DEL PROBLEMA DE APOLONIO A PROBLEMAS DE TANGENCIAS EN OTRAS SECCIONES CÓNICAS

NICOLE MELIZA HENAO MATEUS
FABIO NORBERTO RINCÓN GALEANO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C. 2017

DEL PROBLEMA DE APOLONIO A PROBLEMAS DE TANGENCIAS EN OTRAS SECCIONES CÓNICAS

NICOLE MELIZA HENAO MATEUS
C.C. 1019104943
COD. 2013140019
FABIO NORBERTO RINCÓN GALEANO
C.C. 1071165715
COD. 2013140047

Trabajo de grado asociado al estudio de un asunto de interés profesional de los estudiantes.

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Directora
MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C. 2017

AGRADECIMIENTOS

Dedicada a mí querida madre Elena Mateus, por ser mi apoyo incondicional, por brindarme sus consejos y dirigir mis pasos para que estos sean precisos y firmes, por disfrutar mis triunfos y sufrir mis derrotas como si fueran suyas, por el enorme sacrificio que ha hecho a lo largo de su vida y todo en pro de un mejor futuro para nosotros, su familia, no hubiera sido posible alcanzar esta meta sin ella. A mi hijo Christopher por ser el motor de mi vida, no es fácil alejarse para alcanzar mis metas, pero es un sacrifico que debe hacerse para un mejor futuro juntos, gracias por brindarme la fuerza necesaria para afrontar el día a día. A mi quería prima Angie por ser mi confidente y mejor amiga, por brindarme los consejos y decirme verdades que a veces no quería escuchar.

Agradezco a Dios por cada una de sus bendiciones, por concederme una estupenda familia y unos grandiosos amigos, aprovecho para dar gracias a Fabio, Nicolás y Santiago, me han enseñado que no importa donde se viva, las costumbres y diferencias, la amistad es un tesoro que se debe valorar y conservar.

De manera especial le agradezco a nuestra asesora Nubia Soler, por su dedicación y apoyo cuando se presentaron dificultades, por sus palabras de ánimo cuando creímos no lo lograríamos y a la Universidad Pedagógica Nacional por brindarme la oportunidad de formarme como profesional.

Nicole Meliza Henao Mateus

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página II de 103**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Del problema de Apolonio a problemas de tangencia en otras secciones cónicas.
Autor(es)	Henao Mateus, Nicole Meliza; Rincón Galeano, Fabio Norberto.
Director	Soler Álvarez, María Nubia.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. Pág. 102
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	PRINCIPIO DE DUALIDAD, CÓNICA PUNTUAL, CÓNICA TANGENCIAL.

2. Descripción

Este trabajo de grado está dirigido a aquellos quienes estén interesados en indagar acerca de problemas de tangencia en secciones cónicas, ya que en este se expone una manera de trabajar problemas de tangencia en cónicas diferentes a la circunferencia, utilizando la Geometría Proyectiva como marco teórico, a partir de una previa exploración a los denominados "Los Diez Problemas de Apolonio", los cuales son el punto de partida para la enunciación del problema de investigación. Apolonio con su enunciado quiso encontrar una circunferencia tangente a tres objetos dados, de los cuales pueden ser puntos, rectas y circunferencias (pase por estos en caso de los puntos), en este trabajo se parte de esta idea de enunciar el problema, pero considerando encontrar no una circunferencia sino cualquier tipo de cónica, es decir, para cinco objetos dados, de los cuales pueden ser puntos, rectas y circunferencias, se debe encontrar la cónica que es tangente a estos (pase por estos en caso de los puntos), de esta manera se enunciaron veintiún casos que se desprenden de este enunciado, de los cuales se solucionaron seis, aquellos que no involucran a la circunferencia.

Esta propuesta se fundamenta en un marco de referencia de geometría proyectiva, en donde se encuentran las definiciones, lemas, teoremas y otras herramientas necesarias para la demostración y solución de los casos mencionados anteriormente.

3. Fuentes

[1] F. Ayres, *Teoría y problemas de geometría proyectiva,* Mexico: McGraw Hill, 1971.

[2] N. Henao and F. *Rincón, Problemas de tangencia en elipses y circunferencias.* (Documento no publicado)

[3] Mathwonders, *[materia] Cuaterna armónica*, [video] [video] Available at: https://www.youtube.com/watch?v=plNKIJU7Bl8 [Accessed 10 Oct. 2017], 2013.

[4] L. Ortega and T. Ortega, *Los diez problemas de Apolonio,* SUMA **59**, 2004.

[5] F. Tapias, *Apolonio, el geómetra de la antigüedad*, Apuntes de la historia de las matemáticas **19,** 2002.

4. Contenidos

Este documento contiene cinco apartados que orientan y sustentan el trabajo de investigación realizado, exponiendo de forma secuenciada el estudio y solución de los problemas abordados, a continuación se hace una breve descripción de cada apartado.

En el primer apartado se plantea el objetivo general y los objetivos específicos que orientan al desarrollo del trabajo realizado, allí se señalan precisamente los problemas a resolver y las fases que se siguieron para conseguirlo. En el segundo apartado se expone la construcción de un marco de conceptos preliminares, que contiene definiciones, lemas y teoremas de la geometría proyectiva, necesarios para la solución a los problemas en estudio, dichas soluciones se consignan en el tercer apartado junto con la prueba de los lemas y teoremas adicionales que se requirieron. Las conclusiones del trabajo se exponen en el cuarto apartado, donde además, se incluyen algunas reflexiones y proyecciones, relacionadas con los productos conseguidos y cómo estos aportaron a la formación de los autores como maestros de matemáticas, finalmente, en el último apartado se incluye un anexo que se considera, puede aportar al conocimiento de antecedentes del trabajo.

5. Metodología

En el documento se presenta inicialmente una descripción de dónde surge el interés por abordar problemas de tangencia en las secciones cónicas, luego, haciendo uso de datos históricos se presenta una justificación al trabajo, describiendo detalladamente la construcción del enunciado del problema general, una vez consolidado el enunciado se presenta como el objetivo general de la investigación. En el documento se consignan todos los conceptos preliminares que se requirieron para dar solución a algunos de los problemas en estudio, utilizando estos conceptos se construyen las pruebas de los lemas y teoremas

requeridos para sustentar el trabajo.
6. Conclusiones
A lo largo del documento se puede apreciar una forma detallada de mostrar las construcciones geométricas que orientan la solución de los problemas considerados en el objetivo general, así como su sustento teórico desde la geometría proyectiva, apoyándonos de un software de geometría dinámica (Geogebra), siendo esta una herramienta que permitió la identificación de algunas propiedades y posibilitó realizar las construcciones requeridas para un mejor entendimiento de los problemas. De acuerdo con lo anterior el desarrollo de este trabajo dio evidencia de una ruta conveniente para estudiar problemas de tangencia en cónicas diferentes a la circunferencia, por lo que se señala como una proyección del trabajo continuar estudiándolos hasta conseguir la solución de todos los casos que se desprenden. Se debe señalar que otra posible forma de estudiar estos problemas, es recurriendo a la geometría analítica puesto que en este documento se hace un tratamiento exclusivamente sintético. En general, se puede concluir que además de haber solucionado los problemas propuestos y de haber marcado un camino para este estudio, la realización de esta investigación aportó de manera significativa a la formación como maestros de matemáticas de los autores, debido a que se hizo un estudio arduo sobre la geometría proyectiva y se desarrollaron procesos matemáticos importantes en la exploración y posterior solución de los problemas estudiados.

Elaborado por:	Nicole Meliza Henao Mateus Fabio Norberto Rincón Galeano
Revisado por:	María Nubia Soler Álvarez

Fecha de elaboración del Resumen:	01	11	2017

CONTENIDO

FIGURAS

Introducción

En este trabajo se presenta una intención de generalizar un resultado de la geometría euclidiana, precisamente se trata de problemas de tangencia sobre la circunferencia, más precisamente aún se trata del llamado *Problema de Apolonio* y los diez casos que se desprenden de él, estos casos relacionan únicamente, puntos, rectas y circunferencias y pretenden encontrar una circunferencia tangente a dichos objetos, a partir de esta idea, se expone un posible camino para resolver problemas de tangencia, no encontrando una circunferencia, sino cualquier tipo de cónica, modificando el enunciado que describe el *Problema de Apolonio*, de tal manera que, en vez de considerar una circunferencia, se considere una cónica. Modificar el objeto circunferencia, por cónica, orienta a realizar otras modificaciones en el enunciado, como el número de objetos a considerar, esto con el ánimo de encontrar únicas soluciones a los problemas que surjan, también se requiere describir y listar los problemas que se desprenden del nuevo enunciado, aunque de estos solamente se presenta la solución de algunos de ellos, precisamente de aquellos en los que se pretende encontrar una cónica tangente a rectas y puntos dados, es decir, se consideran únicamente aquellos problemas que relacionan puntos y rectas solamente, sin embargo, este estudio se sale de la geometría euclidiana, pues las herramientas encontradas en la investigación se encuentran en la geometría proyectiva. En síntesis, el objeto de este trabajo es mostrar los resultados del inicio de un estudio de problemas de tangencia sobre cónicas diferentes a la circunferencia bajo el sistema axiomático de la geometría proyectiva, es decir, usando *perspectividades* y *proyectividades.*

En la primera parte del documento se presenta una justificación al trabajo como un interés particular de los autores, generado en el transcurso de una asignatura del pregrado, luego, se expone la problemática del estudio, allí se muestra una razón para estudiar problemas de tangencia en cónicas desde datos históricos sobre el trabajo de Apolonio, también se enuncia explícitamente el problema a trabajar, con los casos que se desprenden de él; una vez se ha precisado el problema, este se menciona en forma de objetivo, luego, se presentan todos los conceptos preliminares de geometría proyectiva que fueron requisito para estudiar el problema propuesto, estos conceptos fueron tomados en su mayoría del libro *Teoría y Problemas de Geometría Proyectiva* [1], sin embargo, algunas definiciones fueron propuestas por los autores de este trabajo. Algunas demostraciones de teoremas y lemas que allí se proponen, se encuentran en el capítulo siguiente, puesto que se consideran como parte de los resultados del estudio, lo que quiere decir que el siguiente apartado del documento se dispone para presentar los resultados, de forma secuenciada, con ilustraciones que ayudan a comprender las construcciones y justificaciones de los problemas, enseguida, se presentan las conclusiones y las referencias y finalmente se exponen algunos anexos con la intención de apoyar las referencias que se tienen del problema y la justificación que se le da.

Se espera que el trabajo ilustre una forma de abordar problemas de tangencia sobre cualquier cónica, a partir de los problemas que en este se resuelven y que además deje en evidencia la aplicación que tiene la geometría proyectiva en el estudio de problemas de tangencia.

Justificación

Durante el curso de geometría analítica que realizamos siendo estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se desarrolló un trabajo con el fin de cumplir con un producto esperado establecido en el programa, este consistía en abordar un tema referente a la geometría analítica, relacionado con los elementos adoptados durante el curso. El trabajo realizado consistió en exponer algunos de los diez problemas de Apolonio, de forma sintética y analítica y resolver de forma análoga estos mismos problemas de tangencia, pero ya no en la circunferencia sino en cónicas diferentes, particularmente en la elipse. Para dar inicio al trabajo mencionado consultamos a Francisco Tapias [5], este autor menciona que Apolonio fue considerado el gran geómetra de la antigüedad por sus grandes aportes en esta área, aunque hizo varias obras importantes, no se tiene mucha información de ellas. Algunas de esas obras son "Cónicas", "Lugares Planos" y "Tangencias", en esta última, Apolonio expone un problema el cual da origen a los conocidos y ya mencionados "Los diez problemas de Apolonio". Luego, se decidió cambiar la circunferencia por la elipse y estudiar las soluciones a los problemas que se generan con este cambio.

Por último y como resultado de este cambio, con ayuda de un software de geometría dinámica, se resolvieron los siguientes problemas:

- Dada una elipse hallar su centro.
- Dada una elipse hallar sus ejes.
- Dada una elipse hallar sus focos.
- Dada una elipse y un punto sobre ella encontrar la recta tangente a la elipse que pasa por el punto.
- Dada una elipse y un punto que no pertenece a ella, encontrar las rectas tangentes a la elipse que pasen por el punto dado.
- Hallar una elipse tangente a tres rectas dadas.

Para cada uno de estos problemas se realizó la respectiva construcción sintética y analítica, todo esto apoyado en Geogebra. Posterior a esto se consolidó un documento con el contenido del trabajo [2]. De acuerdo con el desarrollo de dicho trabajo, nos dimos cuenta que, al cambiar en el enunciado del problema de Apolonio, uno de los objetos que se consideraron, se señaló un camino para el estudio de problemas de tangencia en cónicas diferentes a la circunferencia. Además, el estudio de dichos problemas (los diez problemas de Apolonio y algunos problemas de tangencia en la elipse) contribuyó de manera significativa a nuestra formación como docentes de matemáticas, especialmente en lo disciplinar. Por esta razón consideramos que al estudiar a profundidad los problemas anteriormente descritos, continuaremos favoreciendo, en gran medida, nuestra formación como docentes y como aprendices de las matemáticas. Una manera a través de la cual vimos que podíamos continuar con el desarrollo de este trabajo fue realizando una monografía en la que se consoliden y amplíen los resultados obtenidos inicialmente. Concretamente el trabajo de grado que se pretende realizar consiste en resolver los problemas de tangencia del libro de Apolonio sustituyendo la circunferencia por la elipse o por cualquier otra cónica.

Problemática

¿Por qué problemas de tangencias en cónicas?

En la actualidad se conocen métodos sintéticos y algebraicos para solucionar problemas de tangencia en la circunferencia, precisamente, aquellos que relacionan puntos, rectas y circunferencias, este tipo de problemas se han estudiado desde la época Helenística, 300 A.C. Los primeros estudios acerca del tema se le atribuyen a uno de los grandes matemáticos de la época, Apolonio, quien escribió obras de gran importancia, entre ellas, *Tangencias*, que se hizo famosa por contener el denominado Problema de Apolonio, (Tapia, 2002) que será un punto de referencia importante del trabajo que aquí se expone.

El interés por abordar problemas de tangencia, como se mencionó anteriormente, surgió a partir del trabajo realizado en el curso de geometría analítica, donde se estudiaron algunos problemas de tangencia en la elipse, de forma análoga a problemas de tangencia en la circunferencia, con el ánimo de encontrar métodos analíticos y sintéticos para resolver problemas de tangencia sobre la elipse, que permitan acercarse a problemas de tangencia similares a los que se desprenden del Problema de Apolonio, pero considerando los objetos: recta, punto y elipse; haciendo uso de las propiedades que se conocían de la elipse en la geometría euclidiana, explorando inicialmente las soluciones sintéticas, para extraer de estas las soluciones analíticas.

En la revisión de los casos del Problema de Apolonio se encontró que en su solución se hace uso de algunos problemas preliminares de tangencia sobre la circunferencia, por ejemplo, encontrar una recta tangente a una circunferencia por un punto que pertenece a ella y por un punto externo, en consecuencia, para el desarrollo del trabajo se consideró necesario resolver el problema análogo sobre la elipse, que se enuncia de la siguiente manera, encontrar una recta tangente a una elipse por un punto que pertenece a ella y por un punto externo, además se estudiaron otros problemas preliminares, tales como hallar los focos y el centro de una elipse, con la idea que la solución a estos problemas ampliaría el conjunto de herramientas para solucionar problemas de tangencia más complejos, como los que serían análogos a los casos del Problema de Apolonio.

Debido a que la exploración de los problemas preliminares mencionados anteriormente no proporcionaron herramientas suficientes para avanzar a la solución de problemas más complejos, surgió la necesidad de consultar documentos que hicieran referencia al tema, es decir al estudio de problemas de tangencia en cónicas diferentes a la circunferencia, sin poder encontrar mayor información al respecto, a excepción de algunos datos históricos como que Apolonio fue pionero en el estudio de estos problemas; sin embargo, en el estudio que realizó en *Tangencias* no consideró otras cónicas además de la circunferencia, resolviendo problemas de tangencia que relacionan rectas, puntos y circunferencias, la resolución de estos problemas mostró un posible camino para abordar problemas de tangencia en otras cónicas, inicialmente considerando la posibilidad de cambiar el objeto circunferencia por elipse en el Problema de Apolonio.

Lo que se consiguió al consultar algunos antecedentes de problemas de tangencia en las cónicas, particularmente en la circunferencia, fue una idea para enunciar de forma más precisa el problema que se quiere abordar y puesto que se trata de resolver problemas de tangencia considerando los objetos: punto, recta y elipse, se decide enunciarlo de forma análoga a cómo lo hace Apolonio, es decir modificando el enunciado del Problema de Apolonio, el cual se expone de la siguiente manera:

Dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser, un punto, una recta o una circunferencia, se pide hallar una circunferencia que sea tangente a ellos (pase por ellos en caso se los puntos).

El enunciado anterior es el punto de partida de este trabajo, siguiendo la idea inicial de sustituir el objeto circunferencia por elipse, se piensa modificar el enunciado adecuándolo según las implicaciones que tenga realizar dicho cambio.

Modificaciones al enunciado del Problema de Apolonio

En consideración al enunciado del Problema de Apolonio a modificar, es necesario hacer algunas consideraciones con respecto a las implicaciones que trae cambiar el objeto geométrico circunferencia por elipse, para ello es necesario considerar que el problema de Apolonio dio lugar a diez posibles casos [4], que se exponen a continuación (en el anexo 1 se encuentra una solución a algunos estos problemas):

1. Circunferencia que pase por tres puntos dados (PPP).
2. Circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una recta dada (PPR).
3. Circunferencia que pase por un punto dado y es tangente a dos rectas dadas (PRR).
4. Circunferencia tangente a tres rectas dadas (RRR).
5. Circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una circunferencia dada (PPC).
6. Circunferencia que para por un punto dado y es tangente a dos circunferencias dada (PCC).
7. Circunferencia que es tangente a dos rectas y a una circunferencia dada. (RRC).
8. Circunferencia que es tangente a una recta y a dos circunferencias dadas (RCC).
9. Circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta y a una circunferencia dada. (PRC).
10. Circunferencia que es tangente a tres circunferencias dadas (CCC).

El primer aspecto a considerar es el número de objetos geométricos que intervienen en cada problema, en los diez casos aparecen tres objetos, esto se relaciona con el número de objetos que definen una circunferencia, en particular el primer caso, se consideran tres puntos, porque siempre es posible construir una circunferencia que los contenga y esta es única, esto obliga a pensar en el mínimo de puntos que determinan una única elipse; una primera idea surgió con el uso del software Geogebra, que ofrece una herramienta que permite construir una cónica determinada por cinco puntos, posteriormente se recurre a la Geometría Proyectiva, encontrando la construcción de una "Cónica Puntual", que desde su definición se puede demostrar que está determinada por cinco puntos, tres a tres no colineales y es única, de esta manera de halla el mínimo de puntos que definen un única elipse, pero la construcción de cónica puntual al igual que la herramienta de Geogebra, hacen referencia a cualquier tipo de cónica (elipse, hipérbola y parábola), como la intención inicial es encontrar una elipse que contenga a cinco puntos dados, es necesario caracterizar la posición de los cinco puntos para asegurar que la cónica que los contiene sea una elipse, el estudio de esta caracterización no fue exitoso, por tal motivo se extiende el estudio a resolver problemas de tangencia en las diferentes cónicas, es decir, cambiar el objeto geométrico circunferencia en el Problema de Apolonio, por cónica.

Encontrando que son cinco puntos los que definen una única cónica, se determina que los elementos a considerar en cada problema deben ser cinco, puesto que cada objeto diferente de un punto debe contener uno de los cinco puntos que definen la cónica (punto de tangencia). Se debe continuar señalando los casos se surgen del problema con las modificaciones ya descritas, para ello se presenta el enunciado se surge con las consideraciones mencionadas.

Dados cinco elementos, cada uno de los cuales puede ser, un punto, una recta o una circunferencia, se pide hallar una cónica que sea tangente a ellos (pase por ellos en caso de los puntos).

Nótese que el objeto geométrico modificado es aquel que se pretende encontrar, es decir se dejan los tres objetos que Apolonio consideró como dados (punto, recta y circunferencia). A pesar de que deben ser cinco elementos los que definen la cónica, de estos sólo pueden ser rectas, puntos o circunferencias; con estas últimas precisiones ya se pueden listar los casos que surgen:

1. Cónica que pase por cinco puntos dados (PPPPP).
2. Cónica tangente a una recta dada que pase por cuatro puntos dados (PPPPR).
3. Cónica tangente a dos rectas dadas que pase por tres puntos dados (PPPRR).
4. Cónica tangente a tres rectas dadas que pase por dos puntos dados (PPRRR).
5. Cónica tangente a cuatro rectas dadas que pase por un punto dado (PRRRR).
6. Cónica tangente a cinco rectas dadas (RRRRR).
7. Cónica tangente a una circunferencia dada que pase por cuadro puntos dados (PPPPC).
8. Cónica tangente a dos circunferencias dadas que pase por tres puntos dados (PPPCC).
9. Cónica tangente a tres circunferencias dadas que pase por dos puntos dados (PPCCC).
10. Cónica tangente a cuatro circunferencias dadas que pase por un punto dado (PCCCC).
11. Cónica tangente a cuatro rectas y una circunferencia dadas (RRRRC).
12. Cónica tangente a tres rectas y dos circunferencias dadas (RRRCC).
13. Cónica tangente a dos rectas y tres circunferencias dadas (RRCCC).
14. Cónica tangente a una recta y cuatro circunferencias dadas (RCCCC).
15. Cónica tangente a una recta y una circunferencia dadas que pase por tres puntos dados (PPPRC).
16. Cónica tangente a dos rectas y una circunferencia dadas que pase por dos puntos dados (PPRRC).

17. Cónica tangente a una recta y dos circunferencias dadas que pase por dos puntos dados (PPRCC).
18. Cónica tangente a tres rectas y una circunferencia dadas que pase por un punto dado (PRRRC).
19. Cónica tangente a dos rectas y dos circunferencias dadas que pase por un punto dado (PRRCC).
20. Cónica tangente a una recta y tres circunferencias dadas que pase por un punto dado (PRCCC).
21. Cónica tangente a cinco circunferencias dadas (CCCCC).

En este trabajo se van a abordar los problemas del uno al seis, es decir, los problemas que involucran únicamente puntos y rectas, esto debido a que en la literatura consultada, particularmente lo relacionado con la Geometría Proyectiva, se ha encontrado una manera de hallar una cónica que pasa por cinco puntos dados "cónica puntual" y por el Principio de Dualidad[1], una cónica tangente a cinco rectas dadas "cónica tangencial", los cuales son el punto de partida para buscar la solución a los demás casos, por esta razón se estudiarán los casos desprendidos del problema de Apolonio que involucran únicamente puntos y rectas.

[1] El principio de dualidad aplicado a la geometría proyectiva cobra relevancia en este trabajo, puesto que, para los teoremas y enunciados que relacionen únicamente puntos y rectas se puede encontrar su dual, por esta razón se definirá de forma preliminar el principio de dualidad en un capitulo dispuesto para todos los conceptos preliminares, que se consideran necesarios para el estudio a realizar.

Objetivos

Ya señalado el enunciado del problema a estudiar y los casos desprendidos de este que se pretenden abordar, se pueden enunciar de manera precisa los objetivos de este trabajo.

Objetivo general

Estudiar y solucionar los siguientes problemas:

1. Cónica que pase por cinco puntos dados (PPPPP).
2. Cónica tangente a una recta dada que pase por cuatro puntos dados (PPPPR).
3. Cónica tangente a dos rectas dadas que pase por tres puntos dados (PPPRR).
4. Cónica tangente a tres rectas dadas que pase por dos puntos dados (PPRRR).
5. Cónica tangente a cuatro rectas dadas que pase por un punto dado (PRRRR).
6. Cónica tangente a cinco rectas dadas (RRRRR).

Tomando como referencia el enunciado del Problema de Apolonio, modificando el objeto matemático circunferencia por cónica.

Objetivos específicos.

- Consultar material bibliográfico, con la intención de buscar elementos teóricos o conceptuales que aporten a la búsqueda de soluciones a los problemas enunciados.
- Utilizar un software de geometría dinámica como herramienta de exploración para identificar propiedades que contribuyan a la solución de problemas de tangencia.
- Estudiar fundamentos de la Geometría Proyectiva e identificar los conceptos necesarios para estudiar problemas de tangencias en las cónicas.
- Exponer la solución a los problemas considerados de manera argumentada, bajo los conceptos estudiados de Geometría Proyectiva y Geometría Euclidiana.

Conceptos preliminares (Geometría Proyectiva)

En este capítulo se presentan conceptos de Geometría Proyectiva que permitirán comprender las demostraciones de los teoremas demostrados y que aportan a la solución de los problemas de interés de este trabajo de grado.

Definición de Puntos impropios

Se le denomina punto impropio al punto de intersección de dos rectas paralelas.

Definición de Plano proyectivo

Si a los puntos de un plano π se le añaden los puntos impropios, se tiene el plano proyectivo.

Definición de Haz de puntos

La totalidad de puntos sobre una de las rectas del plano proyectivo, la llamaremos un haz de puntos (extensión de puntos o fila de puntos). El haz de puntos sobre la recta p será denotado por $p(A, B, C, D, \dots)$ donde $A, B, C, D, \dots$, son puntos distintos sobre p. Los puntos $A, B, C, D, \dots$, los llamaremos elementos y la recta p se llama base del haz. (Ver Figura 1).

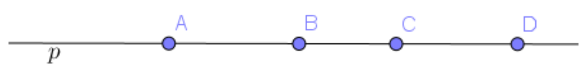

Figura 1. Haz de puntos.

Definición de Haz de rectas

La totalidad de rectas sobre unos de los puntos del plano, la llamaremos un haz de rectas (Haz en un plano). El haz de rectas sobre el punto P, se denota como $P(a, b, c, d, \dots)$ donde $a, b, c, d, \dots$, son rectas distintas sobre P. Las rectas $a, b, c, d, \dots$, se llaman elementos y el punto P es llamado centro del haz. (Ver Figura 2).

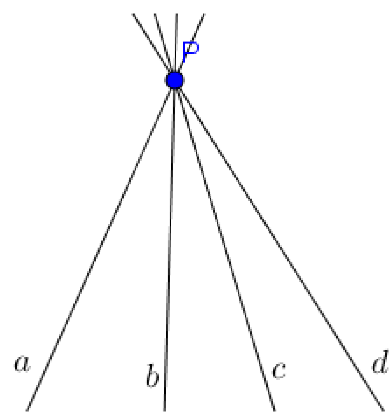

Figura 2. Haz de rectas.

Teorema 1. Teorema de Pappus

En un plano proyectivo sean A_1, A_2, A_3 puntos distintos sobre una recta r y B_1, B_2, B_3 puntos distintos sobre otra recta s; entonces los puntos $C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2, C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1, C_3 = A_1B_2 \cap A_3B_1$, son colineales. (Ver Figura 3).

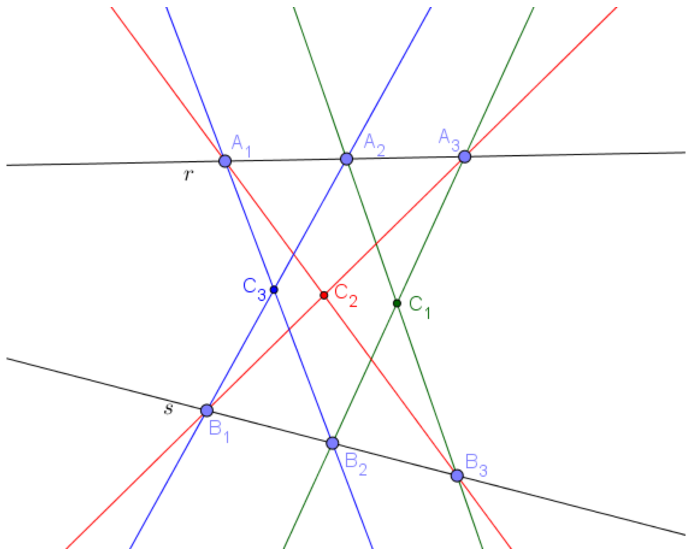

Figura 3. Teorema de Pappus.

Principio de dualidad

Dos teoremas o configuraciones son llamadas duales si una puede ser obtenida de la otra reemplazando cada concepto y operador por su concepto y operador dual.

Dicho de otra manera, el principio de dualidad, hace que a cada proposición le corresponda otra, al intercambiar ciertas palabras claves y otros cambios en la notación y lenguaje que hace que la proposición tenga sentido. Un ejemplo particular del principio de dualidad se tiene considerando un plano proyectivo para cuyos puntos y líneas se asegure que:

- Todo par de puntos distintos determinen una y solo una recta.
- Todo par de rectas distintas determinan uno y sólo un punto.

Una de las proposiciones es obtenida de la otra, por el simple cambio de las palabras "punto" y "recta".

Teorema 2. Teorema de Pappus dual

En un plano proyectivo, sean a_1, a_2, a_3 rectas distintas sobre un punto R y $b_{1,}. b_2, b_3$ rectas distintas sobre otro punto S; entonces las líneas $c_1 = \ a_2 \cap b_3 \ (a_3 \cap b_2), c_2 = (a_1 \cap b_3)(a_3 \cap b_1), c_3 = (a_1 \cap b_2)(a_2 \cap b_1)$ son concurrentes, es decir, tienen un punto común de intersección.

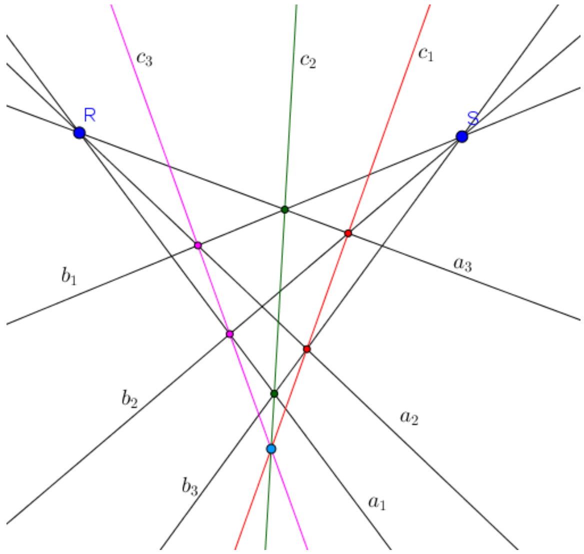

Figura 4. Teorema de Pappus dual.

Definición de Homólogos

Entre los elementos de dos haces hay una correspondencia uno a uno, si existe una regla que asocia a cada elemento de un haz (el primero), un único elemento del otro (el segundo), y recíprocamente, asocia cada elemento del segundo un único elemento del primero. En una correspondencia de este tipo entre dos haces, a cada elemento y su asociado se les llama elementos correspondientes (homólogos).

Definición de Perspectividad

Dados dos haces (de puntos o rectas), se dice que son *perspectivos* si y solo si, existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de los haces y los elementos determinados por los correspondientes, son elementos de un mismo haz. Por ejemplo, en la Figura 5 se puede identificar una perspectividad entre los haces $P(a,b,c,d)$ y $p(A,B,C,D)$, (que se notará $P(a,b,c,d) \approx p(A,B,C,D)$), haciendo corresponder a cada elemento del haz de rectas el punto de intersección con la base del haz de puntos, esta correspondencia es uno a uno y los puntos hacen parte de un mismo haz. También se puede apreciar la perspectividad $p'(A_1,B_1,C_1,D_1) \approx p(A,B,C,D)$, haciendo corresponder el punto A con el punto A_1, B con B_1 y así sucesivamente, además las rectas que se determinan, hacen parte del mismo haz sobre P. En la Figura 5; se escribe la perspectividad de los haces de puntos $p'\ A_1,B_1,C_1,D_1\ ,p(A,B,C,D)$, desde el punto P de la siguiente manera $p'\ A_1,B_1,C_1,D_1\ \frac{P}{\approx}\ p(A,B,C,D)$.

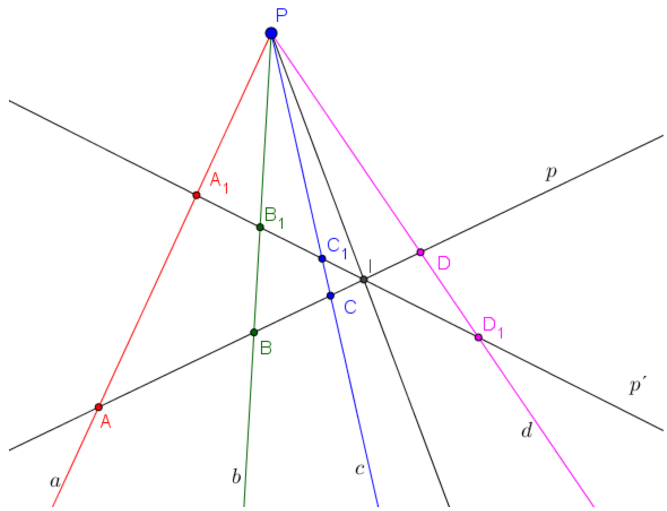

Figura 5. Ejemplo de perspectividad

En el siguiente ejemplo (Figura 6) se tiene que los haces de rectas son perspectivos

$$P(a, b, c, d, \dots) \approx P_1\ \ a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$$

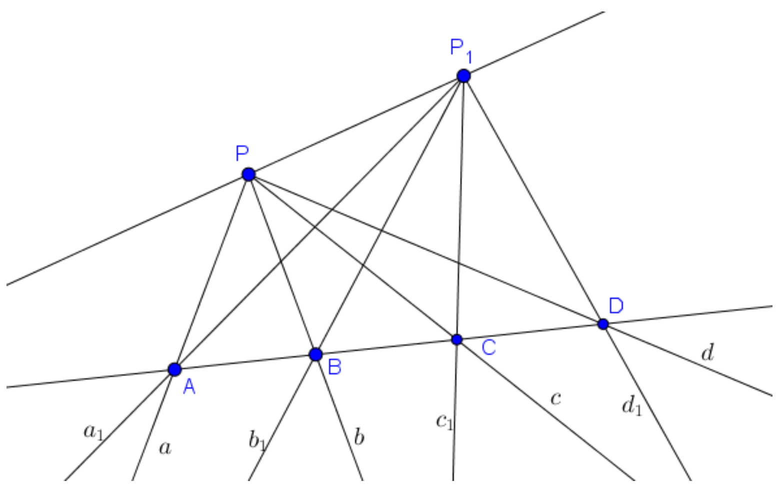

Figura 6 Ejemplo haces de rectas perspectivos

Definición de Perspectividad Elemental

Dado un haz de rectas $P(a, b, c, d \dots)$ y una recta a' que no pertenezca a él, la perspectividad $P\ \ a, b, c, d \dots\ \ \approx p(A, B, C, D \dots)$, donde $A = a \cap a'$, $B = b \cap a'$, $C = c \cap a'$ y así sucesivamente, se denomina *Perspectividad Elemental* (Ver Figura 5).

Definición de Proyectividad

Una correspondencia uno a uno entre dos haces (de puntos o de rectas), resultante de una sucesión de perspectividades (no todas elementales), se denomina *Proyectividad*, para un ejemplo se muestra la Figura 7, donde los haces $p(A, B, C, D)$ y $r(A_2, B_2, C_2, D_2)$ son proyectivos (que se notará $p\ \ A, B, C, D\ \sim r(A_2, B_2, C_2, D_2)$), debido a la sucesión

$p(A,B,C,D) \approx q(A_1,B_1,C_1,D_1) \approx r(A_2,B_2,C_2,D_2)$), estas perspectividades se obtienen por la definición de perspectividad.

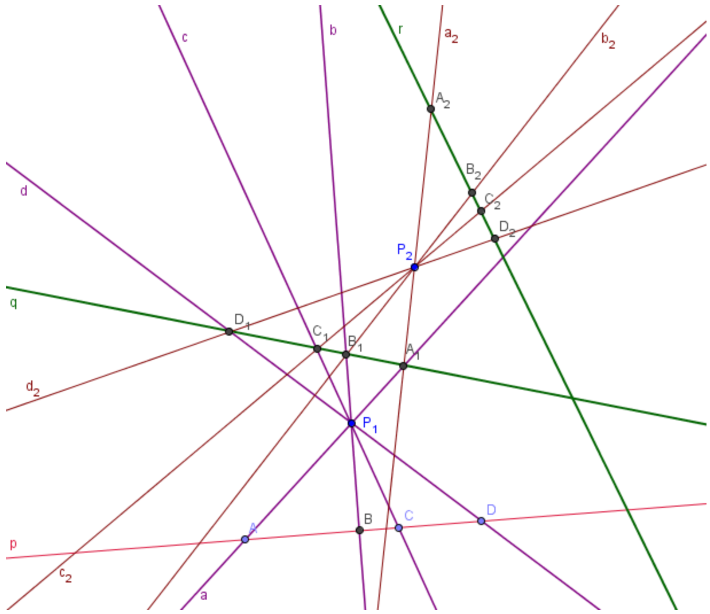

Figura 7 Ejemplo de Proyectividad.

Nótese en Figura 8 que la correspondencia resultante no es una perspectividad por definición.

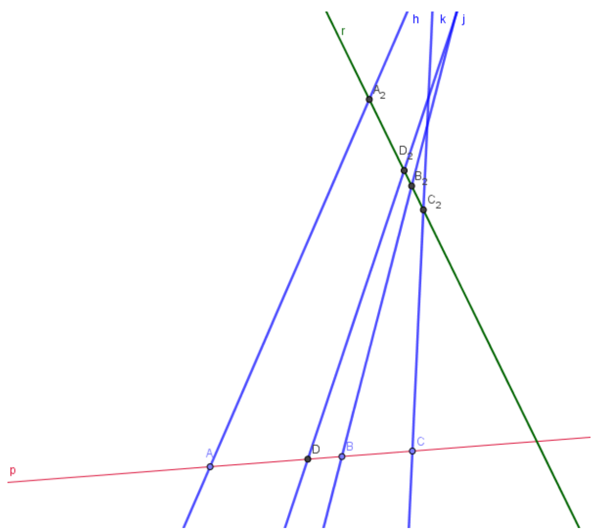

Figura 8. Ejemplo de dos haces de puntos proyectivos.

Ejemplo de dos haces proyectivos de rectas

Para un ejemplo de dos haces de rectas proyectivos, se muestra la Figura 9, donde los haces $P(a,b,c,d)$ y $R(a_2,b_2,c_2,d_2)$, son proyectivos ($P\ a,b,c,d\ \sim R(a_2,b_2,c_2,d_2)$), debido a la sucesión $P(a,b,c,d) \approx Q(a_1,b_1,c_1,d_1) \approx R(a_2,b_2,c_2,d_2)$).

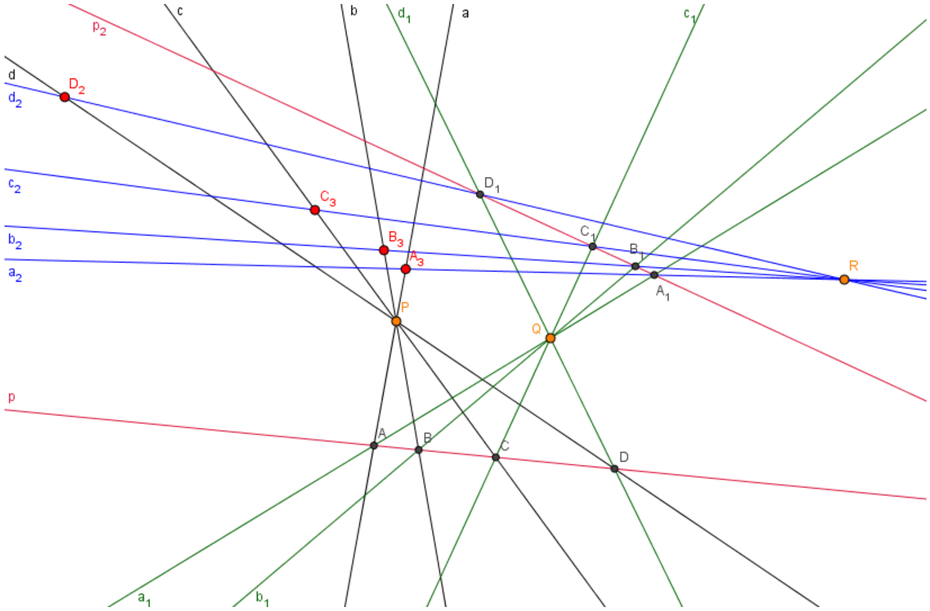

Figura 9. Ejemplo de dos haces proyectivos de rectas.

Ejemplo de una haz de puntos y un haz de rectas proyectivos

Para un ejemplo una haz de rectas proyectivo a un haz de puntos, se muestra la Figura 10, donde los haces $p(A, B, C, D)$ y $P_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$, son proyectivos $(p\ \ A, B, C, D\ \sim P_2(a_2, b_2, c_2, d_2))$, debido a la sucesión $p(A, B, C, D) \approx p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \approx p_2(A_2, B_2, C_2, D_2) \approx P_2(a_2, b_2, c_2, d_2))$.

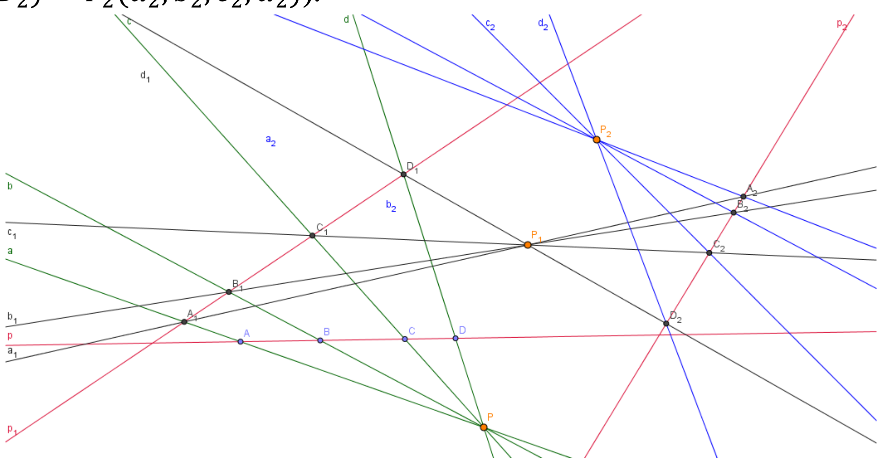

Figura 10. Ejemplo de un haz de retas proyectivo a un haz de puntos.

Definición de Configuración Plana

Una configuración plana en el espacio proyectivo se define como los a_{11} puntos y a_{22} rectas, tales que sobre cada uno de los puntos están a_{12} rectas y sobre cada una de las rectas están a_{21} de los puntos. Estas configuraciones se representan por la siguiente matriz $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$. Por ejemplo $\begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}$ (Ver Figura 11)

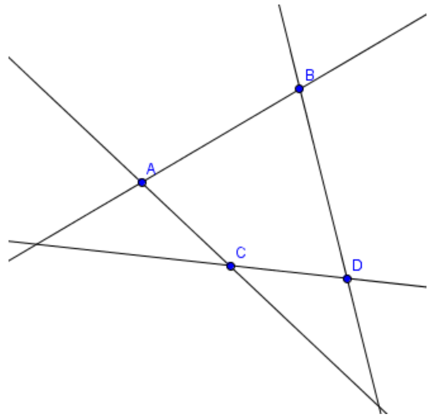

Figura 11. Configuración plana.

Definición de $\boldsymbol{n-punto}$ completo y $\boldsymbol{n-recta}$ completa

El *n-punto completo* consiste de n puntos, no colineales tres a tres, y las $\frac{1}{2}n(n-1)$ rectas determinadas por ellos. (Ver Figura 12)

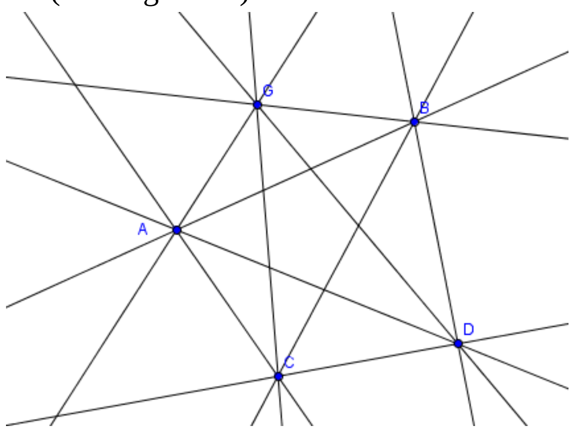

Figura 12. 5-punto completo.

La *n-recta completa* que consiste de *n* rectas, tres a tres no concurrentes y los $\frac{1}{2}n(n-1)$ puntos determinados por ellas. (Ver Figura 13)

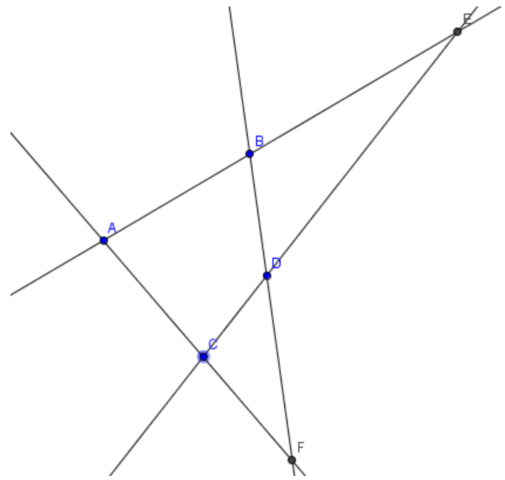

Figura 13. 4-recta completa

Definición de Cuadrángulo completo

El cuadrángulo completo se define como el 4-*punto completo.* Los cuatros puntos dados se denominan vértices y las seis rectas lados del cuadrángulo completo; los dos lados que no se intersequen en el mismo vértice, se denominan lados opuestos del cuadrángulo completo. (Ver Figura 14)

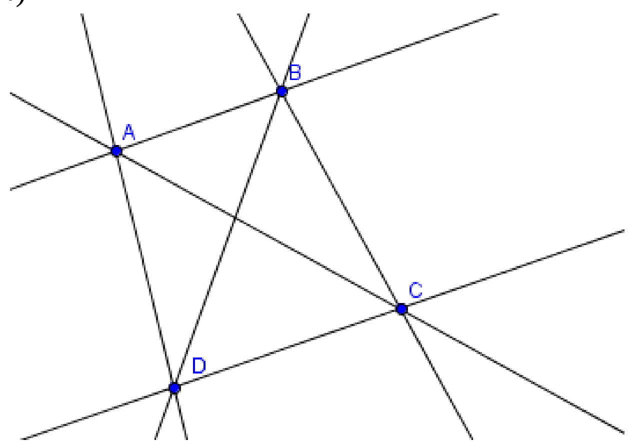

Figura 14. Cuadrángulo completo.

Definición de cuadrilátero completo

El cuadrilátero completo se define como la 4-*recta completa*. Las cuatro rectas se denominan lados del cuadrilátero y los seis puntos, vértices del cuadrilátero; dos vértices que no pertenecen al mismo lado son llamados vértices opuestos de cuadrilátero completo. (Ver Figura 13).

Definición de Conjunto Armónico de puntos

Dados cuatro puntos colineales A, B, C y D, se dice que forman un *conjunto armónico de puntos* si existe un cuadrángulo completo, de tal manera que dos de sus lados opuestos pasan por el punto A, otros dos lados opuestos pasan por B y el tercer par de lados opuestos pasan por D y E respectivamente. (Ver Figura 15)

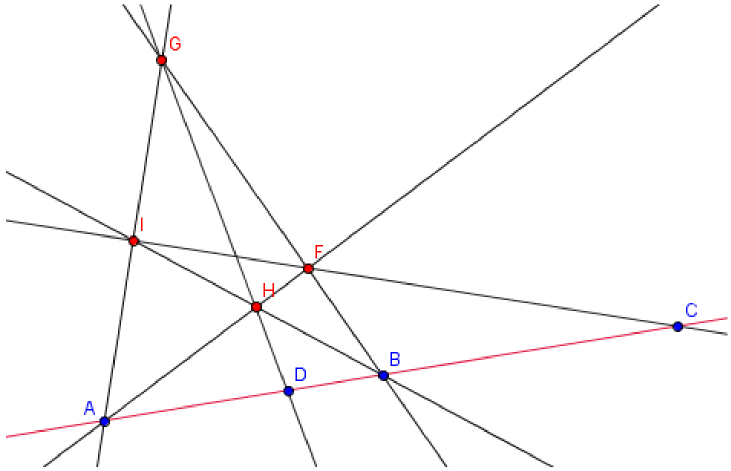

Figura 15. D es el conjugado armónico de E, con respecto a B y A.

Definición de Conjunto Armónico de rectas

Dadas cuatro rectas concurrentes a, b, c y d, se dice que forman un *conjunto armónico de rectas,* si existe un cuadrilátero completo, de tal manera que dos de sus vértices opuestos están en la recta a, otros dos vértices opuestos están en la recta b y el tercer par de vértices opuestos están en las retas d y c respectivamente. En donde d es el conjugado armónico de c con respecto a a y b (Ver Figura 16)

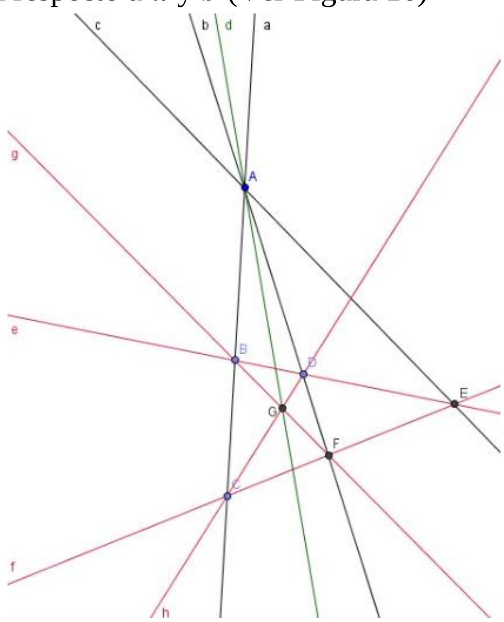

Figura 16. La recta d es el conjugado armónico de la recta c respecto a las rectas a y b.

Definición de Cónica (Steiner)

El lugar Geométrico de los puntos de intersección de las rectas homólogas de dos haces proyectivos de rectas en el plano, se denomina cónica, a esta cónica se le conoce como Cónica Puntual.

Definición de Cónica tangencial

El lugar geométrico de las rectas determinadas por los puntos homólogos de dos haces proyectivos de puntos en el plano, se denomina cónica tangencial.

Las demostraciones de los teoremas 3, 4, 5 y 6, que se enuncian a continuación, se van a presentar en el capítulo de resultados.

Teorema 3. Existencia de la Cónica Puntual

Una cónica puntual existe.

Teorema 4. Existencia de la Cónica Tangencial

Una cónica tangencial existe.

Teorema 5. Centros de haces proyectivos

Dos puntos cualesquiera distintos, que pertenecen a una cónica, pueden ser utilizados como centros de dos haces proyectivos que la generan.

Teorema 6. Bases de haces proyectivos

Dos rectas cualesquiera distintas, tangentes a una cónica, pueden ser utilizadas como bases de dos haces proyectivos que la generan.

Teorema 7. Existencia del conjugado armónico de puntos

Dados tres puntos A, B y C sobre una recta a, existe el punto D, tal que D es el conjugado armónico de C con respecto a A y B.

Prueba.

Dados tres puntos A, B y C sobre una recta a, Se construyen las rectas b, c y d, tal que $A \in b$, $A \in c$ y $B \in d$, luego se encuentra el punto $E = d \cap b$, ahora se traza la recta $e = CE$, se encuentra el punto $F = e \cap c$, se traza la recta $f = FB$ y se hallan los puntos $G = f \cap b$ y $H = d \cap c$; Finalmente se construye la recta $g = GH$. Observe que los puntos H, F, G y E y las rectas que determinan conforman un cuadrángulo completo, donde b y c son lados opuestos que se intersecan en A, d y f son lados opuestos que se intersecan en B y el otro par de lados opuestos son e y g, donde e pasa por C, de esta manera, el punto D, determinado por la intersección entre a y g, es el conjugado armónico de C con respecto a A y B por definición de conjunto armónico de puntos, se ha mostrado que se puede encontrar un conjugado armónico. En la Figura 17 los puntos A, B, C y D sobre la recta a forman un conjunto armónico de puntos.

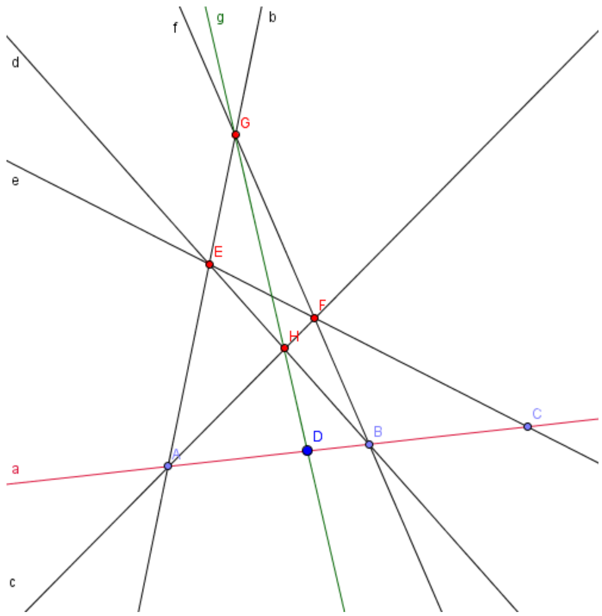

Figura 17. Encontrar el conjugado armónico de un punto.

Teorema 8. Existencia del conjugado armónico de rectas

Dadas tres rectas a, b y c concurrentes en un punto A, existe la recta d, tal que d es el conjugado armónico de c con respecto a a y b.

Prueba.

Dadas tres rectas a, b y c concurrentes en un punto A, Se construyen los puntos B, C y D tal que $B \in a$, $C \in a$; y $D \in b$, luego se encuentra la recta $e = BD$, ahora se encuentra el punto $E = c \cap e$, se encuentra la recta $f = EC$, se halla el punto $F = f \cap b$ y se trazan las rectas $g = FB$ y $h = DC$; Finalmente se construye el punto $G = g \cap h$. Observe en la Figura 18 que las rectas h, f, g y e y los puntos que determinan conforman un cuadrilátero completo, donde B y C son vértices opuestos que están sobre a, D y F son vértices opuestos que están sobre b y el otro par de vértices opuestos son E y G, donde E está sobre c, de esta manera, la recta d, determinada por los puntos A y G, es el conjugado armónico de c con respecto a a y b por Definición de Conjunto Armónico de rectas. Se ha mostrado que se puede encontrar un conjugado armónico.

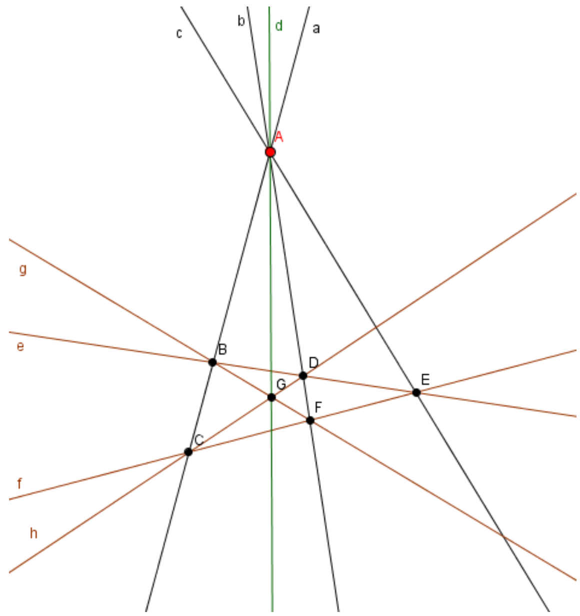

Figura 18. Hallar conjugado armónico de una recta.

Teorema 9. Unicidad del conjugado armónico

El conjugado armónico de un punto o una reta es único. La demostración de este teorema no se va a presentar en este documento debido a que resulta bastante elaborada y puede ocupar demasiado espacio en el texto, sin embargo, si el lector quiere consultarla la puede encontrar en el video "[materia] Cuaterna armónica" [3].

Teorema 10. Conjugado armónico de una recta a partir de un conjunto armónico de puntos

Dado un conjunto armónico (A, B, C, D), donde D es el conjugado armónico de D respecto a A y B y un punto P que no pertenece a la recta que los contiene, entonces el conjunto de rectas $(AP, BP, CP, DP,)$ es también es un conjunto armónico, donde DP es el conjugado armónico de CP respecto a AP y BP

Prueba:

Sea A, B, C, D , un conjunto armónico sobre una recta p, donde D es el conjugado armónico de C respecto a A y B, Sea P un punto que no pertenece a la recta p, se construyen las rectas $a = AP$, $b = BP$, $c = CP$, $d = DP$ y el punto E sobre la recta a, luego las retas $e = BE$ y $f = CE$ y el punto de intersección $F = f \cap b$; finalmente se traza la recta $g = FA$, entonces las rectas d, e y g, deben concurrir en un punto G, puesto que por ser (A, B, C, D) un conjunto armónico, existe el cuadrilátero completo determinado por las rectas $a, b, d, e, f,$ y g, como se puede notar en la Figura 19.

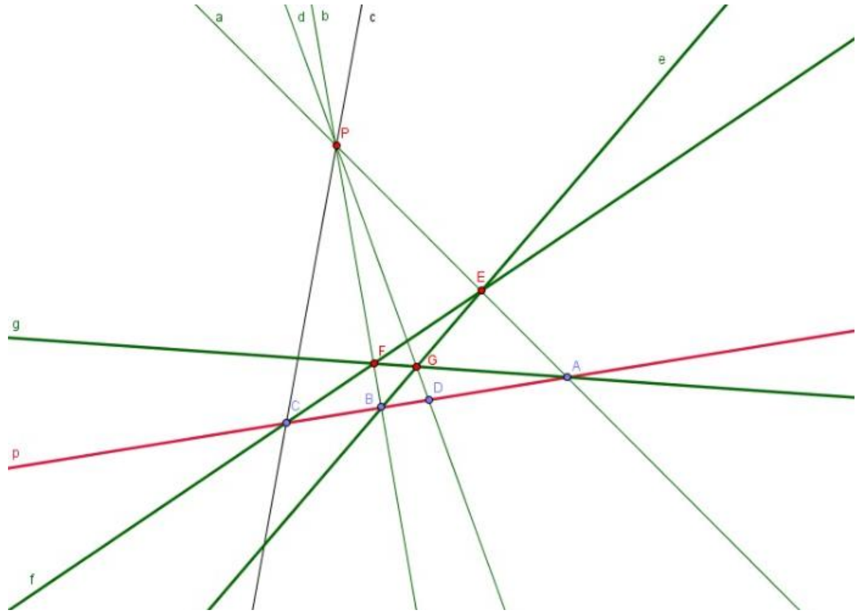

Figura 19 Conjunto armónico de rectas de un conjunto armónico de punto.

Ahora se consideran las rectas p, e, f y g, que son parte de un cuadrilátero completo, donde E y A es un par de vértices opuestos que están sobre a, F y B es un par de vértices opuestos que están sobre b y C y D es un par de vértices opuestos que están sobre c y d respectivamente, así el conjunto de rectas (a, b, c, d) es un conjunto armónico, donde d es el conjugado armónico de c respecto a a y b, por Definición de Conjunto Armónico de rectas.

Teorema 11. Conjugado armónico de un punto a partir de un conjunto armónico de rectas

Dado un conjunto armónico (a, b, c, d), sobre el punto E, donde d es el conjugado armónico de c respecto a a y b y una recta p que no contiene al punto E, entonces el conjunto de puntos $(A = a \cap p, B = b \cap p, C = c \cap p, D = d \cap p)$ es también es un conjunto armónico, donde D es el conjugado armónico de C respecto a A y B.

Prueba:

Sea a, b, c, d , un conjunto armónico sobre un punto P, donde la recta d es el conjugado armónico de c respecto a a y b, sea p una recta que no contenga al punto P, se construyen los puntos $A = a \cap p$, $B = b \cap p$, $C = c \cap p$, $D = d \cap p$ y la recta e que pase por el punto A, luego los puntos $E = b \cap e$ y $F = c \cap e$ y la recta $f = FB$; finalmente se crea el punto $G = a \cap f$, entonces los puntos D, F y G, deben ser colineales en la recta $g = GD$, puesto que por ser (a, b, c, d) un conjunto armónico, existe el cuadrángulo completo determinado por los puntos $A, B, D, E, F,$ y G, como se puede notar en la Figura 20.

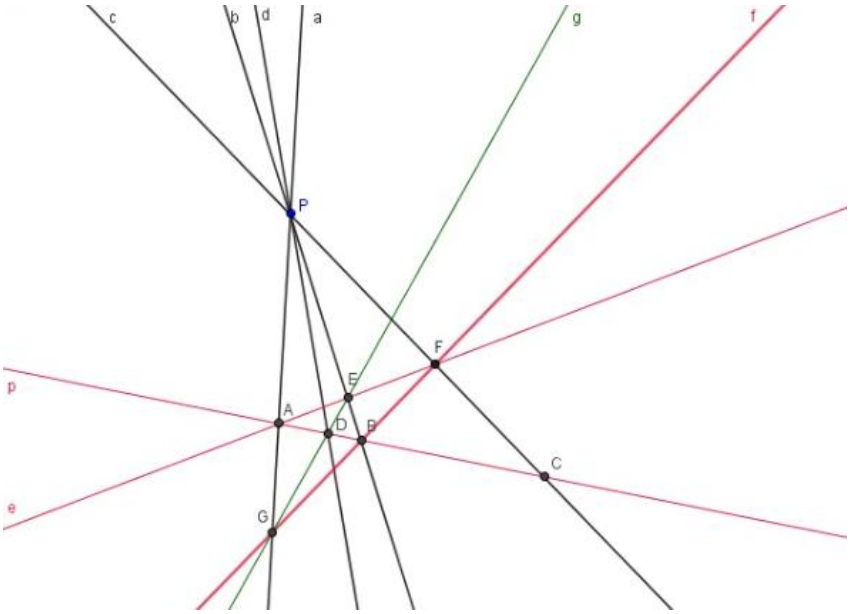

Figura 20. Conjunto armónico de punto de un conjunto armónico de rectas.

Ahora, se consideran los puntos P, E, F y G, que son parte de un cuadrángulo completo, donde e y a son un par de lados opuestos se intersecan en A, f y b es un par de lados opuestos se intersecan en B y c y d son un par de lados opuestos que están sobre C y D respectivamente, así el conjunto de Puntos (A, B, C, D) es un conjunto armónico, donde D es el conjugado armónico de C respecto a A y B, por definición de conjunto armónico de puntos.

Lema 1. Conjugado armónico de un punto en dos haces proyectivos

Si dos haces $a(A, B, C)$ y $b(A', B', C')$ son proyectivos entonces, el conjugado armónico D de C respecto a A y B es el homólogo del conjugado armónico D' de C' resecto a A' y B'.

Prueba

Dado un conjunto armónico A, B, C, D sobre la recta p (D es el conjugado armónico de C respecto a A y B) se construye un punto P que no está sobre la recta p y las rectas $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$, $d = PD$; el haz $P(a, b, c, d)$ es también un conjunto armónico por el Teorema 10 donde d es el conjugado armónico de c respecto a a y b, además se tiene que $\mathrm{p(A, B, C, D)} \approx \mathrm{P(a, d, c, d)}$ por definición de perspectividad. Ahora se construye una recta p_1 que no pase P y los puntos $A' = p_1 \cap a$, $B' = p_1 \cap b$, $C' = p_1 \cap c$ y $D' = p_1 \cap d$ siendo $p_1(A', B'C', D')$ un conjunto armónico por el Teorema 11 (D' es el conjugado armónico de C' respecto a A' y B') obteniendo que $\mathrm{P(a, b, c, d)} \approx \mathrm{p_1(A', B', C', D')}$ por definición de perspectividad. Se construye un punto P_2 que no pertenece a p_1 (Ver Figura 21).

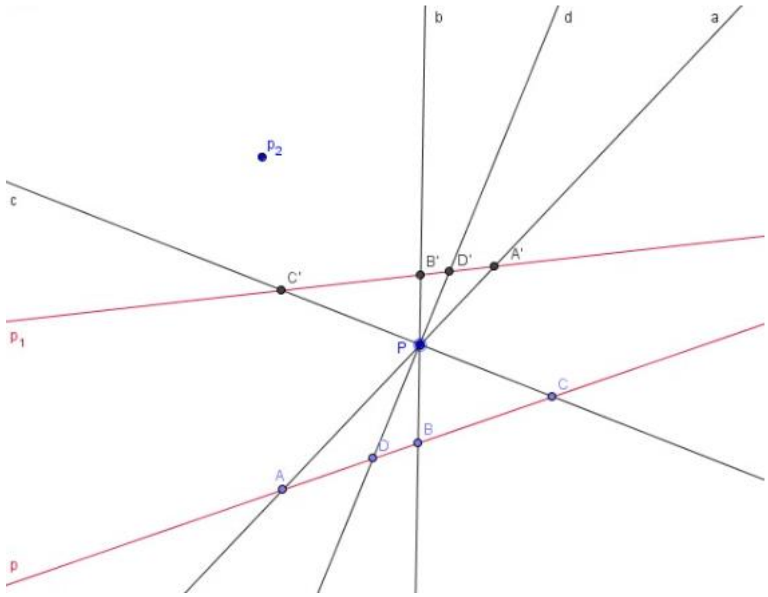

Figura 21. Construcción de un conjunto armónico de puntos a partir de un conjunto armónico de puntos.

Se hallan las rectas $a'' = P_2A'$, $b'' = P_2B'$, $c'' = P_2C'$ y $d'' = P_2D'$, que forman un conjunto armónico por el Teorema 10 siendo d'' es el conjugado armónico de c'' respecto a a'' y c'', obteniéndola siguiente perspectividad $\mathrm{p_1}\ (\mathrm{A'}, \mathrm{B'}, \mathrm{C'}, \mathrm{D'}) \approx \mathrm{P_2}\ (\mathrm{a''}, \mathrm{b''}, \mathrm{c''}, \mathrm{d''})$ por definición de perspectividad; se crea la recta p_2 que no pasa por P_2 y se encuentran los puntos de intersección $A'' = p_2 \cap a''$, $B'' = p_2 \cap b''$, $C'' = p_2 \cap c''$ y $D'' = p_2 \cap d''$, por el Teorema 11 los puntos A'', B'', C'' y D'' forman un conjunto armónico en el que D'' es el conjugado armónico de C'' respecto a A'' y B'', se tiene $\mathrm{P_2}\ (\mathrm{a''}, \mathrm{b''}, \mathrm{c''}, \mathrm{d''}) \approx \mathrm{p_2}\ (\mathrm{A''}, \mathrm{B''}, \mathrm{C''}, \mathrm{D''})$ por Definición de Perspectividad En la Figura 22 se ocultan las rectas $a, b, c,\ d$ y el punto P.

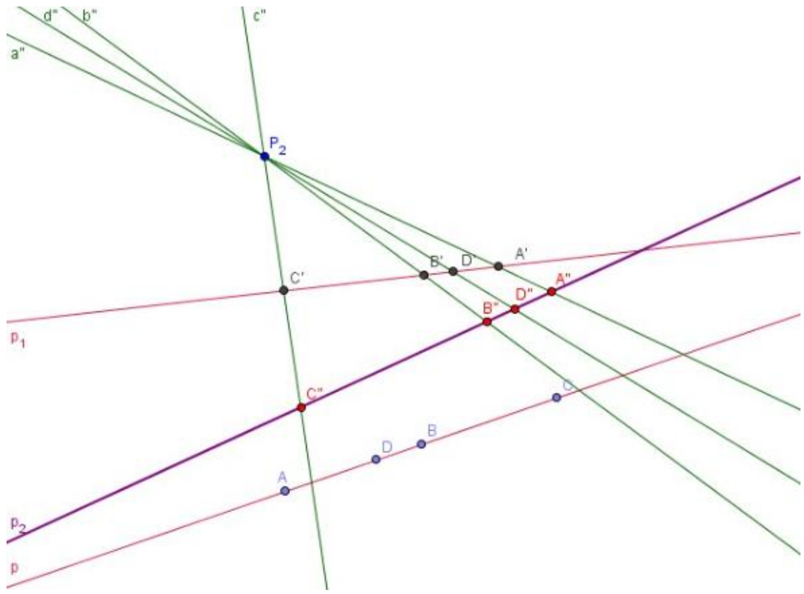

Figura 22. Haz de puntos proyectivo a conjunto armónico de puntos.

Obteniendo $\mathrm{p(A, B, C, D)} \approx \mathrm{P(a, d, c, d)} \approx \mathrm{p_1\ (A', B', C', D')} \approx \mathrm{P_2\ (a'', b'', c'', d'')} \approx \mathrm{p_2\ (A'', C'', D'', D'')}$, luego los haces $\mathrm{p(A, B, C, D)}$ y $\mathrm{p_2(A'', C'', D'', D'')}$son proyectivos $(\mathrm{p(A, B, C, D) \sim p_2(A'', C'', D'', D'')})$, por Definición de Proyectividad Concluyendo que D" es el homólogo de D.

Lema 2. Conjugado armónico de una recta en dos haces proyectivos

Si dos haces $A(a, b, c)$, $B(a', b', c')$ son proyectivos, el conjugado armónico d de c respecto a a y b es el homólogo del conjugado armónico d' de c' respecto a a' y b'.

Prueba

Dado un conjunto armónico a, b, c, d sobre el punto P (d es el conjugado armónico de c respecto a a y b) se construye una recta p que no esté sobre el punto P y los puntos $A = p \cap a$, $B = p \cap b$, $C = p \cap c$, $D = p \cap d$; el haz $p(A, B, C, D)$ es también un conjunto armónico por el Teorema 11 donde D es el conjugado armónico de C respecto a A y B, además se tiene que $\mathrm{P(a, b, c, d)} \approx \mathrm{p(A, D, C, D)}$ por definición de perspectividad. Ahora se construye un punto P_1 que no pase p y las rectas $a' = P_1A$, $b' = P_1B$, $c' = P_1C$ y $d' = P_1D$ siendo $P_1(a', b'c', d')$ un conjunto armónico por el Teorema 10 (d' es el conjugado armónico de c' respecto a a' y b') obteniendo que $\mathrm{p(A, B, C, D)} \approx \mathrm{P_1(a', b', c', d')}$ por, definición de perspectividad Se construye una recta p_2 que no pertenece a P_1 (Ver Figura 23).

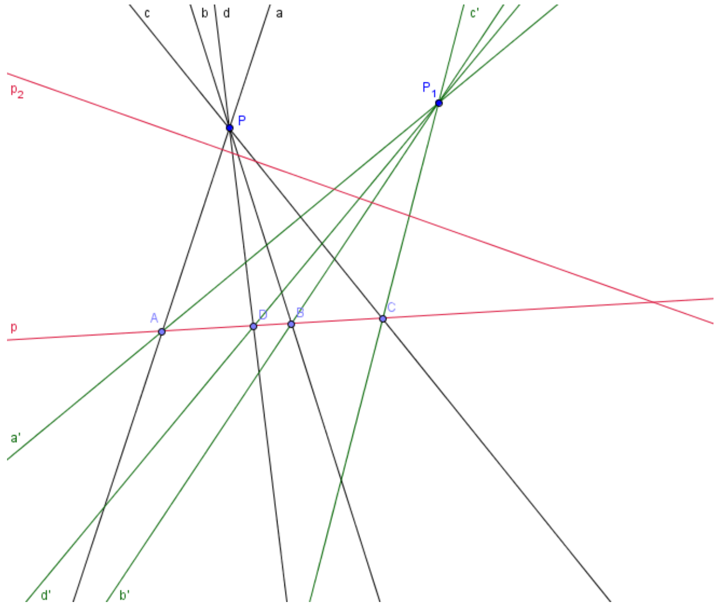

Figura 23. Construcción de un conjunto armónico de rectas a partir de un conjunto armónico de rectas.

Se hallan los puntos $A'' = p_2 \cap a'$, $B'' = p_2 \cap b'$, $C'' = p_2 \cap c'$ y $D'' = p_2 \cap d'$, que forman un conjunto armónico por el Teorema 11 siendo D'' es el conjugado armónico de C'' respecto a A'' y C'', obteniendo la siguiente perspectividad $\mathrm{P_1(a', b', c', d')} \approx \mathrm{p_2(A'', B'', C'', D'')}$. Se crea el punto P_2 que no pasa por p_2 y se encuentran las rectas $a'' = P_2A''$, $b'' = P_2B''$, $c'' = P_2C''$ y $d'' = P_2D''$, por el Teorema 10 las rectas a'', b'', c'' y d'' de la Figura 24 forman un conjunto armónico en el que d'' es el conjugado armónico de c'' respecto a a'' y b'', se tiene $\mathrm{p_2(A'', B'', C'', D'')} \approx \mathrm{P_2(a'', b'', c'', d'')}$ por definición de perspectividad. En la Figura 24 se ocultan los puntos A, B, C, D y la recta p para simplificar la construcción.

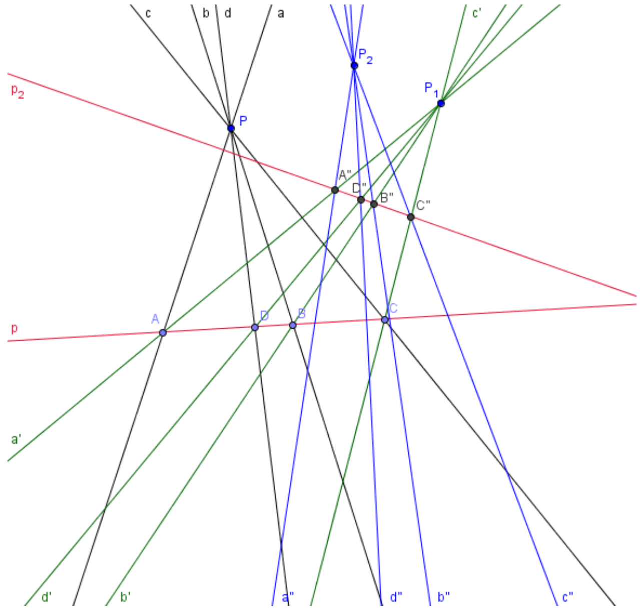

Figura 24. Haz de rectas proyectivo a conjunto armónico de rectas..

Obteniendo $\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}) \approx \mathrm{p}(\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{D}) \approx \mathrm{P}_1(\mathrm{a}',\mathrm{b}',\mathrm{c}',\mathrm{d}') \approx \mathrm{p}_2(\mathrm{A}'',\mathrm{B}'',\mathrm{C}'',\mathrm{D}'') \approx \mathrm{P}_2(\mathrm{a}'',\mathrm{b}'',\mathrm{c}'',\mathrm{d}'')$, luego los haces $\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d})$ y $\mathrm{P}_2(\mathrm{a}'',\mathrm{b}'',\mathrm{c}'',\mathrm{d}'')$ son proyectivos $(\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}) \sim \mathrm{P}_2(\mathrm{a}'',\mathrm{b}'',\mathrm{c}'',\mathrm{d}''))$, por definición de proyectividad Concluyendo que d'' es el homólogo de d.

Definición de Plano Proyectivo Racional

Si en un plano existe una recta constituida por todos los conjugados armónicos de un punto C, con respecto a otros dos A y B (red armónica), este plano se denomina *Plano Proyectivo Racional*, en este plano se asegura que cada punto P, es el conjugado armónico para alguna tripla de puntos X, Y, Z.

Teorema 12. Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva

Dado en el plano proyectivo racional tres puntos colineales distintos A, B y C y otros tres puntos colineales A', B' y C', sobre la misma recta o sobre rectas distintas, existe una y sólo una proyectividad que envía la tripla A, B y C respectivamente en la segunda tripla A', B' y C'.

Prueba

Sean los puntos colineales A, B y C sobre una recta a y otros tres puntos A', B' y C' sobre una recta b, se considera el punto D conjugado armónico de C respecto a A y B, obteniendo el haz de puntos $a(A, B, C, D)$, sea D' un punto sobre la recta b, obteniendo el haz $b(A', B', C', D')$, si existe una proyectividad entre estos haces, se tiene que D' es el homólogo de D por definición de proyectividad y por el Lema 1, D' es el conjugado armónico de C' con respecto a A'y B', por el Teorema 9, el punto D' es único, por tanto la proyectividad entre estos haces es única.

Teorema 13. Dual del Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva

Dado en el plano proyectivo tres rectas concurrentes distintas a, b y c y otras tres rectas concurrentes a', b' y c', que pasan por puntos distintos o por el mismo punto, existe una y sólo una proyectividad que envía la tripla a, b y c respectivamente en la segunda tripla a', b' y c'.

Prueba

Sean las rectas a, b y c que concurren en A y otras tres rectas a', b' y c' que concurren en B, se considera la recta d, conjugado armónico de c respecto a a y b, obteniendo el haz $A(a, b, c, d)$, sea d' una recta sobre el punto B, obteniendo el haz $B(a', b', c', d')$, si existe una proyectividad entre esto haces, se tiene de d' es el homólogo de d por definición de proyectividad y por el Lema 2, d' es el conjugado armónico de c' con respecto a a'y b', por el Teorema 9 el punto d' es único, por tanto existe una única proyectividad entre los haces $A(a, b, c, d)$ y $B(a', b', c', d')$.

Definición de hexágono simple

La configuración plana $\begin{matrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{matrix}$ se denomina hexágono simple. Se nota $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ si está determinado por sus lados (hexágono de rectas); se nota $(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)$ si está determinado por sus vértices (hexágono de puntos). En esta notación es importante la forma en que se escriben los vértices y lados, puesto que se escriben en orden consecutivo, por ejemplo A_1 y A_2 son vértices consecutivos, es decir pertenecen a un mismo lado del pentágono, así mismo a_1 y a_2 son lados consecutivos, es decir se intersecan en un vértice del pentágono.

Definición de pentágono simple

La configuración plana $\begin{matrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}$ se denomina pentágono simple. La notación es análoga a la del hexágono simple.

Definición de lado opuesto a un vértice de un pentágono

En un pentágono sencillo, un vértice es opuesto a un lado si y solo si los lados que lo determinan intersecan al lado opuesto en puntos que no son vértices del pentágono, así mismo se dice que el lado es opuesto al vértice.

Definición de recta diagonal de un pentágono

En un pentágono sencillo una recta es diagonal si y sólo si está determinada por dos de sus vértices no consecutivos.

Definición de punto diagonal de un pentágono

En un pentágono sencillo un punto es diagonal si y sólo si está determinado por la intersección de dos de sus lados no consecutivos.

Definición de hexágono inscrito en una cónica

Un hexágono simple está inscrito en una cónica si sus vértices pertenecen a ella.

Definición de hexágono circunscrito a una cónica

Un hexágono simple está circunscrito en una cónica si sus lados son tangentes a ella.

Teorema 14. Teorema de Brianchon

Si un hexágono simple $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)$ es circunscrito en una cónica, entonces, las rectas determinadas por los puntos de intersección de las rectas que pasan por cada par de vértices opuestos, concurren, es decir, las rectas $r = AB, s = CD$ y $t = EF$ concurren, en donde A y B son vértices opuestos, D y C son vértices opuestos y E y F son vértices opuestos, observe la Figura 25, en donde, $A = a_1 \cap a_2$, $B = a_4 \cap a_5$, $C = a_2 \cap a_3$, $D = a_5 \cap a_6, E = a_3 \cap a_4, F = a_6 \cap a_1$.

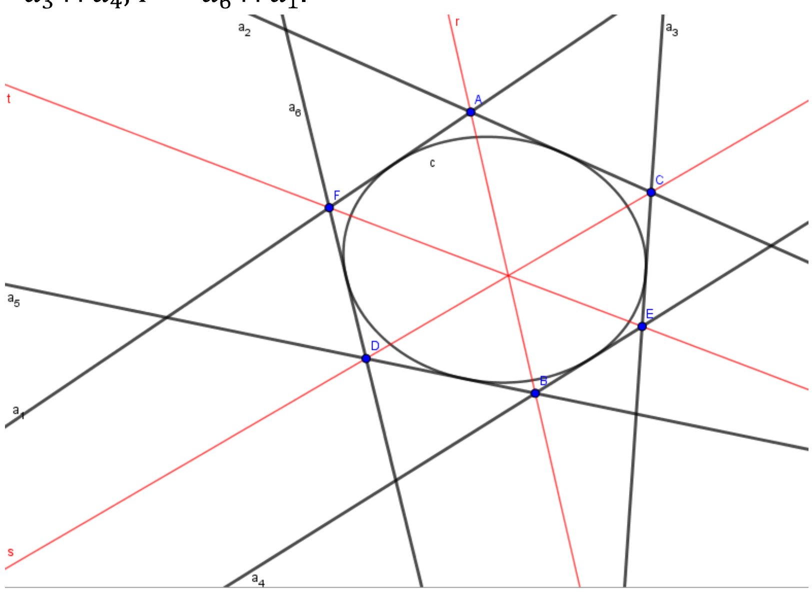

Figura 25. Teorema de Brianchon.

Prueba

Sean las rectas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tangentes a un cónica formando el hexágono sencillo $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)$, tal que $A = a_1 \cap a_2, B = a_4 \cap a_5, C = a_2 \cap a_3, D = a_5 \cap a_6, E = a_3 \cap a_4, F = a_1 \cap a_6$, donde A y B son vértices opuestos, D y C son vértices opuestos y E y F son vértices opuestos del hexágono simple, se hallan las siguientes rectas $r = AB, s = CD, t = EF$. (Ver Figura 26)

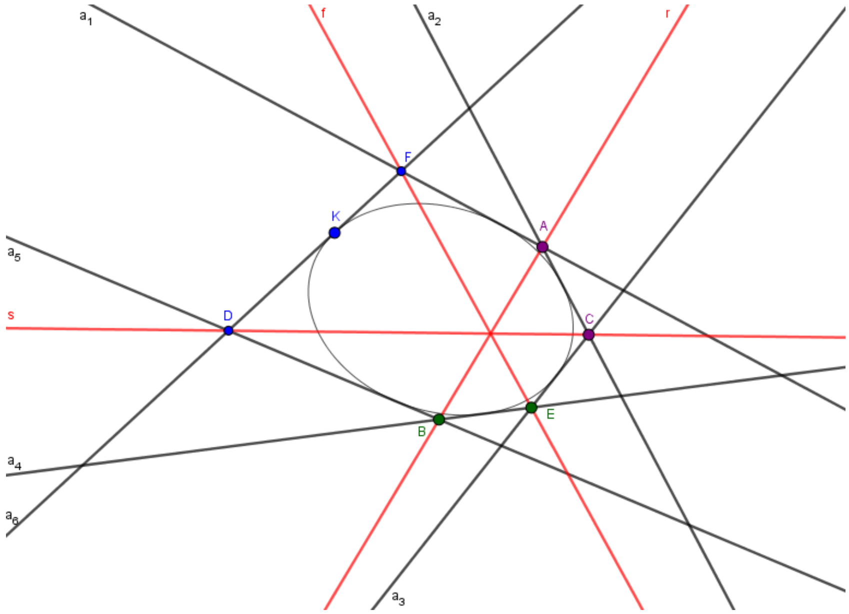

Figura 26. Hexágono simple para demostración del Teorema de Brianchon.

Luego se hallan las rectas $u = AD, v = FB$ y los puntos $G = a_2 \cap a_5, H = a_2 \cap a_6, I = a_4 \cap a_1, J = a_4 \cap a_6$. (Ver Figura 27)

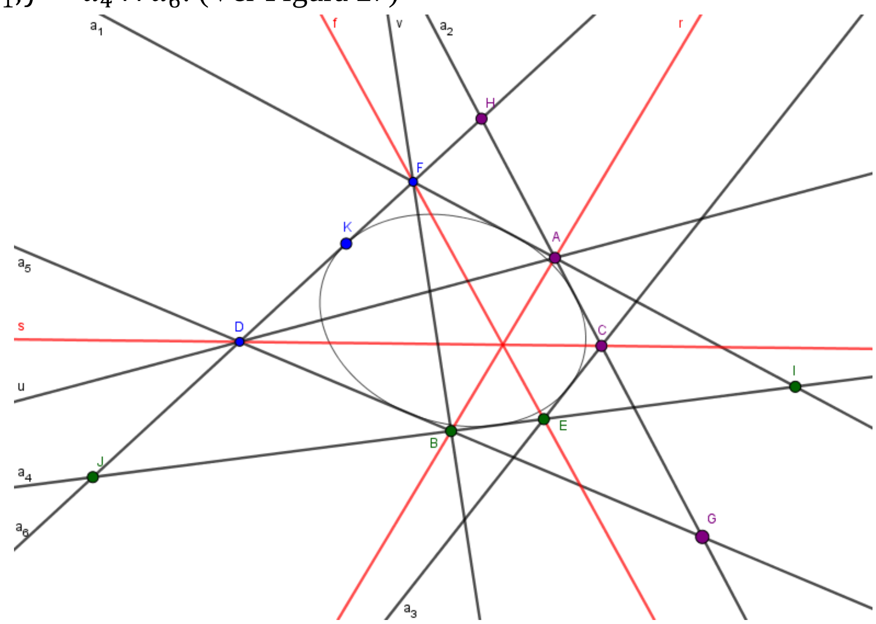

Figura 27. Demostración del Teorema de Brianchon.

Obteniendo los haces de rectas $D(u, s, a_5, a_6)$, $F(a_1, t, v, a_6)$ y los haces de puntos $a_2(A, C, G, H)$ $a_4(I, E, B, J)$, se tienen las siguientes perspectividades $D(u, s, a_5, a_6) \approx a_2(A, C, G, H)$ y $F(a_1, t, v, a_6) \approx a_4(I, E, B, J)$, por definición de perspectividad.

Ahora, por el Teorema 6, se puede considerar dos rectas cualesquiera tangentes a la cónica cómo bases de haces proyectivos que la generen, en particular se eligen las rectas a_2 y a_4, obteniendo siguiente proyectividad, $a_2\ A, C, G, H \sim a_4\ I, E, B, J$, como $D(u, s, a_5, a_6) \approx a_2(A, C, G, H) \sim a_4(I, E, B, J), F(a_1, t, v, a_6)$, por definición de perspectividad los haces de rectas $D(u, s, a_5, a_6)$ y $F(a_1, t, v, a_6)$ son perspectivos.

Por definición de perspectividad, los puntos de intersección de las rectas homólogas son colineales, sabiendo que $A = u \cap a_1, B = v \cap a_5$ y $r = AB$ en la Figura 27, entonces el punto $L = s \cap t$ está la recta r. (Ver Figura 28).

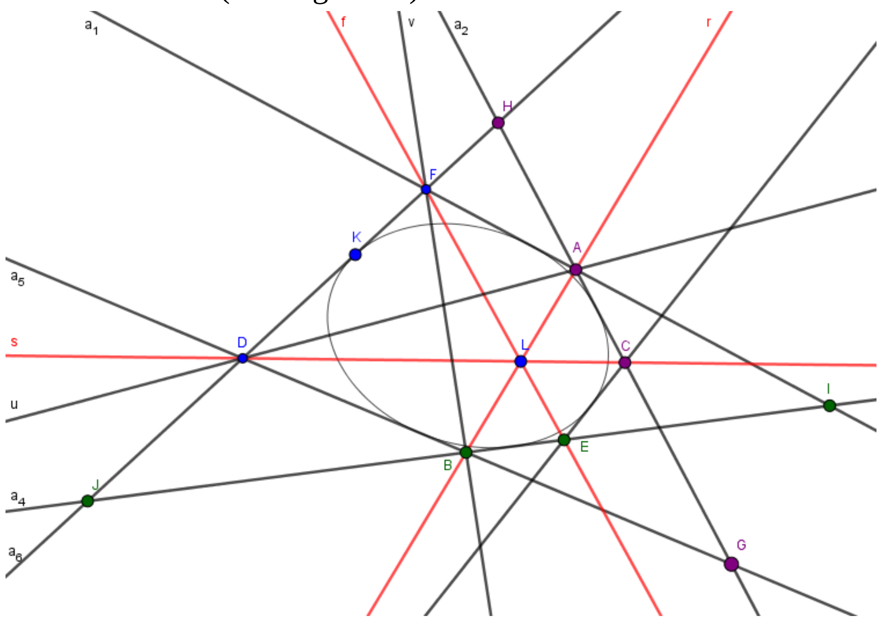

Figura 28. Concurrencia Teorema de Brianchon.

Por tanto las rectas r, t y s concurren quedando demostrado el Teorema.

Teorema 15. Teorema de Pascal

Si un hexágono simple $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 A_6)$ está inscrito en na cónica, las intersecciones de los lados opuestos son colineales, es decir, los puntos $R = a \cap b, S = c \cap d$ y $T = e \cap f$ concurren, en donde a y b son lados opuestos, d y c son lados opuestos y e y f son lados opuestos, observe la Figura 29, en donde, $a = A_1A_2$, $b = A_4A_5$, $c = A_2A_3$, $d = A_5A_6$, $e = A_3A_4, f = A_6A_1$.

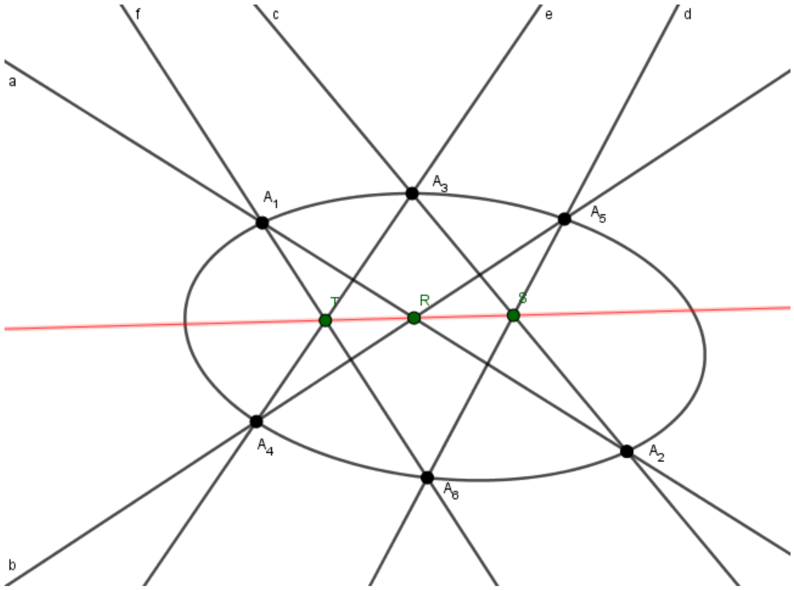

Figura 29. Teorema de Pascal.

Prueba.

Sean los puntos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sobre cónica cómo vértices del hexágono sencillo $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$, tal que $a = A_1A_2, b = A_4A_5, c = A_2A_3, d = A_5A_6, e = A_3A_4, f = A_1A_6$, donde a y b son lados opuestos, d y c son lados opuestos y e y f son lados opuestos del hexágono simple, se hallan los siguientes puntos $R = a \cap b, S = c \cap d, T = e \cap f$en la Figura 30.

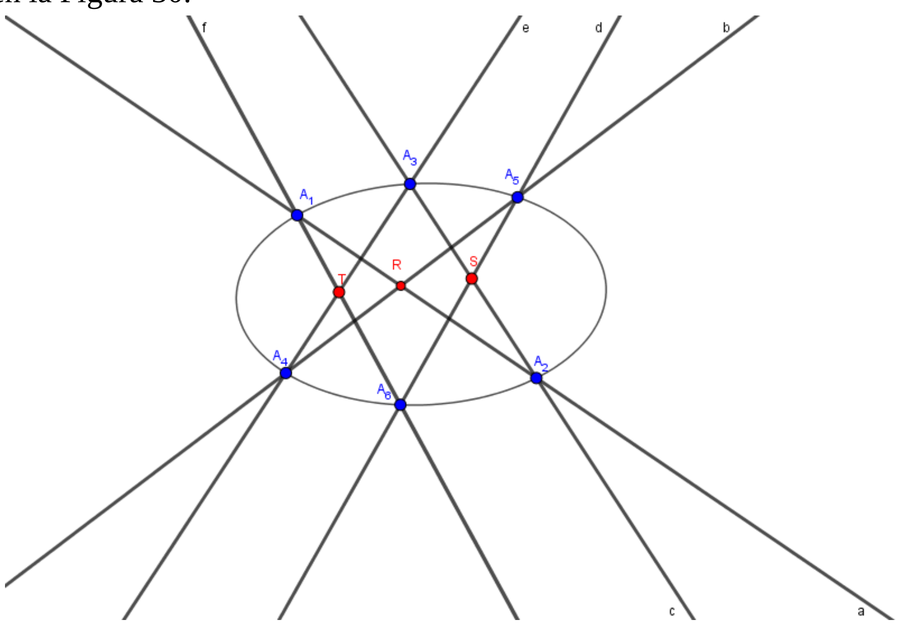

Figura 30. Hexágono simple para demostración del Teorema de Pascal.

Luego se hallan los puntos $U = a \cap d, V = f \cap b$ y las rectas $g = A_2A_5, h = A_2A_6, i = A_4A_1, j = A_4A_6$. (Ver Figura 31)

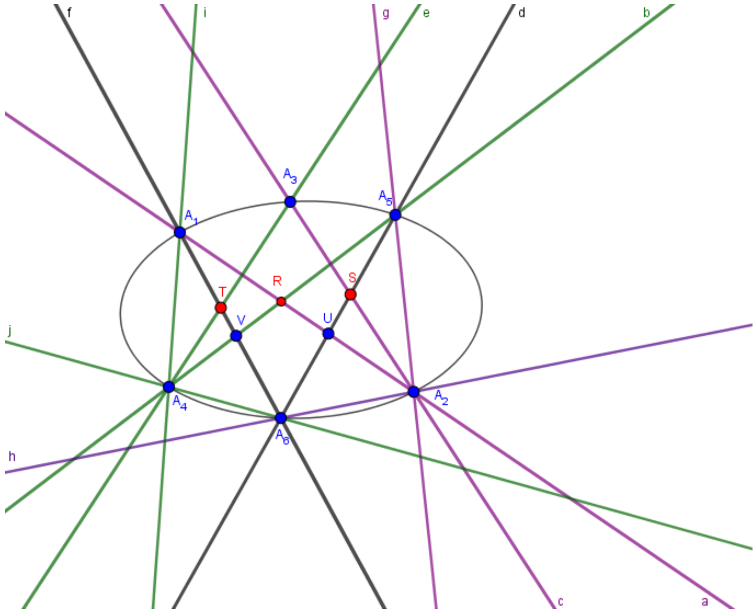

Figura 31. Demostración del Teorema de Pascal.

Obteniendo los haces de puntos $d(U, S, A_5, A_6)$, $f(A_1, T, V, A_6)$ y los haces de rectas $A_2(a, c, g, h)$ $A_4(i, e, b, j)$, se tienen las siguientes perspectividades $d(U, S, A_5, A_6) \approx A_2(a, c, g, h)$ y $f(A_1, T, V, A_6) \approx A_4(i, e, b, j)$, por definición de perspectividad. Ahora teniendo en cuenta el Teorema 5, se puede considerar dos puntos cualesquiera de la cónica cómo centros de haces proyectivos que la generen, en particular se eligen los puntos A_2 y A_4, obteniendo siguiente proyectividad, $A_2\ a, c, g, h\ {\sim}A_4\ i, e, b, j$, como $d(U, S, A_5, A_6) \approx A_2(a, c, g, h){\sim}\ A_4(i, e, b, j), f(A_1, T, V, A_6)$, por definición de perspectividad los haces de puntos $d(U, S, A_5, A_6)$ y $f(A_1, T, V, A_6)$ son perspectivos.

Por definición de perspectividad, las rectas que pasan por los puntos homólogos concurren, sabiendo que $a = UA_1, b = VA_5$ y $R = a \cap b$ (Ver Figura 31) entonces la recta ST pasa por el punto R. (Ver Figura 32)

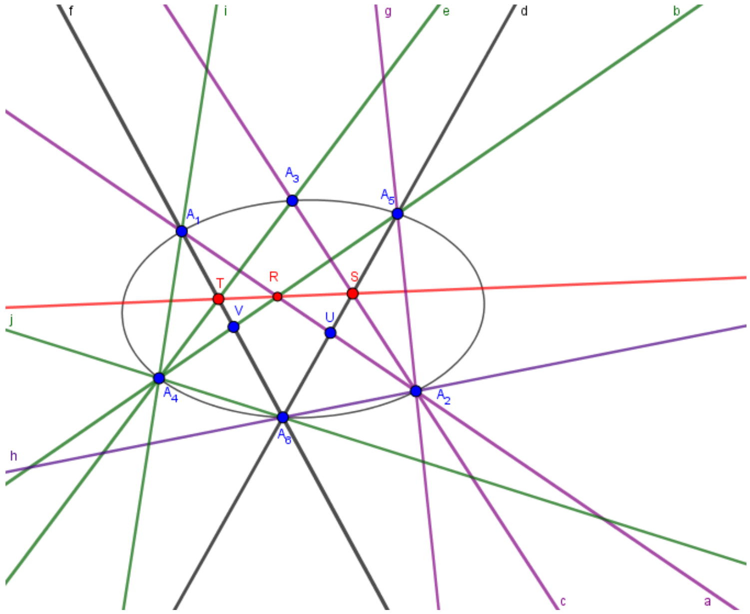

Figura 32. Colinealidad del Teorema de Pascal

Por tanto los puntos R, S y T con colineales, quedando demostrado el Teorema.

Teorema 16. Pentágono sencillo de puntos

Si un pentágono sencillo $(ABCDE)$ se inscribe en una cónica s de tal manera que si $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DE$, $e = EA$ y m es una recta tangente a s que pasa por el punto E, entonces los puntos $P = a \cap m$, $Q = b \cap d$ y $R = c \cap e$, son colineales.

Prueba:

Para probar este teorema se debe considerar el pentágono simple, como la degeneración de un hexágono simple y aplicar el Teorema 15, es decir, considérese el hexágono simple $(ABCDEF)$, donde $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DE$, $e = AF$ y $f = EF$, por el Teorema 15 los puntos $P = a \cap d$, $Q = b \cap f$ y $R = \boldsymbol{c} \cap e$, son colineales tal como muestra la Figura 33.

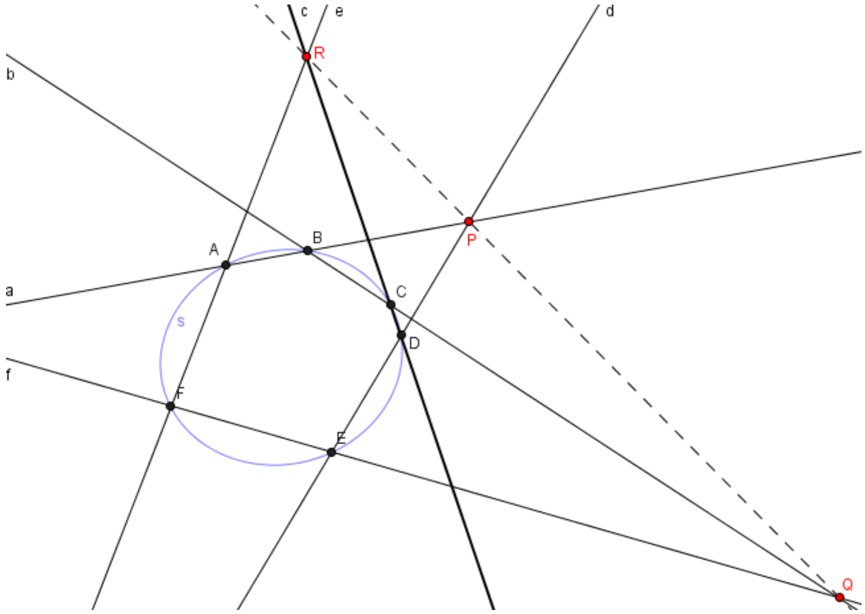

Figura 33 Teorema de Pascal para Teorema 16

Nótese que si se hacen coincidir los puntos C y D, la recta c es tangente a la cónica s en el punto D, como se muestra en la Figura 34, es decir, la recta c cunple el papel de la recta m, en el enunciado y como la colinealidad de los puntos P, Q y R, se mantiene, se ha demostrado el teorema.

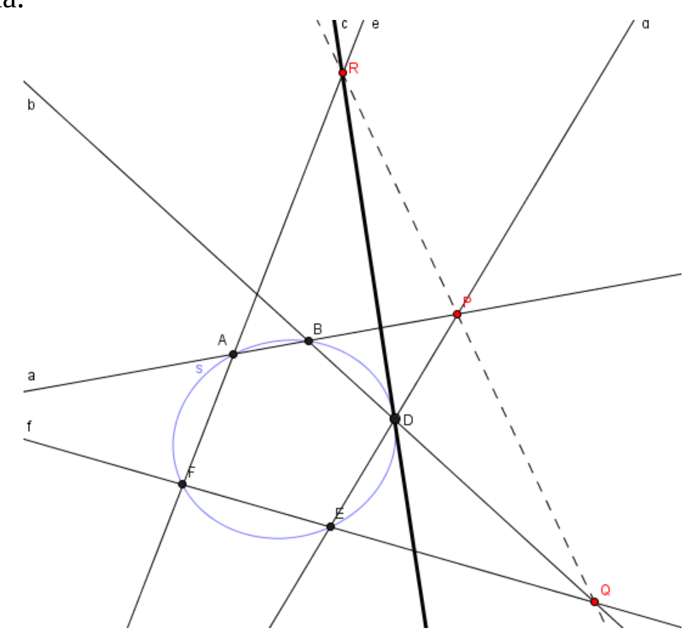

Figura 34 Recta tangente de pentágono circunscrito en una cónica.

Nota: El punto R, del problema anterior, se denominará como *punto Pentagonal*; este se define como el punto determinado por un lado del pentágono y la recta de tangencia de la cónica que pasa por el vértice opuesto a dicho lado. La recta que contiene a los puntos P, Q y R del problema anterior se denominará *base Pentagonal*, esta se define como la recta que contiene al punto pentagonal y a los puntos de intersección determinados por los lados no consecutivos del pentágono, que no contienen a dicho punto, es decir los puntos diagonales determinados por los lados no consecutivos que no contienen al punto pentagonal.

Teorema 17. Pentágono sencillo de rectas

Si un pentágono sencillo $(abcde)$ inscribe una cónica s, donde $A = a \cap b$, $B = b \cap c$, $C = c \cap d$, $D = d \cap e$, $E = e \cap a$ y M es el punto de tangencia a s que sobre la recta e, entonces las rectas $p = AM$, $q = BD$ y $r = CE$, son concurrentes.

Prueba:

Para probar este teorema debe considerar el pentágono simple, como la degeneración de un hexágono simple y aplicar el Teorema 14, es decir, considérese el hexágono simple $(abcdef)$, donde $A = a \cap b, B = b \cap c$, $C = c \cap d$, $D = d \cap e$, $E = e \cap f$ y $F = f \cap a$, por el Teorema 14, las rectas $p = AD$, $q = BE$ y $r = CF$, son concurrentes tal como muestra la Figura 35.

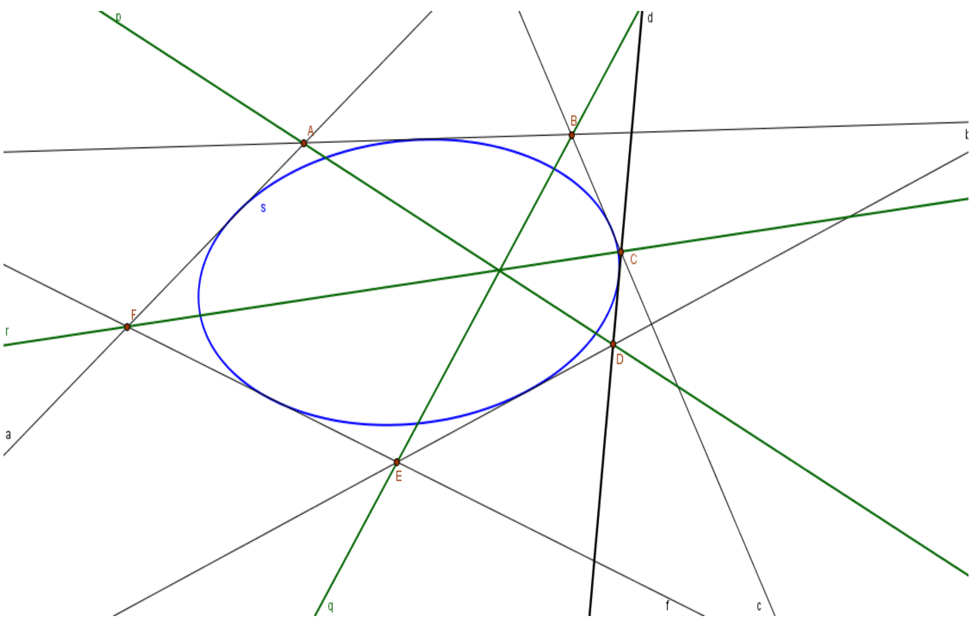

Figura 35 Teorema de Brianchon para Teorema 17.

Nótese que si se hacen coincidir las rectas c y d, el punto C es el punto de tangencia a la cónica s sobre la recta d, como se observa en la Figura 36, es decir, el punto C cumple el papel del punto M, en el enunciado y como la concurrencia de las rectas p, q y r, se mantiene se ha demostrado el teorema.

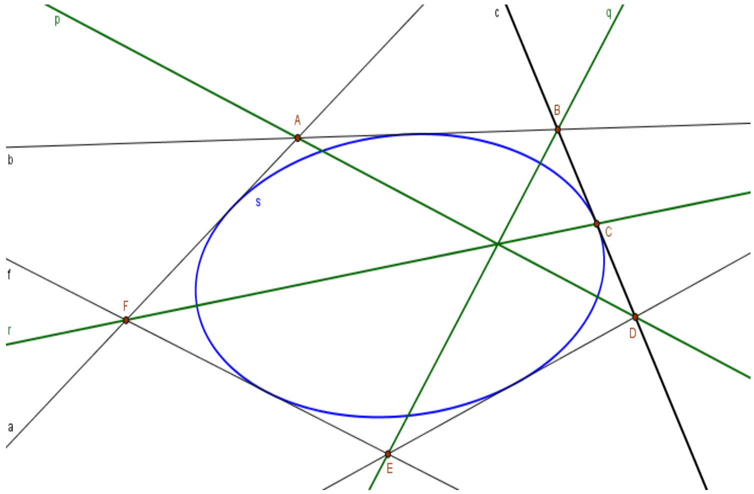

Figura 36 Punto de tangencia de un pentágono inscrito en una cónica.

Nota: La recta r, del problema anterior, se denominará como *recta Pentagonal*, esta se define como la recta determinada por un vértice y el punto de tangencia de la cónica con su lado opuesto. El punto de concurrencia de las rectas p, q y r del problema anterior se denominará *centro Pentagonal*, este se define como el punto de concurrencia de la recta pentagonal con las diagonales determinadas por los vértices que no pertenecen a ella.

Resultados

En este capítulo se expone la solución a los problemas de interés de este trabajo de grado, enunciando y demostrando los lemas y teoremas que se requieren para su solución. La secuenciación de estos problemas está dada por el principio de dualidad, dado que, el problema 2 es el dual del problema 1, así como los lemas y teoremas usados en el problema 2 son los duales de los lemas y teoremas usados en el problema 1, respectivamente; de la misma manera, el problema 4 es el dual del problema 3 y el problema 6 es el dual del problema 5.

Problema 1. Dados cinco puntos, encontrar la cónica que los contiene (PPPPP)

Para la solución de este problema se parte de la construcción de cónica puntual, para probar su existencia y luego se muestra que está determinada de manera única por cinco puntos.

Teorema 3. Existencia de la Cónica Puntual

Una cónica puntual existe.

Prueba

Dados los puntos P y Q, se construyen los haces $P(a, b, c)$ y $Q(a', b', c')$ proyectivos, siendo las rectas a, b y c homólogas a a', b' y c' respectivamente, sean los puntos $A = a \cap a'$, $B = b \cap b'$ y $C = c \cap c'$. (Ver Figura 37).

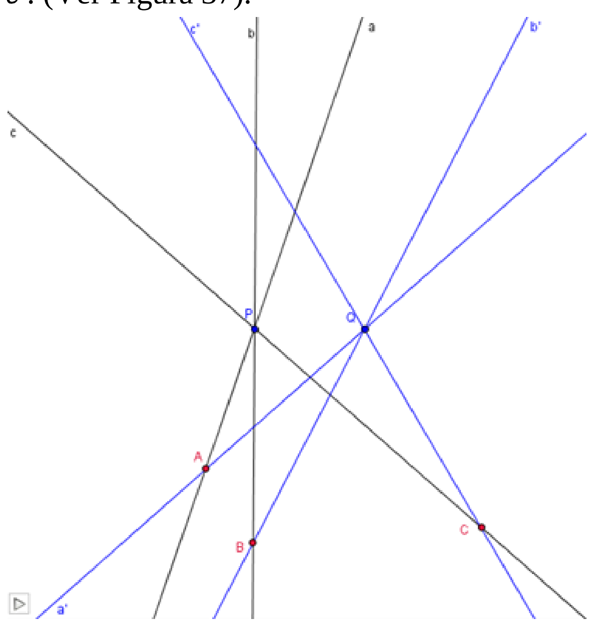

Figura 37. Haces de rectas proyectiva para el Teorema 3.

Se halla el punto $D = a \cap c'$ y el punto $E = a' \cap c$ (la intersección de las rectas homólogas a a y c'); sea la recta $e = ED$, se halla el punto F de intersección entre las rectas b y c', el punto G de intersección entre las rectas b' y c y sea la recta $f = FG$; por el Teorema 2, en la Figura 38, el punto de intersección $H = f \cap e$ es el punto de concurrencia de todas las rectas determinadas por el punto de intersección de dos rectas no homólogas y el punto de intersección entre sus correspondientes (Punto de Pappus).

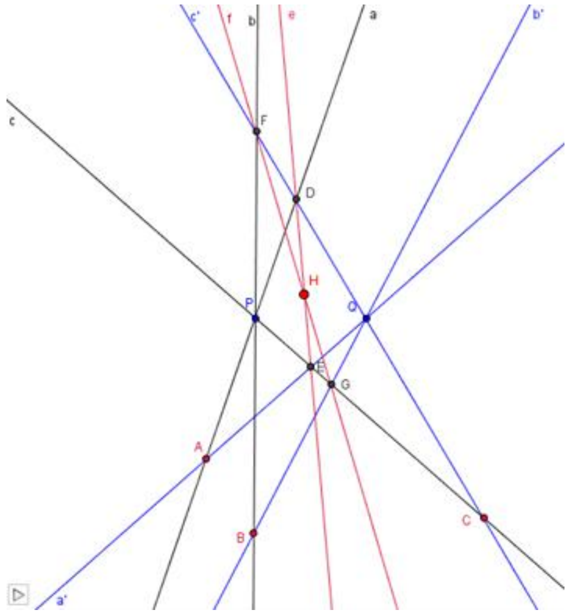

Figura 38. Punto de Pappus.

Así para cualquier recta d que pasa por P, se puede hallar su homóloga en la proyectividad, hallando el punto I de intersección entre d y c', luego la recta $g = HI$ y el punto $J = c \cap g$, entonces la recta $d' = Q \cap J$ es la recta homóloga de d, luego el lugar geométrico del punto $K = d \cap d'$, corresponde al lugar geométrico generado por la intersección de todas las rectas homólogas (d y d') en la proyectividad. Por la Definición de Cónica (Steiner) el lugar geométrico de estos putos de intersección es una cónica, como se observa en la Figura 39.

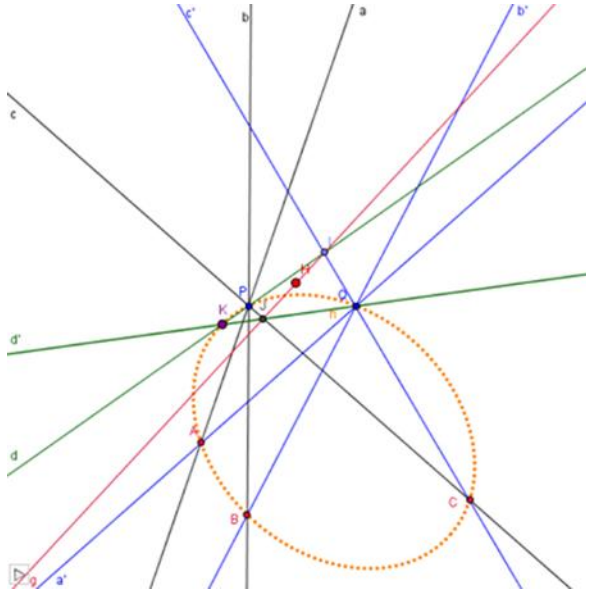

Figura 39. Existencia de Cónica

Teorema 5. Centros de haces proyectivos

Dos puntos cualesquiera, distintos de una cónica pueden ser utilizados como centros de dos haces proyectivos que la generan.

Prueba.

Sea el haz $R(a, b, c, d)$, una recta m que no contiene a R y los puntos de intersección $A = a \cap m$, $B = b \cap m$, $M = c \cap m$ y $L = d \cap m$; Se forma la Perspectividad elemental $R(a, b, c, d) \approx m(A, B, M, L)$. (Ver Figura 40).

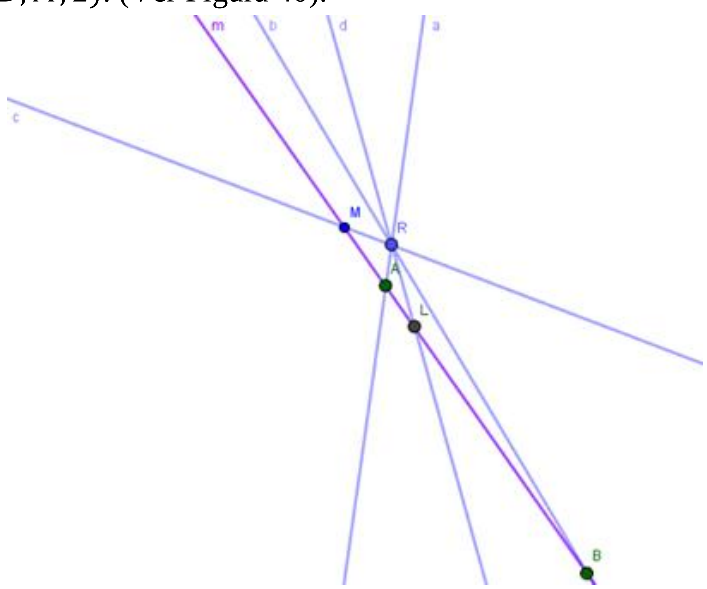

Figura 40. Perspectividad elemental para Teorema 5

Se crea una recta n que contiene al punto A y se halla el punto C de intersección de esta recta con la recta c ($C = c \cap n$), sea T un punto sobre la recta n y la recta $b' = BT$, luego se crea el punto $Q = b' \cap c$, la recta $e = LQ$ y el punto $U = e \cap n$. Sea S un punto cualquiera sobre b', se construyen las rectas, $a' = AS$, $c' = CS$ y $d' = US$ como se observa en la Figura 41.

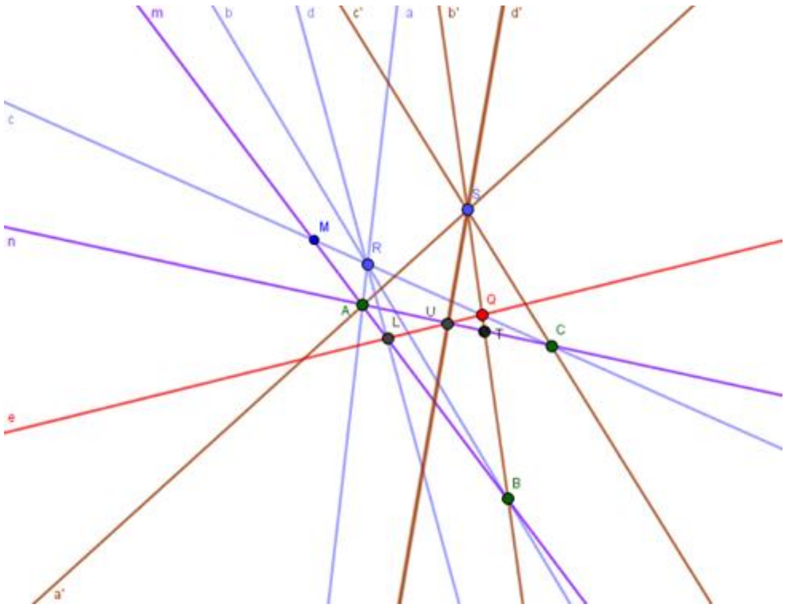

Figura 41. Construcción de dos haces de rectas proyectivas.

Nótese que los haces $R(a, b, c, d)$ y $S(a', b', c', d')$ son proyectivos, dado que se tiene la sucesión $R(a, b, c, d) \approx m(A, B, M, L) \underset{\approx}{\overset{Q}{-}} n(A, T, C, U) \approx S(a', b', c', d')$. "Son perspectivos desde el punto Q ya que las rectas que pasan a través de los puntos homólogos concurren en este punto. Ahora sea el punto $D = d \cap d'$, por Definición de Cónica (Steiner) la intersección de las rectas homólogas de los haces $R(a, b, c, d)$ y $S(a', b', c', d')$ generan una cónica h como se observa en la Figura 42.

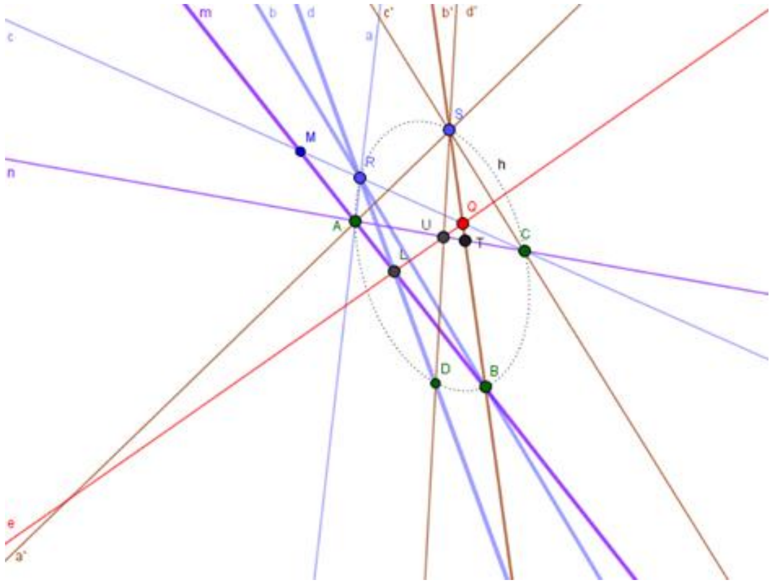

Figura 42. Cónica con R y S como centro de haces que la generan.

Luego se traza la recta $f = BD$, el punto $V = d \cap b'$, el punto $N = c \cap d'$ y la recta $g = DC$ para obtener la perspectividad $B(b', b, m, f) \approx d(V, R, L, D)$. (Ver Figura 43).

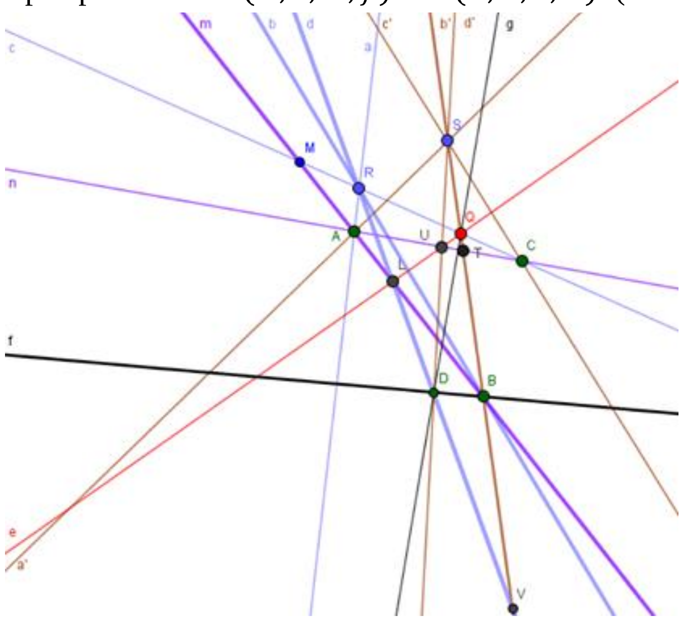

Figura 43. Construcción de dos haces perspectivos.

Se tiene la perspectividad $d\ \ V, R, L, D\ \overset{Q}{\approx}\ d'(S, N, U, D)$, consideremos la siguiente perspectividad $d'\ \ S, N, U, D\ \ \approx C(c', c, n, g)$, con lo anterior se determina la siguiente sucesión de perspectividades, $B\ \ b', b, m, f\ \ \approx d\ \ V, R, L, D\ \overset{Q}{\approx}\ d'\ \ S, N, U, D\ \ \approx C\ \ c', c, n, g$, que define la proyectividad $B(b', b, m, f) \sim C(c', c, n, g)$.

En la Figura 43 los puntos $S = b' \cap c'$, $R = b \cap c$, $A = m \cap n$ y $D = f \cap g$, por Definición de Cónica (Steiner), son los puntos de la cónica generados por los haces $B\ b', b, m, f$ y $C(c', c, n, g)$, que coinciden con los puntos generados por los haces $R(a, b, c, d)$ y $S(a', b', c', d')$, es decir los puntos de la cónica h y así se concluye que dos puntos cualesquiera de una cónica pueden ser tomados como centros de haces proyectivos que la generan.

Teorema 18. Cinco puntos

Una cónica está determinada de forma única por cinco de sus puntos.

Prueba:

Dados los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, y *E*, no colineales tres a tres, por el Teorema 3, existe una cónica que los contiene y por el Teorema 5, se pueden tomar dos de sus puntos como bases de haces de rectas proyectivos que la generan, por ejemplo los puntos A y *B*, se construyen las rectas $a = AC$, $b = AD$ y $c = AE$, que conforman el haz $A(a, b, c)$, luego, las rectas $a' = BC$, $b' = BD$ y $c' = BE$, para formar el haz $B(a', b', c')$, como se expone en la Figura 44.

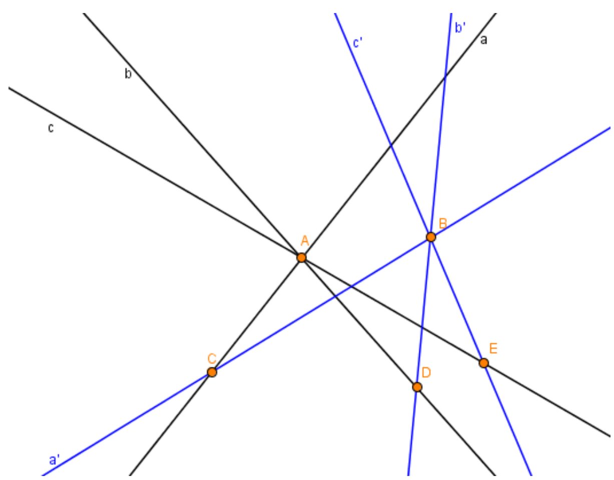

Figura 44. Haces con centros en A y B.

Haciendo uso del Teorema 13, se garantiza que sólo existe una proyectividad que envía la tripla de rectas a, b, c en la tripla de rectas a', b', c', por lo tanto el conjunto de puntos generado por la intersección de las rectas homólogas de esta proyectividad, también es único, dicho conjunto de puntos es la cónica que contiene los puntos A, B, C, D, E (ver Definición de Cónica (Steiner)). Quedando así demostrado.

Problema 2. Dadas cinco rectas encontrar la cónica que es tangente a ellas (RRRRR)

Para solucionar este problema se parte de la construcción de cónica tangencial, para mostrar su existencia y luego se prueba que está determinada de manera única por cinco rectas. Posteriormente se presenta una solución alternativa procedente del teorema de Pascal.

Teorema 4. Existencia de la Cónica Tangencial

Una cónica tangencial existe.

Prueba

Dadas las rectas p y q, se construyen los haces $p(A, B, C)$ y $q(A', B', C')$ proyectivos, siendo los puntos A, B y C homólogos a A', B' y C' respectivamente, sean las rectas $a = AA'$, $b = bb'$ y $c = cc'$. (Ver Figura 45).

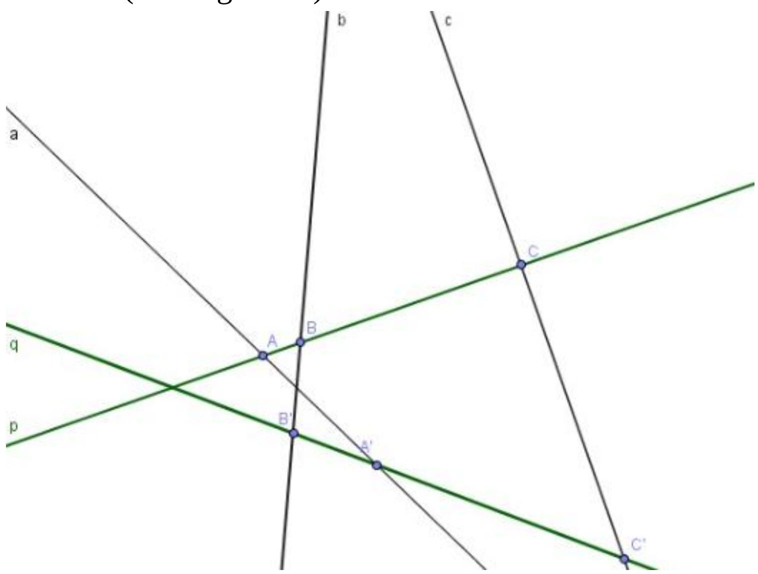

Figura 45. Haces de puntos proyectivos para el Teorema 4.

Se halla la recta $d = AC'$ y la recta $e = A'C$ (la recta determinada por los homólogos de los puntos A y C'); sea el punto $E = e \cap d$, se halla la recta f determinada por los puntos B y C', la recta g determinada por los puntos B' y C y sea el punto $F = f \cap g$; por el Teorema 2, la recta generada por los puntos F y E ($h = FE$) de la Figura 46, es aquella en donde están todos los puntos de intersección de una recta determinada por dos puntos no homólogos y las rectas determinadas por sus correspondientes (recta de Pappus).

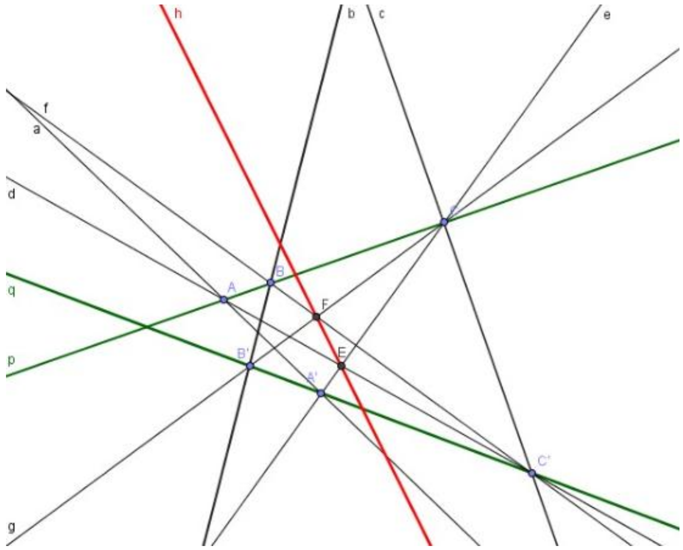

Figura 46. Recta de Pappus.

Así para cualquier punto D en la recta p, se puede hallar su homólogo en la proyectividad, hallando la recta i de intersección entre D y C'. Sea el punto $G = h \cap i$ y la recta $j = CG$, entonces el punto $D' = q \cap j$ es el homólogo de D; se construye la recta $k = DD'$. En la Figura 47, se ocultan las rectas d, e y f y los puntos E y F para simplificar la imagen.

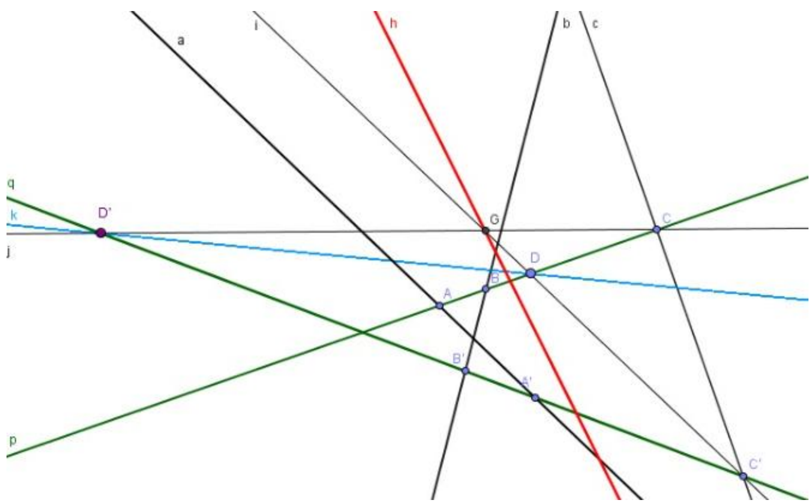

Figura 47. Construcción de una recta d' homóloga a la recta d.

Luego el lugar geométrico de las rectas k, corresponde al lugar geométrico generado por la unión de todos los puntos homólogos (D y D') en la proyectividad. Por la Definición de Cónica tangencial, el lugar geométrico de estos putos de intersección es una cónica tangencial como se observa en la Figura 48.

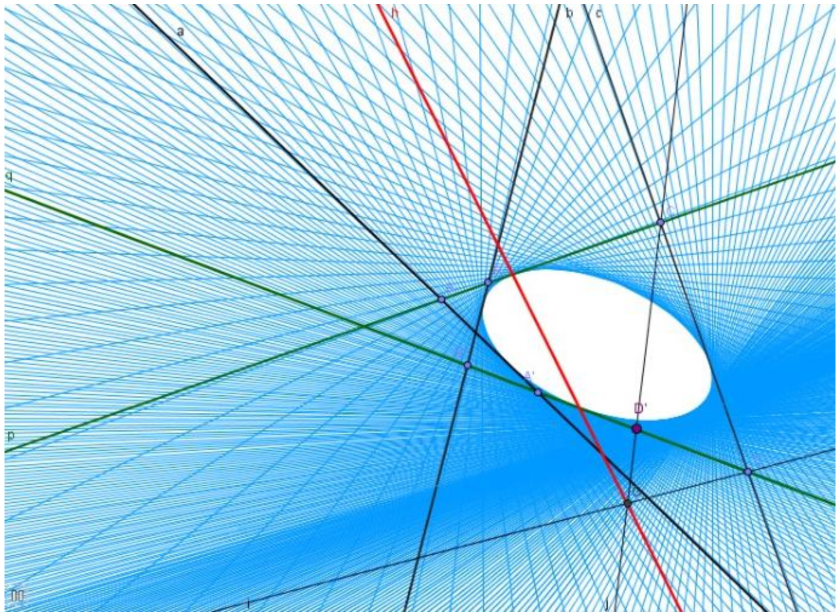

Figura 48. Existencia de una cónica tangencial.

Teorema 6. Bases de haces proyectivos

Dos rectas cualesquiera, distintas de una cónica tangencial pueden ser utilizadas como bases de dos haces proyectivos que la generan.

Prueba

Sea el haz $r(A, B, C, D)$, un punto M que no está en la recta r y las rectas $a = AM$, $b = BM$, $m = CM$ y $l = DM$; Se forma la Perspectividad elemental $r(A, B, C, D) \approx M(a, b, m, l)$. (Ver Figura 49).

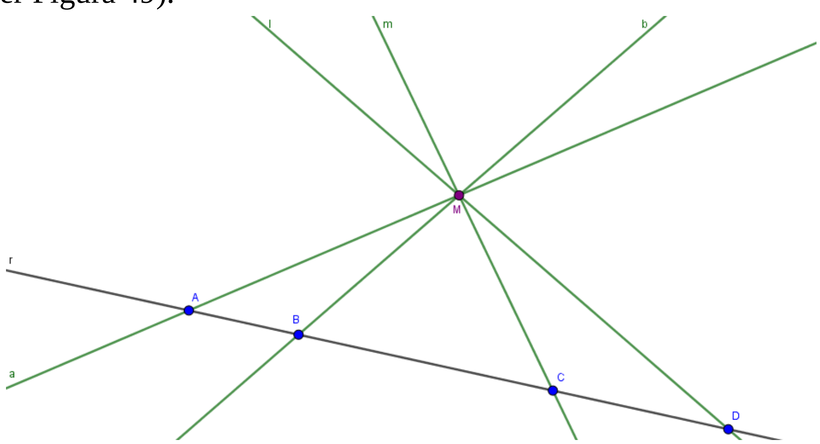

Figura 49. Perspectividad elemental para Teorema 6.

Se crea un punto N sobre la recta a y se halla la recta c, que pasa por los punto C y N ($c = CN$), sea t una recta que pasa por el punto N y sea el punto $B' = b \cap t$, luego se crea la recta $q = B'C$, el punto $E = l \cap q$ y la recta $u = EN$. Sea s una recta cualquiera que contiene a B', se construyen los puntos, $A' = a \cap s$, $C' = c \cap s$ y $D' = u \cap s$. (Ver Figura 50).

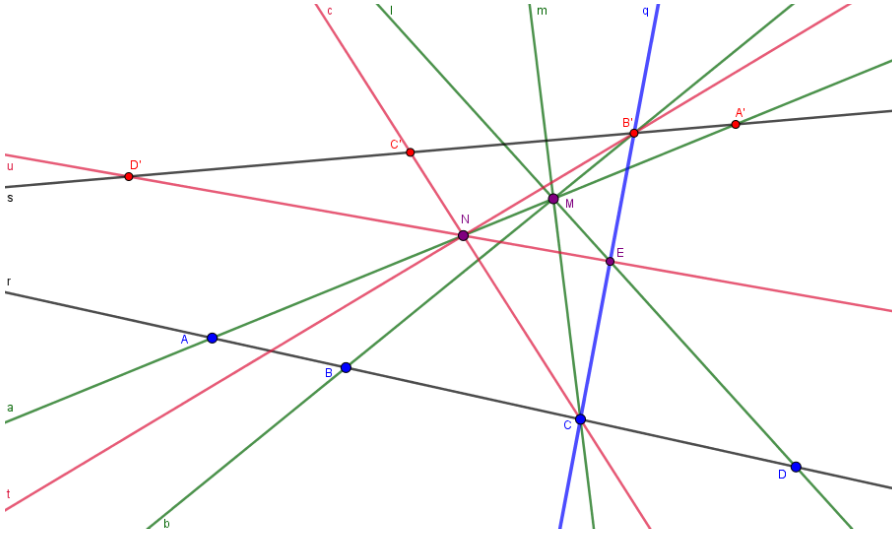

Figura 50. Construcción de dos haces de rectas proyectivas.

Nótese que los haces $r(A, B, C, D)$ y $s(A', B', C', D')$ son proyectivos, dado que se tiene la sucesión $r(A, B, C, D) \approx M(a, b, m, l) \underset{\approx}{\overset{q}{-}} N(a, t, c, u) \approx s(A', B', C', D')$. (Son perspectivos desde la recta q, ya que la intersección de las rectas homólogas están sobre q). Ahora la recta $d = DD'$, por Definición de Cónica Tangencial las rectas que pasan por cada par de puntos homólogos de los haces $r(A, B, C, D)$ y $s(A', B', C', D')$ generan una cónica. h. Mostrada en la Figura 51, se ocultaron las rectas q, m, u, t y los puntos N y E para simplificar la construcción.

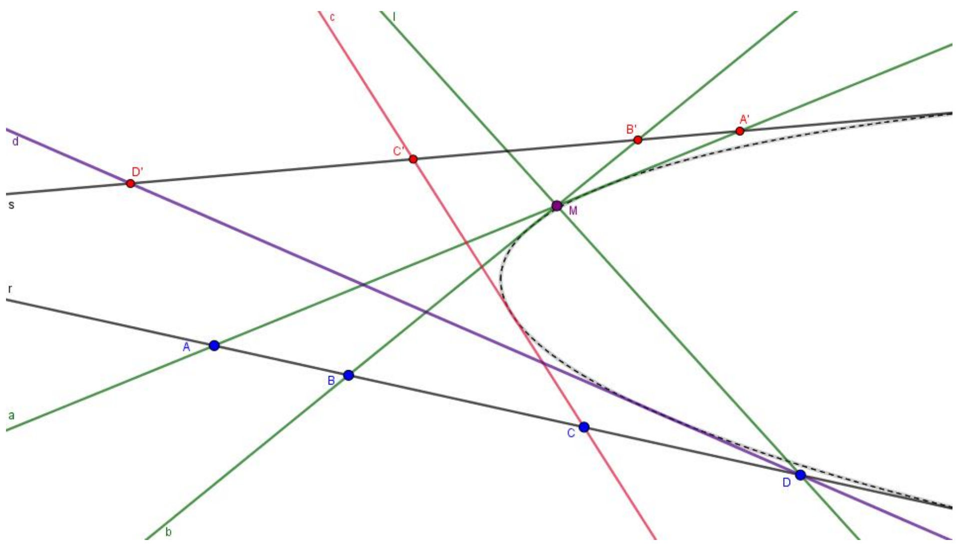

Figura 51. Cónica con r y s como bases de haces que la generan.

Luego halla el punto $F = b \cap d$, la recta $v = BD'$, la recta $n = CD'$ y el punto $G = d \cap c$ para obtener la perspectividad $b(B', B, M, F) \approx D(v, r, l, d)$. (Ver Figura 52).

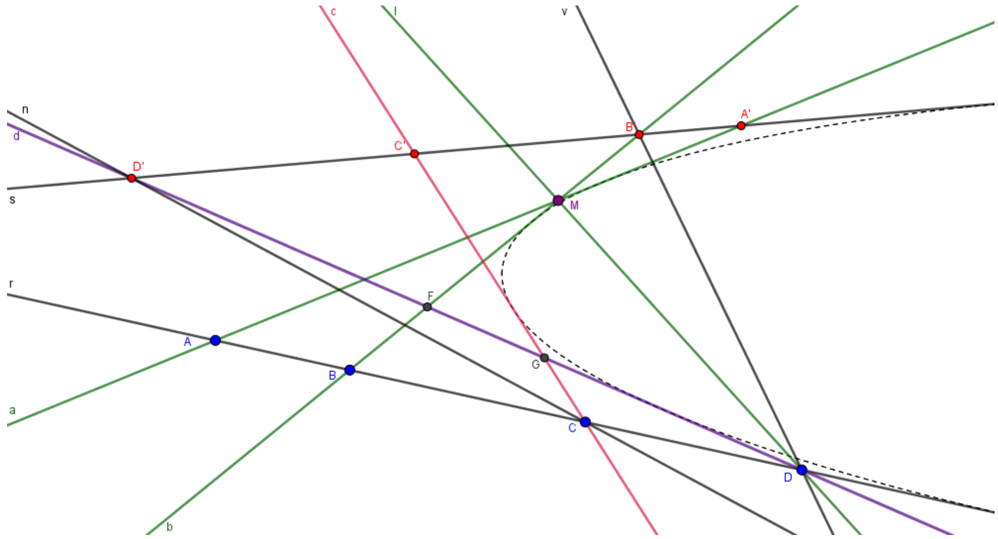

Figura 52. Construcción de dos haces perspectivos 1.

Se tiene la perspectividad $D\ v, r, l, d \overset{q}{\approx} D'(s, n, u, d)$, consideremos la siguiente perspectividad $D'\ s, n, u, d\ \approx c(C', C, N, G)$ con lo anterior se determina la siguiente sucesión de perspectividades, $b\ B', B, M, F\ \approx D\ v, r, l, d \overset{q}{\approx} D'\ s, n, u, d\ \approx c\ C', C, N, G$, que define la proyectividad $b(B', B, M, F) \sim c(C', C, N, G)$.

En la Figura 52 las rectas $s = B'C'$, $r = BC$, $a = MN$ y $d = FG$, por Definición de Cónica tangencial Son las rectas de la cónica generadas por los haces $b\ B', B, M, F$ y $c(C', C, N, G)$, que coinciden con las rectas generadas por los haces $r(A, B, C, D)$ y $s(A', B', C', D')$, es decir las rectas tangentes a la cónica h y así se concluye dos rectas cualesquiera tangentes a una cónica pueden ser tomadas como bases de haces proyectivos que la generan.

Teorema 19. Cinco rectas

Dadas cinco rectas existe una única cónica que es tangente a estas.

Prueba:

Dados las rectas a, b, c, d, y e, no concurrentes tres a tres, por Teorema 4, existe una cónica tangencial que los contiene y por Teorema 6, se pueden tomar dos rectas como bases de haces de puntos proyectivos que la generan, por ejemplo las rectas a y b, se construyen los puntos $A = a \cap c$, $B = a \cap d$ y $C = a \cap e$, que conforman el haz $a(A, B, C)$, luego, los puntos $A' = b \cap c$, $B' = b \cap d$ y $C' = b \cap e$, para formar el haz $b(A', B', C')$, como se expone en la Figura 53.

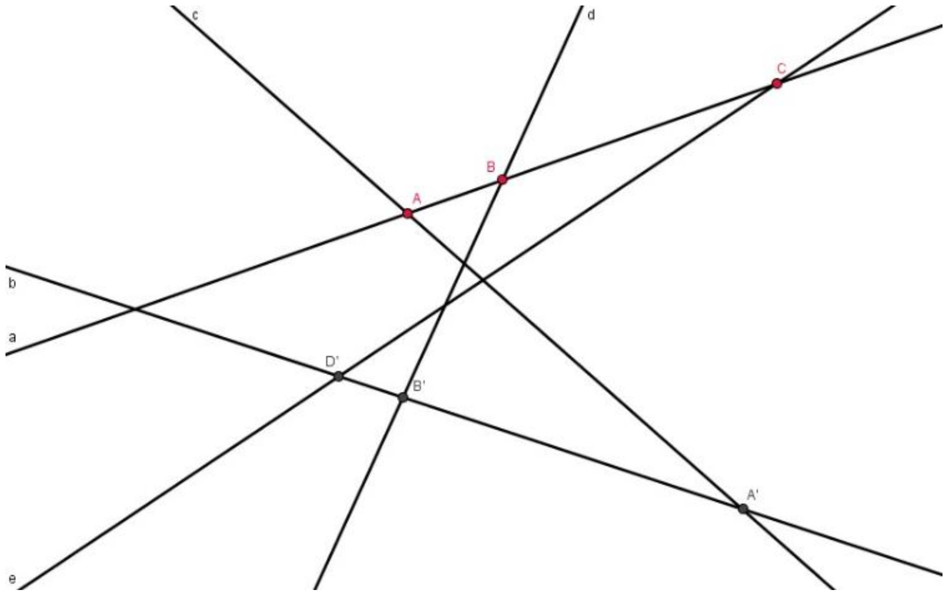

Figura 53. Haces con bases a y b

Haciendo uso del Teorema 12 se garantiza que sólo existe una proyectividad que envía la tripla de puntos A, B, C en la tripla de puntos A', B', C', por lo tanto el conjunto de rectas generadas por la unión de los puntos homólogos de esta proyectividad también es único, dicho conjunto de rectas genera una cónica tangencial (ver Definición de Cónica tangencial). Quedando así demostrado.

Problema 2.1. Dadas cinco rectas encontrar una Cónica Puntual que sea tangente a estas

En el Problema 2 se encontró una cónica tangente a cinco rectas dadas, sin embargo, allí se muestra el lugar geométrico de todas las rectas tangentes, puesto que se trata de una Cónica Tangencial. En este problema se da una solución alternativa al Problema 2, con el ánimo de mostrar de forma más precisa la cónica que se quiere encontrar.

Sean a, b, c, d y e, las rectas dadas, hállense los puntos $A = a \cap b$, $B = b \cap c$, $C = c \cap d$, $D = d \cap e$ y $E = e \cap a$, considérese el pentágono $(abcde)$, se trazan las diagonales $f = CE$ y $g = BD$, luego su punto de intersección $F = f \cap g$ (centro pentagonal), se traza la recta $h = AF$, usando recíprocamente el Teorema 17 se asegura que el punto $T_1 = h \cap d$, es el punto de tangencia de una cónica inscrita en el pentágono, es decir, se ha hallado el punto de tangencia sobre la recta d según muestra la Figura 54. Nótese que la recta h es una recta pentagonal, puesto que d es el lado opuesto al vértice E.

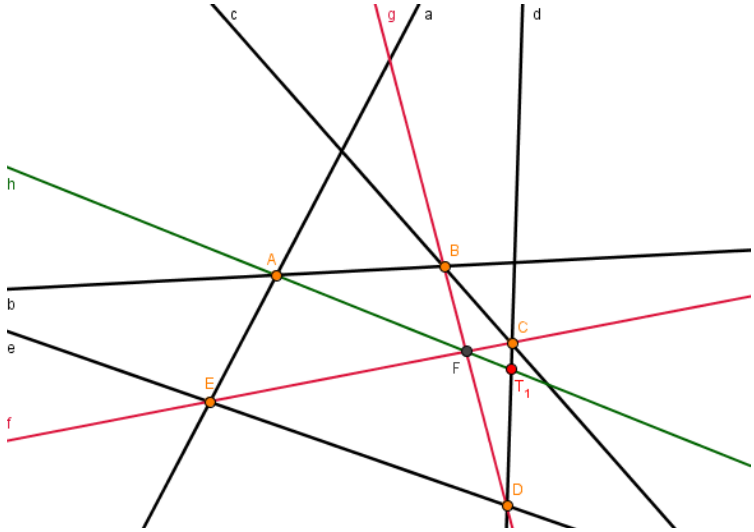

Figura 54 Punto de tangencia sobre uno de los lados del pentágono.

Hallando todas las rectas pentagonales se encuentran los puntos de tangencia sobre los otros lados, en la Figura 55 se muestran las rectas pentagonales de color verde y los puntos de tangencia de color rojo.

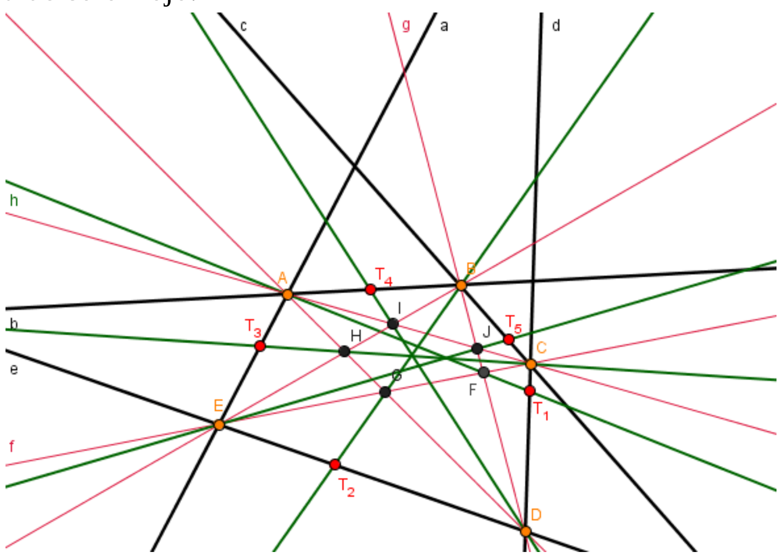

Figura 55. Puntos de tangencia sobre los lados de un pentágono.

Hallados los puntos de tangencia sobre las rectas dadas, el problema se reduce a encontrar la cónica s que los contiene, puesto que esta es única como se expone en el Problema 1. Para facilitar la comprensión de la construcción, en la Figura 56 se ocultan las diagonales del pentágono y se maraca la cónica s (determinada por los puntos T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5) de color azul.

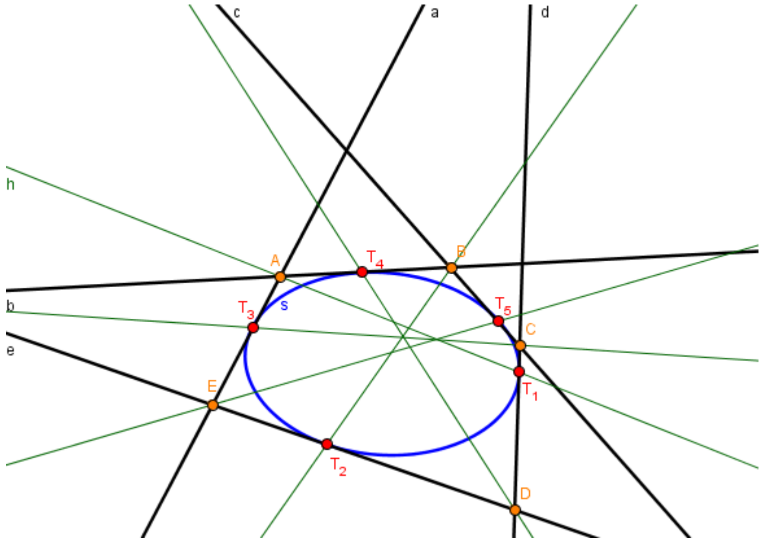

Figura 56. Cónica Puntual tangente a cinco rectas dadas.

Problema 3. Dadas cuatro rectas y un punto, encontrar la cónica tangente a las rectas y que contiene el punto (PRRRR)

Para la solución de este problema se considera el punto dado como el punto de tangencia de alguna recta que conforma, con las cuatro rectas dadas, un pentágono de rectas que inscribe una cónica, es decir, el problema se reduce a encontrar la recta tangente a la cónica, cuyo punto de tangencia es el punto dado, para poder hacer uso del problema 2.1.

Lema 3. Cónica que contiene a 3 puntos dados y un punto variable

Dadas dos rectas a y b, su punto de intersección P, los puntos $A \in a$ y $B \in b$ fijos y un punto Q que no pertenece ni a a ni a b, si un punto $D \in b$ es variable y E es el punto de intersección entre las rectas DQ y a, entonces el punto $F = BE \cap AD$, genera una única cónica que pasa por los puntos A, B y P al mover el punto D sobre la recta b.

Prueba:

Sean las rectas a y b, su punto de intersección P, los puntos $A \in a$ y $B \in b$ fijos y un punto Q que no pertenece ni a a ni a b, sea $D \in b$ un punto variable y E el punto de intersección entre las rectas $c = DQ$ y a, se construyen las rectas $d = AD$ y $e = BE$, el punto $F = d \cap e$ y un nuevo punto $D' \in b$, que representa una ubicación del punto D, en la Figura 57, Fes el punto que genera la cónica al mover el punto D.

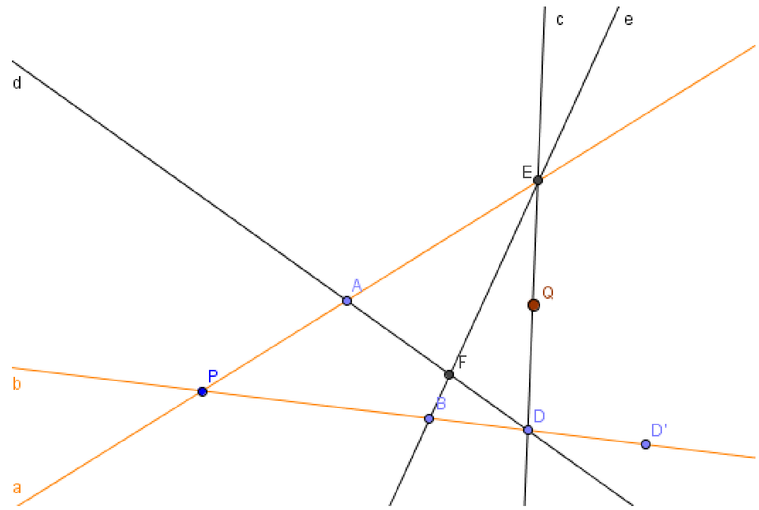

Figura 57. Construcción para Lema 3.

Ahora se construye la recta $f = D'Q$, luego el punto $E' = a \cap f$, después las rectas $g = AD'$ y $h = BE'$ y el punto $G = g \cap h$, entonces considérense los haces de rectas $A(a, d, g)$ y $B(b, e, h)$, que son proyectivos. Obsérvese en la Figura 58 que las rectas a y h (no homólogas) determinan el punto E' y sus correspondientes, b y g, determinan el punto D' y la recta $D'E'$ contiene al punto Q, al igual que la recta DE, en donde el punto E está determinado por la intersección entre a y e, y el punto D está determinado por la intersección de sus homólogas b y d; luego el punto Q es el punto de Pappus para la proyectividad, lo que garantiza que para cualquier punto D, el punto F es el punto de intersección entre dos rectas homólogas, que por Definición de Cónica (Steiner), genera una Cónica Puntual que es única y que contiene a los puntos A y B que son los centros de la proyectividad y al punto P que es un punto de intersección entre rectas homólogas.

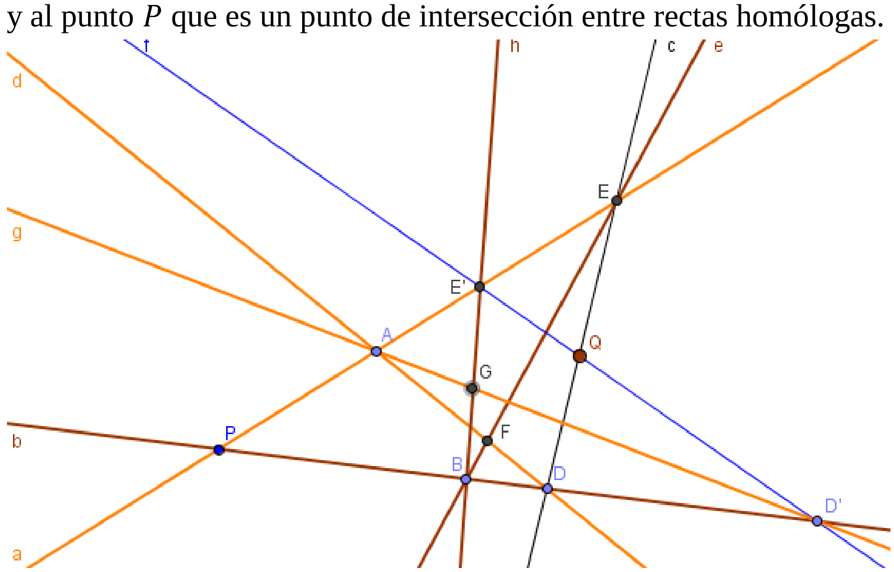

Figura 58. Haces proyectivos para Lema 3.

Teorema 20. Existen dos cónicas que son tangentes a cuatro rectas dadas y contienen un punto dado

Prueba:

Sean a, b, c y d las rectas dadas y P el punto dado, se hallan los puntos $A = a \cap b$, $B = b \cap c$ y $C = c \cap d$, luego se construye la recta $e = BP$, un punto $D \in d$ y la recta $f = DP$, se encuentra el punto $E = a \cap f$, después las rectas $g = AD$ y $h = CE$ y su punto de intersección $F = g \cap h$, que por el Lema 3, genera una única cónica que contiene los puntos Q, A y C, siendo Q el punto de instersección entre las rectas a y d, puesto se tiene D, un punto variable sobre la recta d, la recta $f = DP$, el punto de intersección $E = a \cap f$, las rectas $g = AD$ y $h = CE$ y su punto de intersección F. Se puede construir dicha cónica hallando un punto F' para otro punto D' sobre la recta d. El punto F, genera la región punteada (cónica que contiene los puntos Q, A y C) en la Figura 59.

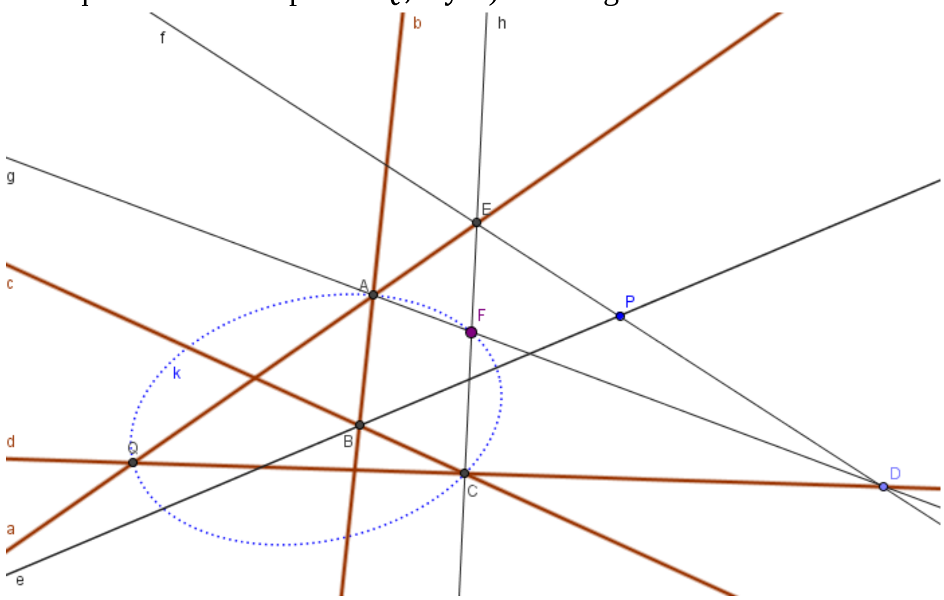

Figura 59. Cónica auxiliar para problema 3.

Sea k la cónica generada por el punto F, se hallan los puntos G y H de intersección de la cónica k con la recta e, se construyen las rectas $i = AG$ y $j = CG$, los puntos $I = j \cap a$ y $J = i \cap d$, haciendo uso nuevamente del Lema 3, los puntos I, J y P son colineales, puesto que el punto I debe ser el punto de la cónica que corresponde al punto J sobre la recta d. Ahora considérese el pentágono determinado por las rectas a, b, c, d y l, donde l está determinada por los puntos I y J, la cónica inscrita en este pentágono corta a la recta l en el punto P, según el Teorema 17, puesto que las rectas e, i y j son concurrentes en el centro pentagonal G, entonces se construye la cónica p que es una de las soluciones al problema y que prueba la existencia de una de las cónicas del problema como se muestra en la Figura 60 (se ocultan las rectas f, g, h y los puntos D, E, F, para simplificar la imagen).

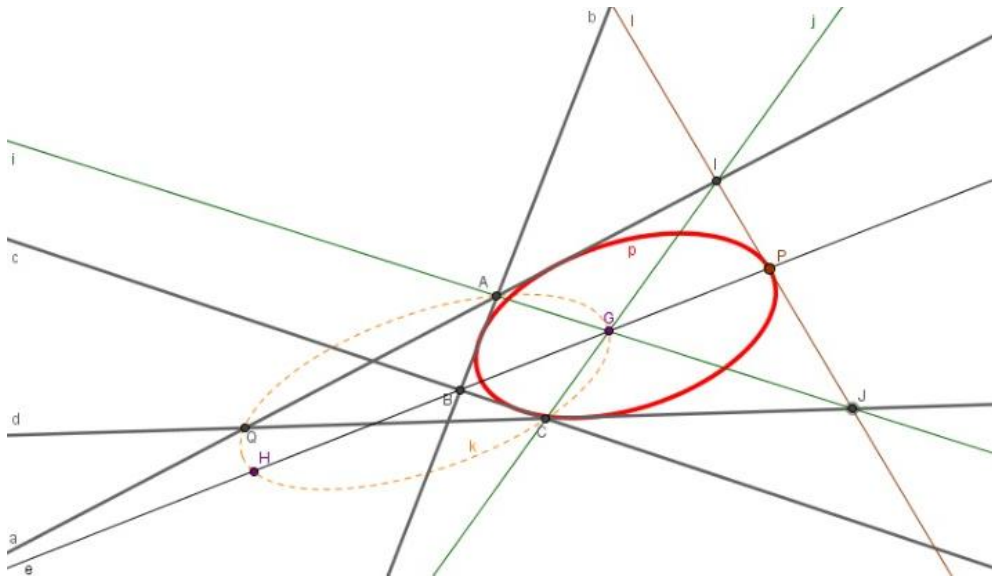

Figura 60. Existencia de una cónica tangente a cuatro rectas y que contiene un punto.

La segunda cónica se encuentra considerando el punto H (otro centro pentagonal) de intersección de la cónica k con la recta e, es decir, se trazan las rectas $m = AH$ y $n = CH$, luego los puntos $S = n \cap a$ y $R = m \cap d$, usando nuevamente el Lema 3 se puede concluir que los puntos $S, R \; y \; P$ son colineales, entonces ahora se considera el pentágono determinado por las rectas a, b, c, d y q, siendo q la recta determinada por los puntos S y R, finalmente se construye la cónica r que está inscrita en el pentágono y contiene a P, según el Teorema 17, la cónica r, que es otra solución al problema, se señala de color azul en la Figura 61, demostrando así el teorema.

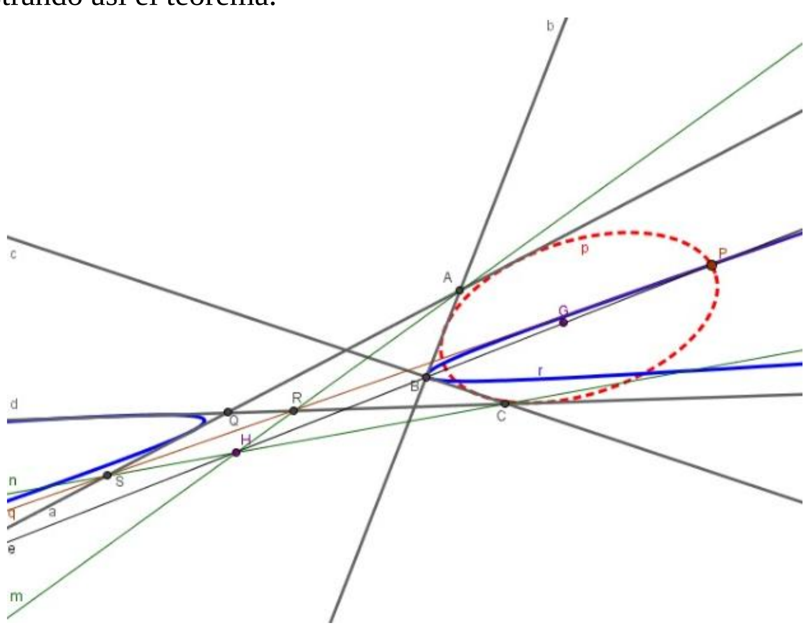

Figura 61. Existencia de dos cónicas tangentes a cuatro rectas y que contiene un punto.

Problema 4. Dada una recta y cuatro puntos, encontrar la cónica tangente a la recta y que contiene los puntos (PPPPR)

Para la solución de este problema se considera la recta dada como la recta tangente que contiene a algún punto que conforma, con los cuatro puntos dados, un pentágono de puntos que está circunscrito una cónica; el problema se reduce a encontrar el punto de tangencia de la cónica, cuya recta tangente es la recta dada, para poder hacer uso del problema 1.

Lema 4. Lema Cónica tangente a 3 rectas dadas y una recta variable

Dados dos puntos A y B, la recta p que determinan, las rectas a y b tales que $A \in a$ y $B \in b$ fijas y una recta q que no pasa ni por A ni por B, si una recta d, tal que $B \in d$ es variable y e es la recta determinada por los puntos $C = d \cap q$ y A, entonces la recta $c = DE$, siendo $D = b \cap e$ y $E = a \cap d$, genera una cónica única tangente a las rectas a, b y p al mover la recta d alrededor del punto B.

Prueba:

Sean los puntos A y B, la recta p que determinan, las rectas a y b, tales que $A \in a$ y $B \in b$ fijas y una recta q que no pasa ni por a ni por b, sea d una recta tal que $B \in d$ variable y e la recta determinada por los puntos $C = d \cap q$ y A, se construyen los puntos $D = a \cap d$ y $E = b \cap e$, la recta $c = DE$ y una nueva recta d' que pasa por el punto B, que representa otra ubicación de la recta d. (Ver Figura 62, la recta c, que genera la cónica, se señala de color marrón).

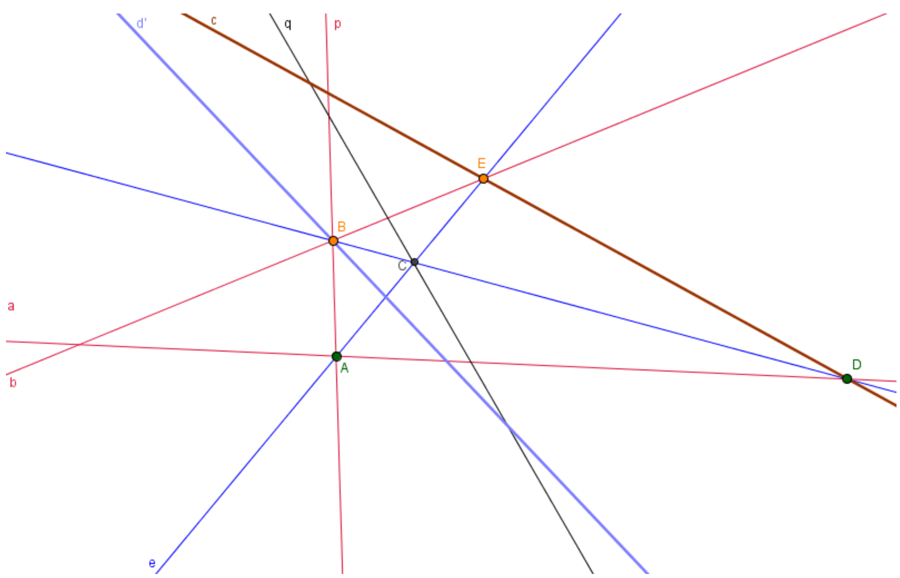

Figura 62. Construcción para Lema 4.

Ahora se construye el punto $F = d' \cap q$, luego la recta $e' = AF$, después los puntos $G = a \cap d'$ y $H = b \cap e'$ y la recta $g = GH$, entonces considérense los haces de puntos $a(A, D, G)$ y $b(B, E, H)$, que son proyectivos. Obsérvese en la Figura 63 que los puntos A y H (no homólogos) determinan la recta e' y sus correspondientes, B y G, determinan la recta d' y el punto $F = d' \cap e'$ pasa por la recta q, al igual que el punto $C = d \cap e$, siendo e la recta determinada por los puntos A y E y d la recta determinada por sus homólogos B y D; luego la recta q es la recta de Pappus para la proyectividad, lo que garantiza que para cualquier recta d, la recta c es el recta determinada por dos puntos homólogos, que por Definición de Cónica tangencial Genera una Cónica Tangencial que es única y que es tangente a las rectas a y b que son los centros de la proyectividad y la recta p que es recta determinada por puntos homólogos.

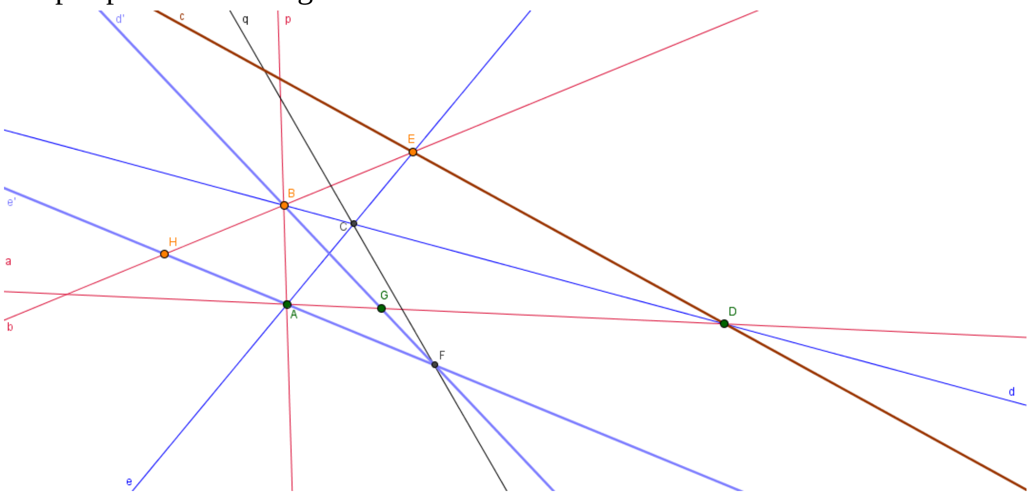

Figura 63. Haces proyectivos para Lema 4.

Teorema 21. Existen dos cónicas que son tangentes a una recta dada y contienen cuatro puntos dados

Prueba:

Sean A, B, C y D los puntos dados y p la recta dada, se hallan las rectas $a = AB$, $b = BC$ y $c = CD$, luego se construye el punto $E = b \cap p$, y una recta d, tal que $D \in d$ y el punto $F = d \cap p$, se traza la recta $e = AF$, después los puntos $G = a \cap d$ y $H = c \cap e$ y la recta $f = GH$, que por el Lema 4, genera una única cónica que es tangente a las rectas q, a y c, (en la Figura 64 se aprecia esta cónica de color amarillo), siendo q la recta determinada por los puntos A y D, puesto que se tiene d, una recta variable que contiene al punto D, un punto $F = d \cap p$, la recta e determinada por los puntos A y F, los puntos $G = a \cap d$ y $H = c \cap e$ y la recta f que determinan estos puntos, como se ilustra en la Figura 64.

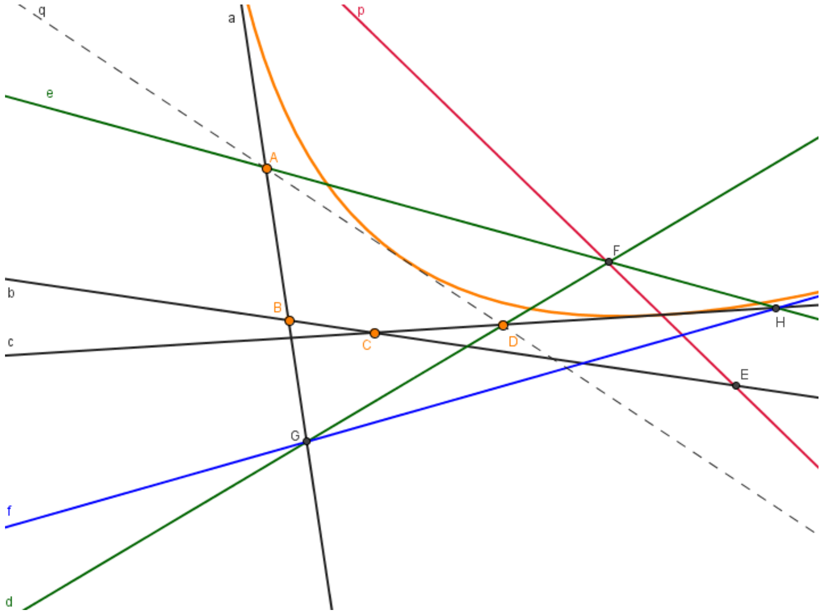

Figura 64 Cónica auxiliar para problema 4

Sea k la cónica generada por la recta f, se hallan las rectas g y h tangentes a la cónica k por el punto E, se construyen los puntos $I = a \cap g$ y $J = c \cap g$ y las rectas $i = ID$ y $j = JA$, haciendo uso nuevamente del Lema 4, las rectas i, j y p son concurrentes, puesto que la recta g debe ser la recta tangente a la cónica que le corresponde a la recta j, que pasa por el punto D. Ahora considérese el pentágono determinado por los puntos A, B, C, D y L, donde L es el punto de concurrencia determinado por las rectas i y j, la cónica circunscrita en este pentágono corta a la recta p en el punto L, según el Teorema 16, puesto que los puntos E, I y J pertenecen a la base pentagonal g, es decir son colineales, entonces se construye la cónica t (En la Figura 65 esta cónica se señala de color rojo) que es una de las soluciones al problema y que prueba la existencia de una de las cónicas del teorema como se muestra en la Figura 65 (se ocultan los puntos F, G, H y las rectas d, e, f, para simplificar la imagen).

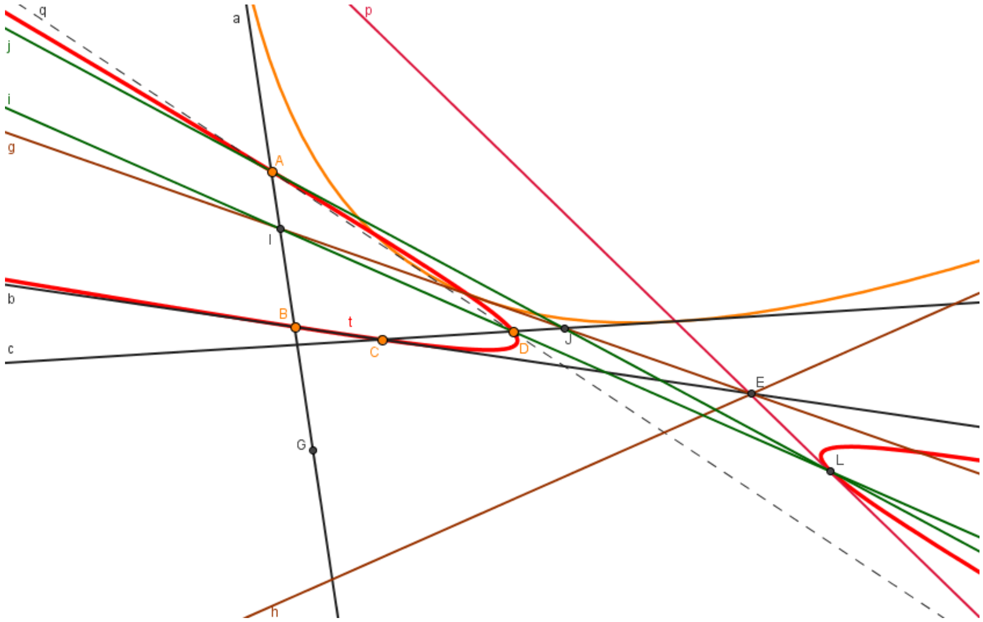

Figura 65. Existencia de una cónica que contiene cuatro puntos y es tangente a una recta.

La segunda cónica se encuentra considerando la base pentagonal h tangente a la cónica k por el punto E, es decir, se hallan los puntos $M = a \cap h$ y $N = c \cap h$, luego las rectas $s = NA$ y $r = MD$, usando nuevamente el Lema 4 se puede concluir que las rectas $s, r\ y\ p$ son concurrentes, entonces, ahora se considera el pentágono determinado por los puntos A, B, C, D y Q, siendo Q el punto determinado por las rectas s y r, finalmente se construye la cónica u (en la Figura 66 se señala la cónica de color azul) que está circunscrita en el pentágono y es tangente a la recta p, según el Teorema 16, demostrando así el teorema.

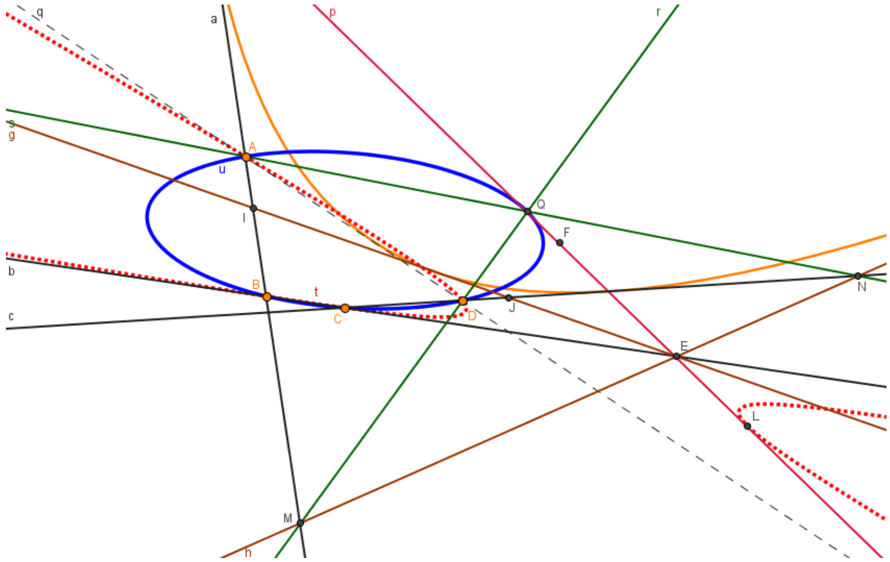

Figura 66. Existencia de dos cónicas que contienen cuatro puntos y es tangente a una recta.

Problema 5: Dadas tres rectas y dos puntos, encontrar la cónica tangente a las tres rectas y que contiene los dos puntos (PPRRR)

Nuevamente se parte de considerar los puntos dados cómo dos puntos de tangencia sobre algún par de rectas, que conforman un pentágono de rectas, con las tres rectas dadas y que inscribe una cónica, para esto, se muestra una manera de encontrar centros pentagonales y rectas pentagonales, debido a que estos objetos son clave en la resolución de este problema.

Lema 5. Lema Punto invariante

Dados los puntos A, B y C, y las rectas a, b y c, tal que $A \in a, B \in b$ y $C \in c$, sea d otra recta que pasa por B variante, la recta $e = DC$, siendo $D = a \cap d$, entonces, para todas las rectas d, la recta de tangencia p que contiene a A, de todas las cónicas tangentes a b, c, d y e y son contienen al punto A, permanece invariante.

Prueba

Sean A, B y C, los puntos dados, las rectas a, b y c, tal que $A \in a, B \in b$ y $C \in c$, d otra recta que pasa por B variante, y $e = DC$, siendo $D = a \cap d$, sea k, una de las cónicas que son tangentes a las rectas b, c, d y e y contiene al punto A, cuya existencia está dada por el Problema 3, se traza la recta p, tangente a k por el punto A, se hallan los puntos $E = p \cap b$ y $F = p \cap c$, considérese el pentágono simple con lados b, d, e, c y p, se trazan las diagonales $g = BF$ y $h = EC$, que deben ser concurrentes con la recta a, puesto que a es una recta pentagonal, como consecuencia del Teorema 17, y puesto que las rectas a, b y c, están fijas, al igual que los puntos A, B y C, la concurrencia siempre se mantiene, para cualquier posición de la recta d, y por tanto la recta p permanece invariante. En la Figura 67, se muestra el punto D, sobre la recta fija a, que varía a medida que lo hace la recta d.

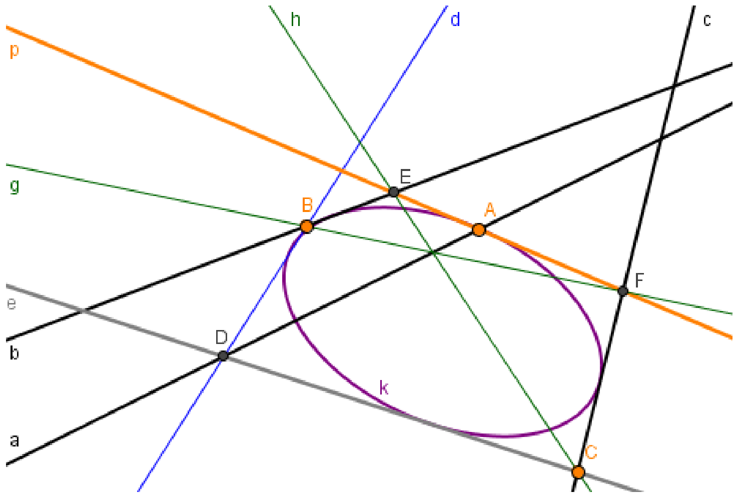

Figura 67. Construcción para el Lema 5.

Lema 6. Lema Punto de tangencia, pentágono de rectas

Si un pentágono simple $(abcde)$, tal que $A = a \cap e$, B= $b \cap a$, C= $c \cap b$, D= $d \cap c$ y E= $e \cap d$ inscribe una cónica s, de tal manera que los puntos de tangencia en los lados c y d, son T y U respectivamente, sea $b \cap f = X$ y $b \cap d = Z$, donde $f = AT$, por definición f una recta pentagonal, además se construye $h \cap g = P$, donde h es la diagonal que pasa por los punto E y C, es decir que P es un centro pentagonal y g es la recta pentagonal BU, entonces la recta g es tangente en P a la cónica r, determinada por los puntos A, E, X, Z y P,como muestra la Figura 68, (la cónica r se señala con color azul y la cónica s de color violeta).

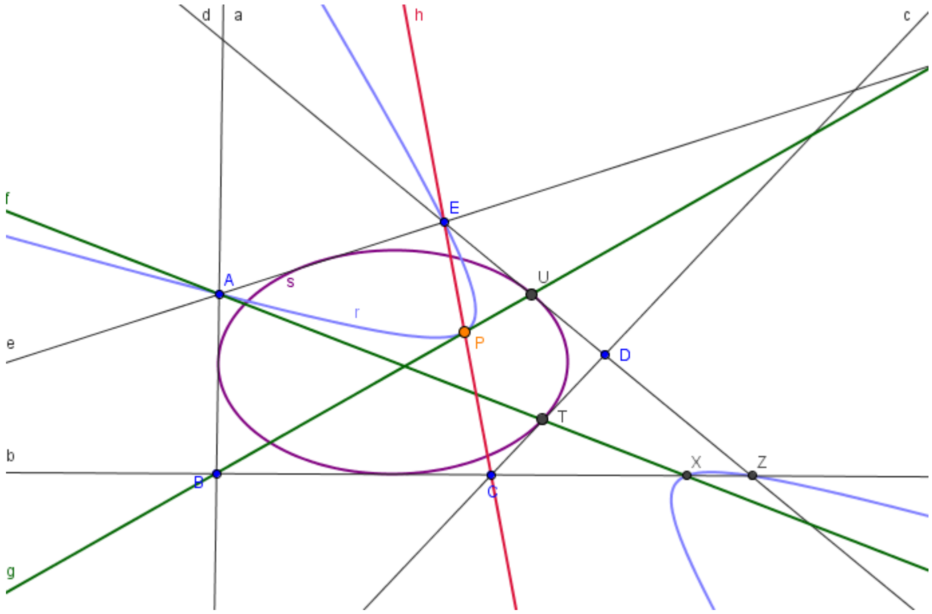

Figura 68. Ilustración para el Lema 6.

Prueba:

Considérese la construcción de la Figura 68, se traza la diagonal $i = AD$, que por el Teorema 17, las rectas g, i y h deben ser concurrentes en P, por tanto, la recta i debe contener al centro pentagonal P, es decir, los puntos A, P y D son colineales, sea el punto $F = f \cap h$ otro centro pentagonal y la diagonal $j = BD$, que debe contener al punto F nuevamente usando el Teorema 17, es decir que los puntos B, F y D, son colineales, entonces considérese el pentágono simple $(AXZEP)$, nótese que es un pentágono inscrito a la cónica r, donde los lados i y d, se intersecan en el punto D, los lados h y f, se intersecan en el punto F y el lado b se interseca con la recta pentagonal g en el punto B, usando de manera recíproca el Teorema 16, la recta g debe ser tangente a la cónica r, tomando a B como punto pentagonal puesto que los puntos B, F y D son colineales en la base pentagonal j, y como $P = r \cap g$, entonces P debe ser el punto de tangencia como expone la Figura 69, donde la recta g aparece con color fucsia.

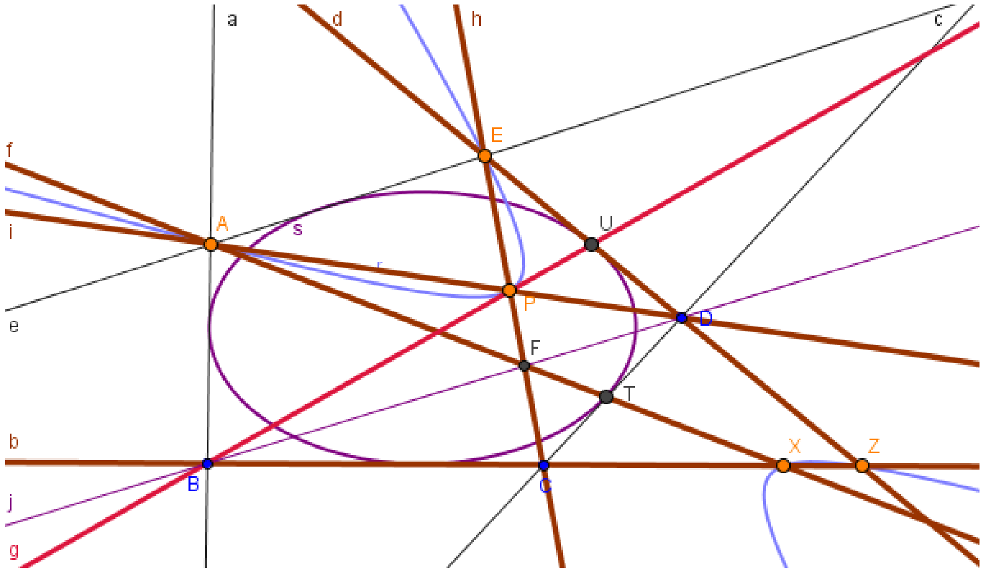

Figura 69. Pentágono inscrito para Lema 6.

Nota: Este teorema puede ser usado para encontrar el centro pentagonal P, si se tiene la recta pentagonal g, usando el Problema 4 para encontrar una de las cónicas que pasan por los puntos A, E, X y Z y son tangentes a la recta pentagonal g, luego, hallar el punto de tangencia que es P, además se puede hallar el punto F, si se tiene la recta pentagonal f, hallando los puntos $Y = e \cap g$ y $W = e \cap c$, luego, una de las cónicas que pasan por los puntos B, C, Y y W y son tangentes a la recta pentagonal f y finalmente el punto de tangencia que es F, es decir, si se tienen las rectas pentagonales g y f se puede encontrar la recta h que esta determinada por los puntos F y P y como h es una diagonal se pueden encontrar los vértices E y C del pentágono que inscribe la cónica s. En la Figura 70 se aprecian las cónicas auxiliares de colores azul y rojo respectivamente y los puntos P y F que son centros pentagonales sobre las rectas pentagonales g y f, respectivamente.

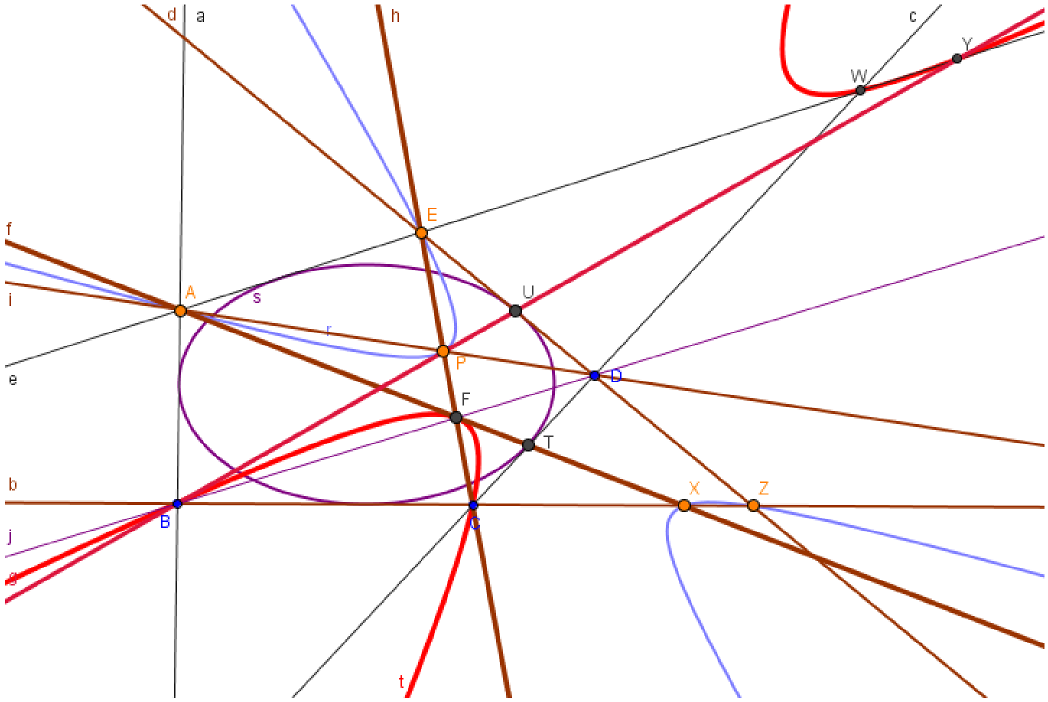

Figura 70. Hallar vértices de un pentágono que inscribe una cónica.

Existen cuatro cónicas que son tangentes a tres rectas dadas y contienen dos puntos dados

Prueba:

Sean a, b y c, las rectas dadas y P y Q los puntos dados, sean los puntos $A = a \cap b$ y $B = b \cap c$, se construyen las rectas $d = AQ$ y $e = BP$, se pretende encontrar dos rectas, i y j, que junto con las rectas a, b y c conformen un pentágono, de tal manera que al inscribir una cónica en este, los puntos de tangencia en esas rectas sean P y Q, es decir, considerar d y e como rectas pentagonales.

Sea C un punto variable sobre la recta c, se traza la recta $g = CQ$, se encuentran los puntos de intersección $D = a \cap e$ y $E = a \cap g$, luego se hallan las cónicas r y s que pasan por los puntos B, C, D y E y que son tangentes a la recta d, como muestra la Figura 71, cuya existencia está dada por el Problema 4, en esta figura la cónica s es la curva de color azul y la cónica r de color marrón. Sea M el punto de intersección entre la cónica r y la recta d y F el punto de intersección entre la cónica s y la recta d, estos puntos son invariantes como asegura el Lema 5, además, por el Lema 6, se puede afirmar que los puntos M y F son centros pentagonales para cualquier pentágono donde la recta g es el lado opuesto al vértice A.

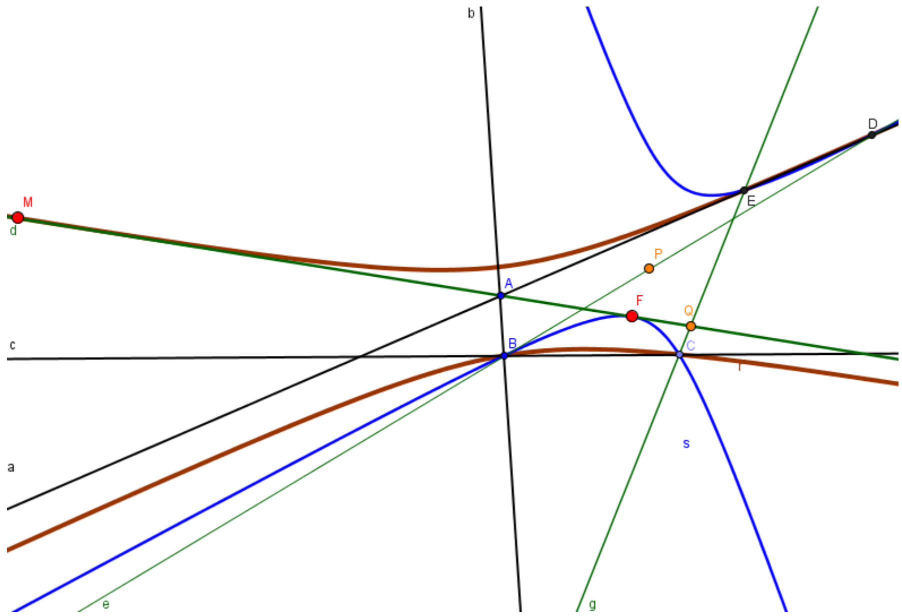

Figura 71. Puntos de tangencia sobre las cónicas r y s.

Para encontrar los centros pentagonales sobre la recta pentagonal e, se halla un punto G variante sobre la recta a, se traza la recta $h = GP$, se hallan los puntos $I = c \cap h$ y $H = c \cap d$, luego se encuentran las cónicas t y u, que pasan por los puntos A, G, I y H y son tangentes a la recta pentagonal e, cuya existencia está dada por el Problema 4, sea N el punto de intersección entre la cónica u y la recta e y J el punto de intersección entre la cónica t y la recta e, que son invariantes según el Lema 5 y son centros pentagonales según el Lema 6. A continuación, en la Figura 72. se ocultan las cónicas r y s para simplificar la imagen, la cónica u se señala de color rojo y la cónica t de color violeta.

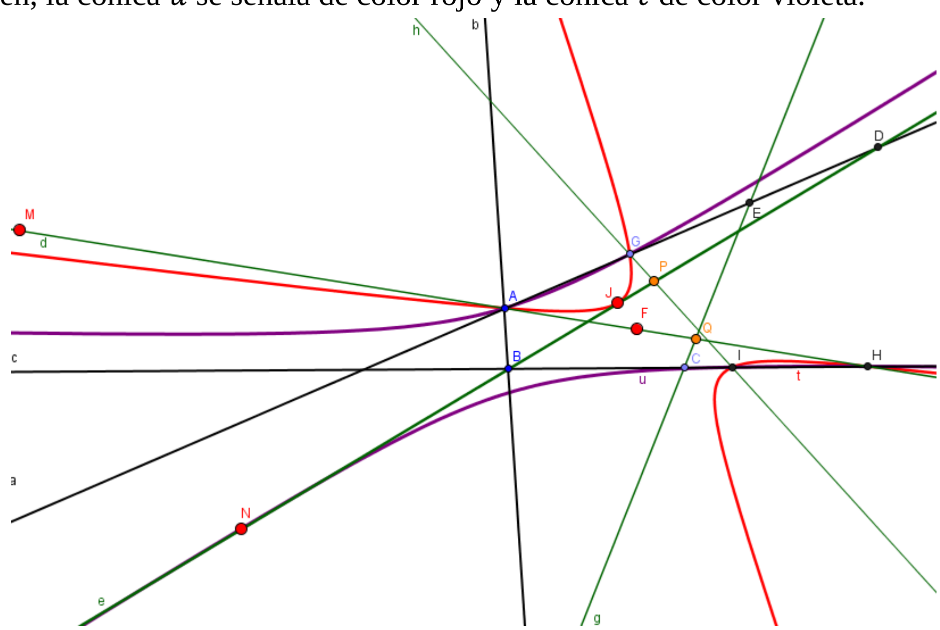

Figura 72. Puntos de tangencia sobre las cónicas t y u.

Entonces se han obtenido cuatro centros pentagonales F, J, M y N, recurriendo al Lema 6 se puede asegurar que la recta determinada por uno de esos puntos sobre la recta pentagonal d y otro de esos puntos sobre la recta pentagonal e, es una diagonal del pentágono que se está buscando, luego esta diagonal interseca a las rectas a y c, en los vértices del pentágono que se quiere encontrar, por ejemplo, considérense los puntos J y F, sea la recta $f = FJ$ (diagonal del pentágono), y los puntos $K = a \cap f$ y $L = c \cap f$, que son los vértices buscados, luego las rectas que completan el pentágono son $i = KP$ y $j = LQ$, el problema se reduce a encontrar la cónica k inscrita en el pentágono $(abcij)$, cuya existencia está dada por el Problema 2.1, así se ha mostrado la existencia de una de las cónicas (Ver Figura 73, se ocultan las cónicas t y u para simplificar la imagen, la cónica k se señala de color anaranjado).

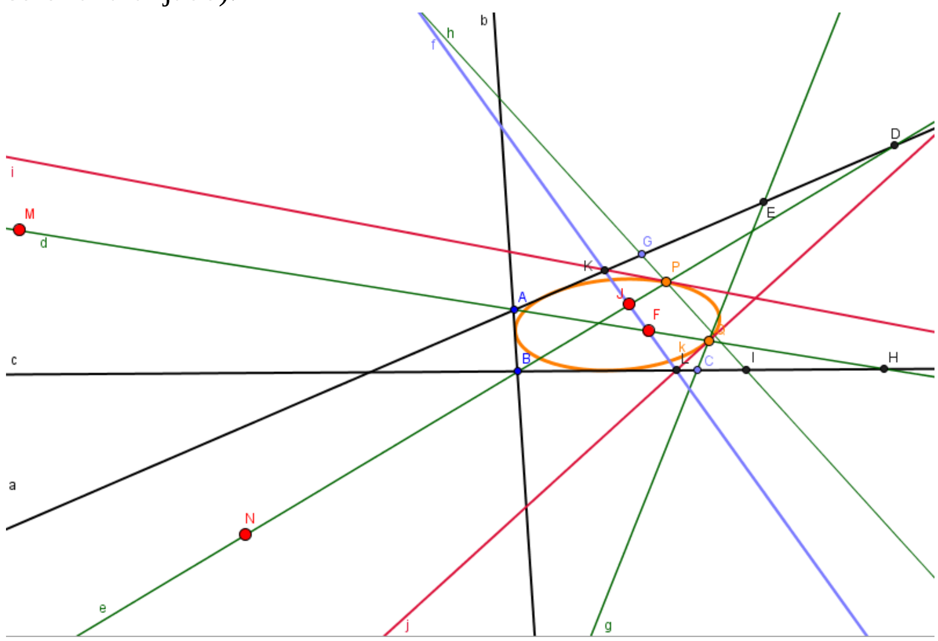

Figura 73. Una solución al problema 5.

Para una segunda solución considérense, por ejemplo, los puntos J y M, entonces se construye la recta $l = JM$ (Diagonal del pentágono), hállense los puntos $S = a \cap l$ y $T = c \cap l$ (vértices del pentágono), luego las rectas $m = TQ$ y $n = SP$ (lados del pentágono), finalmente se encuentra la cónica inscrita en el pentágono $(abcmn)$, que es otra cónica solución. esta cónica se señala de color violeta en la Figura 74 Otra cónica solución para el problema 5.

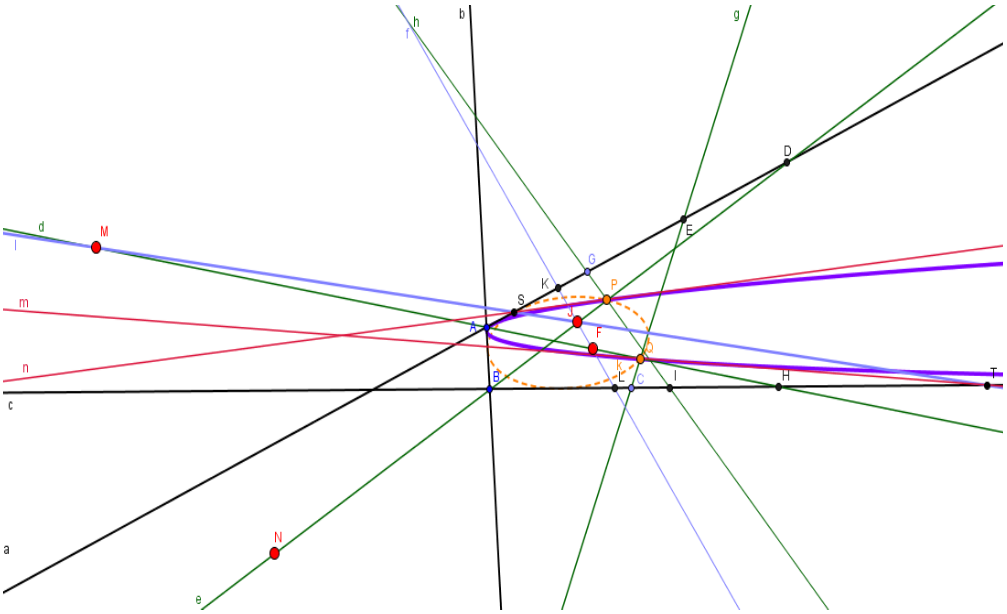

Figura 74 Otra cónica solución para el problema 5

Entonces al considerar la pareja de puntos M y N se obtiene la tercera solución y al considerar la pareja de puntos N y N se obtiene la cuarta, quedando demostrado el teorema.

Problema 6: Dados tres puntos y dos rectas, encontrar la cónica tangente a las dos rectas y que contiene los tres puntos (PPPRR)

Nuevamente se consideran las rectas dadas cómo dos rectas tangentes que contiene a algún par de puntos, que conforman un pentágono de puntos, con los tres puntos dados y que está circunscrito en una cónica, para esto, se muestra una manera de encontrar bases pentagonales y puntos pentagonales, debido a que estos objetos son clave en la resolución de este problema.

Lema 7. Lema recta invariante

Dadas las rectas a, b y c, y los puntos A, B y C, tal que $A \in a, B \in b$ y $C \in c$, D otro punto sobre B variante, $E = d \cap c$, siendo $d = AD$, entonces, para todos los puntos D, el punto de tangencia P contenido en a, de todas las cónicas que pasan por los puntos B, C, D y E y son tangentes a la recta a, permanece invariante.

Prueba

Sean a, b y c, las rectas dadas y los puntos A, B y C dados, tal que $A \in a, B \in b$ y $C \in c$, D otro punto sobre b variante, y $E = d \cap c$, siendo $d = AD$, sea k, una de las cónicas que pasa por los puntos B, C, D y E y es tangente a la recta a, cuya existencia está dada por el Problema 4, se halla el punto P de tangencia en k sobre la recta a, se hallan las rectas

$e = PB$ y $f = PC$, considérese el pentágono simple cuyos con vértices B, D, E, C y P, escritos de manera ordenada, se trazan los puntos diagonales $G = b \cap f$ y $H = e \cap c$, que deben ser colineales con el punto A, como se muestra en la Figura 75, puesto que A es un punto pentagonal, como consecuencia del Teorema 16, y puesto que los puntos A, B y C, están fijos, al igual que las rectas a, b y c, la colinealidad siempre se mantiene, para cualquier posición del D, y por tanto el punto P permanece invariante.

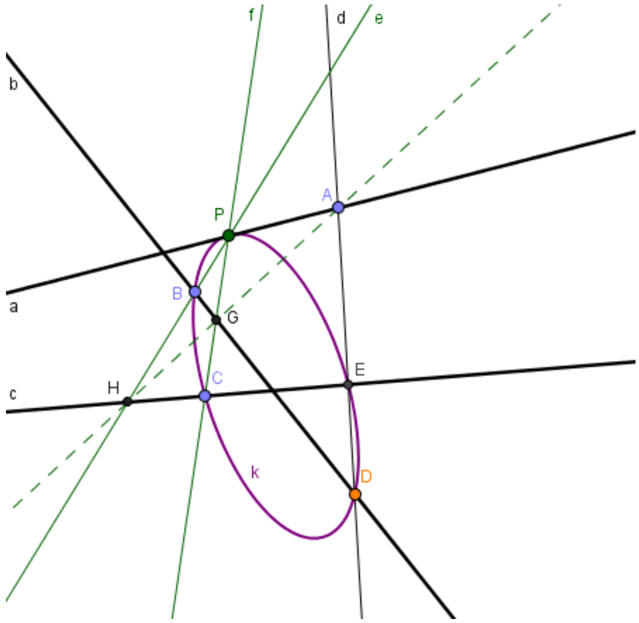

Figura 75. Construcción para Lema 7.

Lema 8. Lema punto de tangencia, pentágono de puntos

Si un pentágono $(ABCDE)$ tal que $a = AE$, $b = AB$, $c = BC$, $d = CD$, $e = DE$ y el pentágono circunscribe una cónica s, de tal manera que las rectas de tangencia en los vértices C y D, son t y u respectivamente, sea $BF = x_1$, donde $F = a \cap t$, por definición F es un punto pentagonal y sea $BD = z_1$, además $HG = p$, donde el punto H es diagonal del pentágono, dado por la intersección de los lados c y e, (p es una base pentagonal) y G es el punto pentagonal determinado por las rectas b y u, entonces G es el punto de tangencia en p, a la cónica r tangente a las rectas a, e, x_1, z_1 y p. En la Figura 76 la cónica s se señala de color violeta y la cónica r de color azul.

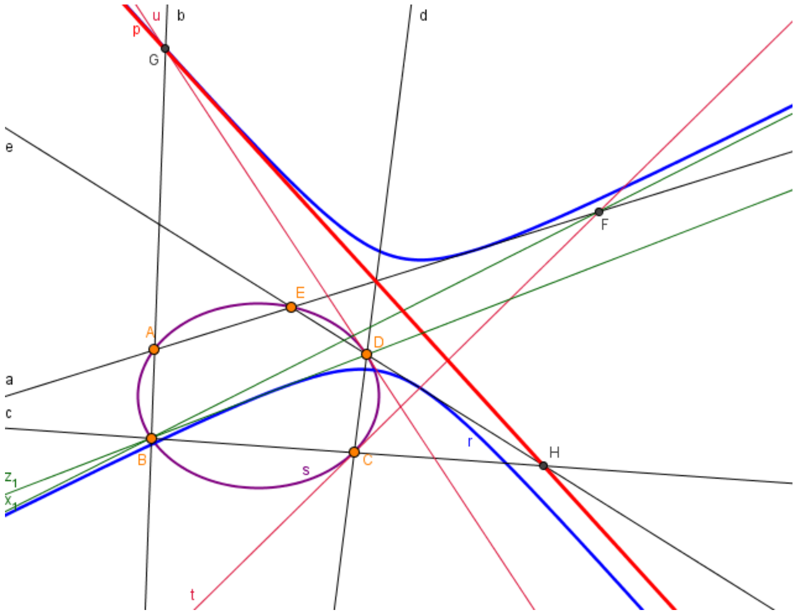

Figura 76. Ilustración para Lema 8.

Prueba:

Considérese la construcción de la Figura 76, se halla la el punto diagonal $I = a \cap d$, que por el Teorema 16 los puntos G, I y H debe estar contenido en la recta p, por tanto, el punto I debe estar en la base pentagonal p, es decir, las rectas a, p y d son concurrentes, sea la recta $f = FH$ otra base pentagonal y el punto diagonal $J = b \cap d$, que debe estar contenido en la recta f nuevamente usando el Teorema 16, es decir que las rectas b, f y d, son concurrentes, entonces considérese el pentágono simple (ax_1z_1ep), nótese que es un pentágono circunscrito en la cónica r, donde los vértices I y D están sobre la recta d, los vértices H y F, están sobre la recta f y el vértice B junto con el punto pentagonal G están en la recta b, usando de manera recíproca el Teorema 17, el punto G debe ser el punto de tangencia a la cónica r, tomando a b como recta pentagonal puesto que las rectas b, f y d son concurrentes en el centro pentagonal J, y considerando H como punto pentagonal, p debe ser la recta de tangencia, tal como se ilustra en la Figura 77.

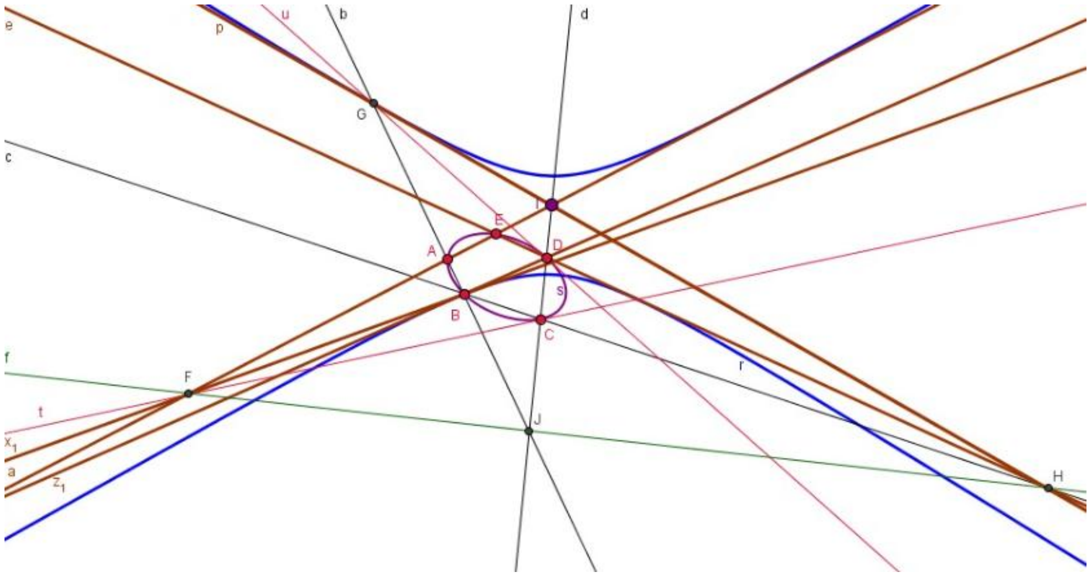

Figura 77. Pentágono circunscrito para Lema 8.

Nota: Este teorema puede ser usado para encontrar la base pentagonal p, si se tiene el punto pentagonal G, usando el Problema 3 para encontrar una de las cónicas que son tangentes a las rectas a, e, x_1 y z_1 y pasan por el punto pentagonal G, luego, hallar la recta de tangencia que es p, además se puede hallar la base pentagonal f, si se tiene el punto pentagonal F, hallando las rectas $y_1 = EG$ y $w = EC$, luego, una de las cónicas que son tangentes a las rectas b, c, y y w y pasan por el punto pentagonal F y finalmente se halla la recta f tangente dicha cónica (cónica t que en la Figura 78 se señala de color rojo) por el punto F, es decir, si se tienen los puntos pentagonales G y F se puede encontrar el punto H que esta determinado por las rectas f y p y como H es un punto diagonal se pueden encontrar los lados e y c del pentágono que circunscribe la cónica s (Ver Figura 78).

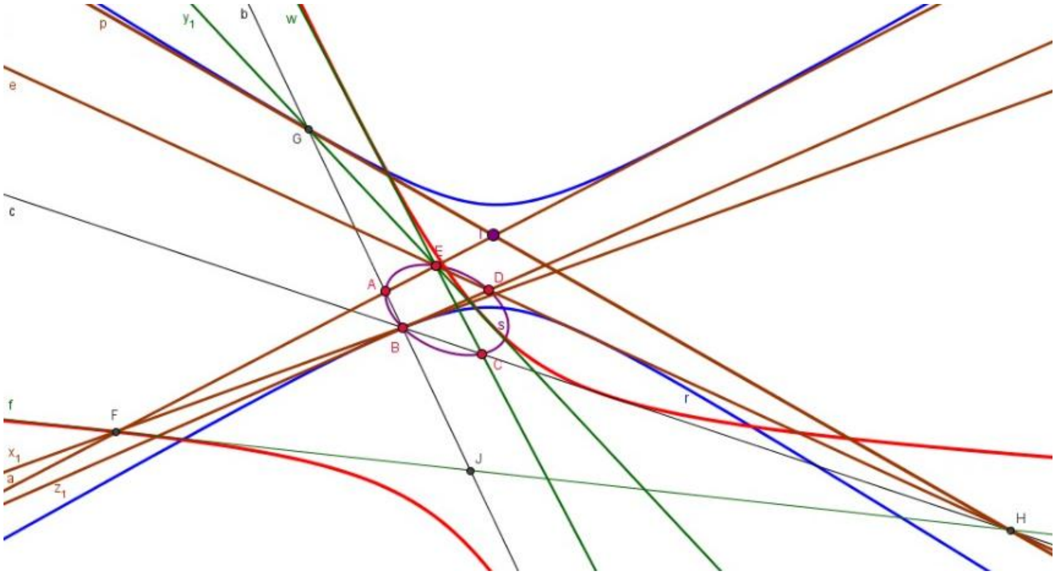

Figura 78. Hallar base pentagonal del Lema 8.

Teorema 22. Existen cuatro cónicas que son tangentes a dos rectas dadas y contienen tres puntos dados

Prueba:

Sean A, B y C, los puntos dados y p y q, las rectas dadas, sean, $a = AB$ y $b = BC$, se construyen los puntos $D = a \cap q$ y $E = b \cap p$, se pretende encontrar dos puntos, I y J, que junto con los puntos A, B y C conformen un pentágono, de tal manera que, al estar circunscrito en una cónica w, las rectas de tangencia en esos puntos sean p y q, es decir, considerar D y E como puntos pentagonales.

Sea c una recta variable que pasa por el punto C, se traza el punto $G = c \cap q$, se trazan las rectas $d = AE$ y $e = AG$, luego se hallan las cónicas r y s que son tangentes a las rectas b, c, d y e, y que pasan por el punto D, como muestra la Figura 79, cuya existencia está dada por Problema 3, en esta figura la cónica s es la curva de color roja y la cónica r de color azul. Sea m la recta tangente a la cónica r por el punto D y f la recta tangente a la cónica cónica s por el punto D, estas rectas son invariantes como asegura el Lema 7, además, por el Lema 8, se puede afirmar que las rectas m y f son bases pentagonales para cualquier pentágono donde el punto G es el vértice opuesto al lado a, estas bases pentagonales se marcan de color rojo en la Figura 79.

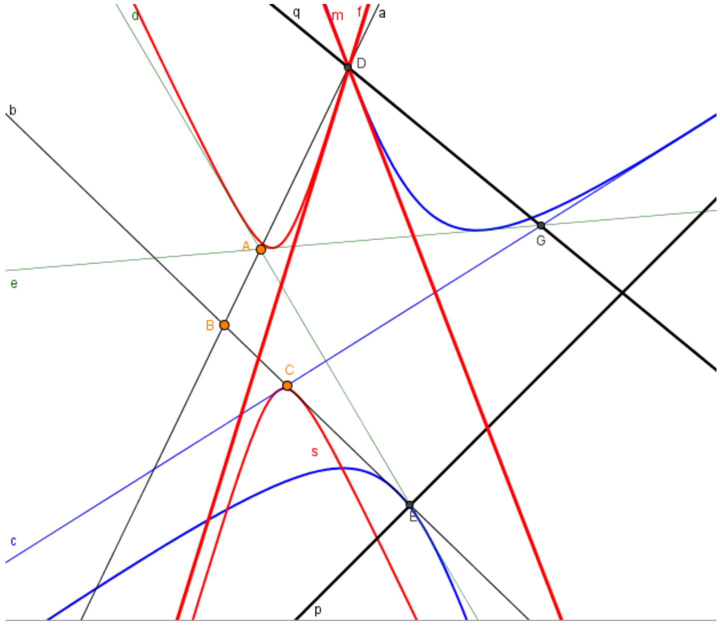

Figura 79. Puntos de tangencia sobre las cónicas r y s.

Para encontrar las bases pentagonales sobre el punto pentagonal E, se halla una recta g variante sobre el punto A, se traza el punto $H = g \cap p$, se hallan las rectas $i = CH$ y $h = CD$, luego se encuentran las cónicas t y u, tangentes a las rectas a, g, i y h y pasan por el punto pentagonal E, cuya existencia está dada por el Problema 3 sea n la recta tangente a la cónica u por el punto E y j la recta tangente a la cónica t en el punto E, que son invariantes según el Lema 7 y son bases pentagonales según el Lema 8 (Ver Figura 80, se ocultan las cónicas r y s para simplificar la imagen, la cónica u se señala de color morado y la cónica t de color anaranjado).

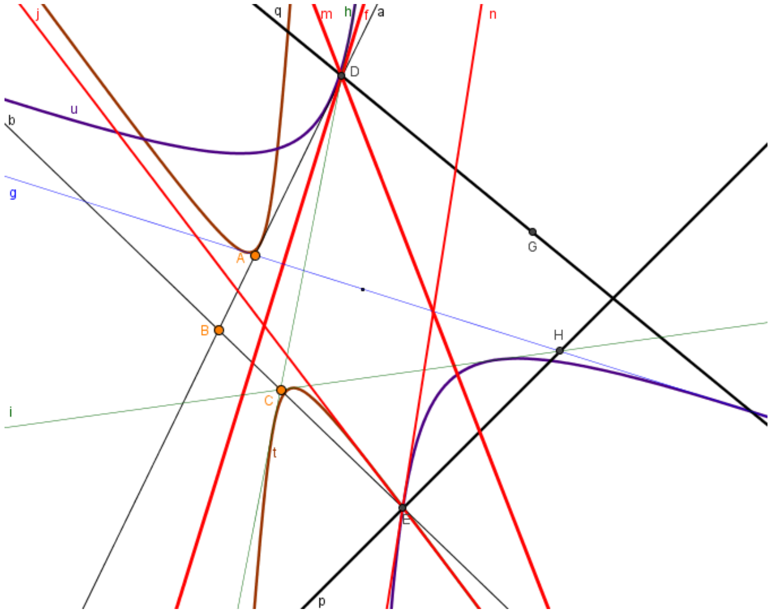

Figura 80. Rectas de tangencia sobre las cónicas t y u.

Entonces se han obtenido cuatro bases pentagonales f, j, m y n, recurriendo al Lema 8 se puede asegurar que el punto de intersección entre dos de estas rectas, una que pasa por D y otra que pasa por E, es un punto diagonal del pentágono que se está buscando, luego la unión del punto diagonal con el punto A determinan un lado del pentágono que se quiere encontrar y la unión del punto pentagonal con el punto C determinan el otro lado del pentágono, por ejemplo, considérense las rectas j y f, sea el punto $F = f \cap j$ (punto diagonal del pentágono), y las rectas $k = AF$ y $l = CF$, que son los lados buscados, luego los puntos que completan el pentágono son $I = k \cap p$ y $J = l \cap q$, el problema se reduce a encontrar la cónica w circunscrita en el pentágono $(ABCIJ)$, cuya existencia está dada por el ,Problema 1, así se ha mostrado la existencia de una de las cónicas. En la Figura 81, se ocultan las cónicas t y u para simplificar la imagen, la cónica w se señala de color anaranjado.

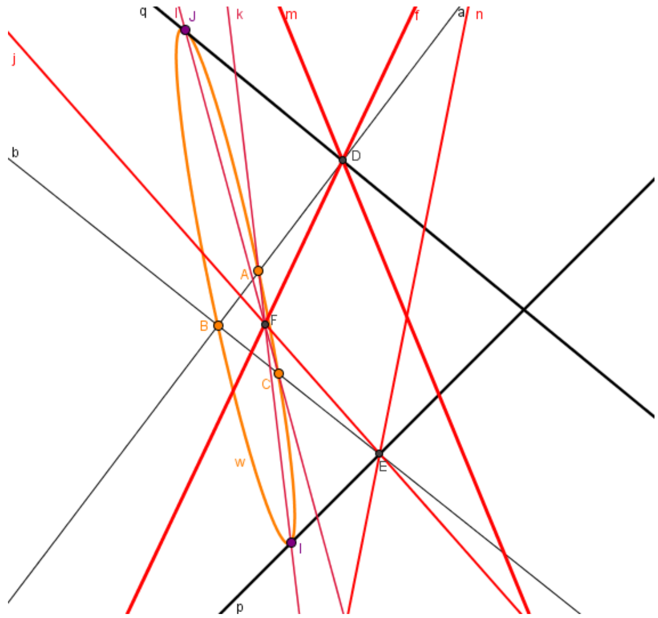

Figura 81. Una solución al problema 6.

Para una segunda solución considérense, por ejemplo, las rectas n y m, entonces se construye el punto $L = n \cap m$ (punto diagonal del pentágono), hállense las rectas $s = AL$ y $t = CL$ (lados del pentágono), luego los puntos $M = t \cap q$ y $N = s \cap p$ (vértices del pentágono), finalmente se encuentra la cónica circunscrita en el pentágono ($ABCMN$), que es otra cónica solución. esta cónica se señala de color violeta en la Figura 82.

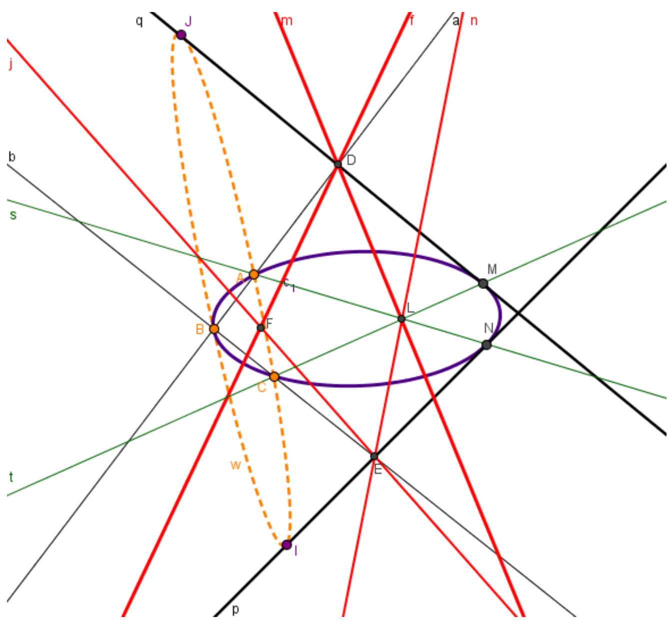

Figura 82. Otra cónica solución para el problema 6.

Entonces al considerar la pareja de rectas m y j se obtiene la tercera solución y al considerar la pareja de rectas n y f se obtiene la cuarta, quedando demostrado el teorema.

Conclusiones, reflexiones y proyecciones

Conclusiones

La consideración del Problema de Apolonio como punto de partida del trabajo, generó una forma organizada de plantear el problema de investigación y listar los casos que de él se desprenden, para iniciar el estudio, abordando convenientemente aquellos que se desarrollaron en el trabajo (los que involucran únicamente puntos y rectas). Se puede afirmar que fue conveniente comenzar por los problemas que refieren solamente puntos y rectas, debido a que, para su solución se contó con las construcciones de la Cónica Puntual y La Cónica Tangencial, además, la posibilidad de hacer uso del principio de dualidad, que resultó ser una gran ventaja, ya que, al conseguir la solución de alguno de estos problemas, inmediatamente se podía considerar el problema dual.

Trabajar sobre el sistema axiomático de la geometría proyectiva, ofreció las herramientas suficientes para dar solución a los seis problemas considerados en los objetivos, asegurando la existencia de sus soluciones y señalando el número de soluciones en cada caso. Se debe anotar que en los conceptos utilizados no se recurrió a la geometría analítica, es decir que el estudio se limitó al trabajo exclusivo con objetos geométricos de forma sintética, sin considerar en ningún momento tratamientos numéricos.

En síntesis, se puede asegurar que el trabajo ha respondido a los objetivos trazados, puesto que, se dio solución a los seis problemas de tangencia en cónicas que involucran solamente puntos y rectas, mostrando su construcción argumentada desde el marco de la geometría proyectiva, lo que implicó realizar una consulta con la que se logró consolidar los conceptos preliminares requeridos para la investigación. Además, aunque en el documento no se puede apreciar precisamente, fue necesario usar un software de geometría dinámica con dos finalidades, la primera, generar todas las imágenes que se presentan a lo largo del trabajo con el ánimo de facilitar la comprensión del lector y la segunda, usarla como una herramienta de visualización que permitió realizar conjeturas que aportaron significativamente a la solución de algunos problemas.

Reflexiones

El abordaje de un trabajo netamente disciplinar como el que aquí se presentó, proporcionó grandes aportes a la formación como maestros de matemáticas de los autores, pues durante el desarrollo de la investigación surgieron etapas que contribuyeron con aprendizajes significativos, algunas de esas etapas fueron las siguientes:

- La necesidad de consultar material bibliográfico que aporte a la investigación, señaló que en muchas ocasiones esto puede resultar una tarea difícil, porque puede que sea necesario estudiar una teoría con la que no se haya tenido contacto previo, para abrirse camino con herramientas que pueden servir para el estudio o para comprender conceptos preliminares del estudio.
- Explorar un problema, hasta encontrar su solución, ratifica una buena manera de estudiar matemáticas, pues en dicha exploración se atraviesa por muchos procesos, como la visualización, la conjeturación, la generalización, entre otros, para posteriormente mostrar una estructura argumentada de la solución del problema.
- El desarrollo del trabajo da evidencia de la capacidad de trabajar de forma autónoma y de investigar individualmente en matemáticas, es decir que los autores del trabajo pueden complementar su formación en la disciplina estudiando de forma autónoma.
- En el proceso de construcción del documento se encontró, que la comunicación de ideas matemáticas requiere de cuidado, sea de forma oral o de forma escrita, pues al incluir nuevas representaciones, nuevas notaciones o notaciones que no son usuales, puede generarse confusión si no se es lo suficientemente claro, en otras ocasiones, se tiende a suponer que el lector tiene la suficiente información preliminar para comprender una idea y se pasan por alto algunas aclaraciones importantes. Por lo anterior y por otras experiencias que dejó la escritura del trabajo, se considera que aportó herramientas para la habilidad de comunicación, en particular comunicar ideas matemáticas en forma didáctica.

Proyecciones

Después de haber iniciado el estudio de problemas de tangencia sobre cónicas diferentes a la circunferencia, con la resolución de algunos de estos problemas, se marcan diferentes rutas para continuar con esta investigación, por ejemplo, considerar nuevamente los veintiún problemas que se desprenden de la modificación del Problema de Apolonio, categorizar aquellos quince que quedaron pendiente por su solución, de tal manera que se solucione secuenciadamente dando solución a esto, con la gran posibilidad de no poder hacer uso de algunas herramientas importantes como el principio de dualidad. En relación con lo anterior, es posible que se deba ampliar significativamente el conjunto de conceptos preliminares provenientes de la geometría proyectiva, lo que invita a un estudio previo y cuidadoso de este tópico.

Por otra parte, debido a que en este trabajo se presentan soluciones netamente sintéticas, se puede pensar en hacer uso de ellas para encontrar soluciones analíticas, hallando una representación algebraica de todos los objetos geométricos que aquí se mencionan, no obstante, cabe la posibilidad de que resulte demasiado incómodo trabajar de esa manera, sin embargo, se pueden considerar las soluciones analíticas desde otro punto de partida, sea para los problemas aquí tratados o para todos los casos listados.

Una forma sugerida de exploración de problemas de tangencia es recurrir a recursos tecnológicos como softwares de geometría dinámica, puesto que estos cuentan con herramientas que facilitan las construcciones geométricas, amplían las posibilidades de visualización y las posibilidades de evaluación de casos, de esta manera se pueden encontrar formas de solucionar los problemas que no se consideraron en este trabajo, una vez obtenida la solución, se debe buscar el argumento teórico que la sustente. De acuerdo con lo anterior, también se sugiere no considerar limitaciones en los referentes teóricos que se utilizan, es decir, considerar la posibilidad de abordar campos diferentes a la geometría euclidiana y la geometría proyectiva.

Referencias

[1] F. Ayres, *Teoría y problemas de geometría proyectiva*, Mexico: McGraw Hill, 1971.

[2] N. Henao and F. *Rincón*, *Problemas de tangencia en elipses y circunferencias.* (Documento no publicado)

[3] Mathwonders, *[materia] Cuaterna armónica*, [video] [video] Available at: https://www.youtube.com/watch?v=plNKIJU7Bl8 [Accessed 10 Oct. 2017], 2013.

[4] L. Ortega and T. Ortega, *Los diez problemas de Apolonio*, SUMA **59**, 2004.

[5] F. Tapias, *Apolonio, el geómetra de la antigüedad*, Apuntes de la historia de las matemáticas **19,** 2002.

Anexos

Anexo1: Solución sintética de algunos casos del Problema de Apolonio

En el artículo Los diez problemas de Apolonio de la revista SUMA se expone una solución sintética y analítica a los diez casos, aclarando que Apolonio soluciona los nueve primeros que allí se exponen, en los libros I y II de su obra *Tangencias*, a pesar de que estos libros se han perdido, la solución al décimo caso se le atribuye a Isaac Newton. A continuación, se exponen las soluciones sintéticas de los casos que se desprenden del problema de Apolonio tomados como modelo para dar solución a problemas de tangencias en otras cónicas, seleccionando también aquellos que relacionan puntos y rectas únicamente.

Circunferencia que pase por tres puntos dados (PPP).

Hallar una circunferencia que contenga a los puntos A, B y C dados.

Solución sintética

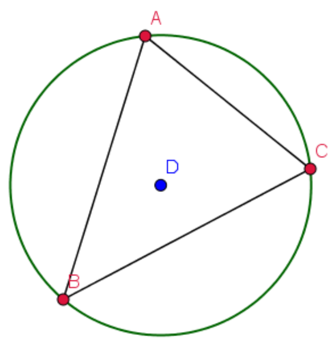

Figura 83. Construcción sintética del Problema PPP.

1. Sean A, B y C tres puntos no colineales dados.
2. ΔABC
3. D circuncentro del ΔABC
4. Se halla la circunferencia con centro en D y radio DA, que pasa por los punto A B y C

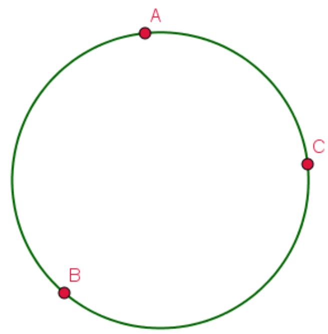

Figura 84. Solución sintética del problema PPP:

Circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una recta dada (PPR).

Hallar dos circunferencias tangentes a la recta r, que contenga a los puntos B y A.

Solución sintética

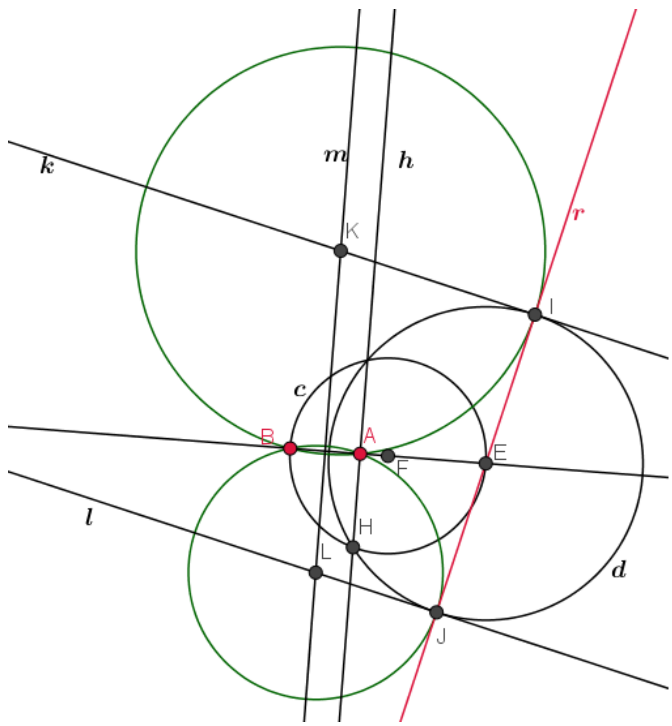

Figura 85. Construcción sintética del problema PPR.

1. Sean los puntos A y B dados y la recta r dada.
2. Recta AB
3. E punto de intersección de la recta AB y la recta r. De tal manera que $B - A - E$.
4. F punto medio del segmento AE.
5. Circunferencia c con centro en F y radio EF.
6. Recta h perpendicular a la recta AB por el punto A.

7. H punto de intersección de la circunferencia c y la recta h.
8. Circunferencia d con centro en E y radio EH.
9. I y J puntos de intersección de la circunferencia d y la recta r.
10. Recta k perpendicular a r por en punto I.
11. Recta l perpendicular a r por el punto J.
12. Recta m mediatriz del segmento AB.
13. K punto de intersección de las rectas m y k.
14. L punto de intersección de las rectas m y l.
15. Sea halla la circunferencia con centro en L y radio LJ, que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta r.
16. Sea halla la circunferencia con centro en K y radio KI, que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta r.

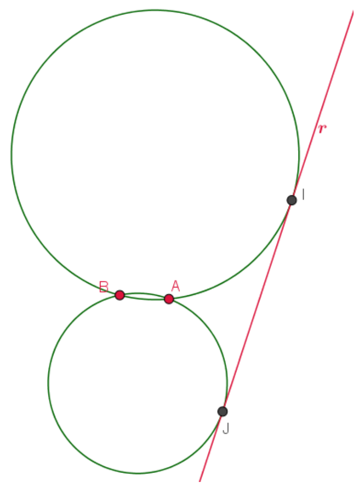

Figura 86. Solución sintética del problema PPR.

Circunferencia que pase por un punto dado y sea tangente a dos rectas dadas (PRR).

Para la solución de este caso se presentan tres situaciones, que las rectas dadas se intersequen o no y que el punto dado pertenezca a una de la rectas, se presentará la solución del problema dependiendo de las condiciones iniciales de los objetos dados. Primero se encontrará dos circunferencias tangentes a las rectas r y s dadas, no paralelas, que contengan al punto A.

Solución sintética

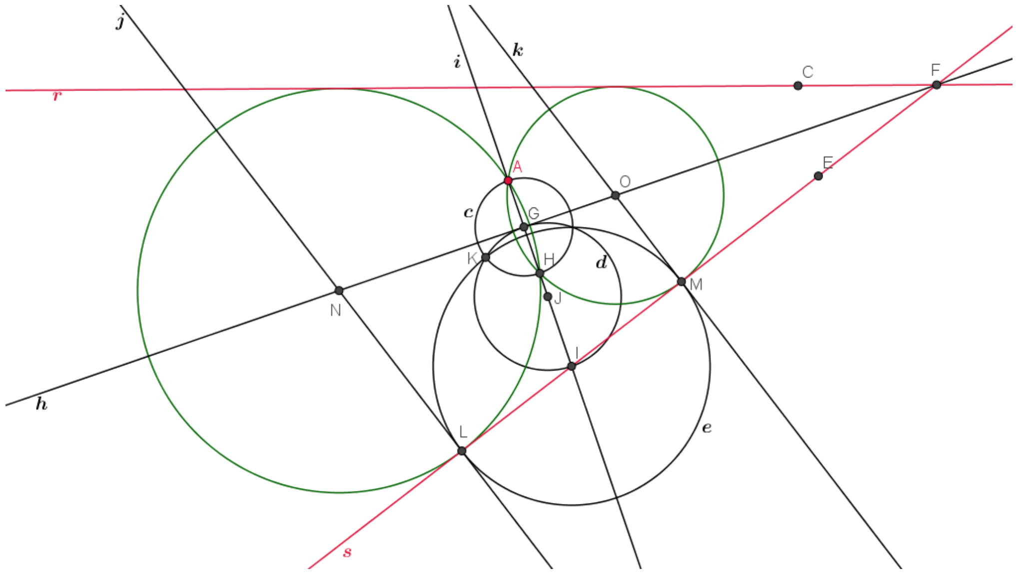

Figura 87. Construcción sintética del problema PRR.

1. Sea el punto A dados y las rectas r y s dadas.
2. Punto C en r.
3. Punto E en s.
4. F punto de intersección de las rectas r y s.
5. Recta h bisectriz del ángulo CFE.
6. Recta i perpendicular a h por el punto A.
7. G punto de intersección entre las rectas i y h.
8. Circunferencia c con centro en G y radio GA.
9. H punto de intersección entre la circunferencia c y la recta i.
10. I punto de intersección entre las rectas i y s.
11. J punto medio del segmento GI.
12. Circunferencia d con centro en J y radio JG.
13. K punto de intersección entre las circunferencias d y c.
14. Circunferencia e con centro en I y radio IK.
15. L y M puntos de intersección entre la recta s y la circunferencia e.
16. Recta j perpendicular a s por L.
17. Recta k perpendicular a s por M.
18. N punto de intersección entre las rectas j y h.
19. O punto de intersección entre las rectas k y h.
20. Se halla la circunferencia con centro en N y radio NL, que pasa por el punto A y es tangente a las rectas r y s.
21. Se halla la circunferencia con centro en O y radio OM, que pasa por el punto A y es tangente a las rectas r y s.

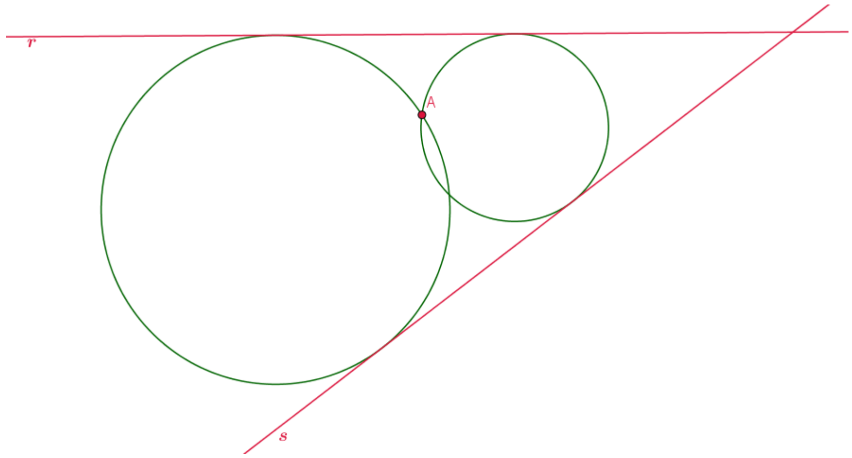

Figura 88. Solución sintética caso rectas no paralelas del problema RRP

Ahora se encontraran dos circunferencias que contengan al punto A y sean tangentes a las rectas r y s, paralelas. Para que el problema tenga solución es necesario que el punto dado esté entre las dos rectas, como se muestra a continuación

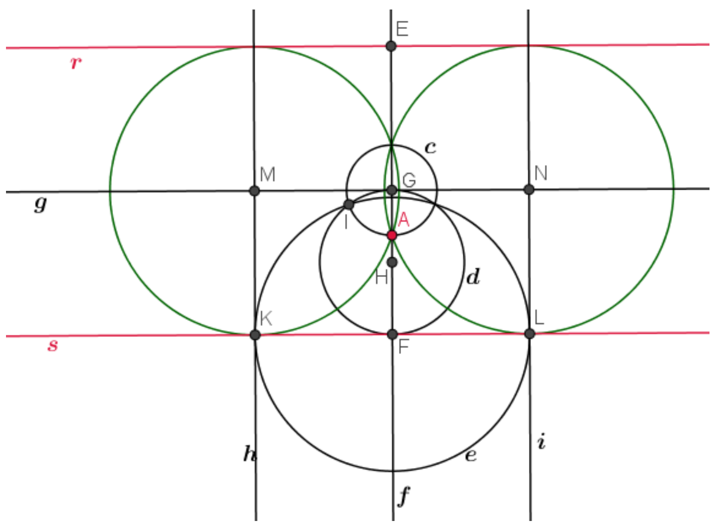

Figura 89. Construcción caso rectas paralelas del problema RRP.

Solución sintética

1. Sea el punto A dado y las rectas r y s dadas, de tal manera que el punto A esté en el semiplano, determinado por la recta s, en donde está la recta r.
2. Recta f perpendicular a r por A.
3. E punto de intersección entre las rectas f y r.
4. F punto de intersección entre las rectas f y s.
5. G punto medio del segmento EF.
6. Recta g perpendicular a f por G.

7. Circunferencia c con centro en G y radio GA.
8. H punto medio del segmento GF.
9. Circunferencia d con centro en H y radio HG.
10. I punto de intersección entre las circunferencias e y d.
11. Circunferencia e con centro en F y radio FI.
12. K y L puntos de intersección entre la circunferencia e y la recta s.
13. Recta h perpendicular a s por K.
14. Recta i perpendicular a s por L.
15. M punto de intersección entre las rectas g y h.
16. N punto de intersección entre las rectas i y g.
17. Se halla la circunferencia con centro en M y radio MK, que contiene la punto A y es tangente a las rectas r y s.
18. Se halla la circunferencia con centro en N y radio NL, que contiene al punto A y es tangente a las rectas r y s.

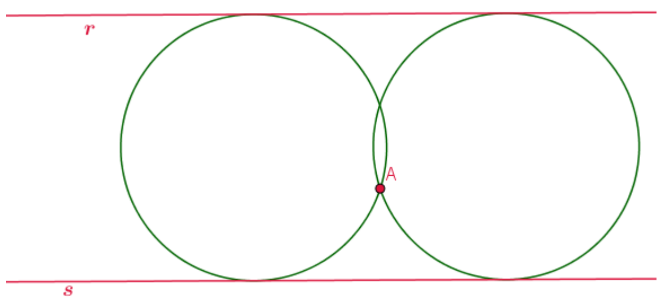

Figura 90. Solución sintética caso rectas paralelas del problema RRP.

Por último se encuentran dos circunferencias tangentes a las rectas r y s que pasan por el punto A que pertenece a la recta r

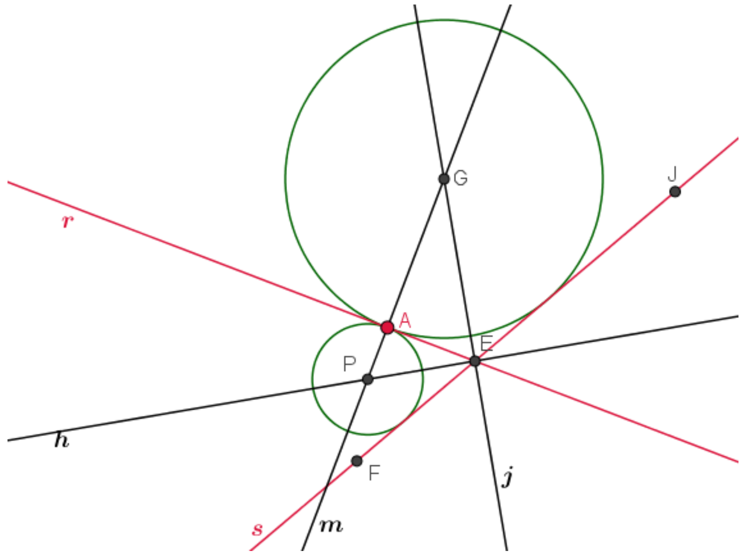

Figura 91. Construcción caso punto A sobre la recta r RRP.

Solución sintética

1. Sean las rectas r y s dadas y un punto A dado, sobre la recta r.
2. J y F puntos sobre la recta s.
3. E punto de intersección entre las rectas r y s.
4. Recta h bisectriz del ángulo AEF.
5. Recta j bisectriz del ángulo AEJ
6. Recta m perpendicular a r por el punto A.
7. P punto de intersección entre las rectas h y m.
8. G punto de intersección entre las rectas m y j.
9. Se halla la circunferencia con centro en P y radio PA, tangente a la recta r en el punto A y tangente a la recta s.
10. Se halla la circunferencia con centro en G y radio GA, tangente a la recta r en el punto A y tangente a la recta s.

Circunferencia tangente a tres rectas dadas (RRR).

Hallar cuatro circunferencias tangentes a las rectas a, b y c dadas, no paralelas dos a dos.

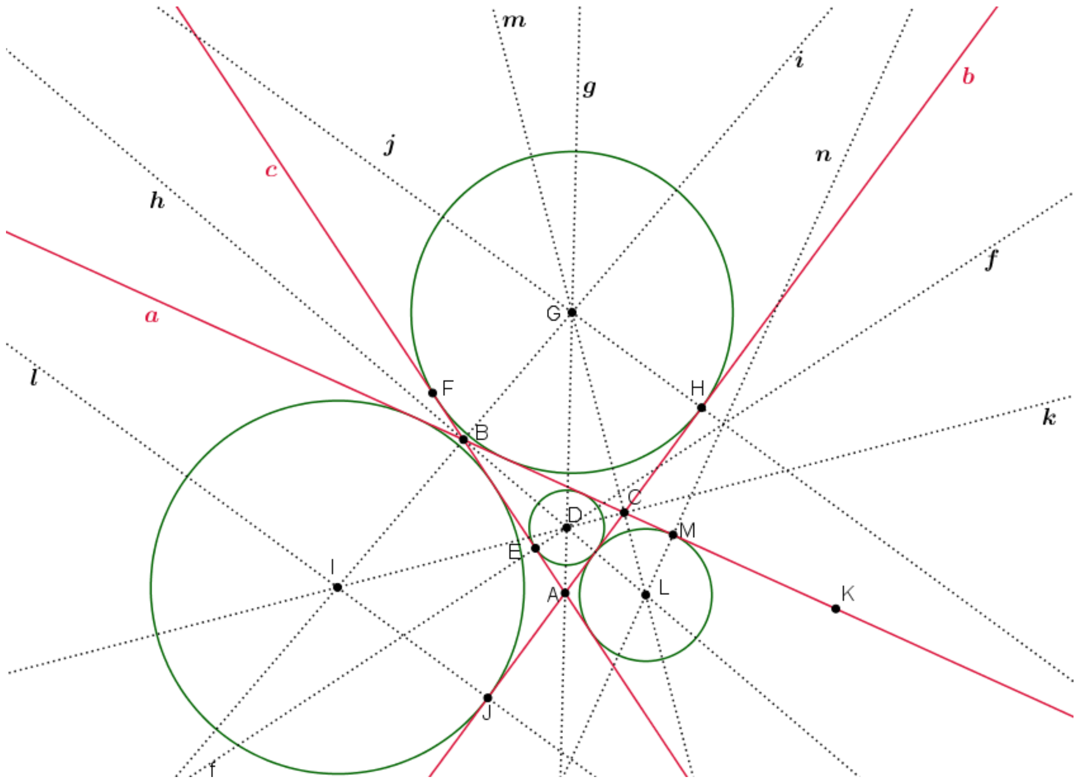

Figura 92. Construcción del problema RRR.

Solución sintética

1. Sean las rectas a, b y c dadas.
2. A punto de intersección entre las rectas c y b.
3. B punto de intersección entre las rectas a y c.
4. C punto de intersección entre las rectas a y b.
5. Recta h bisectriz del ángulo ABC.
6. Recta g bisectriz del ángulo BAC.
7. D punto te intersección entre las rectas h y g.
8. Recta f perpendicular a la recta c por el punto D.
9. E punto de intersección entre las rectas f y c.
10. Se halla la circunferencia con centro en D y radio DE, tangente a las rectas a, b y c.
11. F punto en la recta c, tal que $F - B - A$.
12. Recta i bisectriz del ángulo FBC.
13. G punto de intersección entre las rectas i y g.
14. Recta j perpendicular a la recta b por el punto G.
15. H punto de intersección entre las rectas j y b.
16. Se halla la circunferencia con centro en G y radio GH, tangente a las rectas a, b y c.
17. Recta k bisectriz del ángulo BCA.

18. I punto de intersección entre las rectas i y k.
19. Recta l perpendicular a la recta b por el punto I.
20. J punto de intersección entre las rectas l y b.
21. Circunferencia con centro en I y radio JI, tangente a las rectas a, b y c.
22. K punto en la recta a, tal que $B - C - K$.
23. Recta m bisectriz del ángulo ACK.
24. L punto de intersección entre las rectas m y h.
25. Recta n perpendicular a la recta a por el punto L.
26. M punto de intersección entre las rectas n y a.
27. Circunferencia con centro en L y radio LM, tangente a las rectas a, b y c.

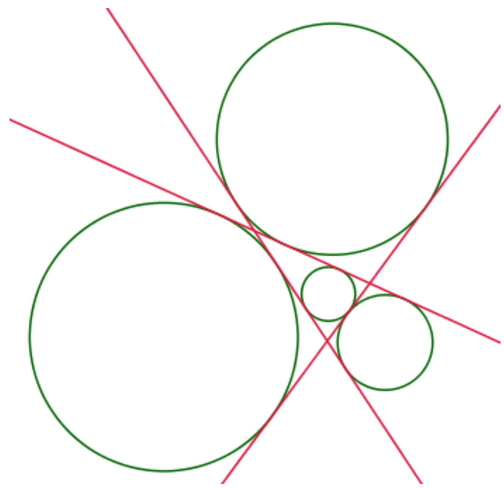

Figura 93. Solución sintética del problema RRR.

Se deben considerar las características de los objetos geométricos dados, anteriormente se menciona el caso en donde cada par de rectas se interseca, se considera el caso en el que hay dos rectas paralelas, no se considera el caso en el que las tres rectas dadas son paralelas ya que problema no tendría solución, esto mismo ocurre cuando las rectas concurren.

Hallar dos circunferencias tangentes a las rectas a b y c, donde las rectas a y b son paralelas.

Solución sintética

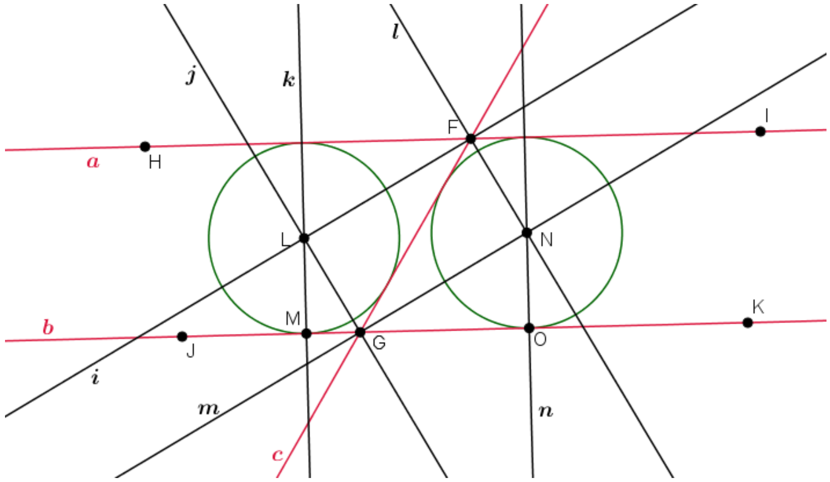

Figura 94. Construcción caso dos rectas paralelas del problema RRR.

1. Sean las rectas a, b y c dadas, tal que a y b son paralelas.
2. F punto de intersección entre las rectas a y c.
3. G punto de intersección entre las rectas b y c.
4. I y H punto sobre la recta a, tal que $H - F - I$.
5. J y K puntos sobre la recta b, tal que $J - G - K$.
6. Recta i bisectriz del ángulo HFG.
7. Recta j bisectriz del ángulo JGF.
8. recta l bisectriz del ángulo GFI.
9. Recta m bisectriz del ángulo FGK.
10. L punto de intersección entre las rectas i y j.
11. Recta k perpendicular a la recta b por el punto L.
12. M punto de intersección entre las rectas k y b.
13. Se halla la circunferencia con centro en L y radio LM, tangente a las rectas a, b y c.
14. N punto de intersección entre las rectas l y m.
15. Recta n perpendicular a la recta b por N.
16. O punto de intersección entre las rectas n y b.
17. Se halla la circunferencia con centro en N y radio NO, tangente a las rectas a, b y c.

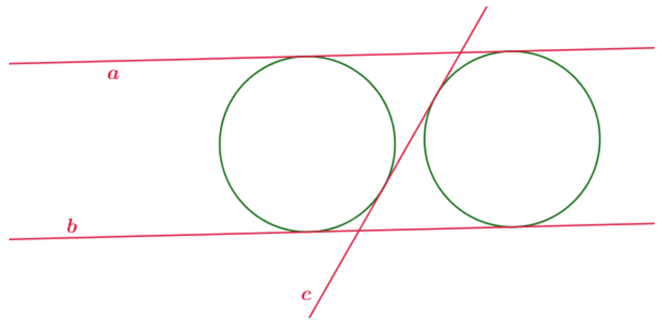

Figura 95. Solución sintética caso de dos rectas paralelas problema RRR:

Las construcciones anteriores se tomaron como modelo, debido a que giran alrededor de la construcción de puntos, rectas y el objeto que se pretende encontrar (circunferencia), de forma análoga se propuso en el trabajo de grado los casos que se refieren a encontrar una cónica para estudiar su solución sintética desde la construcción de puntos, rectas y el objeto que se pretende encontrar (cónica).