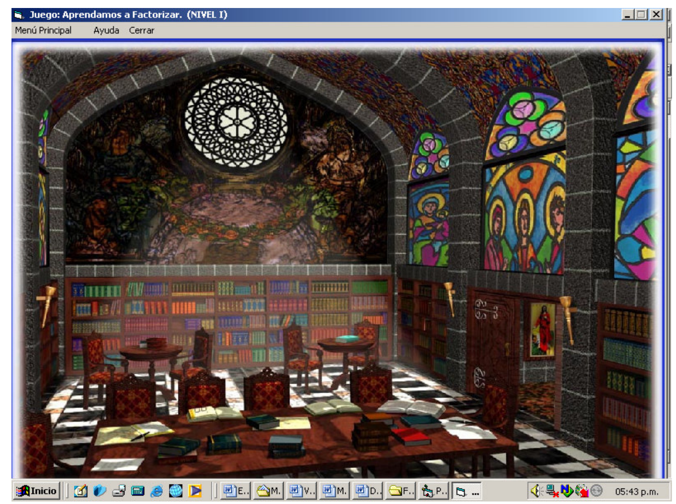


En algunas ocasiones el estudiante realizara ejercicios donde debe completar o verificar según sea el caso, es deber del profesor proponer la realización de algunas actividades a lápiz y papel que complementen el aprendizaje del procedimiento y fortalezcan el razonamiento de los estudiantes frente a las situaciones propuestas.

Se sugiere al profesor realizar un estudio previo del software para familiarizarse con las secciones mencionadas, cabe la pena resaltar que el software tan sólo pretende abordar el tema, la mecanización del procedimiento quedara a cargo del maestro quien debe proponer actividades adicionales que complementen el trabajo realizado para el tema factorizacion.

El Papel del Docente En El Juego

El juego nos ayuda a poner a prueba el conocimiento que adquirieron los estudiantes a lo largo del estudio de la factorizacion de expresiones algebraicas. Se recomienda que el profesor este durante el juego para constatar si el estudiantes esta resolviendo los ejercicios o aclarar alguna duda si es necesario.



Recomendaciones Generales para el Uso del software

- Se omitió en el software el implementar animaciones para evitar la distracción de los estudiantes ya que la propuesta está diseñada para trabajarse en el aula de clase.

- El software es un complemento para las clases de álgebra, se recomienda que lo use para varias secciones y con grupos pequeños de estudiantes.

- En caso de presentarse alguna inquietud es posible consultar la fundamentación escrita del trabajo o comunicarse con los autores a los correos,
  jferchocc@,yahoo.com
  johanajessica@starmedia.com

Trabajo de Grado presentado al Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia para optar el titulo de Licenciado en Matemáticas con énfasis en Computación I - 2006.