EUCLIDEA PROPONE Y TÚ ARGUMENTAS.
ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN Y GÉNESIS INSTRUMENTAL

YESSICA MARÍA GALVIS RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2019

EUCLIDEA PROPONE Y TÚ ARGUMENTAS.
ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN Y GÉNESIS INSTRUMENTAL

YESSICA MARÍA GALVIS RODRÍGUEZ
Cód. 2018185008
C.C. 1022 988 624

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar el título de Magister en Docencia de la Matemática

Asesora:
TANIA PLAZAS MERCHÁN
Magister en Docencia de la Matemática

____

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2019

AGRADECIMIENTOS

Inicialmente agradezco al cuerpo docente del Departamento de Matemáticas, quienes incentivaron y apoyaron mi carácter curioso e investigativo para llevar a cabo este trabajo de grado; a ellos también agradezco las enseñanzas y aprendizajes, por permitirme reafirmar mi título como licenciada.

De este cuerpo docente agradezco al profesor Camilo Sua Florez, por su apoyo, colaboración, dedicación e innovación en la Educación Matemática con el uso de la Tecnología Digital. Agradezco a la profesora Tania Plazas Merchán, por permitirme culminar este proceso a su lado, con sus ideas y aportes valiosos que se han plasmado en este trabajo de grado. Por último, respecto a los profesores del DMA, agradezco a la profesora Leonor Camargo por su ayuda y herramientas brindadas a lo largo de toda la Maestría, su conocimiento ha sido único.

Finalmente, agradezco a los estudiantes de grado noveno del Colegio Rafael María Carrasquilla, en especial a las dos estudiantes que participaron en la entrevista, por su dedicación, compromiso y entrega en el desarrollo de cada tarea propuesta en la entrevista y en clase; aporte fundamental de este trabajo de grado.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Euclidea propone y tú argumentas. Esquemas de argumentación y génesis instrumental,*** presentado por la estudiante:

Yessica Maria Galvis Rodriguez, Cód. 2018185008, CC. 1022988624

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** cuarenta y cuatro (44) puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 25 días del mes de febrero de 2020.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: Tania J Plazas M.
TANIA JULIETH PLAZAS MERCHÁN (UPN)

Jurados:

Profesor: Jorge E.
JORGE ÉDGAR PÁEZ (UPN)

Profesor: Orlando Aya C
ORLANDO AYA CORREDOR (UPN)

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	**FORMATO**	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página V de IV**	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Euclidea propone y tú argumentas. Esquemas de argumentación y génesis instrumental
Autor(es)	Galvis Rodríguez, Yessica María
Director	Plazas Merchán, Tania Julieth
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 91 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN, GÉNESIS INSTRUMENTAL, TECNOLOGÍA DIGITAL, EUCLIDEA, SISTEMA TEÓRICO.

2. Descripción
Este trabajo se desarrolló durante los años 2018 y 2019 con estudiantes de grado noveno (año 2019) de una Institución de carácter privado, ubicada en el sur de Bogotá. Durante la investigación se diseñó una secuencia de tareas que está dividida en dos partes; la primera hace referencia al diseño e implementación de tareas con regla y compás con todos los estudiantes de noveno; la segunda parte es la entrevista basada en tareas, la cual se realizó con dos estudiantes de

mismo curso y utilizando la aplicación Euclidea. Los datos se obtuvieron de la última parte para su respectivo análisis con tres categorías preestablecidas en el marco teórico. La primera de estas gira entorno a los esquemas de argumentación que los estudiantes pueden generar, y las otras dos categorías están enfocadas en la Génesis Instrumental que se pueden presentar entrono a las herramientas de la aplicación. De acuerdo a lo anterior, se concluye que predominaron los esquemas de tipo empírico y analítico a lo largo de las 17 tareas, por tanto no se percibe un cambio significativo de los esquemas. Por otro lado, la mediatriz pasa de ser un artefacto a ser un instrumento para las participantes, pues se evidencia acciones propias en los dos procesos de la Génesis Instrumental.

3. Fuentes

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Buitrago, J., y Martínez, D. (2012). *Actividad demostrativa y argumentación matemática en estudiantes de grado octavo (Trabajo de grado de Maestría)*. Universidad Pedagogica Nacional. Retrieved from http://www.dt.co.kr/contents.html?article_no=2012071302010531749001

Cáceres, R., Roy, A., y Zachman, P. (2013). Apps móviles como herramientas de apoyo al aprendizaje matemático informal en Educación Superior. In RedUNCI (Ed.), *VIII Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología* (pp. 1–9). Buenos Aires, Argentina. Retrieved from http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/27556

Camargo, L. (2018). *Estrategias cualitativas en investigación en Educación Matemática [Material de aula]*. Investigación en Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales* (Ministerio). Bogotá D. C.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., … Meagher, M. (2010). Mathematics education and technology–Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study. NY: Springer. In C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *International Commission on*

Mathematical Instruction (Vol. 13). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Flores, C., Gómez, A., y Flores, H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. *Acta Scientiae*, *12*(2), 22–42.

Flores, C., Gómez, A., y González, S. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. In *V Foro de Investigación de Educación* (pp. 473–477).

Flores, H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63–98.

García, D., y Martínez, M. (2018). Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. *Transformación*, *14*(2), 252–261.

Gutiérrez, Á., Jaime, A., y Alba, F. J. (2014). Génesis Instrumental en un entorno de Geometría Dinámica 3-Dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. In M. González, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405–414). Salamanca.

Harel, G., y Sowder, L. (1998). Types os students' justifications. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670–675.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1–60). https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Leung, A., Chan, Y., y López, F. (2000). Instrumental Genesis in Dynamin Geometry Environments.

MEN. (1998). *Serie de Lineamientos curriculares de Matemáticas*. (Ministerio de Educación Nacional, Ed.). Bogotá D. C.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46–95). Bogotá D. C. https://doi.org/958-691-290-6

Moise, E., y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Muñoz, E., y Rojas, T. (2017). *Procesos de conjeturación y justificación: El ron de los programas de Geometría Dinámica (Trabajo de grado de Maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional.

Osorio, V. L., Pino-Fan, L., y Gozález, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *12*, 39–57.

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional*, *53(2)*(1), 129–150. https://doi.org/10.4151/07189729-Vol.53-Iss.2-Art.200

Puentes, J. (2015). *Ambiente indagativo y argumentación en un contexto de Geometría Dinámica: Una experiencia en grado séptimo (Trabajo de grado de Maestría)*. Universidad Pedagógica Naiconal.

Samper, C., y Molina, Ó. (2019). Geometría plana: un espacio de aprendizaje. *Geometría Plana: Un Espacio de Aprendizaje*. https://doi.org/10.2307/j.ctvfc51vg

Samper, C., Molina, Ó., y Echeverry, A. (2013). *Elementos de Geometría: aprendizaje y enseñanza de la geometría* (2nd ed.). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.

Sua, C., y Camargo, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. *Educacion Matematica*, *31*(1), 7–37. https://doi.org/10.24844/EM3101.01

Suárez-Restrepo, F., y Castro-Gordillo, F. (2017). Génesis instrumental en el proceso de aprendizaje : el software wxMaxima y la función polinómica. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte*, *50*, 106–125. Retrieved from http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/815/1333%0AGénesis

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281–307. https://doi.org/10.1023/A

Trouche, L. (2014). Instrumentation in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, *12*(1981), 307–313. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_80

4. Contenidos

Este documento se compone de cinco capítulos, los cuales se escriben a continuación:

El primer capítulo contiene las inquietudes iniciales, la pregunta problema, los objetivos y los antecedentes de acuerdo a las palabras clave que abarcan este trabajo.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico. En este de describe con detalle los enfoques que se tuvieron en cuenta, como lo son la clasificación de los Esquemas de argumentación que propone Flores (2007) y los elementos que componen la Génesis Instrumental.

En el tercer capítulo se describe la perspectiva investigativa, la estrategia de investigación, la descripción de los participantes, la secuencia que se realizó con los estudiantes, la recolección de los datos y las categorías que permitieron realizar el análisis.

En el cuarto capítulo se realiza el análisis de los datos escogidos en los que se evidencia Esquemas de argumentación y la Génesis Instrumental respecto a las aplicaciones de Euclidea.

En el quinto capítulo se presentan los resultados del análisis y las respectivas conclusiones en las que se da respuesta a la pregunta problema y a los objetivos planteados.

Finalmente se encuentran los anexos. En esta parte del documento se encuentran los resultados obtenidos de la tarea diseñada e implementada con estudiantes de grado noveno del año 2018, la cual dio paso para determinar la situación problema de esta investigación; las tareas diseñadas con regla y compás para generar el sistema teórico; el diseño de las entrevistas y sus respectivas transcripciones para tomar los datos y realizar su análisis pertinente.

5. Metodología

La secuencia que se llevó a cabo contempla, por un lado, el diseño y la aplicación de una secuencia de actividades con regla y compás, y por el otro, una entrevista basada en tareas con la aplicación Euclidea. Para esto, se tuvo en cuenta un enfoque fenomenológico junto a una perspectiva interpretativa, ya que con esta se puede realizar un análisis personalizado de los signos que son emitidos por los estudiantes.

Además, se escogió una estrategia de investigación denominada *entrevista basada en tareas,* la cual consiste en que una pareja de estudiantes desarrolle tareas previamente escogidas y analizadas por la profesora, de tal manera que se genere discusión entre ellos y eventualmente haya intervención de un entrevistador. Esto con el fin de que ellos comuniquen ideas claras, concisas y completas, manifiesten las estrategias a usar y el porqué de estas.

6. Conclusiones
Respecto a los esquemas de argumentación se concluye que no hay una modificación en el nivel de los esquemas de argumentación, puesto que las estudiantes procuraban validar sus afirmaciones o sospechas por medio de los elementos geométricos que tenían a la mano. No obstante, se considera que hizo falta durante la entrevista el desarrollo de argumentos que produjeran cadenas deductivas en tareas puntuales como inscribir una circunferencia en un cuadrilátero o construir una recta perpendicular a otra, ya que en estas se produjo un mayor número de esquemas de tipo simbólico o fáctico, lo cual permite evidenciar que aunque se logre la construcción no necesariamente lograban explicarla. Por otro lado, el comando mediatriz se percibe satisfactoriamente en los índices de la Instrumentalización e Instrumentación. De acuerdo a lo anterior y a lo expuesto por Sua y Camargo (2019), al cumplirse acciones en ambos procesos se puede concluir que la mediatriz pasó de ser un artefacto a ser un instrumento para las estudiantes, pues así como ellas actuaron sobre el comando, este último les permitió desarrollar varias tareas por medio de nuevos esquemas encontrados y aceptados al comprobar su utilidad al momento de cumplir objetivos específicos.

Elaborado por:	Galvis Rodríguez, Yessica María
Revisado por:	Plazas Merchán, Tania Julieth

Fecha de elaboración del Resumen:	02	12	2019

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se elabora como resultado del proceso de desarrollo de la Maestría en Docencia de la Matemática del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En este se tiene como propósito identificar los esquemas de argumentación y cómo estos se van modificando en dos estudiantes de grado noveno, de una Institución de la ciudad de Bogotá, al interactuar con una aplicación de geometría dinámica en 2D llamada Euclidea. Además, se pretende verificar si las estudiantes desarrollan la Génesis Instrumental respecto a las herramientas que brinda esta aplicación. Para lo anterior, se diseñó e implementó una serie de tareas con regla y compás en clase de geometría, con la participación total del curso, para la construcción de un sistema teórico local; esto con el fin de que las estudiantes escogidas para la entrevista, basada en las tareas de Euclidea, tuvieran suministros para explicar sus propuestas de construcción.

Este documento se compone de cinco capítulos en los que se presentan los aspectos generales de la investigación, los fundamentos teóricos de la misma, la metodología desarrollada, el análisis de los datos obtenidos en la entrevista y los respectivos resultados y conclusiones de este último.

El primer capítulo contiene las inquietudes iniciales que surgieron a la profesora, autora de este trabajo, las cuales se relacionan con la ausencia de procesos de argumentación en la clase de geometría partir de esto, se plantea los objetivos que guían esta propuesta, y los antecedentes de acuerdo a las palabras clave que abarcan este trabajo, como por ejemplo Tecnología digital, argumentación, geometría dinámica, Euclidea, m-learning.

En el segundo capítulo se exhibe el marco teórico. En este de describe con detalle los enfoques que se tuvieron en cuenta, como lo son la clasificación de los Esquemas de argumentación que propone Flores (2007) y los elementos que componen la Génesis Instrumental.

En el tercer capítulo se describe la perspectiva investigativa, la cual permite trabajar desde la estrategia denominada *entrevista basada en tareas* de Goldin (como se citó en Camargo, 2018). A partir de esto, se presenta a los participantes que permiten llevar a cabo la entrevista: la entrevistadora, quien es la misma profesora; las dos estudiantes de grado noveno; y las tareas de Euclidea. También se describe los aspectos generales que se tuvo en cuenta para implementar la secuencia, la recolección de los datos y las categorías que permitieron realizar el análisis, teniendo en cuenta que estas son preestablecidas en el marco teórico.

En el cuarto capítulo se realiza el análisis de los datos escogidos en los que se evidencia Esquemas de argumentación por un lado y por el otro, alguna acción sobre las herramientas de la aplicación que esté relacionada con la instrumentalización o instrumentación. Finalmente, en el quinto capítulo, se presentan los resultados del análisis y las respectivas conclusiones en las que se da respuesta a la pregunta problema y a los objetivos planteados.

1. JUSTIFICACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Hoy en día, en la sociedad, no es un secreto el auge de la tecnología digital, puesto que en la mayoría de los hogares hay presencia de al menos un computador o un Smartphone (teléfono móvil). El Ministerio de Educación Nacional (MEN) reconoce su importancia y por tanto trabaja desde el inicio del siglo XXI para generar una cultura informática con el fin de aprovechar los beneficios que pueden brindar, principalmente las tecnologías computacionales, en el currículo de matemáticas en la educación básica y media de Colombia, como medios de aprendizaje para los estudiantes (Castiblanco, Urquina, Camargo, y Acosta, 2004).

Con el surgimiento de las tecnologías de la información, la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se pueden vivir desde otra perspectiva, particularmente con los programas de geometría dinámica. Como señalan Castiblanco et al., (2004), estos posibilitan el estudio de los componentes fundamentales de las figuras geométricas y sus propiedades. La construcción de representaciones ayuda a los estudiantes en la exploración y manipulación dinámica, que conlleva a la elaboración de afirmaciones, siendo este camino el facilitador para que ellos accedan al estudio formal de la geometría. Estas experiencias son relevantes al permitir que los estudiantes avancen en la comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta, en comparación, con un ambiente tradicional.

En los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998), se expone que en la geometría escolar se debe actuar y argumentar sobre el espacio con ayuda de diversos modelos y figuras, el uso de un lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales. Además, para desarrollar el pensamiento geométrico; en particular, las diversas maneras de generar argumentaciones, se propone establecer interacciones en el ambiente escolar entre el profesor y los estudiantes, en especial la interacción entre estos últimos, pues sus discusiones permiten que expongan sus puntos de vista, validen o no sus formas de representar y sus afirmaciones, y construyan socialmente su conocimiento.

Por su parte, en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006) se plantea que para que una persona sea matemáticamente competente debe resolver actividades que involucren el proceso de la argumentación. Se entrevé que el uso de la argumentación, entre otros procesos, permite validar o rechazar conjeturas en pro del desarrollo de la demostración matemática.

Uniéndose a los esfuerzos del MEN, las directivas del Colegio Rafael María Carrasquilla han permitido la viabilidad de este trabajo de grado, ya que consideran que este es un primer acercamiento al uso de Tecnología Digital en la Institución, ya que los docentes tienen poca experiencia en este tipo de intervenciones en el aula. Adicionalmente, la profesora (autora de este trabajo de grado) implementó dos tareas a 32 estudiantes de grado noveno del año 2018, para corroborar las dificultades en el proceso de la argumentación y del uso de Tecnología Digital.

La primera tarea fue una observación informal hecha a los estudiantes, mientras intentaban construir el enunciado del hecho geométrico recíproco del teorema de Pitágoras, después de medir dos paredes perpendiculares del Plantel Educativo. La profesora vio que ellos lograban redactar el hecho geométrico, a manera de conjetura sin mayor problema; pero al momento de argumentar, los estudiantes se fiaban de las características visuales, dándolas como verdaderas, o buscaban herramientas para calcular magnitudes y validar el hecho numéricamente.

Al cotejar el significado de argumentar que proponen Samper y Molina (2019) con lo que hacían los estudiantes, la profesora evidenció que ellos no realizaban las acciones consideradas por estos autores en el proceso de argumentar, ya que este proceso consiste en generar enunciados escritos u orales que relacionan proposiciones particulares (datos y conclusiones) y generales (garantías).

Para ver si los estudiantes relacionaban los datos, las conclusiones y las garantías, la profesora decidió diseñar una segunda tarea haciendo uso del programa GeoGeobra. Ellos debían construir un cuadrilátero y una de sus diagonales para que determinaran en qué casos los triángulos delimitados por la diagonal tenían la misma forma y tamaño; es decir, triángulos congruentes. Después, debían completar enunciados de la forma “si el cuadrilátero es… entonces los triángulos delimitados por la diagonal tienen la misma forma y el mismo tamaño”; para que finalizaran argumentando sus respectivas afirmaciones. Los respuestas obtenidos por los estudiantes se generalizan en cuatro grupos, las cuales se presentan en el Anexo 1.

De esta última tarea, la profesora pudo determinar que los estudiantes tienen un cambio positivo de actitud y ánimo ante el uso de tecnología digital para desarrollar tareas en clase de geometría; sin embargo, ellos no aprovechan las construcciones hechas para identificar de qué propiedades pueden valerse para argumentar sus afirmaciones y no interpretan que es lo qué tienen que argumentar ni parecen tener conocimientos sobre cómo hacerlo.

De acuerdo a los planteamientos anteriores, a continuación se fórmula la siguiente pregunta de investigación: ¿qué tipos de argumentos generan los estudiantes de grado noveno al resolver las tareas propuestas en el ambiente Euclidea y cómo estos y los esquemas de las herramientas de la aplicación se modifican al culminar las tareas?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Identificar el tipo de argumentos que generan los estudiantes de grado noveno en el ambiente Euclidea y cómo estos se modifican, y la génesis instrumental.

1.2.2 Objetivos específicos

- Diseñar y aplicar una secuencia de aprendizaje para incentivar las construcciones geométricas, el proceso de argumentación y establecer un sistema teórico local.
- Seleccionar y aplicar las tareas de Euclidea de acuerdo al sistema teórico local establecido.
- Describir los argumentos generados por los estudiantes al resolver las tareas de Euclidea.
- Comparar los argumentos al iniciar y finalizar la secuencia de tareas con Euclidia.
- Determinar si se presenta génesis instrumental con las herramientas de la Aplicación Euclidea.

1.3 Antecedentes de la investigación

La literatura permite establecer qué innovaciones e investigaciones se han establecido en el marco del proceso de argumentación en geometría mediado en un ambiente de Tecnología Digital. La búsqueda de antecedentes se hizo de acuerdo a cuatro palabras base (geometría, argumentación, Tecnología Digital y m-learning) que son clave en este trabajo de grado, por tanto, los documentos seleccionados son aquellos que cumplen con la mayor cantidad de palabras.

Además, se aclara que la búsqueda de literatura referente al programa Euclidea no fue positiva, dejando entrever que este escrito, posiblemente, puede ser uno de los primeros que realice un reporte en relación con este programa como recurso de aprendizaje en la geometría plana escolar. A continuación se presentan algunos documentos que se han enfocado en los parámetros establecidos y que ayudan a identificar los aspectos más relevantes que aportan a este trabajo de grado.

El trabajo realizado por Flores (2007) busca cumplir con uno de los objetivos del currículo mexicano; es decir, formar personas críticas y reflexivas. Este tipo de pensamiento se puede propiciar por medio del razonamiento deductivo, el cual es el inicio de la demostración matemática. El autor pretende comprender cómo es el razonamiento deductivo de los profesores al resolver problemas matemáticos, ya que ellos son quienes están encargados de formar tal pensamiento. Esta investigación gira en torno al concepto de esquema de argumentación (adaptación que Flores hace a los esquemas de prueba de Harel y Sowder (1998)), y se enfoca en un experimento de enseñanza desarrollado durante 48 horas repartidas en 4 horas por sesión (dos sesiones por semana) para solucionar problemas con geometría dinámica. Los resultados de este experimento arrojaron que los profesores inicialmente usaban esquemas empíricos y fácticos, pero al transcurrir las sesiones fueron generando esquemas analíticos, acercándose al razonamiento deductivo, siendo el empleo la geometría dinámica de gran importancia. Esta investigación aporta parte del marco teórico para este trabajo de grado. Además, muestra que las personas pueden generar un cambio significativo en el uso de sus argumentos.

Con el enfoque anterior, Flores, Gómez y Flores (2010) pretenden aportar a la preparación de seres más creativos y reflexivos, ya que estos parámetros son considerados importantes para el éxito en el ámbito profesional y laboral. Para esto, se implementó un experimento de enseñanza, el cual estuvo enfocado en determinar y observar el desarrollo de los tipos de esquemas de argumentación usados en actividades propias de la geometría dinámica (software *The Geometer's Sketchpad*). Los conceptos base de esta investigación son el pensamiento reflexivo y la enseñanza de la demostración, los esquemas de argumentación y el uso de geometría dinámica. El experimento consistió en cuatro tareas en tres sesiones (hora y media cada una), desarrolladas por estudiantes de licenciatura y profesores activos de matemáticas. Ellos, gracias al diseño de dichas tareas, lograron evolucionar en la producción de sus argumentos hasta generar argumentos analíticos. Esta investigación permite identificar la forma progresiva en que los estudiantes pueden formar argumentos y la importancia del diseño de las tareas en el ambiente de aprendizaje.

Siguiendo la misma línea, el proyecto investigativo de Flores, Gómez y González (2010) describe los esquemas de argumentación usados por estudiantes de bachillerato durante el desarrollo y exploración de actividades con geometría euclidiana. Este proyecto consideró su marco teórico desde los esquemas de argumentación y el uso de la Geometría Dinámica. Los autores diseñaron una secuencia de tareas, la cual conllevó dos momentos: el primero usando lápiz y papel y el segundo haciendo uso del software de Geometría Dinámica *The Geometer's Skecthpad*. Al finalizar esta secuencia, se obtuvo que los estudiantes al hacer uso de tecnología digital consideraban sus argumentos y formas de solución; en cambio, cuando usaron lápiz y papel sus soluciones se restringían a proponer una estrategia de solución que, sin importar su pertinencia, se mantenía a lo largo del proceso de solución a la tarea propuesta. Esta investigación brinda ideas sobre el papel influyente que tiene un software de geometría dinámica para que un estudiante pueda generar argumentos y caminos de solución a determinadas tareas propuestas.

Por otro lado, Buitrago y Martínez (2012) realizaron una investigación enfocada en el diseño, implementación y análisis de un experimento de enseñanza enmarcada en el constructo "actividad demostrativa", para que así se favoreciera el aprendizaje de la argumentación y la justificación matemática mientras se aprendía geometría. Para esto tuvieron en cuenta conceptos como actividad demostrativa y unidad cognitiva, además de hacer uso del modelo de Toulmin. En esta investigación participaron 70 estudiantes de grado octavo, con el uso de 15 computadores y el programa Cabri. Se logró que ellos construyeran justificaciones con una mejor apropiación de conceptos, hechos geométricos y habilidad para representar y explorar objetos geométricos con geometría dinámica. Además se promovió el cambio de clases tradicionales (uso de lápiz y papel) a situaciones mediadas por el uso de geometría dinámica. Esta investigación arroja información importante para el desarrollo de este trabajo de grado, ya que permite conocer cómo los estudiantes pueden mostrar autonomía en el proceso de argumentar con el uso de geometría dinámica.

En el trabajo realizado por Puentes (2015) se discuten los escenarios usuales en clase geometría, tal como la poca manifestación de ideas por parte de los estudiantes o el uso nulo de tecnología digital. A partir de esto se propone hacer uso de la *argumentación* en la *actividad demostrativa*, acompañada de *geometría dinámica* y la *gestión del profesor* para generar un *ambiente indagativo*. Puentes realiza un experimento de enseñanza con estudiantes de grado séptimo de una institución de carácter público, quienes asistieron a ocho sesiones de clase. Los resultados del experimento sugieren mejorar el ambiente escolar, ya que los estudiantes tuvieron una comunicación más activa en la clase; su exploración con geometría dinámica fue relevante para proponer solución a los problemas planteados; y se presentó una breve evolución en los argumentos al usar hechos geométricos para esto. Este trabajo de grado permite reconocer la importancia que tienen los ambientes de geometría dinámica en el aula escolar, asimismo, observar las respuestas que los estudiantes brindan ayuda a evidenciar cómo son sus aportes, argumentos y pensamientos.

Muñoz y Rojas (2017) exponen la necesidad que ha surgido por introducir el software de geometría dinámica en el aula, para que este permita el desarrollo de los procesos geométricos como la actividad demostrativa. Para ello se asume el siguiente marco teórico: actividad demostrativa, enfoque de la aproximación instrumental y enfoque de la mediación instrumental. Se realizó un estudio de caso, trabajando con tres estudiantes de grado noveno, los cuales pertenecen a una institución privada de Bogotá. Las autoras diseñaron una secuencia de actividades con siete problemas (una hora cada uno). El resultado de este estudio fue que el uso del software de geometría dinámica permite realizar acciones más allá de la conjeturación, permitiendo generar argumentos estructurados en un sistema teórico local. Además, los estudiantes lograron convertir artefactos en instrumentos, tales como el arrastre guiado, la longitud o distancia y la circunferencia. Este trabajo aporta sustancialmente a la caracterización del análisis que debe ser realizado, ya que permite observar la interacción del enfoque instrumental a partir de las acciones de los estudiantes.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Esquemas de argumentación

Los esquemas de argumentación inicialmente se llamaron esquemas de prueba y fueron propuestos y categorizados por Harel y Sowder (1998). Estos autores buscaban establecer la forma en que los individuos justificaban determinadas afirmaciones con el ánimo de modelar su razonamiento matemático. Esta categorización surge a partir de entrevistas realizadas a estudiantes de nivel universitario que tomaban cursos como Teoría de Números Elemental, Geometría, Álgebra Lineal Elemental y Avanzada y Cálculo. El trabajo realizado por Harel y Sowder (1998) consideró además el estudio desarrollado por Chazan en 1993, quien observó y corroboró que para muchos individuos la evidencia se considera prueba y la prueba se considera una evidencia generalizada. También tuvieron en cuenta el estudio de Goetting en 1995, quien mostró que la mayoría de los futuros profesores de primaria dan un estatus de prueba a los ejemplos.

La propuesta de Harel y Sowder (1998) no se considera un producto final, por el contrario, ellos manifiestan que su categorización puede ser puesta a prueba o ser modificada. Flores (2007) decide realizar una adaptación de esta primera categorización al proponer dos niveles adicionales, dejando en claro que no pretende afirmar que los esquemas de prueba de Harel y Sowder están incompletos, sino que esta nueva propuesta tiene en cuenta parámetros que en la categorización inicial no se contemplaron.

El estudio de Flores (2007) se llevó a cabo con profesores de matemáticas de secundaria en México. En este estudio se consideraron los argumentos producidos por estos profesores cuando justificaron soluciones de problemas geométricos con apoyo de geometría dinámica (Osorio, Pino-Fan, y Gozález, 2017). Flores observó similitudes entre las formas en que los profesores argumentaban y los esquemas que Harel y Sowder proponían. Sin embargo, la naturaleza de los esquemas evidenciados por Flores lo llevó a denominar estos como *esquemas de argumentación*. Para Osorio et al. (2017) los esquemas de prueba relacionan la justificación con la demostración, mientras que al hablar de esquemas de argumentación se acude a las acciones o razonamientos que una persona manifiesta para explicar o justificar una conjetura o un determinado resultado procedente de la resolución de un problema, de ahí la precisión al denominar este conjunto de esquemas.

A la luz de esta propuesta, Harel y Sowder (2007) aseguran que un individuo puede tener un tipo de esquemas que gradualmente van mejorando, en la medida que se aproximan a esquemas de prueba que son compartidos y practicados por la comunidad matemática.

Actualmente, estos esquemas han proveído aportes a la Educación Matemática. Autores como Osorio et al. (2017), afirman que los esquemas se pueden ver como una herramienta para analizar la forma en que los estudiantes, apoyados en la geometría dinámica (v.g. Cabri, GeoGebra), proveen una justificación. Esta idea también la resalta Flores (como se citó en C. Flores, Gómez, y Flores, 2010) al asegurar que los esquemas se pueden convertir en un indicador del tipo de actividad que la persona realiza apoyada en un software de geometría dinámica. Esta actividad puede ser insipiente al hacer uso de la herramienta arrastre para verificar visualmente que las propiedades de un objeto se mantienen, como también de la herramienta de medición para asegurarse que alguna propiedad se cumple numéricamente; o puede ser más elaborada, al usar la herramienta arrastre para buscar generalidades en las propiedades de objetos.

Lo anterior, es descrito por Samper y Molina (2019) al hablar sobre la práctica demostrativa y los procesos que la componen, la conjeturación y la justificación. Esta práctica se apoya en la exploración empírica, haciendo énfasis en la medición o comparación de objetos; la exploración dinámica, la cual detecta invariantes en las construcciones por medio de la herramienta arrastre; y la exploración teórica, teniendo su apoyo en enunciados para justificar una afirmación.

Además, la justificación para Samper y Molina (2019) es considerada como una argumentación en la que se puede obtener tres productos: la explicación de la validación, cuando se toman garantías no teóricas (*e. g.* empíricas, de autoridad, rituales); la prueba, al usar garantías teóricas pero no necesariamente hacen parte de sistema teórico local; y la demostración, aquí se usan garantías que sí provienen del sistema teórico local. Estos productos contienen elementos que más adelantes son descritos por Flores en sus esquemas de argumentación.

2.1.1 Definiendo los esquemas

Los esquemas pueden tener dos definiciones de acuerdo a la postura adoptada. Se considera en este caso la propuesta de Harel y Sowder y la de Flores. Para Harel y Sowder (2007) "el esquema de prueba de una persona (o de una comunidad) consiste en lo que constituye determinar y persuadir a esa persona (o comunidad)" (p. 7). Esta definición demanda conocer algunos términos relacionados. Se acude a los términos conjetura y hecho; estas dos palabras son base de la noción de prueba y hacen referencia a la clasificación que un sujeto puede hacer sobre una afirmación; es decir, se habla de *conjetura* cuando una persona realiza una afirmación pero no conoce su veracidad, por el contrario cuando se está seguro de esta, la *conjetura* pasa a ser un *hecho*. Por *prueba* se entiende el proceso que desarrolla una persona para eliminar las dudas sobre la verdad de una afirmación. Este proceso involucra dos subprocesos denominados *determinación* y la *persuasión*. Por *determinación* se entiende la eliminación de las dudas propias que puede tener una persona sobre la verdad de una afirmación; mientras que por *persuasión* se entiende como la eliminación de las dudas que pueden tener otras personas sobre la verdad de una afirmación.

Por su parte, en la propuesta de Flores (2007) los esquemas de argumentación son la manera en que una persona caracteriza sus razonamientos durante una práctica argumentativa. Esta última es considerada como el conjunto de acciones o razonamientos usados por una persona para validar, explicar o justificar algún resultado proveniente de la resolución de un problema. Este autor concuerda con Harel y Sowder al considerar que la función de estos esquemas es convencerse a sí mismo y a otros de la validez de resultados o conjeturas.

En estas dos definiciones, aunque su fin es convencerse a sí mismo y a otros, se evidencian diferencias para lograrlo; por ejemplo el uso de actividades derivadas de la resolución de problemas por parte de Flores. Otra diferencia, es la forma en que se lleva a cabo este proceso. Mientras que Harel y Sowder (2007) consideran un esquema de prueba como la prueba de una afirmación para determinar su veracidad, pasar de una conjetura a un hecho; para Flores es relevante usar 'prácticas argumentativas', término que resalta el razonamiento de una persona.

2.1.2 Esquemas de argumentación: la propuesta de Flores

Aun cuando existen dos propuestas de esquemas, una a cargo de Harel y Sowder y otra que es una reelaboración por parte de Flores de la primera propuesta, se tendrá en cuenta la última dado que esta contempla la presencia de entornos de geometría dinámica. La categorización realizada por Flores (2007) está compuesta por cinco niveles, estos son:

Autoritarios: Los argumentos de un estudiante se apoyan en las afirmaciones realizadas por otros, ya sea en el aula o en textos.

Simbólicos: Los argumentos se conforman de lenguaje matemático y símbolos que son usados de manera poco coherente y superflua, generando resultados inconclusos.

Fácticos: El estudiante hace un recuento de lo que hizo para justificar resultados. También relata a modo de algoritmos sus explicaciones o justificaciones.

Empíricos: Son los argumentos que se validan por medio de hechos físicos asociados a la percepción por medio de los sentidos o representaciones gráficas. La representación gráfica se convierte en el argumento y no se acude a elementos teóricos para soportarlo.

Analíticos: Los argumentos conducen una cadena de carácter deductivo, pero el resultado no necesariamente debe ser válido. Este tipo de argumentos pueden llegar a ser demostraciones o pruebas matemáticas.

Para ilustrar cada uno de estos niveles se ha considerado uno de los tutoriales iniciales (Figura 1) propuestos en el programa Euclidea (en el capítulo 3 de metodología se presenta esta aplicación con detalle).

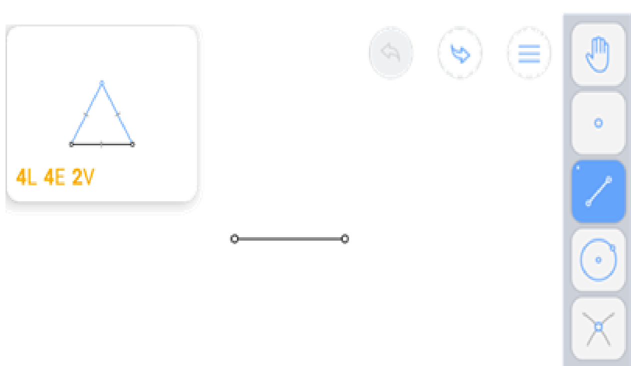


Figura 1. Tutorial de la construcción del triángulo equilátero. Euclidea. [Captura de pantalla]

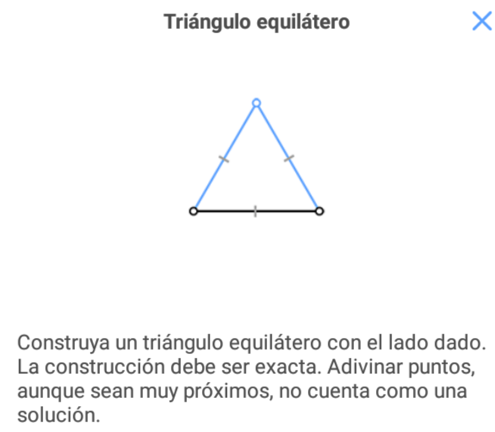


Figura 2. Descripción de la tarea (tutorial). Euclidea. [Captura de pantalla]

Como se puede observar en el enunciado de la tarea, se pide construir un triángulo equilátero a partir de uno de sus lados (Figura 2). El usuario solo dispone para esta construcción de los comandos punto, recta por dos puntos (en este ambiente corresponde a construir un segmento dados sus extremos), circunferencia dado el centro y uno de sus puntos y punto de intersección (Figura 1). La solución a esta tarea se presenta a continuación (ver Figura 3).

- Construir dos circunferencias con centro en cada extremo del segmento dado y radio dicho segmento.
- Determinar una de las intersecciones entre las dos circunferencias.
- Trazar dos segmentos (rectas) cuyos extremos sean el punto del paso anterior y los extremos del segmento inicial. El triángulo construido es equilátero.

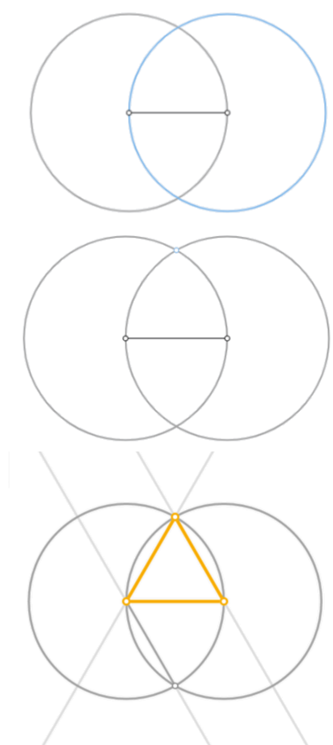


Figura 3. Construcción solución de la tarea propuesta. Euclidea. [Captura de pantalla]

Si se pregunta por qué funciona la construcción realizada. Las posibles respuestas dadas a esta pregunta pueden clasificarse en los niveles propuestos por Flores como sigue en la Tabla 1:

Tabla 1. ***Esquemas de Argumentación***

Nivel	Ejemplo a la luz de la tarea presentada
Autoritarios	• "Porque Euclidea confirmó la construcción solicitada al colocarse de color amarillo"[1]. • "Porque esa es la construcción que nos enseñó el profesor para hacer un triángulo equilátero".
Simbólicos	• "Porque los dos lados construidos son congruentes a la base del triángulo".
Fácticos	• "Construí dos circunferencias con centro en los extremos del segmento dado, siendo este su radio. Luego tracé los segmentos cuyos extremos son un extremo del segmento dado y una de las intersecciones de las dos circunferencias, debe ser la misma intersección".
Empíricos	• "Porque se ve que los lados son iguales". • "Porque así se ven los triángulos equiláteros".
Analíticos	• "Al construir las dos circunferencias con igual radio, el cual es la medida del segmento dado, puedo garantizar que los dos lados del triángulo construidos son congruentes al primero, porque la distancia de un punto al centro de una circunferencia es el radio, por tanto son congruentes".

2.2 Génesis Instrumental

Según Artigue (2002), en la década de los años noventa, en Francia, varios investigadores comenzaron a generar inquietudes por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en entornos de sistemas de algebra computacional (CAS, por sus siglas en inglés) dando como resultado el desarrollo de teorías como el Enfoque Instrumental. Este último concuerda con el trabajo desarrollado por Vygotsky años atrás, en el que se asume la actividad humana desde una perspectiva histórica y cultural, donde los instrumentos, tanto psicológicos como materiales, son esenciales (Trouche, 2014).

[1] Euclidea resalta de color amarillo al objeto geométrico que se requiere cuando la construcción es robusta y válida (ver Figura 2).

El Enfoque Instrumental recoge elementos de dos corrientes teóricas: la Teoría Antropológica de Chevallard y la Ergonomía Cognitiva de Vérillon y Rabardel. La primera corriente se enfoca en las técnicas que los estudiantes desarrollan para usar herramientas tecnológicas y en su interacción social, mientras que la segunda considera que los esquemas son el centro de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran, Mariotti, Ainley, Andresen, Chan y Meagher, 2010).

Aunque hay dos corrientes, se hace énfasis en la segunda, ya que el trabajo de Vérillon y Rabardel sigue la corriente teórica de Vygotsky, centrándose en los procesos de aprendizaje que involucran instrumentos y conllevando a la diferenciación entre *artefacto* e *instrumento* (Trouche, 2014); elementos que se describen en las próximas secciones. En otras palabras, esta corriente permite analizar las acciones mentales que realizan los estudiantes para apropiarse de las herramientas que ofrece el entorno de geometría dinámica Euclidea de una manera genérica; es decir identificar el significado que se le otorga a dichas herramientas al pasar el tiempo.

Desde el surgimiento de la *génesis instrumental*, esta ha ocupado un papel principal en varias investigaciones. Actualmente, algunas de estas han brindado aportes a la Educación Matemática, permitiendo analizar y entender la relación que se da entre una máquina y un sujeto en entornos de geometría dinámica. Cabe aclarar que esta teoría se desarrolló en entornos CAS, sin embargo se asumen las similitudes que hay entre los CAS y los entornos de geometría dinámica (Gutiérrez, Jaime y Alba, 2014).

Siguiendo la idea anterior, Pérez (2014) afirma que la *génesis instrumental* permite analizar las interacciones que se pueden lograr entre el profesor o estudiante y las tecnologías digitales (TDi) desde la concepción de la actividad de uso (color amarillo de la Figura 4). Estas relaciones aparecen en el tetraedro didáctico, que surge como consecuencia de la transformación que este autor propone al triángulo didáctico tradicional (profesor, estudiante y conocimiento matemático), en el cual integra las tecnologías digitales (Figura 4).

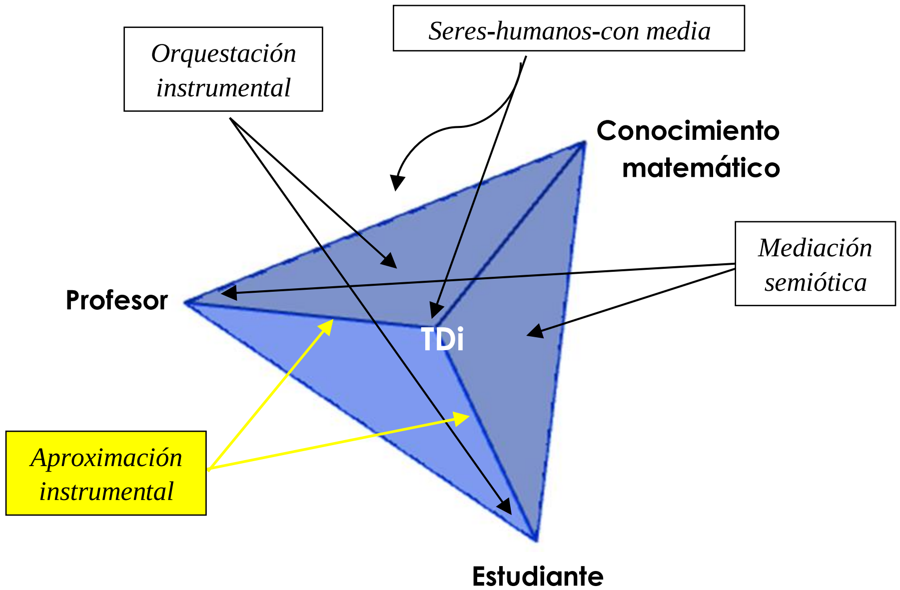


Figura 4. Tetraedro didáctico. (Pérez, 2014)

2.2.1 En qué consiste la Génesis Instrumental (Artefacto)

Para Rabardel (como se citó en García y Martínez, 2018) el enfoque instrumental está centrando en diferenciar entre *artefacto* e *instrumento* y abordar el proceso de transformación que se tiene del primer elemento al segundo. Dicha transformación es denominada por este autor como *génesis instrumental*.

Para autores como Rabardel (como se citó en Gutiérrez et al., 2014) y Trouche (como se citó en Suárez-Restrepo y Castro-Gordillo, 2017), la *génesis instrumental* consiste en la interacción que una persona tiene con un *artefacto* en un ambiente específico. Además, a medida que la interacción crece, la persona va adquiriendo experiencia con el *artefacto*; es decir, genera formas robustas para interactuar con este. Asimismo, Trouche (2014) afirma que Rabardel y Vérillon consideraron en su trabajo que la *génesis instrumental* necesita tiempo y está influenciada por las características del *artefacto* (sus potencialidades y limitaciones), por la historia de la persona (conocimiento y método del trabajo anterior), y por su actividad, al trabajar con un problema a resolver.

En las ideas señaladas hasta ahora se reconocen algunos términos protagonistas, uno de ellos es el *artefacto*, considerado como el inicio de la G*énesis Instrumental*. El artefacto, según Leung, Chan y López (2000) “es una herramienta hecha por el hombre con un fin específico” (p. 2). Gutiérrez et al. (2014) describen que el artefacto puede ser físico o simbólico y está sujeto a un proceso que por un lado es tangible, pues hace referencia a la manipulación de la herramienta, y por el otro es psicológico, pues conlleva a la interpretación de la información de la persona y la toma de decisiones sobre la herramienta al momento de usarla.

Según Pérez (2014), en un ambiente de geometría dinámica se puede tomar como artefacto al software de geometría dinámica o a los comandos que dicho software posee; en el caso particular de este trabajo de grado concebimos como artefacto a los comandos del entorno de geometría dinámica Euclidea. Este artefacto ha sido programado por el hombre para la construcción y manipulación de objetos de la geometría euclidiana, de ahí su carácter físico, aunque digital; a su vez son simbólicos al representar objetos geométricos.

2.2.2 Procesos de instrumentación e instrumentalización

La *génesis instrumental* se compone de dos procesos que están interrelacionados y se generan a partir del efecto, en ambos sentidos, que hay entre el *artefacto* y el *sujeto*. Guin et al. (como se citó en Trouche, 2014) afirma que dichos procesos son esenciales dentro de la génesis instrumental. Estos son denominados como *instrumentalización* e *instrumentación*, los cuales se describen a continuación.

La *instrumentalización* es definida por Artigue (2002) como el proceso que dota de potencialidades al artefacto para que este realice acciones específicas. Por su parte Trouche (2014), la define como la atribución de una función al artefacto por parte de una persona. Además, este autor señala aspectos más minuciosos de la *instrumentalización*, pues la considera como el proceso de la diferenciación del artefacto que puede pasar por diferentes etapas, las cuales son: el descubrimiento, donde la persona realiza la selección de las herramientas relevantes; la personalización, etapa en la que se ajustan las herramientas a las necesidades de la persona y la transformación, que hace referencia a la modificación o creación de nuevas herramientas (Trouche, 2004).

Por ejemplo, el comando mediatriz de un segmento en un ambiente de geometría dinámica permite encontrar infinitos puntos que equidistan de los extremos de un segmento, entre esos puntos se encuentra el punto medio de dicho segmento. Sin embargo, cuando se requiere encontrar el centro de una circunferencia la mediatriz puede ser útil para esta tarea, cumpliéndose la etapa de descubrimiento. En la etapa de personalización se procede a hallar la mediatriz de dos cuerdas de la circunferencia (los extremos de las dos cuerdas pueden ser al menos tres puntos), siendo el centro el punto de intersección de las dos mediatrices. Finalmente, en la etapa de transformación, se puede crear una herramienta que permita generar el centro de una circunferencia al seleccionar tres puntos de la circunferencia, siendo estos los extremos de las cuerdas.

La *instrumentación*, según Artigue (como se citó en Suárez-Restrepo y Castro-Gordillo, 2017), es la acción que va dirigida a la persona, en la que esta genera y desarrolla esquemas de uso que le permiten apreciar las potencialidades y limitaciones del artefacto, para que genere soluciones óptimas a tareas establecidas. Por su parte, Trouche (como se citó en Suárez-Restrepo y Castro-Gordillo, 2017) la define como el proceso en que el instrumento afecta a la persona, permitiendo que esta elabore esquemas de uso para obtener nuevo conocimiento matemático. Rabardel (como se citó en Gutiérrez et al., 2014) la asume como el surgimiento y evolución de esquemas de uso (su construcción, su funcionamiento y su evolución), además de la inclusión de artefactos a esquemas ya constituidos. Finalmente, resumiendo las ideas de los anteriores autores, se hace referencia a la definición establecida por García y Martínez (2018, p. 407) en la que:

> La *instrumentación* está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

Siguiendo con el ejemplo de la mediatriz de un segmento; después que el artefacto ha pasado por las tres etapas propuestas por Trouche en la instrumentalización, el sujeto puede comprender las propiedades adicionales que tiene este objeto geométrico, ya que le ha permitido encontrar el centro de una circunferencia aunque esta función inicialmente no se exprese en la definición de mediatriz.

2.2.3 Qué es un esquema de uso

Como se observó, en la instrumentación se describe la elaboración y desarrollo de esquemas de uso para que este proceso se lleve a cabo. Para Leung et al. (2000, p. 2) un esquema de uso “es un procedimiento sistemático sobre el uso de un determinado instrumento para lograr un fin específico”. Por su parte Vergnaud (como se citó en Trouche, 2014, p. 310) afirma que un esquema de uso es “la organización invariante de la actividad para realizar un tipo de tarea, incluidas las reglas de acción y los conocimientos específicos, producto y primavera de la actividad”. Retomando el anterior ejemplo, los esquemas de uso que ponen en funcionamiento a la mediatriz (artefacto) para hallar el centro de una circunferencia, hacen referencia a seleccionar al menos tres puntos de la circunferencia (extremos de las dos cuerdas), construir las mediatrices de las cuerdas y obtener el punto de intersección de las dos mediatrices.

2.2.4 Qué es un instrumento

Según Rabardel (como se citó en Sua y Camargo, 2019), cuando se lleva a cabo los dos procesos interrelacionados de instrumentalización e instrumentación, se logra que el *artefacto* se convierta en *instrumento*. Este último es considerado por Rabardel (como se citó en Gutiérrez et al., 2014) y Trouche (2014) como la composición del artefacto y los esquemas de uso, que son el resultado de la interacción del sujeto con el artefacto. Además se considera que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto con la acción del sujeto (Rabardel, 1995, citado por García y Martínez, 2018; Leung et al., 2000). Autores como Pérez (2014) siguen la idea de Rabardel quien describe un *instrumento* como una entidad mixta que comprende al sujeto y al artefacto, por medio de dos componentes, uno artefactual y uno cognitivo. El primero se relaciona directamente con el artefacto, mientras que el segundo hace referencia a las técnicas y esquemas mentales que el sujeto desarrolla y aplica al momento de usar el artefacto.

2.2.5 Instrumentalización e instrumentación: La propuesta de Sua y Camargo

De acuerdo a los elementos de la Génesis Instrumental detallados anteriormente, se ha escogido los índices que Sua y Camargo (2019) proponen para los procesos de instrumentalización e instrumentación. Estos índices han sido fruto de la interacción que los estudiantes de su investigación han tenido con algunos comandos de GeoGebra; es decir, cómo estos se han convertido de artefactos a instrumentos para los estudiantes. Relación similar que se pretende en esta investigación con los comandos de Euclidea y por eso su selección.

Teniendo en cuenta la descripción que estos autores presentan en su investigación, la Génesis Instrumental se logra, en este caso, cuando los estudiantes manifiestan acciones que pertenezcan a ambos procesos (Instrumentalización e Instrumentación), generando que haya una apropiación de los comandos de Euclidea por parte de los estudiantes. En los dos procesos de la Génesis Instrumental se proponen cuatro índices por separado, los cuales se evidencian en la Tabla 2.

Tabla 2. ***Indicadores de los procesos de Instrumentalización e Instrumentación***

Proceso de Instrumentalización		
Isa 1	Descubrimiento de posibilidades de un comando.	Se descubre, para un comando (o conjunto de estos), nuevas posibilidades y funciones que permiten resolver la tarea y que anteriormente no se conocían.
Isa 2	Identificación de limitaciones de un comando o herramienta.	Se identifica que un comando que se quiere usar con un propósito definido o con una idea tentativa no ofrece un resultado afortunado y, en consecuencia, se descarta la posibilidad de asignar esta función al comando.
Isa 3	Personalización y ajuste del artefacto a los intereses personales.	Se identifica la diversidad de usos de un comando asociados a intereses específicos. El comando es utilizado según distintos esquemas, de acuerdo a los requerimientos de la tarea.
Isa 4	Transformación del artefacto.	Se reconoce un artefacto como medio para la obtención de un fin particular en un contexto específico y se usa con un fin igual o distinto a aquel con el que fue concebido. La experiencia del individuo al usar el comando bajo un nuevo esquema le ofrece un nuevo significado del mismo.
Proceso de Instrumentación		
Ias 1	Aparición de un esquema asociado a un conjunto de comandos.	Se reconoce un determinado conjunto de pasos, sobre un comando (o conjunto de estos) como efectivo para la obtención de un resultado particular y este es aceptado por el estudiante.
Ias 2	Desarrollo de un esquema para la obtención de un resultado particular.	Una vez se acepta el resultado de un conjunto de pasos, el estudiante identifica un procedimiento para su uso, con miras a obtener el mismo resultado al incorporar el esquema.
Ias 3	Adaptación de un esquema al resolver un problema.	Sucede al modificar un procedimiento, bien sea para incluir algunas acciones a las ya presupuestadas y dar mayor alcance a este o para reducir y refinar el procedimiento inicialmente considerado.
Ias 4	Uso del comando, en distintas tareas, bajo el mismo esquema.	Sucede cuando, de manera rutinaria, en distintos problemas, el estudiante involucra un esquema desarrollado en algún momento. En este punto se puede decir que el artefacto ha sido apropiado bajo un esquema particular y se ha atribuido un papel al mismo en la obtención de un resultado específico.

A continuación se ejemplifica cada indicador descrito anteriormente, teniendo en cuenta la relación entre los estudiantes y el objeto geométrico mediatriz de un segmento, al asumir como tarea la construcción de una recta tangente a una circunferencia por un punto dado (Figura 5).

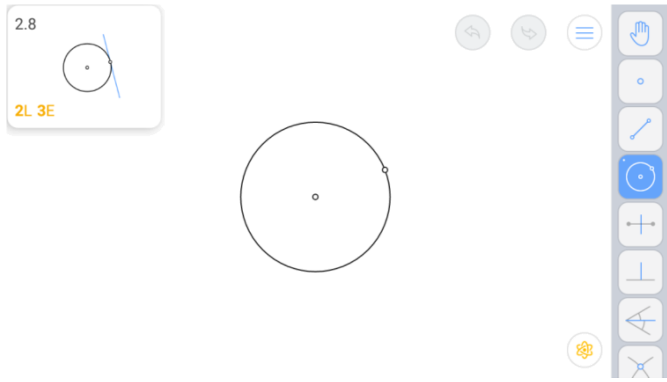


Figura 5. Tarea 2.8. Euclidea. [Captura de pantalla]

Proceso de instrumentalización

- **Isa 1:** Los estudiantes pueden reconocer que la construcción de la mediatriz les permite encontrar el punto medio del segmento.
- **Isa 2:** Al querer construir una recta tangente a la circunferencia, los estudiantes pueden construir una segunda circunferencia de igual radio a la primera y con centro en el punto dado. Luego, construye una cuerda de la segunda circunferencia y su respectiva mediatriz (Figura 6 parte izquierda). Luego arrastran uno de los extremo de la cuerda, hasta que el punto dado coincida con el punto medio de la cuerda (Figura 6 parte derecha).

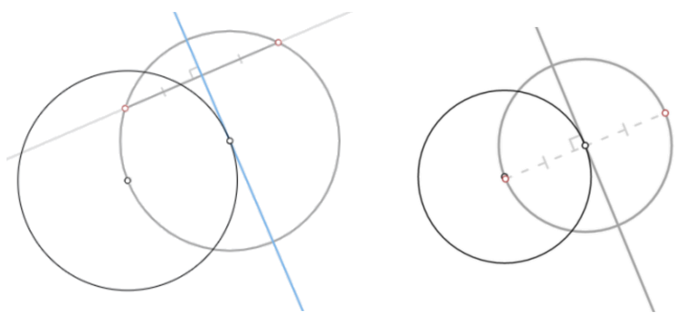


Figura 6. Posible estrategia de solución a la tarea 2.8. Euclidea. [Captura de pantalla]

- **Isa 3:** Los estudiantes pueden reconocer que la mediatriz es perpendicular al segmento (marquilla de ángulo recto), además de intersecarlo en su punto medio (marquillas de congruencia).

- **Isa 4:** Ellos pueden comprender que la mediatriz les permite encontrar la recta tangente a la circunferencia dada, teniendo en cuenta que esta es perpendicular con el radio, siendo uno de sus extremos el punto dado.

Proceso de instrumentación

- **Ias 1:** Los estudiantes pueden comprender que la construcción de la recta tangente por el punto dado, se puede obtener construyendo una segunda circunferencia, de igual radio a la primera y con centro en el punto dado; determinando el diámetro de la segunda circunferencia, que está contenido en la recta que pasa por el centro de las dos circunferencia; y la mediatriz de dicho diámetro (Figura 7).

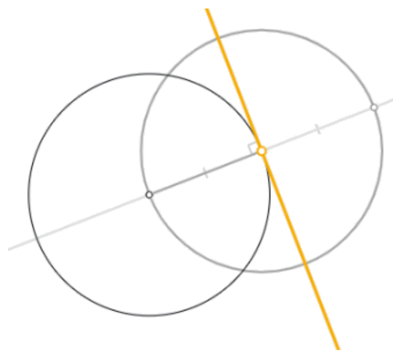


Figura 7. Solución desarrollada por los estudiantes. Euclidea. [Captura de pantalla]

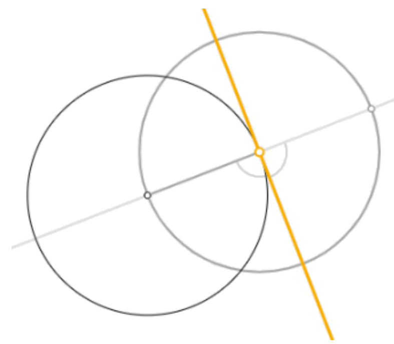


Figura 8. Solución no adoptada por los estudiantes. Euclidea. [Captura de pantalla]

- **Ias 2:** Los estudiantes comprenden que el procedimiento descrito en Ias 1 les permite construir una recta tangente a una circunferencia por un punto dado, dejando a un lado otros procedimientos. Por ejemplo, realizar la construcción de una segunda circunferencia (igual radio a la primera y centro en el punto dado), luego se traza la recta que pasa por el centro de la primera circunferencia y el punto dado, después se construye la bisectriz del "ángulo llano" determinado por la recta, cuyo vértice es el punto dado.
- **Ias 3:** Los estudiantes pueden usar la anterior secuencia de pasos para generar otras construcciones como un cuadrado, teniendo en cuenta que este debe estar circunscrito en la circunferencia dada (Figura 9).

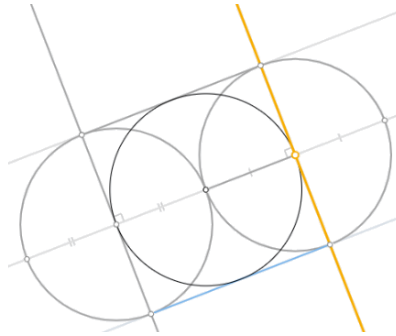


Figura 9. Tarea alterna usando la misma secuencia de pasos. Euclidea. [Captura de pantalla]

- **Ias 4:** Los estudiantes siguen replicando esta secuencia de pasos para la solución de algunas tareas, por ejemplo la contemplada en Ias 3, generando que se apropien del uso y la definición o el hecho geométrico de mediatriz bajo un esquema desarrollado en algún momento.

3. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se reporta el proceso metodológico realizado en este trabajo de grado, teniendo en cuenta los aspectos principales del anterior capítulo. El proceso metodológico para esta investigación se desarrolla en cuatro partes. En la primera, se presenta la estrategia que enmarca las acciones investigativas que se llevan a cabo. En la segunda, se contextualiza el escenario y el rol asumido por cada participante. En la tercera, se especifica el diseño del instrumento y los dispositivos para recoger los datos. Finalmente, se describen los parámetros que permiten analizar los datos recolectados y los criterios de calidad de esta investigación.

3.1 Perspectiva investigativa

En concordancia con la delimitación del problema y el objetivo presentados en el capítulo de justificación, se ha escogido el enfoque fenomenológico. Este permite interpretar los actos o experiencias que son vividos por las personas que son objeto de estudio, en particular, haciendo uso del recurso tecnológico digital involucrado. Lo anterior da paso para emplear una aproximación interpretativa, la cual consiste en realizar un análisis personalizado de los signos que son emitidos por los estudiantes, al resolver tareas enmarcadas en la resolución de problemas.

Teniendo en cuenta el objetivo de esta investigación, se ha optado por realizado un estudio de caso por medio de la estrategia *Entrevista basada en tareas* propuesta por Goldin (como se citó en Camargo, 2018). Esta consiste en profundizar en fenómenos que pueden estar relacionados con procesos de resolución de tareas. Un ejemplo de dicha relación es el uso de tecnología digital para caracterizar el proceso de la argumentación en geometría.

Esta estrategia permite que un grupo pequeño de estudiantes, no necesariamente todo el curso (tal como se da en este trabajo de grado), realicen tareas previamente escogidas y analizadas por el profesor, de tal manera que se genere discusión entre ellos y eventualmente haya intervención de un entrevistador, el cual puede ser la misma profesora. A partir de esta discusión se busca que los estudiantes piensen en voz alta; es decir, que comuniquen ideas claras, concisas y completas, manifiesten las estrategias a usar y el porqué de estas, sin dejar a un lado el desarrollo de las tareas. Asimismo, esta estrategia investigativa ayuda a tener una mirada específica sobre el empleo de los recursos, para este caso Euclidea, pues según Goldin (como se citó en Camargo, 2018) estos también se consideran participantes durante la entrevista.

La entrevista basada en tareas tiene cinco fases, las cuales se describen a continuación. Primero, se debe tener una fundamentación teórica de los procesos y objetos matemáticos que se van a abordar en la entrevista. Segundo, se diseña la entrevista teniendo en cuenta las tareas, los recursos, las intervenciones de la profesora y el tiempo que se necesita. Tercero, se aplica pruebas piloto, pues es necesario tener ideas de cómo se puede desarrollar la entrevista y cómo, posiblemente, interpretan y solucionan las tareas los estudiantes. Con ayuda de expertos se logra la versión final de la entrevista, previniendo posibles contratiempos. Cuarto, se procede a que los estudiantes (entrevistados) realicen las tareas y la profesora (entrevistador) realice la entrevista, permitiendo obtener los datos necesarios para la investigación. Quinto, se analizan dichos datos con las categorías establecidas que permiten llegar a la producción de resultados; estos ayudan a dar respuesta a la pregunta problema y verificar el cumplimiento del objetivo de la investigación.

3.2 Contexto del estudio

Esta investigación se lleva a cabo en el Colegio Rafael María Carrasquilla, de carácter privado, el cual está ubicado en la localidad Rafael Uribe Uribe, de la ciudad de Bogotá. La Institución ha venido adecuando dos salas de informática, con la meta de fortalecer los procesos educativos por medio de recursos tecnológicos, especialmente la apropiación de la tecnología digital, la cual se espera integrar en todas las áreas disciplinares.

La entrevista de esta investigación la realiza la profesora titular de las asignaturas de Matemáticas y Geometría de grado noveno de la Institución, quien es la misma autora de este trabajo. Ella ha sido la profesora de los estudiantes seleccionados desde el año 2016. A pesar de lo anterior, el aprendizaje de geometría no ha sido constante, puesto que en grados anteriores no se les brindó la oportunidad de desarrollar algunos de los procesos, tal como se explica más adelante.

Para las entrevistas se seleccionaron dos estudiantes del grado noveno. Ellos procuran ser participativos en clases de matemáticas y geometría, planteando, dudando y opinando sobre afirmaciones que se dan, proponiendo posibles soluciones, etc. En forma resumida, a ellos les gusta opinar y comunicar ideas sobre las situaciones que se presentan en clase, siendo este el principal argumento para su escogencia; además del buen ánimo, actitud y compromiso que manifiestan en las clases nombradas anteriormente.

Respecto a la formación académica de los estudiantes de grado noveno, la profesora autora de este trabajo ha evidenciado que ellos no llevan a cabo las acciones propias del proceso de la argumentación en clase de geometría, lo cual se debe en gran parte porque en grados anteriores los profesores no les brindaron la oportunidad de desarrollar dicho proceso. Además, la geometría no tiene un peso curricular en el Colegio, puesto que en ocasiones esta asignatura no es guiada por profesores que se hayan especializado en el área.

En el uso de la tecnología digital, los estudiantes han tenido algunas oportunidades de interactuar con Geogebra (parte algebraica) o PhotoMath en clase de matemáticas, pero a lo que refiere a la clase de geometría el uso de recursos de este tipo ha sido nulo; por tal razón los estudiantes no conocen la App Euclidea, siendo una razón importante y un punto a favor para el desarrollo de esta investigación, pues las estrategias que proponen los estudiantes para cumplir con el objetivo de cada tarea son genuinas o auténticas.

3.3 Aplicación Euclidea

Euclidea es una aplicación[2] que tiene como objetivo realizar construcciones geométricas utilizando, inicialmente, rectas y circunferencias. Euclidea ofrece 15 bloques, nombrados con letras del abecedario griego (Figura 10); en estos se dividen cerca de 127 niveles (considerados de aquí en adelante como tareas), los cuales van incrementando su dificultad a medida que se avanza. Este videojuego permite al estudiante poner a prueba sus conocimientos de geometría plana, experimentar en el proceso de construcción, gracias al dinamismo de los objetos representados en pantalla y recibir una realimentación de la aplicación sobre la pertinencia de su propuesta.

[2] Las aplicaciones de software para dispositivos móviles son creados para realizar tareas concretas y entregarlas lo más rápido posible. Cabe resaltar que una aplicación no pretende satisfacer todas las necesidades del usuario (Cáceres, Roy, y Zachman, 2013).

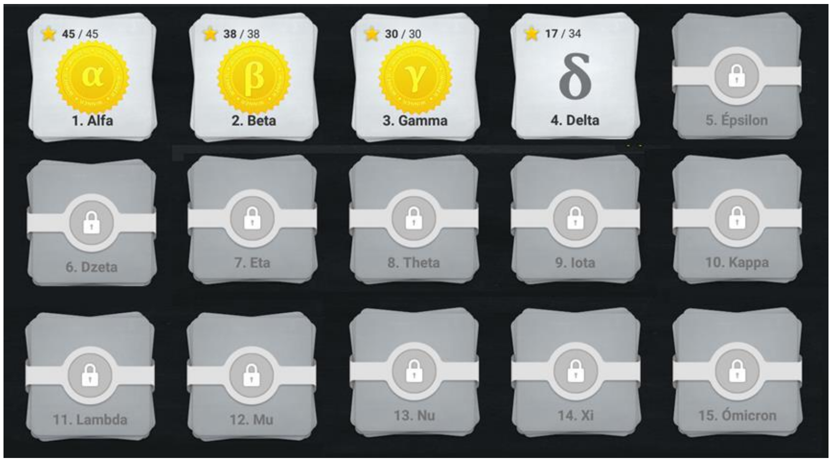


Figura 10. Bloques de Euclidea. Euclidea. [Captura de pantalla]

La interfaz de Euclidea ofrece una serie de herramientas que los estudiantes pueden usar de acuerdo a su criterio (Figura 11). En la parte superior izquierda de la pantalla se encuentra una representación gráfica del objeto geométrico que se solicita y al dar clic sobre esta aparece el enunciado de la tarea que se debe realizar (a); allí mismo se encuentran los objetivos para obtener todas las estrellas de la tarea, estas se relacionan con cantidad de pasos (estrella E), cantidad de objetos geométricos (estrella L) y la posibilidad de dos soluciones simultaneas (estrella V) (b). En la parte derecha de la pantalla, organizadas en columna, están los objetos geométricos (comandos) que pueden ser usados para la construcción (c). El videojuego también ofrece pistas de construcción, ya sea para cumplir con alguna de las estrellas o para brindar un dato útil relacionado con el objetivo de la tarea (d). Otra herramienta es el botón que permite ver el objeto geométrico que corresponde a la solución de la tarea, teniendo en cuenta que sobre esta se puede idear una estrategia de construcción para determinar dicho objeto (e).

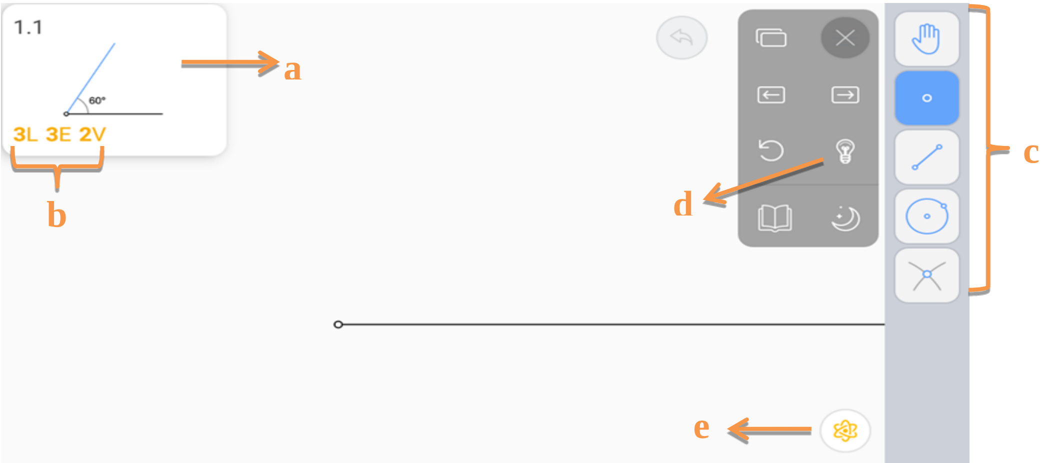


Figura 11. Herramientas de Euclidea. Euclidea. [Captura de pantalla]

Las tareas de Euclidea cuentan con los siguientes parámetros para su desarrollo. Se da por hecho que el jugador previamente reconoce propiedades y características de objetos como triángulos, cuadriláteros, ángulos, circunferencia, entre otros, las cuales el jugador debe poner en práctica para dar solución a cada tarea. Luego, al iniciar el videojuego, se ofrecen tutoriales para aprender a manejar cada una de las herramientas identificadas en la parte (c) de la Figura 11, tanto para las iniciales (circunferencia, recta, intersección, punto) como para los que se van desbloqueando (mediatriz, perpendicularidad, bisectriz, entre otras). Finalmente, al momento de realizar las construcciones, estas requieren el uso de propiedades y características de una manera básica o media, de acuerdo a la cantidad de objetos y pasos a usar, o con una dificultad compleja cuando se hace uso de determinados teoremas de la geometría, por ejemplo el teorema de Pitágoras para la construcción de números irracionales. Lo anterior se representa en el siguiente esquema (Figura 12):

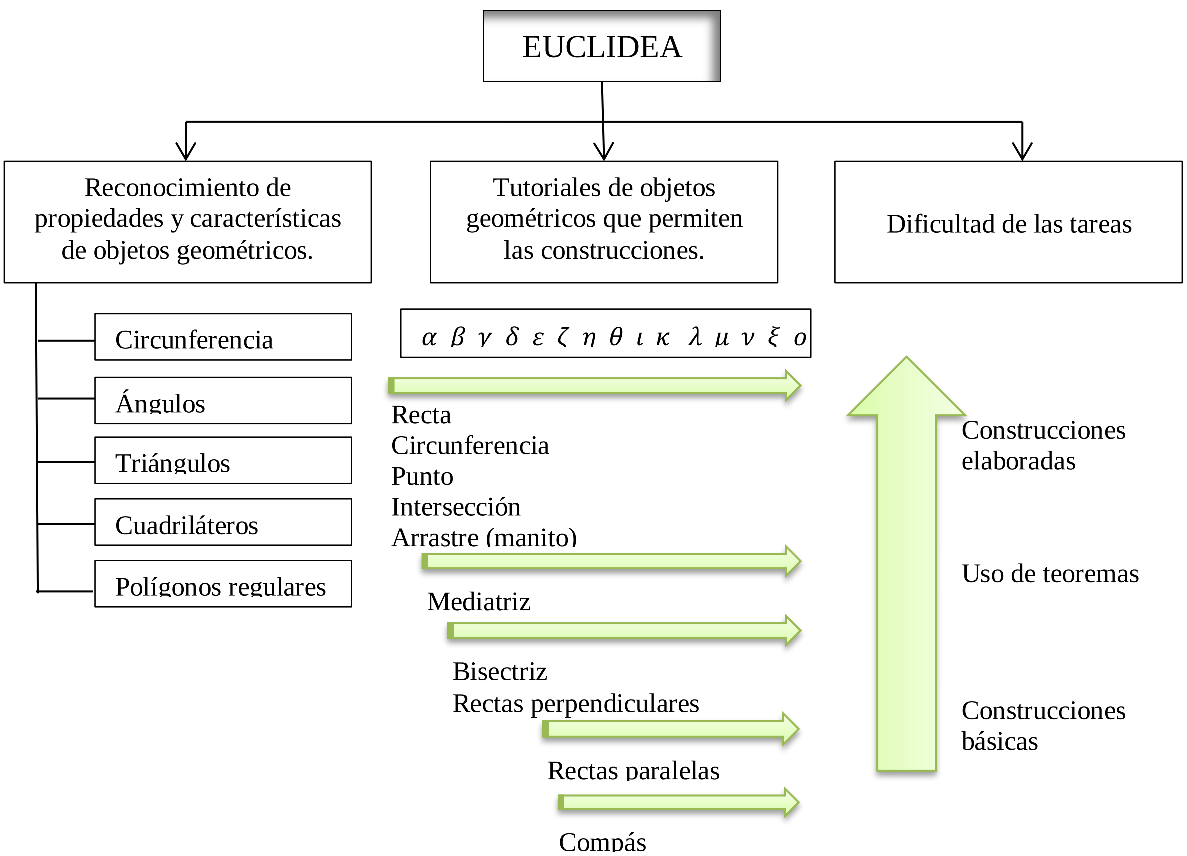


Figura 12. Descripción general de Euclidea. Elaboración propia

3.4 Secuencia a implementar

Hasta el momento se ha caracterizado a los estudiantes (entrevistados) y al recurso de tecnología digital (Euclidea), siendo los protagonistas de la entrevista que se pretende abordar. Sin embargo, la secuencia a implementar se lleva a cabo desde el inicio del año escolar y se divide en dos partes.

La primera parte hace referencia a la implementación de tareas para todos los estudiantes de grado noveno del Colegio. El diseño de estas fomenta el uso de regla y compás y su objetivo es que los estudiantes adquieran elementos de la geometría para formar un sistema teórico local compuesto de definiciones y hechos geométricos, con el fin de argumentar las construcciones propuestas para solucionar estas tareas, como también las propuestas en Euclidea.

Las situaciones que se diseñan en las tareas a desarrollar con regla y compás atienden a los elementos de geometría plana requeridos para desarrollar las tareas de los bloques alfa, beta y gama que ofrece Euclidea. Estas son de dos tipos; por un lado, hay situaciones que permiten introducir propiedades y características de objetos geométricos (*e. g.* la construcción de un cuadrado dado una de sus diagonales) y por el otro, situaciones que permiten hacer uso de elementos previamente adquiridos (*e. g.* construir el centro de una circunferencia). Lo anterior se consigna en la Tabla 3, la cual contiene los objetivos de cada tarea diseñada (el diseño completo de las tareas se encuentra en el Anexo 2).

Tabla 3. ***Objetivos de las tareas que requieren regla y compás para su solución***

Sesión	Tarea	Contenido	Objetivo
Sesión 1	1.1	Puntos colineales	Reconocer que dos puntos determinan una única recta.
	1.2	Circunferencia, equidistancia	Identificar características y propiedades que posee una circunferencia.
Sesión 2	2.1	Circunferencia, segmentos congruentes	Emplear la circunferencia como herramienta para la construcción de segmentos congruentes.
	2.2	Punto medio.	Identificar características del punto medio de un segmento.
Sesión 3	3.1	Equidistancia, segmentos congruentes	Identificar el lugar geométrico de puntos que equidistan de otros puntos.
	3.2	Mediatriz, punto medio, perpendicularidad	Determinar propiedades que existen entre un segmento y su mediatriz.

Sesión 4	4.1	Punto medio, equidistancia, segmentos congruentes	Construir con regla y compás algunos objetos geométricos.
	4.2	Mediatriz, equidistancia, segmentos congruentes	
	4.3	Triángulo isósceles, equidistancia, segmentos congruentes	
Sesión 5	5.1	Triángulo, Suma de los ángulos internos de un triángulo	Identificar que la suma de la medida de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a 180.
	5.2	Triángulo isósceles, circunferencia, ángulos congruentes	Deducir que en un triángulo isósceles hay exactamente dos ángulos congruentes.
Sesión 6	6	Segmentos congruentes, ángulos congruentes, sumas de los ángulos de un triángulo, triángulos congruentes, criterios de congruencia	Identificar los criterios de congruencia de triángulos.
Sesión 7	7.1	Segmentos congruentes, ángulos congruentes, ángulo recto, rectas perpendiculares, cuadrilátero, cuadrado	Identificar la definición de cuadrado, rectángulo y rombo y propiedades de estos.
	7.2	Segmentos congruentes, ángulos congruentes, cuadrilátero, rombo	
	7.3	ángulos congruentes, ángulo recto, rectas perpendiculares, cuadrilátero, rectángulo	
Sesión 8	8.1	Rectas paralelas, cuadrilátero, paralelogramo, trapecio	Identificar la definición de trapecio y paralelogramo.
	8.2	Rectas paralelas, triángulo, triángulos congruentes, ángulo alternos internos	Establecer la relación entre paralelas y ángulos alternos internos.
Sesión 9	9.1	Circunferencia, cuerda, mediatriz	Construir el centro de una circunferencia
	9.2	Semicircunferencia, ángulo recto	Determinar que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
Sesión 10 y 11	10 y 11	Problemas de aplicación	Argumentar la solución de problemas, usando el sistema teórico construido.

A continuación se presenta el sistema teórico local, construido con los estudiantes de grado noveno, conformado por las definiciones (denotado como D) y los hechos geométricos (denotado como H. G.) introducidos por medio de las tareas que tenían este fin. De acuerdo a lo anterior, los elementos de dicho sistema se enlistan en el orden correspondiente al número de las sesiones en la Tabla 4, teniendo en cuenta que estos se basaron en los libros Elementos de Geometría (Samper, Molina, y Echeverry, 2013) y Geometría Moderna (Moise y Downs, 1986).

Tabla 4. ***Sistema teórico local construido con los estudiantes de grado noveno***

No.	Elemento del sistema teórico
Sesión 1	**H. G. Dos puntos – Recta** Dados dos puntos diferentes, existe una única recta que los contiene. **D. Colinealidad** Tres puntos o más son colineales si existe una recta que los contenga. **D. Equidistancia** Dos puntos o más equidistan de un punto A si dichos puntos están a la mismas longitud de A. **D. Circunferencia** Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro. **H. G. Radios congruentes** Los radios de una circunferencia son congruentes.
Sesión 2	**D. Punto Medio** M es punto medio de $\overline{AB}$ si M equidista de A y de B, y A, M y B son colineales.
Sesión 3	**D. Mediatriz** La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que equidistan de sus extremos. **D. Perpendicularidad** Dos objetos geométricos (rectas, rayos o segmentos) son perpendiculares si forman un ángulo recto. **D. Ángulo recto** Un ángulo recto es un ángulo cuya medida es 90. **H. G. Mediatriz** Dado un segmento, su mediatriz es perpendicular a este y lo interseca por su punto medio.
Sesión 5	**H. G. Ángulos triángulo – 180** La suma de la medida de los ángulos de un triángulo es igual a 180. **H. G. Triángulos Isósceles – Ángulos** Dado un triángulo isósceles sus dos ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.
Sesión 6	**D. Triángulos congruentes** Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos correspondientes son congruentes, en otras palabras si los triángulos tienen la misma forma y el mismo tamaño. **Criterio LAL** Dos triángulos son congruentes si dos pares de lados correspondientes son congruentes y el par de ángulos (comprendidos entre dichos lados) también son congruentes. **Criterio ALA** Dos triángulos son congruentes si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes y un par de lados (lados en común de los ángulos) también son congruentes.

	Criterio LLL Dos triángulos son congruentes si los tres pares de lados correspondientes son congruentes.
Sesión 7	**D. Cuadrado** Un cuadrado es un cuadrilátero con sus ángulos rectos y sus lados congruentes. **H. G. Cuadrado – Diagonales** Dado un cuadrado entonces sus diagonales: Son perpendiculares, se intersecan en sus puntos medios y son congruentes. **D. Rectángulo** Un rectángulo es un cuadrilátero con sus cuatro ángulos rectos. **H. G. Rectángulo – Diagonales** Dado un rectángulo entonces sus diagonales: Son congruentes y se intersecan en sus puntos medios. **D. Rombo** Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes. **H. G. Rombo – Diagonales** Dado un rombo entonces sus diagonales: Son perpendiculares y se intersecan en sus puntos medios.
Sesión 8	**D. Paralelismo** Dos rectas son paralelas si no tienen puntos en común. **D. Trapecio** Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. **D. Paralelogramo** Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos **H. G. PAI** Si dos rectas son paralelas y existe una tercera recta transversal a las iniciales, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
Sesión 9	**H. G. Mediatriz – Centro de circunferencia** Dadas las mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son puntos de la circunferencia entonces su intersección determina el centro de la circunferencia. **D. Semicircunferencia** Dada una circunferencia y uno de sus diámetros. Una semicircunferencia son los puntos que están en un mismo semiplano determinado por el diámetro, incluidos los puntos extremos del diámetro. **H. G. Semicircunferencia – Ángulo recto** Dada una semicircunferencia, si un ángulo está inscrito en ella entonces el ángulo es recto.

La segunda parte de la secuencia, hace referencia a las tareas de Euclidea. Se seleccionaron 17 tareas que involucran los siguientes objetos matemáticos: circunferencia, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo y rectas perpendiculares. Estas tareas están distribuidas en los primeros tres bloques de la siguiente manera: las tareas del bloque alfa resaltan el uso de las características y propiedades que tiene la mediatriz de un segmento; las del bloque beta, resaltan las propiedades de la bisectriz de un ángulo y las propiedades de las rectas perpendiculares; finalmente, en el bloque gama se proponen tareas que involucran al menos uno de los anteriores objetos descritos. A continuación se presenta un esquema de la distribución de las tareas en los tres primeros bloques (Figura 13):

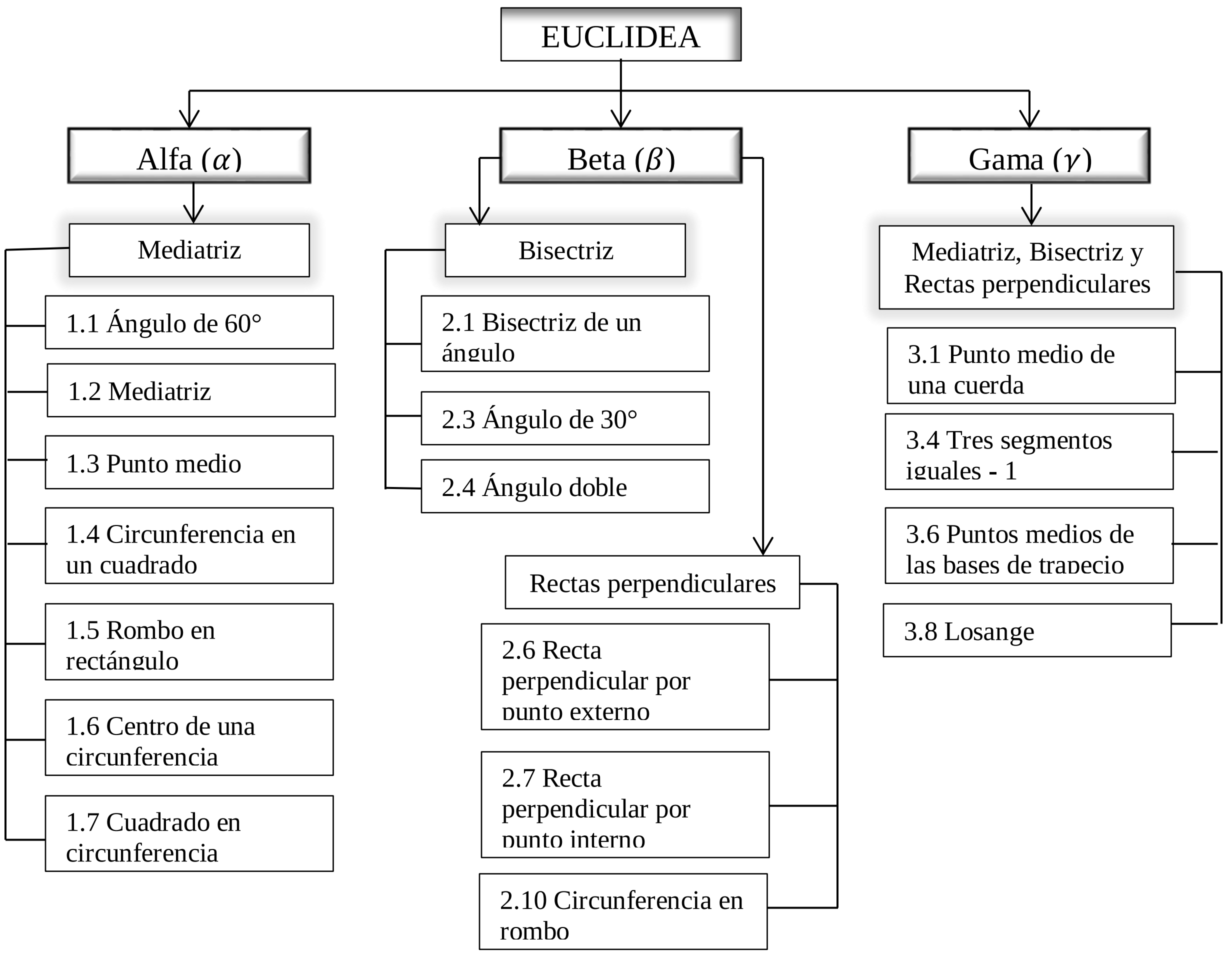


Figura 13. Distribución de las tareas en los primeros bloques de Euclidea. Elaboración propia

Las anteriores tareas son seleccionadas principalmente porque las construcciones permiten a los estudiantes manejar las herramientas, apropiarse de la interfaz, poner en juego su conocimiento geométrico para idear estrategias de las construcciones y su respectiva argumentación (esquemas de argumentación), y reconocer y apropiar, posiblemente, las propiedades y características de un objeto geométrico a lo largo de las construcciones (génesis instrumental).

3.5 Preparación de la entrevista

Tal como se describe anteriormente, las tareas seleccionadas traen consigo una determinada finalidad respecto a los esquemas de argumentación y la génesis instrumental. De acuerdo a esto, se ha diseñado una entrevista para obtener información fructífera que apunte a los procesos de resolución usados por los estudiantes (como se citó en Camargo, 2018).

Durante la entrevista, los estudiantes deben argumentar cada paso de la construcción que realizan, teniendo en cuenta que Euclidea admite varias soluciones, siempre y cuando se construya el objeto geométrico solicitado de manera robusta. Por eso, con el ánimo de reconocer las posibles soluciones (blandas y robustas) que los estudiantes pueden construir y de reestructurar y formular nuevas preguntas que puedan surgir en el proceso de resolución, se ha realizado una prueba piloto de las primeras cuatro tareas con dos estudiantes de grado décimo, ya que ellos han culminado su ciclo de geometría escolar. Esta prueba también permite identificar la ubicación estratégica de los equipos de grabación para la entrevista con los estudiantes de grado noveno, de tal manera que se puedan captar movimientos y emociones, audio claro y las construcciones realizadas en Euclidea.

Con lo anterior, se pasa a estructurar el libreto de la entrevista para que los estudiantes expongan ideas claras, completas y precisas de su pensamiento, estrategias a usar y las razones de su uso. Estas preguntas también pueden brindar “pistas” a los estudiantes, con el ánimo de que estas se conviertan en una posible orientación. Aunque se espera que los libretos provean suficiente información en la entrevista, por eso se planifican cuidadosamente previo a la implementación, se pueden realizar preguntas no planeadas que se consideren necesarias y permitan clarificar alguna intervención de los estudiantes (conocer qué están pensando durante momentos prolongados de silencio o cuando recurren a expresiones gestuales para comunicar sus ideas). Sin embargo, cabe aclarar que este tipo de preguntas deben evitarse en momentos iniciales en los que el estudiante afronta la tarea, pues se corre el riesgo de que las ideas y estrategias que ellos tengan previstas se desvíen, dejen de ser genuinas y por lo tanto se pierda dicha información.

Los libretos de las 17 tareas se han consolidado en esquemas, los cuales muestran las distintas estrategias de solución (casos) y en estas, las preguntas que se tiene previsto realizar. Los esquemas permiten mostrar el flujo que puede darse al momento de resolver cada tarea, pero este no es lineal y no demanda que los estudiantes transiten por los distintos casos que se han contemplado. Además, en cada caso se han formado dos grupos de preguntas, indagadoras y "pista"; con el primer grupo se busca que los estudiantes argumenten la construcción de objetos geométricos y con el segundo, se pretende dar ideas a los estudiantes para generar una estrategia clara de construcción. A continuación, se muestra el libreto de la tarea 1 como ejemplo (los libretos restantes se pueden consultar en el Anexo 3):

Tarea 1 (Alfa, 1.1) Ángulo de 60°

Construya un ángulo de 60° con el lado dado (Figura 14).

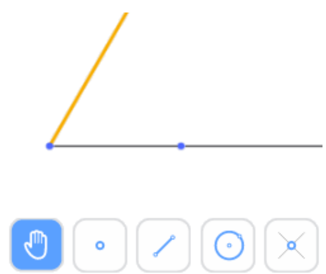


Figura 14. Tarea 1, nivel α. Euclidea. [Captura de pantalla]

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir una recta cuya posición en pantalla con respecto al rayo dado deje ver que allí hay un ángulo de 60° (Figura 15). Esta recta no es fruto de una construcción robusta, lo cual genera que, al moverla, el ángulo que parecía de 60° pierda su amplitud.

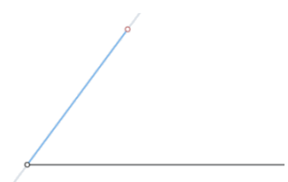


Figura 15. Caso 1 de la tarea 1 (α). Euclidea. [Captura de pantalla]

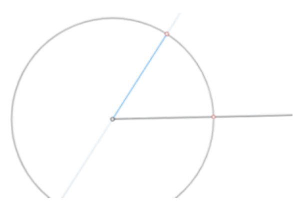


Figura 16. Caso 2 de la tarea 1 (α). Euclidea. [Captura de pantalla]

Esta construcción llevaría a que la profesora realizara algunas preguntas encaminadas a conocer, por qué cree que tiene lugar lo que se presenta en pantalla. Los estudiantes podrían ahora (caso 2) querer fijar un punto de la recta para que el ángulo mida 60°, para ello podrían construir una circunferencia para colocar dicho punto sobre ella y así construir el otro lado del ángulo (Figura 16). Aunque con esta estrategia se limita el movimiento del punto, no es suficiente para lo que solicita la tarea, ya que el punto al moverse libremente sobre toda la circunferencia, hace que la amplitud del ángulo varíe.

De acuerdo a las intervenciones del entrevistador, las cuales buscan conocer las creencias de los estudiantes sobre el porqué de lo sucedido anteriormente, ellos pueden reconocer la necesidad de construir un punto que no se mueva libremente en la circunferencia (caso 3), lo que llevaría a contemplar la necesidad de involucrar otro objeto geométrico. Ellos ahora podrían construir dos circunferencias de tal forma que el centro de una sea un punto de la otra, asumiendo que el centro de la primera circunferencia, ubicado estratégicamente, es el punto por el que pasaría el otro lado del ángulo (Figura 17). Sin embargo, esta construcción no es robusta, ya que el centro de la segunda circunferencia se puede mover sobre la segunda.

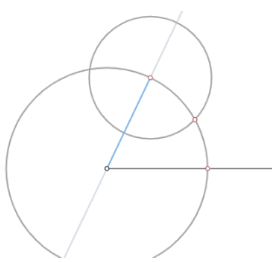


Figura 17. Caso 3 de la tarea 1 (α). Euclidea. [Captura de pantalla]

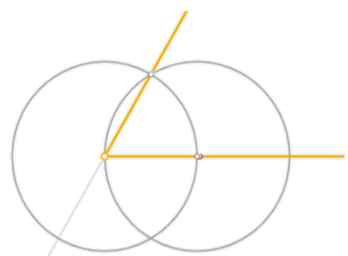


Figura 18. Caso 4 de la tarea 1 (α). Euclidea. [Captura de pantalla]

Las preguntas de la entrevistadora estarían enfocadas en conocer la posición específica del centro de la primera circunferencia con respecto a la segunda, de tal manera que el ángulo determinado sea de 60°. Los estudiantes podrían replicar la construcción de un triángulo equilátero (caso 4) logrando obtener un punto que esté fijo, al ser la intersección de dos circunferencias cuyos radios son congruentes. Luego los estudiantes construyen el otro lado del ángulo que pasa por dicho punto y Euclidea valida la construcción al resaltar de color amarillo el ángulo de 60° (Figura 18).

El siguiente diagrama de flujo (Figura 19), refleja los cuatro casos expuestos anteriormente y las posibles rutas que los estudiantes pueden tomar para lograr el desarrollo de la tarea, teniendo en cuenta las preguntas previstas por la profesora:

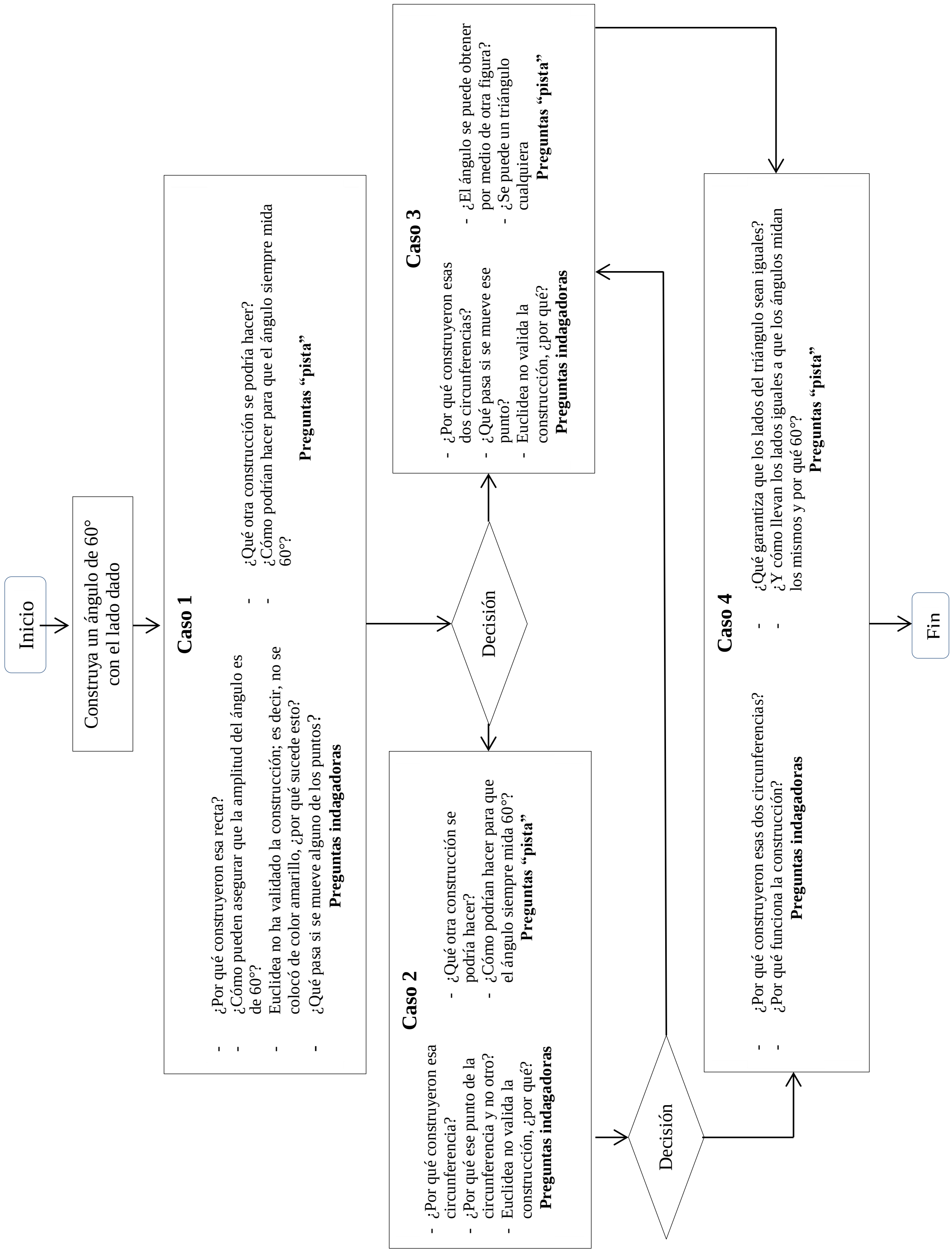


Figura 19. Posibles soluciones en la tarea 1. Elaboración propia

3.6 Acopio de datos

En la logística de la entrevista se tiene en cuenta tres aspectos importantes. El primero es el lugar, seleccionando para esto la sala de profesores, ya que es cómoda por su espacio, sus muebles y tiene poca intervención de ruidos externos. El segundo aspecto hace referencia a los dispositivos de registro; los cuales son:

- Una tablet para los estudiantes con la App Euclidea y un programa especial que permita grabar la pantalla y el audio; además de seguir el rastro del dedo cuando se da clic en la pantalla. Esto con el objetivo de grabar los intentos de construcción de cada grupo.
- Una cámara de video, la cual enfoca a los estudiantes y a la pantalla de la Tablet, con el fin de registrar los posibles gestos corporales que hacen respecto a los objetos geométricos involucrados.
- Una grabadora de audio, para registrar el sonido de las intervenciones de los estudiantes y la profesora.

El tercer aspecto, es la organización de la pareja de estudiantes que resolvieron las 17 tareas durante tres días, una hora diaria, en un horario adicional a la jornada escolar, para que las estudiantes no se ausenten de otros espacios académicos. Las grabaciones se realizan después del receso escolar de mitad de año, ya que las estudiantes están cerrando segundo bimestre.

La información recopilada está organizada en una carpeta digital. En esta se encuentran los tres archivos de cada sesión (grabación de pantalla, video de cámara y grabación de audio); es decir hay un total de nueve archivos. Estos archivos se organizan empleando códigos de acuerdo a los siguientes elementos:

- Fecha de la grabación con día y mes (*e. g.* 11-07).
- Código del dispositivo del registro (*e.g.* cámara de video como CV, pantalla de la Tablet como PT y grabadora de audio como GB).
- Número del día de la sesión (*e.g.* día 1 como D1)
- Número de la primera y última tarea desarrollada en cada sesión (*e. g.* 1.1-1.6)

3.7 Categorías de análisis – análisis retrospectivo

Con el fin de obtener los datos de la investigación, inicialmente se realizan las transcripciones de las grabaciones de audio acompañadas de imágenes (Anexo 4), para permitir una mejor lectura de las entrevistas y así depurar la información que es útil para el análisis. Luego, estos fragmentos se analizan de acuerdo a las categorías pre estructuradas en los referentes teóricos de esta investigación; es decir, la herramienta analítica escogida son los esquemas de argumentación de Flores (2007) y los procesos de la génesis instrumental. De acuerdo a lo anterior se dispone de las siguientes categorías de análisis:

Respecto a los esquemas de argumentación se escoge la categorización realizada por Flores (2007), la cual hace énfasis en caracterizar los tipos de argumentos que los estudiantes usan para convencerse a sí mismos y/o convencer a otros. Esta se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5. ***Categoría de Esquemas de Argumentación***

1.	Esquemas de argumentación (EA)	Autoritarios (Au)
		Simbólicos (Si)
		Fácticos (Fa)
		Empíricos (Em)
		Analíticos (An)

Para estudiar los procesos que involucra la génesis instrumental se presenta dos categorías, en la Tabla 6, propuestas por Sua y Camargo (2019). Estas categorías se utilizan para observar de qué manera los estudiantes se apropian de los comandos que ofrece Euclidea (circunferencia, mediatriz, bisectriz, etc.) y lo usan para resolver la tarea propuesta; es decir qué comandos pasan de artefactos a ser instrumentos.

Tabla 6. ***Categorías de la Génesis Instrumental***

2.	Instrumentalización (ISA)	Descubrimiento de posibilidades de un comando (Isa1)
		Identificación de limitaciones de un comando o herramienta (Isa2)
		Personalización y ajuste del artefacto a los intereses personales (Isa3)
		Transformación del artefacto (Isa4)
3.	Instrumentación (ISS)	Aparición de un esquema asociado a un conjunto de comandos (Iss1)
		Desarrollo de un esquema para la obtención de un resultado particular (Iss2)
		Adaptación de un esquema al resolver un problema (Iss3)
		Uso del comando, en distintas tareas, bajo el mismo esquema (Iss4)

3.8 Criterios de calidad del estudio

Los criterios de proceso que se tendrán en cuenta para garantizar la calidad de esta investigación son:

- *Auditabilidad:* De acuerdo a los dispositivos que permitieron la obtención de la información y su respectivo almacenamiento, los lectores de esta investigación pueden hacer la respectiva consulta del material de acuerdo a los códigos establecidos.
- *Consistencia:* Los objetivos, la pregunta problema, el enfoque, la estrategia, el marco teórico, entre otros, forman un hilo conductor haciendo que esta investigación no tenga contradicciones en sus diferentes capítulos.
- *Legitimidad:* Esta investigación es realizada de acuerdo a los parámetros establecidos por la Universidad Pedagógica Nacional.
- *Pertinencia:* Se considera que el énfasis dado a la investigación en tecnología digital, más específicamente en un videojuego, es de gran importancia para la comunidad de la educación gracias al alto desarrollo que hay en tecnología a nivel mundial.
- *Reproducibilidad:* La investigación se puede llevar a cabo en otros grupos de estudiantes.

Los criterios de producto que se tendrán en cuenta para garantizar la calidad de esta investigación son:

- *Autenticidad:* El planteamiento, desarrollo y resultados de esta investigación hacen parte de acciones personales, ya que la autora de este trabajo es uno de los participantes, además de relacionarse en el contexto laboral de ella.
- *Convencimiento:* Los resultados obtenidos están sustentados por un marco teórico y antecedentes que permiten observar la pertinencia del tema desarrollado.
- *Originalidad:* Los documentos hallados que realizan énfasis en la App Euclidea son muy pocos. Se pretende con esta investigación iniciar una nueva serie de estudios relacionados con un programa que hasta la fecha no se han empleado.
- *Validez:* Los resultados obtenidos están entrelazados con el contexto escogido y sus participantes.

4. ANÁLISIS

Asumiendo el objetivo planteado en la justificación, en este capítulo se pretende analizar los esquemas de argumentación de los estudiantes mediados por la aplicación Euclidea y la apropiación que ellos tuvieron de los comandos de este programa. Inicialmente, se presentan los esquemas de argumentación de las estudiantes en cada tarea desarrollada, 17 en total. Cabe aclarar que las estudiantes hacen uso de elementos de la geometría plana que no necesariamente se desarrollaron en el sistema teórico local (tabla 4), estos se van definiendo a medida que se van nombrando.

Luego, se presentan los momentos de la entrevista en los que se evidenció cada uno de los índices de los procesos de instrumentalización e instrumentación respecto al comando mediatriz. Ambas partes del análisis se exhiben de una manera descriptiva de acuerdo a lo sucedido en cada fragmento seleccionado (ver Anexo 4), en contraste de las tres categorías detalladas en el marco teórico.

4.1 Fragmentos relacionados con los esquemas de argumentación

Fragmento 1. Esquemas de la argumentación de la tarea 1

Las estudiantes inician a resolver la tarea 1 de Euclidia, Mientras tanto van explorando las diferentes herramientas que tiene la aplicación (conociendo su interfaz), una de estas es la posibilidad de obtener una pista para desarrollar la tarea, la cual deciden usar. La pista les brinda los objetos geométricos que deben construir en su orden correspondiente, *circunferencia, circunferencia y recta* aparece en la pantalla, y posteriormente, ellas inician a crear estrategias con la construcción de dos circunferencias, las cuales se evidencian en [70 – 74, 79], pero no llegan a algo concreto.

Ellas comienzan a preguntarse cómo pueden obtener un ángulo de 60 grados, generando un primer argumento. En [82, 84] se evidencia un *EA – Analítico*, ya que reconocen que una circunferencia tiene 360 grados y usando el Postulado de la adición de medida de ángulo[3] tratan de restar la medida de ángulos conocidos como 180 o 90 grados para obtener un ángulo de 60 grados, pero estas diferencias no permiten el cálculo esperado. En [91] las estudiantes siguen con

[3] Postulado Adición de Medida de Ángulos: Si D está en el interior del $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$ (Moise y Downs, 1986).

la idea anterior y para esto deciden construir una circunferencia que para ellas representa los 360 grado y luego una recta para determinar 180 grados como se observa en [92 – 95].

A partir de esta construcción, las estudiantes se preguntan si la recta construida en [95] es colineal con el rayo dado (lado del ángulo), luego en [96 – 98] se evidencia un *EA – Empírico* porque una manera de negar la colinealidad de estos dos objetos es afirmando que a *ojímetro* o visualmente la recta y el rayo no parecieran colineales. En las siguientes intervenciones, hacen una construcción blanda (que al mover los objetos se pierde la propiedad deseada) de un ángulo de 90 grados, [103,112], pero no encuentran un resultado favorable con esta estrategia.

Luego, en [118 – 120] las estudiantes buscan algún objeto geométrico que involucre 60 grados y se preguntan si un triángulo equilátero tiene esta propiedad. En respuesta a su pregunta, ellas manifiestan en [122] un *EA – Analítico*, puesto que hacen uso del H. G. Ángulos triángulo – 180 (ver Tabla 4), al afirmar que la suma de los ángulos de un triángulo debe ser igual a 180. Aunque no concluyen que los tres ángulos de un triángulo equilátero midan 60 grados, en [137] mantienen la idea del hecho geométrico nombrado anteriormente, reconociendo por parte de las estudiantes esta propiedad de los triángulos.

Una de las estudiantes tratando de encontrar alguna relación entre el triángulo equilátero y el hecho geométrico anteriormente mencionado llega a suponer, con bastantes dudas, que los tres ángulos de un triángulo equilátero deben medir lo mismo; es decir, 60 grados. Ante esto, la otra estudiante reacciona y asegura que lo dicho por su compañera es falso, por medio de un *EA – Simbólico,* en [135], porque a pesar de que ella usa un lenguaje geométrico, al asegurar que todo triángulo tiene un ángulo de 90 grados, genera una conclusión poco coherente; pues no necesariamente un triángulo debe tener un ángulo recto.

Por último, las estudiantes deciden construir un triángulo. Para esto, recuerdan cómo la aplicación, en su último tutorial (ver Figura 1), les enseñó a construir un triángulo equilátero. Ellas deciden replicar esta construcción y logran con ello la solución de la tarea en [143]. Seguido a esto, la profesora les pregunta por qué funciona la construcción, percibiendo como respuesta en [146, 152] dos *EA – Analíticos*, ya que ellas usan el H. G. Ángulos triángulo – 180 y seguido a esto, usan el H. G. Triángulo equilátero – ángulos, afirmando que todos los ángulos de este tipo de triángulo miden 60 grados, puesto que se cumple que la suma de sus tres ángulos es igual a 180.

Fragmento 2. Esquemas de argumentación de la tarea 2

Las estudiantes, tras leer el enunciado de la tarea, afirman que para hacer la mediatriz de un segmento necesitan construir dos circunferencias, cada una con su centro en uno de los extremos del segmento, obteniendo con un primer intento la solución de la tarea (la construcción ya la habían solucionado con regla y compás). Luego, la profesora les pregunta por qué la construcción realizada funciona, a lo que ellas responden en [14, 17] con un *EA – Analítico* que esto se da porque los radios de las dos circunferencia son congruentes, además dicha construcción les permite que la recta trazada (la mediatriz) pase por el punto medio del segmento.

Asimismo, las estudiantes al tratar de explicar lo dicho en [14, 17] y hacerlo válido, lo mezclan con un *EA – Fáctico,* puesto que en [17], relatan que después de tener dos circunferencias con radios congruentes deben construir la recta que pasa por las intersecciones de estas.

Fragmento 3. Esquemas de argumentación de la tarea 3

Las estudiantes para resolver la tarea 3, inician construyendo la mediatriz del segmento (no visible) determinado por los puntos dados; luego, ponen un punto sobre dicha mediatriz tal que parezca colineal con los dos puntos dados, pero Euclidea no valida la construcción. Después, deciden construir la recta que pasa por los dos puntos pero nuevamente la aplicación no valida la construcción y deciden borrar los objetos en pantalla. Trazan nuevamente la mediatriz y una de las estudiantes se cuestiona si dicha recta es una mediatriz (su duda, posiblemente, nace porque es la primera tarea que desarrollan con el nuevo comando *mediatriz*), esto genera que la otra estudiante en [28] dé un *EA – Autoritario* como respuesta, al asegurar que la mediatriz está bien construida porque al hacerlo Euclidea la resalta de color azul.

Luego, una de las estudiantes traza una recta que pasa por los dos puntos dados, pero la otra estudiante no está de acuerdo con esa construcción porque anteriormente habían trazado los mismos elementos geométricos y Euclidea no los validó, percibiendo de esta manera un *EA – Autoritario* en [33], ya que parece que ellas reconocen que es necesario que la aplicación resalte el objeto a construir de color amarillo para asegurar que la tarea se ha logrado.

Con la construcción de la mediatriz y la recta que pasa por los dos puntos dados, a las estudiantes se les ocurre colocar el punto de intersección entre estos dos objetos y Euclidea, finalmente, valida la construcción. Por último, la profesora les pregunta por qué funciona la construcción a lo que una de las estudiantes responden en [38] que la mediatriz pasa por el punto medio del segmento y que los puntos que pertenecen a la mediatriz debe equidistar de los extremos del segmento, es decir lo hacen con un *EA – An*alítico ya que se evidencia que ellas usan el H. G. Mediatriz y la D. Mediatriz (ver Tabla 4).

La otra estudiante, en [41], manifiesta no entender la explicación dada por su compañera. Esta última, le explica en [42] que el punto medio del segmento equidista de los extremos del segmento (puntos dados); es decir, que las dos partes del segmento son congruentes, evidenciando de esta manera un *EA – Analítico,* al dejar explícito el uso de la D. Equidistancia.

Fragmento 4. Esquemas de argumentación de la tarea 4

Las estudiantes para dar solución a la tarea, deciden construir inicialmente las diagonales del cuadrado como se puede observar en [2]; inmediatamente la profesora decide preguntarles para qué dicha construcción y ellas responden en [4 – 5] con un *EA – Analítico,* ya que usan la D. Cuadrado (ver Tabla 4), al asegurar que este objeto tiene sus lados iguales y que por tanto sus diagonales se intersecan en sus puntos medios, lo cual permite evidenciar el uso del H. G. Cuadrado – Diagonales. Seguido a esto, en [6] las estudiantes construyen una circunferencia tal que pareciera que está inscrita en el cuadrado pero Euclidea no valida la construcción, ellas en [8] arrastran el punto que determina a la circunferencia para observar si su radio se mantiene con la misma longitud, pero esto no sucede y las estudiantes se preguntan por qué esa circunferencia no funciona a pesar que en algunos momentos pareciera estar inscrita. Ellas en [19 – 22] discuten generando un *EA – Empírico,* pues determinan visualmente que la circunferencia y cada lado del cuadrado no se interseca en un único punto.

En intervenciones posteriores, las estudiantes deciden construir la mediatriz de uno de los lados del cuadrado y seguido a esto trazar la circunferencia determinada por el punto medio de dicho lado, logrando desarrollar la tarea en [32]. Ante esto, la profesora les pregunta por qué construyeron la mediatriz, obteniendo inicialmente como respuesta en [35, 44] un *EA – Fáctico,* pues se evidencia el recuento de la construcción; es decir, primero la mediatriz para obtener el radio y el radio para hacer la circunferencia.

Sin embargo, la profesora les pregunta de nuevo para qué hicieron la mediatriz, ya que para ella no es clara la explicación anteriormente dada; por tanto, al exponer nuevamente sus razones las estudiantes manifiestan en [38] un *EA – Empírico*, pues visualmente ellas consideran que el punto que determina la circunferencia debe quedar exactamente ahí (punto medio del lado del cuadrado), ya que si se corre el punto, sobre el lado del cuadrado, la circunferencia ya no se intersecaría con el cuadrado. Esta última parte de la afirmación es mencionada nuevamente en [44, 48].

Dado a la importancia que tiene el punto que determina la circunferencia; es decir, el punto medio de alguno de los lados del cuadrado, la profesora decide preguntar por la propiedad que guarda este punto respecto al segmento o si puede ser cualquier otro punto del segmento. Una de las estudiantes responde en [51] con un *EA – Analítico*, porque asegura que los lados de un cuadrado deben ser *iguales*, lo cual es verdadero por la D. Cuadrado; además, afirma que las diagonales de un cuadrado tienen mayor longitud que sus lados, lo que también es cierto, y a raíz de estas dos afirmaciones asegura que se debe usar la mediatriz, evidenciando una conclusión poco coherente respeto a las razones iniciales.

Finalmente, interviene la otra estudiante asegurando que también se pueden detallar los triángulos delimitados por la mediatriz y las diagonales construidas, generando de esta manera en [52 – 54] un *EA – Empírico*, ya que se evidencia que para ella una garantía de la construcción propuesta es la igualdad de las áreas que tienen dichos triángulos, pues al correr el punto que determina la circunferencia sobre el lado del cuadrado, las áreas de los triángulos perderían su igualdad.

Fragmento 5. Esquemas de argumentación de la tarea 5. Dos posibles soluciones

Las estudiantes al observar el objetivo de la tarea, proponen replicar el tutorial que les ofreció Euclidea para aprender a construir un triángulo equilátero. En la construcción de dicho tutorial construyeron dos triángulos equiláteros gracias a los dos puntos de intersección entre las circunferencias, estos forman un rombo tal que comparten un lado que es la diagonal del rombo. De acuerdo a lo anterior, las estudiantes iniciaron en [7, 18] a proponer el desarrollo de la tarea por medio de la construcción de dos triángulos equiláteros pero, al parecer, no logran concretar la idea de cómo hacerlo. Recuerdan que la construcción es con dos circunferencias pero una de las estudiantes afirma que no se puede de esta manera porque ya poseen el comando *mediatriz*, generando un *EA – Autoritario* en [15], puesto que, posiblemente, considera que al desbloquear este comando que les brinda Euclidea ya no puede o no debe usar la construcción con dos circunferencias y una recta.

Por un momento, dejan a un lado la idea de usar la construcción del tutorial y explican que quieren replicar los lados del rombo faltantes de una manera visual, [16], pero una de las estudiantes es consciente que dicha construcción no será validada por Euclidea porque está realizada de una manera blanda, obteniendo un *EA – Autoritario* en [16]. Seguido a esto, deciden construir la mediatriz de una de las diagonales del rectángulo, aunque la diagonal no está trazada; luego, en [34] trazan una recta que pasa por el vértice inferior de la izquierda del rectángulo y por una de las marquillas de congruencia de la mediatriz. No obstante, se dan cuenta que Euclidea no va a validar la construcción de la recta porque no pasa por dos puntos definidos, evidenciando un *EA – autoritario* en [34, 40].

En intervenciones más adelante, las estudiantes inician a proponer una nueva estrategia de construcción y para esto, observan los triángulos que se forman dentro del rectángulo y que están al lado del rombo como se ve en [83]. Luego, comienzan a discutir para determinar si estos triángulos son rectángulos o equiláteros. Una de las estudiantes afirma que los triángulos son equiláteros, pero inmediatamente la otra estudiante niega lo dicho por su compañera porque los triángulos son rectángulos, ya que en la imagen se observa que los lados que determinan el ángulo recto forman una “ele”, generando de este modo un *EA – Empírico* en [86]. Luego, las estudiantes se preguntan cuánto deberían medir los ángulos internos del rombo a construir, pero suponen que esta estrategia no las lleva a alguna solución.

Fragmento 6. Esquemas de argumentación de la tarea 5. Construyamos los otros vértices del rombo

Las estudiantes intentan encontrar los dos vértices faltantes del rombo, para esto construyen las dos diagonales del rectángulo y una circunferencia como se ve en [119]. En esta misma intervención aseguran que la circunferencia está bien construida, ya que Euclidea no resalta los puntos de esta de color rojo, obteniendo un *EA – Autoritario,* puesto que la aplicación resalta de este color a los puntos que no son producto de una intersección de objetos geométricos. Luego de varios intentos al construir algunas circunferencias, logran realizar otras dos, tal que sus radios sean congruentes, [134], pero al construir el rombo no queda inscrito en el rectángulo, ellas aseguran en [140] que la construcción no fue validada por Euclidea porque las circunferencias estaban fuera del rectángulo, además que este no comparte una diagonal con el rombo, generando un *EA – empírico.*

Después, intentan realizar construcciones con ayuda de la mediatriz; para esto, construyen la del lado superior del rectángulo y observan que dicha construcción arroja unas marquillas[4], trazando una recta que pase por una de estas, como se ve en [162]. Luego, trazan una mediatriz del segmento cuyos extremos están en el lado inferior y superior del rectángulo [162], y construyen una recta que parezca otro lado del rombo [164]. De acuerdo a esta construcción, una de las estudiantes afirma que comprende que la construcción no es robusta, ya que escogió dos puntos cualesquiera para realizar la segunda mediatriz, obteniendo un *EA – Autoritario* en [164, 166, 173 – 174], al asegurar que los puntos construidos con ayuda de las mediatrices son los vértices del rombo pero no como la aplicación los requiere. Además, en [164] afirma que las mediatrices construidas ayudan a obtener el rombo, seguramente, por la similitud visual que tenía la construcción con la imagen que ofrece Euclidea de la solución, generando de esta manera un *EA – Empírico.*

Fragmento 7. Esquemas de argumentación de la tarea 5. Encontramos la otra diagonal del rombo

Las estudiantes leen de nuevo la tarea y observan que el rectángulo y el rombo deben compartir una diagonal; asumiendo esta idea, piensan en cómo construir la otra diagonal. Inicialmente creen que el punto de intersección entre las diagonales del rectángulo será el mismo punto de intersección de las diagonales del rombo, pero una de ellas afirma que no es así porque necesitan conocer la otra diagonal del rombo, generando en [200] un *EA – Empírico*, ya que observan que el punto de intersección entre las diagonales del rectángulo no es el mismo punto de intersección entre las diagonales del rombo.

Luego, la profesora les pregunta si recuerdan las propiedades que vieron en clase sobre algunos cuadriláteros, entre estos el rombo. Las estudiantes comienzan a recordar en [210] que un rombo tiene todos sus lados iguales, involucrando un *EA – Analítico*, ya que se evidencia el uso de la definición de este objeto. Seguido a esto, aseguran que un rombo está compuesto por dos triángulos equiláteros, seguramente, al recordar el tutorial mencionado en el Fragmento 5, obteniendo un *EA – Empírico* en [211]. Inmediatamente, aseguran que las diagonales de un

[4] Estas marquillas denotan la congruencia entre las dos partes del segmento determinadas por la mediatriz.

rombo forman cuatro ángulos rectos, lo cual es una propiedad cierta enunciada en el H. G. Rombo – Diagonales, evidenciando un *EA – Analítico* en [112]. De acuerdo a esta última afirmación, las estudiantes aseguran que para construir el ángulo recto entre las diagonales pueden hacer uso de la mediatriz, entreviendo un *EA – Analítico* en [216, 229] al reconocer una de las propiedades de objeto descritas en el H. G. Mediatriz.

Finalmente, las estudiantes deciden trazar la mediatriz de la diagonal en común de los dos cuadriláteros y las rectas que contienen los lados faltantes del rombo, desarrollando con éxito la tarea. Al momento de explicar por qué funciona la construcción, manifiestan en [241 – 244] un *EA – Analítico* porque las diagonales son perpendiculares y por esto deciden trazar la mediatriz, obteniendo los dos vértices no dados del rombo. Además, explican que la mediatriz funcionó en esta construcción porque al trazarla Euclidea muestra una marquilla en forma de cuadrado, la cual señala la presencia de un ángulo recto, generando un *EA – Empírico* en [246 – 251].

Fragmento 8. Esquemas de argumentación de la tarea 6

Las estudiantes inicialmente relacionan esta tarea con la construcción que habían realizado en la clase anterior de geometría, afirmando que debían hacer lo mismo. Ante esto, deciden seleccionar cuatro puntos sobre la circunferencia, la profesora les pregunta para qué necesitan esos puntos, a lo que responden que primero colocan esos puntos, luego construyen circunferencias tal que estos sean sus centros y finalmente trazan dos rectas, que pasan por la intersección de las circunferencias, generando de este modo un *EA – Fáctico* en [7].

En [8] construyen el punto de intersección entre las dos rectas trazadas, logrando el objetivo de la tarea. Después, aseguran que la razón de realizar esta construcción fue explicada por la profesora en clase de geometría, evidenciando un *EA – Autoritario* en [11]. En aras de exponer con sus palabras la idea anterior, afirman que primero se escogen cuatro puntos de la circunferencia, seguidos de construir dos mediatrices y finalizando con el punto de intersección entre estas dos rectas para que este sea el centro de la circunferencia, generándose nuevamente un *EA – Fáctico* en [16].

Fragmento 9. Esquemas de argumentación de la tarea 7

Las estudiantes al leer la tarea que deben realizar, inician por construir una recta que pase por los puntos dados, luego trazan la mediatriz del diámetro contenido en la anterior recta y finalmente construyen los lados del cuadrado, [8]. Seguido a esto, la profesora les pregunta por qué trazaron la mediatriz, una de ellas explica que necesitan obtener un ángulo de 90 grados y que este es la mitad de 180 grados, entreviendo el uso del H. G. Cuadrado – Diagonales (ver Tabla 4), para referirse al ángulo que deben forman las dos diagonales de este objeto, y la H. G. Ángulos par lineal congruentes[5], para resaltar la división en dos partes iguales al “ángulo llano” que representa la primera recta construida; obteniendo un *EA – Analítico* en [10].

Inmediatamente, la otra estudiante dice que el uso de la mediatriz no es por lo anterior, sino que al tener un radio de la circunferencia se puede trazar la recta que lo contiene, para encontrar el segundo vértice del cuadrado, y luego construir la mediatriz para encontrar los dos vértices faltantes de este cuadrilátero, evidenciando en [11] un *EA – Fáctico.*

Finalmente, afirman que el punto de intersección entre las diagonales es el punto medio de los lados del cuadrado; es decir el centro de este cuadrilátero; entreviendo el uso de la D. Apotema de un polígono regular[6], evidenciando un *EA – Analítico* en [13 – 17].

Fragmento 10. Esquemas de argumentación de la tarea 8

Para resolver esta tarea, las estudiantes proponen construir una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado [5], luego, construyen en [9] una recta que pasa por los puntos de intersección entre el ángulo y la circunferencia, finalmente, en [11] construyen la mediatriz del segmento comprendido en el interior del ángulo, obteniendo el desarrollo de la tarea. En [16] se evidencia un *EA – Analítico*, ya que usan el H. G. Radios congruentes (ver Tabla 4) al explicar que la construcción de la circunferencia les ayudó a obtener dos segmentos (contenidos en los lados del ángulo) congruentes. Luego, en [20] se evidencia un *EA – Fáctico* al indicar que después de la circunferencia se trazó la recta y la mediatriz, descritas anteriormente, para completar la tarea.

Fragmento 11. Esquemas de argumentación de la tarea 9

En su desarrollo, las estudiantes usaron la construcción de dos circunferencias como en la tarea 1 para obtener un ángulo de 60 grados; luego, procedieron a construir la mediatriz del segmento

---

[5] H. G. Ángulos par lineal congruentes: Si dos ángulos de un par lineal tiene la misma medida, entonces cada uno de ellos se llama ángulo recto (Moise y Downs, 1986).

[6] D. Apotema de un polígono regular: La distancia desde el centro de un polígono regular a cada uno de los lados se llama *apotema* (cursivas del autor) del polígono (Moise y Downs, 1986).

comprendido en el interior de dicho ángulo para determinar otro cuya medida fuera la mitad del inicial; es decir, 30 grados [2, 6]. Para explicar esta construcción, afirman que estas ya las habían realizado y solo tenían que replicar dos construcciones; por un lado, la construcción de la tarea 1 y por el otro, la construcción de la tarea 8, evidenciando un *EA – Autoritario* en [8 – 11], ya que Euclidea les había mostrado anteriormente que estos procedimientos habían funcionado.

Fragmento 12. Esquemas de argumentación de la tarea 10. La bisectriz no coincide con la bisectriz

Las estudiantes inician por usar el comando bisectriz y construirla, tal que esta coincida con la bisectriz del ángulo dado, [8]; sin embargo, Euclidea no valida la construcción luego ellas aseguran que la bisectriz construida no está *alineada* con la bisectriz dada, evidenciando un *EA – Empírico* en [10]. Después, inician otra estrategia construyendo una circunferencia con centro en el vértice del ángulo en [28], luego construyen la mediatriz del diámetro de la circunferencia que parece ser colineal con el lado del ángulo en [31], y finalizan construyendo la bisectriz del ángulo conformado por la mediatriz y la bisectriz dada en [40]. Sin embargo, una de las estudiantes afirma que la aplicación no validó esta estrategia, percibiendo un *EA – Autoritario* en [41]. De acuerdo a esta idea, la otra estudiante explica que no se validó porque los ángulos que necesitan no son iguales, evidenciando un *EA – Analítico* en [42], puesto que reconoce que los dos ángulos deben ser congruentes, característica descrita en la D. Bisectriz[7].

Una de las estudiantes retoma la estrategia de trazar una bisectriz tal que coincida con la bisectriz dada, pero la otra estudiante refuta esta decisión porque sabe que Euclidea no va a validar esta construcción, dado que fue lo primero que intentaron, generando un *EA – Autoritario* en [54]. Dado la insistencia de usar esta estrategia por parte de las estudiantes, la profesora les explica que para validar una construcción se puede hacer uso del comando arrastre; por tanto, deciden usarla y afirman que la aplicación no valida la construcción porque se deforma, evidenciando un *EA – Autoritario* en [61], ya que siguen las instrucciones de la profesora.

Fragmento 13. Esquemas de argumentación de la tarea 10. Encontrar otro punto para construir la recta

La profesora les explica que para encontrar el lado que necesitan deben encontrar otro punto, de manera robusta, ya que el otro punto es el vértice del ángulo. Teniendo en cuenta esto, las estudiantes construyen en [134] una mediatriz de un segmento contenido en la bisectriz dada;

---

[7] D. Bisectriz: Si D está en el interior de $\angle BAC$ y $\angle BAD \cong \angle DAC$, entonces $\overrightarrow{BD}$ biseca al $\angle BAC$ y $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ (Moise y Downs, 1986).

luego, construyen en [137] una segunda mediatriz de un segmento (contenido en la anterior mediatriz), tal que coincida con la bisectriz dada. Uno de los extremos del segmento de la segunda mediatriz es el punto que están buscando, por tanto trazan la recta que pasa por este y afirman que Euclidea no valida la construcción, evidenciando un *EA – Autoritario* en [139, 185 – 186]. Seguido a esto, usa arrastre permitiéndoles observar que la construcción se deforma y por esta razón no se acepta, generando un *EA – Empírico* en [140 – 141].

Otra estrategia de las estudiantes, consiste en construir un triángulo isósceles, puesto que afirman que los lados del ángulo contienen a los lados congruentes del triángulo y como los dos ángulos a construir deben ser congruentes entonces la bisectriz divide por la mitad al triángulo, percibiendo un *EA – Analítico* en [156], ya que los triángulos determinador por la bisectriz son congruentes. Adicionalmente, señalan que la bisectriz y el lado no congruente del triángulo isósceles forman un ángulo de 90 grados por la forma que generan la intersección de estos objetos, evidenciando un *EA – Empírico* en [167, 171 – 174].

Finalmente, construyen una mediatriz de un segmento que está contenido en la bisectriz dada y una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y radio hasta la intersección entre el lado dado y la mediatriz en [211]; luego, trazan la recta que pasa por la segunda intersección entre la mediatriz y la circunferencia, obteniendo el desarrollo de la tarea en [213]. Para validar la construcción, aseguran que la intersección entre la mediatriz y la circunferencia ya lo habían realizado, generando un *EA – Autoritario* en [217], pues hacen alusión a la tarea 9. En [218] continúan con la explicación de la intervención anterior, aludiendo a los pasos de la construcción; es decir, la circunferencia, la mediatriz y el triángulo isósceles para completar la tarea, evidencian un *EA – Fáctico.*

Fragmento 14. Esquemas de argumentación de la tarea 11

Las estudiantes inicialmente construyen una mediatriz (tal que pase por el punto dado) de un segmento contenido en la recta dada, luego usan el comando arrastre en la construcción y esta se deforma, lo cual genera que afirmen que Euclidea no validará la construcción en [4 – 5], evidenciando un *EA – Empírico.* Más adelante, deciden construir una circunferencia con centro en el punto dado y radio hasta un punto en la recta dada; una de las estudiantes afirma que los dos puntos permiten trazar la recta perpendicular, pero su compañera afirma que no es así porque la recta "estaría torcida", evidenciando un *EA – Empírico* en [34].

En [62] deciden construir dos circunferencias, cuyos centros pertenecen a la recta dada y que sus puntos de intersección parezcan visualmente colineales con el punto dado; de acuerdo a esto, una de las estudiantes afirma que esta construcción no sirve porque la recta que pasa por los puntos de intersección "quedaría torcida" (no perpendicular) respecto a la recta dada, evidenciando un *EA – Empírico* en [63]. En otra estrategia, construyen una circunferencia con centro en el punto dado, [91], una recta que contiene uno de sus diámetros y la mediatriz de dicho diámetro [91], pero nuevamente en [94, 127] aseguran que la mediatriz no es perpendicular a la recta dada porque "está torcida", percibiendo un *EA – Empírico.*

Finalmente, deciden usar una pista que ofrece Euclidea, *circunferencia, circunferencia y recta*, aparecen en la pantalla, por tanto, inician a crear estrategias en las cuales se utilicen estos objetos. En [154 – 155] construye dos circunferencias que se intersequen y sus centros pertenezcan a la recta dada, luego trazan la recta que pasa por las intersecciones de las dos circunferencias, obteniendo la solución a la tarea. Al tratar de explicar por qué funciona la construcción, manifiestan que una razón es gracias a la pista que la aplicación les dio, evidenciando un *EA – Autoritario* en [157]. Adicionalmente, afirman que las dos circunferencias siempre van a dar un ángulo recto, asumiendo un *EA – Simbólico* en [158], ya que intervienen con un lenguaje geométrico pero su argumentación no es clara

Fragmento 15. Esquemas de argumentación de la tarea 12

En [1] las estudiantes deciden construir una circunferencia con centro en el punto dado, en [2] construyen dos circunferencias con centro en los puntos de intersección entre la primera circunferencia y la recta dada, finalmente, en [4] construyen la mediatriz del segmento determinado por los centros de las dos últimas circunferencias, lo cual genera que Euclidea valide la solución. Al explicar la construcción, generan un *EA – Autoritario* en [7], ya que manifiestan que se guiaron por la tarea 11. Luego explican que la primera circunferencia permite determinar el radio de las otras dos circunferencias y con ello, trazar la mediatriz que debía pasar por la mitad (punto dado), evidenciando un *EA – Fáctico* en [9 – 11, 16].

Precisamente, la intervención en [16] les permite identificar que las últimas dos circunferencia no eran necesarias. Luego, deciden usan otra estrategia que consiste en construir una circunferencia con centro en el punto dado y luego una mediatriz del diámetro contenido en la recta dada, observando que funciona la construcción, [24]. Para explicar el uso de la circunferencia, se evidencia un *EA – Fáctico* en [26], puesto que el radio determinado por dos puntos sobre la recta dada permite construir la circunferencia. Después, al trazar la mediatriz se obtiene una recta perpendicular a la recta dada; es decir, forman un ángulo de 90 grados, evidenciando un *EA – Analítico* en [30 – 31], ya que usan el H. G. Mediatriz y la D. Ángulo recto (ver Tabla 4).

Al tratar de explicar lo anterior, una de las estudiantes genera un recuento de la construcción, evidenciando un *EA – Fáctico* en [32]. Finalmente, explican la importancia que tienen los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta dada, afirman que la distancia de estos puntos al centro de la circunferencia es igual (*los radios son los mismos*), entonces la mediatriz debe pasar por la mitad, percibiendo un *EA – Analítico* en [38] al usar la D. Mediatriz.

Fragmento 16. Esquemas de argumentación de la tarea 13. Una circunferencia que parezca inscrita

Las estudiantes en [1] construyen las diagonales del rombo y luego construyen una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio tal que parezca estar inscrita en el rombo, pero esta construcción no es validada por Euclidea. Seguido a esto, una de las estudiantes propone usar el comando de *rectas perpendiculares* pero la otra estudiante afirma que esta no sirve para nada; sin embargo, la primera estudiante sigue insistiendo en usarla, ya que asegura que si la aplicación les dio ese comando es por algo y seguramente la solución de la tarea va con su uso, evidenciando un *EA – Autoritario* en [2 – 4, 162]. Luego, deciden realizar de nuevo la construcción hecha en [1] pero recuerdan que esta no fue válida en aquella intervención, generando un *EA – Autoritario* en [11]. No obstante, una de las estudiantes decide usar *arrastre* para verificar que la construcción no es robusta, evidenciando un *EA – Empírico* en [12 – 13].

Intervenciones más adelante, las estudiantes realizan de nuevo la construcción intentada en [1, 11], afirmando que la construcción no está bien hecha porque la circunferencia sigue quedando por fuera del rombo, percibiendo un *EA – Empírico* en [81]. Después, la profesora les pregunta por la característica que deben tener los puntos que se encuentran en los lados del rombo y las estudiantes responden que posiblemente es el punto medio de los lados y proceden a construir en [85] la mediatriz del lado inferior derecho del rombo; sin embargo, observan que el punto de intersección de estos dos objetos está retirado del punto que necesitan, evidenciando un *EA – Empírico* en [85, 89].

Fragmento 17. Esquemas de argumentación de la tarea 13. La solución es un triángulo equilátero

Las estudiantes usan la herramienta que permite ver el objeto geométrico que se debe realizar y que además, permite construir sobre dicho objeto ( ). Con esta herramienta activada, trazan en [95] tres rectas, dos en forma de "equis" que pasan por los puntos que determinan el radio de la circunferencia y la tercera que pasa por los puntos de los lados superiores del rombo, formándose un triángulo. Una de las estudiantes afirma que el triángulo es isósceles porque al observar el lado que determina la tercera recta, pareciera que tuviera una menor longitud, evidenciando un *EA – Empírico* en [104]. La otra estudiante refuta la idea anterior porque para ella el triángulo es equilátero, por tanto su compañera le pide que construya un triángulo de este tipo y verifique si es equilátero o no, pero ella no recuerda cómo hacerlo. Su compañera le dice que debe intentar que todo mida igual con ayuda de una circunferencia, entreviendo un *EA – Analítico* en [118], ya que usa la definición de triángulo equilátero[8]. Siguiendo con la discusión para identificar qué tipo de triángulo es el construido en [95], una de las estudiantes afirma que es equilátero porque visualmente se ve que es así, evidenciando un *EA – Empírico* en [129].

Las estudiantes vuelven a la construcción real, oprimiendo de nuevo . Allí con las diagonales del rombo construidas, [139], deciden trazar la bisectriz de uno de los ángulo delimitados por las diagonales (90 grados) y luego, trazar la bisectriz del ángulo delimitado por la diagonal vertical y la anterior bisectriz (45 grados); ante esto afirman que tiene un ángulo que mide la mitad de un ángulo de 45 grados, entreviendo un *EA – Analítico* en [140], puesto que conocen que el ángulo determinado entre las diagonales es de 90 grados, al trazar la primera bisectriz obtienen un ángulo de 45 grados y al trazar su bisectriz obtienen la mitad de este. Luego, realizan la misma construcción de [139] pero en otro ángulo de 90 grados y trazan una recta para delimitar un triángulo como se observa en [141], tal que las estudiantes afirman que ese triángulo sí se ve isósceles, evidenciando un *EA – Empírico* en [143].

Continuando con la discusión si el triángulo es equilátero o isósceles, oprimen de nuevo la herramienta y una de las estudiantes afirma que si el triángulo es equilátero entonces sus ángulos deben medir 60 grados cada uno, generando un *EA – Analítico* en [168], puesto que reconoce la propiedad que tienen los ángulos de este tipo de triángulo. En respuesta, su

[8] D. Triángulo equilátero: Un triángulo con sus tres lados congruentes se llama *equilátero* (cursivas del autor) (Moise y Downs, 1986).

compañera afirma que si llega a ser un triángulo equilátero, pueden trazar las mediatrices de sus lados y estas deben pasar por los vértices del triángulo, evidenciando un *EA – Analítico* en [175], ya que esta es una propiedad que tiene las mediatrices de los triángulos equiláteros. Tratando de buscar una guía, buscan en su cuaderno de geometría si tienen escrito alguna definición o hecho geométrico que les permita inscribir una circunferencia, pero su búsqueda no conlleva a un resultado concreto.

Una de las estudiantes afirma que ha construido un hexágono regular pero su compañera no lo ve, por tanto le indica donde está construido, evidenciando un *EA – Empírico* en [213 – 215], ya que reconocen visualmente la forma de un hexágono regular. La primera estudiante en [212] afirma que al tener un hexágono regular los seis triángulos que lo componen deben ser equiláteros, generando un *EA – Analítico.* Al continuar su explicación, afirma "60. *6 por 3, 18, 180. Y 180 por 2"*, esto permite entrever que hace referencia al ángulo de 60 grados cuyo vértice está en el centro de la circunferencia que inscribe al hexágono, que al multiplicarlo por 3 obtiene media circunferencia y al multiplicar 180 por 2 completa la circunferencia, evidenciando en [220 – 222] un *EA – Analítico.* Con ánimo de encontrar una solución, oprimen la herramienta y vuelven a la construcción real, en la que tratan de replicar el hexágono usando algunas circunferencias y sus intersecciones, [245]; sin embargo, observan que una de las intersección que están usando queda por fuera del rombo, concluyendo que la construcción está mal realizada, obteniendo un *EA - Empírico* en [246 – 253].

Como última estrategia usando circunferencias, construyen en [263, 271] una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta el vértice superior del rombo; luego, construyen una circunferencia con centro en el punto de intersección entre la primera circunferencia y la diagonal horizontal del rombo, y radio hasta el punto medio de las diagonales. Finalmente, construyen una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta el punto de intersección entre el lado superior derecho del rombo y la segunda circunferencia, pero Euclidea no valida la construcción, según las estudiantes, porque esta no es la manera en que la aplicación quiere la construcción, evidenciando dos *EA – Autoritarios* en [265 – 266, 271], cada uno correspondiente a los dos intentos de construir la circunferencia en [263, 271].

Fragmento 18. Esquemas de argumentación de la tarea 13. Una escuadra de 30 grados es la solución

La profesora oprime la herramienta para que las estudiantes observen el triángulo cuyos vértices son el centro de la circunferencia, el vértice superior del rombo y un punto que pertenece a un lado del rombo y que determina el radio de la circunferencia. Una de las estudiantes afirma que dicho triángulo es aquel que no tiene ningún lado congruente (escaleno), ya que así lo ven, generando un *EA – Empírico* en [279, 283, 287, 296]. Además afirman que este triángulo tiene forma de escuadra y a raíz de tener esta forma, determinan que el ángulo junto al lado del rombo debe ser recto. Después, de saber que hay un ángulo recto, concluyen que este triángulo señalado en un inicio por la profesora es rectángulo, obteniendo un *EA – Analítico* en [299]. Con la anterior propiedad del triángulo, deciden usar el comando *rectas perpendiculares* para encontrar uno de los puntos que pertenecen al rombo y así construir la circunferencia, [315].

Luego, la profesora les pregunta por qué construyeron las diagonales, obteniendo como respuesta que estas permitieron construir el centro del cuadrilátero, evidenciando un *EA – Empírico,* y también construir el centro de la circunferencia, evidenciando un *EA – Analítico*, ambos en [320]. Para explicar por qué construyeron la recta perpendicular usan lenguaje geométrico pero arrojan conclusiones poco coherentes y no responden al porqué, generando dos *EA – Simbólicos* en [327, 338]. Sin embargo, más adelante reconocen que el comando les permite construir un ángulo recto, percibiendo un *EA – Analítico* en [348 – 349], al usar la D. Perpendicularidad (ver Tabla 4). Finalmente, aseguran que necesitaban una recta para formar el ángulo recto y un punto por donde pasará la recta perpendicular, para así construirla, observando un *EA – Fáctico* en [350], ya que enumeran los pasos que deben hacer para usar dicho comando.

Fragmento 19. Esquemas de argumentación de la tarea 14

Las estudiantes al observar la tarea, una de ellas decide construir una recta que pase por los puntos dados y luego, una recta perpendicular a la primera recta que pase por uno de los puntos dados (el centro de la circunferencia no) en [2]. La otra estudiante no entiende lo que hizo por lo que su compañera comienza a mostrarle paso a paso su construcción; luego, en la explicación afirma que hizo la primera recta para poder construir una recta perpendicular a ella, evidenciando un *EA – Fáctico* en [14 – 18].

Fragmento 20. Esquemas de argumentación de la tarea 15. En búsqueda de un triángulo isósceles

Antes de iniciar a construir, las estudiantes afirman que el problema está en la ubicación del punto M, pues observan que la distancia entre BA y BC parece ser la misma, evidenciando un *EA – Empírico* en [1]. Trazan la mediatriz AC en [2] y de BA en [7], y afirman que el problema sigue siendo la ubicación de M, observando nuevamente un *EA – Empírico* en [7, 11 – 12].

Deciden usar la herramienta y construyen la recta que pasa por los puntos D y E. Esta delimita dos triángulos: el ΔBDE y el ΔDME, tal que este último lo consideran un triángulo isósceles porque $\overline{DM}$ es congruente con $\overline{ME}$, percibiendo un *EA – Analítico* en [39 – 41, 63]. Luego, deciden construir una circunferencia con centro en B y radio BM y usando la herramienta verifican si el punto E es el mismo punto que se genera con la intersección entre la circunferencia y el rayo BC, lo cual es falso, evidenciando un *EA – Empírico* en [59].

En otro intento, construyen dos rectas perpendiculares, una al rayo BA y la otra al rayo BC tal que ambas pasen por el punto M, inmediatamente oprimen la herramienta y verifican si alguna de estas rectas coincide con la recta DE, lo cual no es así, generando un *EA – Empírico* en [82 – 83].

Fragmento 21. Esquemas de argumentación de la tarea 15. Una mediatriz y una circunferencia

Al comprender que solo tienen dos puntos (B y M), deciden construir la mediatriz del segmento cuyos extremos son estos puntos; sin embargo al querer explicar esta acción lo hacen por medio de un *EA – Fáctico* en [93], puesto que describen que al tener dos puntos pueden hacer la mediatriz. La idea se sostiene en [106]. Seguidamente, deciden construir la recta que pasa por el punto M y el punto de intersección entre la mediatriz y el rayo BA, y oprimen la herramienta para verificar si la recta coincide con uno de los segmentos a construir; efectivamente así es, evidenciando un *EA – Empírico* en [97 – 98]. Para explicar el uso de la mediatriz, afirman que su uso es válido porque debe haber la misma distancia entre MD y BD, generando un *EA – Analítico* en [107], ya que hacen uso de la D. Mediatriz (ver Tabla 4).

Luego, deciden construir una circunferencia, con centro en el punto D y radio DM, y una recta que pasa por el punto M y por el punto de intersección entre la circunferencia y el rayo BC, pero manifiestan que Euclidea no valida la construcción, obteniendo un *EA – Autoritario* en [119 – 120]. Finalmente, construyen una circunferencia con centro en el punto M y radio MD, seguida de una recta que pasa por el punto M y el punto de intersección entre la circunferencia y el rayo

BC, logrando el desarrollo de la tarea con éxito. Explican que la circunferencia les permitió encontrar el punto E porque sin importar qué punto se escoja de la circunferencia todos sus radios son iguales, generando un *EA – Analítico* en [131, 135], ya que hacen uso del H. G. Radios congruentes.

Fragmento 22. Esquemas de argumentación de la tarea 16

Al leer la tarea, deciden en [3] construir la mediatriz de las dos "bases" del trapecio, después en [5] construyen la recta que pasa por los puntos medios de dichas "bases". Luego, alude que usaron mediatriz porque este objeto les permite encontrar el punto medio de un segmento haciendo uso del H. G. Mediatriz, lo que genera el uso de un *EA – Analítico* en [8, 11 – 12, 16].

Fragmento 23. Esquemas de argumentación de la tarea 17. Dos caminos fallidos.

Las estudiantes al observa que la aplicación les solicitan un rombo con medidas específicas en sus ángulos, inician por preguntar cuánto deben sumar los ángulos internos de este objeto, a lo que la profesora les responde que 360 grados. De acuerdo a lo anterior, afirman en [3] que el ángulo opuesto al ángulo de 45 grados, medida establecida por la tarea, deben ser congruentes, evidenciando un *EA – Empírico*, puesto que es una propiedad que observan. Luego, al aceptar la anterior afirmación como cierta, inician a sumar medidas de los ángulos de 45 grados, usando el Postulado de la adición de medida de ángulo, para encontrar la medida de los otros dos ángulos internos del rombo, generando un *EA – Analítico* en [3 – 22].

Después, una de las estudiantes hace una pequeña intervención y asegura que los lados opuestos del rombo son paralelos; esto se considera como un *EA – Autoritario* en [27], ya que posiblemente relaciona visualmente la forma de este objeto con la forma de algunos paralelogramos que la profesora presentó en clase de geometría.

En una primera estrategia de construcción, deciden trazar dos circunferencias de tal manera que su radio sea el segmento dado y sus centros sean los extremos de este, formando un ángulo de 60 grados. Luego, trazan la bisectriz de dicho ángulo y forman un rombo con la intersección que genera dicho rayo con las circunferencias en [30 – 31], pero Euclidea no validó la construcción, afirmando que la aplicación es *mala*[9], percibiendo un *EA – Autoritario* en [32 – 34]. No obstante, se reúsan a la decisión de la aplicación y deciden corroborar su construcción haciendo uso de la

[9] Malvada por no aceptar su construcción.

herramienta , y observan que el rombo construido por ellas no coincide con el rombo del objetivo, evidenciando un *EA – Empírico* en [37 – 39] por la comparación realizada en las dos figuras.

Una segunda estrategia consiste en construir dos triángulos equiláteros tal que compartan uno de sus lados y se forme el rombo [43 – 53]. Nuevamente, Euclidea no validó su construcción y deciden usar la herramienta , por medio de esta, logran observar y concluir que el rombo del objetivo de la tarea *está más inclinado*, generando un *EA – Empírico* en [54].

Fragmento 24. Esquemas de argumentación de la tarea 17. Ya sé cómo construir ángulos de 45 grados

Una de las estudiantes se fija en el ángulo externo al rombo y que forma ángulos par lineal con uno de los ángulos que mide 135 grados; afirmando que este también debe medir 45 grados, ya que si el ángulo interno del rombo mide 135 grados entonces hace falta 45 grados para completar 180, evidenciando un *EA – Analítico* en [66 – 74, 152 – 154], al usar el Postulado del suplemento[10]. Además, asegurar que para construir un ángulo de 45 grados necesitan un ángulo recto, ya que su mitad da como resultado un ángulo de 45, percibiendo un *EA – Analítico* en [79] al hacer uso de la D. Bisectriz y por ende usar este comando en [79, 98].

Luego una de las estudiantes asegura que los triángulos delimitados por una diagonal del rombo son escalenos pues *no tienen ningún lado igual*, aunque esta afirmación es falsa se genera una *EA – Analítico* en [109 – 113], ya que reconoce la D. Triángulo Escaleno. No obstante, su compañera afirma que los triángulos son isósceles y para comprobarlo traza la mediatriz de una de las diagonales del rombo, observando y concluyendo que los triángulos sí son isósceles, puesto que la mediatriz contiene a dos vértices del rombo, generando un *EA – Empírico* en [115].

Con ánimo de encontrar otro vértice del rombo, deciden construir una circunferencia y aseguran que una de las intersecciones que genera este objeto es el tercer vértice del rombo al corroborarlo con el uso de la herramienta , percibiendo un *EA – Empírico* en [123 – 130], ya que aceptan visualmente este hecho. Sin embargo, cuando la profesora les pregunta de nuevo por la circunferencia, afirman que esta les permite encontrar los lados congruentes de este cuadrilátero, puesto que sus radios son congruentes, generando un *EA – Analítico* en [165 – 166] porque usan el H. G. Radios congruentes (ver Tabla 4). Finalmente, para encontrar el último vértice deciden

---

[10] Postulado del suplemento: Si dos ángulos forman par lineal, entonces son suplementarios (Moise y Downs, 1986).

construir la mediatriz de una de las diagonales del rombo (cuyos extremos ya conocen), afirmando que esto les permite encontrar la otra diagonal del rombo y por ende el vértice que hace falta, ya que conocen que las diagonales de un rombo deben formar ángulos rectos en su intersección y la mediatriz permite construir tal propiedad, evidenciando un *EA – Analítico* en [172 – 176] al hacer uso del H. G. Rombo – Diagonales.

De acuerdo a los fragmentos descritos anteriormente, se presenta en la Tabla 7 un resumen de los Esquemas de argumentación que se dieron en cada tarea, los cuales se clasifican por cada tipo de esquema.

Tabla 7. ***Cantidad de Esquemas de Argumentación por tarea y por tipo***

Tareas	Esquemas de argumentación									
	Autoritario	**Au**	**Simbólico**	**Si**	**Fáctico**	**Fa**	**Empírico**	**Em**	**Analítico**	**An**
1			[135]	1			[96 – 98]	1	[82, 84]	2
									[122, 137]	2
									[146, 152]	2
		0		1		0		1		6
2					[17]	1			[14, 17]	1
		0		0		1		0		1
3	[28]	1							[42]	1
	[33]	1								
		2		0		0		0		1
4			[51]	1	[35, 44]	2	[19 - 22]	1	[4 - 5]	1
							[38]	1		
							[44]	1		
							[48]	1		
							[52 - 54]	1		
		0		1		2		5		1
5	[15]	1					[86]	1	[210]	1
	[16]	1					[140]	1	[212]	1
	[34, 40]	2					[164]	1	[216]	1
	[119]	1					[200]	1	[229]	1
	[164, 166, 173 - 174]	3					[211]	1	[241 - 244]	1
							[246 - 251]	1		
		8		0		0		6		5
6	[11]	1			[7]	1				
					[16]	1				
		1		0		2		0		0

7					[11]	1			[10]	1
									[13 - 17]	1
		0		0		1		0		2
8					[20]	1			[16]	1
		0		0		1		0		1
9	[8 - 11]	1								
		1		0		0		0		0
10	[41]	1			[218]	1	[10]	1	[42]	1
	[54]	1					[140 - 141]	1	[156]	1
	[61]	1					[167, 171 - 174]	2		
	[139, 185 - 186]	2								
	[217]	1								
		6		0		1		4		1
11	[157]	1	[158]	1			[4 - 5]	1		
							[34]	1		
							[63]	1		
							[94, 127]	2		
		1		1		0		5		0
12	[7}	1			[9 - 11, 16]	2			[30 - 31]	1
					[26]	1			[32]	1
					[32]	1				
		1		0		4		0		2
13	[2 - 4, 162]	2	[327, 338]	2	[350]	1	[12 - 13]	1	[118]	1
	[11]	1					[81]	1	(140]	1
	[208]	1					[85, 89]	2	[168]	1
	[265 - 266, 271]	2					[104]	1	[175]	1
							[129]	1	[212]	1
							[213 - 215]	1	[220 - 222]	1
							[246 -253]	1	[299]	1
							[279, 283, 287, 296]	3	[320]	1
							[320]	1	[348 - 349]	1
		6		2		1		12		9
14					[14 - 18]	1				
		0		0		1		0		0
15	[119 - 120]	1			[93]	1	[1]	1	[39 - 41, 63]	2
					[106]	1	[7, 11 - 12]	2	[107]	1
							[59]	1	[131, 135]	2
							[82 - 83]	1		

							[97 - 98]	1		
		1		0		2		6		5
16									[8, 11 - 12, 16]	3
		0		0		0		0		3
	[27]	1					[3]	1	[3– 22]	1
	[32 – 34]	1					[37 – 39]	1	[66 – 72, 153 – 154]	2
15							[54]	1	[79]	1
							[115]	1	[109 – 123]	1
							[123 – 130]	1	[165 – 166]	1
									[172 – 176]	1
		2		0		0		5		7

4.2 Índices relacionados con la Génesis Instrumental

A continuación se describe los momentos de la entrevista que aplican como ejemplos para los ocho índices presentados por Sua y Camargo (2019), teniendo en cuenta dos situaciones. La primera hace referencia al análisis únicamente del comando mediatriz, ya que en esta se evidenció un mayor uso para el desarrollo de las tareas.

La segunda razón involucra a las tareas que los estudiantes de grado noveno desarrollaron con regla y compás, puesto que en estas tuvieron la oportunidad de descubrir funciones de la circunferencia y la mediatriz como la equidistancia entre puntos, el punto medio de un segmento o la perpendicularidad entre la mediatriz y el segmento. Estas funciones se clasificarían en *Isa1* si se tuviera en cuenta esta parte de la secuencia que se desarrolló en el primer semestre del año 2019.

Índice 1. Instrumentalización. Descubrimiento de posibilidades de un comando (Isa1)

Las estudiantes descubren dos nuevas posibilidades de uso o funciones para la mediatriz. La primera aparece en la *tarea 5* cuando construyen la mediatriz de una de las diagonales del rombo para encontrar los dos vértices faltantes de este [233 – 237], pues asumen que pueden construir la(s) diagonal(es) de un rombo por medio del comando mediatriz. Además, explican que dicha construcción es permitida porque las diagonales de un rombo forman un ángulo recto y la mediatriz tiene dicha propiedad [244]. La segunda posibilidad, la nueva, aparece en la *tarea 8* en [11], al asumir que la mediatriz del lado no congruente de un triángulo isósceles pasa por el vértice opuesto a este; construcción que permite el desarrollo de esta tarea.

Índice 2. Instrumentalización. Identificación de limitaciones de un comando (Isa2)

En este índice se evidencian varios ejemplos, a continuación se describen algunos de estos, ya que son una cantidad considerable.

- En la *tarea 5* en [148 – 156], las estudiantes trazan la mediatriz del lado superior e inferior del rectángulo imaginando que las marquillas de congruencia que aparecen, para referirse a las dos partes congruentes del segmento, determinan los vértices del rombo.
- En la *tarea 10* en [137 – 139, 178 – 185], construyen una mediatriz tal que esta coincida con la bisectriz dada, pero los extremos de su segmento pueden ser puntos cualesquiera, ya que uno está sobre el lado del ángulo dado y el otro está en el semiplano superior delimitado por la bisectriz. La idea de esta construcción busca usar la equidistancia que hay entre el punto medio del segmento (dado por la mediatriz) con los extremos de este, para determinar dos segmentos congruentes que validen la definición de bisectriz.
- En la *tarea 11* en [1], las estudiantes construyen la mediatriz de tal manera que esté contenida en la recta dada y el punto dado sea uno de los extremos de su respectivo segmento, pero no se cumple el objetivo de la tarea. Luego en [9 – 16], construyen nuevamente la mediatriz de un segmento contenido en la recta dada, de tal manera que el punto dado pertenezca en ella. En estas dos estrategias se percibe el uso de la propiedad de perpendicularidad que tiene la mediatriz y que es requerida para esta tarea. Sin embargo, como los extremos de los segmentos, en ambos casos, no son resultado de una construcción robusta no se puede garantizar la perpendicularidad por el punto dado.
- En la *tarea 13* en [85], construyen una mediatriz de uno de los lados del rombo para determinar si el punto en común entre la circunferencia y los lados del rombo son los puntos medios de estos últimos, lo cual es falso.
- En la *tarea 15* en [2, 7, 11, 68], las estudiantes construyen mediatrices de segmentos cuyos extremos son las letras A, B, C y M. El problema de dicha estrategia radica en utilizar a A y C como si fueran puntos definidos sobre los lados del ángulo, pero estos solo son letras que permiten nombrar los rayos que componen al ángulo. Esta estrategia permite observar el uso de la mediatriz para construir triángulos isósceles, tal como se describió en el Índice 1.

Índice 3. Instrumentalización. Personalización y ajuste del artefacto a los intereses personales (Isa3)

En este índice se resalta de nuevo la razón número dos del preámbulo de los índices y las intervenciones descritas en los índices 1 y 2, ya que por medio de estos se evidencia que las estudiantes reconocen la diversidad de propiedades que puede tener el uso de la mediatriz de acuerdo a los intereses que se requieren en cada tarea. Entre estos se destacan los usos ya reportados como la equidistancia de puntos de los extremos del segmento, el punto medio de un segmento, la perpendicularidad, el trazo de diagonales de un rombo y la construcción de triángulos isósceles.

Índice 4. Instrumentalización. Transformación del artefacto (Isa4)

De acuerdo a las funciones que los estudiantes reconocen para la mediatriz, se presenta en siete intervenciones de diferentes tareas en que las estudiantes hacen uso nuevamente de dichas funciones.

- La primera intervención sucede en la *tarea 3* en [1], cuando las estudiantes usan la mediatriz para encontrar un punto que sea punto medio de dos puntos dados. Adicional afirman en [38] que el uso de la mediatriz les permite precisamente obtener el punto medio de un segmento.
- La segunda está en la *tarea 4* en [27 – 32], en la que se usa la mediatriz gracias a su perpendicularidad, puesto que deben construir una circunferencia que sea tangente a los lados del cuadrado.
- En la *tarea 7* en [6 – 8] se da la tercera intervención. En esta, la mediatriz se usa para encontrar una de las diagonales del cuadrado[11] y por tanto dos vértices de dicho objeto.
- La cuarta intervención se da en la *tarea 9* en [6], para construir la bisectriz de un ángulo de 60 grados, ya que la mediatriz de uno de los lados de un triángulo equilátero[12] debe pasar por el vértice opuesto del triángulo, logrando bisecar el ángulo de 60 grados.
- La quinta intervención sucede en la *tarea 10* en [211], cuando la mediatriz se emplea para construir el lado faltante de un ángulo, dada su bisectriz. Esta función está relacionada con la cuarta intervención, aunque su proceso se modifica al construir primero la mediatriz que determina el lado no congruente del triángulo isósceles.

[11] La función especificada en el índice 1 también funciona en cuadrados, ya que por definición este objeto también es un rombo.
[12] Al igual que todo cuadrado es rombo, se cumple que todo triángulo equilátero es un triángulo isósceles, por tanto la función descrita en el índice 1 también se cumple para este objeto geométrico.

- La sexta intervención, se da en la *tarea 12* al momento en que las estudiantes usan la perpendicularidad de la mediatriz para construir una recta perpendicular a otro por un punto dado [24]. Afirman en [30 – 32] que necesitan un ángulo de 90 grados y por tanto este objeto geométrico les permite encontrarlo.
- La séptima y última intervención está en la *tarea 16*, cuando hacen uso de la mediatriz para construir los puntos medios de las "bases" de un trapecio y así poder trazar la recta los contiene [3]. Afirman que la diagonal permite construir dichos puntos al ser una de sus propiedades [8, 11 – 12].

Índice 5. Instrumentación. Aparición de un esquema asociado a un conjunto de comandos (Ias1)

Las estudiantes reconocen en algunas oportunidades nuevos pasos para el comando mediatriz para obtener la solución de las tareas planteadas.

En la *tarea 4*, reconocen que la mediatriz de los lados de un cuadrado les permite encontrar el punto para que la circunferencia quede inscrita en el cuadrado [38], siendo este el punto medio de los lados del cuadrilátero. En la *tarea 5*, las estudiantes reconocen por medio de su diálogo, que construir las mediatrices de los vértices opuestos de un rombo les permite encontrar sus diagonales y por ende sus vértices, si falta alguno [242 – 244]. Por último, en la *tarea 9*, asumen la construcción realizada en la *tarea 8* para desarrollarla, la cual tiene como protagonista a la mediatriz, ya que les ayuda a generar la bisectriz de cualquier ángulo [11].

Índice 6. Instrumentación. Desarrollo de un esquema para la obtención de un resultado particular (Ias2)

Las estudiantes en diferentes tareas generan diálogos en los que aceptan los anteriores pasos como solución a las construcciones solicitadas. Estos se reportan en las tareas 4, 5, 7, 8, 10 y 12.

Inicialmente, en la *tarea 4*, las estudiantes aceptan que, para inscribir una circunferencia en un cuadrado, estos objetos deben intersecarse en el punto medio de los lados del cuadrilátero [40], ya que si no fuera este punto los triángulos que se forman no tendrían la misma forma y tamaño [53 – 54]. Luego, en la *tarea 5*, validan que la mediatriz de los vértices opuestos de un rombo les permitirá, cada vez que lo necesiten, encontrar las diagonales de este objeto y por tanto sus respectivos vértices, ya que las diagonales deben formar ángulos rectos y la mediatriz cumple con esta propiedad [244]. La anterior construcción también se válida en las *tareas 7* y *13* en las intervenciones [14] y [6 – 10, 50 – 51] respectivamente.

Finalmente, en las *tareas 8 y 10* en las intervenciones [20] y [217 – 218] respectivamente, se aceptan los pasos para construir la bisectriz de un ángulo por medio de la mediatriz, ya que la bisectriz del ángulo no congruente del triángulo isósceles coincide con la mediatriz del lado no congruente de dicho triángulo.

Índice 7. Instrumentación. Adaptación de un esquema al resolver un problema (Ias3)

Las estudiantes para obtener la bisectriz de un ángulo usan la construcción del triángulo isósceles y la mediatriz de su lado no congruente. Sin embargo, en la *tarea 13* usan este esquema para verificar si un triángulo, con el que están trabajando, es equilátero o isósceles [175]. La estrategia funciona, ya que si el triángulo es equilátero la mediatriz de cualquiera de sus lados debería pasar por el vértice opuesto, mientras que con el triángulo isósceles lo anterior funciona solo con la mediatriz del lado no congruente, tal como se específica en un inicio.

Índice 8. Instrumentación. Uso del comando, en distintas tareas, bajo el mismo esquema (Ias4)

Como se ha observado en los anteriores índices las estudiantes reconocen las diferentes funciones que puede tener la mediatriz, tal como las dos descubiertas en las *tareas 5* y *8*. Estas dos funciones conllevan un proceso de apropiación por parte de las estudiantes, ya que son usadas hasta la última tarea propuesta.

Por un lado, usan la mediatriz en la *tarea 15* para construir un triángulo isósceles, ya que la mediatriz debe pasar por el vértice que es común a los dos lados congruentes del polígono [91 – 95. 107]. Luego en la *tarea 17*, usan de nuevo la mediatriz para verificar si los triángulos delimitados por una de las diagonales del rombo son isósceles o escalenos. Concluyen que los triángulos son isósceles, ya que la mediatriz de una de las diagonales pasa por dos vértices del cuadrilátero [115]. Por otro lado, las estudiantes usan la mediatriz nuevamente en la *tarea 17* para encontrar el cuarto y último vértice que desconocen del rombo, ya que la mediatriz contiene a la diagonal y sus extremos son vértices del rombo, uno de estos el que necesitan hallar [134, 172 – 174].

En la Tabla 8, se presenta un resumen de las intervenciones realizadas por las estudiantes a lo largo de las 17 tareas en las que se observó alguna manifestación del uso del comando mediatriz de acuerdo a los 8 índices propuestos en los dos procesos de la Génesis Instrumental.

Tabla 8. *Procesos de Instrumentalización e Instrumentación de la mediatriz en Euclidea*

Tareas	Procesos de la Génesis Instrumental							
	Instrumentalización				Instrumentación			
	Isa1	Isa2	Isa3	Isa4	Ias1	Ias2	Ias3	Ias4
1								
2								
3				[1, 38]				
4				[27 - 32]	[38]	[40]		
5	[233 – 237]	[107] [148 - 156]			[242 - 244]	[244]		
6								
7				[6 - 8]		[14]		
8	[11]					[20]		
9				[6]	[11]			
10		[31, 71] [125, 132] [137 - 139, 178 - 185]		[211]		[217 – 218]		
11		[1] [9 - 16] [37] [106 - 108]						
12		[85]			[24]	[30 - 32]		
13						[6 - 10, 50 - 51]	[175]	
14								
15		[2, 7, 11, 68, 110]						[91 - 95, 107]
16				[3]				
17		[43 - 44, 52] [107]						[115] [134, 172 - 176]

5. CONCLUSIONES

5.1 Esquemas de argumentación

En este apartado se presenta los resultados respecto a los esquemas de argumentación que usaron las estudiantes en el desarrollo de las 17 tareas, es decir, de acuerdo al marco teórico se determina qué conjunto de acciones realizaron las estudiantes para validar, explicar o justificar algún resultado. Teniendo en cuenta lo anterior, los resultados se presentan de manera ascendente; esto quiere decir que se describe cada tipo de esquema de argumentación desde el menos al más usado, asumiendo un total de 138 esquemas.

Inicialmente, generaron pocos esquemas de argumentación de tipo simbólico $(5/138)$. Esto permite ver que en la mayoría de casos el uso de un lenguaje geométrico o aritmético por parte de las estudiantes se lograba de una forma coherente; es decir, la mayor parte de los momentos en los que intentaron validar un hecho fue de una manera clara y concisa, dejando entrever la apropiación de las características y propiedades que tienen los objetos geométricos presentados en la aplicación.

En las primeras tareas hubo esquemas de argumentación de tipo fáctico $(16/138)$, principalmente porque estas ya se habían propuesto en la secuencia de tareas con regla y compás, por tanto repetían la construcción y de estas dependían sus explicaciones. En las otras tareas en las que se presentó este tipo de esquemas, se percibe que las estudiantes sentían necesario acompañar sus validaciones de tipo empírico o analítico con los pasos de las construcciones.

La aparición de esquemas de argumentación de tipo autoritario $(29/138)$, se ven influenciados por tres razones. Las dos primeras son la profesora y los elementos desarrollados en las clases con regla y compás, pues en algunas explicaciones usaron expresiones como "*[la profesora] nos lo dijo ayer*" o "*no hay ninguna definición o hecho geométrico o algo [en el cuaderno]*" que les permitiera realizar la construcción. Por otro lado, la tercera razón es Euclidea en diferentes aspectos:

- Determinaban que la construcción no estaba bien realizada porque Euclidea no resaltaba de color amarillo el objeto geométrico que era el objetivo de la tarea.
- Aseguraban que sus construcciones sí estaba bien realizadas pero la aplicación no las quería validar.
- Validan su explicación por medio del uso de la herramienta "pista", la cual les indicaba qué objetos geométricos debían construir y en qué orden.
- Reconocían que una estrategia de construcción no era viable porque con anterioridad Euclidea no se les había confirmado.
- Determinaban que al desbloquear un comando (objeto geométrico) las siguientes tareas dependían de su uso.

- Identificaban que podían hacer uso de construcciones pasadas porque en aquel momento Euclidea sí las validó.

Los esquemas de argumentación de tipo empírico (44/138), emergían en su mayoría de veces cuando una de las estudiantes quería convencer de alguna estrategia de construcción a su compañera. En otras ocasiones, se presentaban cuando querían validar por medio de la herramienta o del comando arrastre, ya que con la primera verificaban si sus objetos construidos coincidían con el objeto solución y con la segunda, verificaban si sus construcciones eran blandas o robustas.

Finalmente, los esquemas de argumentación de tipo analítico (44/138) aparecieron en la mayoría de las tareas (14). Con lo anterior, se percibe que la secuencia de tareas con regla y compás, desarrollada previamente a la entrevista, ayudó satisfactoriamente para que las estudiantes realizaran cadenas deductivas en su gran mayoría con resultados verídicos, aunque en dos oportunidades se concluyó afirmaciones falsas de algún elemento geométrico. También se observó el uso de afirmaciones de manera correcta que demandaban definiciones o hechos geométricos, descrito en el anterior capítulo, que no hacían parte del sistema teórico local construido con todos los estudiantes de grado noveno.

De acuerdo a lo anterior, se presenta en la Tabla 9 el resumen de la cantidad de esquemas de argumentación que se evidenciaron en cada tarea, teniendo en cuenta la clasificación adoptada para estos.

Tabla 9. ***Resumen de los esquemas de argumentación presentados en la entrevista***

Tareas / Esquemas argumentación	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Total
Autoritarios	0	0	2	0	8	1	0	0	1	6	1	1	6	0	1	0	2	29
Simbólicos	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	5
Fácticos	0	1	0	2	0	2	1	1	0	1	0	4	1	1	2	0	0	16
Empíricos	1	0	0	5	6	0	0	0	0	4	5	0	12	0	6	0	5	44
Analíticos	6	1	1	1	5	0	2	1	0	1	0	2	9	0	5	3	7	44
Total	8	2	3	9	19	3	3	2	1	12	7	7	30	1	14	3	14	138

Respecto a los esquemas de argumentación se puede concluir que las estudiantes produjeron un número considerable de estos, percibiendo el uso de los cincos tipos que brinda la clasificación. La cantidad de esquemas que resultaron por tarea es conforme al tiempo de duración de cada una, ya que en estas se idearon más estrategias de construcción tratando de convencerse entre ellas y de encontrar una solución que validara Euclidea.

De inicio a fin de la entrevista, las estudiantes para explicar las diversas estrategias de construcción que propusieron dejaron entrever un uso aceptable de tres aspectos: El primero es el lenguaje geométrico, pues procuraban llamar a los objetos por su nombre y usar relaciones, como la igualdad, de manera coherente. El segundo es el uso de algoritmos aritméticos, principalmente usados para realizar cálculos de la medida de los ángulos de triángulos, cuadriláteros o ángulos adyacentes. El tercero es el uso de las propiedades que pueden tener los diferentes objetos con los que cuenta Euclidea (comandos), lo cual hace que se resalte la apropiación que tuvieron del sistema teórico local construido en clase.

De acuerdo a lo anterior, se concluye que no hay una modificación en el nivel de los esquemas de argumentación, puesto que las estudiantes procuraban validar sus afirmaciones o sospechas por medio de los elementos geométricos que tenían a la mano desde el inicio hasta el final de la entrevista. No obstante, se considera que hizo falta durante la entrevista el desarrollo de argumentos que produjeran cadenas deductivas en tareas puntuales como inscribir una circunferencia en un cuadrilátero o construir una recta perpendicular a otra, ya que en estas se produjo un mayor número de esquemas de tipo simbólico o fáctico, lo cual permite evidenciar que aunque se logre la construcción no necesariamente lograban explicarla.

Finalmente, el uso de esquemas de argumentación de tipo analítico y empírico fue satisfactorio de inicio a fin de la entrevista. Esto se debe en gran parte a dos aspectos planteados con anterioridad de la entrevista y hacen referencia a las tareas con regla y compás. Lo primero es su diseño, puesto que los elementos geométricos que se abordaron en ellas fueron acorde a los elementos que las estudiantes tratarían en las tareas de Euclidea, evidenciando el entrelace favorable entre las dos partes de la secuencia que se llevó a cabo. Lo segundo es su aplicación, ya que a partir del papel de la docente en el aula se logró la construcción del sistema teórico y que las estudiantes se apropiaran de las características y las propiedades de algunos elementos geométricos percibiendo que el proceso de argumentación se desarrollara, lo cual se evidencia en la forma de argumentación en las últimas tareas de Euclidea.

5.2 Génesis Instrumental

De acuerdo al marco teórico (ver apartado 2.2.5) y al comando mediatriz se describe cada uno de los índices que componen a los procesos de Instrumentalización e Instrumentación en la Tabla 10. Es decir, en los primeros cuatro índices se reporta las funciones que se le atribuyen a la mediatriz por parte de las estudiantes y en los cuatro índices posteriores, se presenta los esquemas que ellas apropian de acuerdo al uso de la mediatriz.

Tabla 10. ***Resumen de los procesos de la Génesis Instrumental***

<table>
<tr><th colspan="7">Comando mediatriz</th></tr>
<tr><th colspan="2">Fun-
ción</th><th>Equidistancia de puntos</th><th>Punto medio de un segmento</th><th>Perpendicularidad entre rectas</th><th>Diagonales o vértices del rombo</th><th>Bisectriz de un triángulo isósceles</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Instrumentalización</th><th>Isa 1</th><td colspan="3">No. Se conocían gracias a las tareas con regla y compás</td><td>Sí. Es usada para encontrar las diagonales o vértices de un rombo.</td><td>Sí. Identifican que la mediatriz del lado no congruente de un triángulo isósceles coincide con la bisectriz.</td></tr>
<tr><th>Isa 2</th><td>Sí. Usan sus marquillas de congruencia para encontrar los vértices del rombo.</td><td>Sí. Consideran que la circunferencia queda inscrita en el rombo en los puntos medios de sus lados.</td><td>Sí. Usan su perpendicularidad para construir rectas perpendiculares, pero no se garantiza que pase por el punto solicitado.</td><td>Sí. Tratan de construir triángulos isósceles por medio de la mediatriz pero no usan puntos definidos.</td><td>No. No se evidencia limitaciones en su uso en las tareas.</td></tr>
<tr><th>Isa 3</th><td colspan="5">Reconocen que la mediatriz puede tener estas cinco funciones.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Isa 4</td><td rowspan="5">No. No se evidencia su uso explícito en las tareas.</td><td>Sí. La usan para encontrar el punto medio de dos puntos dados.</td><td>Sí. La usan para inscribir una circunferencia en un cuadrado; es decir, que sea tangente a los lados del cuadrilátero</td><td>Sí. La usan para encontrar la segunda diagonal y los vértices de un cuadrado.</td><td>Sí. Al tener un triángulo equilátero, trazan la mediatriz de uno de sus lados para construir la bisectriz de uno de sus ángulos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Instrumentación</td><td>Ias 1</td><td colspan="2">Sí. Asumen que con los puntos medios de los lados de un cuadrado pueden inscribir una circunferencia.</td><td>Sí. Manifiestan que la mediatriz les ayuda a encontrar las diagonales del rombo.</td><td>Sí. Asumen que la mediatriz de uno de los lados de un triángulo isósceles permite construir una de sus bisectrices.</td></tr>
<tr><td>Ias 2</td><td colspan="4">Sí. Reconocen por medio de varias construcciones y de sus diálogos que los anteriores pasos de construcción les permiten apropiarse de dichos esquemas.</td></tr>
<tr><td>Ias 3</td><td colspan="3">No. No se reconoce nuevas adaptaciones al esquema desarrollado.</td><td>Sí. Relacionan la mediatriz con un triángulo para verificar que este es isósceles.</td></tr>
<tr><td>Ias 4</td><td colspan="2">No se evidencia que estos esquemas sean apropiados por las estudiantes, ya que las conocían con anterioridad.</td><td>Sí. La usan nuevamente para encontrar las diagonales y vértices de un rombo.</td><td>Sí. Se usa para construir y verificar triángulos isósceles.</td></tr>
</table>

El comando mediatriz cumple con el proceso de instrumentalización, puesto que las estudiantes identifican y usan varias de sus funciones, teniendo en cuenta que tres de estas ya las conocían y dos fueron descubiertas al desarrollar las tareas. Sin embargo, se observa poco uso de la mediatriz como equidistancia de puntos, aunque esta está contemplada al hablar del punto medio de un segmento pero solo es un caso particular.

Respecto al proceso de instrumentación, se observa que a partir de dichas funciones las estudiantes comienzan a generar estrategias de construcción que les permite aceptar una serie de pasos como esquemas, ayudándoles a desarrollar diferentes tareas al apropiarse de estos. Lo anterior hace referencia principalmente a las dos funciones que se encontraron desde la tarea 5 y 8, puesto que en estas se percibe el desarrollo de los dos procesos de la Génesis Instrumental.

De acuerdo a lo anterior y a lo expuesto por Sua y Camargo (2019), al cumplirse acciones en ambos procesos se puede concluir que la mediatriz pasó de ser un artefacto a ser un instrumento para las estudiantes, pues así como ellas actuaron sobre el comando, este último les permitió desarrollar varias tareas por medio de nuevos esquemas encontrados y aceptados al comprobar su utilidad al momento de cumplir objetivos específicos.

5.3 Tecnología digital, Aprendizaje como docente y proyección de este trabajo

Se considera que el uso de tecnología digital para mediar el uso de los esquemas de argumentación fue favorable, puesto que el dinamismo que brinda el comando arrastre se convierte en un aliado fundamental de las estudiantes, ya que les permite validar y observar por qué Euclidea no da por concluida la tarea. Además, al completar una construcción les permite buscar propiedades geométricas de los objetos que fueron usados para dar una explicación aceptable teniendo en cuenta el sistema teórico local.

Por otro lado, se resalta la interfaz de la aplicación que permitía automáticamente aprobar o no la construcción propuesta, puesto que ellas asumían cada tarea como un reto en el que sentían satisfacción cada vez que el objeto geométrico se resaltaba de color amarillo. Esto permitió que fueran perseverantes y no abandonaran o se frustraran ante una determinada tarea. Adicionalmente, se corrobora el cambio de comportamiento que asumieron durante el desarrollo de las tareas, pues se les notó activas y participantes a proponer más estrategias si era necesario.

El uso de tecnología digital permitió que las estudiantes a medida que iban avanzando en las tareas se apropiaran de los comandos que tenían a su disposición, como ejemplo la mediatriz. Lo anterior se evidenció al trabajar con geometría dinámica, ya que les permitía validar en poco tiempo si estaban usando de manera adecuada o no un determinado comando, les permitía iniciar de cero cuantas veces lo dispusieran o borrar una cantidad fija de objetos sin afectar la parte de la construcción que consideraban que estaba bien realizada.

Con este trabajo se estableció una manera para proponer nuevas metodologías y estrategias educativas en el Colegio Rafael María Carrasquilla[13] por medio de la tecnología digital, pues al hacer uso de Tablet o smartphone se brinda una posible solución al poco espacio disponible que hay en las salas de informática. Además, se brinda nuevas posibilidades de aprendizaje a los estudiantes de esta Institución, ya que su crecimiento ha estado permeado por la tecnología digital pero que poco se usa en las diferentes asignaturas que toman.

Se aprendió a gestar las clases de una manera diferente, dando paso a que los estudiantes diseñaran, propusieran, afirmaran, explicaran, validaran, etc., propiedades que tienen algunos objetos de la geometría plana; en otras palabras, se sentían escuchados. Por otro lado, se desarrolló conciencia pedagógica respecto a la innovación que plantea el uso de tecnología digital, ya que esta debe ser dirigida con responsabilidad y con objetivos claros.

Adicionalmente, se considera que este trabajo de grado puede tener varias proyecciones como por ejemplo llevar a Euclidea al aula con la totalidad de estudiantes, seguramente con esta condición se podría percibir un cambio de nivel en los esquemas de argumentación que producen los estudiantes al pasar el tiempo. También se puede realizar un análisis de los otros comandos de esta aplicación y determinar si logra haber génesis instrumental al igual que sucedió con la mediatriz. Otro aspecto importante a resaltar y a proyectar, es la invitación que queda abierta a la comunidad educativa matemática para que conozca la aplicación Euclidea y puedan aprovechar las virtudes que posee y así utilizar los beneficios que tiene en el aula, teniendo en cuenta que su interfaz es llamativa para los estudiantes.

Finalmente, a lo largo de la formación obtenida en los estudios de posgrado quedan grandes aprendizajes tales como: el gusto, el hábito y el saber de la producción textual generando una escritura apropiada en cohesión y coherencia; la reflexión constante de las prácticas como profesora y la necesidad que crece hoy en día para innovar en el aula; realizar textos de tipo académico para y en compañía de educadores matemáticos; la capacidad de iniciar y mantener conversaciones de tipo académico correspondiente a la formación de profesores de matemáticas; y la necesidad de seguir los estudios universitarios para generar cambios significativos en esta profesión.

[13] Principalmente en esta Institución al reconocer su contexto.

6. BILIOGRAFÍA

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Buitrago, J., y Martínez, D. (2012). *Actividad demostrativa y argumentación matemática en estudiantes de grado octavo (Trabajo de grado de Maestría)*. Universidad Pedagogica Nacional. Retrieved from http://www.dt.co.kr/contents.html?article_no=2012071302010531749001

Cáceres, R., Roy, A., y Zachman, P. (2013). Apps móviles como herramientas de apoyo al aprendizaje matemático informal en Educación Superior. In RedUNCI (Ed.), *VIII Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología* (pp. 1–9). Buenos Aires, Argentina. Retrieved from http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/27556

Camargo, L. (2018). *Estrategias cualitativas en investigación en Educación Matemática [Material de aula]*. Investigación en Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales* (Ministerio). Bogotá D. C.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., … Meagher, M. (2010). Mathematics education and technology–Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study. NY: Springer. In C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *International Commission on Mathematical Instruction* (Vol. 13). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Flores, C., Gómez, A., y Flores, H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. *Acta Scientiae, 12*(2), 22–42.

Flores, C., Gómez, A., y González, S. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. In *V Foro de Investigación de Educación* (pp. 473–477).

Flores, H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63–98.

García, D., y Martínez, M. (2018). Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. *Transformación*, *14*(2), 252–261.

Gutiérrez, Á., Jaime, A., y Alba, F. J. (2014). Génesis Instrumental en un entorno de Geometría Dinámica 3-Dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. In M. González, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405–414). Salamanca.

Harel, G., y Sowder, L. (1998). Types os students' justifications. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670–675.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1–60). https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Leung, A., Chan, Y., y López, F. (2000). Instrumental Genesis in Dynamin Geometry Environments.

MEN. (1998). *Serie de Lineamientos curriculares de Matemáticas*. (Ministerio de Educación Nacional, Ed.). Bogotá D. C.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46–95). Bogotá D. C. https://doi.org/958-691-290-6

Moise, E., y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Muñoz, E., y Rojas, T. (2017). *Procesos de conjeturación y justificación: El ron de los programas de Geometría Dinámica (Trabajo de grado de Maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional.

Osorio, V. L., Pino-Fan, L., y Gozález, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *12*, 39–57.

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional*, *53(2)*(1), 129–150. https://doi.org/10.4151/07189729-Vol.53-Iss.2-Art.200

Puentes, J. (2015). *Ambiente indagativo y argumentación en un contexto de Geometría Dinámica: Una experiencia en grado séptimo (Trabajo de grado de Maestría)*. Universidad Pedagógica Naiconal.

Samper, C., y Molina, Ó. (2019). Geometría plana: un espacio de aprendizaje. *Geometría Plana: Un Espacio de Aprendizaje*. https://doi.org/10.2307/j.ctvfc51vg

Samper, C., Molina, Ó., y Echeverry, A. (2013). *Elementos de Geometría: aprendizaje y enseñanza de la geometría* (2nd ed.). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.

Sua, C., y Camargo, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. *Educacion Matematica*, *31*(1), 7–37. https://doi.org/10.24844/EM3101.01

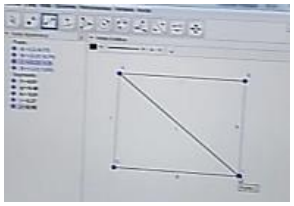
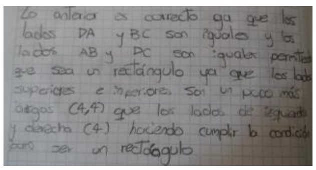
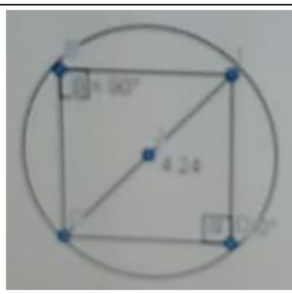
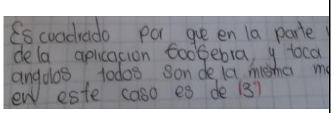
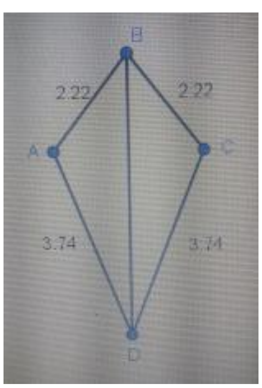
Suárez-Restrepo, F., y Castro-Gordillo, F. (2017). Génesis instrumental en el proceso de aprendizaje : el software wxMaxima y la función polinómica. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte*, *50*, 106–125. Retrieved from http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/815/1333%0AGénesis

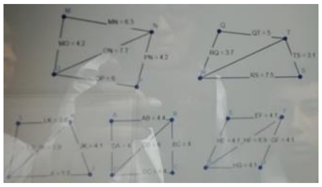
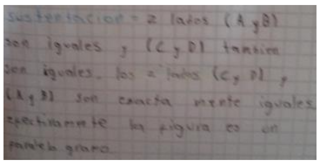
Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281–307. https://doi.org/10.1023/A

Trouche, L. (2014). Instrumentation in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, *12*(1981), 307–313. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_80

7. ANEXOS

Anexo 1. Respuestas generales de los estudiantes de grado noveno, año 2018.

Grupo 1	 	Construcción: Construyen un cuadrilátero sin propiedades específicas. Usan el arrastre de puntos y la herramienta “Distancia o Longitud” y forman cuadriláteros específicos, como cuadrados o rectángulos. Reportan lo siguiente: Afirmación: *Si el cuadrilátero es rectángulo, entonces los triángulos delimitados por la diagonal tienen la misma forma y el mismo tamaño* Argumento: *Lo anterior es correcto ya que los lados DA y BC son iguales y los lados AB y DC son iguales permitiendo que sea un rectángulo ya que los lados superiores e inferiores son un poco más largos (4,4) que los lados de izquierda y derechas (4) haciendo cumplir la condición para ser un rectángulo*
Grupo 2	 	Construcción: Usan una circunferencia para inscribir un cuadrilátero en ella, tratando que este sea cuadrado con ayuda del arrastre de puntos y la herramienta “Distancia o Longitud”. Reportan lo siguiente: Afirmación: *Si el cuadrilátero es cuadrado, entonces los triángulos delimitados por la diagonal tienen la misma forma y el mismo tamaño* Argumento: *Es cuadrado porque en la parte izquierda de la aplicación GeoGebra, y toca los ángulos todos son de la misma medida en este caso es de (3)*
Grupo 3		Construcción: Construyen una cometa ABCD, trazan la diagonal $\overline{BD}$ y toman las medidas de los lados para observar que cumple con las propiedades. Afirmación: *Si el cuadrilátero es cometa, entonces los triángulos delimitados por la diagonal tienen la misma forma y el mismo tamaño* Argumento: *Los lados AB y BC miden igual, es decir 2.72 y los lados AD y CD miden también igual, es decir 3.74. Por tanto es un cometa.*

Grupo 4	 	Construcción: Construyen cuadriláteros específicos como un rectángulo, un trapezoide, un trapecio y un paralelogramo. Luego toman las medidas de todos los lados y hacen una verificación visual sobre qué cuadriláteros cumplen la condición que querían. Reportan lo siguiente: Afirmación: *Si el cuadrilátero es paralelogramo, entonces los triángulos delimitados por la diagonal tienen la misma forma y el mismo tamaño* Argumento: *2 lados (A y B) son iguales y (C y D) también son iguales, los 2 lados (C y D) y (A y B) son exacta mente iguales. Efectivamente la figura es un paralelogramo.*

Anexo 2. Tareas diseñadas con uso de regla y compás.

Tareas No. 1	
Objetivos • Reconocer que dos puntos determinan una única recta. • Identificar características y propiedades que posee una circunferencia.	
Contenidos • Puntos colineales • Circunferencia • Equidistancia	**Sistema Teórico** • HG. Dos puntos – Recta • D. Colinealidad • D. Equidistancia • D. Circunferencia • HG. Radios congruentes
Recursos • Regla • Acetato • Lápiz	

<u>Tarea 1.1</u>

- Dibujar un punto

¿Se puede construir una recta que lo contenga? _____________
¿Se puede construir más de una recta que lo contenga? ¿Cuántas?
____
____
____

- Dibujar dos puntos distintos

¿Se puede construir una recta que los contenga? _____________
¿Se puede construir más de una recta que los contenga?
____
____
____

- Dibujar tres puntos diferentes en cada cuadro

En cada cuadro, ¿se puede construir una recta que los contenga? Explicar la respuesta

¿Es posible construir más de una recta que contenga a los puntos en cada cuadro? Explicar la respuesta

Tarea 1.2

A continuación se muestran los puntos C y B.

Realizar:

- Tomar una hoja de acetato.
- Colocar el acetato sobre los puntos C y B, de tal manera que el punto marcado coincida con B.

- Calcar el punto C, sobre el acetato.
- Girar el acetato sobre el punto B y calcar nuevamente al punto C.
- Repetir el paso anterior mínimo 10 veces.

Conformar grupos de cuatro estudiantes, colocar las hojas de acetato uno sobre otro, verificando que el punto B coincida, y responder las siguientes preguntas.

¿Qué objeto geométrico se ha determinado?

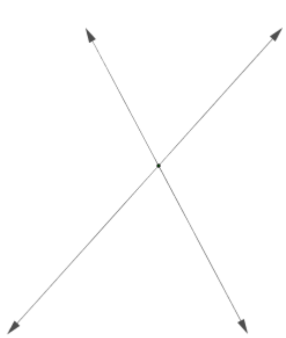
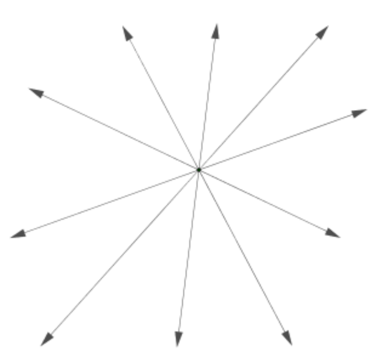
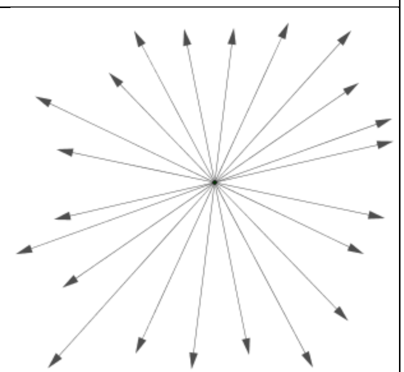
Dibujar dos segmentos cuyos extremos son el punto B y uno de los puntos construidos por ustedes en el acetato. Resaltar el segmento que tenga menor longitud, explicar la respuesta.

Métodos de solución

Saludo. Se da paso a reconocer gráficamente con su respectiva notación, el segmento, el rayo y la recta.

<u>Tarea 1.1</u>

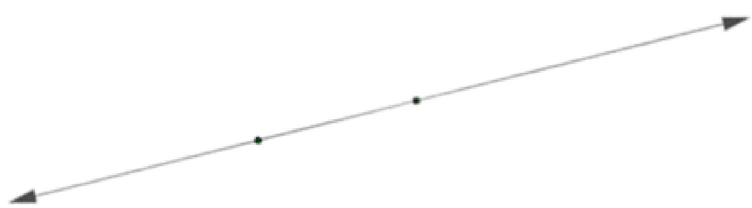
- Dibujar un punto.

Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**
		

¿Se puede construir una recta que lo contenga? *Sí.*	¿Se puede construir una recta que lo contenga? *Sí.*	¿Se puede construir una recta que lo contenga? *Sí.*
¿Se puede construir más de una recta que lo contenga? ¿Cuántas? *Sí. Se puede construir dos rectas.*	¿Se puede construir más de una recta que lo contenga? ¿Cuántas? *Sí. Se puede construir algunas rectas.*	¿Se puede construir más de una recta que lo contenga? ¿Cuántas? *Sí. Se puede construir infinitas rectas.*

En todos los casos queda claro que puede existir una recta que contenga al punto que dibuje el estudiante. La diversidad de respuestas se da en cuántas rectas se pueden construir que contengan a dicho punto. Si se da el caso 1, preguntaría al grupo: ¿no se puede trazar más rectas?, a lo que algún estudiante manifestaría que sí y pediría que trazara una tercera recta en el tablero. De esto se puede pasar al caso 2, donde se entiende que pueden ser más de dos rectas pero aún se considera que es un número finito, por tanto preguntaría: ¿no se puede trazar más rectas?, dando paso a que algunos estudiantes respondan que se puede trazar todas las rectas que se quiera. A partir de esto se asume que por un punto pasan infinitas rectas.

- Dibujar dos puntos.



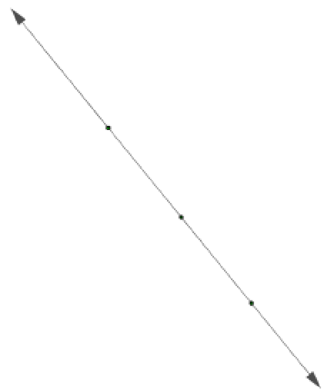
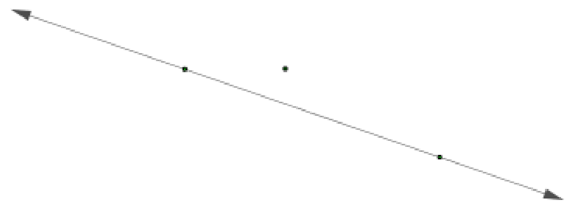
¿Se puede construir una recta que los contenga?
Sí.
¿Más de una recta?

Caso 1	*Sí puedo trazar una recta sobre la primera recta que ya tracé.*
Caso 2	*No, si trazo otra recta sería la misma que ya está, por tanto solo se puede una única recta.*

En dado caso que se dé una respuesta como en el caso 1, preguntaría al grupo: ¿qué diferencia hay entra la primera recta trazada y la segunda?, para procurar que los estudiantes comprendan que las supuestas dos rectas ocupan el mismo lugar por tanto son la misma recta, concluyendo el caso 2. De esto se obtiene:

HG. Dos puntos – Recta
Dados dos puntos diferentes, existe una única recta que los contiene.

- Dibujar tres puntos en cada cuadro.

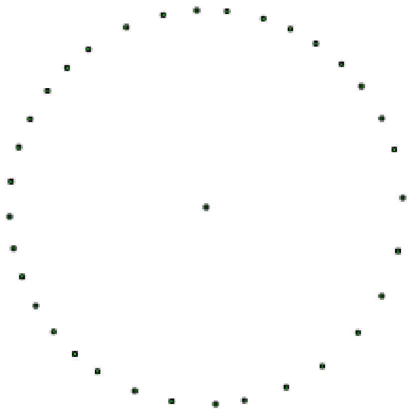
Caso 1	**Caso 2**
	
¿Se puede construir una recta que los contenga? Explicar la respuesta *Sí porque los puntos dibujados están alineados.*	¿Se puede construir una recta que los contenga? Explicar la respuesta *No porque siempre queda uno de los puntos fuera de la recta.*
¿Es posible construir más de una recta que contenga los puntos en cada cuadro? Explicar la respuesta *No porque si trazo otra recta, sería la misma recta que ya tracé.*	¿Es posible construir más de una recta que contenga los puntos en cada cuadro? Explicar la respuesta *No porque ni siquiera se puede una sola recta.*

A partir de las respuestas del caso 1 se puede determinar que la definición de puntos colineales, característica que no sucede en el caso 2, ya que hay un punto que no queda contenido en la recta trazada. Se da paso a la siguiente definición:

D. Colinealidad
Tres puntos o más son colineales si existe una recta que los contenga.

Tarea 1.2

Construcción sobre el acetato a partir del punto C y B:

Construcción	¿Qué objeto geométrico se ha determinado?
	*Caso 1:* *Se forma un círculo.* *Caso 2:* *Se forma una circunferencia.*

A partir del trabajo realizado con los acetatos y la pregunta formulada anteriormente, se escuchará las respuestas de los estudiantes. Si se presenta solo el caso 1, se hará una representación gráfica en el tablero de un círculo y se pregunta: ¿lo representado en el tablero es similar al objeto que ustedes obtuvieron?

Si se obtuvo respuestas entre el caso 1 y el caso 2, se procede a explicar la diferencia entre estos dos objetos geométricos, luego se pregunta qué características tiene ese objeto a partir de la construcción realiza. Si solo se obtiene respuestas del caso 2, se procede a pregunta sus características.

Entre esas características debe estar presente la igualdad de medida que hay entre el punto B y los demás puntos construidos, dando paso a la siguiente definición:

D. Equidistancia

Dos puntos o más equidistan de un punto A si dichos puntos están a la mismas longitud de A.

Se sigue mirando las características que posee una circunferencia para dar paso a su definición:

D. Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de un punto llamado centro.

Dibujar dos segmentos cuyos extremos son el punto B y uno de los puntos construido por ustedes en el acetato. Resaltar el segmento que tenga menor longitud, explicar la respuesta

Caso 1:

Los dos radios son iguales porque los medí y tienen la misma medida.

Caso 2:

Los dos radios son iguales porque al usar una tira de papel pude unir el centro con los puntos de la circunferencia.

Caso 3:

Por la definición de circunferencia sabemos que los puntos de la circunferencia deben estar a una misma medida de su centro.

Independientemente del caso que se presente o una combinación entre estos, los estudiantes ponen en manifiesto la igualdad de medida o de longitud que poseen los radios de una circunferencia, por tanto se da paso al siguiente hecho geométrico:

HG. Radios congruentes

Los radios de una circunferencia son congruentes.

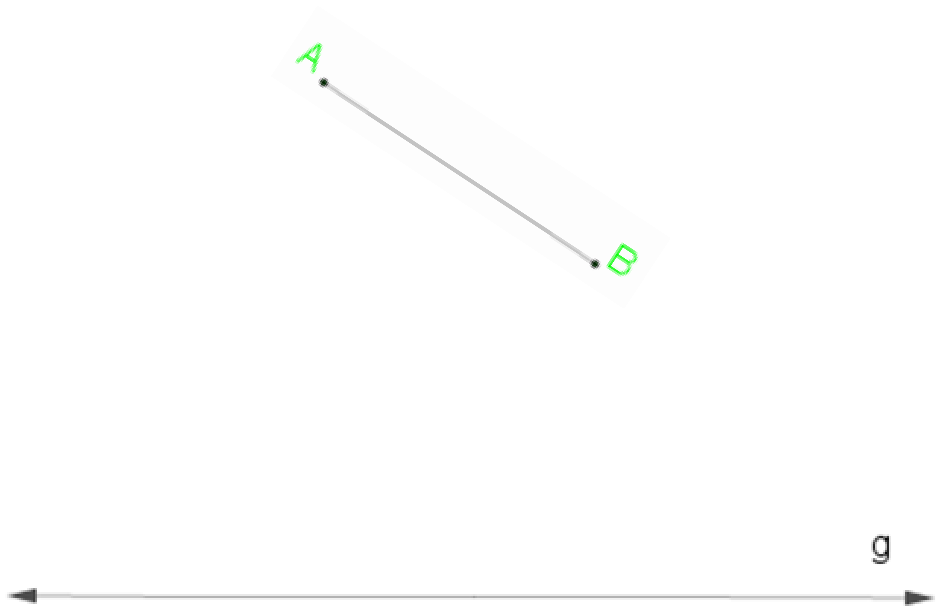
<table>
<tr><th colspan="2">Tareas No. 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Emplear la circunferencia como herramienta para la construcción de segmentos congruentes.
• Identificar características del punto medio de un segmento.</td></tr>
<tr><td>Contenidos
• Circunferencia
• Segmentos congruentes
• Punto medio
• Mediatriz</td><td>Sistema Teórico
• D. Circunferencia
• HG. Radios congruentes
• D. segmentos congruentes
• D. Punto medio
• D. Mediatriz</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos
• Regla
• Compás
• Lápiz</td></tr>
</table>

<u>Tarea 2.1</u>

En cada caso responder:

- Explicar por qué funciona la construcción realizada.

a) Construir sobre la recta g un segmento congruente a $\overline{AB}$:

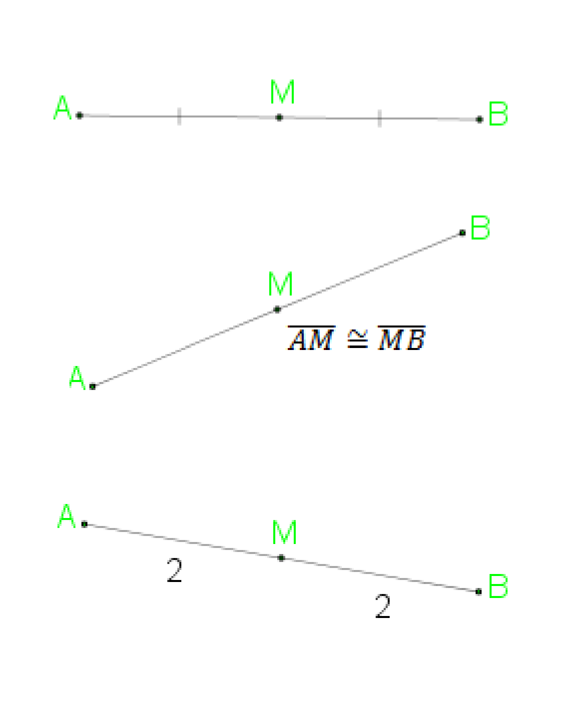
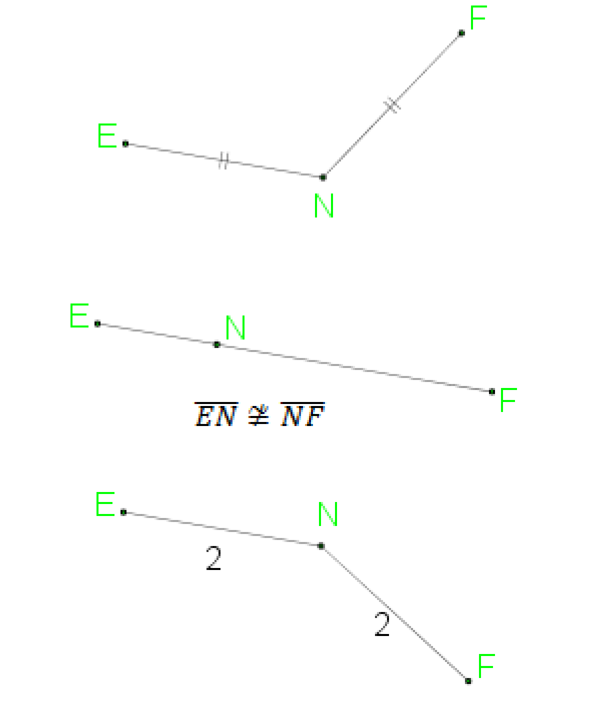


b) Construir dos segmentos congruentes y que no compartan puntos:

c) Construir dos segmentos congruentes que tengan un extremo en común:

Tarea 2.2

Observe los siguientes ejemplos y no ejemplos de punto medio de un segmento.

	
M es punto medio de $\overline{AB}$	N no es punto medio de $\overline{EF}$

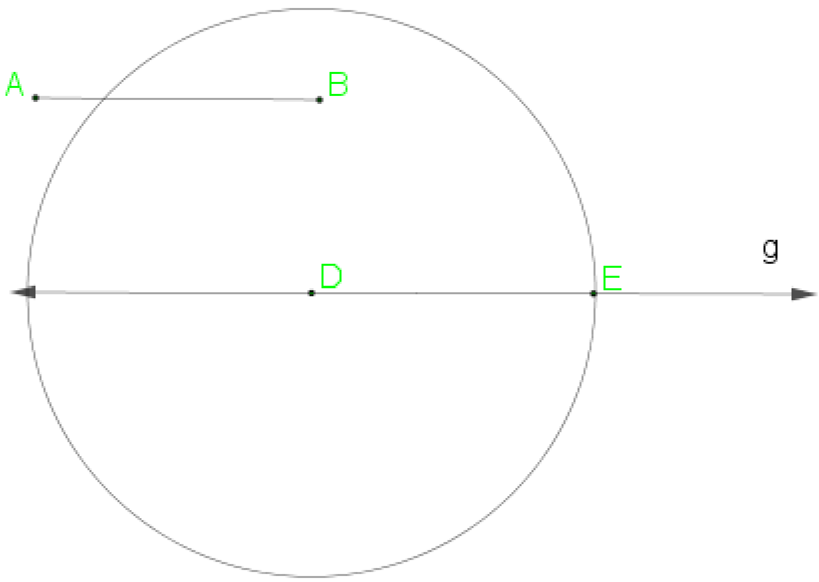
¿Qué características debe tener el punto M para que sea punto medio del $\overline{AB}$?

Métodos de solución

Saludo. Recordar brevemente lo realizado en la sesión anterior.

Tarea 2.1

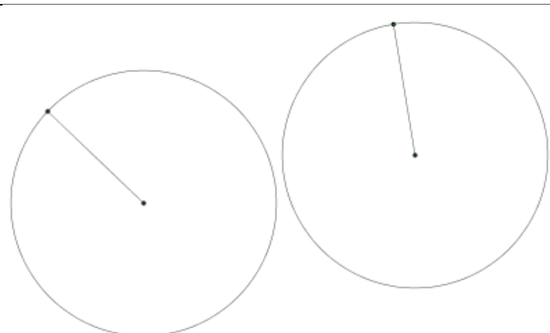
a) Copiar el $\overline{AB}$ sobre la recta g:

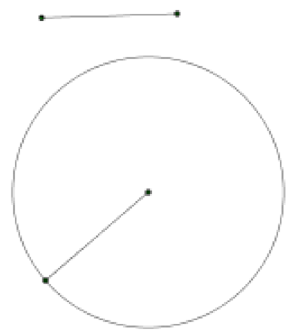


Justificación:

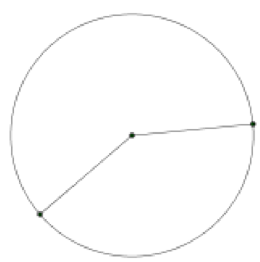
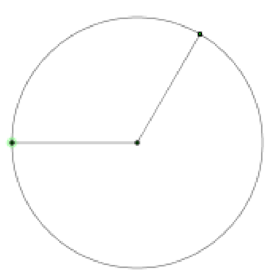
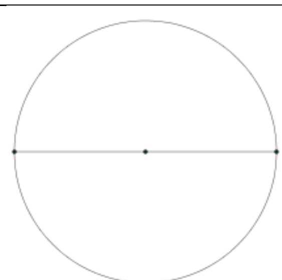
$\overline{AB}$ es congruente con $\overline{DE}$, porque la circunferencia tiene como radio la longitud de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ también es radio de la circunferencia y sé que los radios de una circunferencia son congruentes.

b) Construir dos segmentos que sean congruentes y no compartan puntos:

	Construcción	**Justificación**
Caso 1		*Los segmentos son congruentes porque visualmente lo parecen.*
Caso 2		*Estos segmentos son congruentes porque como las circunferencias tienen el mismo radio entonces todos sus radios son congruentes.*

Caso 3		*Estos segmentos son congruentes porque la circunferencia tiene como radio la longitud del primer segmento construido y por eso cualquier radio es congruente con dicho segmento.*

c) Construir dos segmentos congruentes, tal que tengan un extremo en común:

	Construcción	**Justificación**
Caso 1		*Los segmentos son congruentes porque visualmente lo parecen.*
Caso 2		*Los segmentos son congruentes porque los radios de una circunferencia son congruentes y el extremo en común es el centro.*
Caso 3		*Los segmentos son congruentes porque ambos son radios de la circunferencia y los radios de una circunferencia son congruentes y el extremo en común en su centro.*
Caso 4		*Los dos segmentos son congruentes porque son radios de la circunferencia y por tanto son congruentes.*

Si en las respuestas de los estudiantes se presenta los casos 1, se procede a pedirles a aquellos estudiantes que midan la longitud de los segmentos construidos y verifiquen la igualdad de medidas, logrando reconocer que aunque los segmentos parecen congruentes no lo son. En los demás casos, se concluye que una circunferencia se puede usar como una herramienta que permite construir segmentos congruentes, gracias al HG. Radios congruentes.

Tarea 2.2

¿Qué características debe tener un punto para que sea punto medio de un segmento?

Caso 1	• El punto medio está a la misma distancia de los extremos del segmento.	• Los extremos del segmento y su punto medio deben estar alineados.
Caso 2	• El punto medio equidista de los extremos del segmento.	• Los extremos del segmento y el punto medio son colineales.

Los dos casos indican las mismas características del punto medio de un segmento, sin embargo si se presenta solo el caso 1 se haría preguntas como: al indicar que los puntos están a la misma distancia ¿qué definición se está usando? ¿Qué definición describe cuando tres o más puntos están alineados? Aclarando el uso de estas definiciones se da paso a la definición de punto medio.

Si se presenta solo el caso 2, el cual emplea un lenguaje más elaborado pues se vale de la D. Equidistancia y la D. Colinealidad, se da paso directamente a la definición de punto medio.

D. Punto Medio

M es punto medio de $\overline{AB}$ si M equidista de A y de B, y A, M y B son colineales.

Tareas No. 3	
Objetivos • Identificar el lugar geométrico de puntos que equidistan de otros puntos. • Determinar propiedades que existen entre un segmento y su mediatriz.	
Contenidos • Equidistancia • Segmentos congruentes • Punto medio • Mediatriz • Perpendicularidad	**Sistema Teórico** • D. Equidistancia • HG. Radios congruentes • D. segmentos congruentes • D. Punto medio • D. Mediatriz • D. Perpendicularidad

	• HG. Mediatriz
Recursos • Regla • Compás • Lápiz • Acetato	

Tarea 3.1

Dado el $\overline{AB}$ en la hoja de acetato, encontrar 4 puntos que equidisten de A y B.

Responder:

Describir el proceso de construcción para encontrar los cuatro puntos que equidistan de A y B:

____

____

____

____

____

¿Por qué funciona la construcción descrita?

____

____

____

____

____

Tarea 3.2

En grupos de cuatro personas superponer las hojas de acetato, de tal forma que el $\overline{AB}$ coincida.

Responder:

Observar la posición de la mediatriz respecto al $\overline{AB}$, ¿qué relación hay entre la posición de estos dos objetos geométricos?

____

____

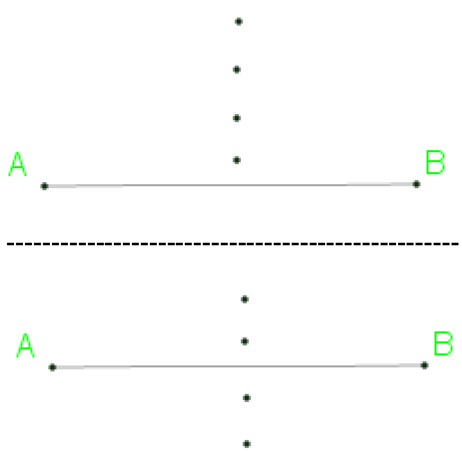
¿Qué propiedades hay entre la mediatriz y el $\overline{AB}$?

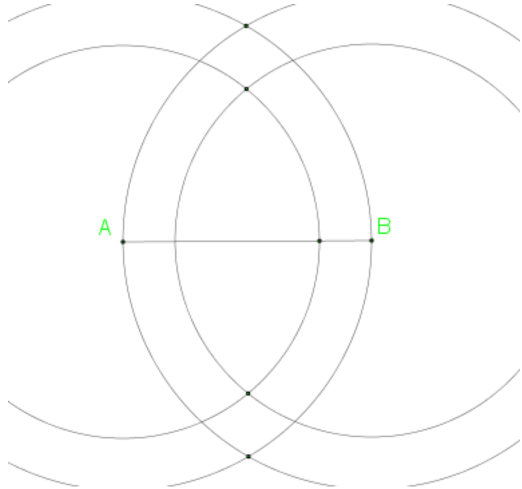
Métodos de solución

Saludo. Recordar brevemente lo realizado en la sesión anterior.

<u>Tarea 3.1</u>

Dado el $\overline{AB}$ en la hoja de acetato, encontrar 4 puntos que equidisten de A y B.

	Construcción	**Descripción y justificación**
Caso1		*Hice cuatro puntos que visualmente parecen estar a la misma distancia de los puntos A y B.* *Los cuatro puntos son equidistantes porque visualmente parecen estar a la misma distancia de A y B.*

Caso 2		*Construir parejas de circunferencia con las condiciones que el centro cada circunferencia de la pareja sea el punto A o B, y que tengan el mismo radio. Los puntos de intersección entre cada pareja de circunferencia equidistan de los puntos A y B.* *Los puntos son equidistantes de los puntos A y B porque cada pareja de circunferencias tienen el mismo radio y como estos son congruentes, entonces hay la misma longitud del punto de intersección de las circunferencias con los extremos del segmento.*

Si en las respuestas de los estudiantes se presenta el caso 1, se procede a pedirles que midan la longitud desde los puntos construidos a los puntos A y B, y verifiquen la igualdad de medidas, logrando reconocer que aunque los puntos parecen equidistantes a los extremos del segmento, estos no lo son. Seguido a esto realizaría preguntas como: ¿qué objeto geométrico me permite determinar puntos equidistantes a un punto fijo? ¿Cómo se lograría construir dichos puntos?

Si las respuestas de los estudiantes recaen en el caso 2, se daría paso a preguntar: ¿puedo construir más puntos con la misma condición? Constrúyalos. Después de esto se da paso a definir el lugar geométrico de todos esos puntos construidos.

D. Mediatriz

La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que equidistan de sus extremos.
La mediatriz de $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos que equidistan de A y de B.

Tarea 3.2

En grupos de cuatro personas superponer las hojas de acetato, de tal forma que el $\overline{\overline{AB}}$ coincida.

Responder:

Observar la posición de la mediatriz respecto al $\overline{\overline{AB}}$, ¿qué relación hay entre la posición de estos dos objetos geométricos?

Caso 1	La mediatriz y el segmento *AB* parecen forman una cruz (signo suma o multiplicación).
Caso 2	La mediatriz y el segmento *AB* forman ángulos rectos (90 grados).
Caso 3	La mediatriz y el segmento *AB* son perpendiculares.

Si sucede el caso 1, el cual sería el más recurrente, se preguntará a los estudiantes: ¿qué relación habrá entre dos objetos geométricos cuando forman una cruz (signo suma o multiplicación)? , tratando de lograr que se dé el caso 2, si este no sale como una de las posibles preguntas en la primera discusión. Luego se preguntará, ¿recuerdan el nombre que se le da a dos objetos geométricos cuando forma un ángulo recto (o de 90 grados)?, ya que el término de perpendicular ha sido trabajado años anteriores. Si finalmente no se logra recordar el nombre, se procederá a darles el nombre geométrico de dicha relación.

D. Perpendicularidad

Dos objetos geométricos (rectas, rayos o segmentos) son perpendiculares si forman un ángulo recto.

¿Qué propiedades hay entre la mediatriz y el $\overline{AB}$?

Caso 1	De acuerdo a lo anterior la mediatriz y el segmento son perpendiculares, es decir forman un ángulo de 90 grados.
Caso 2	La mediatriz parece pasar por el punto del medio del segmento.
Caso 3	De acuerdo a la pregunta anterior la mediatriz y el segmento son perpendiculares y además, la mediatriz pasa por el punto medio del segmento.

Si se da el caso 1, se preguntaría a los estudiantes: ¿están seguros que esa es la única propiedad que hay entre la mediatriz y el segmento?, para generar inquietud entre los estudiantes y así ellos procedan a verificar una vez más las construcciones realizadas por cada grupo. Con la anterior pregunta se busca lograr el caso 2, para que se concluya que entre la mediatriz y el segmento existen dos propiedades adicionales (caso 3) aparte de la equidistancia, obtenida en su definición.

H.G. Mediatriz

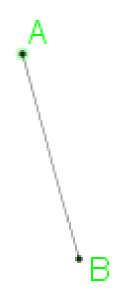
Dado un segmento, su mediatriz es perpendicular a este y lo interseca por su punto medio.

<table>
<tr><th colspan="2">Tareas No. 4</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
Construir con regla y compás algunos objetos geométricos.</td></tr>
<tr><td>Contenidos
Equidistancia
Segmentos congruentes
Punto medio
Mediatriz
Triángulo isósceles</td><td>Sistema Teórico
D. Equidistancia
HG. Radios congruentes
D. segmentos congruentes
D. Punto medio
D. Mediatriz
D. Triángulos Isósceles</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos
Regla
Compás
Lápiz</td></tr>
</table>

REGLA Y COMPÁS

Tarea 4.1

Haciendo uso de regla y compás construir la mediatriz del $\overline{AB}$:



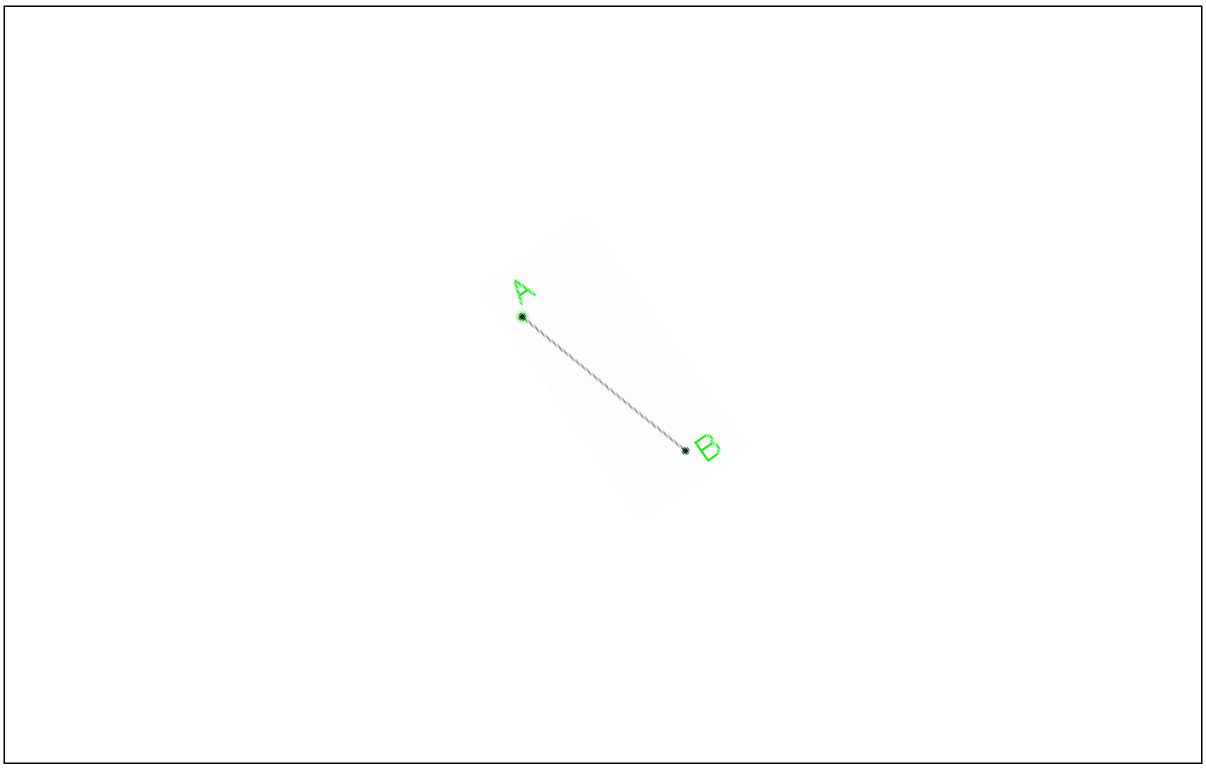
Responder:

Describir el proceso de construcción para encontrar la mediatriz del $\overline{AB}$:

____
____
____
____
____

<u>Tarea 4.2</u>

Haciendo uso de regla y compás construir el punto medio del $\overline{AB}$:



Responder:

Describir el proceso de construcción para encontrar el punto medo del $\overline{AB}$:

____
____
____
____
____

Tarea 4.3

Haciendo uso de regla y compás construir de dos manera diferentes un triángulo isósceles:

Construcción 1

Responder:

Describir el proceso de construcción 1:

¿Por qué funciona la construcción descrita?

Construcción 2

Responder:

Describir el proceso de construcción 2:

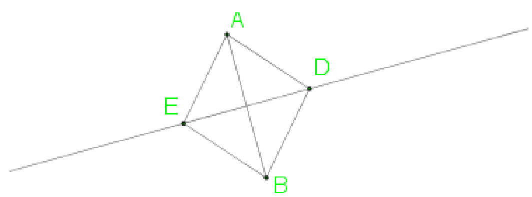
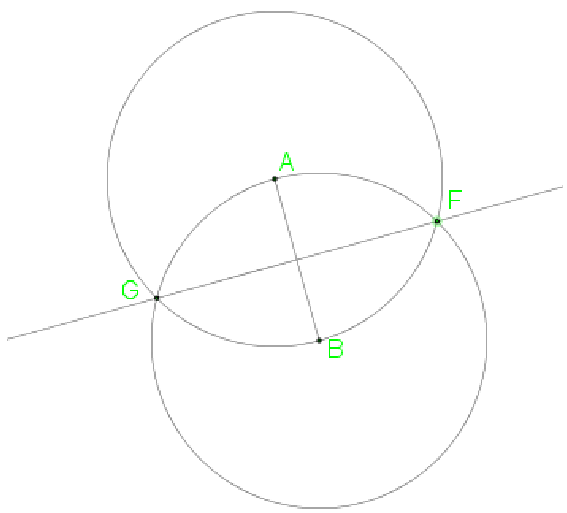
¿Por qué funciona la construcción descrita?

Métodos de solución

Saludo. Recordar brevemente lo realizado en la sesión anterior.

<u>Tarea 4.1</u>

Haciendo uso de regla y compás construir la mediatriz del $\overline{AB}$:

	Construcción	Descripción y justificación
Caso1		*Hice un punto que equidistara de los puntos A y B con la regla, luego con la misma medida hice el punto opuesto. Finalmente construí la recta que pasa por los puntos construidos.*
Caso 2		*Construir dos circunferencias con las condiciones que el centro de cada circunferencia fueran el punto A o B, y que tengan como radio el segmento dado. Los puntos de intersección entre las circunferencias equidistan de los puntos A y B. Luego trace la recta que pasa por las dos intersecciones.*

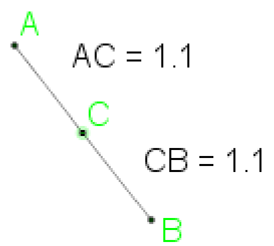
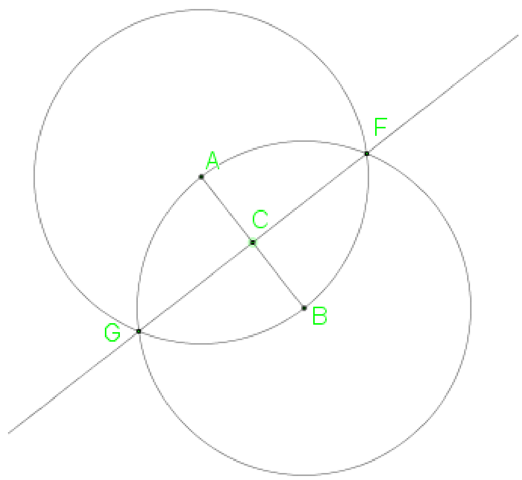
Si en las respuestas de los estudiantes se presenta el caso 1, se procede a pedirles que midan la longitud desde los puntos construidos a los puntos A y B (verificar si en realidad equidistan), logrando reconocer que aunque los puntos parecen equidistantes a los extremos del segmento, estos no lo son. Además a esto se les preguntaría: ¿Euclides hacia uso de los centímetros de la regla?, buscando que se genere una negación en el grupo, dando paso a realizar las siguientes preguntas: ¿qué objeto geométrico me permite determinar puntos equidistantes a un punto fijo? ¿Cómo se lograría construir dichos puntos?

Si las respuestas de los estudiantes recaen en el caso 2, se daría paso a preguntar: ¿debo construir más puntos con la misma condición? O ¿hay una forma de realizar la mediatriz de una vez?

Logrando identificar que para la construcción de la mediatriz de un segmento es necesario la construcción de al menos dos puntos que equidisten de los extremos del segmento (uso de circunferencia) y luego se puede trazar una recta gracias al H.G. dos puntos – recta.

Tarea 4.2

Haciendo uso de regla y compás construir el punto medio del $\overline{AB}$:

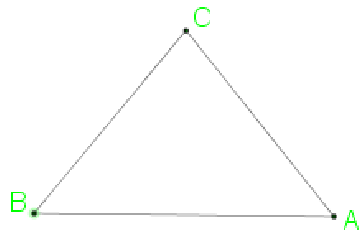
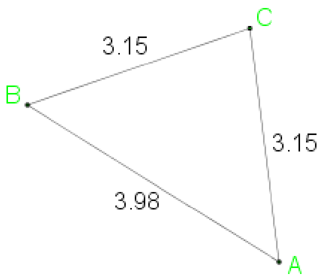
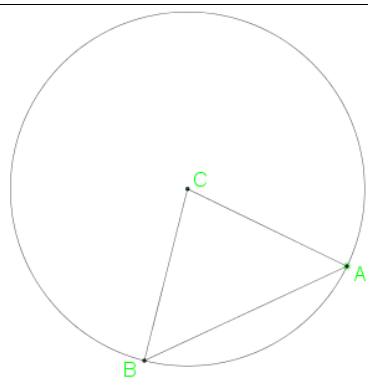
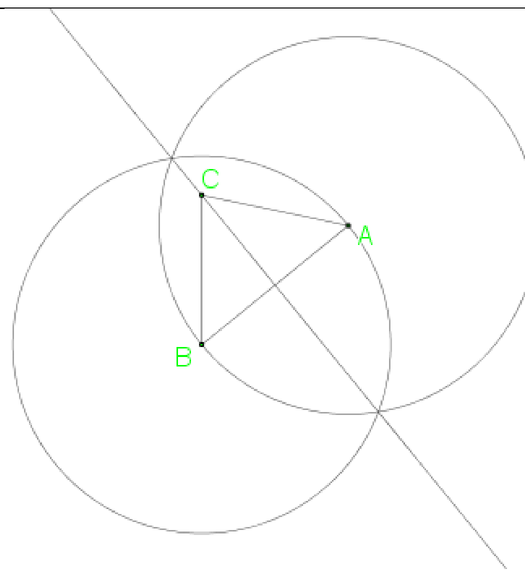
	Construcción	**Descripción y justificación**
Caso1		*Medí con la regla la longitud del segmento AB y luego busqué la mitad, ese sería el punto medio.*
Caso 2		*Construir dos circunferencias con las condiciones que el centro de cada circunferencia fueran el punto A o B, y que tengan como radio el segmento dado. Los puntos de intersección entre las circunferencias equidistan de los puntos A y B. Luego trace la recta que pasa por las dos intersecciones.*

Si sucede el caso 1, el cual sería el más recurrente, se preguntará a los estudiantes: ¿hay alguna manera de construir el punto medio usando definiciones o hechos geométricos que tenemos hasta ahora?, tratando de lograr que se dé el caso 2, pretendiendo que recuerden el HG. de la mediatriz y su respectiva construcción (tarea anterior). Finalmente, se concluye el algoritmo de construcción del punto medio.

Tarea 4.3

Haciendo uso de regla y compás construir de dos manera diferentes un triángulo isósceles:

Construcciones que pueden suceder:

Caso 1		Construí dos segmentos de igual medida con ayuda de algun objeto concreto, luego cerré el triángulo con el segmento AB. La construcción funciona porque realicé dos segmentos con el mismo.
Caso 2		Con ayuda de la recgla construi dos semgentos que tuvieran la misma medida, luego cerré el triángulo con el semgento AB. La construcción funciona porque con ayuda de la regla tomé una misma medida para dos lados.
Caso 3		Construí una circunfernecia y luego tracé dos radios (segmentos CA y CB), luego cerré el triángulo con el segmento AB. La construcción funciona porque gracias al HG. Radios congruentes sabemos que los segmentos CA y CB son congruentes al ser radios de la circunferencia.
Caso 4		Construí un segmento AB y su respectiva mediatriz, luego ubique un punto sobre esta recta (que no sea el punto medio) y tracé los semgento CA y CB. La construcción funciona por el punto C equidista de los puntos A y B, es decir hay la misma distancia de C a A y que C a B.

Como se le pide a los estudiantes dos construcciones diferentes de un triángulo isósceles, un estudiante puede presentar cualquier par de construcciones descritas anteriormente. Si se presenta los caso 1 o 2, se les preguntará al grupo: ¿es necesario trabajar con medidas?, ¿recuerdan lo que sucedió con las tareas anteriores? Estas preguntas se realizan con el ánimo de recordar que para las anteriores tareas hubo soluciones sin necesidad de medir. Luego se preguntará: ¿teniendo en cuenta nuestro sistema teórico habrá algo que nos ayude a construir un triángulo isósceles con regla y compas?, con el fin que los estudiantes concluyan las propiedades de la circunferencia y la mediatriz.

A partir de lo anterior se concluirá la construcción y argumentación de cómo se puede construir un triángulo isósceles usando regla y compás, teniendo en cuenta los elementos que componen el sistema teórico que tenemos hasta el momento.

<table>
<tr><th colspan="2">Tares No. 5</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Identificar que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180.
• Deducir que en un triángulo isósceles hay dos ángulos congruentes.</td></tr>
<tr><td>Contenidos
• Triángulo
• Triángulo isósceles
• Sumas de los ángulos de un triángulo
• Ángulos congruentes de un triángulo isósceles.
• Circunferencia
• Radios congruentes</td><td>Sistema Teórico
• D. Triángulo
• D. Triángulo Isósceles
• HG. Ángulos triángulo – 180
• HG. Triángulo Isósceles – Ángulos
• D. Circunferencia
• HG. Radios congruentes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos
• Regla
• Compás
• Lápiz
• Cartón Cartulina</td></tr>
</table>

<u>Tarea 5.1</u>

En cartón cartulina construir un triángulo, tal que la suma de sus ángulos internos sea la mayor posible.

Realizar grupos de cuatro estudiantes y escoger el triángulo cuya suma de sus ángulos internos sea la mayor.

¿Qué hicieron para saber que la suma de los ángulos internos del triángulo escogido es la mayor?

Tarea 5.2

Construir un triángulo isósceles y colorear la amplitud de cada uno de sus ángulos.

Cortar los tres ángulos y compararlos.

¿Hay relación entre algunos o todos los ángulos? ¿Por qué?

¿Qué relación tienen los ángulos con los lados del triángulo?

Tarea 5.3

Construir un triángulo isósceles que tenga dos ángulos rectos.

Explicar por qué funciona la construcción realizada anteriormente.

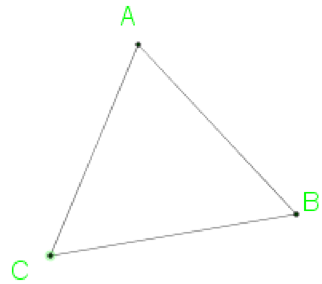
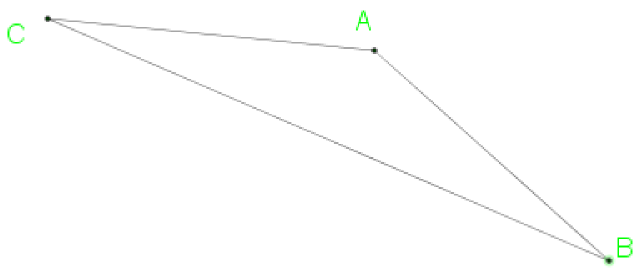
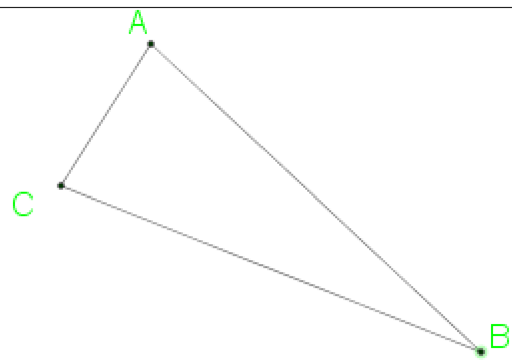
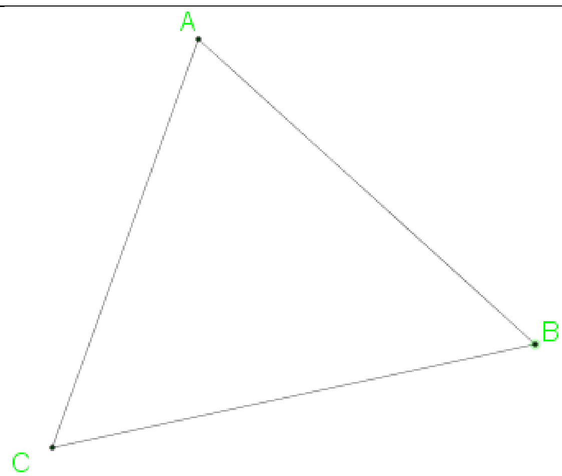
Métodos de solución

Saludo. Se da paso a recordar brevemente las conclusiones de la sesión pasada.

Tarea 5.1

En cartón cartulina construir un triángulo, tal que la suma de sus ángulos internos sea la mayor posible.

En este paso pueden haber varias construcciones, tales como:

Caso 1		Construcción de triángulo de tal forma que sus ángulos sean congruentes (o lo asemejen visualmente)
Caso 2		Construcción del triángulo, que posea uno de sus ángulos con la mayor medida posible (obtusángulo).
Caso 3		Construcción del triángulo, tal que dos sus ángulos tengan la mayor medida posible.
Caso 4		Construcción del triángulo que tenga mayor área. A mayor tamaño, mayor es la medida de sus ángulos

Dadas las construcciones que aparezcan, los estudiantes se reunirán en grupos de 4, para que escojan el triángulo cuya suma de las medidas de sus tres ángulos sea la mayor, respondiendo a la pregunta ¿Qué hicieron para saber que la suma de los ángulos internos del triángulo escogido es la mayor? De ahí pueden salir estrategias como:

a) Usar argumentos de tipo empírico para convencer a sus compañeros de escoger un determinado triángulo como el posible ganador.
b) Trazar segmentos para calcular una posible amplitud del ángulo.
c) Rasgar los tres ángulos y colocarlos uno tras otro, aludiendo que todos forman una recta, es decir la suma es igual.
d) Rasgar los tres ángulos y colocarlos uno tras otro, luego con los tres ángulos de otro triángulo colocarlos encima para comparar medidas, concluyendo que las sumas son iguales.

Luego, por cada grupo se escogerá el triángulo ganador escuchando las razones de su escogencia (casos a y b), si se presenta los casos c y d, se pondrá en discusión si la suma de los ángulos de un triángulo, sin importar su tamaño y forma, miden lo mismo. De esta discusión se concluye que:

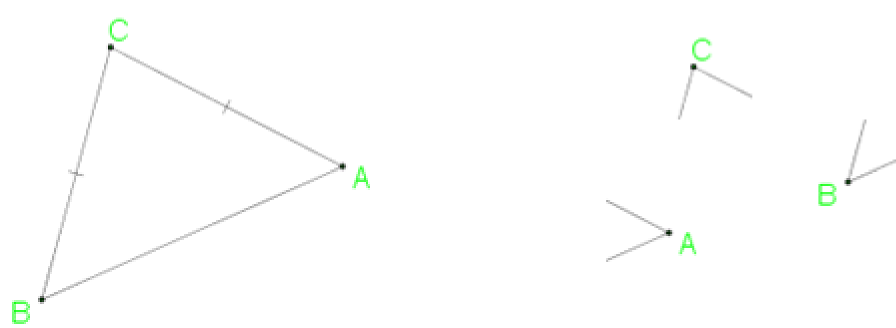
HG Ángulos triángulo – 180

La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180.

<u>Tarea 5.2</u>

Construir un triángulo isósceles y colorear la amplitud de cada uno de sus ángulos.

Cortar los tres ángulos y compararlos.



¿Hay relación entre algunos o todos los ángulos? ¿Por qué?

Sí hay relación entre dos ángulos porque miden lo mismo.

¿Qué relación tienen los ángulos relacionados con los lados del triángulo?

Si volvemos a ubicar los ángulos en el triángulo nos damos cuenta que los ángulos de igual medida están bajo los lados que son iguales.

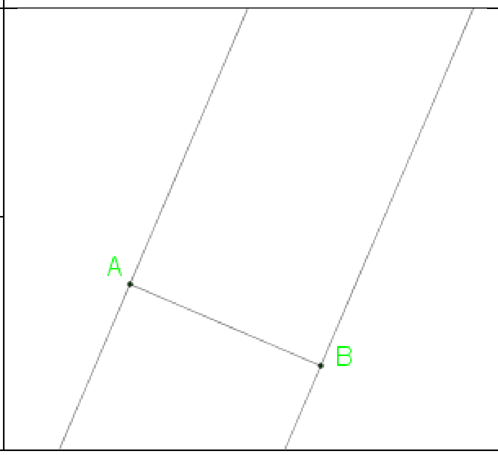
Con estas dos respuestas se busca que los estudiantes, por medio de un proceso empírico, encuentren que dos ángulos de los tres posibles tienen la misma amplitud o medida. Luego con la segunda pregunta, se busca que los estudiantes determinen la ubicación de dichos ángulos congruentes con ayuda de los lados congruentes, para así concluir:

HG. Triángulos Isósceles – Ángulos

Dado un triángulo isósceles sus dos ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

Tarea 5.3

Construir un triángulo isósceles que tenga dos ángulos rectos.

	Construcción	Por qué funciona
Caso 1	 	*La construcción no se puede realizar porque las rectas que deben ser los lados del triángulo no se unen.*
Caso 2		*La construcción no se pode realizar porque la suma de los tres ángulos de un triángulo debe ser igual a 180 y haciendo dos ángulos rectos, su suma es igual a 180.*

Se busca que todos los estudiantes lleguen a la construcción que se ha ilustrado anteriormente, pero se considera que pueden argumentar de diversas maneras el por qué funciona o no la construcción realizada. Por un lado, algunos estudiantes pueden argumentar empíricamente de acuerdo a como quede la construcción, es decir, "las rectas nunca se van a tocar"; a partir de esto se pregunta a los estudiantes si lo que observaron se puede garantizar a partir de las definiciones y los hechos geométricos que se tienen hasta ahora. Con ello se busca que ellos se concienticen de las propiedades que deben cumplir los dos hechos geométricos deducidos de las dos anteriores tareas.

Tareas No. 5	
Objetivos • Identificar los criterios de congruencia de triángulos.	
Contenidos • Segmentos congruentes • Ángulos congruentes • Triángulo • Triángulos congruentes • Criterios de congruencia de triángulos • Sumas de los ángulos de un triángulo	**Sistema Teórico** • HG. Radios congruentes • D. Congruencia Ángulos • D. Triángulo • D. Triángulos congruentes • C. ALA • C. LAL • C. LLL • HG. Ángulos Triángulo - 180

Recursos

- Regla
- Compás
- Lápiz
- Hojas blancas

<u>Tarea 6.1</u>

Construir un triángulo cualquiera nombrando sus vértices.

¡COMPETENCIA!

Duplicar (copiar) el triángulo anterior en una hoja blanca, utilizando la menor cantidad de pasos en la construcción.

Responder

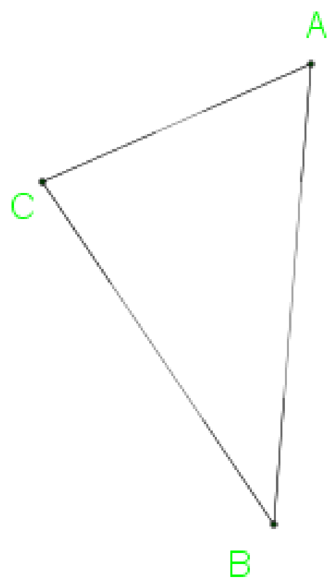
¿Qué pasos realizó para duplicar el triángulo en la hoja blanca?

Métodos de solución

Saludo. Se da paso a recordar brevemente las conclusiones de la sesión pasada.

Tarea 6.1

Construir un triángulo cualquiera nombrando sus vértices.

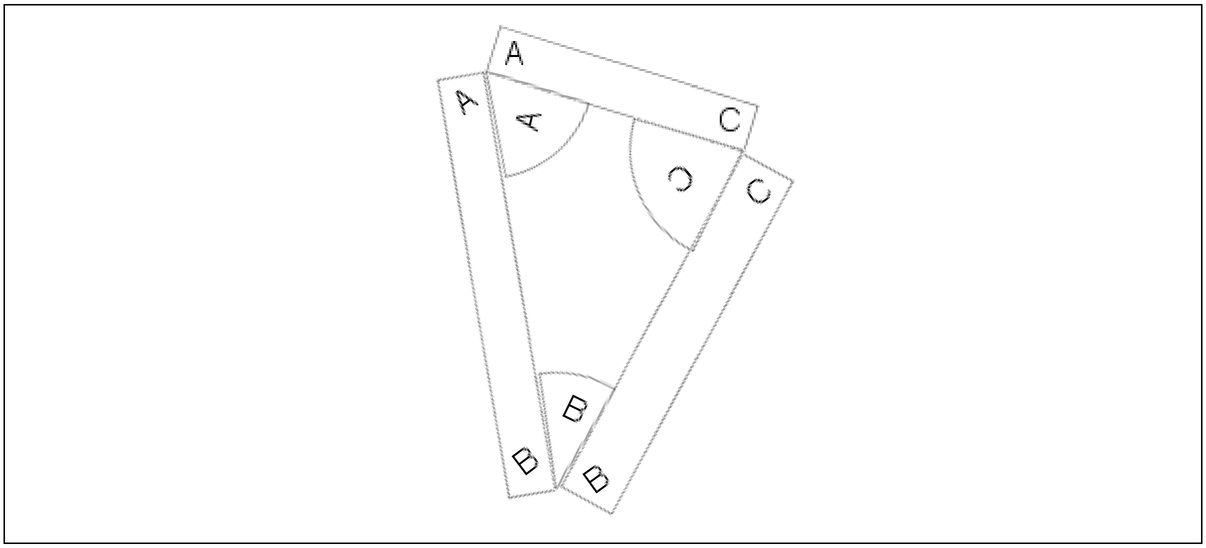


¡COMPETENCIA!

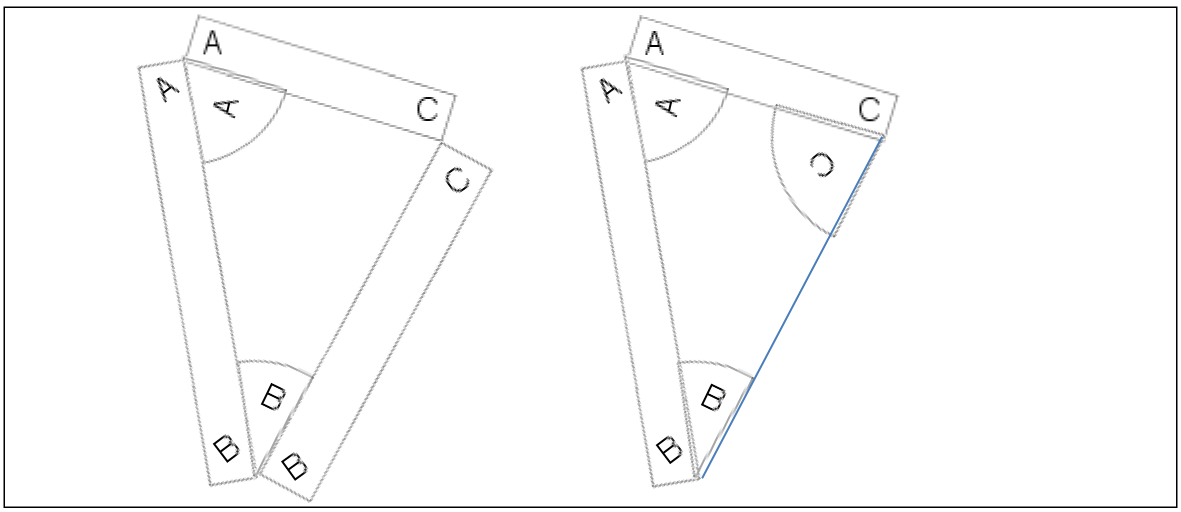
Duplicar (copiar) el triángulo anterior en una hoja blanca, utilizando la menor cantidad de pasos.

Para realizar esta parte de la tarea, los estudiantes disponen de seis pasos, ya que pueden copiar tres lados (con el compás) y copiar tres ángulos (posiblemente recortando los ángulos, tal como se ha hecho en tareas anteriores). Por tanto se prevé que suceda que los estudiantes hagan uso de:

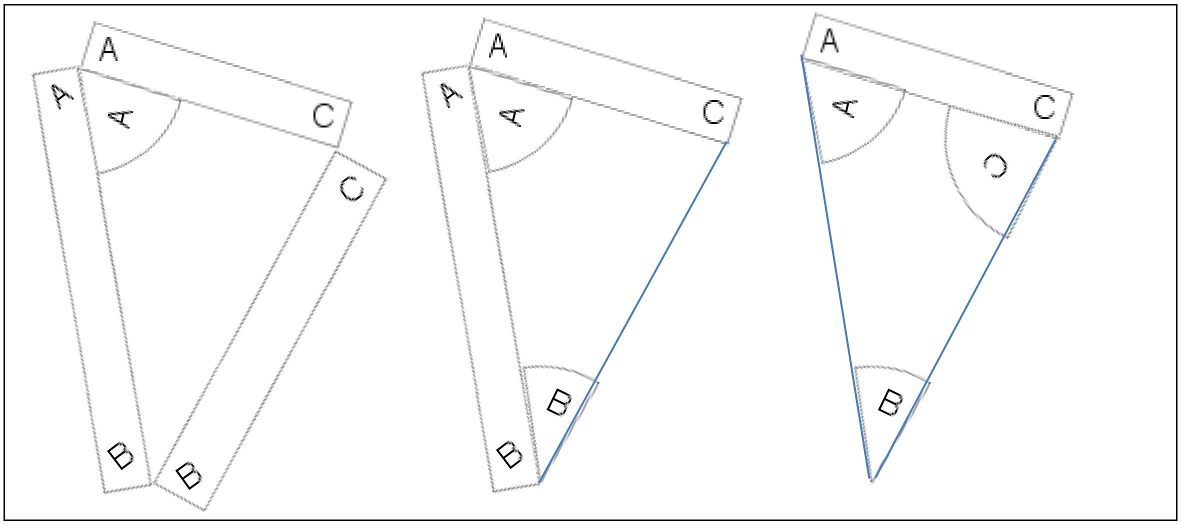
- **Seis pasos (tres lados y tres ángulos)**



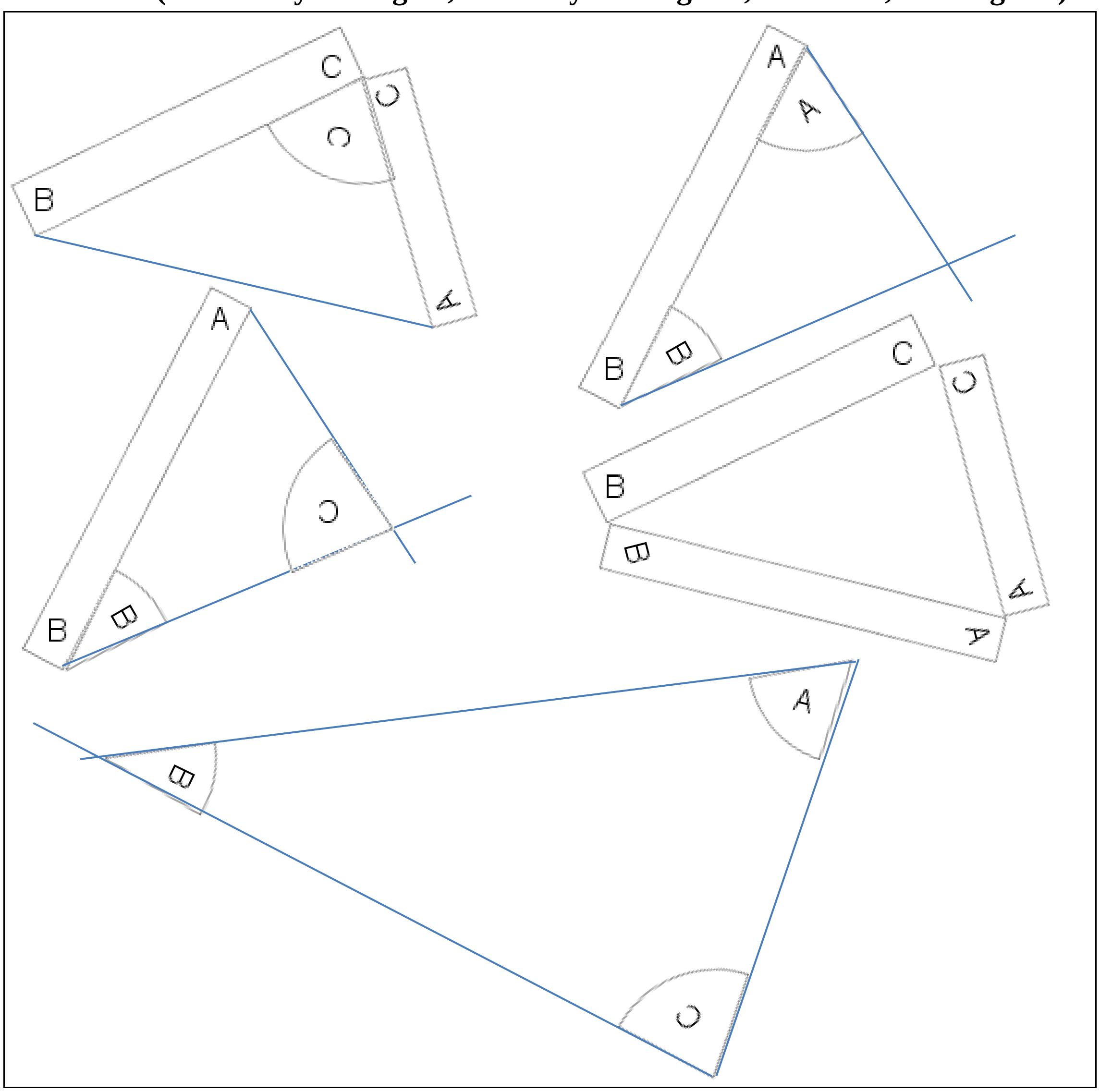
- **Cinco pasos (tres lados y dos ángulos o dos lados y tres ángulos)**



- **Cuatro pasos (tres lados y un ángulo, tres ángulos y un lado, dos lados y un ángulo)**



- **Tres fichas (dos lados y un ángulo, un lado y dos ángulos, tres lados, tres ángulos)**



Después de duplicar el triángulo, se da paso para que los estudiantes expliquen los pasos usados para tal acción:

Responder

¿Qué pasos realizó para duplicar el triángulo en la hoja blanca?

Caso 1	Copiar en seis pasos	Los estudiantes copian cada uno de los elementos del triángulo construido, es decir los tres lados y los tres ángulos. Dichos pasos dan solución a la tarea pero no en un mínimo de pasos solicitado.
Caso 2	Copiar en cinco pasos	En este caso los estudiantes pueden usar cinco pasos de dos maneras, copiar tres lados y dos ángulos o copiar dos lados y tres ángulos. Al igual que el anterior caso, estos pasos dan solución a la tarea pero no en un mínimo de pasos solicitado.
Caso 3	Copiar en cuatro casos	Los estudiantes pueden copiar el triángulo en cuatro pasos de tres maneras diferentes, copiando tres lados y un ángulo, tres ángulos y un lado o dos lados y un ángulo. Cualquiera de estas tres maneras da solución a la tarea pero no en un mínimo de pasos solicitado.
Caso 4	Copiar en tres pasos	En este caso los estudiantes pueden usar cuatro estrategias para copiar el triángulo en tres pasos, siendo dos lados y un ángulo (LAL), un lado y dos ángulos (ALA), tres lados (LLL), **tres ángulos.** Estas estrategias son verdaderas salvo la última (con negrita, ya que usando tres ángulos se puede garantizar la forma del triángulo original pero no su tamaño.

De acuerdo a lo anterior, si suceden los casos 1 o 2 se preguntaría a los estudiantes: ¿hay una manera de copiar el triángulo original en menos de 6 o 5 pasos?, con esto se lograría que ellos comenzaran a buscar estrategias para copiar el triángulo en menos pasos, llegando al caos 3. Luego se preguntaría, ¿se puede con menos de cuatro pasos?, buscando que los estudiantes lleguen a los caso LAL, ALA y LLL.

Si sucede el caso **tres ángulos**, sería empleado para ver este caso no necesariamente cumple las condiciones de la tarea y de daría paso a definir triángulos congruentes y sus respectivos criterios, siendo aquellos que permiten copiar un triángulo en la menor cantidad de pasos:

D. Triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos correspondientes son congruentes, en otras palabras si los triángulos tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Criterios de congruencia

Criterio LAL

Dos triángulos son congruentes si dos pares de lados correspondientes son congruentes y el par de ángulos (comprendidos entre dichos lados) también son congruentes.

Criterio ALA

Dos triángulos son congruentes si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes y un par de lados (lados en común de los ángulos) también son congruentes.

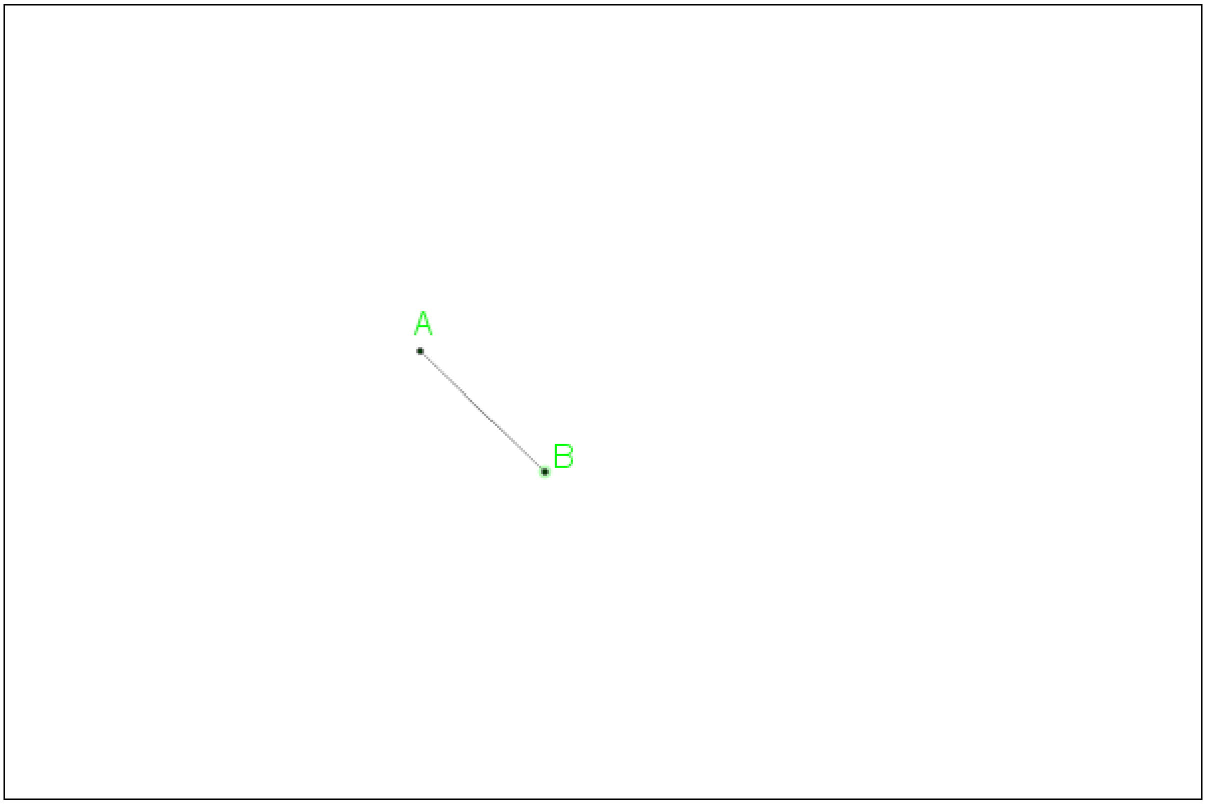
Criterio LLL

Dos triángulos son congruentes si los tres pares de lados correspondientes son congruentes.

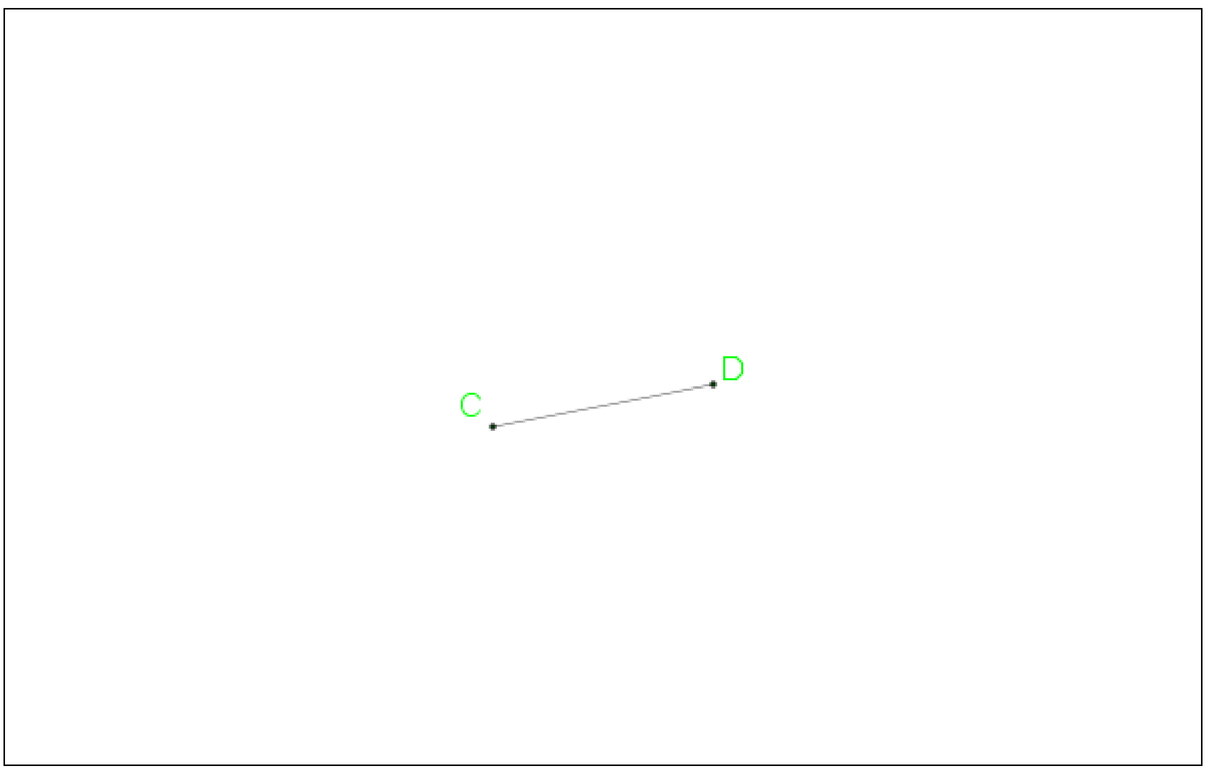
<table>
<tr><th colspan="2">Tareas No. 7</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Identificar la definición de cuadrado, rectángulo y rombo y propiedades de estos.</td></tr>
<tr><td>Contenidos
• Segmentos congruentes
• Ángulos congruentes
• Ángulo recto
• Rectas perpendiculares
• Cuadrilátero
• Cuadrado
• Rectángulo
• Rombo</td><td>Sistema Teórico
• HG. Radios congruentes
• D. Ángulos congruentes
• D. Ángulo recto
• D. Rectas perpendiculares
• D. Cuadrilátero
• D. Cuadrado
• D. Rectángulo
• D. Rombo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos
• Regla
• Compás
• Lápiz</td></tr>
</table>

Tarea 7.1

Construir un cuadrado, asumiendo que $\overline{AB}$ es uno de sus lados.

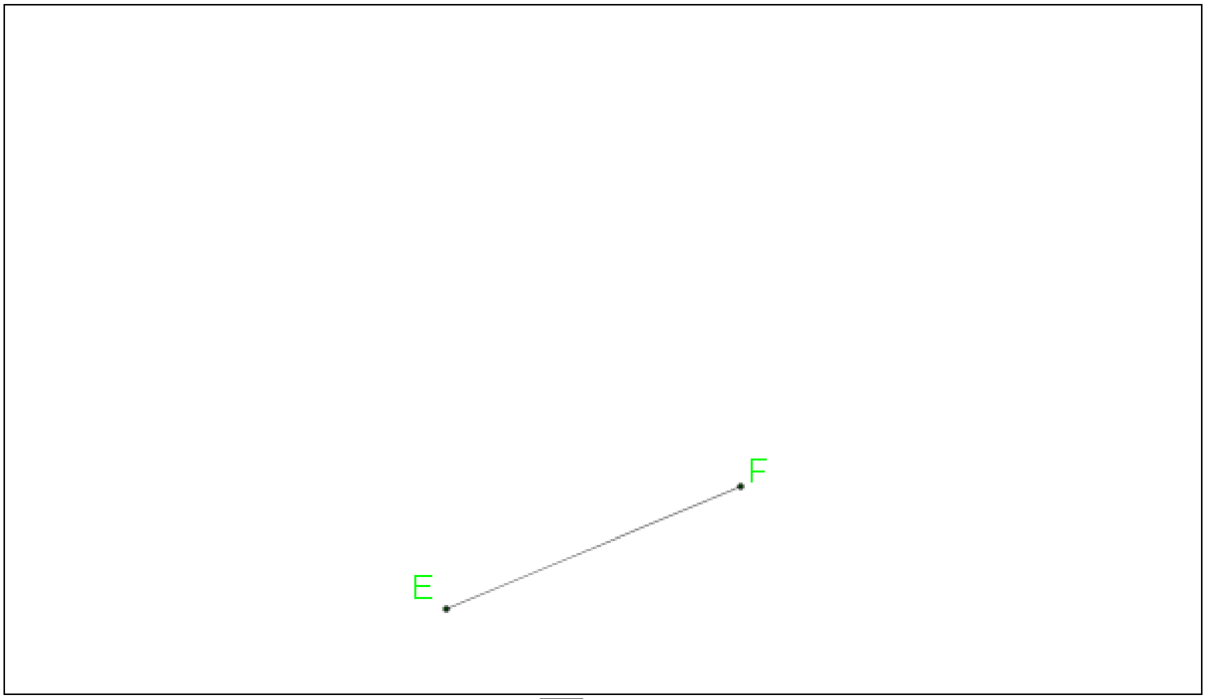


Construir un cuadrado, asumiendo que $\overline{CD}$ es una de sus diagonales:

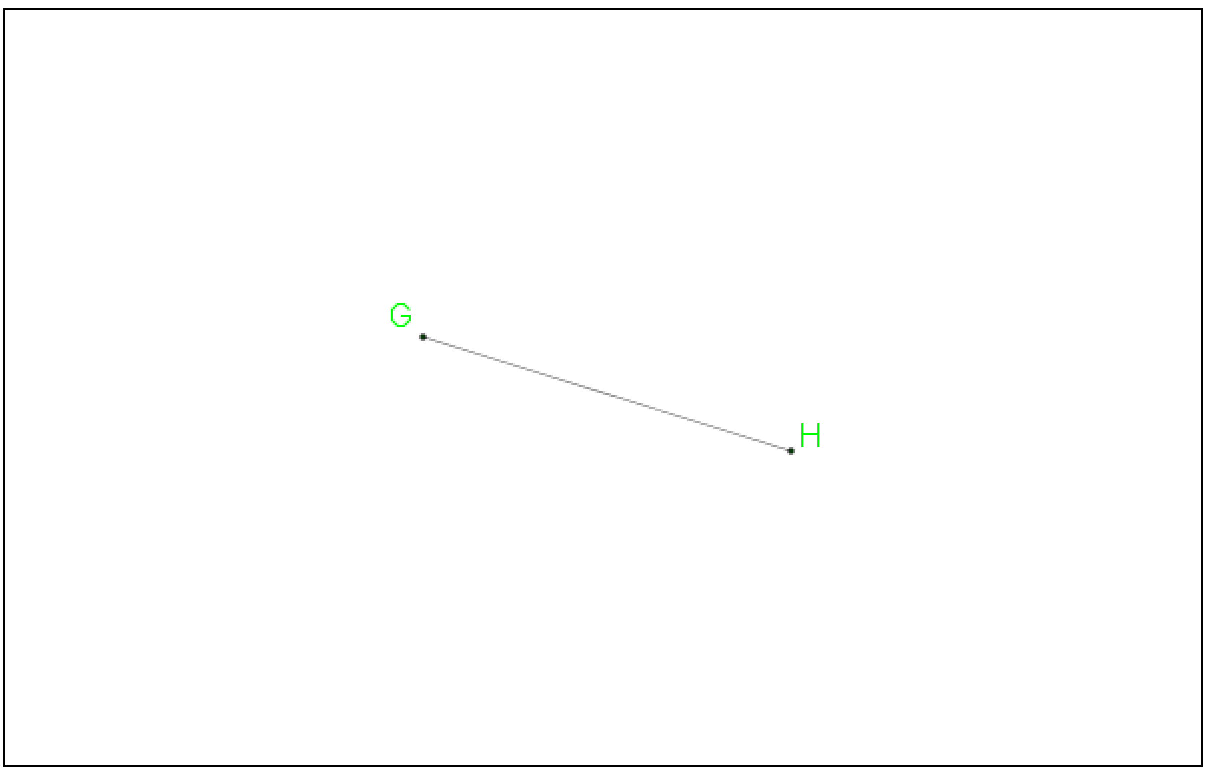


Tarea 7.2

Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{EF}$ es uno de sus lados.

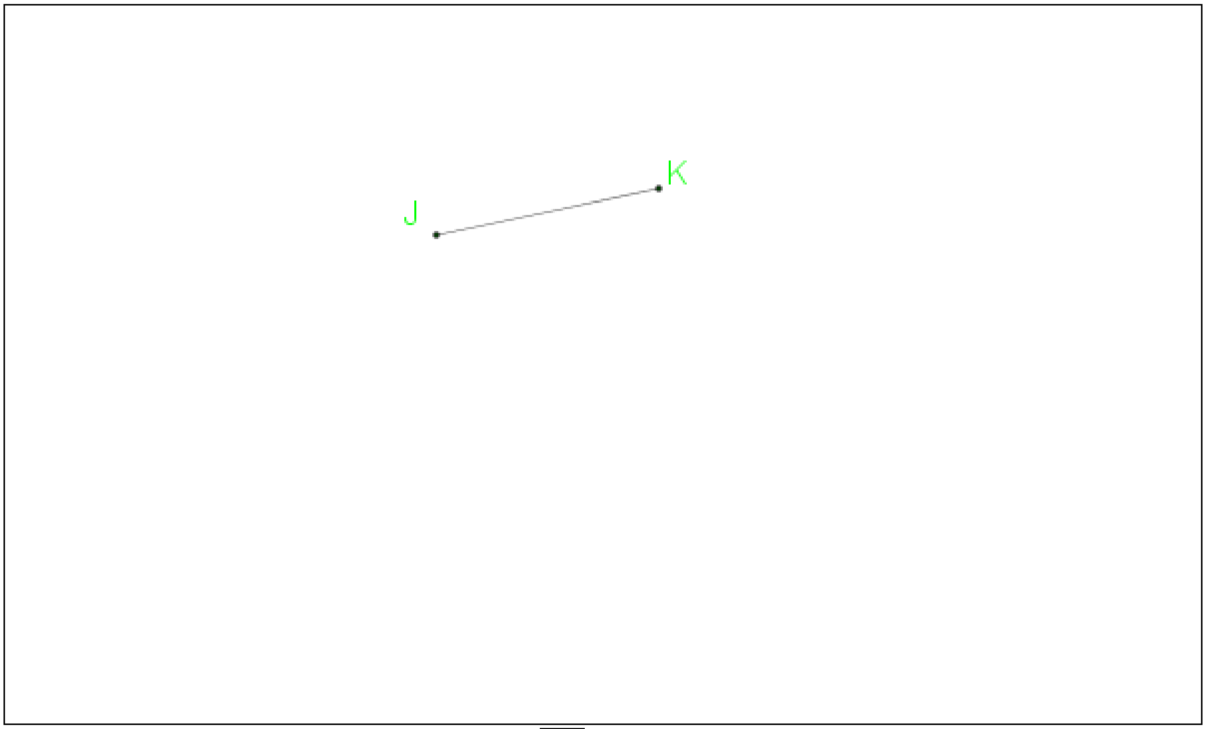


Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{GH}$ es una de sus diagonales:

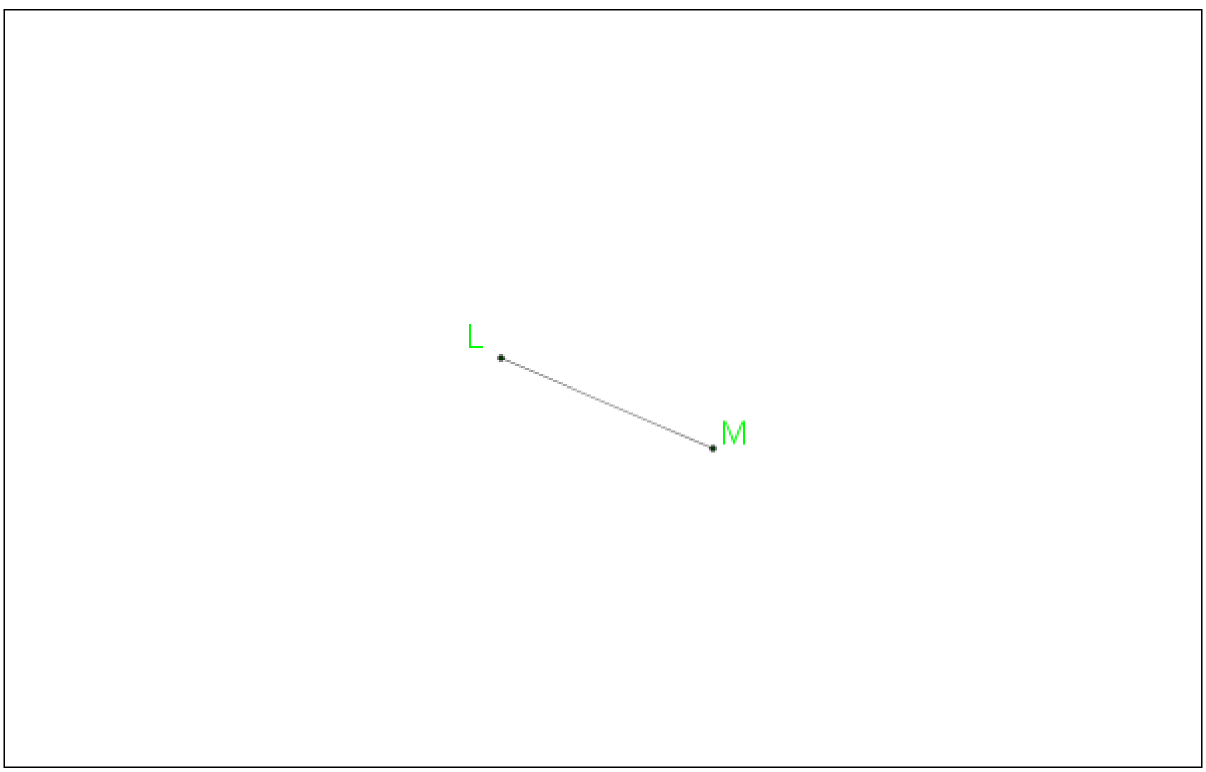


Tarea 7.3

Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{JK}$ es uno de sus lados.



Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{LM}$ es una de sus diagonales:

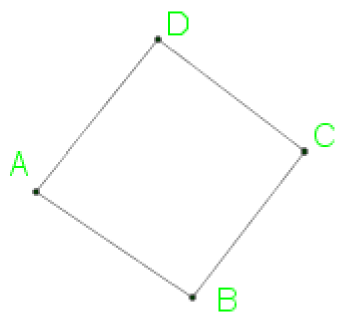
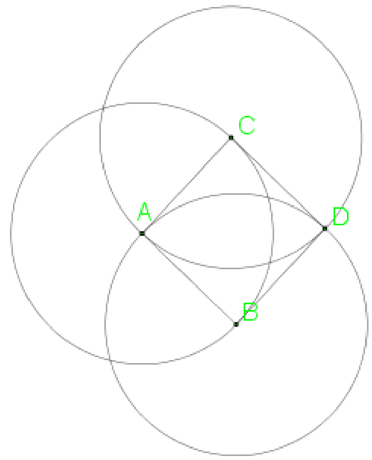
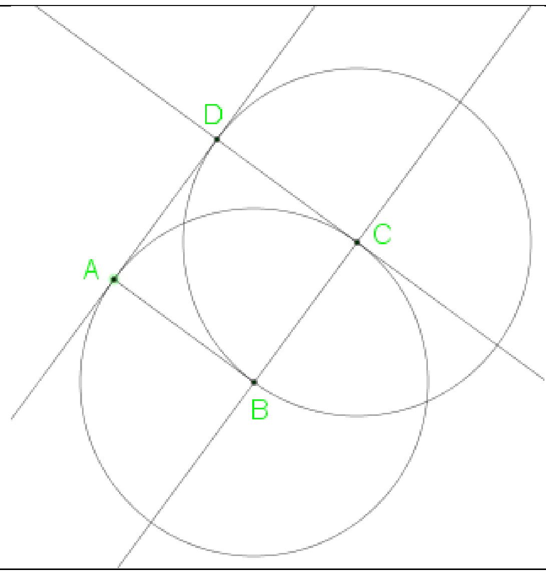


Métodos de solución

Saludo. Se da paso a recordar brevemente las conclusiones de la sesión pasada.

<u>Tarea 7.1</u>

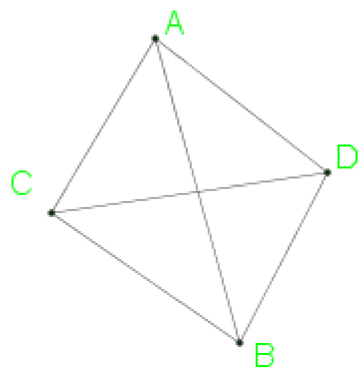
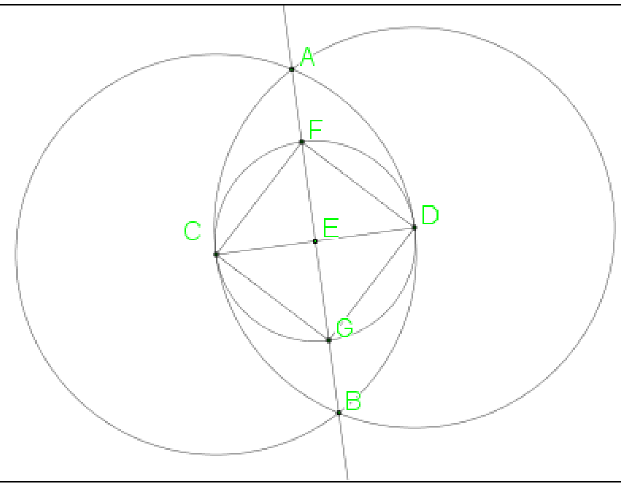
Construir un cuadrado, asumiendo que $\overline{AB}$ es uno de sus lados.

Caso 1	**Caso 2**
	
Caso 3	
	

En la socialización en gran grupo, se preguntará a los estudiantes cómo construyeron el cuadrado. Si sucede el caso 1, construcción a simple vista, se preguntará ¿qué características debe cumplir un cuadrado?, generando en los estudiantes que hagan mención a los lados congruentes. Luego se preguntará, ¿qué garantiza que los lados son realmente congruentes (caso 1)?, logrando que entre los estudiantes surja el caso 2, el cual hace uso de la circunferencia. Después se preguntará, ¿el cuadrado tendrá otra característica?, tratando que los estudiantes determinen alguna relación entre los ángulos de este cuadrilátero. Si no se logra, se dará paso a construir un cuadrilátero que cumpla el caso 2 pero que no se vea como un cuadrado, generando que los estudiantes haga alusión a los ángulos, para llegar finalmente al caso 3 y concluir la definición de un cuadrado.

D. Cuadrado

Un cuadrado es un cuadrilátero con sus ángulos rectos y sus lados congruentes.

Caso 1	Caso 2
	

En esta construcción si sucede el caso 1, la cual es netamente empírica, se preguntará a los estudiantes por qué el cuadrilátero construido es un cuadrado, generando en ellos que tengan en cuenta las características que debe tener un cuadrado. De acuerdo al caso 1 se daría comienzo a mirar que propiedades guardan las diagonales del cuadrado, especificando que son perpendiculares, congruentes y cruzan por sus puntos medios, dando como posible solución a la tarea el caso 2. Se concluye la siguiente propiedad del cuadrado.

HG. Cuadrado – Diagonales

Dado un cuadrado entonces sus diagonales:

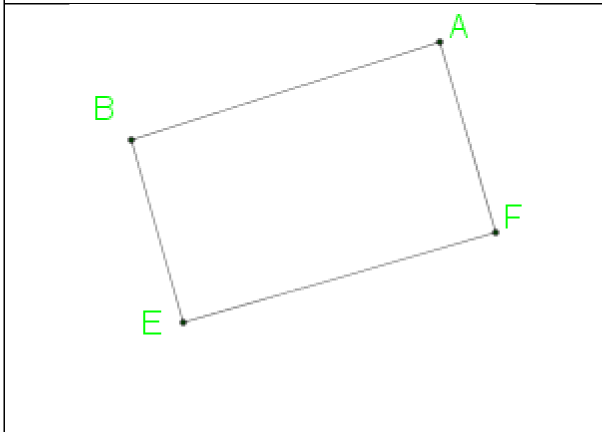
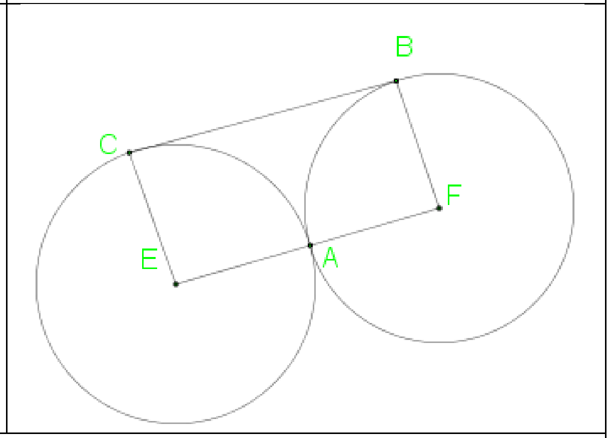
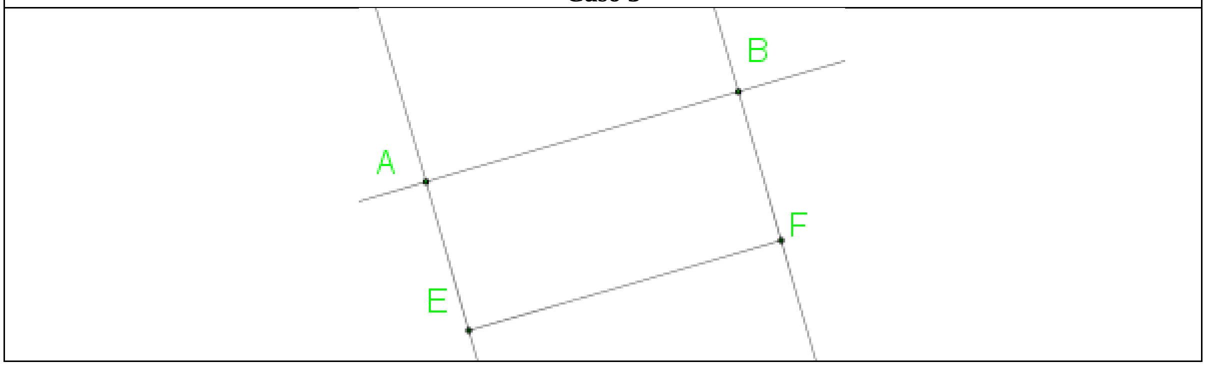
- Son perpendiculares.

- Se intersecan en sus puntos medios.

- Son congruentes.

Tarea 7.2

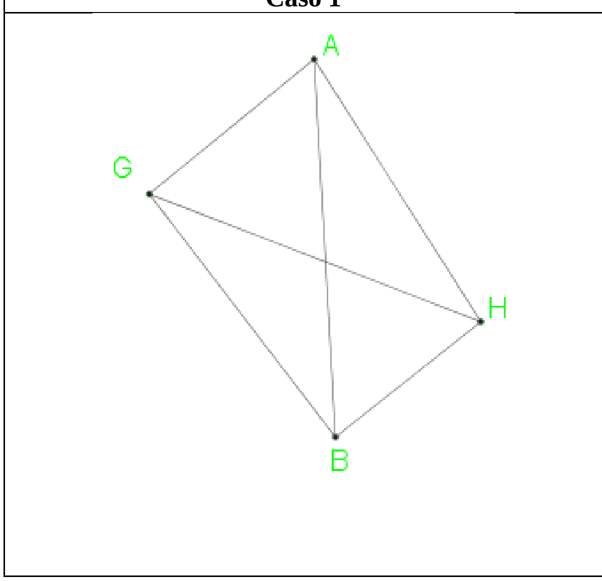
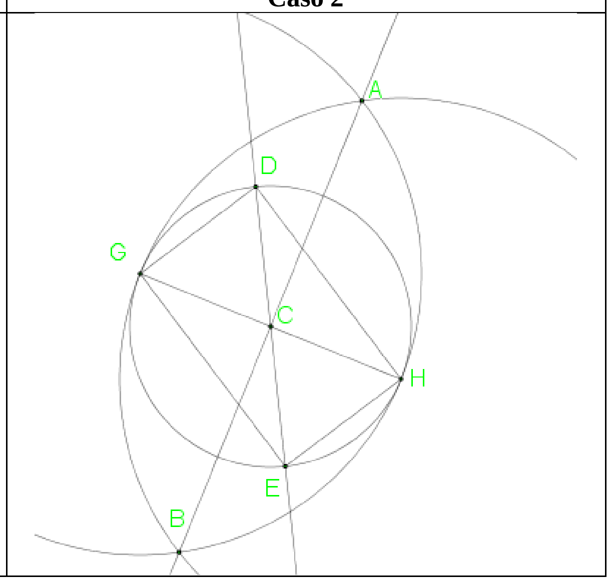
Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{EF}$ es uno de sus lados.

<table>
<tr><th>Caso 1</th><th>Caso 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Caso 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

D. Rectángulo

Un rectángulo es un cuadrilátero con sus cuatro ángulos rectos.

Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{GH}$ es una de sus diagonales:

<table>
<tr><th>Caso 1</th><th>Caso 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

En esta construcción si sucede el caso 1, la cual es netamente empírica, se preguntará a los estudiantes por qué el cuadrilátero construido es un rectángulo, generando en ellos que tengan en cuenta las características que debe tener un este. De acuerdo al caso 1 se daría comienzo a mirar que propiedades guardan las diagonales del rectángulo, especificando que son congruentes y cruzan por sus puntos medios, dando como posible solución a la tarea el caso 2. Se concluye la siguiente propiedad del cuadrado.

HG. Rectángulo – Diagonales

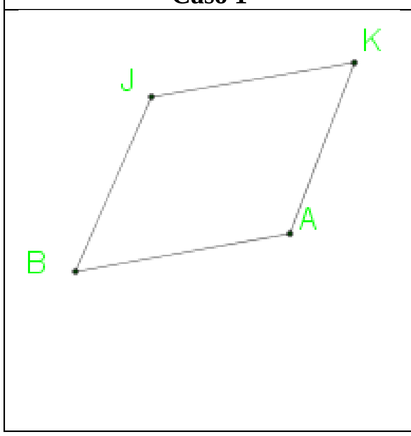
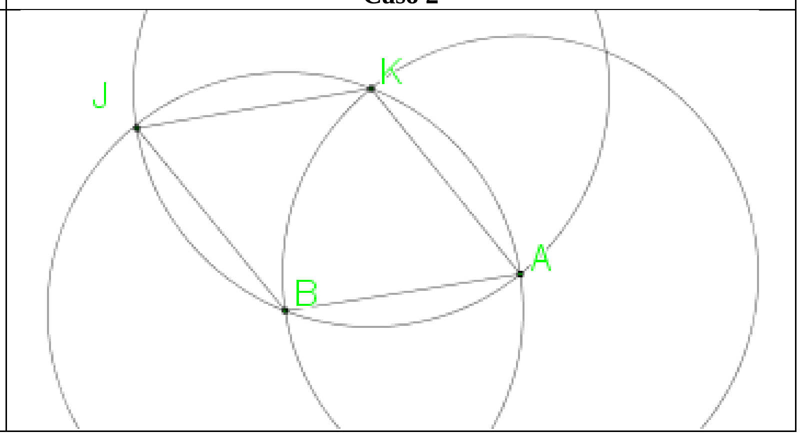
Dado un rectángulo entonces sus diagonales:

- Son congruentes.

- Se intersecan en sus puntos medios.

Tarea 7.3

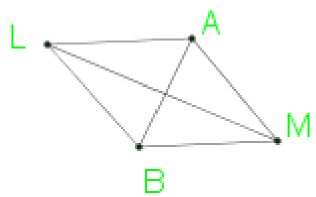
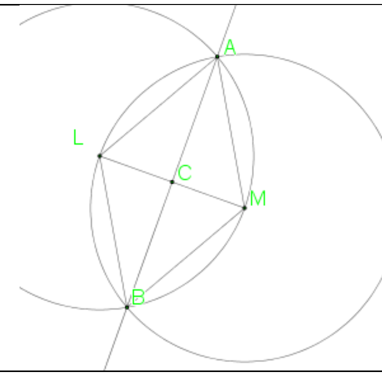
Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{JK}$ es uno de sus lados.

Caso 1	**Caso 2**
	

D. Rombo

Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes.

Construir un rectángulo, asumiendo que $\overline{LM}$ es una de sus diagonales:

Caso 1	Caso 2
	

En esta construcción si sucede el caso 1, la cual es netamente empírica, se preguntará a los estudiantes por qué el cuadrilátero construido es un rombo, generando en ellos que tengan en cuenta las características que debe tener un este. De acuerdo al caso 1 se daría comienzo a mirar que propiedades guardan las diagonales del rombo, especificando que son perpendiculares y cruzan por sus puntos medios, dando como posible solución a la tarea el caso 2. Se concluye la siguiente propiedad del cuadrado.

HG. Rombo – Diagonales

Dado un rombo entonces sus diagonales:

- Son perpendiculares.

- Se intersecan en sus puntos medios.

<table>
<tr><th colspan="2">Tareas No. 8</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Identificar la definición de trapecio y paralelogramo.
• Establecer la relación entre paralelas y ángulos alternos internos.</td></tr>
<tr><td>Contenidos
• Cuadrilátero
• Paralelismo
• Trapecio
• Paralelogramo
• Triángulo
• Triángulos congruentes
• Ángulo alternos internos</td><td>Sistema Teórico
• D. Cuadrilátero
• D. Rectas paralelas
• D. Trapecio
• D. Paralelogramo
• D. Triángulos congruentes
• HG. PAI</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos
• Regla
• Compás
• Lápiz</td></tr>
</table>

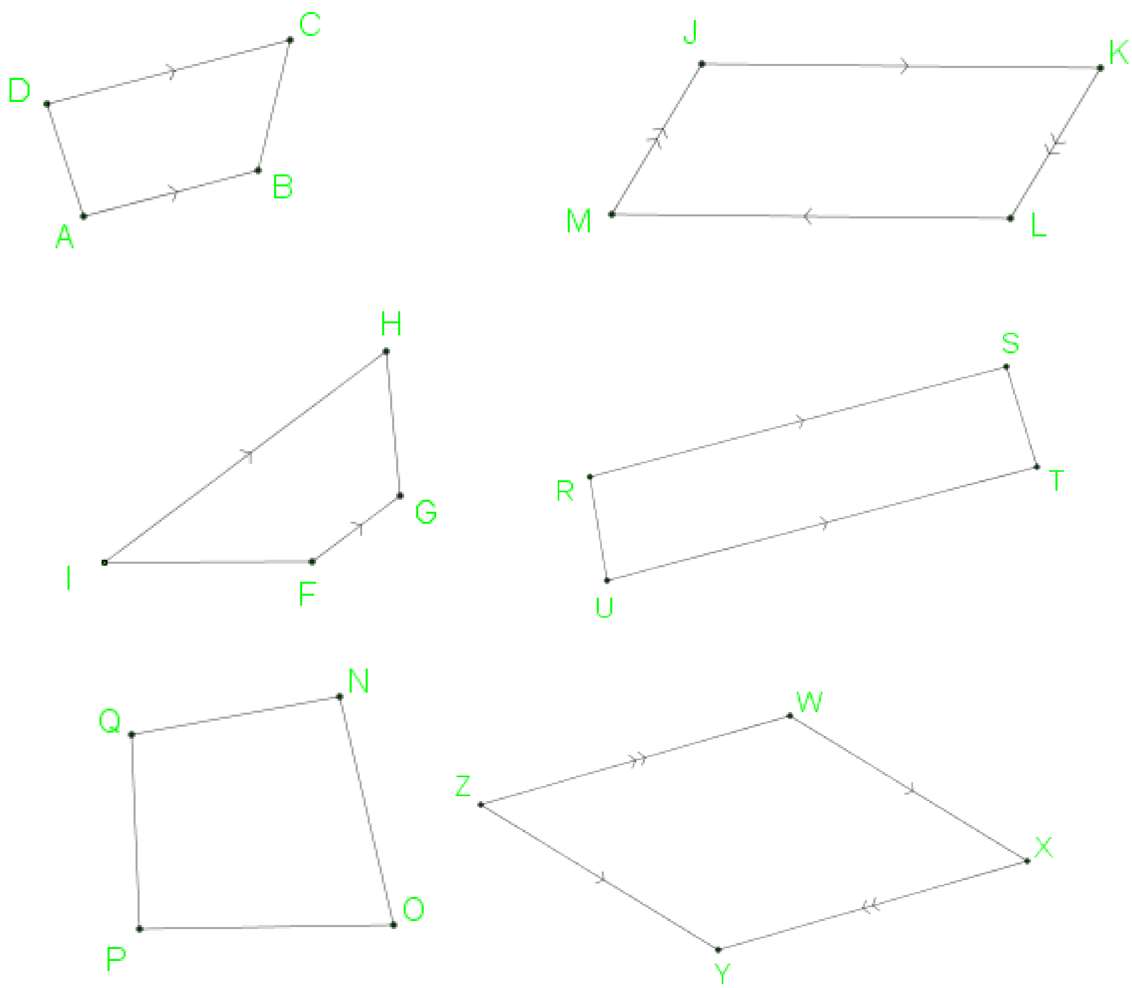
Tarea 8.1

La marquilla > sobre los lados de algunos cuadriláteros indican que dos pares de lados son paralelos, es decir que las rectas que los contienen no tienen puntos en común.

Escoger los cuadriláteros que son trapecios o paralelogramos de acuerdo a las siguientes afirmaciones:

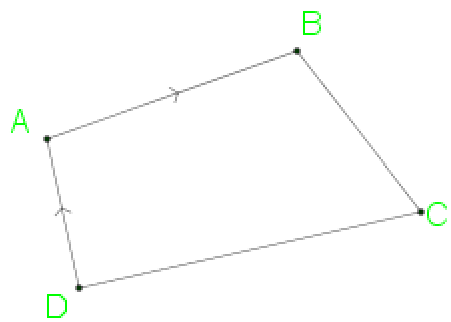
Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos.

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.



Explicar el porqué de los cuadriláteros escogidos como trapecio y de los cuadriláteros escogidos como paralelogramo.

¿El cuadrilátero $ABCD$ es trapecio o paralelogramo? Explicar la respuesta.



Tarea 8.2

Construir un triángulo cualquiera:

De acuerdo al anterior triángulo, construir un paralelogramo.

¿Qué se tuvo en cuenta para realizar el paralelogramo?

Métodos de solución

Saludo. Se da paso a recordar brevemente las conclusiones de la sesión pasada.

Tarea 8.1

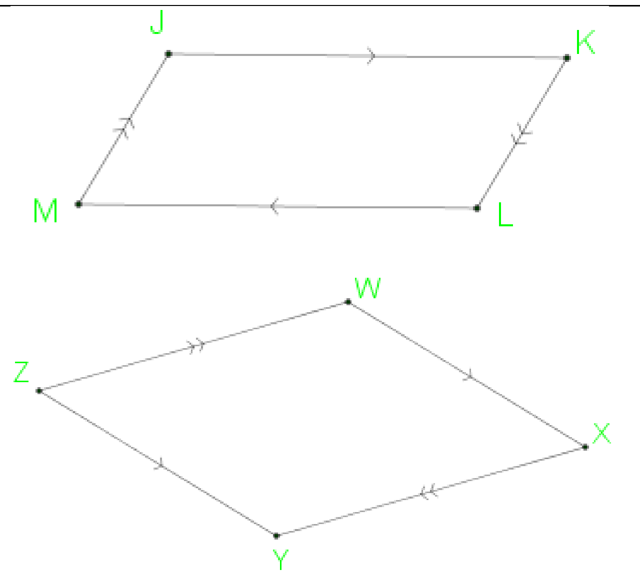
La marquilla > sobre los lados de algunos cuadriláteros indican que dos pares de lados son paralelos, es decir que las rectas que los contienen no tienen puntos en común.

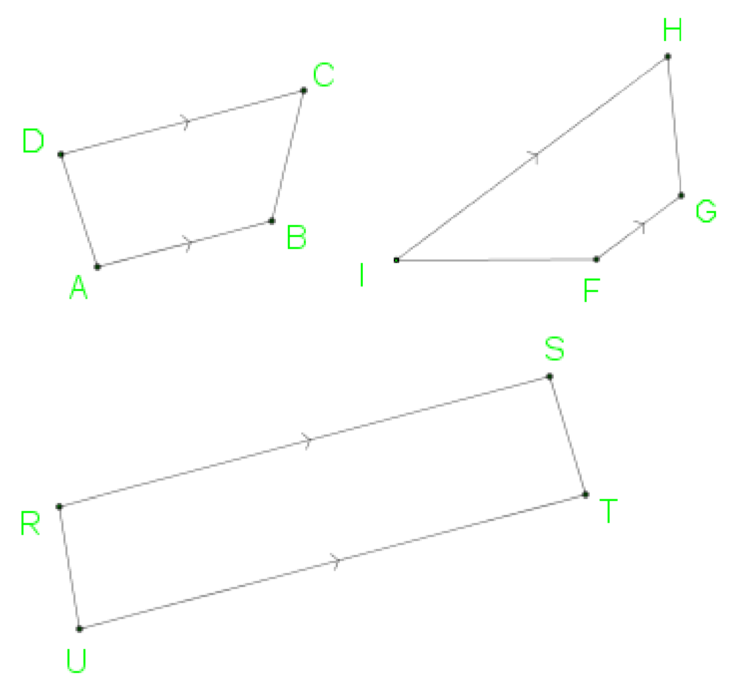
Escoger los cuadriláteros que son trapecios o paralelogramos de acuerdo a las siguientes afirmaciones:

Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos.

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

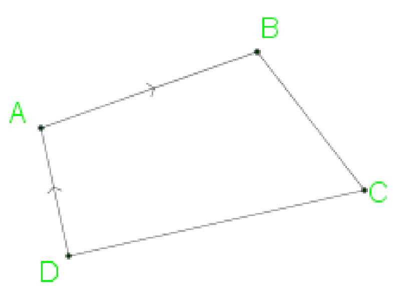
De acuerdo a la primera nota aclaratoria y a las anteriores dos afirmaciones, se dará paso a identificar qué hace que dichas afirmaciones se diferencien y de ahí, explicar que significa la palabra "exactamente" (dada en la primera afirmación). Luego los estudiantes solucionaran la respectiva tarea.

Paralelogramo		Explicar el porqué de los cuadriláteros escogidos. Escogí estos cuadriláteros de acuerdo a la afirmación ofrecida porque hay dos parejas con marquilla > diferente.

<table>
<tr>
<td>Trapecios</td>
<td>
</td>
<td>Explicar el porqué de los cuadriláteros escogidos.

Escogí estos cuadriláteros porque tienen solo un par de lados con la marquilla >, es decir paralelos. Tal como es el caso de $\overline{DC}$ con $\overline{AB}$, $\overline{IH}$ con $\overline{FG}$ y $\overline{RS}$ con $\overline{UT}$.</td>
</tr>
</table>

Si hay estudiantes que duden de la palabra “exactamente” de la afirmación del trapecio, se preguntará al grupo: ¿qué significa exactamente un par de lados paralelos?, para que los estudiantes tengan en cuenta que ‘exactamente un par’ hace alusión solo un par, por eso se descarta el $\boxdot\, NOPQ$ y el $\boxdot\, JKLM$. En el paralelogramo se busca que no haya problemas al entender que son dos pares de lados. Luego se dará paso a la última pregunta de la tarea:



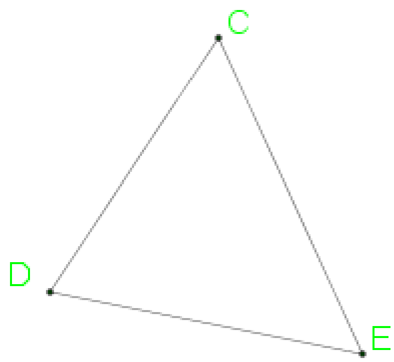
¿El cuadrilátero $ABCD$ es trapecio? Explicar la respuesta.
Caso 1:
Sí, porque tiene exactamente dos marquillas (>) por tanto solo hay un lado de lados paralelos.

Caso 2:
No, porque si se tiene en cuenta la información dada la inicio, dice que los lados no pueden tener puntos en común y $\overline{AB}$ *y* $\overline{AD}$*comparten el punto* A.

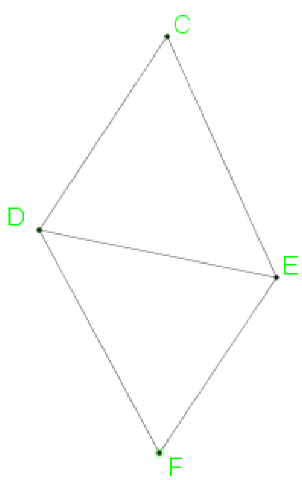
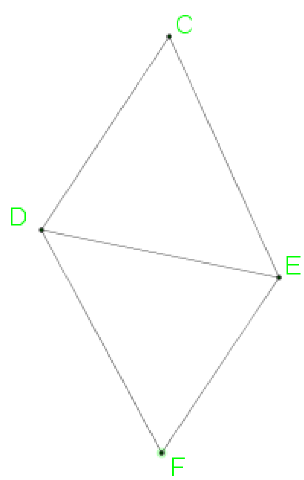
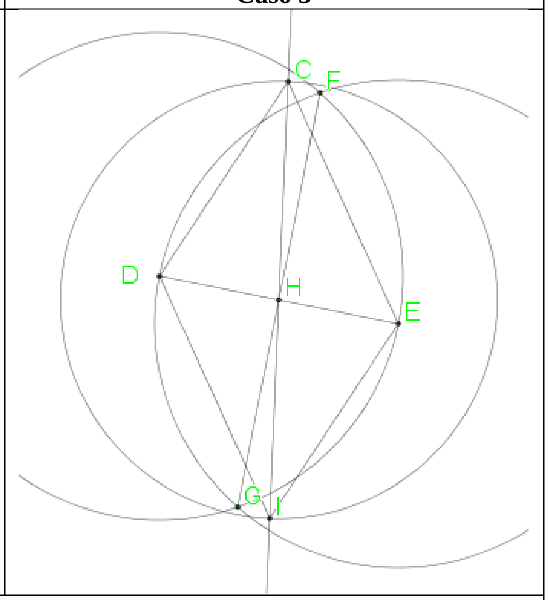
Si se llega a presenta el caso 1, se preguntará al grupo: ¿qué condiciones debe tener dos rectas que son paralelas además de la marquilla establecida (>)?, pretendiendo que los estudiantes revisen la nota dada al inicio de la tarea e identifiquen que la otra condición es no tener puntos en común, y como estos dos segmentos tienes el punto A en común se rompen las condiciones. Por tanto se concluye el caso 2 y se acuerda dicha descripción como la definición de trapecio.

Tarea 8.2

Construir un triángulo cualquiera:



De acuerdo al anterior triángulo, construir un paralelogramo.

<table>
<tr><th>Caso 1</th><th>Caso 2</th><th>Caso 3</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Qué se tuvo en cuenta para realizar el paralelogramo?</td></tr>
<tr><td>Doble la hoja por uno de los lados del triángulo inicial y calque sus lados.</td><td>Tracé los lados faltantes de tal forma que fueran paralelos a los segmentos CD y CE.</td><td>Construí el punto medio de uno de los lados del segmento. Luego tracé la recta que pasa por el punto medio y el punto opuesto a dicho lado. Construí una circunferencia, cuyo diámetro sea la diagonal del paralelogramo. Tracé los dos lados faltantes del paralelogramo.</td></tr>
</table>

Sin importar al método que empleen los estudiantes para completar el paralelogramo se procederá a preguntarle ¿qué relación tienen los dos triángulos que se forman?, haciendo alusión a que estos son congruentes. A partir de esto, se procederá a determinar las parejas de ángulos congruentes, haciendo énfasis en los ángulos alternos internos determinados por una de las diagonales del paralelogramo. Después se procederá a entablar la relación entre dichos ángulos y los lados paralelos de este cuadrilátero que los comprenden. Se dará paso a concluir el siguiente hecho geométrico:

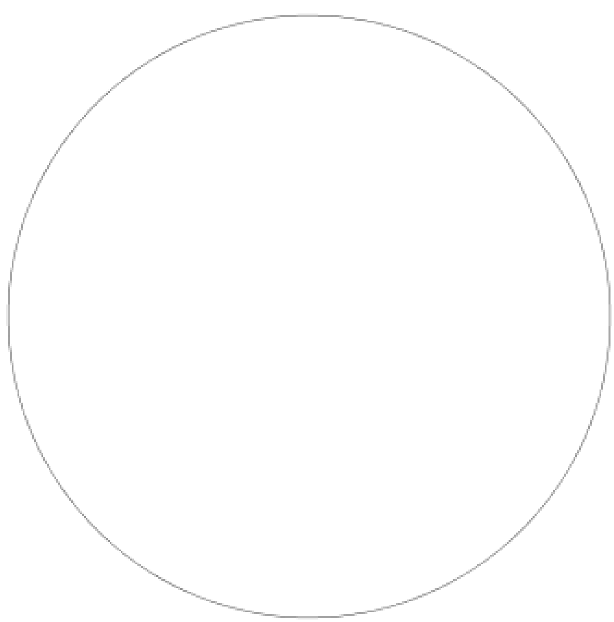
H. G. PAI

Si dos rectas (segmentos) son paralelas y existe una tercera recta transversal a las iniciales, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

<table>
<tr><th colspan="2">Tareas No. 9</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Construir el centro de una circunferencia.
• Determinar que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.</td></tr>
<tr><td>Contenidos
• Circunferencia
• Cuerda
• Mediatriz
• Semicircunferencia
• Ángulo recto</td><td>Sistema Teórico
• D. Circunferencia
• D. Cuerda
• D. Mediatriz
• HG. Mediatriz – Centro de circunferencia
• D. Semicircunferencia
• D. Ángulo recto
• HG. Semicircunferencia – Ángulo recto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos
• Regla
• Compás
• Lápiz
• Acetato</td></tr>
</table>

Tarea 9.1

Construir el centro de la siguiente la circunferencia.



Explicar cómo se construyó el centro de la circunferencia:

Tarea 9.2

Calcar el siguiente segmento en una hoja de acetato.

Construir un triángulo rectángulo de tal manera que el $\overline{BC}$ sea la hipotenusa de dicho triángulo.

En grupos de 6 personas superponer las hojas acetato, de tal forma que el$\overline{BC}$ coincida y el ángulo recto esté hacia un mismo lado de dicho segmento.

¿Qué objeto geométrico se forma?

Métodos de solución

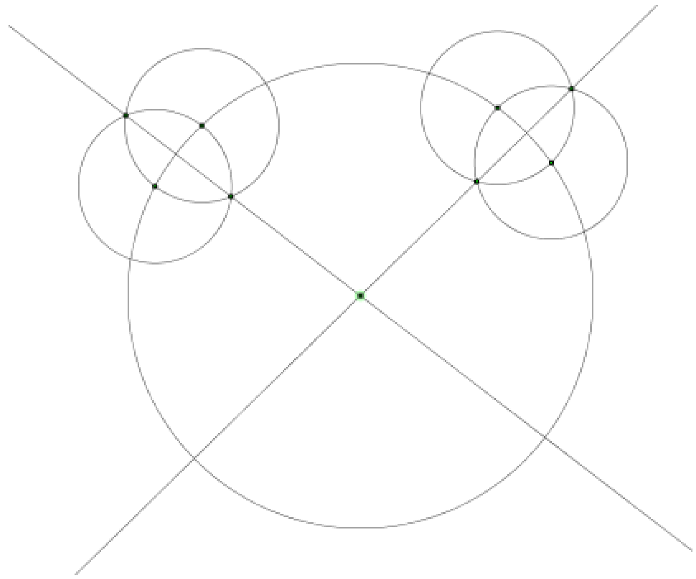
Saludo. Se da paso a recordar brevemente las conclusiones de la sesión pasada.

Tarea 9.1

Construir el centro de la siguiente la circunferencia.

Los estudiantes pueden generar dos tipos de respuestas.

1. Pueden intentar encontrar la medida de un supuesto diámetro de la circunferencia. Luego, trazan dos estos y la intersección es el centro de este objeto. Sin embargo, no hay garantías que la medida encontrada corresponda a un diámetro. De acuerdo a esta estrategia, se les preguntaría a los estudiantes si hay alguna construcción en la que se use regla y compás que pueda encontrar el centro de la circunferencia, dando paso a la segunda respuesta.
2. Construyen las mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son puntos de la circunferencia. La intersección de estas rectas en el centro de la circunferencia.



Explicar cómo se construyó el centro de la circunferencia:

*Construyendo cuatro circunferencias (*se podrían tres*), formando dos parejas de estas, tal que cada pareja tenga el mismo radio y sus centros permanezcan a la circunferencia opuesta. Cada pareja de circunferencias se interseca en dos puntos para trazar las rectas que los contiene. La intersección de las rectas genera el centro de la circunferencia.*

Esta construcción permite enunciar el siguiente hecho geométrico:

H. G. Mediatriz – Centro de circunferencia

Dadas las mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son puntos de la circunferencia entonces su intersección determina el centro de la circunferencia.

Tarea 9.2

Calcar el siguiente segmento en una hoja de acetato.

Construir un triángulo rectángulo de tal manera que el $\overline{BC}$ sea la hipotenusa de dicho triángulo.

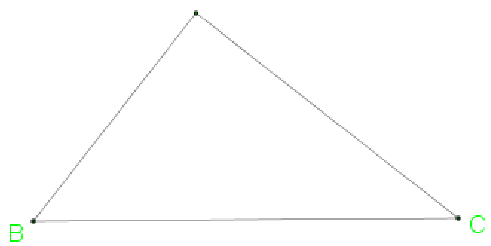
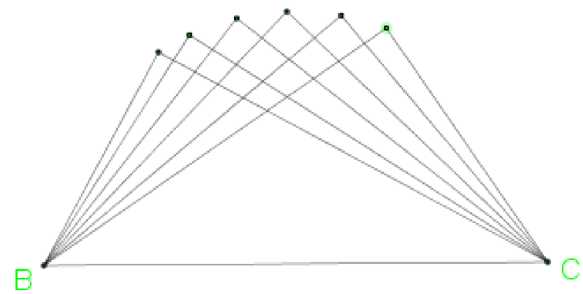
En grupos de 6 personas superponer las hojas acetato, de tal forma que el$\overline{BC}$ coincida y el ángulo recto esté hacia un mismo lado de dicho segmento.

¿Qué objeto geométrico se forma?

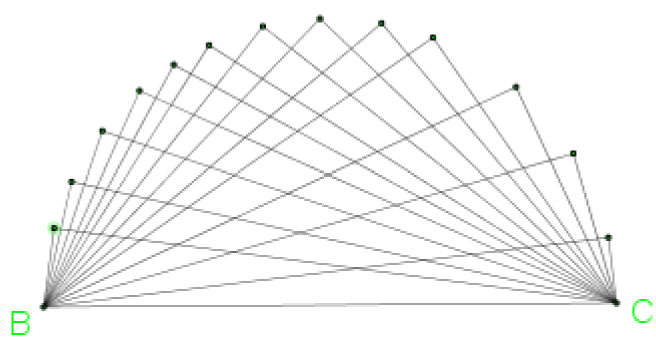
Se pueden presentar 3 respuestas a esta pregunta:

1	*Se forma un punto.*
2	*Se forma un arco de circunferencia*
3	*Se forma la mitad de una circunferencia*

En las respuestas 1 y 2 pueden suceder, si la gestión del profesor no es adecuada, que los estudiantes pueden construir el vértice del ángulo recto hacia una misma posición de la semicircunferencia que debe formarse.

Respuesta 1	**Respuesta 2**
	
Todos los triángulos rectágulos son el mismo.	Los vértices forman un arco de circunferencia pero no da la idea de una semicircunferencia.

Si sucede alguna de estas respuesta de invita a cada grupo de estudiantes a construir más triángulos rectángulos que cumplan la condición inicial, para que así se llegue a la respuesta 3.



Esta construcción colectiva con los estudiantes del curso, permite incluir los siguientes elementos al sistema teórico:

D. Semicircunferencia

Dada una circunferencia y uno de sus diámetros. Una semicircunferencia son los puntos que están en un mismo semiplano determinado por el diámetro.

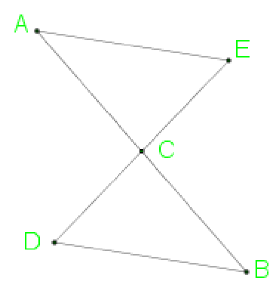
H. G. Semicircunferencia – Ángulo recto

Dada una semicircunferencia, si un ángulo está inscrito en ella entonces el ángulo es recto.

Tarea No. 10	
Objetivos • Argumentar la solución de problemas, usando el sistema teórico construido.	
Contenidos • Segmentos congruentes • Ángulos congruentes • Cuadrilátero • Diagonal • Punto medio • Congruencia de triángulos • Criterios de congruencia • Rectas paralelas • Circunferencia • Semicircunferencia • Ángulo recto • Rectángulo	**Sistema Teórico** • D. Segmentos congruentes • D. Ángulos congruentes • D. Cuadrilátero • D. Diagonal • D. Punto medio • D. Congruencia de triángulos • C. LLL • C. LAL • D. Rectas paralelas • HG. PAI • D. Circunferencia • HG. Radios congruentes • D. Semicircunferencia • HG. Semicircunferencia – Ángulo recto • D. Rectángulo
Recursos • Regla • Lápiz	

Tarea 10.1

Dada la siguiente figura y se sabe que:

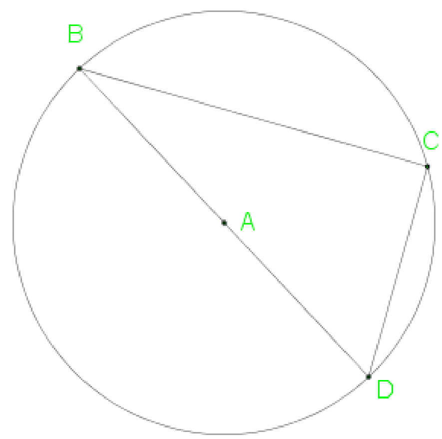


- $\overline{AE}$ es paralelo con $\overline{DB}$.
- $\overline{AE}$ es congruente con $\overline{DB}$

¿ C es el punto medio de $\overline{DE}$ y $\overline{BA}$? ¿Por qué?

Tarea 10.2

Observe la siguiente figura:



- $\overline{BD}$ es un diámetro de la circunferencia con centro en A y radio AB.
- El $\angle BCD$ está inscrito en la semicircunferencia, como se observa.

Ubicar un punto E en la otra semicircunferencia determinada por $\overline{BD}$, tal que el cuadrilátero $BCDE$ sea un rectángulo.

¿Por qué el cuadrilátero $BCDE$ es un rectángulo?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

Métodos de solución

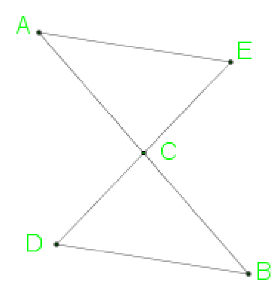
Saludo. Se da paso a recordar brevemente las conclusiones de la sesión pasada.

<u>Tarea 10.1</u>

Dada la siguiente figura y se sabe que:

- $\overline{AE}$ es paralelo con $\overline{DB}$.
- $\overline{AE}$ es congruente con $\overline{DB}$

¿ C es el punto medio de $\overline{DE}$ y $\overline{BA}$? ¿Por qué?



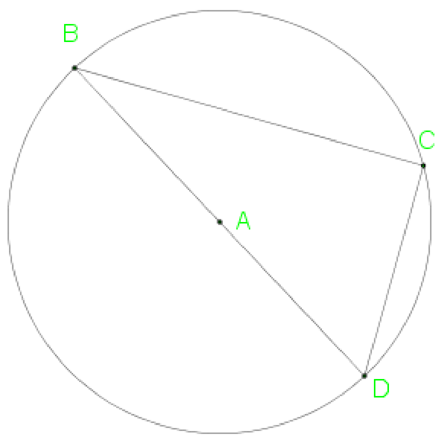
En este problema se pueden presentar tres respuestas. Estas son:

Respuesta 1	*Sí porque visualmente se observa que así.*
Respuesta 2	*Sí porque medí los lados solicitados y tienen la misma medida.*
Respuesta 3	*Sí porque los triángulos ACE y BCD son congruentes, puesto que los segmentos AE y DB son congruentes porque ya es dado. Los ángulos CAE y CBD son congruentes, ya que son ángulos alternos internos al igual que los ángulos AEC y CDB.*

Si se presentan las respuestas 1 o 2 se les pedirá a los estudiantes que usen los elementos que componen el sistema teórico construido hasta la fecha y dando preguntas pista como ¿esos dos triángulos tendrán alguna relación?, ¿se puede decir algo a partir de esos dos triángulos? Con este tipo de pregunta se pretende que los estudiantes puedan determinar que los triángulos son congruentes, tal como se concluye en la respuesta 3, y por tanto el punto C si es punto medio de los segmentos DE y BA.

<u>Tarea 10.2</u>

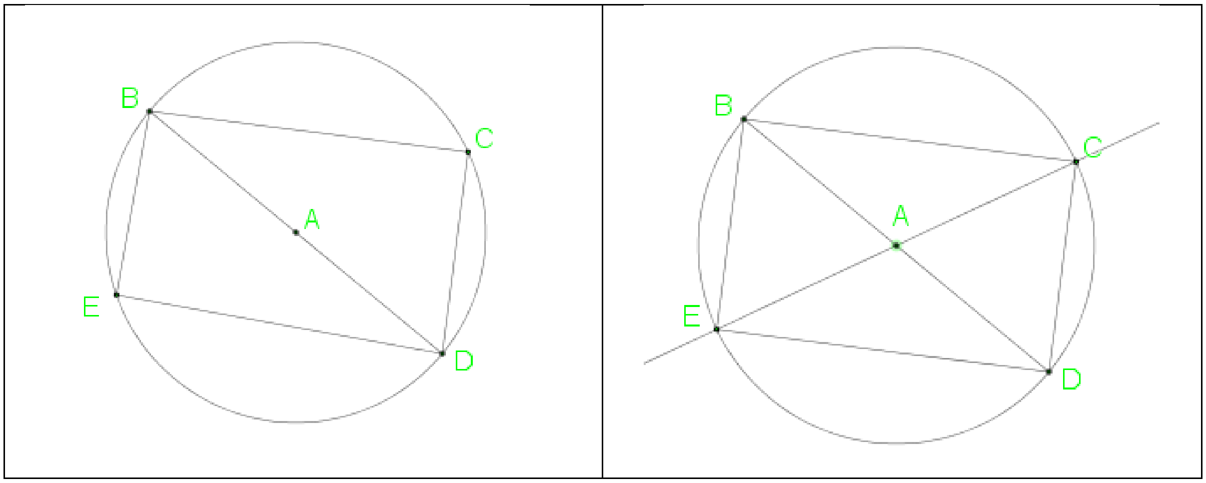
Observe la siguiente figura:



- $\overline{BD}$ es un diámetro de la circunferencia con centro en A y radio AB.
- El $\angle BCD$ está inscrito en la semicircunferencia, como se observa.
- Ubicar un punto E en la otra semicircunferencia determinada por $\overline{BD}$, tal que el cuadrilátero $BCDE$ sea un rectángulo.

Los estudiantes pueden construir el punto E de dos maneras posibles:

Construcción 1	**Construcción 2**
Ubicar el punto E tal que visualmente parezca ser el cuarto vértice del rectángulo (construcción blanda).	Construir una recta que pase por los puntos A y C. La intersección entre la circunferencia y la recta sería el punto E.



De acuerdo a la construcción que el estudiante realice se puede tener dos posibles respuestas a la siguiente pregunta:

¿Por qué el cuadrilátero $BCDE$ es un rectángulo?

Respuesta 1	*Porque se ve que es un rectángulo, por su forma.*
Respuesta 2	*Porque los ángulos BCD y BED están inscritos en las semicircunferencia determinadas por el diámetro BD. Lo mismo sucede con los ángulos EBC y EDC, entonces los cuatro ángulos son rectos, formando un rectángulo.*

De acuerdo a estas respuestas, se socializará con todos los estudiantes para que concluyan que aunque una propiedad a simple vista pueda que sea cierta no necesariamente debe ser así. En cambio, al generar construcciones robustas se permite que estas sean justificadas por el sistema teórico construido.

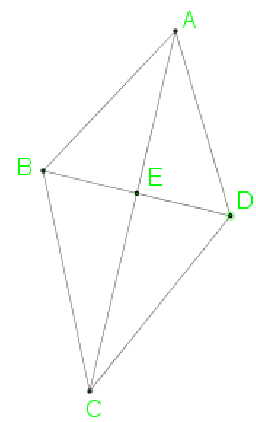
Tareas No, 11	
Objetivos • Argumentar la solución de problemas, usando el sistema teórico construido.	
Contenidos • Segmentos congruentes • Ángulos congruentes • Cuadrilátero • Diagonal • Punto medio • Congruencia de triángulos • Criterios de congruencia • Triángulo Isósceles • Circunferencia • Arco de circunferencia • Mediatriz	**Sistema Teórico** • D. Segmentos congruentes • D. Ángulos congruentes • D. Cuadrilátero • D. Diagonal • D. Punto medio • D. Congruencia de triángulos • C. LLL • C. LAL • D. Triángulo Isósceles • HG. Triángulo Isósceles - Ángulos • D. Circunferencia • D. Arco de circunferencia • D. Mediatriz • HG. Mediatriz

Recursos

- Regla
- Lápiz

<u>Tarea 11.1</u>

El cuadrilátero ABCD y sus dos diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen las siguientes características:

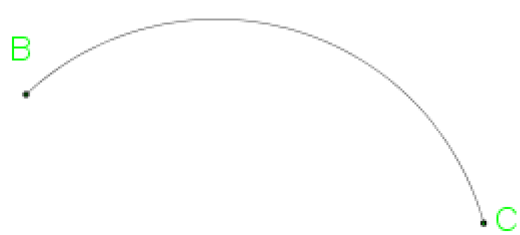


- $AB = AD$.
- $CB = CD$.
- La intersección entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es el punto E.
- E punto medio de $\overline{BD}$.

¿El cuadrilátero ABCD es un rombo?

<u>Tarea 11.2</u>

La siguiente figura muestra un arco de circunferencia:



Encontrar el centro de la circunferencia que comprende el anterior arco.

¿Por qué el punto encontrado es el centro de la circunferencia?

____

____

____

____

____

____

____

____

Métodos de solución

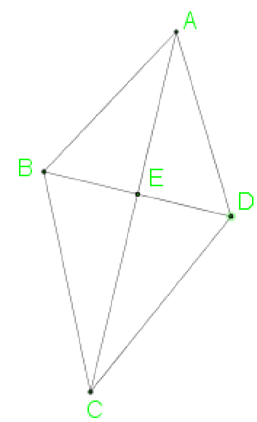
Saludo. Se da paso a recordar brevemente las conclusiones de la sesión pasada.

Tarea 11.1

El cuadrilátero ABCD y sus dos diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen las siguientes características:

- $AB = AD$.
- $CB = CD$.
- La intersección entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es el punto E.
- E punto medio de $\overline{BD}$.

¿El cuadrilátero ABCD es un rombo?



En este problema se pueden presentar tres respuestas. Estas son:

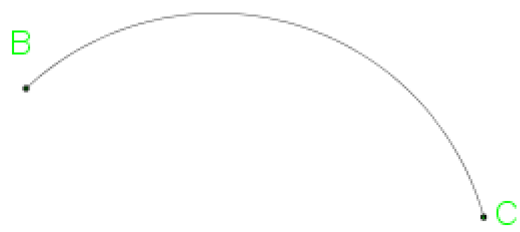
Respuesta 1	*Sí porque visualmente se observa que así.*
Respuesta 2	*No porque medí los lados solicitados y tienen diferente medida.*
Respuesta 3	*No porque aunque los triángulos EBC y EDC son congruentes y asimismo, los triángulos EBA y EDA son congruentes no se puede asegurar que algún triángulo de la primera pareja sea congruente con algún triángulo de la segunda pareja, puesto que no se cumple ningún criterio de congruencia de triángulos.*

Si se presentan las respuestas 1 o 2 se pedirá a los estudiantes que usen los elementos que componen el sistema teórico construido hasta la fecha y dando preguntas pista como ¿esos dos triángulos tendrán alguna relación, por ejemplo los triángulos EBC y EBA?, ¿se puede decir algo a partir de esos dos triángulos? Con este tipo de pregunta se pretende que los estudiantes puedan determinar que los triángulos no son congruentes, porque no pueden verificar ningún criterio de congruencia entre triángulos, por tanto el cuadrilátero *ABCD* no puede ser considerado un rombo.

.

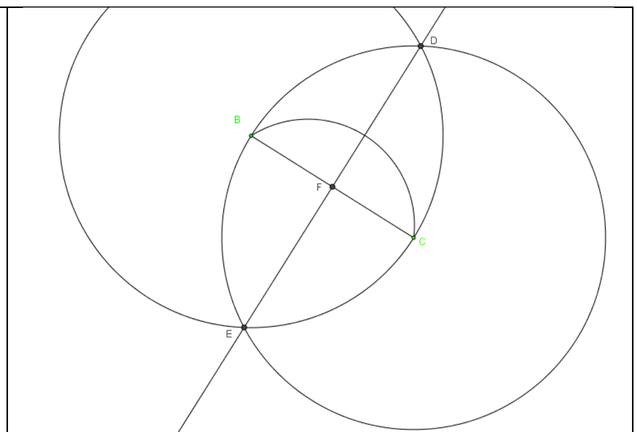
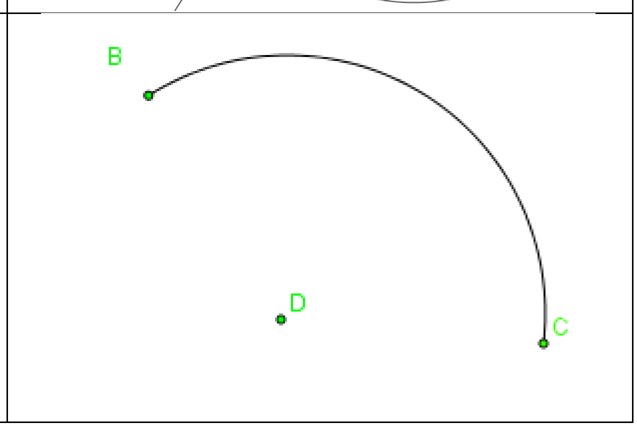
<u>Tarea 11.2</u>

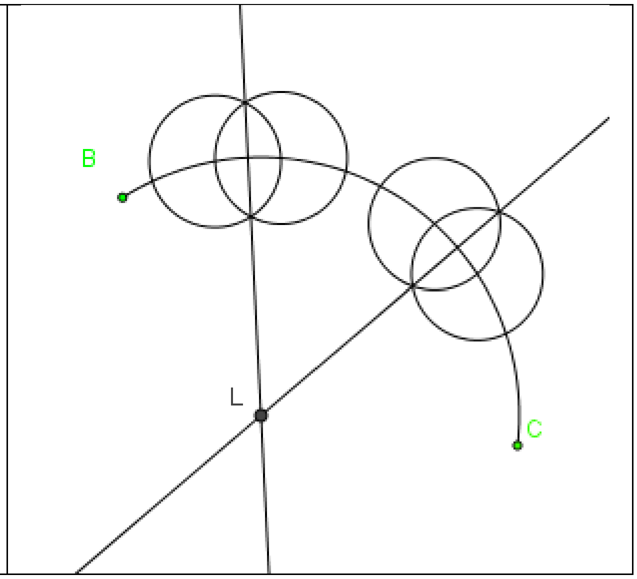
La siguiente figura muestra un arco de circunferencia:



Encontrar el centro de la circunferencia que comprende el anterior arco.

Ante este problema se pueden presentar tres construcciones principalmente:

Construcción 1	
Construcción 2	

Construcción 3	

¿Por qué el punto encontrado es el centro de la circunferencia?

De acuerdo a las anteriores construcciones se podría presentar las siguientes respuestas a eta pregunta.

Respuesta 1	*Este punto es el centro de la circunferencia porque se generó a partir de la intersección de dos rectas.*
Respuesta 2	*Este punto es el centro de la circunferencia porque con una regla o un trozo de papel medí que la distancia del centro fuera la misma hasta los puntos del arco.*
Respuesta 3	*Este punto es el centro de la circunferencia porque realicé la misma construcción que se hizo para encontrar el centro de la circunferencia, cuando la teníamos completa.*

Luego de estas construcciones y respuestas, se pasará a la socialización para que los estudiantes observen que las dos primeras construcciones no son válidas porque dichos puntos llamados centros no permiten completar la circunferencia. En cambio, al copear la construcción para hallar el centro de una circunferencia, trazar dos mediatrices, se logra el objetivo.

Anexo 3. Libretos de las tareas incluidas en la entrevista.

Tarea 2 (Alfa, 1.2) Mediatriz

Construya la mediatriz de un segmento (Figura 1).

Figura 1. Tarea 2, nivel α

Los estudiantes pueden construir (caso 1) una recta que visualmente cumpla, aparentemente, las condiciones de la recta solicitada. Es decir, que dicha recta sea perpendicular al segmento, esto es considerado por los estudiantes como una recta vertical dado la posición original del segmento (horizontal); y que pase por el punto medio del segmento, considerado posiblemente por los estudiantes como la mitad (Figura 2). Sin embargo, esta construcción no es robusta y basta con mover un punto para probarlo.

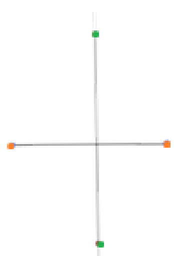


Figura 2. Caso 1 de la tarea 2 (α)

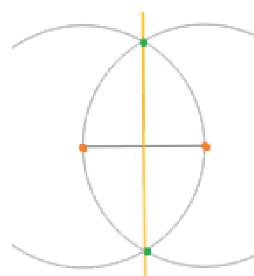
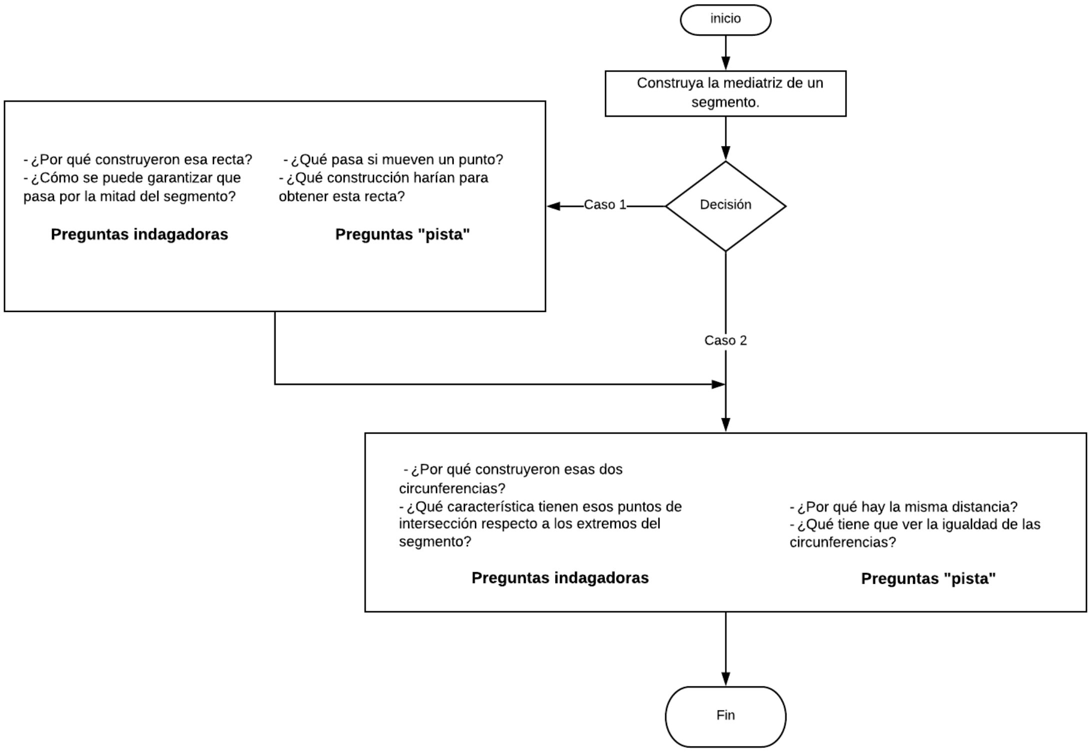


Figura 3. Caso 2 de la tarea 2 (α)

Luego, las preguntas de la entrevistadora estarían ligadas en conocer por qué la anterior construcción no es válida por pate de los estudiantes; los cuales reconocen la necesidad de replicar la construcción (caso 2) de un triángulo equilátero, ya que el punto que se genera de la intersección de las dos) y Euclidea valida la construcción.

circunferencias (tercer vértice del triángulo) equidista de los dos extremos del segmento dado. Además, pueden generar otro punto de intersección entre las circunferencias, construyendo la recta que pasa por ambos puntos (Figura 3. Caso 2 de la tarea 2 ($\boldsymbol{\alpha}$)

A continuación se presenta el diagrama de flujo que relaciona los anteriores casos y las preguntas previstas para cada uno de estos:



Tarea 3 (Alfa, 1.3) Punto medio

Construir el punto medio del segmento dado dos puntos (Figura 4).

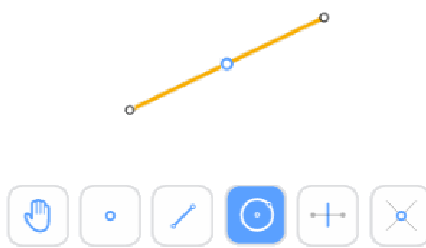


Figura 4. Tarea 3, nivel α

Inicialmente, los estudiantes pueden construir un punto que visualmente cumpla, aparentemente, las condiciones solicitadas (caso 1); es decir, que esté entre los dos puntos dados, exactamente en la mitad (Figura 5). Sin embargo, al mover el punto se puede observar que este se mueve libremente por la pantalla.

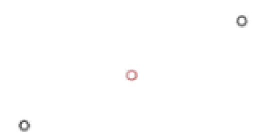


Figura 5. Caso 1 de la tarea 3 (α)

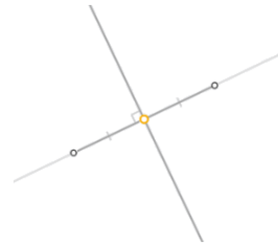
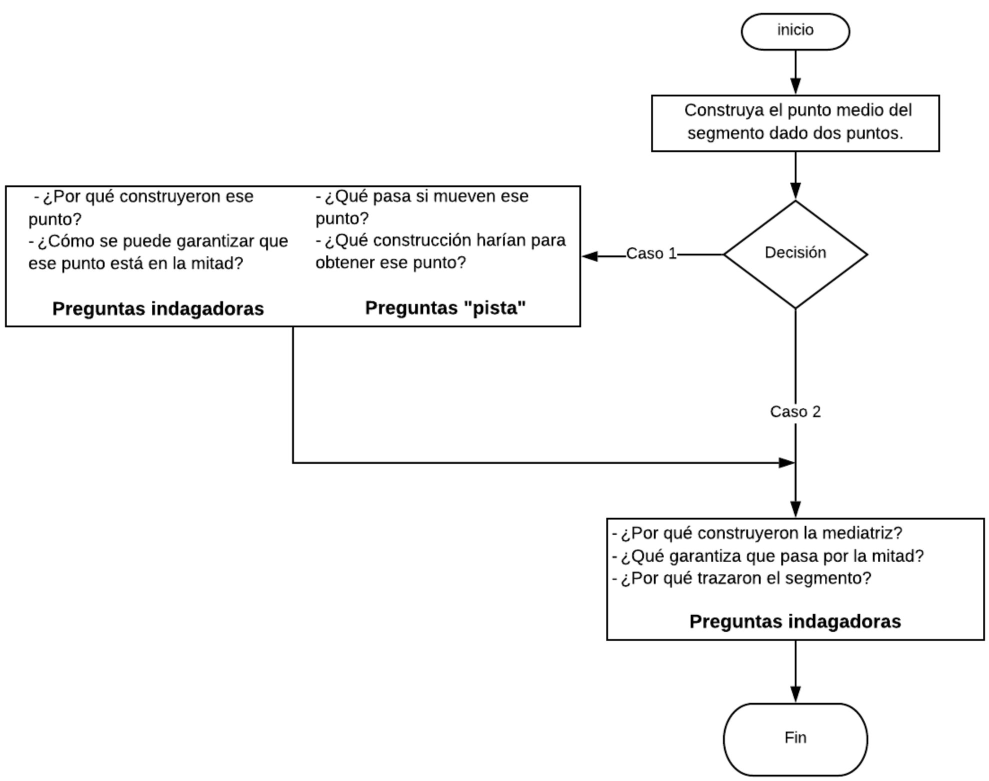


Figura 6. Caso 2 de la tarea 3 (α)

Teniendo en cuenta que Euclidea no válido la construcción, se pasaría a preguntar a los estudiantes por qué creen que no se puso en color amarillo el punto solicitado; dando paso a que ellos reconozcan la necesidad de usar la mediatriz (caso 2), ya que como lo observaron en la tarea anterior, la mediatriz pasa por el punto medio de un segmento. A partir de esto, los estudiantes comprenden que necesitan construir la recta que contiene al segmento comprendido por los puntos dados, puesto que este es necesario para obtener el punto de intersección con la mediatriz (Figura 6).

Dados estos dos casos, se presenta la relación entre ellos y los posibles caminos de exploración que pueden realizar los estudiantes al solucionar esta tarea:



Tarea 4 (Alfa, 1.4) Circunferencia inscrita en un cuadrado

Inscribir una circunferencia en un cuadrado (Figura 7).

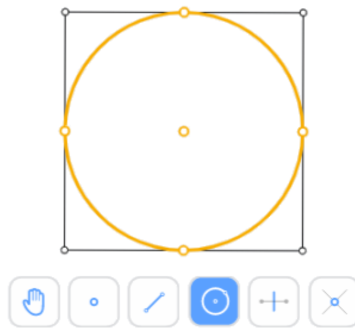


Figura 7. Tarea 4, nivel α

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir las diagonales del cuadrado para obtener el centro de la circunferencia, luego pasan a construir una circunferencia con centro en dicho punto hasta uno de los vértices del cuadrado. Ellos observan que la construcción ha quedado al contrario; es decir, el cuadrado está inscrito en la circunferencia (Figura 8).

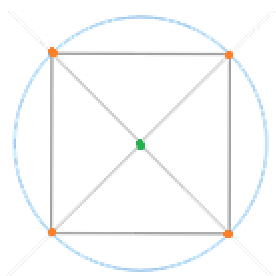


Figura 8. Caso 1 de la tarea 4 (α)

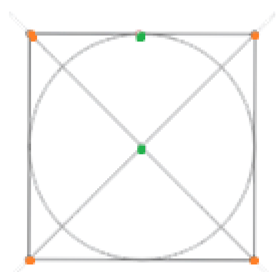


Figura 9. Caso 2 de la tarea 4 (α)

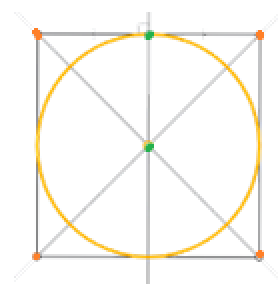
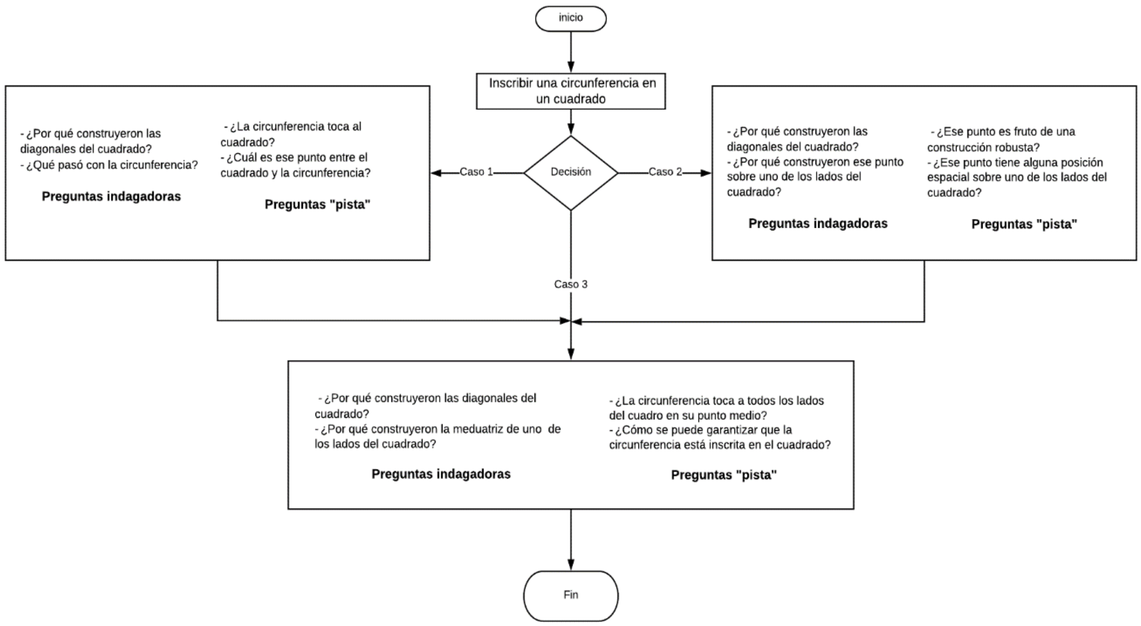


Figura 10. Caso 3 de la tarea 4 (α)

Al observar lo sucedido la entrevistadora procede a realizar preguntas que encaminen a los estudiantes a explicar el fallo en la construcción anterior; para que ellos deduzcan la necesidad de encontrar un punto sobre uno de los lados del cuadrado. De acuerdo a lo anterior, los estudiantes pueden seleccionar un punto sobre uno de los segmentos (caso 2) que pareciera ser la posición en que se interseca este con la circunferencia (Figura 9).

Sin embargo, Euclidea no valida esta construcción. Se da paso a preguntar a los estudiantes por qué la construcción no es aceptada y qué podrían hacer para solucionar la falla. Ante esto, los estudiantes pueden identificar que el punto que necesitan sobre uno de los segmentos del cuadrado es precisamente su punto medio y de ahí proceder a construirlo (caso 3) con ayuda de la mediatriz de cualquiera de los segmentos, tal como se observó en la tarea anterior (Figura 10).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 5 (Alfa, 1.5) Rombo en rectángulo

Inscribir un rombo en el rectángulo, tal que compartan una diagonal (Figura 11).

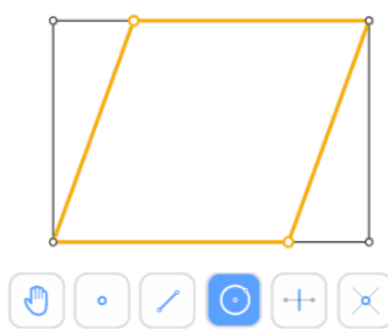
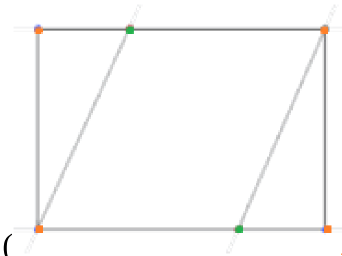


Figura 11. Tarea 5, nivel α

Para empezar, los estudiantes pueden realizar una construcción blanda (caso 1) al construir las rectas que contienen a los segmentos del rombo de manera que la construcción elaborada se asemeje a la construcción solicitada. En este caso, Euclidea no valida la construcción ( Figura 12).

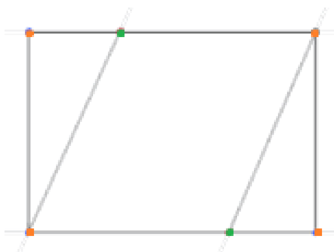


Figura 12. Caso 1 de la tarea 5 (α)

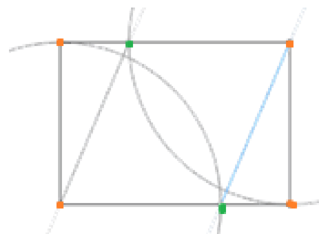


Figura 13. Caso 2 de la tarea 5 (α)

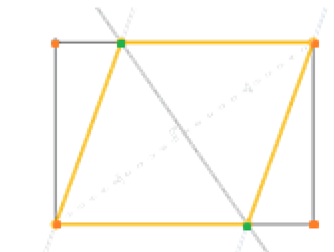
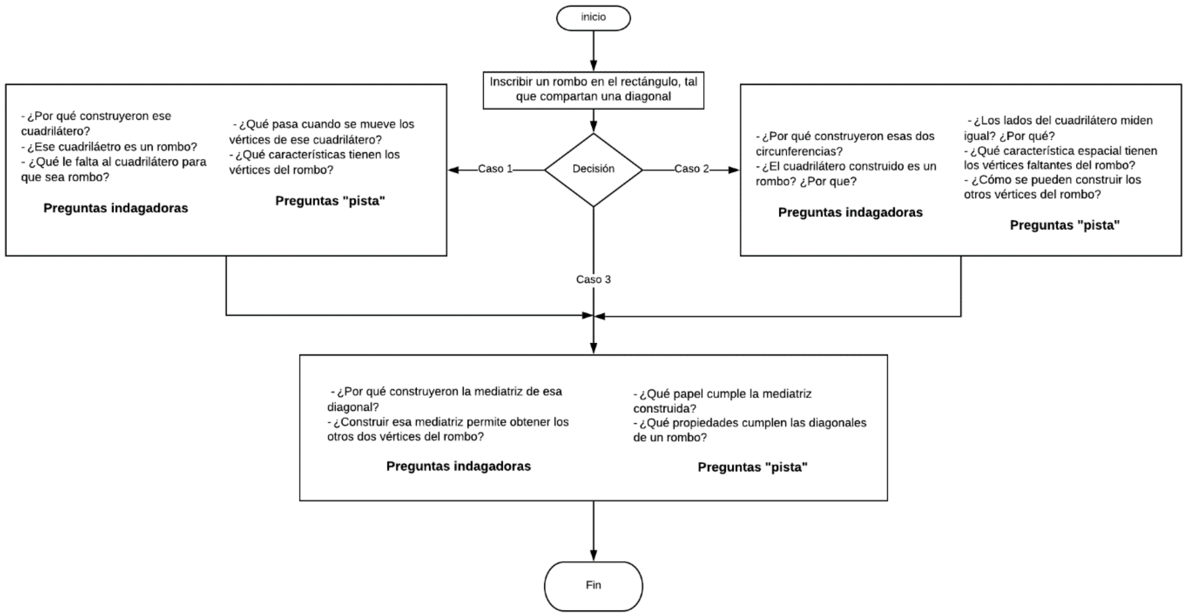


Figura 14. Caso 3 de la tarea 5 (α)

Al no ser robusta la anterior construcción, la entrevistadora pregunta a los estudiantes por qué creen que no es válida, promoviendo que ellos identifiquen las características que deben tener los otros dos vértices del rombo (puntos verdes). Para esto, los estudiantes pueden construir dos circunferencias (caso 2), cada una con centro en uno de los vértices del rectángulo (vértices opuestos) y radio igual al lado "más corto" del rectángulo; luego la intersección entre las circunferencias y los lados "más largos" serán los vértices faltantes del rombo, trazando sus respetivos lados (Figura 13).

Aunque los vértices fueron construidos de manera robusta Euclidea no válida la construcción, llevando a que la entrevistadora pregunte a los estudiantes por qué creen que el cuadrilátero construido no es un rombo, logrando que ellos observen que los lados de dicho cuadrilátero no son congruentes. Luego, los estudiantes pueden recordar la posición en "cruz" que tienen las diagonales de un rombo (caso 3) y tener en cuenta que una de estas concuerda con una diagonal del rectángulo; entonces, se puede construir la mediatriz de la diagonal en común y la intersección de esta recta con dos lados del rectángulo corresponderá a los dos vértices faltantes del rombo (Figura 14).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 6 (Alfa 1.6) Centro de una circunferencia

Construir el centro de una circunferencia (Figura 15).

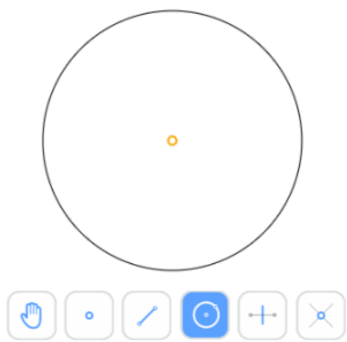


Figura 15. Tarea 6, nivel α

Inicialmente los estudiantes pueden colocar un punto (caso 1) que se asemeje al centro de la circunferencia, sin embargo al no ser una construcción robusta Euclidea no da el visto bueno de esta (Figura 16).

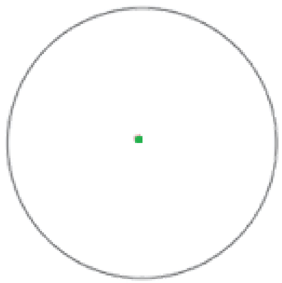


Figura 16. Caso 1 de la tarea 6 (α)

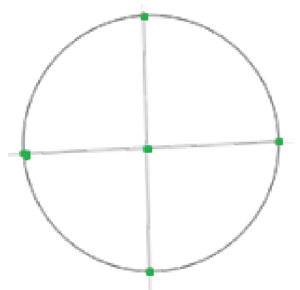


Figura 17. Caso 2 de la tarea 6 (α)

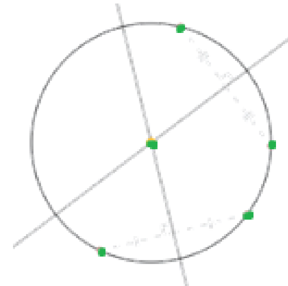
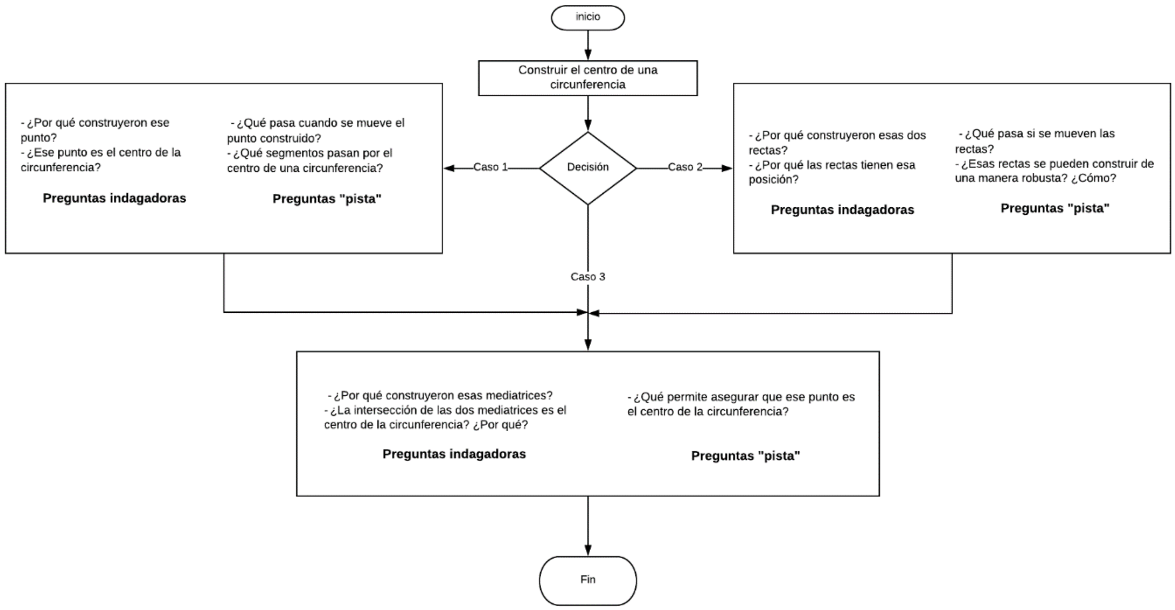


Figura 18. Caso 3 de la tarea 6 (α)

Luego de la anterior construcción, la entrevistadora pregunta a los estudiantes por qué creen que ese punto no es el centro de la circunferencia, logrando que ellos observen que el punto se mueve libremente, incluso en el exterior de la circunferencia. Con base a esto, los estudiantes identifican la necesidad de que el punto (centro) sea la intersección de dos objetos geométricos; es decir una construcción robusta. Para esto (caso 2) puede suceder que los estudiantes construyan dos rectas sobre la circunferencia, tal que estas contengan a los segmentos que visualmente parezcan diámetros y su intersección sea el centro de la circunferencia (Figura 17).

A pesar de que el punto procede de la intersección de los dos supuestos diámetros no se puede garantizar que sea el centro de la circunferencia, pasando a preguntarle a los estudiantes el por qué sucede esto. Luego, los estudiantes pueden buscar elementos geométricos que le permitan construir verdaderamente diámetros (caso 3), usando para esto las mediatrices de dos cuerdas cualesquiera de la circunferencia, cuya intersección es el centro de la circunferencia (Figura 18).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 7 (Alfa 1.7) Cuadrado inscrito

Inscribir un cuadrado en la circunferencia, tal que uno de sus vértices sea el punto dado (Figura 19).

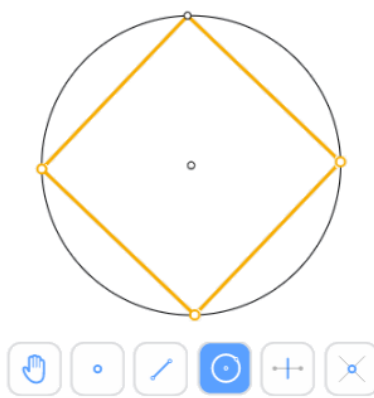


Figura 19. Tarea 7, nivel α

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden trazar dos rectas que pasen por el centro de la circunferencia, teniendo en cuenta que estas deben forman una “cruz”, ya que contienen a las diagonales del cuadrado solicitado. La intersección de estas rectas con la circunferencia generan los vértices (puntos verdes) del cuadrado a construir (Figura 20).

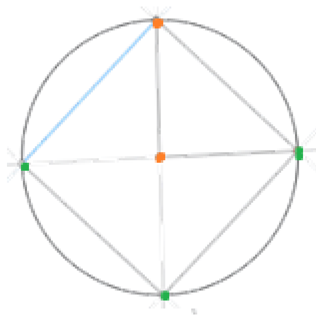


Figura 20. Caso 1 de la tarea 7 (α)

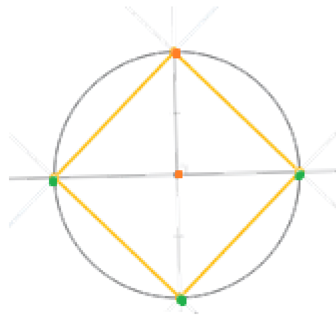
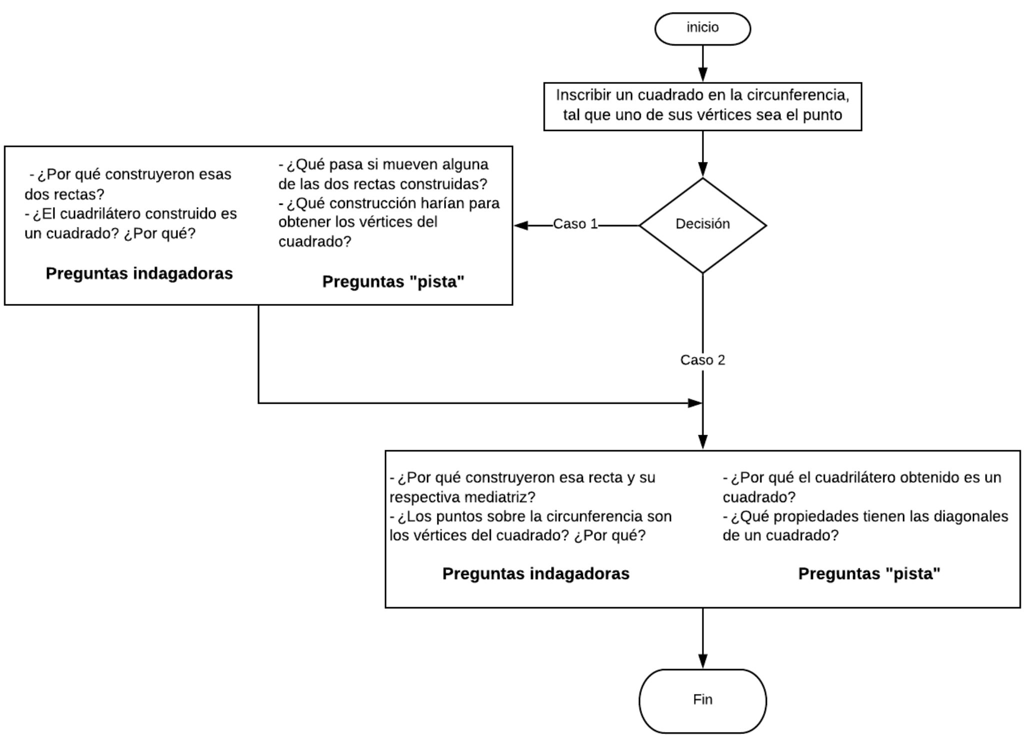


Figura 21. Caso 2 de la tarea 7 (α)

Aunque la construcción anterior es robusta, la entrevistadora procede a preguntar a los estudiantes por qué Euclidea no la valida, dando como resultado que no se puede garantizar que los vértices estén en una posición fija. A partir de esto (caso 2), ellos pueden construir una recta que pase por el vértice dado y el centro de la circunferencia, luego construir la mediatriz del diámetro contenido en dicha recta, ya que las diagonales de un cuadrado forman una "cruz". Los puntos de intersección (puntos verdes) entre la circunferencia y las dos rectas son los vértices del cuadrado (Figura 21).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 8 (Beta 2.1) Bisectriz de un ángulo

Construir la recta que biseca al ángulo dado (Figura 22).

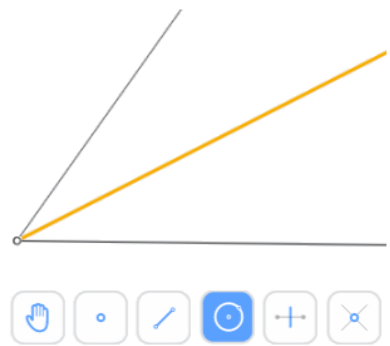


Figura 22. Tarea 1, nivel β

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir una recta que simule pasar por la mitad del ángulo dado (Figura 23); pero la recta no es fruto de una construcción robusta implicando que esta se pueda mover incluso por fuera del ángulo.

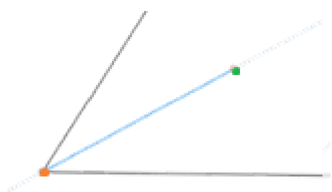


Figura 23. Caso 1 de la tarea 1(β)

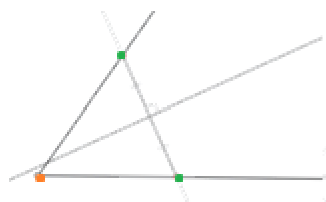


Figura 24. Caso 2 de la tarea 1 (β)

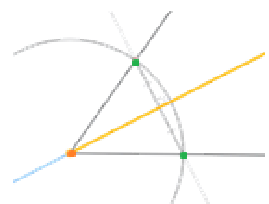
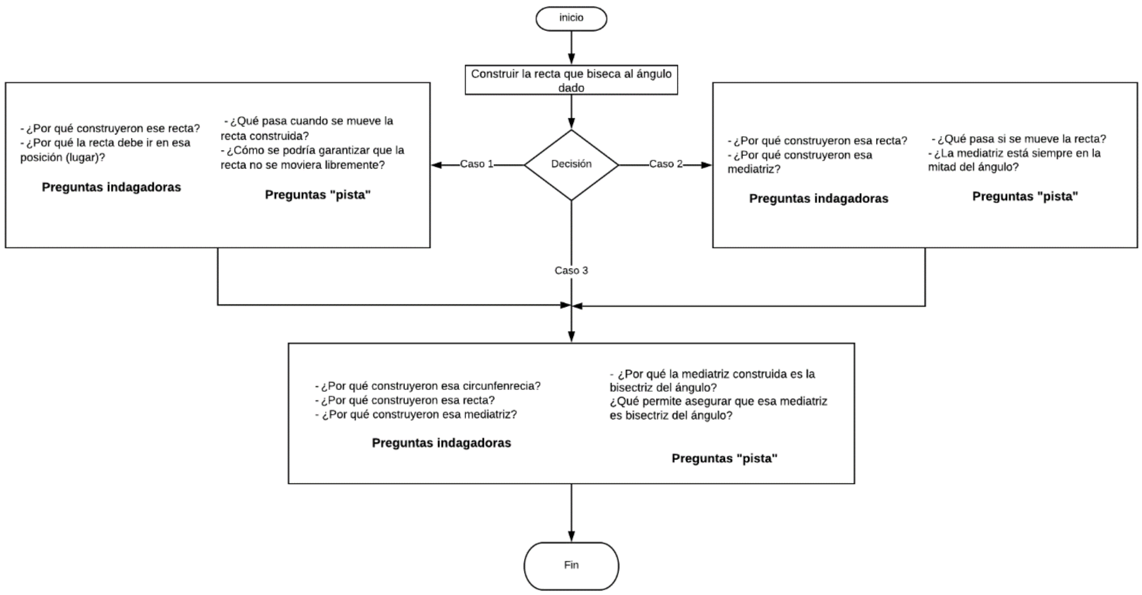


Figura 25. Caso 3 de la tarea 1 (β)

Ante esta construcción se pregunta a los estudiantes por qué sucede esto, determinando que la construcción no es robusta. Luego (caso 2), ellos pueden construir una recta que interseque a los lados del ángulo dado, pasando a construir la mediatriz del segmento que se encuentra entre los lados de dicho ángulo (Figura 24), obteniendo una construcción robusta.

Sin embargo, la construcción no es validada por Euclidea. Esto da lugar a que se indague en los estudiantes por qué sucede esto. Lo anterior permitiría reconocer que los extremos del segmento deben estar a la misma distancia del vértice del ángulo. Con base a lo anterior (caso 3), ellos pueden construir una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y radio cualquiera; la intersección entre la circunferencia y los lados del ángulo son los extremos de un segmento, al cual los estudiantes le construyen su mediatriz. Esta última es la bisectriz del ángulo (Figura 25).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 9 (Beta 2.3) Ángulo de 30°

Construir un ángulo de 30° con el lado dado (Figura 26).

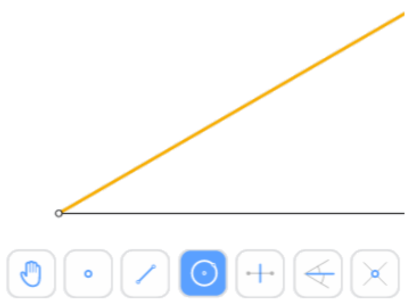


Figura 26. Tarea 3, nivel β

Los estudiantes inicialmente (caso 1) pueden construir una recta que visualmente parezca formar un ángulo de 30° (Figura 27); desafortunadamente esta recta no es producto de una construcción robusta.

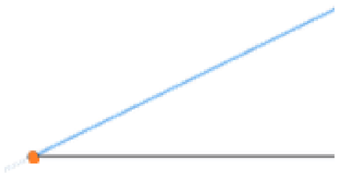


Figura 27. Caso 1 de la tarea 3 (β)

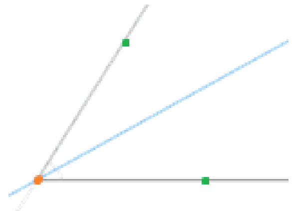


Figura 28. Caso 2 de la tarea 3 (β)

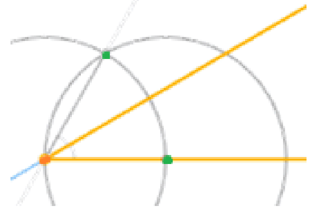
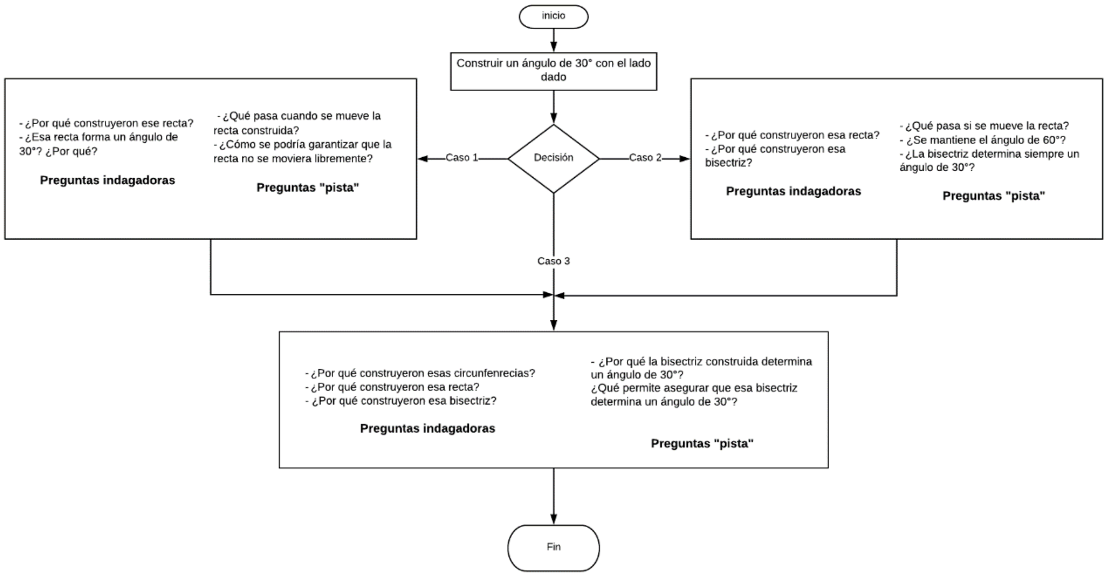


Figura 29. Caso 3 de la tarea 3 (β)

Ante esta construcción se pregunta a los estudiantes por qué sucede lo acontecido, logrando que ellos identifiquen que la construcción no es robusta. Luego (caso 2), los estudiantes pueden recurrir al uso de la bisectriz de un ángulo, construyendo primero un ángulo de 60°. Una posible construcción (caso 2), es construir una recta que simule el lado de un ángulo de 60° y luego se construye su bisectriz (Figura 28); obteniendo eventualmente un ángulo de 30°.

Se procede a preguntarle a los estudiantes por qué la anterior construccion no fue validada por Euclidea, reflexionando sobre la construcción del ángulo de 60°, ya que este no es fruto de una construcción robusta. Después (caso 3), en busca de un ángulo de 60°, los estudiantes pueden recordar la construcción del anterior nivel (α) para generar dicho ángulo y finalmente al construir su bisectriz se obtiene un ángulo de 30° (Figura 29).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 10 (Beta 2.4) Ángulo doble

Construir un ángulo igual al dado, tal que compartan un lado (Figura 30).

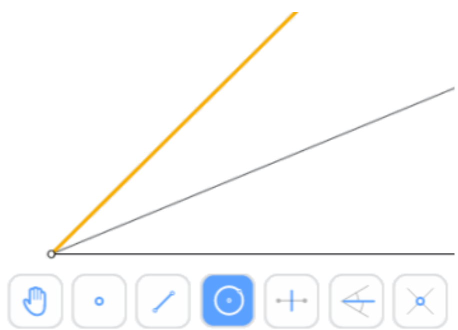


Figura 30. Tarea 4, nivel β

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir una recta que visualmente parezca ser el lado faltante del ángulo solicitado, pero dicha recta no procede de una construcción robusta (Figura 31).

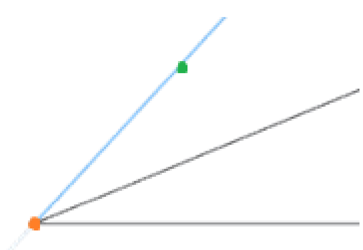


Figura 31. Caso 1 de la tarea 4 (β)

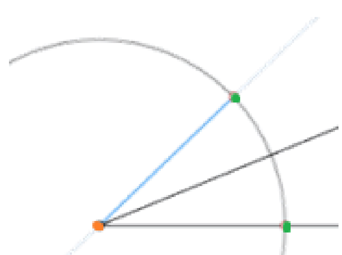


Figura 32. Caso 2 de la tarea 4 (β)

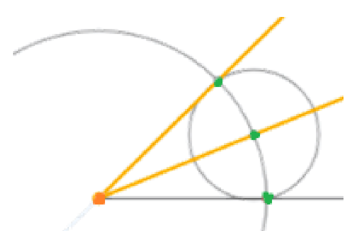
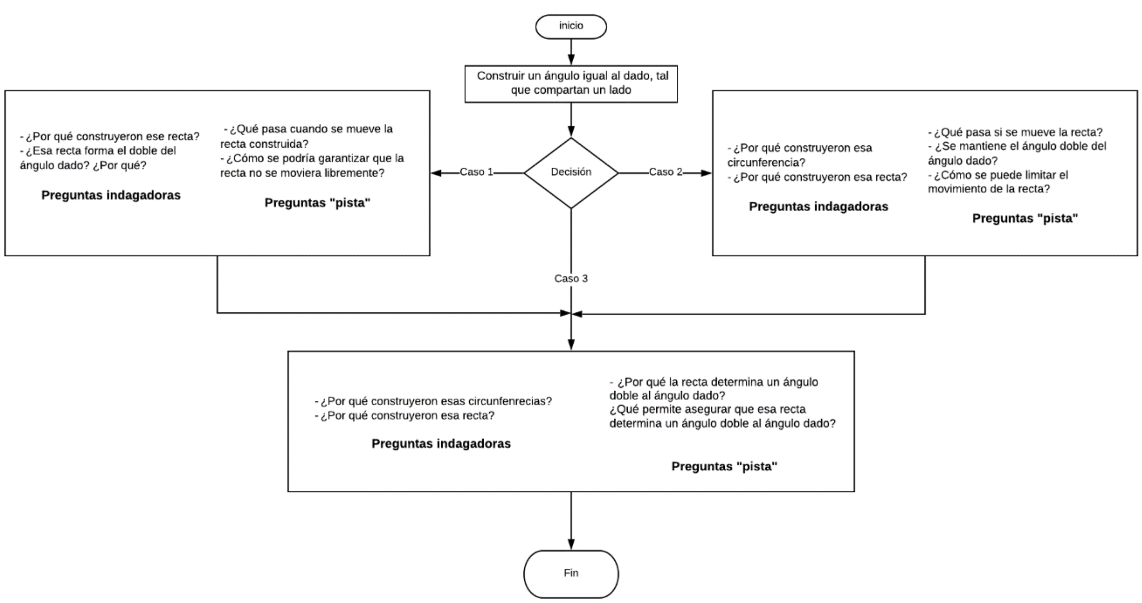


Figura 33. Caso 3 de la tarea 4 (β)

De acuerdo a lo sucedido en la construcción anterior, se pregunta a los estudiantes por qué Euclidea no válida la construcción de la recta, logrando que ellos identifiquen que dicha recta se puede mover libremente por la pantalla. Luego (caso 2), los estudiantes pueden construir una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado y sobre ella ubicar un punto por donde pasa el lado del ángulo solicitado (Figura 32).

A pesar de que el punto construido está en la circunferencia, este puede tomar cualquier posición en ella, produciendo que la recta que pasa por este pierda la posición deseada. Lo anterior da paso para preguntar a los estudiantes por qué creen que la anterior construcción no es válida. Después (caso 3), los estudiantes pueden construir una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y radio cualquiera, luego pasan a construir una segunda circunferencia con centro en el punto de intersección entre la anterior circunferencia y el lado superior del ángulo lado (futura bisectriz) hasta el punto de intersección entre la anterior circunferencia y el lado inferior del ángulo dado; el tercer lado solicitado pasa por la otra intersección generada entre la dos circunferencias (Figura 33).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 11 (Beta 2.6) Recta perpendicular por un punto externo

Trazar una perpendicular desde un punto hasta la recta (Figura 34).

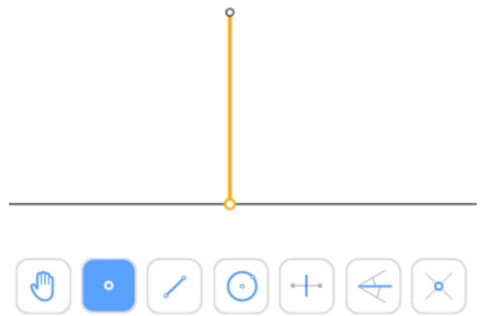


Figura 34. Tarea 6, nivel β

Los estudiantes inicialmente (caso 1) pueden trazar una recta que pase por el punto dado y simule formar un ángulo de 90° con la recta dada, pero no se cumple con el objetivo porque la construcción no es robusta (Figura 35).

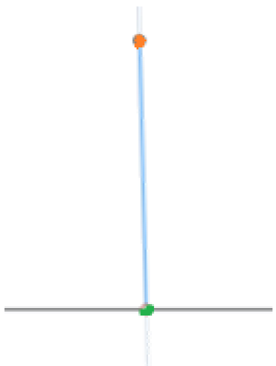


Figura 35. Caso 1, tarea 6 (β)

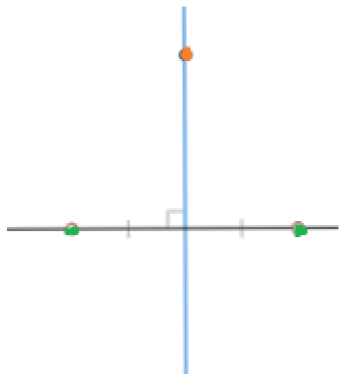


Figura 36. Caso 2, tarea 6 (β)

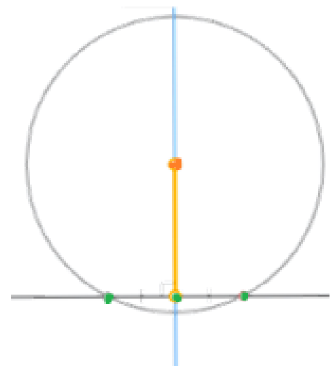
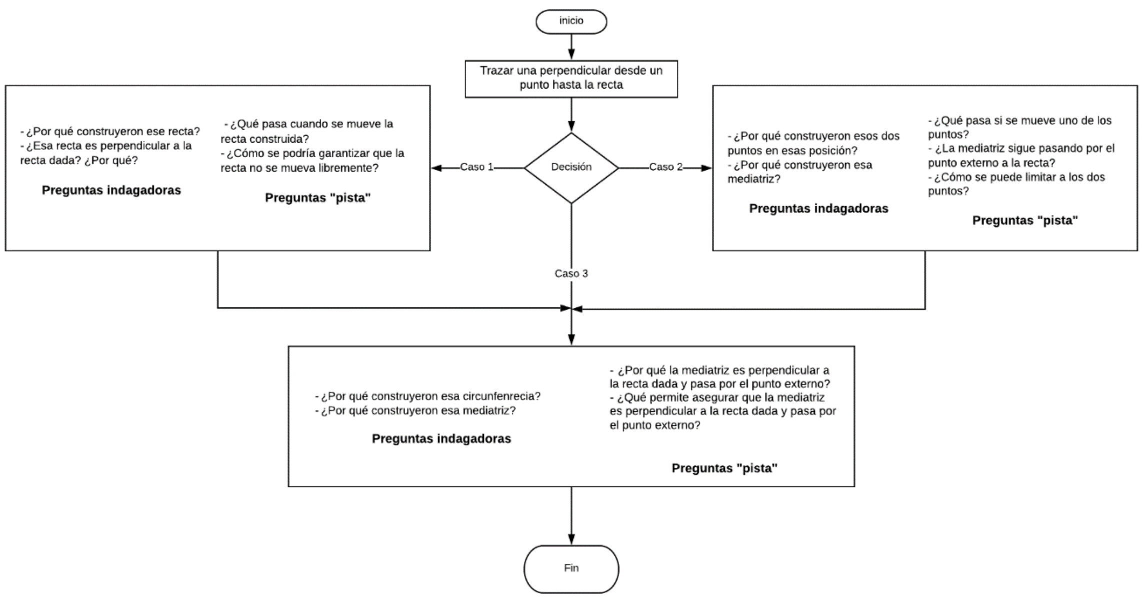


Figura 37. Caso 3, tarea 6 (β)

Después la entrevistadora les pregunta a los estudiantes por qué creen que la anterior construcción no es válida, logrando que ellos verifiquen que el ángulo formado entre las dos rectas no es de 90°. Se pasa a preguntar a los estudiantes qué elementos necesitan para realizar la construcción, a lo que ellos pueden proponer hacer uso de la mediatriz de un segmento (caso 2); para esto, primero trazan dos puntos sobre la recta de tal manera que simulen equidistar del punto dado y luego trazar la mediatriz del segmento que determinar los dos puntos construidos (Figura 36).

Aunque la idea de los dos puntos sobre la recta es buena, la entrevistadora les pregunta a los estudiantes por qué no funcionó esa construcción, logrando que ellos identifiquen que no siempre los puntos van a equidistar o van a estar a la misma distancia del punto dado. Luego se pregunta a los estudiantes cómo pueden construir esos dos puntos de manera robusta, dando como solución por parte de ellos (caso 3) la construcción de una circunferencia con centro en el punto dado y radio cualquiera, tal que interseque a la recta dada en dos puntos. Estos dos puntos de intersección determinan un segmento al cual se le construye su mediatriz (Figura 37).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 12 (Beta 2.7) Recta perpendicular por un punto de la recta

Construir una recta perpendicular desde un punto que pertenece a una recta (Figura 38).

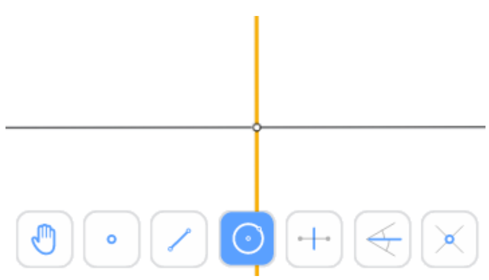


Figura 38. Tarea 7, nivel β

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir una recta que pase por el punto dado y simule formar una ángulo de 90° con la recta dada, pero Euclidea no valida la construcción (Figura 39).

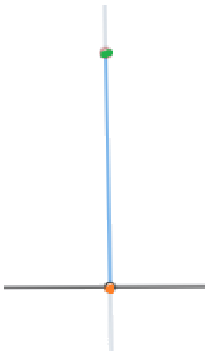


Figura 39. Caso 1, tarea 7 (β)

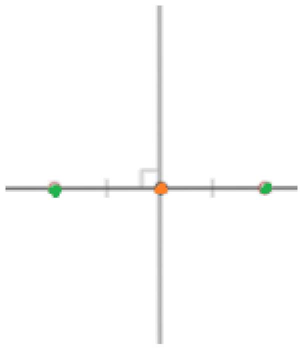


Figura 40. Caso 2, tarea 7 (β)

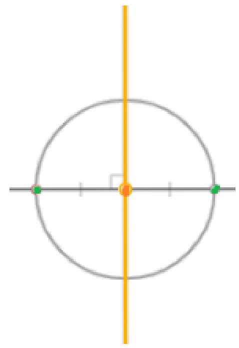
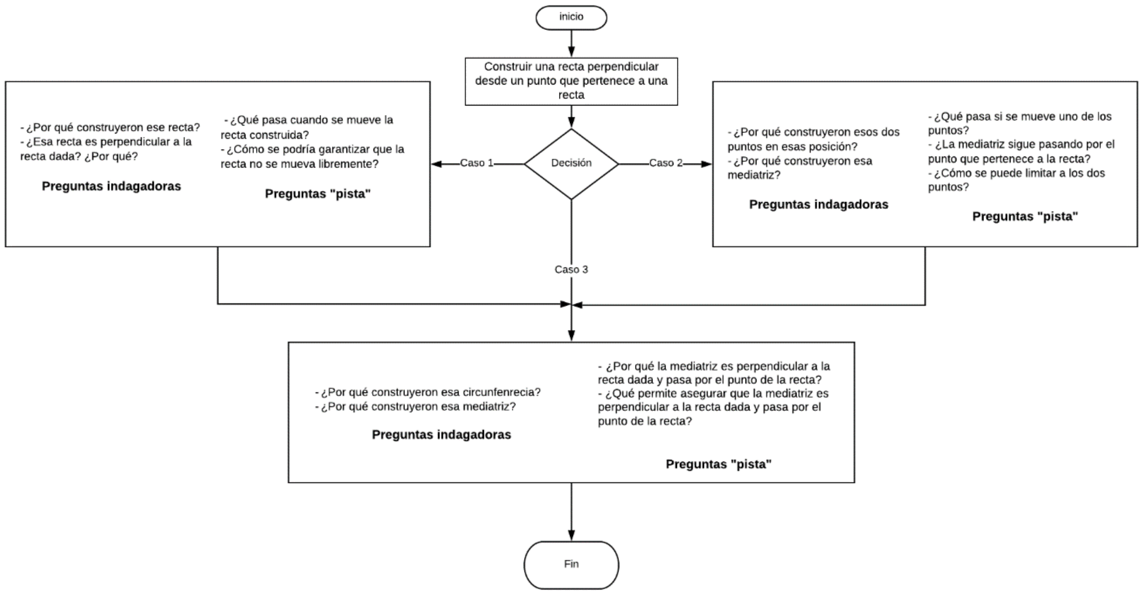


Figura 41. Caso 3, tarea 7 (β)

La entrevistadora procede preguntar a los estudiantes por qué creen que Euclidea no valida la anterior construcción, obteniendo que ellos vean que la construcción no es robusta. Luego (caso 2), los estudiantes pueden intuir hacer uso de la mediatriz de un segmento y deciden construir dos puntos (uno a cada lado del punto dado) que estén a la misma distancia del punto dado y pertenezcan a la recta dada (Figura 40).

Euclidea tampoco valida la anterior construcción y se procede a preguntar a los estudiantes por qué sucede esto, logrando que ellos determinen que al mover uno de los dos puntos construidos la mediatriz ya no pase por el punto dado. Después (caso 3) los estudiantes pueden construir una circunferencia con centro en el punto dado y radio cualquiera para garantizar que los dos puntos de intersección entre la circunferencia y recta están a la misma distancia del punto dado, luego se construye la mediatriz del segmento determinado por los dos puntos anteriormente construidos (Figura 41).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 13 (Beta 2.10) Circunferencia en un rombo

Inscribir una circunferencia en un rombo (Figura 42).

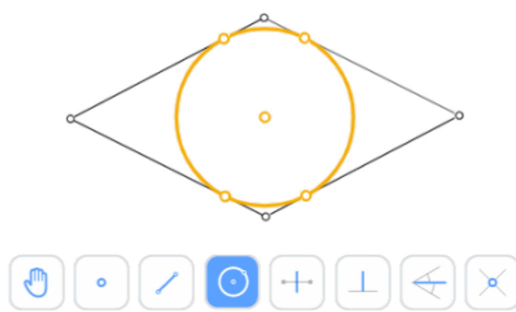


Figura 42. Tarea 10, nivel β

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir las diagonales del rombo para encontrar el centro de la circunferencia solicitada, luego ellos pasan a construir la circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta uno de los vértices del rombo (Figura 43).

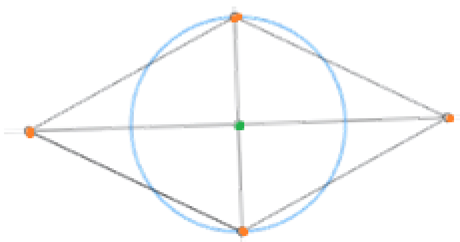


Figura 43. Caso 1, tarea 10 (β)

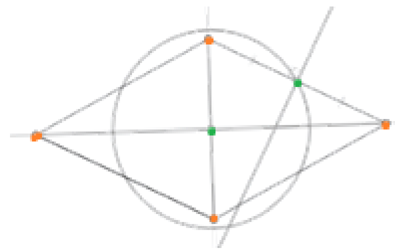


Figura 44. Caso 2, tarea 10 (β)

A pasar que los estudiantes hacen una construcción robusta, esta no es la correcta. Se les pregunta a ellos por qué Euclidea no valida la construcción, logrando que ellos observen que la circunferencia ha quedado fuera del rombo y por tanto no está inscrita. En una segunda situación (caso 2), los estudiantes pueden construir la mediatriz de uno de los lados del rombo y pasar a construir la circunferencia con centro en la intersección de la diagonales del rombo y radio hasta el punto medio del segmento al cual se construyó su mediatriz (Figura 44).

Los estudiantes observan que la anterior construcción no es validada por Euclida y por tanto la entrevistadora procede a preguntarles por qué la construcción no es aceptada, obteniendo que la circunferencia siga afuera del rombo. Después (caso 3), los estudiantes pueden construir la bisectriz de uno de los ángulos determinados por las dos diagonales del rombo y construir una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta la intersección entre la bisectriz y uno de los lados del rombo (Figura 45).

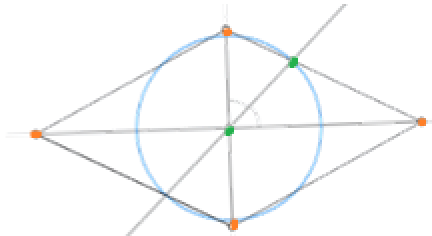


Figura 45. Caso 3, tarea 10 (β)

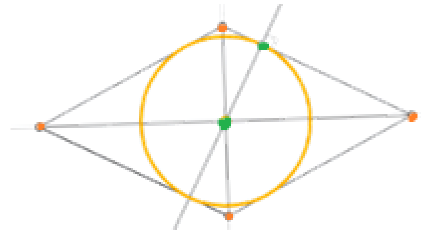
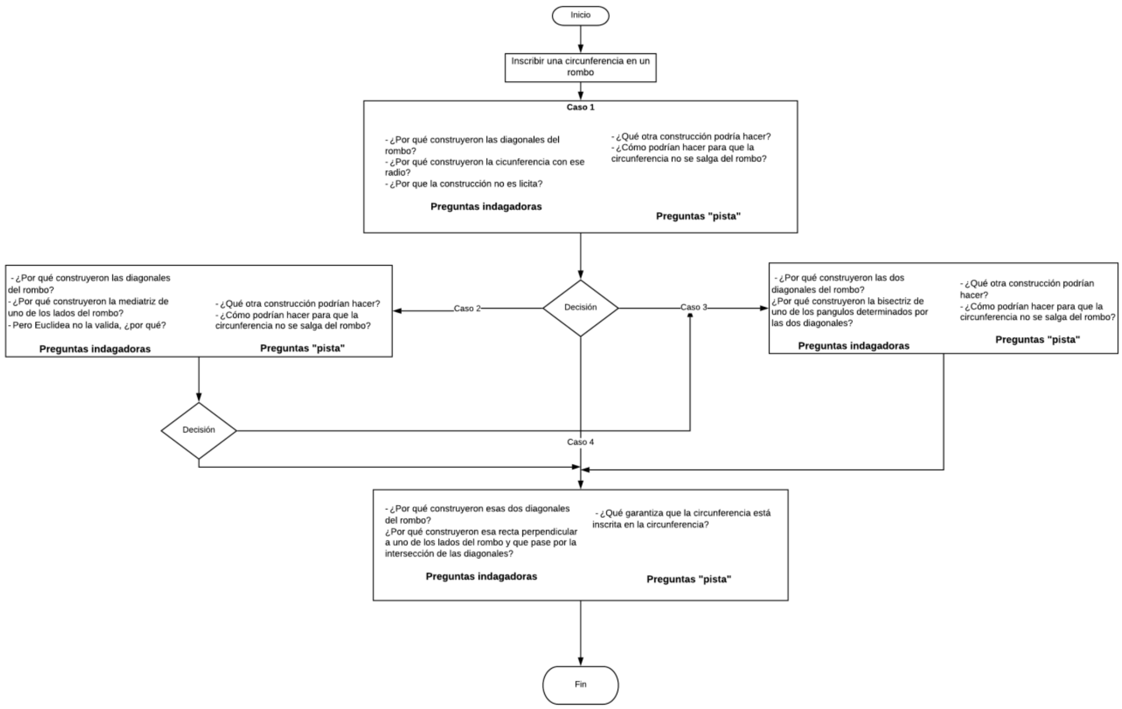


Figura 46. Caso 4, tarea 10 (β)

Sin embargo, esta construcción tampoco es aceptada. Se procede a preguntarles a los estudiantes por qué no es validada por Euclidea, concluyendo que la circunferencia aún está por fuera del rombo. Finalmente (caso 4), los estudiantes pueden construir una recta perpendicular a uno de los lados del rombo y que pase por el punto de intersección entre las dos diagonales del mismo, luego ellos construyen la circunferencia con centro en el punto en común de las diagonales y radio hasta el punto de intersección entre la recta perpendicular y un lado del rombo (Figura 46).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 14 (Gama 3.1) Punto medio de cuerda

Construir una cuerda cuyo punto medio sea el punto dado (Figura 47).

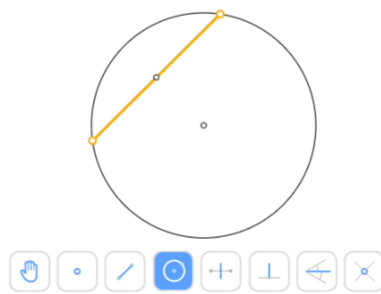


Figura 47. Tarea 1, nivel γ

Los estudiantes inicialmente (caso 1) pueden construir una recta que pase por el punto dado y que visualmente simule contener a una cuerda cuyo punto medio es el punto dado (Figura 48).

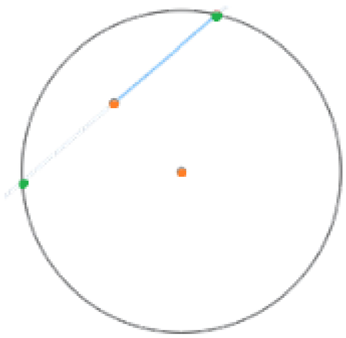


Figura 48. Caso 1, tarea 1 (γ)

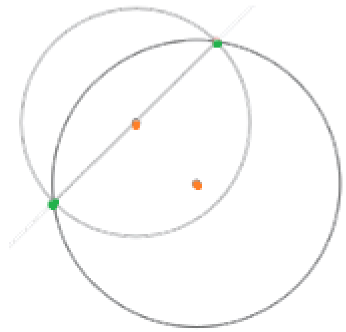


Figura 49. Caso 2, tarea 1 (γ)

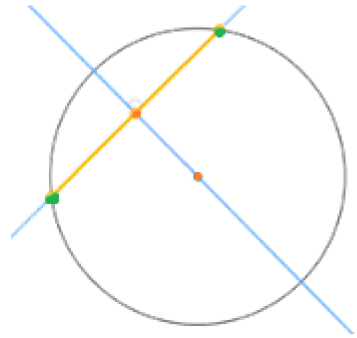
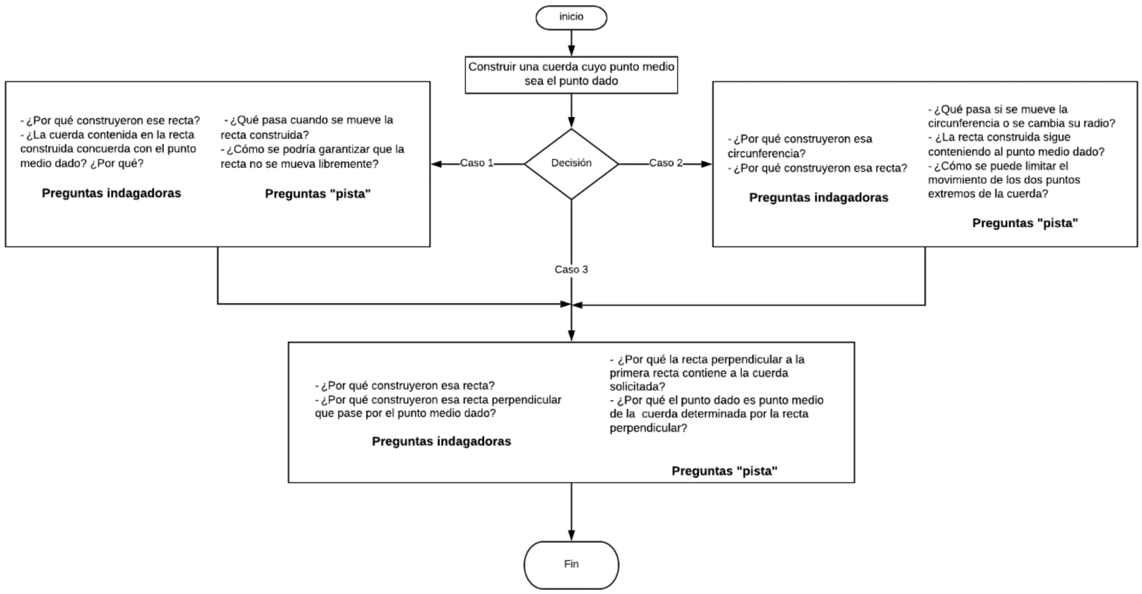


Figura 50. Caso 3, tarea 1 (γ)

Los estudiantes observan que la anterior construcción no es validada por Euclidea, por tanto se les pregunta por qué creen que esto sucede, logrando que ellos determinen que la construcción no es robusta. Luego (caso 2), los estudiantes pueden construir una circunferencia con centro en el punto medio dado y radio hasta un punto de la circunferencia dada, tal que los puntos de intersección entre las dos circunferencias y el punto medio parezcan colineales, procediendo a construir una recta que los contenga (Figura 49).

Sin embargo, la anterior construcción tampoco es aceptada por Euclidea, por tanto se procede a preguntarles a los estudiantes por qué sucede esto, obteniendo que ellos identifiquen que si mueven la segunda circunferencia los tres puntos dejan de ser colineales. Después (caso 3), los estudiantes pueden construir una recta que pase por el centro de la circunferencia dada y el punto medio, y construir una recta perpendicular a la anterior recta que pase por el punto medio. Esta recta contiene a la cuerda solicitada (Figura 50).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 15 (Gama 3.4) Tres segmentos iguales

Dado una ángulo ABC y un punto M dentro del mismo, encuentre los puntos D en BA y E en BC y construya los segmentos DM y ME tales que $BD = DM = ME$ (Figura 51).

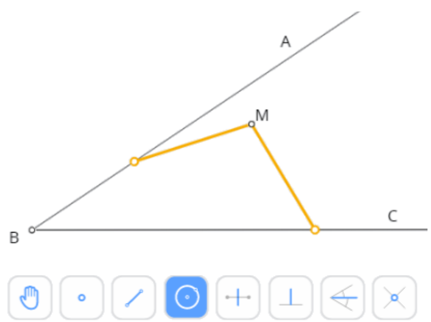


Figura 51. Tarea 4, nivel γ

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir dos rectas tales que estas contengan a los segmentos MD y ME y que estos a sus vez se vean iguales (Figura 52).

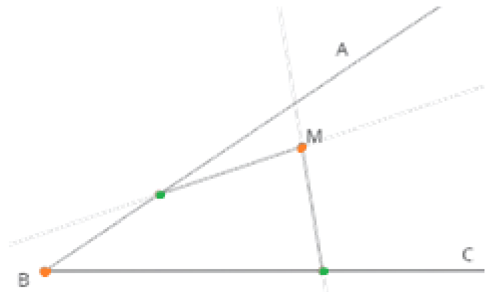


Figura 52. Caso1, tarea 4 (γ)

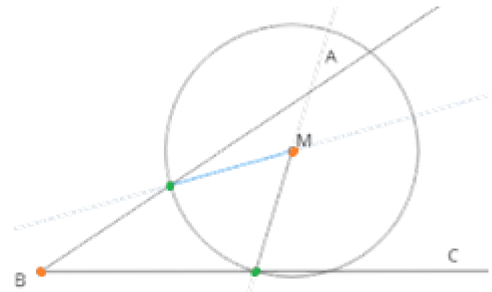


Figura 53. Caso 2, tarea 4 (γ)

La entrevistadora les pregunta a los estudiantes por qué creen que la anterior construcción no es validada por Euclidea, logrado que ellos identifiquen que la construcción en blanda. Luego (caso 2), los estudiantes pueden construir una circunferencia con centro en M y radio hasta un punto (D) de BA, tal que visualmente se vea que $BD = DM$ y se trazan dos rectas que contengan a los segmentos DM y ME (Figura 53).

Sin embargo esta construcción no es aceptada por Euclidea, procediendo a preguntarles a los estudiantes el por qué ocurre esto, obteniendo que la construcción del punto D no garantiza igualdad entre DM y BD. Después (caso 3), los estudiantes pueden recrear que los segmento BD y MD hacen parte de un triángulo isósceles y proceden a construir la mediatriz del segmento BM, el punto de intersección entre la mediatriz y BA es D. Luego se construye una circunferencia con centro en M y radio MD para obtener el punto de intersección entre dicha circunferencia y BC, siendo E. Finalmente se traza las rectas que contienen a los segmentos MD y ME (Figura 54).

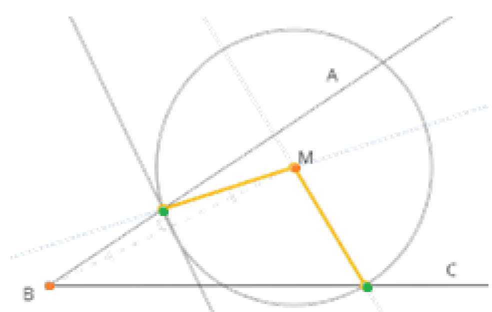
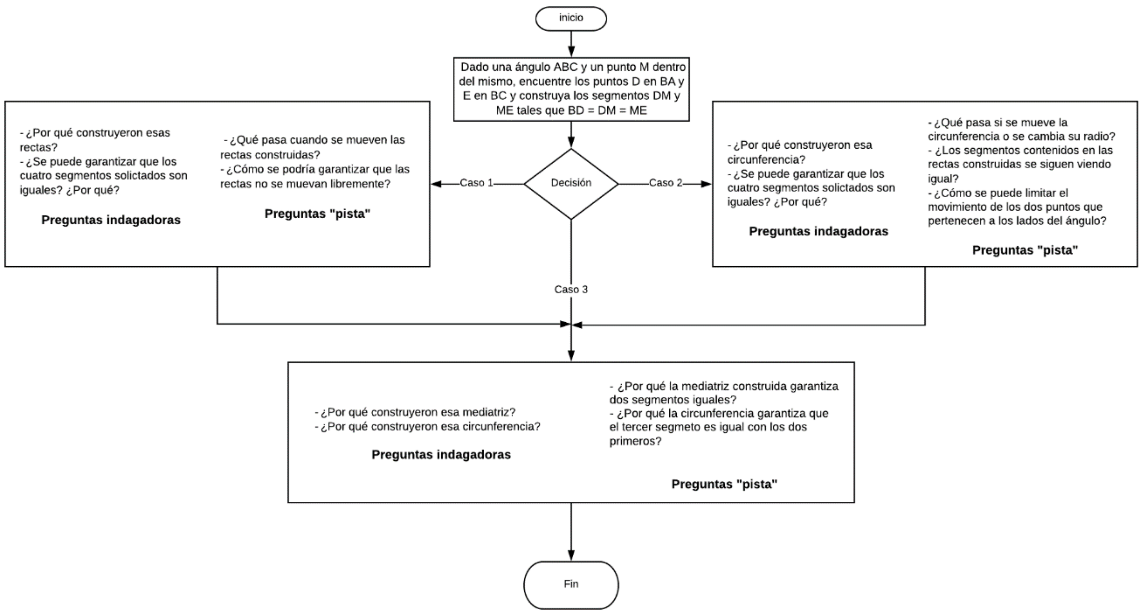


Figura 54. Caso 3, tarea 4 (γ)

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 16 (Gama 3.6) Puntos medios de las bases de un trapecio

Construir una recta que pase por los puntos medios de las bases de un trapecio (Figura 55).

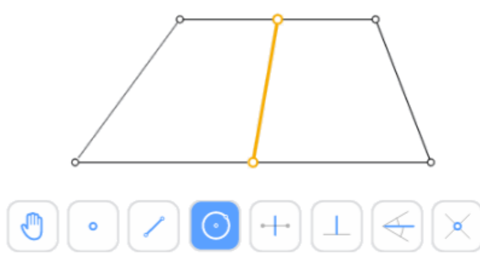


Figura 55. Tarea 6, nivel γ

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir una recta que simule pasar por los puntos medios de las bases del trapecio (Figura 56).

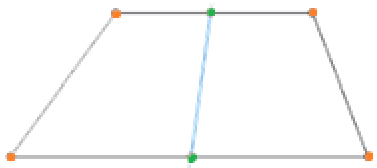


Figura 56. Caso 1, tarea 6 (γ)

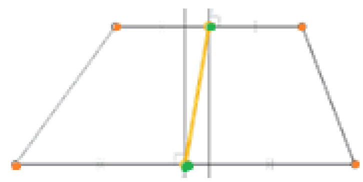
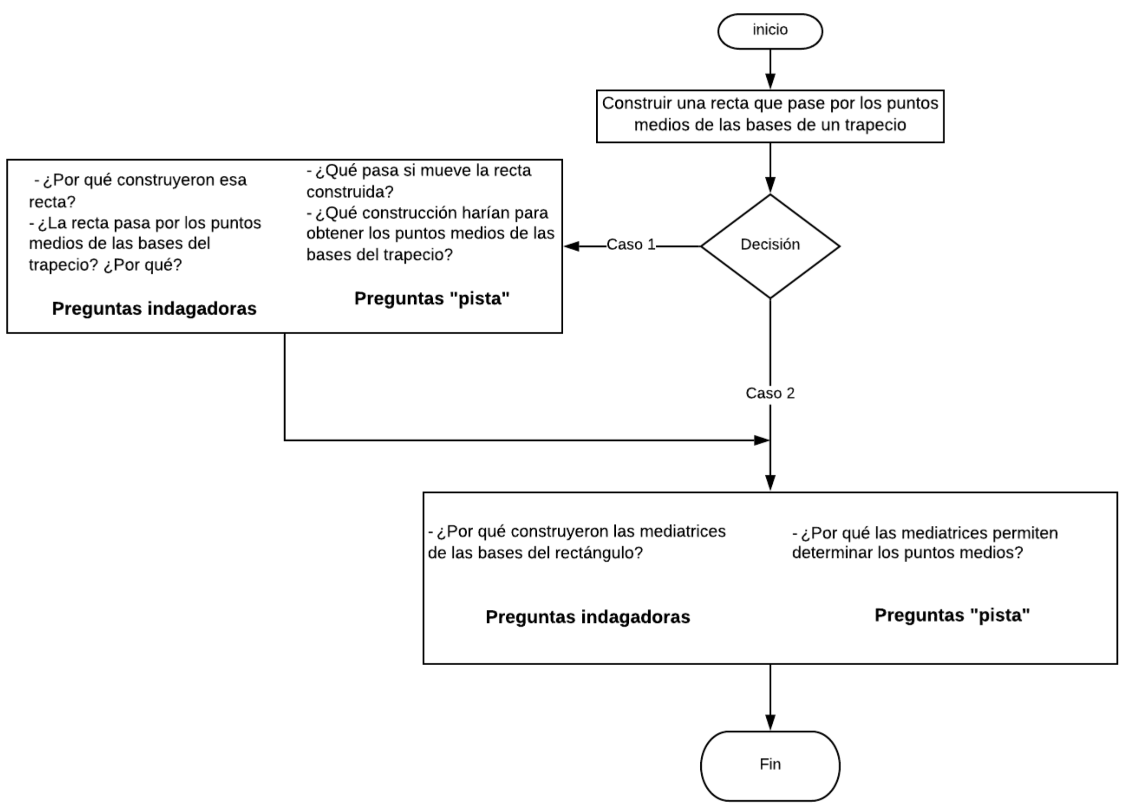


Figura 57. Caso 2, tarea 6 (γ)

La construcción anterior no la valida Euclidea y por tanto la entrevistadora procede a preguntarles a los estudiantes el por qué sucede esto, logrando que ellos evidencien que la construcción realizada no es fruto de una construcción robusta. Luego (caso 2) los estudiantes pueden recordar que objeto geométrico les permite encontrar el punto medio de un segmento, trazando para esto la mediatriz de las dos bases del trapecio. Finalmente, se traza la recta que pasa por los dos puntos medios (Figura 57).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



Tarea 17 (Gama 3.8) Lonsage

Construir un rombo con el lado dado y un ángulo de 45° en un vértice (Figura 58).

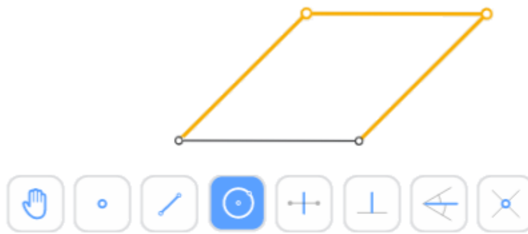


Figura 58. Tarea 8, nivel γ

Inicialmente (caso 1) los estudiantes pueden construir tres rectas, que contengan a los tres lados del cuadrilátero, que visualmente simulen el rombo solicitado (Figura 59).

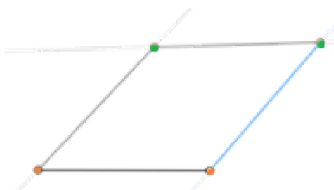


Figura 59. Caso 1, tarea 8 (γ)

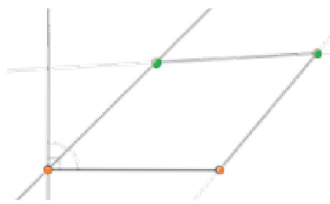


Figura 60. Caso 2, tarea 8 (γ)

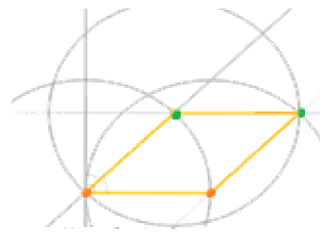
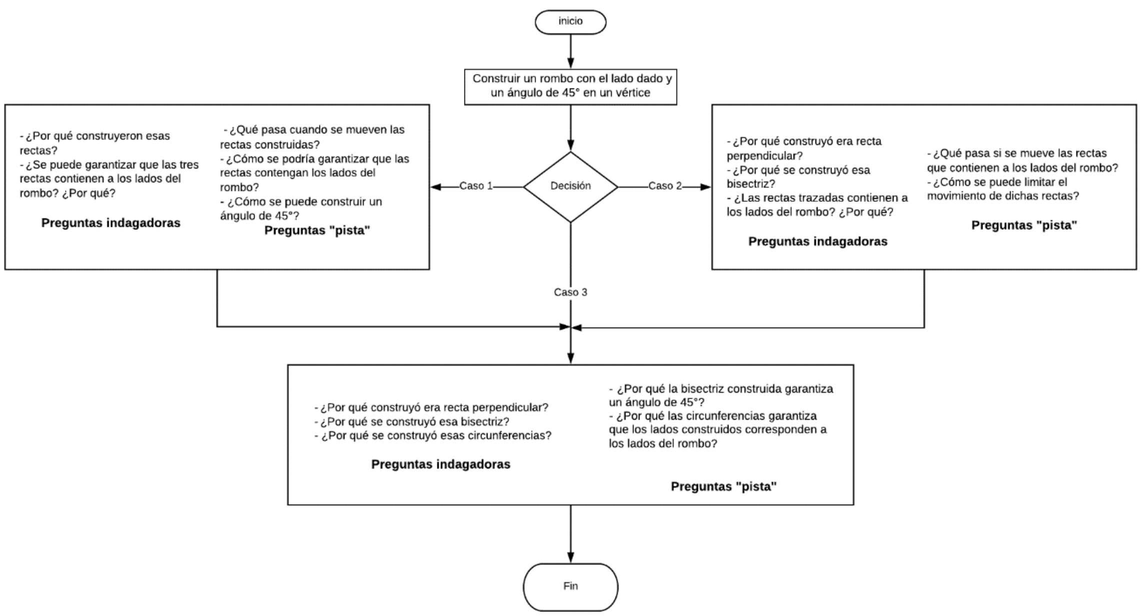


Figura 61. Caso 3, tarea 8 (γ)

Aunque visualmente la construcción anterior cumple con el rombo solicitado, Euclidea no valida la construcción. Esto permite que la entrevistadora pregunte a los estudiantes el por qué creen que esto sucede, permitiendo que ellos identifiquen que la construcción realizada es blanda; es decir, al mover un punto la construcción del rombo se pierde. Luego (caso 2), los estudiantes pueden trazar una recta perpendicular al lado dado y que pase por uno de los extremos de este segmento, seguido a esto trazar la bisectriz del ángulo determinado entre la recta y el lado. Seguido a esto, los estudiantes pueden construir dos rectas que contengan los dos lados faltantes del rombo, ya que el segundo lado del rombo queda sobre la bisectriz (Figura 60).

A pesar que los estudiantes tienen en cuenta la construcción del ángulo de 45° no construyen los lados faltantes del rombo de una manera robusta. Para que los estudiantes identifiquen lo anterior, la entrevistadora les pregunta a ellos el por qué la construcción no es validada por Euclidea. Después (caso 3), los estudiantes al tener construido el ángulo de 45° pasan a construir tres circunferencias. La primera con centro en el punto por el cual pasa la recta perpendicular (vértice 1 del rombo) y radio igual al lado dado del rombo, obteniendo el punto de intersección entre dicha circunferencia y la bisectriz del ángulo recto (vértice 3 del rombo); la segunda con centro en el vértice 3 del rombo y radio hasta el vértice 1 del rombo; y la tercera con centro en el otro extremo del lado dado (vértice 2 del rombo) y radio igual al lado dado. La intersección entre la segunda y tercera circunferencia determina el vértice 4 del rombo, trazando dos rectas que contienen los lados faltantes del rombo que pasan entre los vértices 3 y 4 y los vértices 2 y 4 (Figura 61).

Los anteriores casos se presentan en el siguiente diagrama de flujo, donde se muestran además los posibles caminos de exploración que pueden asumir los estudiantes para solucionar esta tarea:



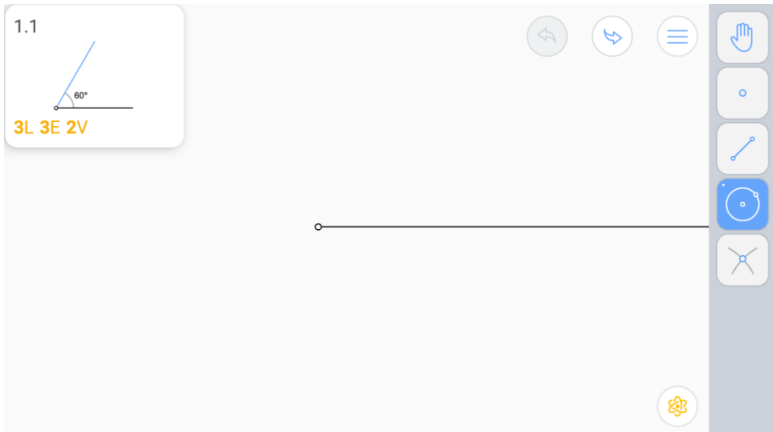
Anexo 4. Transcripciones de la entrevista

Inicialmente se aclara que debido al programa que se usó para la grabación de la pantalla de la Tablet se invirtió los colores que tiene la interfaz de Euclidea; es decir, lo que se muestra azul en realidad es amarillo y viceversa.

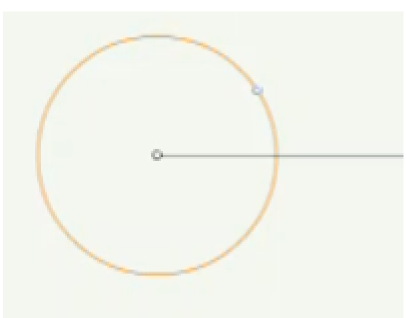
Las estudiantes inicias las sesiones de grabación, teniendo en cuenta que E1: estudiante 1, E2: estudiante 2 y PR: profesora.

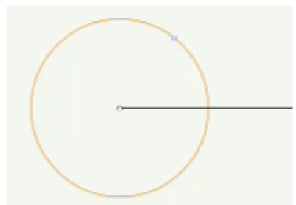
Tarea 1 – Alfa 1.1

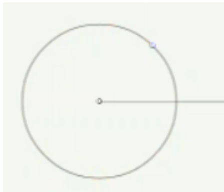
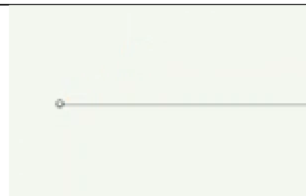
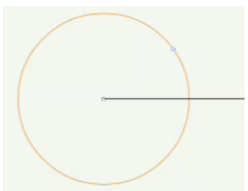
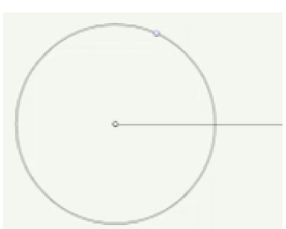
Construir un ángulo de 60° con el lado dado.

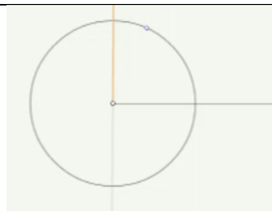
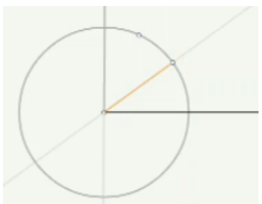
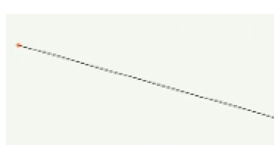
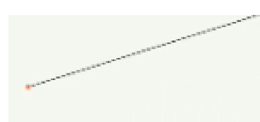


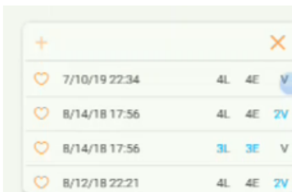
Las estudiantes anteriormente resolvieron el tutorial que ofrece Euclidea para detallar cómo funciona cada herramienta de construcción (recta, circunferencia, arrastre representado por una manito, intersección y punto). Al iniciar la tarea 1.1, la profesora les indica a las estudiantes que desde ese momento inician las tareas que deben desarrollar. Las estudiantes se disponen a reconocer qué deben construir, haciendo énfasis en la imagen miniatura que aparece en la parte superior izquierda de la pantalla, identificando el ángulo de 60°.

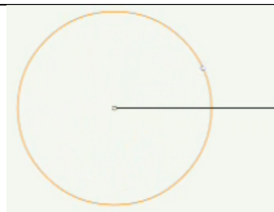
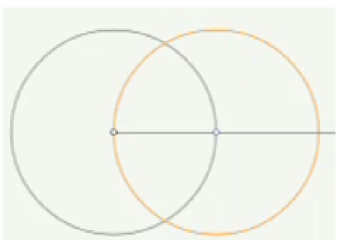
1.	E1: 3:07	Sesenta grados. ¿Una circunferencia? (construye una circunferencia con centro en el origen del rayo dado, radio cualquiera y el punto de esta queda en el semiplano superior determinado por el rayo, ver 1).  (1)
2.	E2:	Mm…
3.	E1:	No, espérate. Vamos a intentar (…) Mira aquí (señala las estrellas a cumplir) hay 3L, 3E y 2V [objetivos para ganar las estrellas en esta tarea]
4.	E2:	¿Eso si es para ubicarse? (Señala las estrellas a cumplir).
5.	E1:	¿Si es para ubicarse? ¿Son como coordenadas?

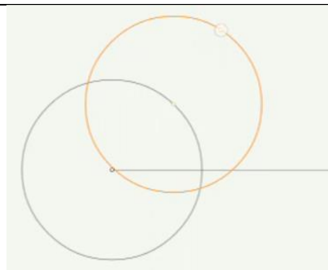
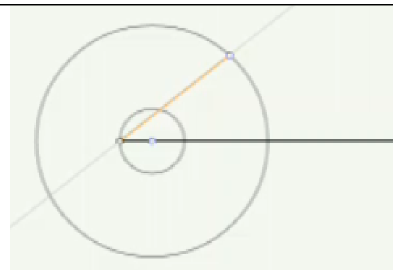
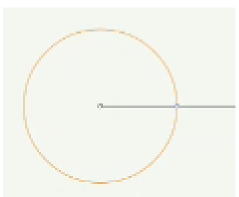
6.	PR:	Mm… No. Esa es una puntuación (señala las estrellas a cumplir) que te regala Euclidea, ¿sí? Por la economía de herramientas, por la economía de pasos, ¿sí? Pero aquí no me interesa tanto que ustedes las hagan tal como las quiere Euclidea [las tareas], sino que las puedan lograr.
7.	E1:	Ah… Ok. Mira que este punto está mal porque está solito [el punto de la circunferencia en el semiplano superior determinado por el rayo dado, ver I]. Es decir, ese [el punto] hay que quitarlo (borra la circunferencia, ver 2). No (…) con una circunferencia (construye de nuevo una circunferencia con centro en el origen del rayo, radio cualquiera y el punto de esta queda en el semiplano superior determinado por el rayo, ver 3). (2)  (3)
8.	E2:	¡Dios mío!
9.	E1:	¡Ay!, tenme paciencia. ¿Pero por qué termina allá? [El punto de la circunferencia queda en el semiplano superior] Sigue quedando mal (borra la circunferencia, ver 4). Dale [le pide a su compañera que lo intente]. Pero no sé, ¿cómo se saca 60° con puntos? ¿Esto para qué sirve? [Pregunta por la herramienta intersección]. Ah… seleccionar la línea [lado del ángulo dado] (4)
10.	E2:	¿Para qué?
11.	E1:	¡Pues, no sé!
12.	PR:	Eso es para marcar la intersección entre dos objetos.
13.	E1:	Ah…
14.	PR:	Entonces como acá (señala el rayo dado) solo tienes una [un objeto geométrico que es el rayo del ángulo], no te marca nada [alguna intersección].
15.	E1:	(Construye una circunferencia con centro en el origen del rayo dado, radio cualquiera y el punto de esta queda en el semiplano superior determinado por el rayo, ver 5). No, necesito algo que me dé 60 (borra la circunferencia, ver 6).

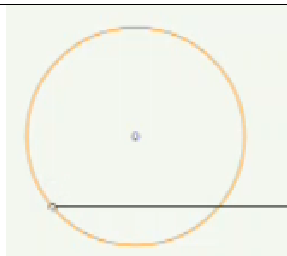
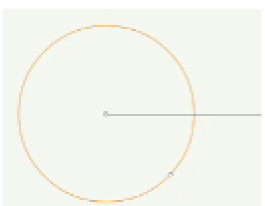
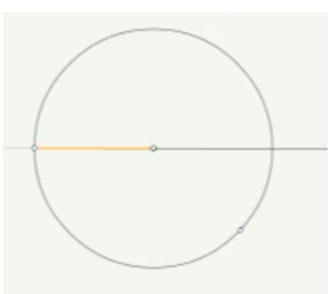
		 (5)  (6)
16.	E2:	Es que tenemos que medir el ángulo.
17.	E1:	(Construye una circunferencia con centro en el origen del rayo dado, radio cualquiera y el punto de esta queda en el semiplano superior determinado por el rayo, ver 7) ¿Pero cómo le mides algo que mide exactamente 45? (Borra la circunferencia, ver 8).  (7) (8)
18.	E2:	¿45?
19.	E1:	Sí. ¡Ash! 60. Construir un ángulo que mida 60 con el lado dado (lee la tarea a cumplir, dando clic en la respectiva herramienta).
20.	E2:	Sabemos qué es un ángulo recto. Es de 90°, no sé…
21.	E1:	Quitarle 40.
22.	E2:	¿Pero cómo? Ja, ja, ja.
23.	E1:	¿Qué son 40°? Ja, ja, ja.
24.	E2:	No son 40.
25.	E1:	Ah (…) 30. (Construye una circunferencia con centro en el origen del rayo dado, radio cualquiera y el punto de esta queda en el semiplano superior determinado por el rayo, ver 9).  (9)
26.	E2:	¿La mediatriz?
27.	E1:	Pero no vez que no hay. Estoy pensando en sacar uno de 90 (construye una recta que parece ser perpendicular al rayo dado, ver 10), pero como no tengo… ¡Ash!, no me entiendes.

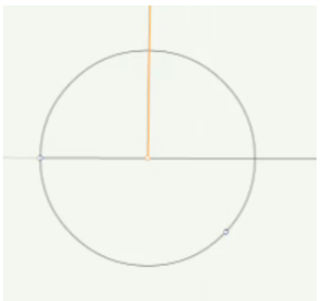
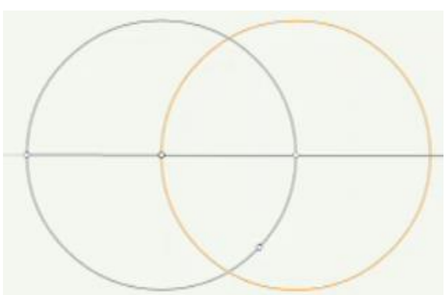
		 (10)
28.	E2:	No, yo no entiendo.
29.	E1:	(Construye una recta que parece ser el otro lado del ángulo de 60°, ver 11). No, está mal. ¿Sabes? (borra todos los objetos construidos en pantalla, ver 12) [refleja en su rostro frustración] Toma.  (11) (12)
30.	E2:	¿Esto para que era? (Selecciona la herramienta de manito que permite mover los objetos).
31.	E1:	Esto es para mover.
32.	E2:	¡Ay! Aparecen dos puntos [al usar la herramienta de manito aparecen dos puntos sobre el lado dado, ver 13]. ¿Esos dos puntos venían incluidos o le agregamos uno? (13)
33.	E1:	No. Sí, vienen incluidos.
34.	PR:	Aparecen cuando usas esa herramienta [arrastre].
35.	E2:	Ah (…) Ok.
36.	PR:	Si cambian de herramienta desaparece uno [punto].
37.	E1:	¿Y para qué son esos punticos?
38.	PR:	Para poder mover la recta [rayo dado].
39.	E1:	Ah…
40.	E2:	Ah… (Mueve el rayo dado por la pantalla, ver secuencia 14, 15, 16)  (14)  (15)  (16)
41.	E1:	Ya, deja eso quieto que no vas a hacer nada.
42.	E2:	Ven, ¿qué hay en el menú? (selecciona el menú)
43.	E1:	¿Qué es esto? (Señala el icono del libro en el menú).
44.	PR:	Eso es un glosario donde te dan la definición de los elementos que se involucran.

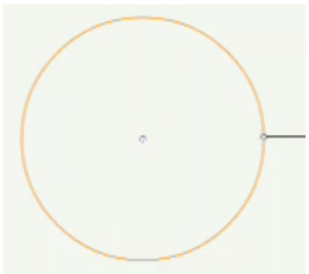
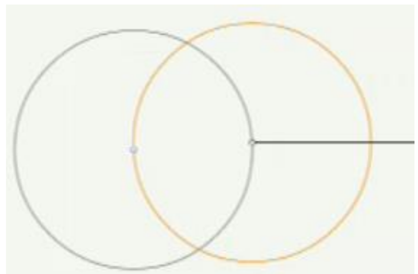
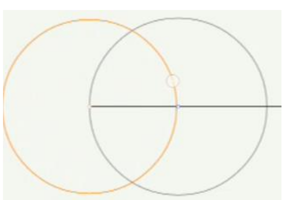
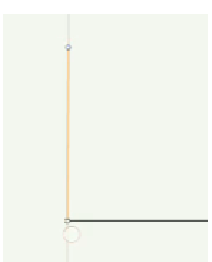
45.	E1:	¿La lunita?
46.	PR:	La lunita es para darte (…) cuando estás de noche, no te brille los ojos…
47.	E1:	¿El bombillito?
48.	PR:	El bombillito te permite dar una idea de la construcción.
49.	E1:	¿La vamos a usar? Ja, ja, ja.
50.	PR:	Si quieren la pueden usar. Pero pueden usar una [pista] por una hora; o sea, una por hora.
51.	E1:	¿Qué hacemos? ¿El glosario?
52.	E2:	¡No!
53.	E1:	Miremos el glosario, algo deberá aparecer (da clic en el librito).
54.	E2:	¿Y ahora? [No comprende la información que aparece en el cuadro al dar clic en el libro, ver 17].  (17)
55.	PR:	¡Ah...! No, mentiras. Ese librito son las construcciones que ya se han hecho [para resolver la tarea] (…) y la fecha.
56.	E1:	¡Ay! No sé qué hacer (da clic en el bombillito). Mira…
57.	E2:	¡No!
58.	PR:	Ahí tú escoges cuál quieres gastar [de las pistas posibles].
59.	E1:	¡Ay! ¿Qué hacemos? O sea, ¿tenemos esas tres para hoy? (señala las tres pistas).
60.	PR:	Sí.
61.	E1:	Ok. ¿Los pasos o ya el dibujo hecho?
62.	E2:	Ahm…
63.	E1:	¿Usamos esta? (Señala la segunda pista de las cuatro ofertadas).
64.	E2:	¿Cuál?
65.	E1:	Yo quiero saber esta (selecciona la pista que arroja los elementos geométricos a usar en orden).
66.	E1 y E2:	[Manifiestan en su rostro una expresión de desconcierto, al parecer no comprenden la información que aparece en la pantalla] Ja, ja, ja.
67.	PR:	Ahí lo que les están diciendo es que los pasos para sacar la construcción, es una circunferencia, otra circunferencia y una recta.
68.	E1:	Dos circunferencias y una recta. Eso sirve.
69.	E2:	Sí, pero (…) Ok.
70.	E1:	Entonces, si hacemos (…) (construye una circunferencia con centro en el origen del rayo, radio cualquier y un punto de esta en el semiplano superior determinado por el rayo, ver 18).

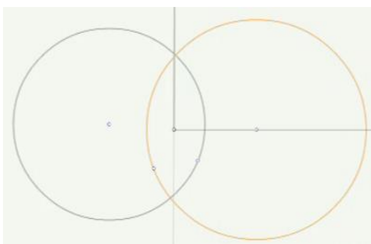
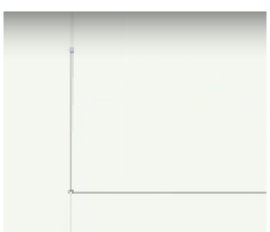
		 (18)
71.	E2:	Pero…
72.	E1:	¡Ah! Pero el punto tendría que quedar acá (señala una parte fija del rayo). ¡Ya te entendí!
73.	E2:	Yo no entendí.
74.	E1:	Me entenderás (Borra la circunferencia realizada anteriormente. Luego, construye una nueva circunferencia con radio en el origen del rayo, radio cualquiera y un punto de esta sobre el rayo dado). Y si hacemos esta acá (construye una circunferencia con centro en el punto de la anterior circunferencia e igual radio a esta, ver 19).  (19) Pero no queda 40 (…) mm no queda 60.
75.	E2:	Dice que dos circunferencias [según la pista], pero no dice que necesariamente sea así [la construcción anterior] (borra las dos circunferencias anteriores, ver 20). (20)
76.	E1:	Entonces gastemos nuestra opción en una que sirva.
77.	E2:	¿Qué?
78.	E1:	Dos circunferencias y una recta.
79.	E2:	Dos circunferencias (construye una circunferencia con centro en el origen del rayo, radio cualquiera y un punto de esta en el semiplano superior determinado por el rayo dado. Luego, construye otra circunferencia con centro en el punto de la primera circunferencia y radio que parezca ser igual a la primera circunferencia, ver 21)

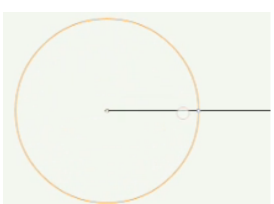
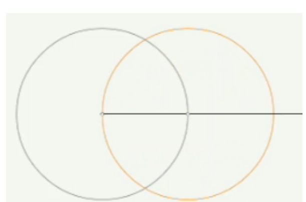
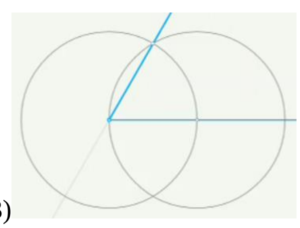
		 (21)  (22) Ah (…) Porque con la mediatriz (…) A ver, no sé (borra la anterior construcción y luego construye una circunferencia en el interior de otra y traza una recta, ver 22. Finalmente, también borra esta construcción, ver 23). (23)
		[…]
80.	E1:	Pensemos en equipo (construye una circunferencia con centro en el origen del rayo, radio cualquiera y un punto de esta queda sobre el rayo dado, ver 24).  (24)
81.	E2:	¡Aish! Es que no sé.
82.	E1:	Dos circunferencias, ¿pero cómo de dos circunferencias se saca 60°? Una circunferencia tiene 360° (…) la mitad sería 180, ¿y la mitad de 180? (…) No da.
83.	E2:	No da.
84.	E1:	Podríamos quitar 90, pero quedamos en la misma (…) un ángulo recto.
85.	E2:	60, 90, 180 [cuenta con los dedos].
		[…]
86.	E1:	Ya esto está mal [la circunferencia construida] (borra la circunferencia construida, ver 25). (25)
		[…]
87.	E1:	¿Y si hacemos una recta así? (Construye una circunferencia con centro en un punto en el semiplano superior determinado por el rayo, radio determinado por el origen del rayo, ver 26). No sé, lo voy a intentar (construye una segunda circunferencia con centro en el origen del rayo y radio igual a la primera circunferencia, ver 27) y una línea (construye una recta que pasa por los centros de las circunferencias, ver 27).

		 (26)  (27) ¡Tampoco da!
88.	E2:	(Borra la construcción anterior, ver 28). Bueno nosotras no tenemos el transportador [Hace una circunferencia en el aire con el dedo]. (28)
89.	E1:	No tenemos.
90.	E2:	No, pero el transportador es como un círculo, ¿no?
91.	E1:	Ok. Es un círculo. Una circunferencia. Pero está divida en dos, cada parte tiene 180 y la mitad 180 son 90.
92.	E2:	Primer paso: (…) hacer una circunferencia que imitaría, por así decirlo, al transportador (construye una circunferencia con centro en el origen del rayo, radio cualquiera y un punto de esta en el semiplano inferior determinado por el rayo, ver 29).  (29)
93.	E1:	Mira que el punto no debe quedar hacia abajo (señala el semiplano inferior delimitado por el rayo con el dedo) ni tampoco por acá (señala el semiplano superior delimitado por el rayo con el dedo).
94.	E2:	Bueno, ese punto no lo sé. No, lo que quiero hacer es partir el circulo en la mitad [quiere trazar la recta que contiene el rayo dado] para al menos (…) no sé.
95.	E1:	Ok. Tendríamos que hacer esto (construye una recta que parece contener el rayo dado, ver 30).  (30)
96.	E2:	¿Sí quedó recta? [Alineada con el rayo dado].

97.	E1:	Al verlo, sí.
98.	E2:	Pues a ojímetro, eso [la recta] está recto [alineada con el rayo], pero no es cierto, no lo sé.
99.	E1:	Y tendríamos que usar otra (…) otra recta…
100.	E2:	¿Para la mitad?
101.	E1:	Sí, pero es que…
102.	E2:	La mediatriz.
103.	E1:	No hay mediatriz, no ves que no hay opción de mediatriz (construye una segunda recta que parece perpendicular al rayo por el centro de la circunferencia o el extremo del rayo dado, ver 31).  (31)
104.	E2:	Pero la podemos hacer con dos círculos.
105.	E1:	¡Ah, es cierto! La podemos hacer con dos círculos. Yo no me voy a guiar de los pasos que dieron ahí [la pista] porque no me sirvió [pista ofrecidas por Euclidea].
106.	E2:	Y si (…) hagamos la mediatriz (borra la última recta y construye una segunda circunferencia de igual radio a la que se tiene construida y su centro es la intersección entre la recta que parece contener al rayo y la primera circunferencia, ver 32). ¿Acá? [Señala por donde pasaría la mediatriz].  (32)
107.	E1:	No. Tenemos que hallar la mediatriz es acá (señala el origen del rayo) [indica que la recta debe pasar por el origen del rayo] (borra todos los objetos geométricos, ver 33). (33) Entonces, el círculo no tendría que iniciar allá sino acá [señala hacia la izquierda del rayo, indicando que el centro de la circunferencia no sea el extremo del rayo pero que su radio quede determinado por dicho extremo]. (Construye una circunferencia cuyo centro no pertenece al rayo dado pero parece ser colineal con él y

		radio hasta el origen del rayo, ver figura de la izquierda, ver 34) ¡Ay! Mira, ¿si quedaron bien los dos punticos? [El centro de la circunferencia y el origen del rayo]. No, el centró quedó mal [no es colineal con el rayo] (borra la circunferencia anterior. Luego, construye una circunferencia con centro en un punto que no pertenece al rayo pero parece ser colineal con él y radio hasta el origen del rayo. Después, construye una segunda circunferencia con centro en el origen del rayo y radio igual a la primera circunferencia, ver 35).  (34)  (35)
108.	E2:	¡No! Pero tenemos que hallar la mitad de acá [señala que la mediatriz debe pasar por el origen del rayo].
109.	E1:	Entonces, tenemos que hacerla más corrida para acá [mueve el dedo hacia el lado derecho del rayo] (borra las dos anteriores circunferencias. Luego, construye una circunferencia con centro en un punto del rayo y radio hasta el origen del rayo. Después, construye una circunferencia con centro en el origen del rayo y radio igual al de la circunferencia anterior, ver 36).  (36)
110.	E2:	Pero ahí no se puede porque tiene que (…) ¡Ay, Dios mío señorita! [Señala con el dedo que la mediatriz debe pasar por el extremo del lado].
111.	E1:	Pero no me regañes (borra las dos circunferencias, ver 37). (37)
112.	E2:	¡A ver! Tracemos una línea imaginaria (construye una recta que pasa por el origen del rayo y parece ser perpendicular a este, ver 38).  (38)

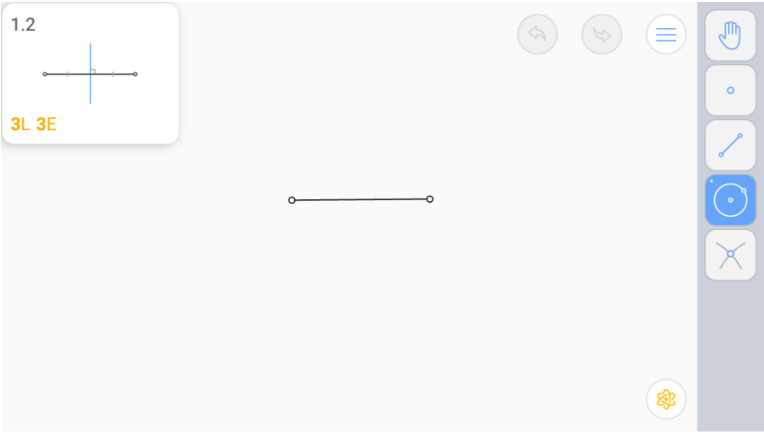
113.	E1:	¿Usamos otra pista?
114.	E2:	Que no, no ve que nos dan una pista por hora.
115.	E1:	Pero ahí hay otras dos.
116.	PR:	Es una por hora.
117.	E2:	¡Si ve!
118.	E1:	¡Ash! […] Algo que tenga 60 (…) ¿Un equilátero tiene 60?
119.	E2:	¿Un equilátero?
120.	E1:	Un triángulo equilátero.
121.	E2:	No sé (mientras habla E1, construye dos circunferencias de diferente radio pero que sus intersecciones parezcan ser puntos de la recta construida anteriormente, ver 39).  (39)
122.	E1:	60. Si la suma de todos [los tres ángulos de un triángulo] tiene que dar 180 siempre, la suma de todos sus ángulos. ¿Tú si trajiste el cuaderno para las definiciones?
123.	E2:	¡Claro!
124.	E1:	¡Se nota! (Borra las dos circunferencias construidas anteriormente, ver 40).  (40)
125.	PR:	Tienes la idea que la suma de los ángulos [de un triángulo] es 180. ¿Y de ahí, qué más quieres hacer?
126.	E1:	Y de ahí (…) Pues si da 180, es decir que haya uno que dé 60.
127.	E2:	No sé qué hacer. Ayuda (…)
128.	PR:	¿Qué virtud [característica] tiene el triángulo equilátero?
129.	E2:	Que todos sus lados son iguales. Y si todos son iguales…
130.	PR:	¿Y los ángulos?
131.	E1:	Deben ser lo mismo.

132.	PR:	¿Iguales?
133.	E1:	No.
134.	E2:	Sí. Ja, ja, ja.
135.	E1:	No porque debe haber uno de 90 y los otros si pueden que sean iguales (…) siempre. Un triángulo siempre tiene un ángulo de 90.
136.	PR:	O sea, ¿cualquier triángulo tiene un ángulo de 90?
137.	E1:	Sí (…) No, no, no. Pero siempre debe dar 180.
138.	PR:	La suma, sí [suma de los tres ángulos de un triángulo].
139.	E2:	Ok. Ayuda (…) Ok. Hagamos un triángulo (…) Ya sé cómo hacerlo [aplaude expresando su alegría]. ¿Te acuerdas cuando nos enseñaron a hacer un rombo? [Tutorial que ofrece Euclidea para construir un triángulo equilátero].
140.	E1:	¡Exacto! Dale (borra la recta construida, ver 41). (41)
141.	E2:	¿Cómo era el rombo?
142.	E1:	Hay que…
143.	E2:	Sí. La mediatriz. La mediatriz acá (hace una circunferencia con centro en el origen del rayo, radio cualquiera y un punto de esta queda sobre el rayo dado, ver 42) y la mediatriz acá (construye otra circunferencia de igual radio a la anterior con centro en el punto de intersección entre el rayo y la primera circunferencia, ver 43). ¡Ay! Punto, punto acá (marca la intersección superior entre las dos circunferencias). Y yo me imagino que ahí sigue… (Construye una recta que pasa por el origen de rayo y la intersección superior de las dos circunferencias, ver 44).  (42)  (43)  (44)
144.	E1:	¡Muy bien!
145.	PR:	¿Y por qué creen que funciona esa construcción?
146.	E2:	Porque acá primero tenemos que sumar (…) sabíamos que todos los ángulos deben sumar 180. Entonces, ehm, (…) ¡Ayuda!
147.	E1:	Eh (…) No sé.
148.	E2:	¡Ah! Todos miden 60 [señala los ángulos].
149.	E1:	Sí, porque si trazamos acá [la recta que pasa por la otra intersección de las circunferencias] quedan

		dos del mismo [ángulos de 60°].
150.	PR:	¿Y por qué los ángulos miden 60?
151.	E1:	Los ángulos miden 60 porque la circunferencia es de ese ¿tamaño?
152.	E2:	No, pues (…) 60, 60, 60. Si un triángulo es equilátero todos sus ángulos deben medir 60°.
153.	E1:	6 por 3…
154.	E2:	Pues, me imagino…
155.	E1:	6 por 3 (…) ¡Ajá! Todos deben medir 60.
156.	PR:	¿Y por eso funciona la construcción? (…) De replicar el triángulo.
157.	E2:	Sí.
158.	E1:	¡Ajá! De replicar los ángulos.
159.	PR:	Siguiente.

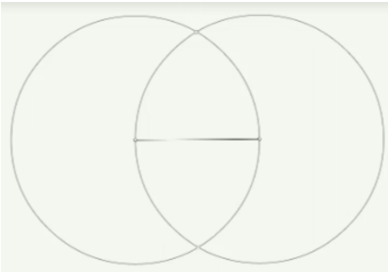
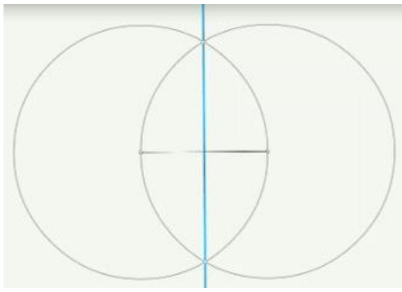
Tarea 2 – Alfa 1.2

Construir la mediatriz del segmento.



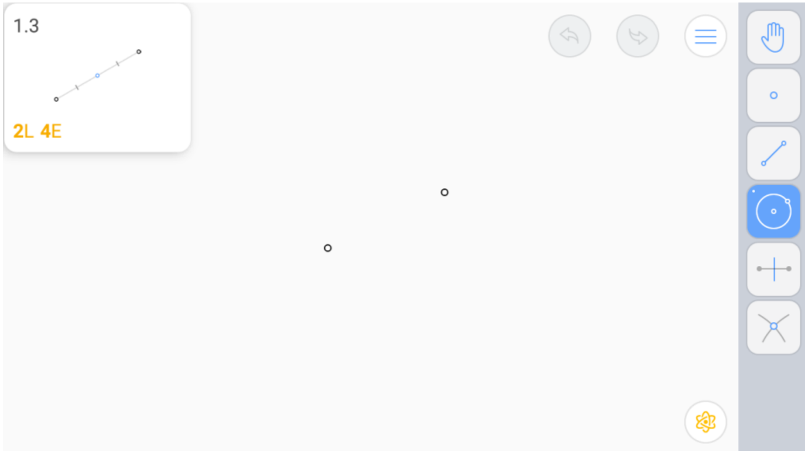
Las estudiantes al terminar de argumentar la construcción de la tarea 1.1, pasan inmediatamente a desarrollar la tarea 1.2.

1.	E1: 16:45	Mediatriz.
2.	PR:	¡Su amada mediatriz!
3.	E1:	¡Ahora sí!
4.	E2:	¡Ah, mediatriz! Los círculos [circunferencias], mediatriz…

5.	E1:	¡Ah!, pues la que hicimos ayer [recuerda una actividad planteada en clase de geometría].
6.	E2:	¿Ayer?
7.	E1:	Ayer, sí (…) el miércoles. (Construye dos circunferencias de radio igual al segmento dado y sus centros corresponden a los extremos del segmento, ver 1).  (1)
8.	E2:	¡Ah!, ayer en la…
9.	E1:	Puntito y puntito (marca las dos intersecciones entre las circunferencias).
10.	E2:	¡Mediatriz!
11.	E1:	¿Podría decir otra cosa? (Traza una recta que pase por las dos intersecciones de las circunferencias, ver 2).  (2)
12.	E2:	¡Por fin, mediatriz!
13.	PR:	¿Y por qué esa funciona? [La construcción].
14.	E1:	Porque (…) (…) ¡Ah!, por el radio de la circunferencia [mueve las dos manos indicando que las circunferencias se intersecan].
15.	E2:	Sí. Al hallar…
16.	PR:	¿De cuál de las dos?
17.	E1:	De las dos, por el radio de las dos es el mismo. Entonces al ser el mismo radio, trazas una (…) al trazar la línea [mueve las manos indicando una recta] pasa por la mitad del radio de las dos circunferencias [indica con las manos que la mediatriz interseca a la recta] (…) en las intersecciones; guiándonos por las intersecciones. Es obligatorio.
18.	PR:	Ok.

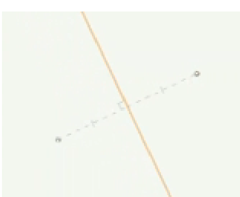
Tarea 3 – Alfa 1.3

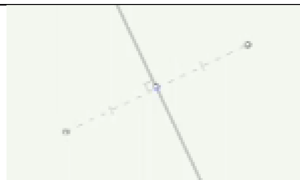
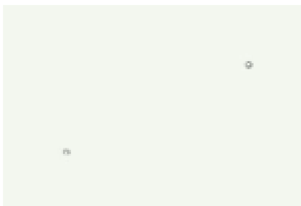
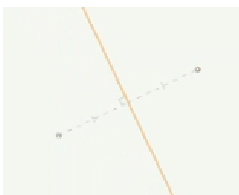
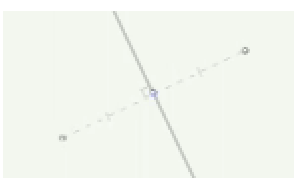
Construir el punto medio del segmento dado los dos puntos.

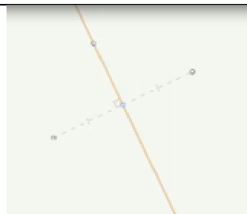
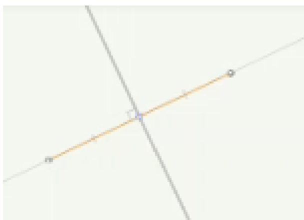
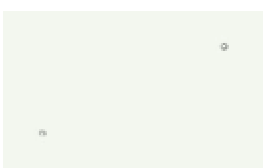
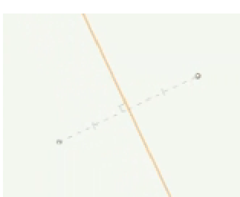


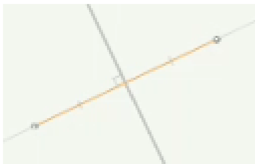
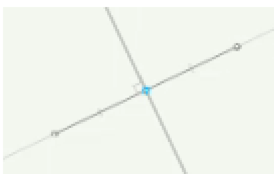
Después de desarrollar y argumentar la construcción de la tarea 1.2, Euclidea permite a las estudiantes desbloquear la herramienta de mediatriz. Adicionalmente, la aplicación ofrece un tutorial para aprender a manejar dicha herramienta. Las estudiantes parecen comprender que ya no es necesario construir dos circunferencia y una recta para construir la mediatriz de un segmento, pues la nueva herramienta lo hace directamente haciendo clic en dos puntos.

Luego, pasan inmediatamente a la tarea 1.3, pero no leen su enunciado y se aventuran a construir una circunferencia y luego a usar la herramienta de mediatriz.

1.	E1: 17:58	(Construye una circunferencia con centro en uno de los puntos dados, se arrepiente y la borra). ¡Ay!, yo por qué (…) No, no, no. Es esta (selecciona la herramienta de mediatriz y traza la mediatriz desde un punto dado al otro, ver 1). ¿No? [se asombra al evidenciar que Euclidea no valida la construcción] ¿Por qué no tiene…?  (1)
2.	E2:	¡Ah, sí! El puntito, el puntito en la mitad [señala donde debería quedar el punto medio entre los dos puntos dados] (…) Eso.
3.	E1:	(Coloca un punto sobre la mediatriz y que parezca ser colineal con los dos puntos dados, ver 2). ¿No? [Se asombra al evidenciar de Euclidea no valida la construcción]. O lo pasé o espérate…

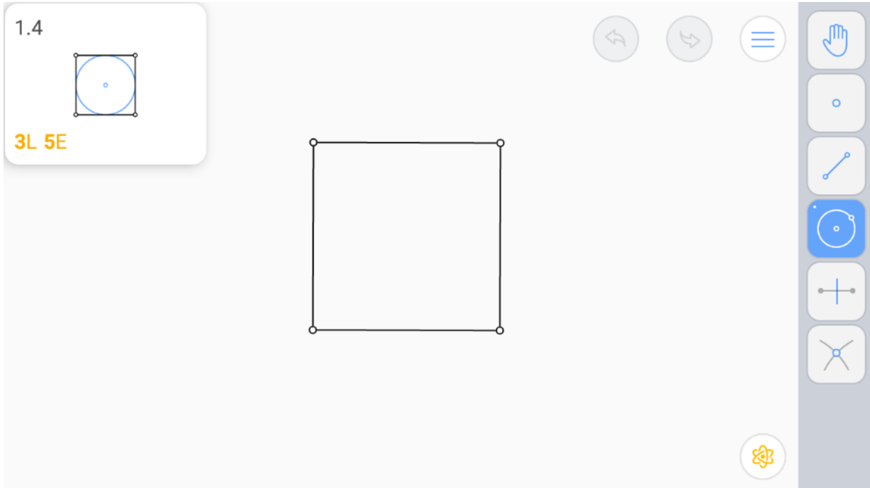
		 (2)
4.	E2:	¿Cuál es la misión? (selecciona la herramienta que permite leer la tarea a cumplir).
5.	E1:	Construye en el segmento definido en dos partes iguales (…) No, sí. Es que puse el punto mal (borra los elementos construidos, ver 3).  (3)
6.	E2:	Ah.
7.	E1:	No, pero mira (construye de nuevo una mediatriz entre los dos puntos dados, ver 4).  (4)
8.	E2:	No entiendo qué hay que hacer.
9.	E1:	Bueno, por ahora vamos bien (coloca nuevamente un punto sobre la mediatriz que parezca ser colineal con los puntos dados, ver 5). El punto lo estoy poniendo muy arriba o muy abajo.  (5)
10.	E2:	No. Ahí tiene que ponerse bien.
11.	PR:	¿Y por qué no pasan de nivel [lograr la tarea]? ¿Por qué creen que no?
12.	E1:	Porque (…) no sé.
13.	E2:	Ja, ja, ja.
14.	E1:	No sé.
15.	E2:	¡Ah!, pues pasa la línea [recta, que debe contener los dos puntos dados] a ver si es eso.
16.	E1:	¡Ah! Ok. Sí (traza una recta sobre la mediatriz, ver 6).

		 (6)
17.	E2:	¡No sea tonta!
18.	E1:	¡Ah! Ok (Borra la anterior recta y construye la recta que pasa por los dos puntos dados, ver 7). Y ya tenemos la mediatriz, ya nos la dan; es decir, no hay que sacar…  (7)
19.	E2:	Pero, no sabemos qué hay que hacer.
20.	E1:	(Lee de nuevo la tarea). Construye la mediatriz…
21.	PR:	Punto medio [corrige lo dicho por E1].
22.	E1:	El punto medio del segmento definiendo los…
23.	PR:	Dos partes iguales.
24.	E1.	Dos partes iguales. ¿Y por qué no? [No comprende porqué Euclidea no valida la construcción anterior]. La aplicación está mal. Ja, ja (borra todos los elementos construidos, ver 8).  (8)
25.	E2:	Ja, ja, ja.
26.	E1:	Es que ya está [la opción de mediatriz] (construye una mediatriz comprendida entre los dos puntos dados, ver 9).  (9)
27.	E2:	Debería ahí dar la mediatriz (…) (…) ¿No?
28.	E1.	La da porque la línea [recta] está azul [la mediatriz construida] (…) Entonces está bien. Pero…
29.	E2:	Ahm…

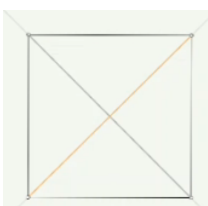
30.	E1:	No sé.
31.	PR:	Se acuerdan que yo les dije que la intersección era de dos objetos y ahí solamente tienen uno [señala la mediatriz construida].
32.	E1:	¡Ah! Ya sé (…) Y si trazamos… (Construye una recta que pase por los dos puntos dados, ver 10).  (10)
33.	E2:	No, pero ya los trazamos [mediatriz y recta] y dijeron que no (…). ¡Ah!, pon el punto [señala la intersección entre la mediatriz y la recta].
34.	E1:	Sí, porque… (Marca la intersección entre la mediatriz y la recta, ver 11).  (11)
35.	E2:	¡Eh! [Celebra].
36.		¡Ay Dios mío!
		[…]
37.	PR:	¿Y por qué usaron la mediatriz para encontrar ese punto medio?
38.	E1:	La mediatriz (…) porque precisamente es el punto medio. La mediatriz siempre equidista con el punto, ya sea A, B o bueno, [fija una mano y mueve la otra mano al lado de la mano fija en ambos sentidos, pareciendo que está a la misma distancia], con los dos puntos.
39.	PR:	¿Con los extremos? [Puntos dados y extremos del segmento].
40.	E1.	Sí. Ajá.
41.	E2:	¿Equidista?
42.	E1.	Sí, de los extremos [la mediatriz]. Tiene la misma medida de un punto al otro… [Mueve las manos formando dos intervalos de igual longitud].
43.	E2:	Y ya sabemos que intersección es…
44.	E1:	Sí la intersección [parece que comprenden que la intersección debe ser entre dos objetos geométricos].

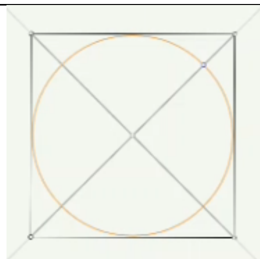
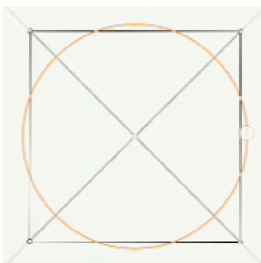
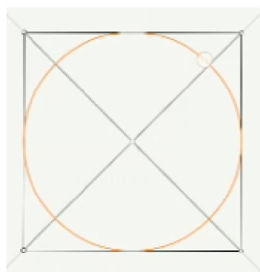
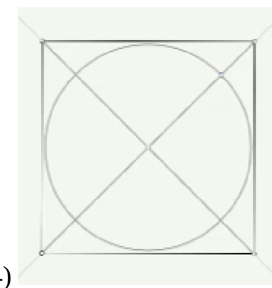
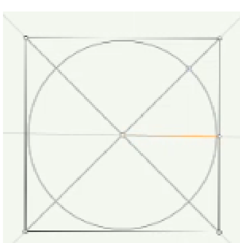
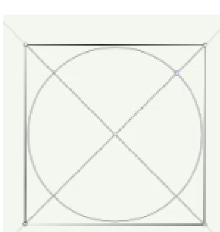
Tarea 4 – Alfa 1.4

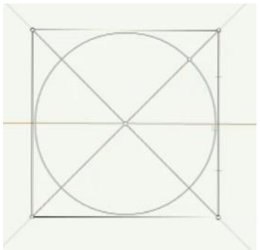
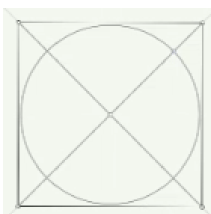
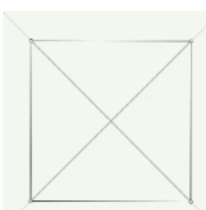
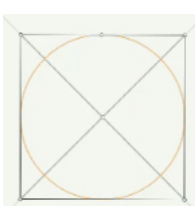
Inscriba una circunferencia en el cuadrado.

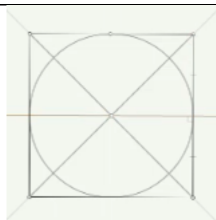
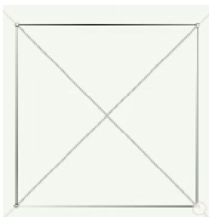
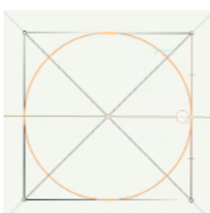


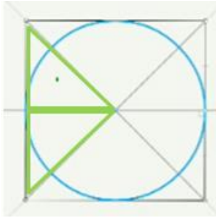
Las estudiantes al terminar de argumentar la construcción de la tarea 1.3 pasan inmediatamente a desarrollar la tarea 1.4. Ellas no leen lo que deben hacer y se guían simplemente por la imagen en miniatura que ofrece Euclidea en la parte superior izquierda de la pantalla.

1.	E2: 20:40	¡Ah!, ¡ou!
2.	E1:	Ya. Ya sé cómo (construye dos rectas que contienen a las diagonales del cuadrado dado, ver (1).  (1)
3.	PR:	¿Para qué hacen las diagonales?
4.	E1:	Para poder encontrar el punto medio porque (…) un cuadrado (…) viéndolo así, todos sus lados son iguales y al cruzar las líneas [rectas que contienen las diagonales] nos da el punto donde…
5.	E2:	O sea, un cuadrado obligatoriamente se llama cuadrado porque tiene todos sus lados iguales y al tener las diagonales, la intersección entre las diagonales [hace una equis con las manos] da siempre da el punto medio …
6.	E1:	(Construye una circunferencia con centro en la intersección entre las diagonales y radio tal que parezca estar inscrita en el cuadrado, ver 2) Ok. ¿Qué está mal? [reacciona al ver que Euclidea no válida la construcción] (…) Está mal este [punto de la circunferencia que determina su radio]. ¿Dónde tenía que terminar ese? [Punto de la circunferencia que determina su radio].

		 (2)
7.	E2:	No, ahí está bien.
8.	E1;	No, no mira (…) Está mal (…) El (…) El (…) O sea, no sé (…) No sé porque si es que hay un punto donde tú lo puedes terminar [punto de la circunferencia] (hace variar el radio de la circunferencia al mover el punto que determina su radio entre el centro y uno de los lados del cuadrado, ver 3, 4 y 5) No sé dónde lo pueda terminar. No, me sigue quedando mal (sigue moviendo el punto). ¿Cómo hacerlo?  (3)  (4)  (5)
9.	E2:	No sé.
10.	E1:	¿Y si trazamos? No sé (…) (…) Uno por acá [señala con la mano la mitad del cuadrado en forma horizontal].
11.	E2:	¿Una recta?
12.	E1:	Sí, no sé por qué serviría pero… (Construye una recta que pase por el punto de intersección de las diagonales y el posible punto medio del lado derecho del cuadrado, ver 6).  (6)
13.	E2:	Pero, tendríamos que… (Borra la recta construida, ver 7).  (7)

14.	E1:	Tendríamos que hallar primero la mediatriz de este [lado derecho del cuadrado] (construye la mediatriz del lado derecho del cuadrado, ver 8).  (8)
15.	PR:	¿Y por qué la mediatriz?
16.	E1.	No sé, se me está ocurriendo tal vez (…) pueda que el puntito tenga que terminar (…) Un círculo en el cuadrado (lee la tarea a cumplir).
17.	E2:	No, porque no.
18.	E1:	Ya puse el…
19.	E2:	No, porque mira el radio… (Señala con el dedo uno de los radios de la circunferencia).
20.	E1:	El radio tiene que ser el mismo… (Borra la mediatriz, ver 9).  (9)
21.	E2:	Sí…
22.	E1:	¡Ah, sí! ¿Y si ves que en algunos lados está más…? [señala con el dedo la intersección entre la circunferencia y el cuadrado] (Borra la circunferencia, ver 10).  (10)
23.	E2:	A ver, a ver. No sé (...) (...) El radio tiene que ser el mismo (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección entre las diagonales y que parezca estar inscrita en el cuadrado, ver 11).  (11)
24.	E1:	Ok, pero (...) No sé (...) Me queda mal [la circunferencia construida] (…) (…) Saquemos la mediatriz a los lados (construye la mediatriz del lado derecho del cuadrado, ver 12).

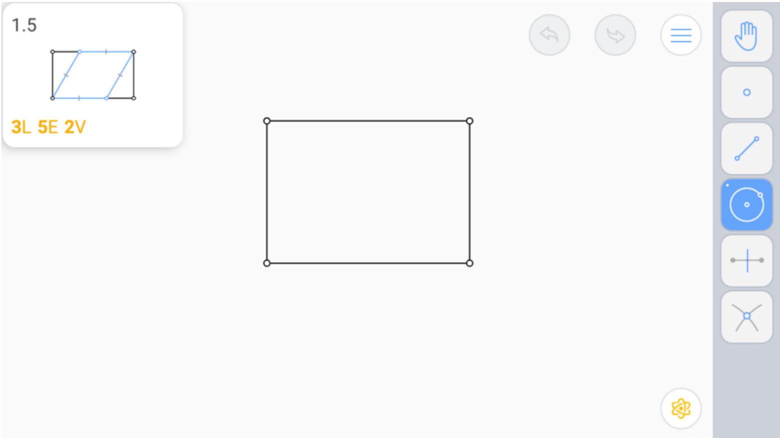
		 (12)
25.	E2:	Pero, ¿para qué?
26.	E1:	No sé. Entonces voy a borrar el circulo [circunferencia] (borra la mediatriz y la circunferencia, ver 13).  (13)
27.	PR:	¿Y para qué haces la mediatriz? (E1 construye la mediatriz del lado derecho del cuadrado).
28.	E1:	No sé, estoy pensando (construye la mediatriz del lado izquierdo del cuadrado).
29.	E2:	No, es la misma [mediatrices de lados opuestos del cuadrado].
30.	E1:	¡Ah! Sí. ¡Qué tontis!
		[…]
31.	E2:	¿Pero para qué la mediatriz?
32.	E1:	(Construye una circunferencia con centro en la intersección entre las diagonales y radio hasta el punto de intersección entre la mediatriz y uno de los lados del cuadrado, ver 14) [Euclidea resalta la circunferencia en color amarillo]. ¡Mira, si ves! [Logra la tarea].  (14)
33.	E2:	¡Ah, claro. La mediatriz!
34.	E1:	Lo hice porque pensé que tenía que terminar justo en (…) un lugar donde…
35.	E2:	Pues, es que en la aplicación sí sé [señala la tableta]. Pero digamos, cuando uno lo vaya a hacer acá [lleva las manos hacia la mesa], pues sí, de pronto se necesita la mediatriz para llevar el círculo [hace con la mano un movimiento en cruz que parece ser un segmento y su mediatriz] (…) para identificar el radio (…) el radio para hacer la circunferencia [hace con un dedo una circunferencia en el aire] y que no….
36.	E1:	Nos quedó bien.
37.	PR:	Otra vez, ¿Por qué la mediatriz?

38.	E1:	La mediatriz de esto [señala el lado derecho del cuadrado], porque pues (…) no sé, pensé que (…) quizás al quedar a otro ladito influyera [la intersección entre el cuadrado y la circunferencia fuera diferente a los puntos medios de sus lados] (…) (…) o sea, tenía que quedar (…) bueno, a mi pensar tenía que quedar contra el cuadrado (…) porque es círculo en cuadrado.
39.	E2:	¿Qué?
40.	E1:	Tenían que quedar los dos juntos, círculo y cuadrado, y el único punto que los podría reunir es este, este, este [señala cada punto medio de los lados del cuadro. Estos son la intersección entre la circunferencia y el cuadrado].
41.	E2:	Sí, y al hallar la mediatriz [señala con el dedo la mediatriz construida]….
42.	PR:	¿Y esos puntos cuáles son? [Señala los puntos que E1 señaló antes].
43.	E1:	Esos puntos son (…) Pues, se puede decir que (…) No, es que no es la mitad.
44.	E2:	¿Qué? (…) No, no, no. La mediatriz, lo que nos hace es que cuando [señala con el dedo toda la mediatriz] (…) como ya teníamos el punto medio del triángulo [cuadrado] gracias a las diagonales [hace una equis en el aire con el dedo], hallamos el radio y al hallar el radio y expandir el círculo medía lo mismo [juntas las manos y las separa]. No se salía ni nada.
45.	PR:	O sea, el radio lo obtuvieron con el…
46.	E2:	La mediatriz.
47.	PR:	Con la mediatriz.
48.	E1:	O sea (…) por decirlo, el radio exacto (…) El radio exacto porque teníamos radio, pero no el radio exacto donde debía terminar el puntito.
49.	PR:	¿Pero no tiene nada que ver que el punto sea ahí? [Señala el punto medio de uno de los lados del cuadrado] o ¿puede ser un poquito más corrido [mueve la mano para indicar que el punto podría estar en otra posición]?
50.	E1.	Para mí, sí influye porque por algo le saqué mediatriz.
51.	E2:	Sí, porque si es más (…) O sea, no importa. Pero las diagonales obligatoriamente tienen que ser más grandes que la figura en sí; es decir (…) o sea, digamos hablando de un triángulo [cuadrado] los lados deben medir lo mismo, pero las diagonales miden más que los lados (…) por eso debemos hallar la mediatriz de triángulo para hallar …
52.	E1:	También, un ejemplo. También pudiera ser ahí [señala el lado inferior del cuadrado] pero también pudiera ser acá [señala el lado superior del cuadrado] (…) hallar la mediatriz de este [señala el lado superior del cuadrado]. Porque si vemos se forman dos triángulos [señala los triángulos comprendidos entre el lado izquierdo del cuadrado, las dos diagonales y el mediatriz, ver figura]… 

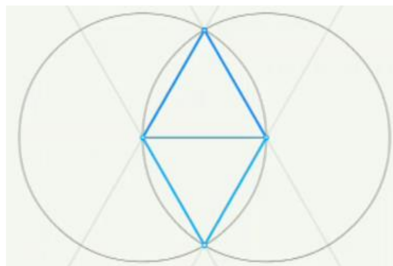
53.	E2:	Porque si lo hacemos un poquito más acá [señala el punto de intersección entre la circunferencia y el cuadrado, tal que no fuera el punto medio del lado] entonces el triángulo sería…
54.	E1:	Si lo hubiéramos puesto, por ejemplo acá [señala un punto del lado izquierdo del cuadrado diferente a su punto medio] (…) habrían quedado los triángulos disparejos; o sea, habrían quedado…
55.	E2:	¿Disparejos?
56.	E1.	Sí, Míralos de otra forma, ¿si ves que aquí los dos triángulos quedaron equiláteros? [Señala los triángulos]. Si lo hubiéramos no sé, puesto por acá [señala un punto del lado izquierdo diferente al punto medio] (…) más o menos por acá [señala un punto más arriba del punto medio], no iban a quedar igualitos [los triángulos] sino esta partecita de acá [señala el triángulo delimitado por el lado izquierdo del cuadrado, su mediatriz y una diagonal] iba a quedar con más proporción que la del lado de allá [señala la otra parte delimitada por el lado izquierdo del cuadrado, su mediatriz y una diagonal].
57.	E2:	Sí. También hablando de triángulos, también.
58.	E1:	¿Ya podemos pasar?
59.	E2:	Ok.

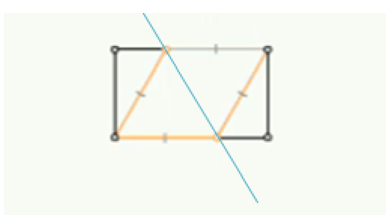
Tarea 5 – Alfa 1.5

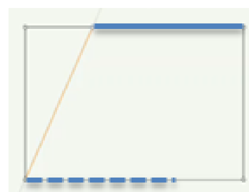
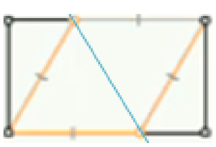
Inscriba un rombo en el rectángulo de modo que compartan una diagonal.

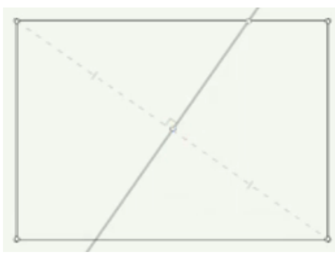
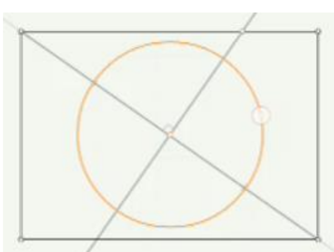


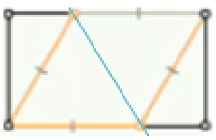
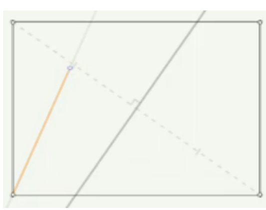
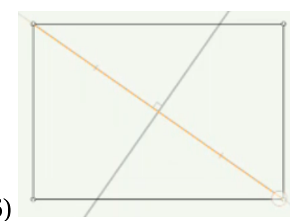
Las estudiantes al terminar de argumenta la construcción de la tarea 1.4 pasan inmediatamente a desarrollar la tarea 1.5. Ellas observan la figura miniatura que ofrece Euclidea para la solución de la tarea (parte superior izquierda de la pantalla), una de ellas afirma que ya sabe cómo solucionar esta tarea a lo que la profesora le pregunta si ya había jugado en Euclidea; la estudiante responde que esa no es la razón sino que esta tarea se parece a la construcción que debieron realizar para el triángulo equilátero. En dicha construcción, como fue un tutorial, Euclidea les indicó a las estudiantes que construyeran los dos posibles triángulos equiláteros, puesto que cada uno se forma con una de las dos intersecciones entre las circunferencias. Parece que las estudiantes no determinaron los dos triángulos sino que observaron un rombo (ver figura).

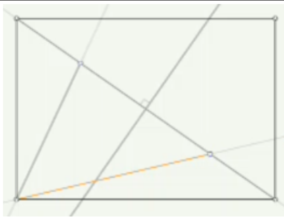
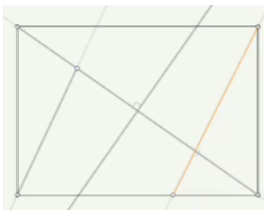
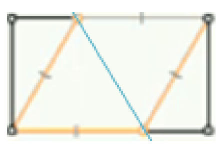
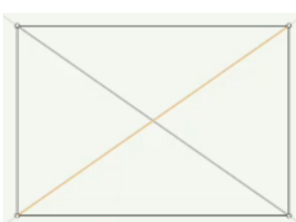


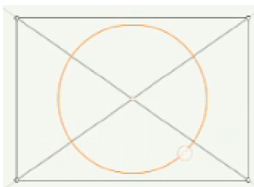
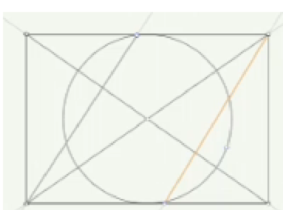
1.	E1: 26:12	(Construye la mediatriz del lado izquierdo del rectángulo, ver figura 1). No sé (…) ¿una línea?  (1)
2.	E2:	Yo no sé.
3.	PR:	¿Para qué haces la mediatriz de ese lado…
4.	E1:	No sé (…) estoy pensando. ¡Ay! Es que no sé (…) ¿Por este, quizá? (Selecciona la herramienta para leer el enunciado).
5.	E2:	¿Inscribe es un rombo? (Lee la tarea a desarrollar) (…) ¡ah! Es un rombo.
6.	E1:	Por eso te digo que fue el mismo del primero que nos dieron [tutorial de triángulo rectángulo].
7.	E2:	Ok. Podemos hacer (…) no sé (…) la mediatriz, pero la mediatriz acá queda torcida (señala con un dedo la recta que contiene una diagonal del rombo a construir, ver (2).  (2)
8.	E1:	Sí. La mediatriz quedaría mal. No sé (…) hay que sacar los dos triangulitos (señala con el dedo los dos triángulos que forman, ver 2).
9.	E2:	¡Ah, sí! Los triángulos así (señala con el dedo los dos triángulos que forman, ver 2).
10.	E1:	¡Ayúdame!

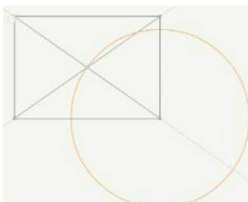
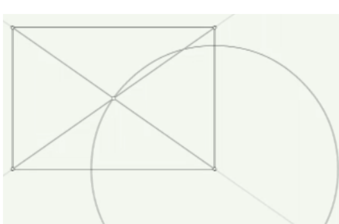
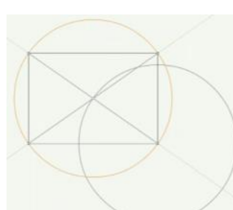
11.	E2:	Los ángulos de 60°, ¿cierto?
12.	E1:	De 60°. Tú ya hiciste lo de 60 ahorita.
13.	E2:	Pero no me acuerdo (…) era con el (…) con el ¿qué? (…) con los círculos…
14.	E1:	Con las circunferencias…
15.	E2:	Pero ya no podemos porque se supone que la mediatriz ya la tenemos.
16.	E1:	¡A ver!, ¡A ver!, ¡Piensa! (…) (…) Ok. ¿Y si replicamos la medida de uno (…) (señala con el dedo el posible lado superior del rombo)?, un ejemplo, no sé. Si (…). Espérate borramos este (borra la mediatriz construida, ver 3) (…) (…) La replicamos por acá (construye una recta, tal que dos puntos de ella son el vértice inferior izquierdo y un punto del lado superior del rectángulo, ver 4) y esta medida que queda acá (señala el segmento azul, ver 5) la replicamos acá (señala con el dedo el lado inferior del rectángulo, refiriéndose al segmento punteado, ver 5). Aunque, es cierto, ya me quedó mal [parece comprender que la construcción no es robusta].  (3)  (4)  (5)
17.	E2:	Sí. (E1 borra la recta construida anteriormente, ver 6).  (6) ¡A ver! (…) Tenemos que hacer dos triángulos ¿equiláteros? (…) ¿Sí?, ¿se llaman así?
18.	E1:	¡Ah! Te acuerdas el primero que nos daba (…) Sí, las circunferencias (…) Te acuerdas (…) Mira esta forma (selecciona la herramienta que tiene el enunciado e imagen de la tarea a realizar). Míralo así (señala con el dedo la diagonal menor del rombo, ver 7), si lo partes por la mitad son dos… [Triángulos].  (7)
19.	E2:	¡Exacto! Eso es lo que estoy intentando….
20.	E1:	Pero no te entendía.
21.	E2:	Pero tenemos que hacer los círculos muy extraños….
22.	E1:	Hay que sacarle… (señala con el debo el que sería el segmento azul o diagonal menor del rombo, ver 7) Ya, ya lo entendí (…). Estoy pensando una idea loca (construye una mediatriz de una diagonal del rectángulo, cuyos extremos son el vértice superior izquierda y el vértice inferior derecho, ver 8).

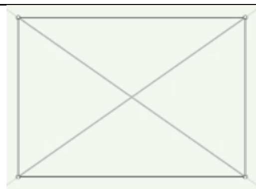
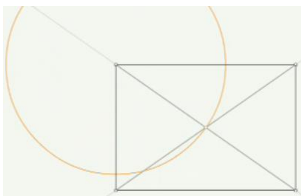
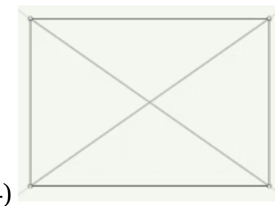
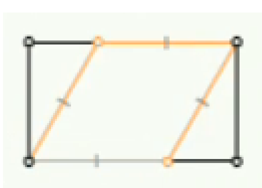
		 (8)
23.	E2:	La mediatriz… No se entiende lo que dice.
24.	E1:	No sé (…) Y ahí empezar a sacar los (…) Si esto se partiera en la mitad (señala con el dedo el rombo de la figura miniatura que Euclidea ofrece) más o menos el punto medio quedaría por acá (señala con el dedo el punto que sería la intersección entre las dos diagonales del rombo, figura miniatura) que es por donde pasan…
25.	E2:	O sea, ¿cómo así?
26.	E1:	No, no, no. Me corrí (construye un punto sobre la mediatriz, tal que parezca quedar sobre la diagonal del rectángulo, ver 9).  (9)  (10) ¡Ah! Verdad que tiene que intersectarse… (Construye una diagonal del rectángulo, ver 10) [Parece comprender que la construcción de un punto debe ser resultado de la intersección de objetos].
27.	E2:	No. ¿Sabes qué podemos hacer? Las diagonales (señala con el dedo lo que sería las diagonales del rectángulo) y de ahí hallar la mitad y ahí sacar los círculos para hacer el este [el rombo]. ¿Si me entiendes?
28.	E1:	No te entiendo. Espérate… (Construye una circunferencia con centro en la intersección entre la mediatriz y la diagonal, pero no determinado su radio, ver 11).  (11)
29.	E2:	Dale a ver si puedes y si no lo hacemos como yo pienso.
30.	E1:	Dale tú porque estoy perdida (borra todos los objetos construidos, ver 12).

		 (12)
31.	E2:	La idea es hacer (…) digamos (…) te acuerdas (…). ¡Ah! Pero era un cuadrado. No, estoy loca.
32.	E1:	Bueno. Tenía algo hecho. No sé, sacarle esto aquí (construye de nuevo la mediatriz de una diagonal del rectángulo, ver 13).  (13) Mm… ¿Y si sacáramos…?
33.	E2:	Pero esa no es la mitad [no señala nada, pero posiblemente se refiere a la diagonal menor del rombo o diagonal azul, ver 14].  (14)
34.	E1:	… De este [vértice inferior izquierdo del rectángulo] a este [un punto sobre la diagonal a la cual se construyó su mediatriz] (construye una recta que pasa por los puntos especificados anteriormente, ver 15).  (15)  (16)  (17) Pero no hay una línea [la diagonal del rectángulo], así que no me lo va a dejar (borra la recta construida anteriormente, ver 16). Tenía que quedar una línea por aquí (construye la diagonal del rectángulo, ver 17). Mira la línea está bien; o sea, la línea esta solita; es decir está bien. Si está bien.
35.	E2:	No entiendo.
36.	E1:	Espérate, hago algo loco (construye una recta que pasa por el vértice inferior izquierdo del rectángulo y un punto de la diagonal, determinado por la marquilla superior de congruencia. Luego, construye una recta que pasa por el vértice inferior izquierdo y un punto de la diagonal, determinado por la marquilla inferior de congruencia, ver 18).

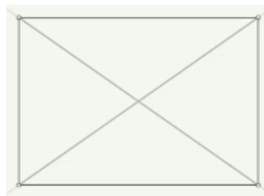
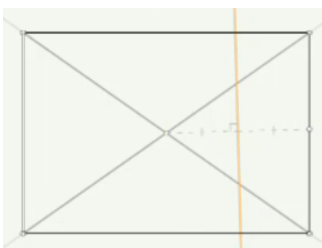
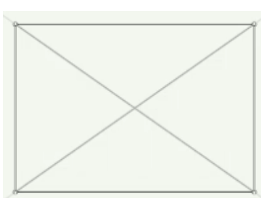
		 (18)  (19) ¡Uich! Ya la embarré (borra la última recta construida, ver 19).
37.	E2:	Yo no entiendo nada.
38.	E1:	O sea, si esto pasara (construye una recta que pasa por el vértice superior derecho del rectángulo y un punto del lado inferior del rectángulo, tal que la recta parezca pasar por la marquilla inferior de congruencia de la diagonal, ver 20).  (20)
39.	E2:	¡Ah! ¿Estás intentando replicar la figura?
40.	E1:	Estoy intentando replicarla. Intentaba.
41.	PR:	¿Y para que hiciste la mediatriz inicialmente?
42.	E1:	Es que no sé (borra las dos últimas rectas construidas, ver 21). Pensaba que aquí (abre la figura miniatura de la tarea a realizar), si se le trazaba una mediatriz (señala con el dedo la diagonal menor del rombo o diagonal azul, ver 22), sacándole una mediatriz directa para mí, un poco loco, pensaba (…) ¡Ah! No, no, no. Ya sé (Borra la mediatriz construida anteriormente, ver 23).  (21)  (22)  (23) Tengo que sacar la mediatriz pero (…) ni siquiera es una mediatriz lo puedo hacer con líneas (construye las diagonales del rectángulo, ver 24).  (24)
43.	E2:	¡Ahm!
44.	E1:	¿Es que si vez? Y desde ahí empezamos a hacer la…
45.	E2:	¿Pero ahí está la mitad? ¿Está la mitad? (Señala con el dedo el punto de intersección entre las

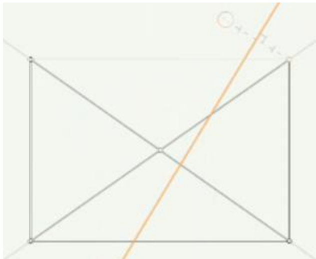
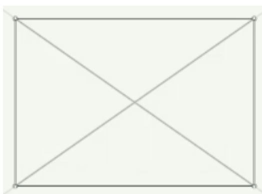
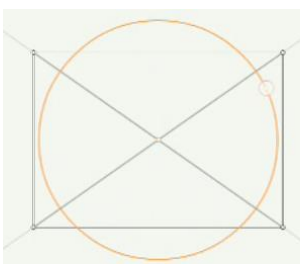
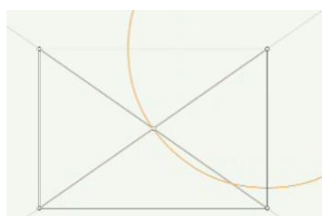
		diagonales)
46.	E1:	Sí. A mi pensar.
47.	E2:	¡Ah! Entonces si puedo. Es que pensé que solo funcionaba en los cuadrados. ¡Ay Dios mío!
48.	E1:	Dale. Ahí dale tú [tomar el mando de la construcción].
49.	E2:	Pero, ¿pensamos hacer lo mismo? ¿Los círculos, para hacer el rombo?
50.	E1:	Sí. Dale. Sí, hacer un rombo con círculos.
51.	E2:	¿Era acá? [Parece que señala la intersección de las dos diagonales].
52.	E1:	Sí.
53.	E2:	¿Cómo era? [La construcción que realizaron en el tutorial].
54.	E1:	No sé hermosa, tú fuiste quien la hizo [la construcción del tutorial].
55.	E2:	(Trata de construir una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales pero no determina su radio, ya que este varía en el interior del rectángulo, ver 25). Espérate que ya no…  (25)
56.	E1:	No. Mira que sí lo hiciste bien. Donde se intersecta la línea del círculo con esta (señala con el dedo el lado superior del rectángulo) pueda que sirva.
57.	E2:	No sé. No.
58.	E1:	Pueda que sí (construye una recta que pase por el vértice inferior izquierdo del rectángulo y el punto que parece ser la intersección entre el lado superior y la circunferencia, ver 26). Chas y esta chas (construye otra recta que pase por el vértice superior derecho del rectángulo y el punto que parece ser la intersección entre el lado inferior y la circunferencia, ver 26).  (26) O sea, quedó un rombo pero…
59.	E2:	Tiene que quedar así un rombo (señala con el dedo sobre el rectángulo cómo debería quedar el rombo construido); pero, no sé (borra las dos rectas y la circunferencia construidas, ver 27).  (27)

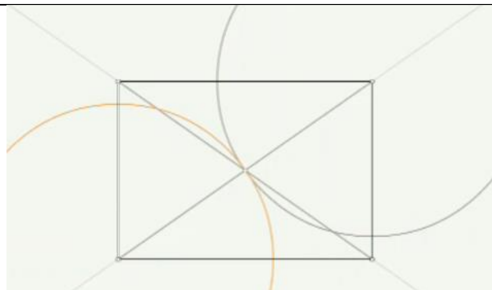
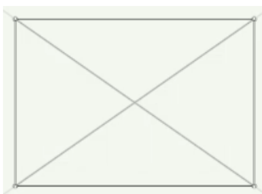
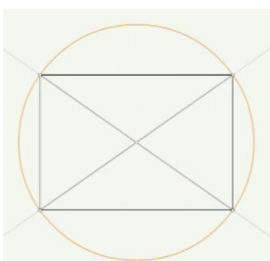
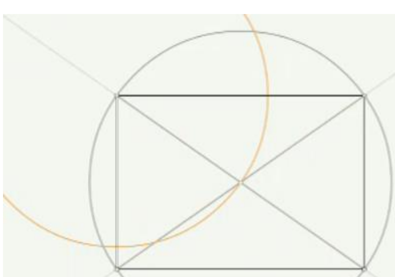
60.	E1:	Hay que hallar la mitad; es decir…
61.	E2:	No. La mitad no la necesitamos, la mitad la hallamos cuando hacemos los círculos.
62.	E1:	¡Ay! ¿Cómo fue que tú lo hiciste? [La construcción del tutorial].
63.	E2:	No me acuerdo.
64.	E1:	Espera. Tú agarraste la línea, pusiste círculo aquí, círculo allá [trata de recordar la construcción realizada en el tutorial] (realiza con el dedo la construcción de la recta y dos circunferencias sobre la meza), sacaste la mitad y te quedó [la construcción solicitada en el tutorial].
65.	E2:	No sé. (Construye una circunferencia centro en el vértice inferior derecho y radio hasta el punto de intersección entre las diagonales, ver 28)  (28)
66.	E1:	¡Ay! Creo que estás bien.
67.	E2:	(Construye otra circunferencia con centro en el vértice superior izquierdo y radio un poco mayor a la mitad de una de las diagonales, ver 29). Ja, ja.  (29).
68.	E1:	No. Pero entonces tendrían que compartir…
69.	E2:	(Borra la anterior circunferencia, ver 30) Sí. Pero no vez que la mediatriz queda acá (señala con el dedo la diagonal mayor del rombo; es decir, la diagonal que comparte con el rectángulo) (construye una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta el vértice inferior derecho, ver 31).  (30)  (31)
70.	E1:	Ah...
71.	E2:	Esto (señala la intersección superior de las dos circunferencias) lo necesitamos acá (señala la diagonal que hay en común entre el rectángulo y el rombo); para que (…) (borra las dos circunferencias, ver 32). Si se corre un poquito, pues…

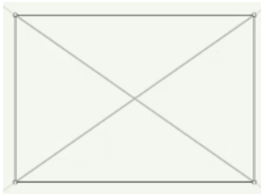
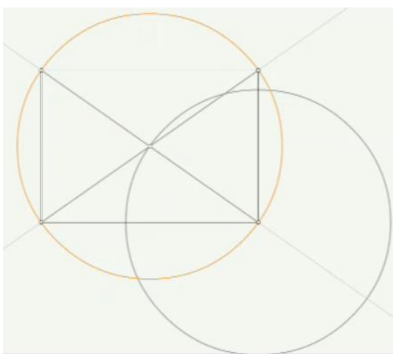
		 (32)
72.	E1:	¿Y si lo hiciéramos así? (Construye una circunferencia con centro en el vértice superior izquierdo del rectángulo y radio hasta la intersección de las dos diagonales, ver 33). ¿Y si esta [otra circunferencia] la hiciéramos? (Construye una circunferencia con centro en el vértice inferior derecho del rectángulo y radio hasta la intersección de las dos diagonales, ver 34). También pailas [la construcción no funciona] (Borra las dos circunferencias, ver 35).  (33)  (34)  (35)
73.	E2:	¿Esa (selecciona la herramienta manito) no era para moverlo? (Mueve toda la figura en la pantalla con la herramienta de la manito). Ah, pero se mueve toda la figura.
74.	E1:	No juegues ahorita. ¡Ay! Laurita [E2] a ver piensa. Es más necesitamos trazar (…) Ay, no (…) Es que, ay…
75.	E2:	La mediatriz.
76.	E1:	¿Pero cómo la podemos hallar?
77.	E2:	¿Por qué primero no…? No, no.
78.	E1:	Sí, No. Dime.
79.	E2:	Esto (señala con el dedo la figura miniatura) es un triángulo (…) ¿recto?
80.	E1:	No. Es un triángulo ¿equilátero? (Abre la herramienta que permite leer y ver la figura de la tarea a realizar).
81.	E2:	No señora. Recto.
82.	E1:	¿Recto?
83.	E2:	Estos dos (señala los triángulos negros, ver 36).  (36)
84.	E1:	¡Ah! Yo si decía, pero…
85.	E2:	No sé. Podemos iniciar con algo…
86.	E1:	¿Rectos? Ya están. Los dos están rectos. Mira (señala con el dedo los dos lados negros del triángulo

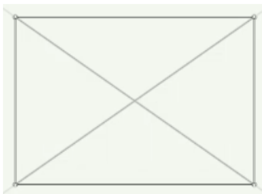
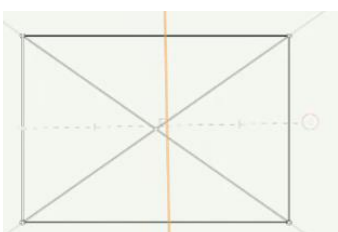
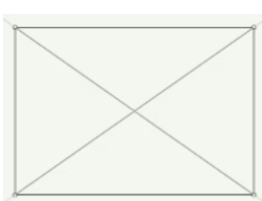
		de la izquierda, formando una ‘ele’).
87.	E2:	Pues sí, pero no sé…
88.	E1:	Toca es mirar el ángulo (señala con el dedo el ángulo superior del rombo), porque si supiéramos que ángulo (…) Hay que mirar el ángulo que hay aquí (señala con el dedo un ángulo del rombo) y el ángulo que hay allá (señala con el dedo otro ángulo del rombo).
89.	E2:	¿Cómo hicimos con el de 60? [Tarea 1.1].
90.	E1:	El de 60 (…) Es que, lo que yo me acuerdo, ¿no?...
91.	E2:	¡Ah! No. El de 60 no; era los círculos (…) El todo es saber montar los círculos.
		[…]
92.	E1: 32:35	Si tenemos un punto donde tiene que llegar (señala los puntos que están contenidos en los lados del rectángulo y que son vértices del rombo), lo único que tenemos que hacer es trazar por acá (señala la pantalla con el dedo los lados del rombo no compartidos con el rectángulo). Más o menos…
93.	E2:	¿Será que acá (señala el punto de intersección de las diagonales) si queda el punto medio del rombo?
94.	E1:	Profe [PR], ¿ahí (señala el punto de intersección de las diagonales) si quedaría el punto medio del rombo? O sea, del rombo.
95.	E2:	Del rombo que se… ¿Esto qué es (señala la figura miniatura de la solución de la tarea)? Un cuadrilátero. ¿Si sería acá (señala el punto de intersección de las diagonales) la mitad del cuadrilátero?
96.	PR:	Eh… Digamos que ese es el centro pero del rectángulo, tal como lo tienen ahí (señala la pantalla con el dedo, haciendo alusión al rectángulo).
97.	E2:	Sí.
98.	PR:	Del rombo no lo podría garantizar.
99.	E1:	¡Ash! Yo estaba segura que era…
100	E2:	¡Ah! Pero no sé (intenta construir una mediatriz desde el punto de intersección de las diagonales, ver 37).  (37)
101	E1:	¡Arruinaste mis sueños!
102	E2:	¿Cómo se saca esto [la mediatriz]?
103	E1:	Pues tiene que llevarla a otro punto [E2 toca un punto pero no parece comprende que necesita otro punto para construir la mediatriz del segmento determinado].
104	E2:	¡Ah!
105	E1:	[E2 arrastra el dedo sobre la pantalla hasta el vértice inferior derecho para completar la construcción de la mediatriz, cuando es interrumpida por E1] Si vez que tiene como unas reglitas [las marquillas

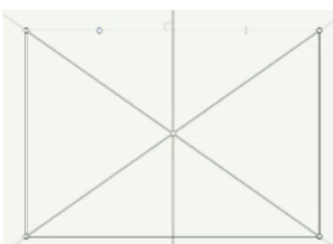
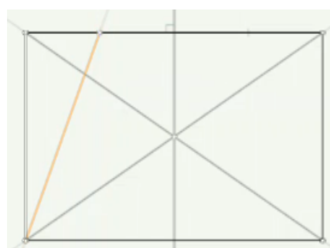
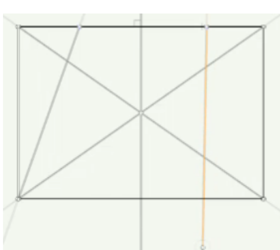
		de congruencia de segmentos que aparecen cuando se construye una mediatriz] (señala con el dedo las marquillas de congruencia), podemos medir que tanto hay de un lado a otro; o sea no sé si te das cuenta… Espérate… (E2, construye una mediatriz del segmento cuyos extremos son la intersección de las diagonales y el punto que parece punto medio del lado derecho del rectángulo, ver 38). Estoy mal (borra la mediatriz construida, ver 39)  (38)  (39) ¿Si vez que cuando sacas el punto medio te da como una medida?
106	E2:	No.
107	E1:	Podemos usar esa (construye la mediatriz del segmento cuyos extremos son la intersección de las diagonales y el que parece ser el punto medio del lado derecho del rectángulo, ver 40). (40) ¿Si vez? Podría ser un centímetro o lo que sea; el hecho es…
108	E2:	¡Ah! ¿Las rayitas?
109	E1:	Sí. Y si la usamos en el mismo lugar podemos, las podemos replicar.
110	E2:	¡A ver! (Borra la mediatriz construida, ver 41). (41) (…) (…) ¡Mm! ¿Y si hallamos la mediatriz acá? [Señala con el dedo al parecer una diagonal del rectángulo].
111	E1:	Bien.
112	E2:	O sea, no sé.
113	E1:	¡Dale!
114	E2:	No, pero no sé cómo hacerlo. O sea (…) porque…
115	E1:	Mira que…
116	E2:	Teníamos un punto de partida (…) Ah no, mentiras. Sería algo como (trata de construir la mediatriz

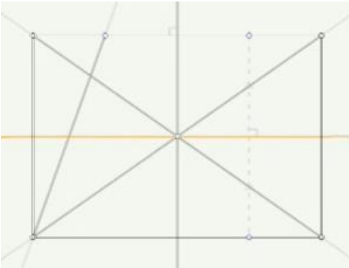
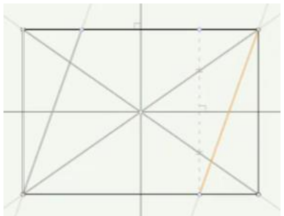
		de un segmento, tal que uno de sus extremos es el vértice superior derecho del rectángulo. El otro extremo lo mueve por la pantalla de tal manera que la mediatriz coincida con una diagonal, ver 42).  (42)
117	E1:	Sería con una circunferencia.
118	E2:	No creo (borra la mediatriz, ver 43).  (43)
119	E1:	Sí, ya. La tengo (construye una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales pero no define su radio, ver 44). No, necesito que quede… (Borra la anterior circunferencia y construye una nueva circunferencia con centro en el vértice superior derecho y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 45).  (44)  (45) ¡Ay, mira! Me las dejó bien (…) Eso espero (…) Sí, mira [corre la tablet para que quede en dirección a E2]. Me quedó bien. No tiene ningún punto rojo [Euclide coloca de color rojo a los puntos que no son producto de una intersección]. Así que no estoy loca.
120	E2:	Aggg.
121	E1:	No entiendo por qué hice una circunferencia (…) ¡A ver! (…) (…) ¿Estamos mal?
122	E2:	Ja, ja, ja.
123	E1:	Otra, otra circunferencia [dice en voz baja].
124	PR:	¿Para qué hiciste esa circunferencia que tienes ahí (ver 45)?
125	E1:	No sé. Se me vino a la cabeza hacer una circunferencia e hice una circunferencia (…) No, espérate. ¿Y si hacemos otra por este lado? (Construye una circunferencia con centro en el vértice inferior izquierdo y radio hasta la intersección de las diagonales, ver 46).

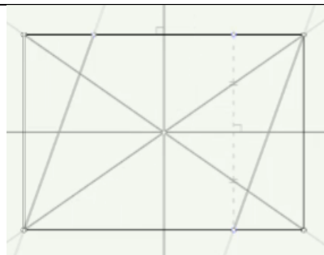
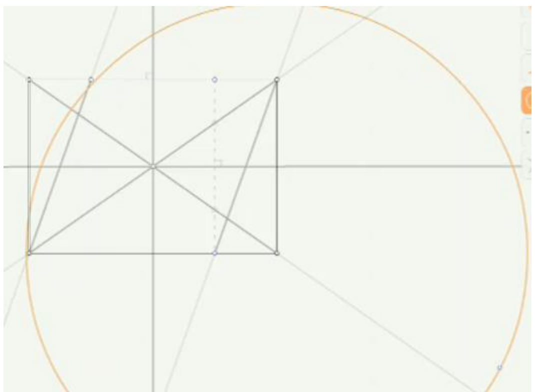
		 (46)
126	E2:	Sería así [señala con los dedos las dos circunferencias] pero hacerlo al revés. O sea, de esta manera [gira la mano “90 grados”]. O no sé, espérate.
127	E1:	Entonces, cambia.
128	E2:	Yo no sé (Borra las dos circunferencias, ver 47).  (47) ¡A ver! Lo hiciste de acá [intersección de las diagonales], ¿cierto? (Construye una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta el vértice superior izquierdo del rectángulo, ver 48).  (48) ¡Ah, no!
129	E1:	No, no, no. Yo lo hice desde uno de los de afuera [señala con el dedo el vértice superior derecho, indicando que este es el centro de una circunferencia] para uno de los de adentro [intersección de las diagonales]. En cambio tú lo estás haciendo de uno de los adentro [intersección de las diagonales] hacia uno de los de afuera [vértices del rectángulo] (Mientras tanto, E2 construye una circunferencia con centro en el vértice superior izquierdo y radio hasta la intersección de las diagonales, ver 49).  (49)

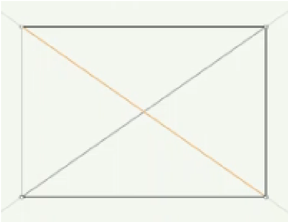
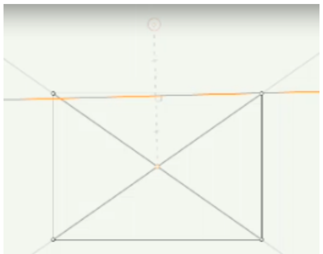
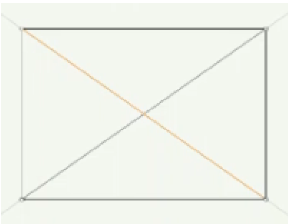
		¿Si estoy bien?
130	E2:	No sé (…) Bueno, ahí ya tenemos…Ja, ja, ja (…) Estoy obsesionada con la mediatriz (borra la dos circunferencia construidas, ver 50).  (50)
131	E1:	Mm mamita. Profe ayuda.
132	E2:	Espere (construye dos circunferencias. La primera con centro en el vértice inferior y radio hasta la intersección de las diagonales y la segunda, con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta el vértice inferior derecho, ver 51).  (51) (…) (…) Ahí [señala la construcción] se parece al rombo.
133	E1:	Sí. Ya lo tenemos, pero no es.
134	E2:	Lo tenemos fuera del triángulo [el rombo de color verde construido por dos circunferencias de igual radio, ver 52].  (52)
135	E1:	Mm. Ayuda.
136	PR:	[señala con el dedo la herramienta que enuncia la tarea] ¿Qué dice la tarea?
137	E1:	[Lee la tarea] Inscribe un rombo en el rectángulo usado un (…) Share es un cuadrado [la tarea está en inglés] y la diagonal…

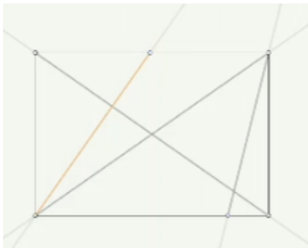
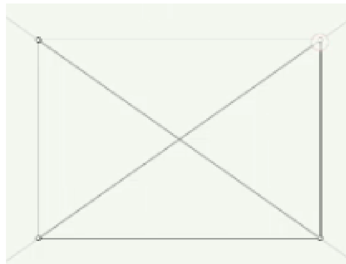
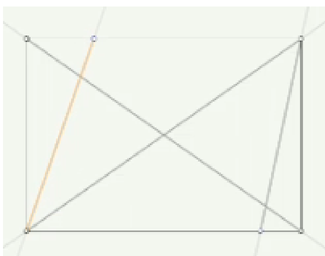
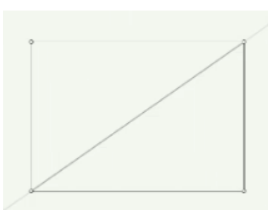
138	E2:	¿Diagonal?
139	PR:	Tal que [ayuda a la traducción de la tarea], el cuadrado comparta una diagonal; perdón, el rectángulo comparta una diagonal con el rombo.
140	E1:	O sea, puede ser una diagonal. O sea, no es regla hacerlo igualito sino solo que comparta una diagonal (…) No entiendo. ¡A ver! (Borra las dos circunferencias construidas, ver 53).  (53) El resultado no lo está botando bien porque ahorita los círculos estaban… (E2 trata de construir una mediatriz de un segmento, cuyos extremo son la intersección de las diagonales pero la borra) Tiene que compartir una diagonal, tiene que medir lo mismo.
141	E2:	Espérate.
142	E1:	¿Qué es un rombo? Definición de rombo, ¿la tenemos?
143	E2:	Eh…
144	E1:	Aquí [a la sesión], ninguna de las dos trajo su bello cuaderno [cuaderno de geometría, en el que tienen escrito el sistema teórico]. (Mientras tanto E2 trata de construir una mediatriz de un segmento, tal que uno de sus extremos sea el punto que parece ser el punto medio del lado izquierdo del rectángulo, ver 54).  (54)
145	E2:	No [la mediatriz no queda como ella quiere]. Tú qué sabes manejar; yo no sé manejar esta mediatriz (borra la mediatriz construida, ver 55). Halla la mitad de esta cosa [señala con el dedo el lado superior del rectángulo]  (55)
146	E1:	¿La mitad de esto? [Señala con el dedo el lado superior del rectángulo].
147	E2:	Sí.

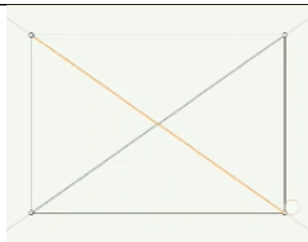
148	E1:	Ok (construye la mediatriz del lado superior del rectángulo, ver 56).  (56)
149		
150	PR:	¿Para qué quieres esa mediatriz?
151	E2:	Ah. No sé.
152	E1:	Mira. No, no, no. Sí, ya entendí. Creo que encontré una respuesta loca (construye la mediatriz del lado inferior del rectángulo).
153	E2:	Pero…Ja, ja, ja [La mediatriz de los lados superior e inferior coinciden].
154	E1:	Pero es que necesito solo una (borra la mediatriz del lado inferior del rectángulo). No, pero mira. Si ves que aquí hay una reglita [las marquillas de congruencia que se obtienen al construir una mediatriz]. Si bajáramos esta [marquilla de la izquierda], y esta [marquilla de la derecha] la pusiéramos, y esta la pusiéramos, mira (…) Ay, es loco. Esto [marquilla de la izquierda] (…) Iríamos (…) Ahí [marquilla de la izquierda] hay un punto (pone un punto sobre la marquilla izquierda, ver 57) y trazamos un… [segmento] (Construye un segmento, tal que sus extremos sean el anterior punto construido y el vértice inferior izquierdo, ver 58), y trazamos una recta.  (57)  (58) Si pudiéramos borrar esa mediatriz y ahora la pudiéramos poner acá [señala el lado inferior del rectángulo] (…) No, es más, ya sé.
155	E2:	¿Qué?
156	E1:	¡Ay! Déjame hago algo y te explico (construye un segmento tal que sus extremos son un punto sobre la marquilla derecha y otro punto fuera del rectángulo, tal que el segmento quede ‘vertical’, ver 59).  (59)

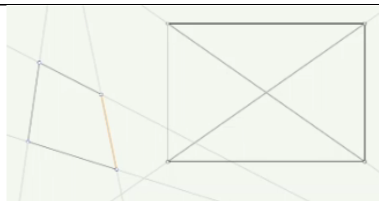
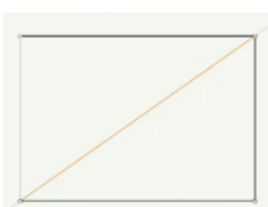
		No. Es que no la bota
157	E2:	No entiendo.
158	E1:	Yo tampoco.
159	E2:	¡Ah! Ok.
160	E1:	¿Ya me estás entendiendo?
161	E2:	No.
162	E1:	Porqué esperaba esa respuesta (construye una mediatriz de un segmento, tal que sus extremos son un punto sobre la marquilla derecha y su homólogo en el segmento inferior, ver 60).  (60)
163	PR:	¿Para qué esa mediatriz?
164	E1:	Es que eso es precisamente lo que trato de explicar. Ya sé que está mal [la mediatriz construida], pero mi idea era algo así (construye un segmento, tal que sus extremos sean el punto sobre el lado inferior y el vértice superior derecho, ver 61).  (61)
165	E2:	¡Raro! Ja, ja, ja
166	E1:	Raro y con muchas líneas. Y sé que está mal, pero si te das cuenta, ahorita cuando hicimos la circunferencia botó todo bien.
167	E2:	Ja, ja. No sé, no tengo idea (…) (…) ¡A ver! ¡A ver! (Construye una circunferencia con centro en el vértice superior izquierdo y radio hasta la intersección de las diagonales, ver 62).  (62)
168	E1:	Sé que esos puntos están mal [no son producto de intersecciones]. Pero tienes que borrar todo lo que yo hice, porque si no se nos daña la tarea (E2 borra la circunferencia, ver 63).

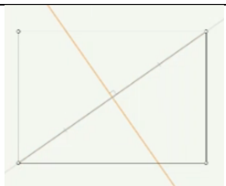
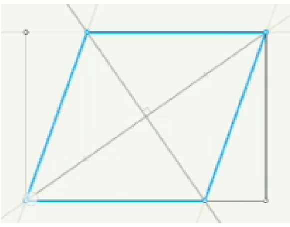
		 (63)
169	E2:	¿La tarea?
170	E1:	Sí. Esta [va a señalar la pantalla pero E2 no la deja].
171	E2:	Espérate. Taz (da clic en la pantalla en el vértice inferior derecho) y taz (construye una circunferencia con centro en el vértice inferior derecho y radio que parezca pasar por el vértice inferior izquierdo, ver 64). Ja, ja, ja.  (64)
172	E1:	Es más, ya tenemos el rombo hecho…
173	E2:	Toca formalizarlo de manera correcta...
174	E1:	Sí. Ya tenemos los puntos, pero no como la aplicación los quiere.
175	PR:	La tarea les dice que el rectángulo y el rombo tienen una diagonal en común. ¿Cierto?
176	E2:	Ok. ¿Cuáles son las diagonales del rombo? (…) Sería esta (señala con el dedo la diagonal en común con el rectángulo) y esta (señala con el dedo la otra diagonal del rombo).
177	E1:	O sea, no…
178	E2:	Ya tenemos una diagonal, ¿es esta, cierto? (señala con el dedo la diagonal en común con el rectángulo).
179	PR:	Sí. Esa es la que tienen en común.
180	E2:	Ok. (Borra todos los objetos construidos, ver 65).  (65)

181	E1:	O sea, ya podemos hacer un rombo ahí.
182	E2:	Mira; cuando tenemos estas dos diagonales (construye las dos diagonales del rectángulo, ver 66), nos dice la profe que tanto el rombo como el rectángulo tienen una diagonal en común. La diagonal en común es esta (señala la diagonal que pasa por los vértices inferior izquierda y superior derecha); porque eh (…) (…) [se queda pensando durante algunos segundos]. Mira, la otra diagonal es esta (señala con el dedo la diagonal que no comparte con el rectángulo) pero…  (66)
183	E1:	Sí, por eso, pero así no la comparte (señala con el dedo la diagonal que no comparte con el rectángulo) o no…
184	E2:	La mediatriz. ¿No podríamos hacer una mediatriz que cruce por el punto medio? (Señala con el dedo el punto de intersección de las diagonales del rectángulo) (…) Pero la mediatriz puede ir por acá, por acá, por acá (realiza con la mano un trazo de algunas posibles mediatrices que pueden pasar por el punto de intersección de las diagonales), pueden ir por donde quiera (…) Necesitamos un lugar por donde…
185	E1:	¿Tú la quieres? ¡Yo te la saco! [La mediatriz] (Construye una mediatriz desde el punto de intersección entre las diagonales y tal que coincida con el lado superior del rectángulo, ver 67).  (67)
186	E2:	No, pero es que es diagonal (E1 borra la mediatriz construida, ver 68). No, necesitamos un punto primero para hallar la mediatriz.  (68)
187	E1:	O sea, comparte una diagonal y ya tenemos la diagonal. No (…) hagamos un rombo, pero un rombo “x” porque no pide que sea un rombo igual a ese (señala con la mano la figura miniatura de la tarea), sino un rombo que comparta una diagonal.

188	E2:	Es que solo nos falta hallar algo así como para terminar el rombo (construye una recta que pasa por el vértice superior derecho y un punto del lado inferior del rectángulo. Luego construye una recta que pasa por el vértice inferior izquierdo y un punto del lado superior del rectángulo, ver 69). Bueno algo así… (Borra las dos rectas construidas es 69, ver 70).  (69)  (70)
189	E1:	Sí, yo sé. Pero lo que te quiero decir es que ya comparten la diagonal. (E2 construye dos rectas parecidas a las construidas anteriormente, ver 71).  (71) Lo que tenemos que hacer (…) ¿Se puede hacer un rombo “x” y la tarea queda bien?, o ¿tiene que ser así? (señala con la mano la figura miniatura de la tarea).
190	PR:	Así, porque la tarea dice que compartan una diagonal pero que el rombo quede inscrito en el rectángulo (E2 borra las rectas construidas en 71 y una de las diagonales, ver 72).  (72)
191	E1:	Tiene que quedar…
192	E2:	Y si quitamos, no sé. Si quitamos esta diagonal [la diagonal borrada en 72]
193	E1:	Está más guiada con la otra [habla en voz baja].
194	E2:	¿Cómo?
195	E1:	Está más guiada con la otra.
196	E2:	Pero, ¿por qué?
197	E1:	No sé, logramos ver más opciones.
198	E2:	¡Ah! Pues el punto medio [punto de intersección entre las diagonales del rectángulo] (construye la otra diagonal del rectángulo, ver 73).

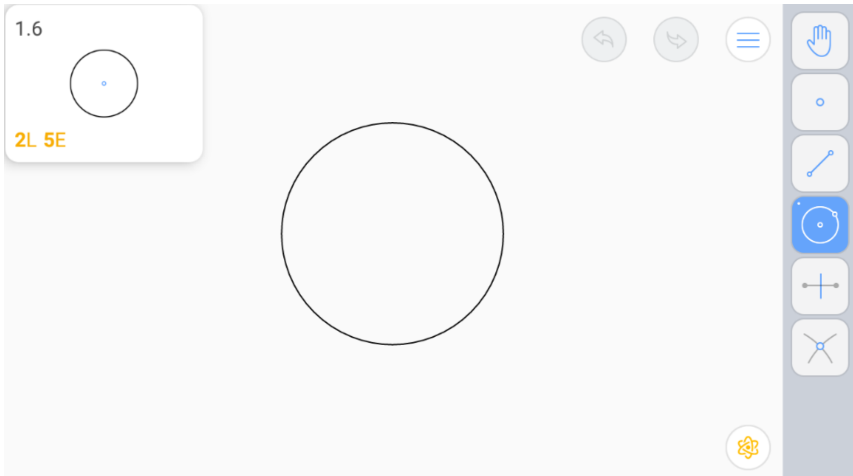
		 (73)
199	E1:	Ah.
200	E2:	Pues me imagino que acá el punto (señala el punto de intersección entre las diagonales) (…) Este debe ser el punto medio también del rombo (sigue señalando el punto de intersección de las diagonales) porque como (…) ¡Ah, no! Porque necesitamos la otra diagonal del rombo y no la tenemos.
201	E1:	Yo quiero ver bien esa tarea (abre la herramienta que permite leer la tarea y ver una imagen de la solución).
202	E2:	No tengo idea [habla en baja voz].
203	E1:	Si ves que son (coge un esfero y lo pone sobre la pantalla para mirar, al parecer, la otra diagonal del rombo).
204	E2:	Ja, ja.
205	E1:	Yo haciendo cosas raras. Es que…
206	PR:	¿Ustedes recuerdan que definimos rombo [en clase] y que a la vez que definimos rombo también definimos el hecho geométrico de las diagonales?
207	E1:	Sí, pero es que aquí…
208	E2:	No me acuerdo.
209	E1:	A mí se me quedó el cuaderno [de geometría].
210	E2:	¡A ver! Ya sabemos que el rombo tiene las medidas iguales. No sé…
211	E1:	Es decir, un rombo tiene dos triángulos equiláteros…
212	E2:	En las diagonales, las diagonales tienen cuatro ángulos rectos [recuerda una propiedad de las diagonales del rombo] ¿no?
213	E1:	[Mira a la profesora] ¿Las diagonales forman cuatro ángulos rectos?
214	E2:	Sí. ¿No? [Realiza con su mano en el aire una especia de cruz].
215	E1:	No, no.
216	E2:	Sí, sí (…) Por eso es que te digo que la mediatriz va ahí, porque…
217	E1:	Dibujemos un rombo acá (señala la pantalla), digamos un rombo “x”. Ahs, espérate.
218	E2:	¿Cuál rombo “x”?
219	E1:	Ah, yo necesito guiarme porque no entiendo… [Al parecer no entiende lo dicho por E2] (Construye cuatro rectas que formen un cuadrilátero por fuera del rectángulo, ver 74).

		 (74)
220	E2:	Mira, ahora…
221	E1:	Haz de cuenta que es un rombo, está muy bien hecho.
222	E2:	Entonces, ahora… (Construye las diagonales del cuadrilátero anteriormente construido, ver 75).  (75)
223	PR:	¿A qué te refieres con los ángulos rectos? ¿Cuáles son?
224	E2:	Estos (señala con el dedo los ángulos conformados por las dos diagonales).
225	E1:	¡Ah! Ya entendí.
226	PR:	Ah; o sea, la intersección de las diagonales forman un ángulo recto.
227	E2:	Bueno, cuatro. Sí, uno.
228	PR:	Bueno, y ahí tienen una diagonal, ¿Cómo sacarían la otra, si saben que forman ángulos rectos?
229	E2:	Pues formemos un ángulo recto, y como tenemos la mediatriz (E1 borra todos los objetos geométricos construidos, ver 76).  (76)
230	E1:	¡Dale entonces!
231	E2:	¡Pero no sé cómo! (…) A ver (construye una diagonal del rectángulo, ver 77).  (77)
232	E1:	Ya tenemos esa [la diagonal construida en (77)]. Ahora necesitamos sacar una [la otra diagonal] (…) Ah, pero…
233	E2:	¿Así? (Construye la mediatriz de la diagonal construida anteriormente, ver 78).

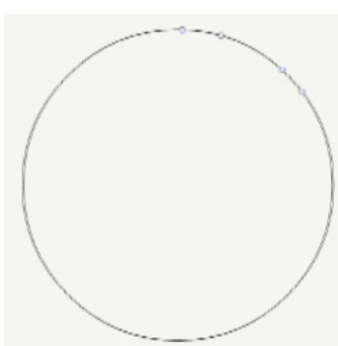
		 (78)
234	E1:	Sí, sí, sí. Ya la tenemos.
235	E2:	Unirlos [Los lados del rombo].
236	E1:	Únelos.
237	E2:	¿Acá? (Selecciona la herramienta recta y construye dos rectas. Estas pasan por el punto de intersección entre la mediatriz y los lados del rectángulo y dos vértices de este, ver 79).  (79)
238	E1.	Eres una genio, ¿te lo había dicho?
239	E2:	No [Euclidea valida la construcción] (…) (…) ¡Por fin!
240	PR:	¿Y por qué entonces? ¿Por qué sirve?
241	E1:	Porque tiene los cuatro…
242	E2:	El hecho geométrico de ¿las diagonales? No sé…
243	PR:	De un rombo, de las diagonales de un rombo.
244	E2:	Es que tiene cuatro, uno, como sea. La intersección [de las diagonales del rombo] tiene ángulos rectos, por lo cual si hallamos la mediatriz podemos hallar los otros dos puntos [vértices del rombo] para terminar el rombo.
245	PR:	¿Y con una mediatriz siempre se tiene ángulos rectos?
246	E1:	Puede que sí. Pues sí, porque cada vez que se saca la mediatriz bota un cuadrito chiquito [símbolo que determina la existencia de un ángulo recto].
247	E2:	¿Bota un qué?
248	E1:	Sí. Una mediatriz siempre se…
249	PR:	¡Ah! ¿Tú te refieres a este cuadrito?...
250	E1:	A esa cosita.
251	PR:	Que siempre significa que es recto.
252	E1:	Sí
253	PR:	Ok.

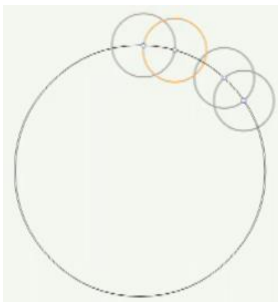
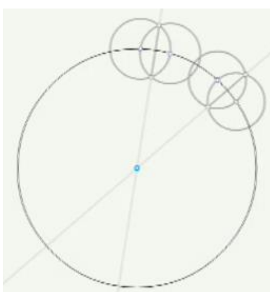
Tarea 6 – Alfa 1.6

Construya el centro de una circunferencia.



Las estudiantes culminan de argumentar la tarea 1.5 y siguen inmediatamente a desarrollar la tarea 1.6. Ellas observan, por medio de la imagen miniatura (parte superior izquierda), que deben construir el centro de la circunferencia dada; lo que genera que manifiesten que el día anterior lo habían construido en clase de geometría con regla y compás, ya que esta fue una de las tareas propuestas por la profesora como problemas de aplicación. De acuerdo a lo anterior, las estudiantes afirman que la solución a esta tarea es por medio de la construcción de dos mediatrices.

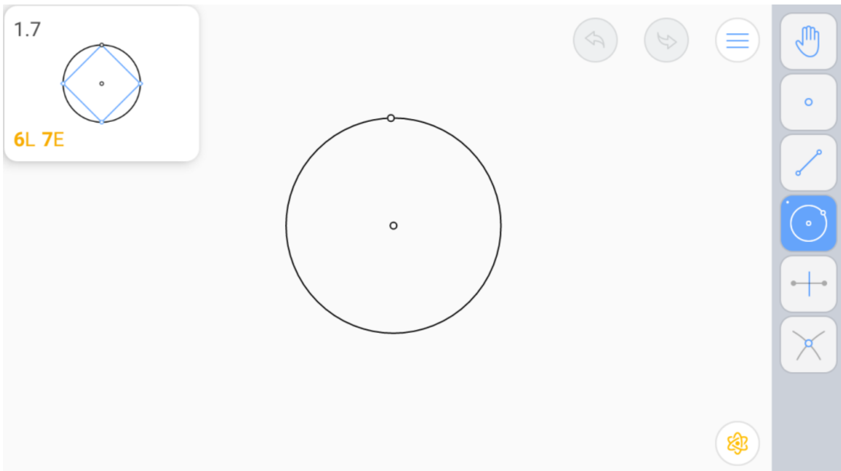
1.	E1: (44:20)	Ay, ¿qué hicimos ayer?
2.	E2:	¿Las dos? (Construye cuatro puntos sobre la circunferencia, ver 1).  (1)
3.	E1:	Sí. Que le íbamos a explicar a…
4.	E2:	No me acuerdo, ¿era así? [los cuatro puntos]

5.	E1:	Sí.
6.	PR:	¿Y para qué son esos punticos?
7.	E1:	O sea, esos punticos luego pasan (…) realizan dos circunferencia a cada lado, trazas una línea [rectas] y trazas la otra [recta], y la intersección es el punto medio [centro de la circunferencia]. (Mientras tanto E2 construye cuatro circunferencias, cuyos centros son cada punto construido anteriormente y radio al punto más cercano, ver 2).  (2)
8.	E2:	¿Uju? (Construye dos rectas, cada una es la mediatriz de las cuerdas que determinan los puntos construido inicialmente. Luego construye el punto de intersección entre las mediatrices, ver 3).  (3)
9.	E1:	Sí, bien [Euclidea valida la construcción].
10.	PR:	¿Y por qué funciona?
11.	E1:	Eso nos lo dijo ayer [la profesora].
12.	E2:	Es que yo no me acuerdo. Bueno, es que al tomar…
13.	E1:	Porque es la intersección (…) Dale [le dice a E2 que prosiga con su argumento].
14.	E2:	Dale [le dice a E1 que continúe ella con su argumento].
15.	E1:	No, dale [le reafirma a E2 que continúe ella].
16.	E2:	Al tomar (…) Bueno, al tomar dos puntos de cualquier parte de la (…) de una parte de la circunferencia, la mediatriz que nos dé siempre, la intersección (realiza con los brazos una equis simulando, al parecer, la intersección de las dos mediatrices), siempre va a ser la mitad del círculo [centro de la circunferencia].
17.	PR:	¿Listo? ¿Hasta ahí?
18.	E2:	Listo.

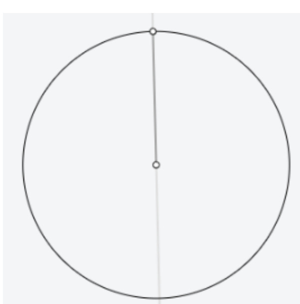
Las estudiantes culminan la sesión 1 de grabación, al terminar la tarea 1.6; dando paso para que la segunda sesión inicien con el desarrollo de la tarea 1.7.

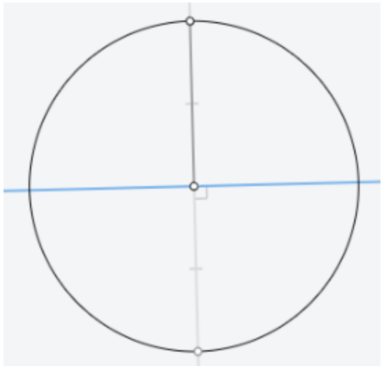
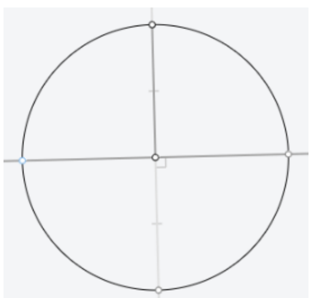
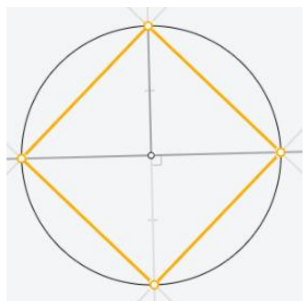
Tarea 7 – Alfa 1.7

Inscriba un cuadrado dentro de la circunferencia. Se da un vértice del cuadrado.



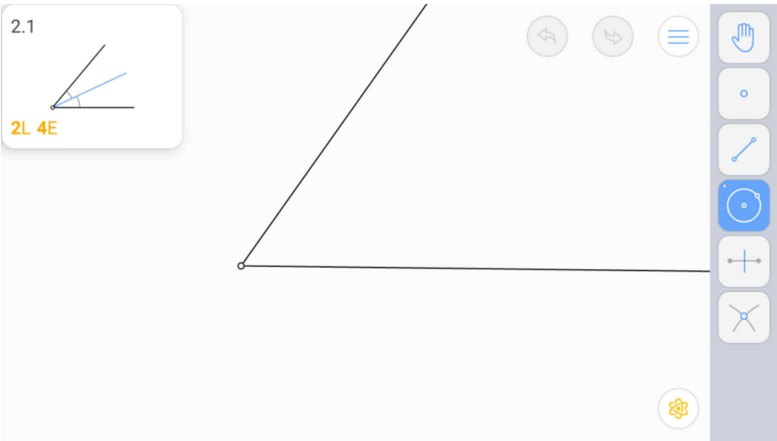
Las estudiantes leen el enunciado de la tarea a desarrollar, proponiendo inicialmente el uso de la mediatriz.

1.	E1: (00:14)	¿Mediatriz? ¡Ah, no! Olvídalo.
2.	E2:	No, sí. Para hallar estos dos puntos [puntos a la izquierda y derecha del centro de la circunferencia].
3.	E1:	Sí, sí, sí. Necesitamos hallar un, dos, tres [cuenta con un dedos los vértices que hacen falta del cuadrado].
4.	E2:	No, ya tenemos este [señala con el dedo el vértice inferior del cuadrado] (Construye una recta que pase por el centro de la circunferencia y el vértice dado, ver 1).  (1)
5.	E1:	Y nos falta (…) al hacer un nuevo…
6.	E2:	La mediatriz (construye la mediatriz del segmento determinado por los dos vértices del cuadrado,

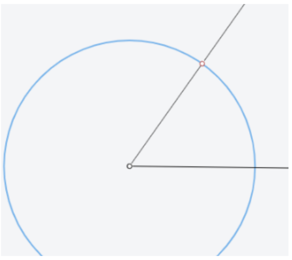
		ver 2).  (2)
7.	E1:	¡Eso!
8.	E2:	¡Que lindo! (Construye los dos vértices faltantes del cuadrado, ver 3). Y acá (construye los cuatro lados del cuadrado, ver 4). Estaba fácil [Euclidea valida la construcción].  (3)  (4)
9.	PR:	¿Por qué trazaron la mediatriz?
10.	E1:	No sé, porque (…) Son 90 grados, ¿no? [Señala con el dedo en ángulo recto formado entre la recta y la mediatriz], que es la mitad de 180.
11.	E2:	No. Al darnos un radio de la [señala con dedo desde el centro de la circunferencia al vértice dado del cuadrado] (…) ¿Esto es un radio, no? (…) (…) Al darnos un radio, lo que hicimos fue trazar una línea [recta] (pasa la mano sobre la mano simulando la recta trazada), pues para hallar uno de los vértices (señala con un dedo el vértice inferior del cuadrado), y ya que teníamos esa línea [recta] lo que hicimos fue trazar una mediatriz para hallar los otros dos vértices.
12.	PR:	¿Y por qué la mediatriz de esa línea, de esa recta?
13.	E2:	Yo lo hice para encontrar estos dos (señala con un dedo los vértices a la izquierda y derecha del centro de la circunferencia).
14.	E1:	Porque no sé, es que la mediatriz siempre traza como una ¿equis? (simula con las manos una equis), por decirlo así, y siempre es exacto porque es el punto medio de todos los lados.
15.	PR:	O sea, es el punto medio ¿de?
16.	E2:	Del triángulo, ay Dios mío, del cuadrado.
17.	E1:	Ese círculo y mediatriz nos da un radio que es exactico por todos los lados.
18.	PR:	Ok.

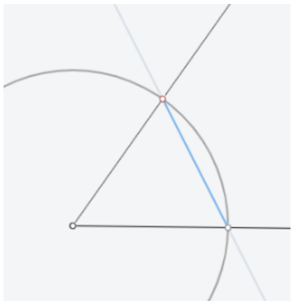
Tarea 8 – Beta 2.1

Construya la recta que biseca el ángulo dado.



Las estudiantes al terminar de desarrollar la tarea 1.7 pasan inmediatamente a desarrolla la tarea 2.1. Ellas leen la tarea y al parecen se sorprenden porque no comprenden qué es una recta que biseca al ángulo dado; de acuerdo a esto la profesora interviene y les explica que deben construir una recta que "parta" al ángulo dado en dos partes iguales o congruentes. Luego, las estudiantes comprenden que objeto geométrico deben construir.

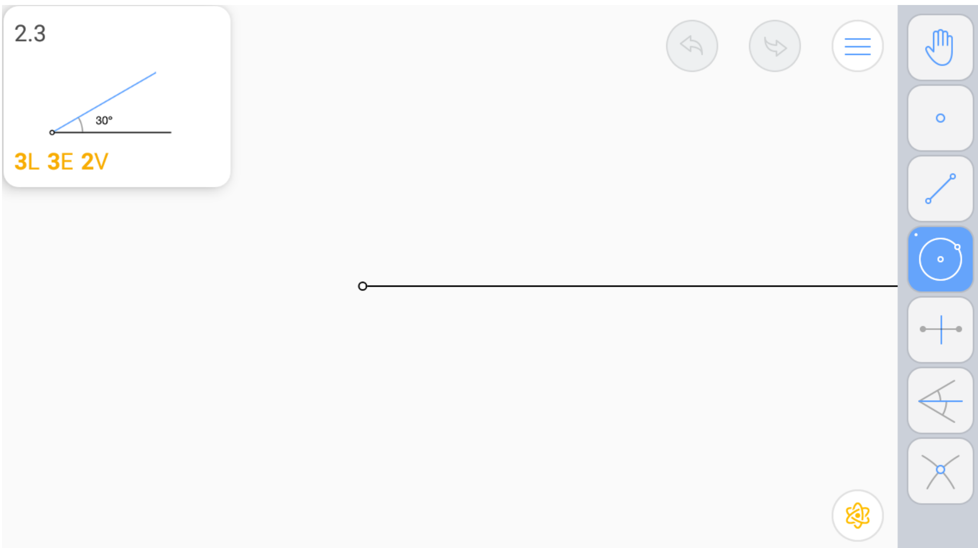
1.	E1: (00:45)	¿Si hacemos por ejemplo una circunferencia?
2.	E2:	¿Ah?
3.	E1:	No sé una circunferencia y ahí miramos cuántos grados tiene. No sé, ¿mediatriz?
4.	E2:	¿Para qué?
5.	E1:	Espérame, voy a intentarlo (construye una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado y radio cualquiera, ver 1), y mediatriz por aquí (señala con un dedo desde el vértice del ángulo hasta el punto que sería la mitad del arco determinado por los rayos del ángulo)…  (1)
6.	E2:	Y si no, no…
7.	E1:	¿Y es igualito un triángulo…

8.	E2:	No, no. Y por qué no trazamos una línea, una línea (señala con un dedo la que recta que pasaría por los dos puntos de intersección entre la circunferencia y los rayos del ángulo) y al hallar la mitad de la línea (simula con un dedo la recta que sería la mitad de la recta anterior) (…) ¿Sí me entiendes?
9.	E1:	¡Ah, ya! Ok, esta línea (construye la recta que pasa por los dos puntos de intersección entre la circunferencia y los rayos del ángulo, ver 2).  (2)
10.	E2:	Y la mediatriz.
11.	E1:	Y la mediatriz de esta línea (construye la mediatriz de la recta anterior, ver 3).  (3) ¡Uy, chocalas! (Chocan las manos para celebrar que Euclidea acepto su construcción).
12.	PR:	Listo. ¿Por qué la circunferencia?
13.	E1:	No sabemos… [No se entiende lo que dice]
14.	E2:	No, ya sé por qué.
15.	E1:	Intersecta con los dos puntos.
16.	E2:	Exactamente. Cuando (…) O sea, al ser este (señala el vértice del ángulo) el centro del círculo [circunferencia] y al llevarla a cualquier punto de los lados [del ángulo], nos dan los vértices y se supone que nos da (…) los vértices (…) la medida de estos dos es igual. (señala con los dedos meñiques cada segmento comprendido entre el vértice del ángulo y los puntos de intersección entre la circunferencia y los lados del ángulo)
17.	PR:	La medida que abarca…
18.	E2:	O sea, se intersecan…
19.	PR:	[Continua su idea]… la circunferencia en los lados del ángulo.
20.	E2:	Ajá. Entonces ya es (…) así (con su dedo sobrepasa la recta que pasa por los dos puntos en común entre la circunferencia y el ángulo y la mediatriz construida. Al parecer quiere indicar el paso a paso de la construcción).

21.	E1:	Sin los radios.
22.	PR:	Ok.

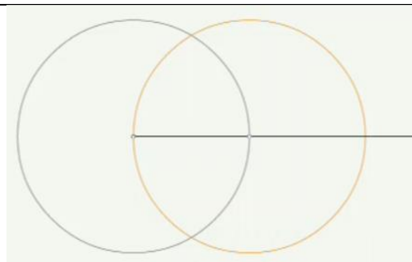
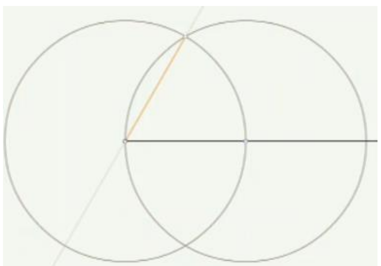
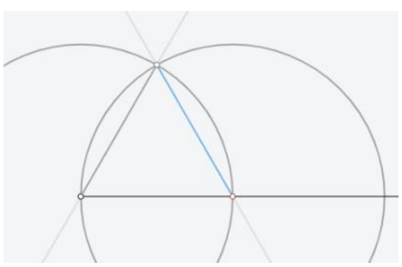
Tarea 9 – Beta 2.3

Construya un ángulo de 30° con el lado dado.



Las estudiantes al terminar de solucionar la tarea 2.1 desbloquean una nueva herramienta llamada bisectriz, por tanto Euclidea les ofrece un tutorial de cómo construir este objeto geométrico al seleccionar tres puntos de un ángulo, sin necesidad de construir circunferencias y rectas auxiliares. Luego, ellas pasan a la tarea 2.3 y comienzan por leer la tarea que deben desarrollar.

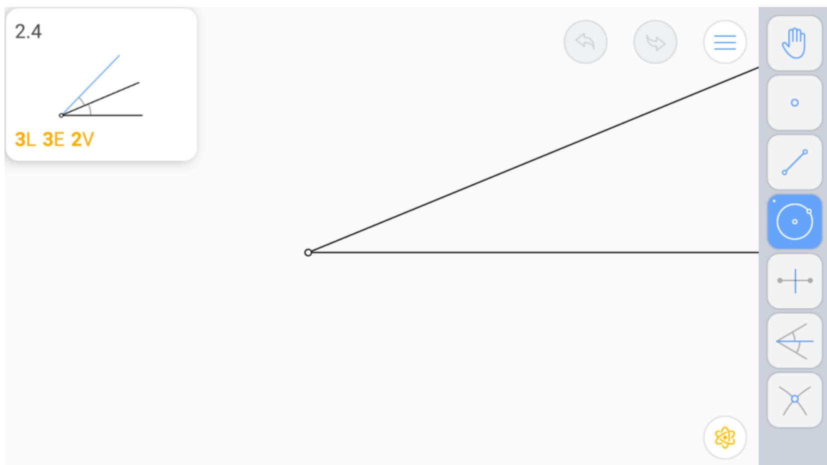
1.	E2: 1:22	Sabes, podemos usar la construcción de 60°.
2.	E1:	Y no sé qué hice (construye una circunferencia con centro en el extremo del rayo dado y su radio lo determina un punto sobre el rayo. Luego construye otra circunferencia con centro en el punto anterior sobre el rayo y radio hasta el extremo del rayo, ver 1).

		 (1)
3.	E2:	Ahí está bien.
4.	E1:	¿Sí, ahí está bien?
5.	E2:	Hacemos el ángulo [recuerda la construcción del ángulo de 60° de la tarea 1.1].
6.	E1:	¡Ah, sí! (construye una recta que pasa por el extremo del rayo dado y una de las intersecciones de las dos circunferencias, ver 2).  (2) Y a ese [ángulo de 60] le casamos la línea que ahorita hiciste (construye una recta que pasa por el punto de intersección entre las dos circunferencias y el centro de la segunda circunferencia, ver 3) y a esa le sacamos la mediatriz (construye la mediatriz del segmento comprendido en el interior del ángulo, ver 4).  (3)  (4) ¡Estamos volando!
7.	PR:	¿Para qué las dos circunferencias?
8.	E2:	Pues como anteriormente ya habíamos hecho el ángulo de 60° y lo habíamos hecho con la misma técnica [construir dos circunferencias] entonces…
9.	E1:	Es replicarla [la construcción] dos veces, para así poder hallar, por decirlo así, el lado que a nosotras ya nos habían dado [el otro rayo que conforma el ángulo de 60°] pero esta vez solo nos dieron una recta.
10.	E2:	Y ya la bisectriz.
11.	E1:	Y usamos como una bisectriz, aunque habíamos podido usar esta herramienta (señala con el dedo la

		herramienta de la bisectriz), pero lo hicimos a nuestra manera [usando mediatriz].
12.	E2:	¡Ah, sí. También! Porque taz, taz, taz (señala con el dedo tres puntos del ángulo de 60°).
13.	PR:	Listo.

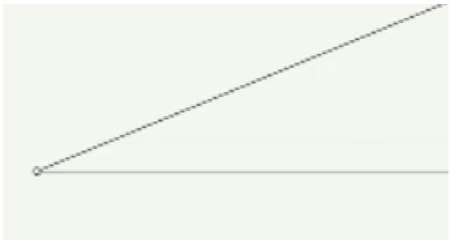
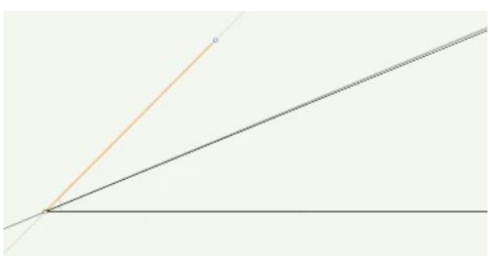
Tarea 10 – Beta 2.4

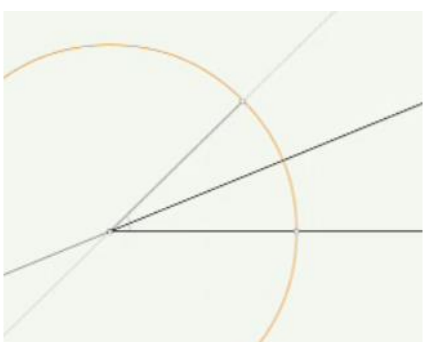
Construya un ángulo igual al dado tal que compartan un lado.

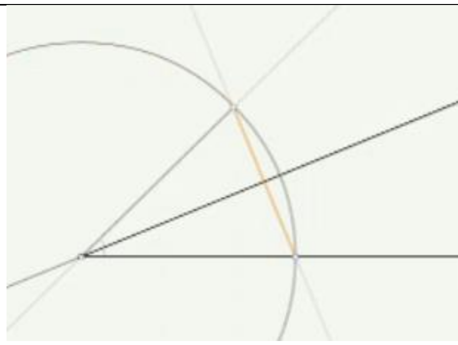
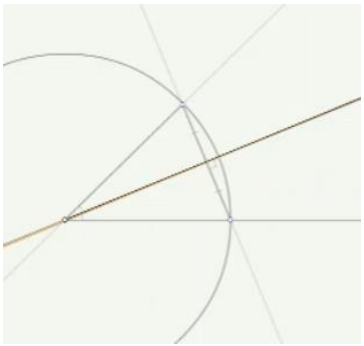
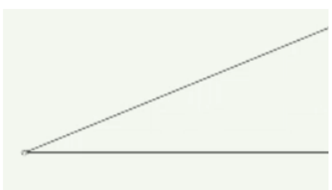


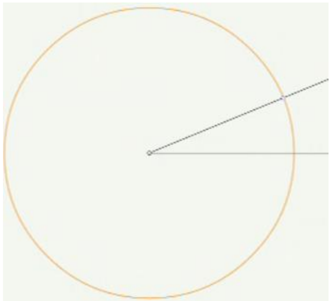
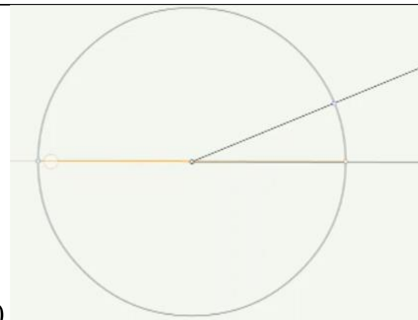
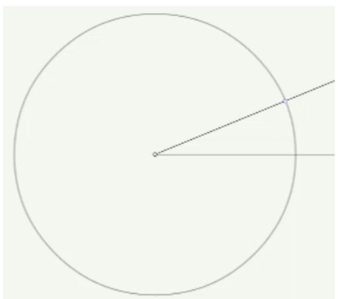
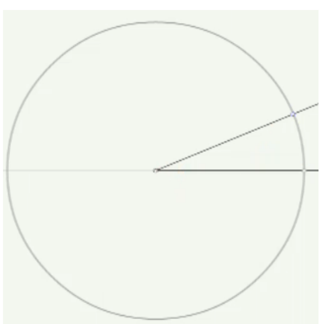
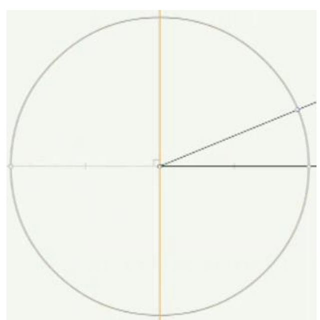
Las estudiantes pasan inmediatamente a desarrollar la tarea 2.4 después de realizar la tarea 2.3. Para esto, ellas leen la construcción que deben lograr y una de sus primeras estrategias es usar la bisectriz, pero no comprenden cómo. Ante la situación, la profesora interviene para explicarles que Euclidea les da un lado del ángulo y su bisectriz, y por tanto ellas deben construir el otro lado del ángulo.

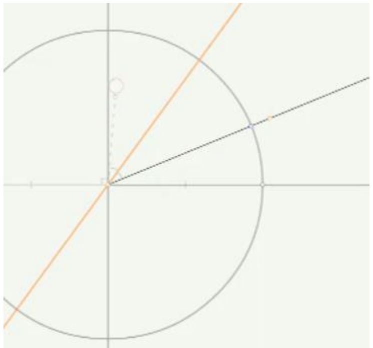
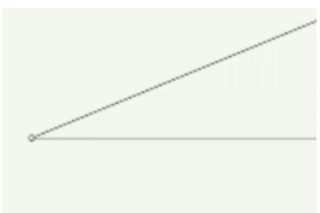
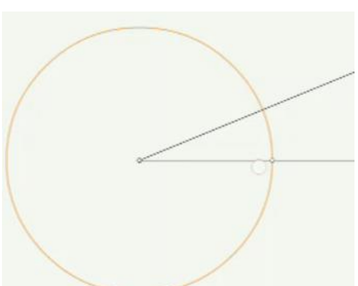
1.	E1: 1:40	Entonces si deben ser iguales [los ángulos determinados por la bisectriz], usemos bisectriz.
2.	E2:	¿Pero bisectriz cómo?
3.	E1:	Profe tenemos una idea loca. Es que con esta herramienta que creo que es bisectriz, logro hallar los dos laditos iguales (usa la herramienta bisectriz para buscar el otro lado del ángulo, ver 1).  (1)

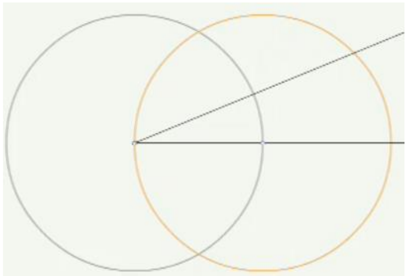
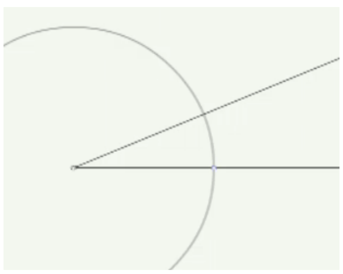
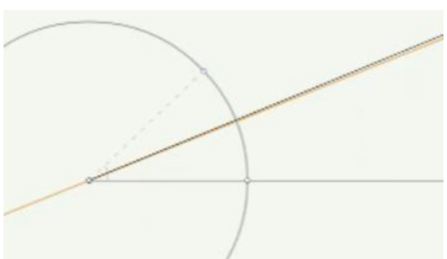
		Entonces pensábamos ponerla (…) (…) que si esto quedaba alineada [bisectriz construida con la bisectriz dada], suponiéndolo por lógica, esta debería ser igual [los dos ángulos dados].
4.	E2:	O sea (…) (Borra la bisectriz construida, ver 2)  (2)
5.	E1:	Explícale tú.
6.	E2:	No, no, no. Sí está bien explicado, solo que no está alineado (construye de nuevo la bisectriz, tal que quede alineada con la bisectriz dada, ver 3).  (3) ¿No debería ser esta la…?
7.	PR:	¿Y qué pasaría si trazan esa recta?
8.	E1:	Pues no sé, vamos a averiguarlo (traza la recta que pasa por el extremo del ángulo y por el punto generado al construir la bisectriz, ver 4).  (4)
9.	E2:	No pasó nada [Euclidea no válida la construcción]
10.	E1:	Es que no está alineada [la bisectriz construida con la bisectriz dada] (borra la recta y la bisectriz construidas, ver 5).  (5)

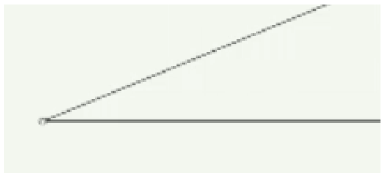
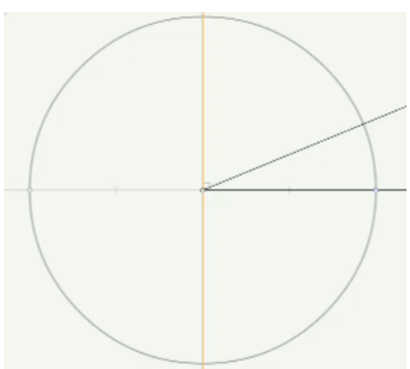
11.	E2:	Estamos es como adivinando, no sé.
12.	E1:	Tal vez.
13.	E2:	Alinéalo bien, a ver qué pasa.
14.	E1:	(Construye nuevamente una bisectriz tal que coincida con la bisectriz dada, ver 6). Ya está alineadito.  (6)
15.	E2:	Entonces si trazamos la línea [recta] (construye una recta que pasa por el extremo del ángulo y el punto generado al construir la bisectriz, ver 7).  (7)
16.	E1:	¿Y si hacemos el triángulo ya teniendo eso? El triángulo que acostumbramos a hacer. No sé.
17.	E2:	¿Un triángulo?
18.	E1:	El que acostumbramos a hacer (construye una circunferencia con centro en el extremo del ángulo y que pase por el punto obtenido al construir la bisectriz, ver 8).  (8)
19.	E2:	Pero el triángulo, mira donde quedaría [señala con el dedo el punto del lado superior del ángulo].
20.	E1:	No, no, no. ¿Te acuerdas que ahorita lo habíamos hecho así? (construye una recta que pasa por los puntos que son intersección entre la circunferencia y los lados del supuesto ángulo, ver 9).

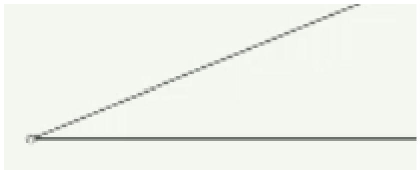
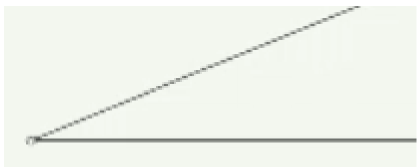
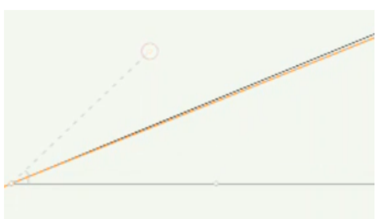
		 (9) Y le hallo la… (Construye la mediatriz del segmento que está comprendido en el ángulo, ver 10).  (10) Claro que sí es un triángulo. Pero es que es la mediatriz. ¿Sí está bien?
21.	E2:	No, mira que no coincide [señala con el dedo una parte de las bisectriz que no coincide].
22.	E1:	No sé por qué no la bota.
23.	PR:	¿Por qué será que no la valida?
24.	E1:	No sé. Está alineada. Le falta un punto (E2 borra los objetos geométricos construidos, ver 11).  (11) No, no tengo nada que decir.
25.	E2:	Y si hacemos una… [Pasa su dedo sobre la pantalla indicando una recta que sea perpendicular al lado inferior del ángulo].
26.	E1:	Una circunferencia y esta…
27.	E2:	No. Una línea recta (…) Pues no sé cómo hacerla, pero (…) tal vez, cuando tengamos la recta [señala con el dedo lo que sería la recta perpendicular]… lo hacemos de esta [construir la bisectriz que forma entre la recta perpendicular y la bisectriz dada] y de pronto no sé, de pronto salga…
28.	E1:	Pues (construye una circunferencia con centro en el extremo del ángulo y radio un punto de la bisectriz, ver 12), pasar un línea acá []; o sea, que esté aquí derecho. Yo hago eso (construye una recta que simula ser colineal con el lado inferior del ángulo dada, ver 13) y tú haces lo otros porque no te entiendo.

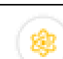
		 (12)  (13)
29.	E2:	¡Ah, ok! (…) No.
30.	E1:	Creo que es mediatriz (borra la recta construida anteriormente, ver 14).  (14)
31.	E2:	No, acá [selecciona la herramienta recta]. Espera (construye la recta que pasa por el vértice del ángulo y el punto de intersección entre la circunferencia y el lado inferior del ángulo dado, ver 15). ¿Y mediatriz? (Construye la mediatriz del diámetro de la circunferencia contenido en la anterior recta, ver 16).  (15)  (16)
32.	E1:	Y…
33.	E2:	Y no sé, podríamos hacer esto [trata de construir una bisectriz] (…) ¿Cómo es que es esto?
34.	E1:	Dime a qué quieres sacar [la bisectriz] (...) ¿A esto? [Señala en ángulo comprendido por la mediatriz y la bisectriz dada].
35.	E2:	Sí, la bisectriz y ya.
36.	E1:	¡Ah, ok!
37.	E2:	No sé, de pronto…
38.	E1:	No, no, no. Toca en este punto [trata de construir una bisectriz pero no selecciona los puntos adecuadamente].

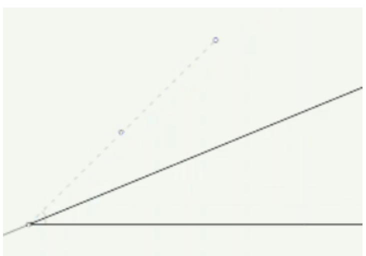
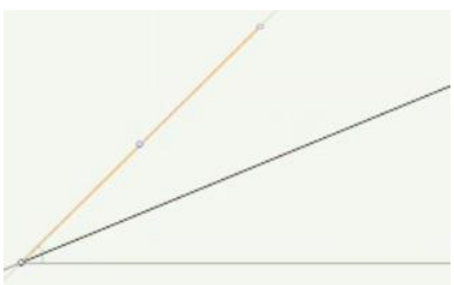
39.	E2:	Pero espérate.
40.	E1:	Toca hacerlo en este punto [sigue intentando construir la bisectriz, pero no selecciona en orden los puntos] (…) (…) Ahm, no. No te estoy entendiendo. (E2 construye la bisectriz del ángulo conformado por la mediatriz y la bisectriz dada, ver 17).  (17)
41.	E2:	No, no es [Euclidea no validó la construcción].
42.	E1:	No, porque no es igual.
43.	E2:	No sé, era una suposición.
44.	E1:	No sé. Profe, es que ahorita la veía tan exacta y por mediatriz también la sacaba igual. ¿Pero por qué no deja? (E2 borra todo los objetos construidos, ver 18).  (18)
45.	E2:	No, la mediatriz (…) A ver.
46.	E1:	Pero si es lo mismo sacaba la mitad y sacaba iguales.
47.	E2:	¿Uhm?
48.	E1:	¡Ahs! Mejor hago lo que hice (construye una circunferencia concentro en el vértice del ángulo y un punto sobre el lado inferior del ángulo dado, ver 19).  (19)
49.	E2:	¿Y ellos usaron las ayudas? [La otra pareja de estudiantes].
50.	PR:	No. Ellos van en esta [tarea 2.4]. (E1 construye otra circunferencia con centro en el punto de intersección entre la anterior circunferencia y el lado del ángulo y radio el vértice del ángulo, ver

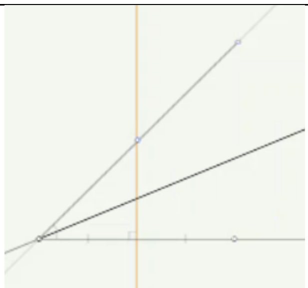
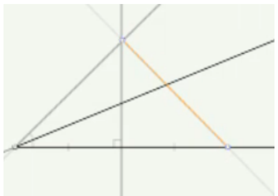
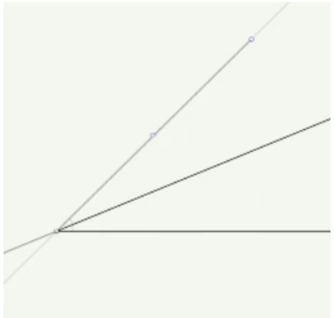
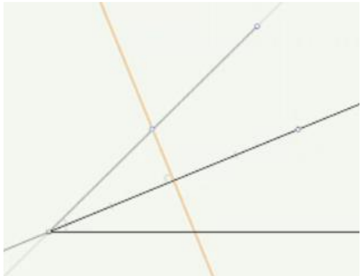
		20).  (20)
51.	E2:	¿Ya la hicieron?
52.	PR:	No.
53.	E1:	¡Ah, bueno! (Borra la segunda circunferencia, ver 21).  (21) Vamos a usar esta herramienta [selecciona la herramienta bisectriz]
54.	E2:	Pero que eso no funciona, esa técnica no funciona, ¿cierto? (E1 construye una bisectriz tal que coincida con la bisectriz dada, ver 22).  (22)
55.	E1:	Profe, ¿es o no es? Para de una vez descartarla.
56.	E2:	¿No es válida?
57.	PR:	No sé.
58.	E1:	¡Ay!
59.	PR:	No, espera. Les explicaba a los chicos que cuando uno quiere validar una construcción, si sirve o si no, uno puede usar la manito [arrastre]. Con la manito, uno se puede ubicar en cualquier punto y mover la construcción. Si la construcción no se deforma es porque es esta [la construcción correcta]. Si se llega a deformar es porque no [no es la construcción correcta] (E2 arrastra uno de los puntos de la construcción). ¿Qué pasa ahí?

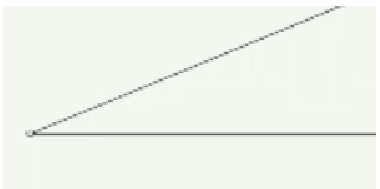
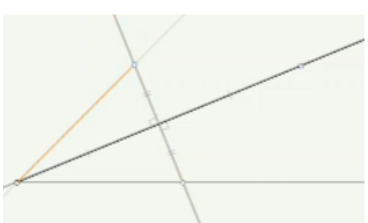
60.	E2:	¿Se deforma?
61.	PR:	Sí. Por eso Euclidea no la válida (…) porque al moverlo se deforma.
62.	E1:	Ya entiendo.
63.	E2:	No, yo no (borra todos los elementos geométricos construidos, ver 23) (…) O sea, ahorita cuando hicimos la anterior, ¿no se deformaba?  (23)
64.	PR:	¡Ajá!
65.	E2:	¿En serio? ¡Vea pues!
66.	E1:	Ahora, Ana piensa. Si es la mitad, tiene que sacarle equilátero.
67.	E2:	Mm… ¿Tenemos principios de ángulos o algo así?
68.	E1	¡Ah! Espera miro [revisa los apuntes del cuaderno de geometría]. No sé, ángulo, ángulo, ángulo [busca algún hecho geométrico que hable de ángulos]. Ángulos congruentes [sigue buscando en el cuaderno]. Triángulos congruentes; si son triángulos tal vez nos sirva. Si te das cuenta y acá lo cerramos [trazar un segmento desde la bisectriz dada al lado dado] quedaría...
69.	E2:	Pero eso es más un triángulo (…) (…) extraño.
70.	E1:	Definición de rombo, ángulos alternos [lee los apuntes de su cuaderno de geometría].
71.	E2:	No sé, yo creo que algo podemos sacar de acá (construye una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y radio con un punto sobre el lado inferior del ángulo, construye una recta que contiene al lado inferior del ángulo y construye la mediatriz del diámetro contenido en la anterior recta, ver 24).  (24)
72.	E1:	Mm (…) No sé (…) (…) Y si tomamos las medidas y lo hacemos aparte.
73.	E2:	¿Cómo así?
74.	E1:	No sé cómo explicarme (borra todos los objetos geométricos construidos, ver 25).

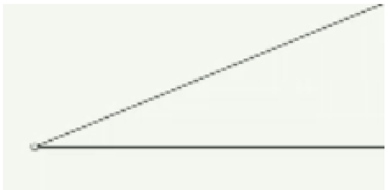
		 (25)  (26) Creo que está mal, haz de cuenta que esto es un borrador (construye en la recta por debajo del ángulo dado, ver 26).
75.	E2:	¡Ajá!
76.	E1:	Necesitamos (…) Ay no, yo estoy perdida porque no hay una forma de medir para llevar las medidas iguales (borra la recta construida anteriormente, ver 27).  (27)
77.	E2:	¿Uhm?
78.	E1:	Es una idea loca (…) (…) Espérate (…) (…) Hay que llevar lo que mide acá [señala con la mano la abertura del ángulo dado] y pasarlo a acá [señala el lado superior de la bisectriz dada]. Puede haber alguna forma de hacerlo (…) (…) Puede que esta [construcción] si nos dé el punto (construye una bisectriz de tal forma que coincida con la bisectriz dada, ver 28) pero no la valide.  (28)
79.	E2:	Que no la va a valer.
80.	E1:	Yo ya sé que no la va a validar, no la va a valer.
81.	E2:	Sí, validar.
82.	E1:	¿Sí? ¿Si es validar?
83.	E2:	Sí.
84.	PR:	Son conscientes que necesitan ese punto que les aparece ahí. ¿No?
85.	E2:	¿Este? Sí. [Señala con el dedo el vértice del ángulo].
86.	PR:	No. Este que queda acá [Señala con el dedo el punto que obtiene al construir la bisectriz]. Qué harían para conseguir ese punto, o un punto de la recta que aparece punteada.
87.	E2:	¿Cómo así?
88.	PR:	O sea, son conscientes que necesitan algún punto sobre esta recta [señala con su dedo la recta que

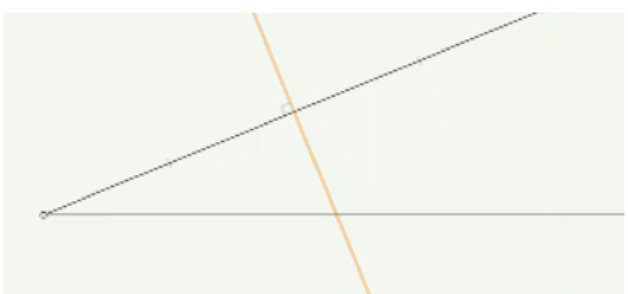
		aparece punteada] (…) porque esa es la que les va a dar la solución.
89.	E2:	Mm…
90.	PR:	¿Cómo podrían hacer para generar un punto?
91.	E1:	No sé. ¿Crear un triángulo isósceles? ¿Equilátero?
92.	E2:	No entiendo la pregunta. ¿Hay que crear un punto sobre esta línea?
93.	E1:	Sí. Pues ahorita la vemos [la recta], pero en realidad no existe.
94.	E2:	O sea, no hay línea.
95.	PR:	No porque se supone que esa es la línea que necesitan.
96.	E1:	Pero ya sabemos cuál es. Lo que pasa es que Euclidea no la…
97.	PR:	¿Qué harían para conseguir un punto construido robustamente que quede sobre esa línea?
98.	E1:	Yo dándole la vuelta [gira la Tablet 180]. No sé. ¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales?
99.	E2:	Isósceles.
100.	E1:	¿Isósceles? Isósceles. ¿Y si miramos un triángulo isósceles?
101.	E2:	¿Al revés? [Gira la Tablet nuevamente 180].
102.	E1:	Si miras esos dos son iguales [señala con su dedo la amplitud de los dos ángulos que deben ser iguales]. Y si le das la vuelta [gira la Tablet 180] y pusiéramos otro acá [simula con su dedo un segmento para cerrar el ángulo y crear un triángulo], esos dos serian iguales [señala con su dedo los segmentos que están comprendidos en los lados del ángulo].
103.	E2:	No, espérate. Acá así [gira de nuevo la Tablet 180 y pone su dedo horizontalmente sobre la construcción simulando un triángulo].
104.	E1:	Yo me estoy guiando por este puntico [señala con el dedo uno de los dos puntos que están sobre el lado punteado].
105.	E2:	No porque tenemos que hacer el puntico. O sea, tenemos que hacer esta línea [señala con su mano el lado que deben construir].
106.	E1:	¡Uich! ¿Qué hice? [Gira la Tablet 180 y al hacerlo oprime accidentalmente la herramienta que muestra la solución de la tarea].
107.	E2:	No sé.
108.	PR:	Oprimieron esto [señala con la mano la herramienta que permite ver la solución de la tarea, ].
109.	E1 y E2:	¡Ahhh!
110.	PR:	Esta cosita o la herramienta, les muestra cómo debería quedar.
111.	E1:	¡Ahhh!
112.	E2:	Y yo, ¡ehhhh!
113.	PR:	Es por ejemplo como lo que tenían ahorita. Esta es la línea [señala el lado del ángulo que es

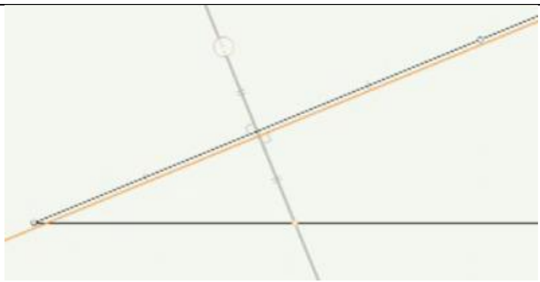
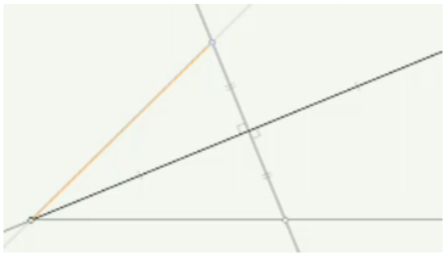
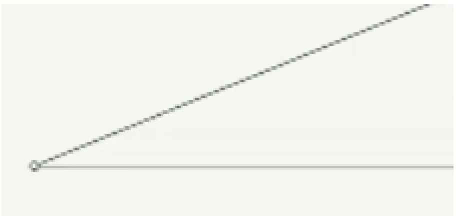
		objetivo de la tarea] y pueden construir encima de ella.
114.	E2:	¡Ah, ok!
115.	PR:	Pero cuando se devuelvan a la realidad [oprime de nuevo la herramienta ], se les desaparece todo lo que hayan construido. Pero tienen la guía.
116.	E1:	¡Ah, ok! Pero ya tenemos la guía acá [señala el lado punteado que sale al construir la bisectriz, ver 28]
117.	E2:	No.
118.	E1:	Es la misma. ¿No?
119.	PR:	Ajá.
120.	E2:	¿Es la misma?
121.	E1:	Sí mira que la misma [oprime de nuevo la herramienta  para indicar que la solución, ver 30, está es un lugar similar al del lado punteado, ver 29]  (29)  (30)
122.	E2:	Espérate (construye una recta que pasa por los puntos del lado punteado, ver 31).  (31) ¡Ay! Sí es la misma [conclusión después de oprimir de nuevo la herramienta  y verificar que la posición es similar].
123.	E1:	¡Ay! Ya te había dicho que es la misma.
124.	E2:	Pero bueno, ya tenemos la guía. Toca hallarla de manera diferente [que no se construyendo la bisectriz sobre la bisectriz dada].
125.	E1:	Yo iba a hacer algo (construye una mediatriz desde el vértice del ángulo, tal que pase por el punto que está en medio de los otros dos, ver 32).

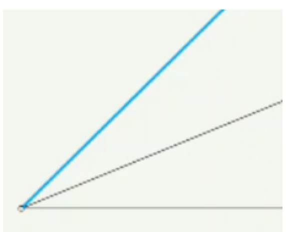
		 (32)
126.	E2:	No porque ahí no se formaría un triángulo.
127.	E1:	Ay, yo sé.
128.	E2:	¿Sabes dónde podría ser? Acá [señala con el debo la bisectriz dada] en la de la mitad (…) De pronto ahí sí se forma el isósceles.
129.	E1:	Espérate (construye una recta que pasa por el punto que pasa la mediatriz y uno de los extremos del segmento al que se le sacó la mediatriz, ver 33).  (33)
130.	E2:	¡Ay, ya lo tengo! (Borra la última recta y mediatriz construida, ver 34).  (34)
131.	E1:	El mío también ya estaba (…) Dale.
132.	E2:	Espérate (construye una mediatriz de un segmento comprendido en la bisectriz dada, el vértice del ángulo es uno de sus extremos y el otro lo cuadra de tal forma que la mediatriz pase por el punto que está entre los otros dos puntos del segmento del lado a construir, ver 35).  (35) Y…

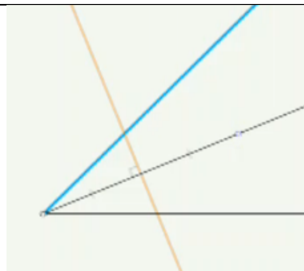
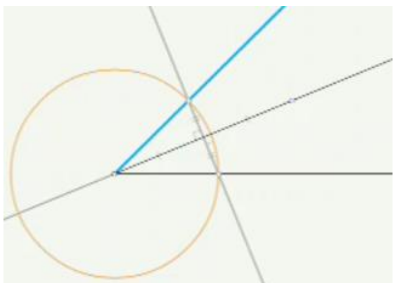
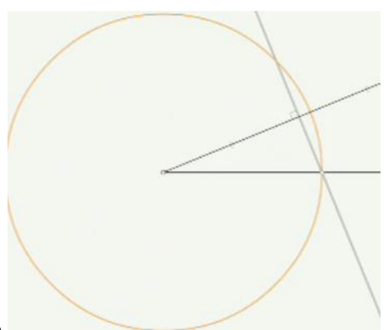
133.	E1:	Hay que trazarla (construye una recta que pasa por el vértice del ángulo y el punto de intersección entre la mediatriz y la recta superior, ver 36).  (36)
134.	E2:	No porque queda igual. Es como si no tuviéramos (…) A ver, es como si no tuviéramos nada de esto (borra todos los objetos geométricos construidos, ver 37). Y solo trazáramos acá (construye una mediatriz perpendicular a la bisectriz dada, ver 38).  (37)  (38)
135.	E1:	Pero como ya tenemos (…) ¡Ah! No sabemos qué punto es.
136.	E2:	En algún punto se une.
137.	E1:	No, no. Sí se puede. Si la haces de esta forma (construye una mediatriz tal que coincida con la mediatriz construida anteriormente, ver 39). ¿Ves? Ya tenemos otro punto.  (39)
138.	E2:	Pero es como lo que hicimos ahorita.
139.	E1:	Pero es un procedimiento diferente (construye una recta que pasa por el vértice del ángulo y por punto que generó la anterior construcción, ver 40). Y Euclidea no lo vale.  (40) ¡A ver! Movemos esto [toma la herramienta arrastre y mueve la construcción realiza, esta se deforma].

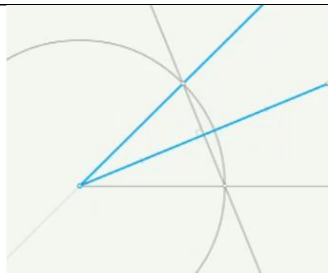
140.	E2:	Se deforma.
141.	PR:	Por eso no lo valida.
142.	E2:	¡A ver! (Borra todos los elementos geométricos construidos, ver 41).  (41) Ahm…
143.	E1:	Un triángulo isósceles, ¿cómo vamos a crear un triángulo isósceles?
144.	PR:	¿Para qué quieren construir un triángulo isósceles?
145.	E1:	Porque…
146.	E2:	Pues si hacemos un triángulo isósceles nos va a dar (…) (…) Nos va a dar esto [el lado que deben construir], porque se supone que…
147.	PR:	¿Ustedes me afirman que la recta de arriba [bisectriz dada] va hacer como la mitad del triángulo isósceles?
148.	E1:	¿Esta? [señala la bisectriz dada]
149.	PR:	Sí.
150.	E1:	Para mí sí.
151.	E2:	Sí. Sí.
152.	E1:	Pero no sé cómo hacerla.
153.	PR:	No sé. Prueben.
154.	E2:	Es que sí porque si…
155.	E1:	Yo ahorita lo hice y no me lo valió [Euclidea]…
156.	E2:	Los ángulos son los mismos (…) bueno, ángulos; o sea, ángulos (…) si los ángulos son los mismo acá [señala los dos ángulos que deben ser congruentes]. Si se supone que los ángulos deben ser los mismo acá [señala con los dedos nuevamente los ángulos que deben ser congruentes] porque tenemos que construir un ángulo igual, obligatoriamente este [la bisectriz dada] debe ser la mitad del triángulo isósceles, si llegáramos a (…) no sé, me imagino.
157.	PR:	¿Y cómo construirían el triángulo isósceles?
158.	E2:	Es que no tengo idea.
159.	PR:	¿O qué necesitan para construir un triángulo isósceles?
160.	E2:	¡Ehh! [Señala el cuaderno de E1].
161.	E1:	¿Si lo tenemos…? No se entiende lo que dice
162.	E2:	No sé. Pues sabemos que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales opuestos a…
163.	E1:	¡Ah! Sí lo tenemos. [Comienza a leer] Dado un triángulo isósceles sus dos ángulos opuestos a los

		lados congruentes son congruentes.
164.	E2:	¿Qué?
165.	E1:	[Lee de nuevo] Dado un triángulo isósceles sus dos ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes. Opuestos, opuestos [piensa en cómo interpretar el hecho geométrico]. ¡Ah, ok! Sí, mira [da clic en la figura miniatura de la tarea]. Este y este [los ángulos opuestos a los lados congruentes] pueden ser diferentes.
166.	E2:	No. O sea (…) Sí fuera un triángulo isósceles estos ángulos serían iguales [los ángulos opuestos a los lados congruentes] y este sería diferente [el ángulo que Euclidea da su bisectriz].
167.	E1:	Ángulos opuestos [murmura]. ¡Ah, ok! Opuestos, mira. Este [señala la bisectriz dada] y acá [traza con el dedo un segmento imaginario para formar un triángulo] se debe formar un ángulo 90 grados.
168.	E2:	¿90?
169.	E1:	Sí.
170.	E2:	¿Por qué 90 grados?
171.	E1:	Porque si lo haces así y lo haces así [hace dos trazos imaginarios sobre el cuaderno] te tiene que dar un ángulo de 90.
172.	E2:	Espérate.
173.	E1:	Mira. Este es mi lápiz mágico [traza con su dedo un triángulo sobre el cuaderno], si lo trazara [traza la bisectriz de un ángulo del triángulo]…
174.	E2:	Pero eso no es triángulo (…) ¡Ah, ok! Ya te entendí. Esta [señala la bisectriz dada] debe ser un ángulo de 90 grados.
175.	E1:	¡Exacto, ya me entendiste!
176.	E2:	Pero eso es lo que estaba haciendo ahorita, la mediatriz.
177.	E1:	No se entiende lo que dice.
178.	E2:	No, pero es que (…) Así tengamos la mediatriz. Bueno, ya. Ok. Tenemos la mediatriz (construye un mediatriz a un segmento contenido en la bisectriz dada, ver 42). Ya tenemos un ángulo recto. Bueno, dos ángulos rectos, pero falta hallar esta línea [señala con el dedo por donde debería pasar el lado del ángulo] que es lo que nos piden.  (42)
179.	E1:	Por eso, pero es un…
180.	E2:	Es un comienzo.
181.	E1:	¡Ah! Es un comienzo (construye un mediatriz tal que coincida con la bisectriz dada, ver 43).

		 (43)
182.	E2:	Pero ya intentamos hacer eso.
183.	E1:	Yo insisto.
184.	E2:	Que no, esa no [la construcción]. Ay de por Dios
185.	E1:	Unámosla (construye una recta que pasa por el vértice del ángulo y el extremo superior del segmento al cual se le construyó la mediatriz, ver 44). Chao Euclidea.  (44)
186.	E2:	No lo vale. A ver. Otra vez (borra los elementos geométricos construidos, ver 45).  (45)
187.	E1:	Tenemos uno. Yo ya hice uno [señala con el dedo el ángulo recto de la mediatriz].
188.	E2:	Tenemos dos ángulos del triángulo isósceles.
189.	PR:	¿Del triángulo isósceles cuáles serían los lados iguales?
190.	E1:	Este [señala con el dedo el lado del ángulo dado] y este [señala con el dedo donde debería ir el otro lado del ángulo].
191.	E2:	El que tenemos que hallar y este [señala con el dedo el lado del ángulo dado].
192.	E1:	Y este [señala la bisectriz dada] sería el de la mitad.
193.	E2:	Es que no sé cómo…
194.	E1:	No porque tampoco hay cómo hacer para que queden iguales.
195.	E2:	¿Qué? (…) No pues sí, los dos lados iguales son estos dos [reitera los lados señalados anteriormente].
196.	E1:	Uich, ¿ya cuántos puntos llevas hechos?

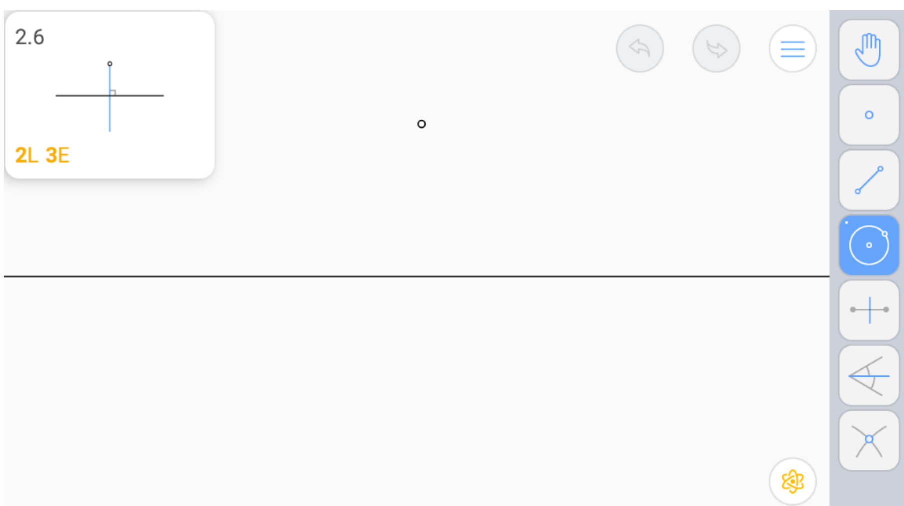
197.	E2:	Yo no he hecho puntos.
198.	E1:	Le haces así con la uña [toca la pantalla] y se marca.
199.	E2:	¿Con la uña? No, con la una (…) Bueno. ¡Ay Dios!
200.	E1:	¿Y si nos guiamos por esto, y miramos cómo llegar a esto y luego nos lo aprendemos, y lo pasamos? [Oprime la herramienta ].
201.	E2:	Bueno. Hágale. Confirmemos (…) ¿cómo se llama? (…) La teoría (construye una mediatriz perpendicular a la bisectriz dada, ver 46).  (46) ¿Y esto sí es un triángulo isósceles?
202.	E1:	Espera. Quiero usar la manita [arrastre] (borra la mediatriz construida, ver 47).  (47)
203.	E2:	¿Y para qué la manita?
204.	E1:	Yo quiero ver el por qué a ellos no se les deforma [mueve la construcción con la herramienta arrastre]. ¡Ah! Mira. Ya entendí por qué.
205.	PR:	Los dos ángulos siempre son iguales.
206.	E2:	¡Ahm!
207.	E1:	Sí ves.
		[…]
208.	E1: 17:24	Lo de mediatriz puede que funcione, puede que no funcione (construye una mediatriz perpendicular a la bisectriz dada, ver 48).

		 (48) Y a esta [mediatriz], ¿qué era lo que yo le hacía?
209.	E2:	¿Y un círculo [circunferencia]? No sé, para hallar este [un punto del lado superior]. A partir de acá (construye una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado y radio hasta el punto de intersección entre la mediatriz y el lado inferior del ángulo, ver 49).  (49)
210.	E1:	¡Ah, ok! Mira, ya tengo una idea.
211.	E2:	No porque igual no [la solución a la tarea]. ¡Ah! No, sí. Espera, creo que ya la tengo. [Sale de la herramienta ]. ¿Cómo es que era? Taz (construye una mediatriz perpendicular a la bisectriz dada , ver 50). Luego el circulo (construye una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado y radio hasta el punto de intersección entre la mediatriz y el lado inferior del ángulo, ver 51).  (50)  (51)
212.	E1:	La circunferencia.
213.	E2:	Y donde se cruza acá (coloca el punto de intersección entre la circunferencia y la mediatriz, ver 52) es la línea (construye una recta que pasa por el vértice del ángulo dado y el anterior punto construido, ver 52).

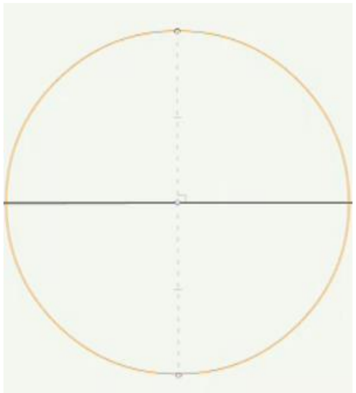
		 (52)
214.	E1:	¡Eso! [aplauden y celebran] No nos demoramos 20, ¿cierto? [Minutos].
215.	E2:	Creo.
216.	PR:	¿Y por qué la circunferencia y la mediatriz?
217.	E1:	Porque donde se intersectan [la mediatriz y la circunferencia], ya lo habíamos hecho.
218.	E2:	¡Ay! Era obvio. Porque al medir el radio de acá [punto de intersección entre la mediatriz y el lado inferior del ángulo dado] al vértice. Bueno, ¿al vértice? No, al ángulo que ya teníamos del triángulo (…) Ehh (…) Ya obligatoriamente esta mediatriz [la señala con su dedo] debía llegar al ángulo que teníamos que hallar para hacer el triángulo isósceles, o en este caso hacer la respuesta.
219.	E1:	La respuesta es bien tonta, lo mismo de la anterior.

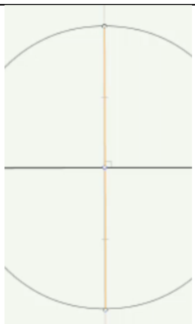
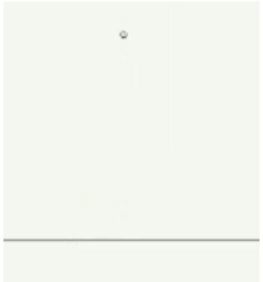
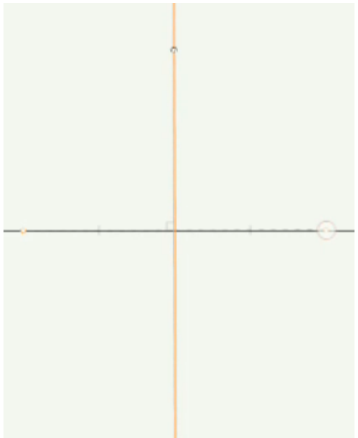
Tarea 11 – Beta 2.6

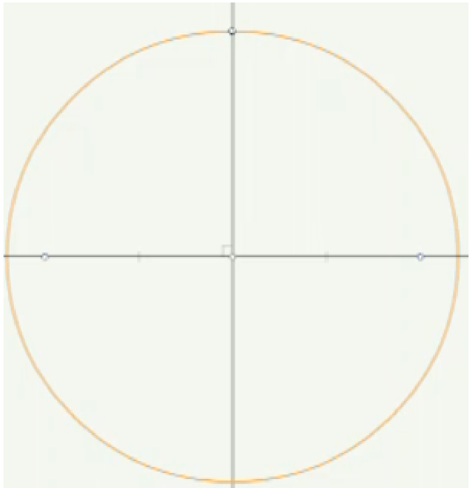
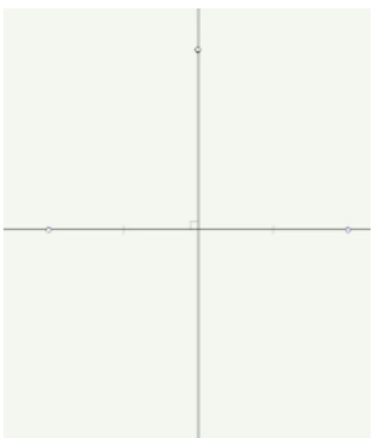
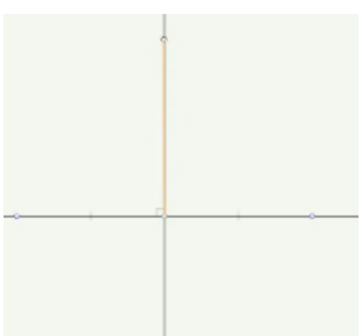
Trace una perpendicular desde el punto dado hasta la recta.

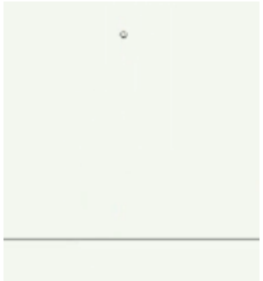
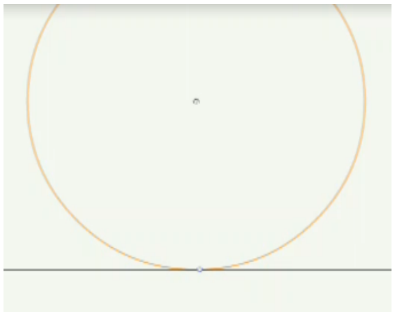


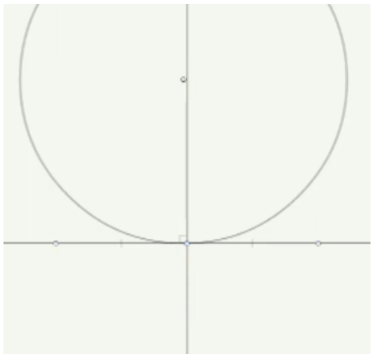
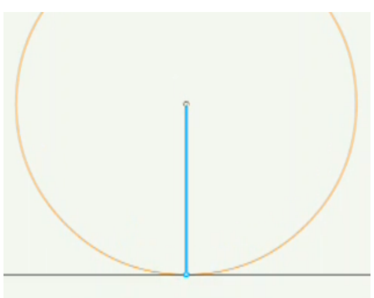
Las estudiantes después de resolver la tarea 2.4, pasan inmediatamente a desarrollar la tarea 2.6. Ante esta nueva tarea, ellas inician por leer el enunciado y al detectar la palabra perpendicular proceden a buscar en su cuaderno de geometría alguna definición o hecho geométrico que hable de ello. Rápidamente, encuentran la definición de rectas perpendiculares, proceden a leerla y proponen la primera estrategia de construcción.

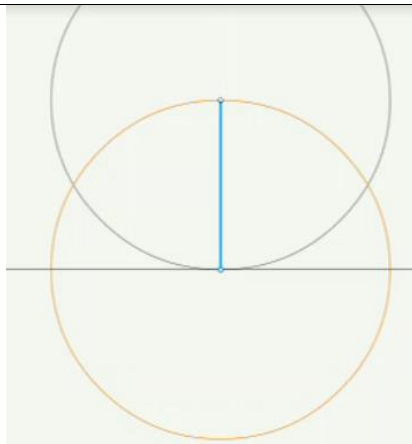
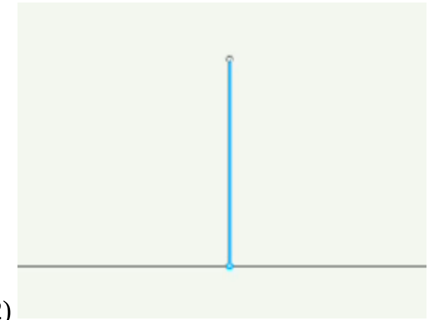
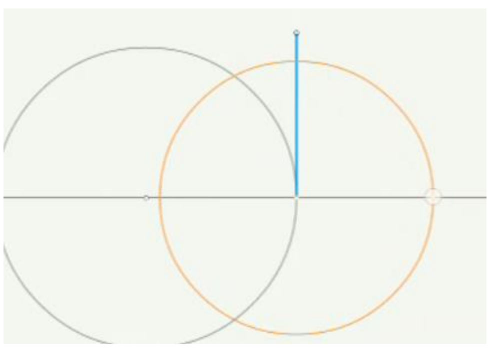
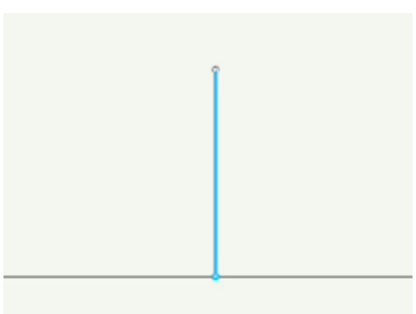
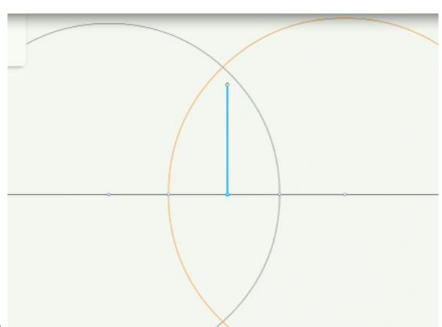
1.	E1: 19:14	Yo creo que sí la tengo (construye una mediatriz tal que coincida con la recta dada. Uno de los extremo del segmento es el punto dado), ver 1. (1)
2.	E2:	Tú con tu mediatriz.
3.	E1:	Déjame. Estoy feliz con ella. Y este puede ser un punto (marca el punto de la mediatriz con su respectivo segmento, ver 2) Y aquí podemos armar una circunferencia que quede acá (construye una circunferencia con centro en el anterior punto y radio hasta el punto dado, ver 2).  (2) Entonces, trazamos una recta (construye una recta que pasa por el punto dado y el punto construido, ver 3). ¿No? Ya se cruzaron formando un ángulo recto.

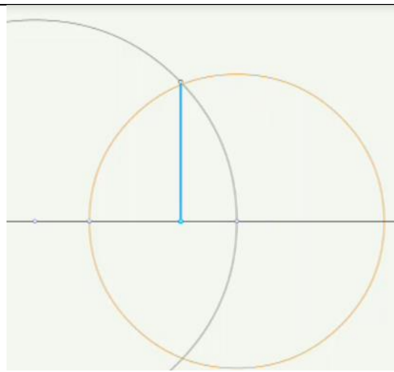
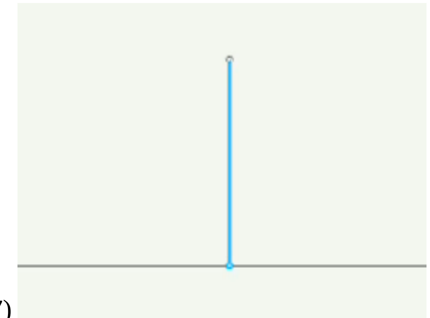
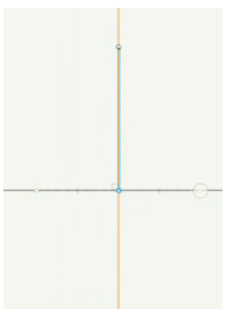
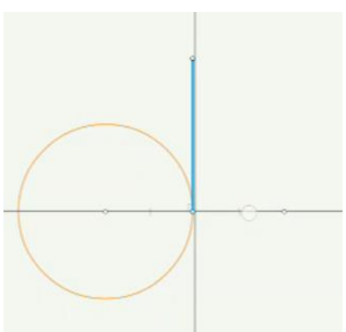
		 (3)
4.	E2:	[Selecciona la herramienta de arrastre] ¡Chururululo! (Por medio de arrastre mueve la construcción hecha por E1 y esta se deforma). ¿No?
5.	E1:	No, sipi.
6.	E2:	Ok (borra todos los elementos geométricos realizados, ver 4).  (4) Pero creo que la circunferencia no está tan loca, solo que no tenemos un punto para llegar…
7.	E1:	A la circunferencia.
8.	E2:	Porque si tuviéramos un radio…
9.	E1:	¿Y si lo hacemos diferente? (Construye una mediatriz que sea perpendicular a la recta dada y que pase por el punto dado, ver 5).  (5)
10.	E2:	Ja, ja, ja, ja [Se ríe porque E1 sigue intentando con mediatriz].
11.	E1:	Ay yo soy feliz así. Ahí tienes tu punto, míralo. Tu hermoso punto.
12.	E2:	Pero no creo que nos lo valga (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección

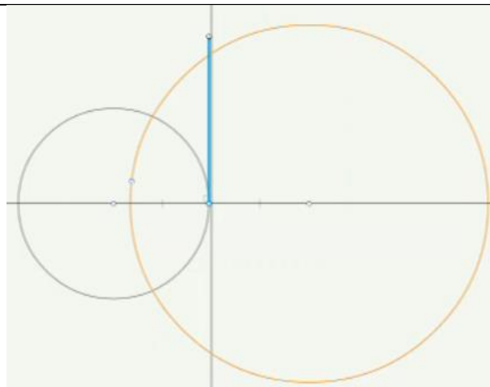
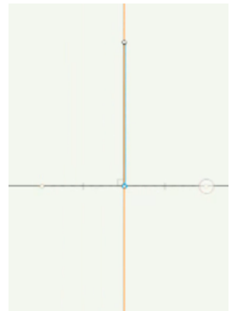
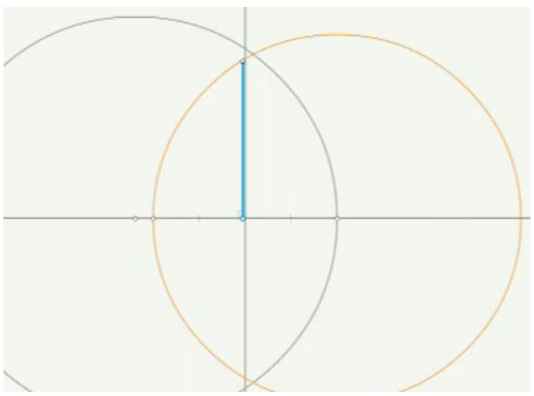
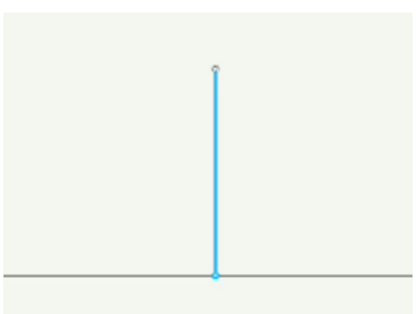
		entre la recta dada y la mediatriz, con radio hasta el punto dado, ver 6).  (6) No, pero ya.
13.	E1:	No porque no lo hemos marcado. Si ves que está en gris.
14.	E2:	¡Claro que sí! (borra la circunferencia construida, ver 7).  (7)
15.	E1:	Como que no.
16.	E2:	Bueno, ya (construye una recta que coincida con la mediatriz, ver 8). No nos lo vale.  (8)
17.	E1:	Si dice que debe formar cuatro [ángulos] y solo hay dos [cuadrito pequeño que indica un ángulo recto].

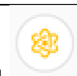
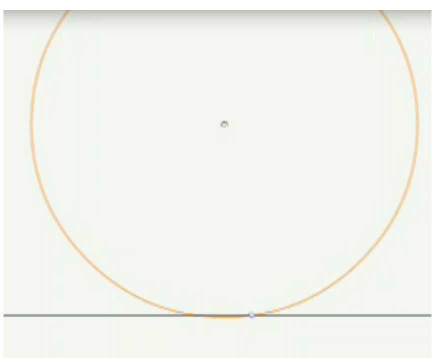
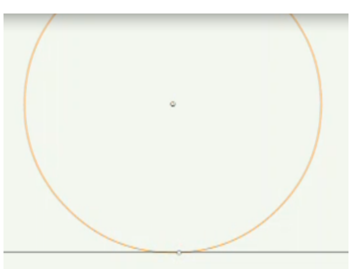
18.	E2:	Cuatro.
19.	E1:	Si hay cuatro pero no habías marcado los cuatro.
20.	E2:	¡A ver! Seamos inteligentes (borra todos los elementos geométricos construidos, ver 9).  (9) Tenemos que hallar cuatro ángulos rectos, ¿no?
21.	PR:	Pero con que se marque uno, ya los otros son rectos. ¿Listo?
22.	E2:	Sí.
23.	E1:	La mediatriz es bonita.
24.	E2:	Pero la mediatriz es como atinarle. Es como contar, como cuando teníamos que hallar el centro de la circunferencia y lo hicimos con el…
25.	E1:	¿Y si hacemos eso?
26.	E2:	¡Ay de por Dios! Tenemos es que encontrar la técnica para hallar la perpendicular.
27.	E1:	¿Te acuerdas el último punto que vimos de alfa? Que era…
28.	E2:	Sí, pero nos daban el radio. Esa es la diferencia, porque nos daban acá el punto [un punto sobre la recta].
29.	E1:	Ahora sí entendí.
30.	E2:	¡A ver! No sé. Que toque al menos (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio un punto sobre la recta, ver 10). Listo.  (10)
31.	E1:	Ahí.
32.	E2:	Ya tocó.
33.	E1:	Ahora ya tenemos el vértice el…
34.	E2:	No porque (…) es obvio que está fuch [el punto sobre la recta no está alineado con el punto dado de forma vertical].
35.	E1:	Pues…

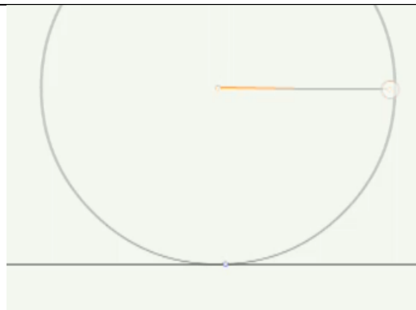
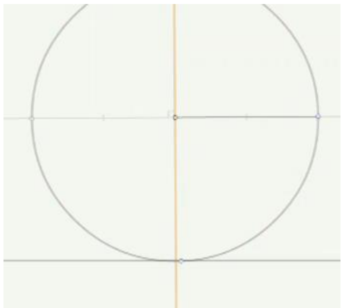
36.	E2:	Lo que necesitamos es enfocarnos en el círculo, no sé es una corazonada.
37.	E1:	Ojalá tus corazonadas sean ciertas (construye una mediatriz perpendicular a la recta dada que simule pasar por el punto dado, ver 11).  (11)
38.	E2:	Pero la mediatriz…
39.	E1:	Si ves que ya hay un ángulo recto [cuadrito que representa un ángulo recto].
40.	E2:	Que la mediatriz no sirve (…) o bueno no sé…
41.	E1:	No sabes (…) ¿Cómo me vas a dañar mi teoría?
42.	E2:	Pero…
43.	E1:	Espérate [oprime la herramienta ].
44.	E2:	¡Ah!
45.	E1:	Se ve tan fácil.
46.	E2:	Podemos construir…
47.	E1:	Dale…
48.	E2:	No, pues no. No tengo idea.
49.	E1:	La circunferencia.
50.	E2:	Este [E1 selecciona la herramienta de circunferencia].
51.	E1:	Y vamos a hacer lo mismo (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio hasta el punto de intersección entre las rectas perpendiculares, ver 12).  (11)
52.	E2:	Pero es que no tenemos (…) A ver (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección entre las rectas perpendiculares y radio hasta el punto dado, ver 12).

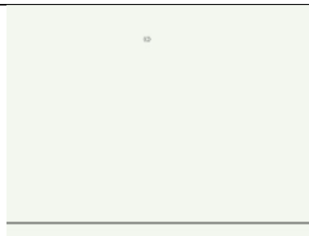
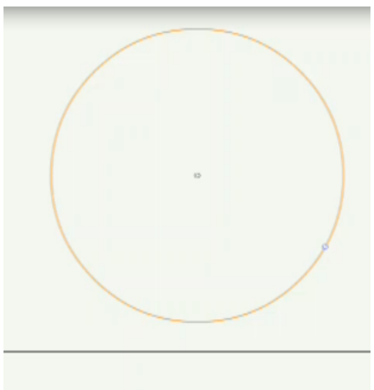
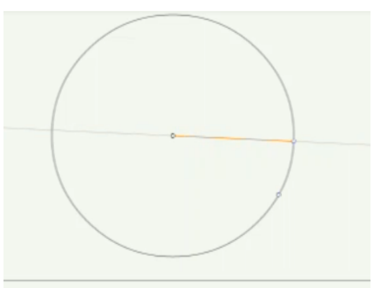
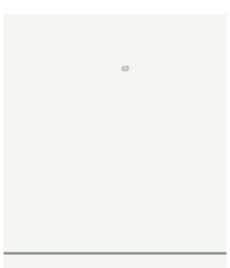
		 (12)  (13) No, ¿yo que estoy haciendo? (borra todos los elementos construidos, ver 13)
53.	E1:	Sí serviría si fuera de otra forma.
54.	E2:	No, no se puede…
55.	E1:	Si las circunferencias fueran por ahí (construye una circunferencia con centro un punto de la recta dada y radio hasta el punto de intersección entre las dos rectas perpendiculares. Luego, construye otra circunferencia con centro en el punto de intersección entre las dos rectas perpendiculares y radio un punto de la recta dada, ver 14).  (14) Es más, sí nos sirve pero por ejemplo (borra las dos circunferencias construidas, ver 15). Las circunferencias están aquí y aquí (construye dos circunferencias con centro en un punto de la recta dada y radio cualquiera, tal que simulen que su intersección sería la recta que buscan, ver 16).  (15)  (16)
56.	E2:	Mm, ok. Pero eso también sería de mucho cálculo (Borra las circunferencias construidas e intenta construir dos circunferencia que se intersecten en el punto dado, ver 17).

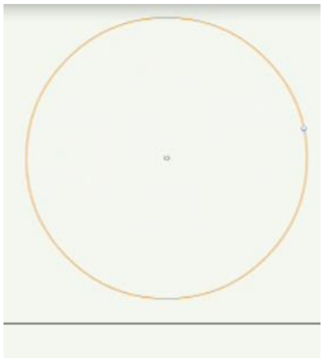
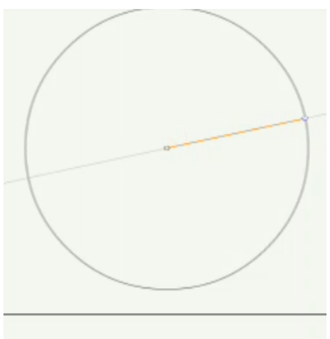
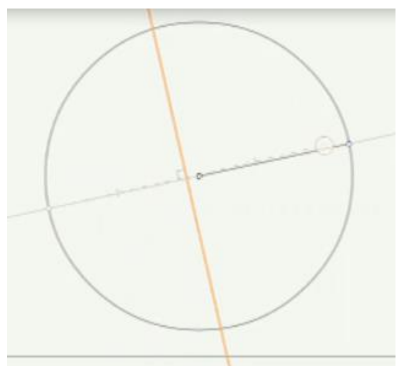
		 (17)  (18) No, porque mira [señala con el debo la recta que pasaría por la intersección de las circunferencias] (borra las circunferencias construidas, ver 18).
57.	E1:	¿Y si tenemos la misma medida de acá? [Señala con dos dedos la distancia desde el punto de intersección de las rectas perpendiculares hacia la izquierda]. Ya sé, la tengo. Espérate (construye una mediatriz de un segmento contenido en la recta dada, tal que coincida con la recta a construir, ver 19).  (19)
58.	E2:	Estás haciendo lo mismo de siempre Ana.
59.	E1:	No me dejan ser feliz (construye una circunferencia con centro en el extremo izquierdo del segmento de la mediatriz y radio hasta el punto de intersección entre las dos rectas perpendiculares, ver 20).  (20)
60.	E2:	¡Dios mío, Ana!
61.	E1:	Insisto (construye otra circunferencia con centro en el otro extremo del segmento de la mediatriz y radio un punto de la recta dada, ver 21).

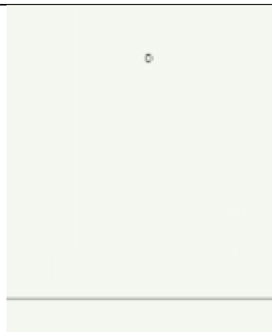
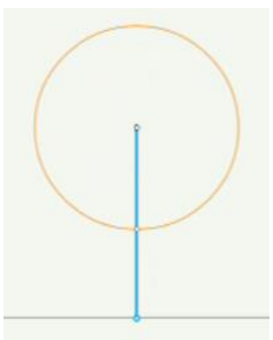
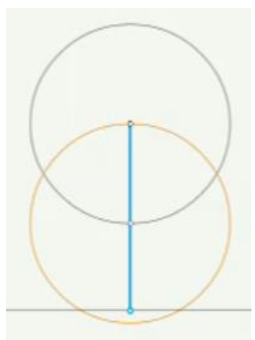
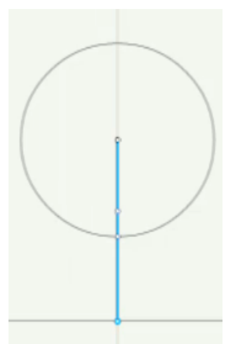
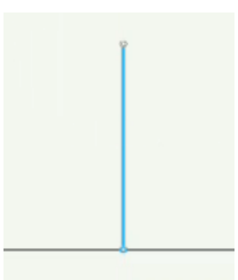
		 (21)  (22) ¡Ahs! (borra las dos circunferencias construidas, ver 22).
62.	E2:	La mediatriz no va ahí (E1 construye dos circunferencias simulando que la mediatriz pase por la intersección de estas, ver 23).  (23) Sí, ay no.
63.	E1:	No porque no se unen acá arriba [la mediatriz no pasa por la intersección de las circunferencias]
64.	E2:	Bueno, pero igual esa mediatriz ahí no sirve (borra todos los objetos geométricos construidos, ver 24).  (24)
65.	E1:	¿Cómo sabes qué no?
66.	E2:	Es como… ¡Aish!
67.	E1:	¡No sabes!
68.	E2:	A ver, tomemos en cuenta no sé (…) (…) A ver, ¿qué figuras podríamos hacer de nuevo? Podríamos hacer un triángulo, un rombo (…) podríamos hacer también un cuadrado.

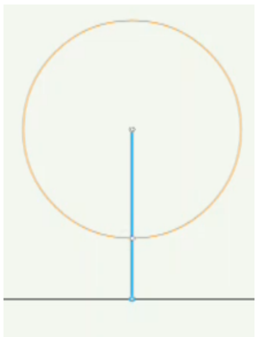
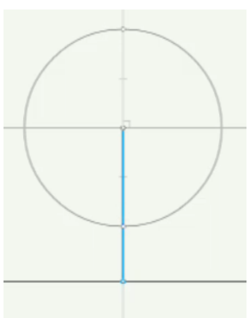
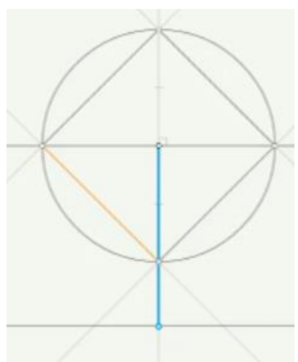
69.	E1:	Lo que pasa es que no vamos a hacer ninguna figura porque sería acá en el punto [el punto dado].
70.	E2:	Sí, pero (…) no sé.
71.	E1:	Mira, mira y si hacemos esto [le enseña a E2 algo que encontró en su cuaderno de geometría].
72.	E2:	¿Qué? [oprime la herramienta ] (…) (…) Espérate, a ver. No sé (construye una recta “horizontal que pase por el punto dado, ver 25).  (25)  (26) No, es que no tenemos un punto de partida (borra la recta construida, ver 26).
73.	E1:	Puedo hacer una circunferencia ya que no puedo usar mediatriz (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio hasta un punto de la recta dada, ver 27). No porque no quiera (borra la circunferencia construida, ver 28. Luego, construye nuevamente una circunferencia parecida a la anterior, ver 29).  (27)  (28)  (29)
74.	E2:	Es que si no porque eso también es como adivinar. Entonces no, tenemos que hallar (…) centrarnos en la circunferencia. A ver, a ver, a ver. El radio, no sé, el radio (construye un radio de la circunferencia, ver 30).

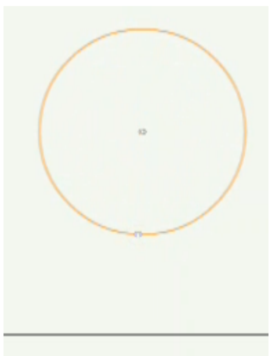
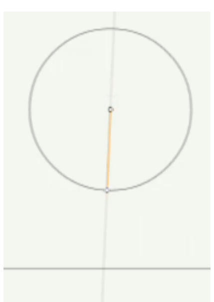
		 (30)
75.	E1:	Ok, pero usa la mediatriz…
76.	E2:	Ahí sí puede ser (construye la mediatriz del diámetro anterior, ver 31).  (31)
77.	E1:	Se usa la mediatriz como (…) Sí es, mira [señala la intersección entre la recta dada y la mediatriz]. Si ves que ya te botó un poquito más exacto, por decirlo así.
78.	E2:	Espérate.
79.	E1:	Nada se pierde con intentarlo (coloca el punto en la intersección de la recta dada y la mediatriz).
80.	E2:	Es que creo que este punto acá [señala el punto que determinó el radio de la circunferencia], el de la circunferencia.
81.	E1:	¿Y si lo retrocedemos y lo cambiamos?
82.	E2:	Mm no…
83.	E1:	No sabemos (…) (…) Con que (…) ¡Ah! Mira, ¿si te das cuenta con que aquí [señala con su dedo la intersección entre la mediatriz y el diámetro] solo se forme cuatro ángulos rectos ya se forma el de acá, o sea ya bota el de acá [señala con su dedo la intersección entre la mediatriz y la recta dada]? Si hubiese una figura que (…) no sé (…) un cuadrado dentro de un círculo, ¿te acuerdas cuando tuvimos que hacer el cuadrado dentro del círculo? Cuando siguiera derecho esa recta siempre da 90 grados [una de las diagonales del cuadrado]. ¿Y si hacemos lo mismo acá? Y que este sea nuestro punto de inicio [punto de intersección entre la recta dada y la mediatriz].
84.	E2:	Hazlo. Hazlo tú porque no te entiendo (borra los elementos geométricos construidos, ver 32).

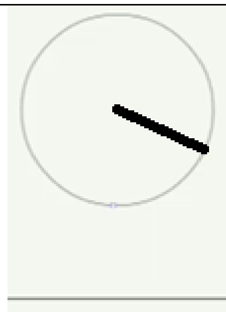
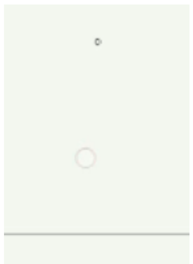
		 (32)
85.	E1:	No porque tú fuiste la que sacó esa [la tarea 1.7].
86.	E2:	¿Cuál? No me acuerdo. A ver, un ángulo ¿cómo así? Hacer un círculo (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio cualquiera, tal que quede en el semiplano superior determinado por la recta dada, ver 33), ¿sí? ¿Y trazar un cuadrado dentro del círculo?  (33)
87.	E1:	[Afirma con la cabeza].
88.	E2:	Ok (construye una recta que pase por el punto dado, ver 34).  (34) No me acuerdo cómo se hizo.
89.	E1:	Ok, espérate (borra la recta y la circunferencia construidas, ver 35).  (35)

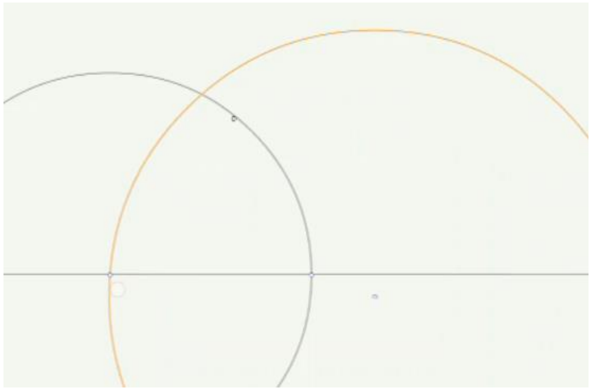
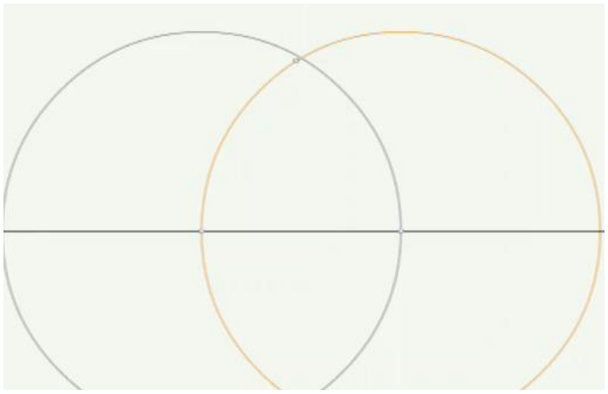
90.	E2:	Pero…
91.	E1:	Hay que atinarle (construye una circunferencia cuyo centro es el punto dado y radio cualquiera, tal que esté en el semiplano superior determinado por la recta dada, ver 36).  (36) Y por ejemplo aquí ya tienes el vértice [el punto que determinó el radio de la circunferencia] con el que sacaste (…) Es que no me acuerdo muy bien cómo tú lo hiciste.
92.	E2:	Yo tampoco.
93.	E1:	Espérate (construye una recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto que determinó su radio, ver 37).  (37)  (38) Ok. Y ahí sacábamos la mediatriz (construye la mediatriz del diámetro de la circunferencia, ver 38).
94.	E2:	No pero mira, es como [señala con el dedo que la mediatriz está torcida; o sea, no es perpendicular a la recta dada].
95.	E1:	Ok. ¿Pero qué tal si el vértice…?
96.	E2:	Es que… (Borra todos los elementos geométricos construidos, ver 39).

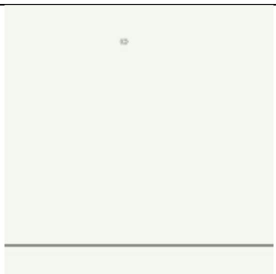
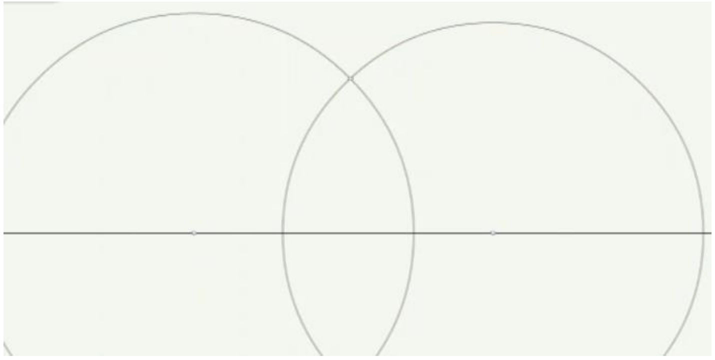
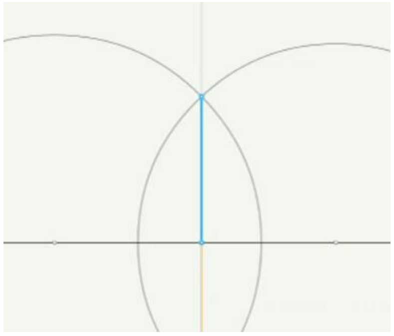
		 (39)
97.	E1:	Terminamos el punto donde no era…
98.	E2:	Es que no (…) Tenemos solo un punto.
99.	E1:	Un punto, y necesitamos otro (…) que sea así [realiza con la manos un movimiento en cruz o perpendicular]. ¿Puedo usar mediatriz?
100.	E2:	Ja, ja.
101.	E1:	Quiero ver [oprime la herramienta ] (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio un punto sobre la recta perpendicular, ver 40).  (40)  (41)  (42) ¿Y cómo era que tú lo sacabas? (Construye una segunda circunferencia con centro en el punto sobre la recta perpendicular y radio el punto dado, ver 41. Luego, la borra). No, es una línea (construye una recta que pasa por los dos puntos vistos, ver 42. Luego la borra todos los objetos geométricos construidos, ver 43).  (43)
102.	E2:	Yo nunca saque un cuadrado dentro de un ...

103.	E1:	Sí, en la última de alfa.
104.	E2:	Ah (…) Pero no.
105.	E1:	Sí
106.	E2:	Ah, sí. Ok, ya sé cuál es. Entonces (…) No, pero igual no creo que nos sirva (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio un punto sobre la recta perpendicular, ver 44).  (44) ¿Cómo era que lo hacía?
107.	E1:	Sacaba la línea y luego sacaba la otra… [Realiza con su mano sobre la mesa dos rectas que forma una cruz].
108.	E2:	Sí, ya (construye una recta que pasa por los puntos vistos y luego traza una mediatriz del diámetro de la circunferencia, ver 45. Luego construye los cuatro lados del cuadrado, ver 46).  (45)  (46) Pero para esto… [la construcción realizada]
109.	E1:	Necesitamos dos puntos.
110.	E2:	No, no necesariamente (…) o bueno, sí.
111.	PR:	¿Y de qué les sirve ese cuadrado?
112.	E2:	Sí, no sirve de nada. A ver [oprime la herramienta ]. ¿No dice nada sobre puntos? [busca en el cuaderno de geometría]
113.	E1:	Mira en las primeras hojitas.
114.	E2:	[Lee] Dos rectas son perpendiculares si forman cuatro ángulos rectos.

		[…]
115.	PR: 29:19	¿Qué necesitan encontrar?
116.	E2:	Otro punto.
117.	PR:	¿En dónde?
118.	E1:	Puede ser (…) Es que pueden ser de dos formas…
119.	E2:	Muchas formas (…) Puede ser acá en la recta [señala la recta con el dedo] o de la, no sé (…) al hacer una circunferencia, tal vez del radio exacto [señala con su dedo el radio que estaría contenido en la recta perpendicular]. O bueno, no. Espérate (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio cualquiera, tal que quede en el semiplano superior determinado por la recta dada, ver 47).  (47)
120.	E1:	Yo te dejo trabajar a ti.
121.	E2:	Es que no sé.
122.	E1:	No, es más sí. Creo que la tengo (construye una recta que pasa por los dos puntos que determinaron la circunferencia, ver 48).  (48)
123.	E2:	Pero no, ya me acordé porque no se puede. Porque…
124.	E1:	Rompe mi sueño.
125.	E2:	No. Sabes porque (…) así (borra la recta construida, ver 49) (…) Efectivamente este es el radio [señala uno de los radios de la circunferencia (color negro)]. Pero si arrancamos de aquí [señala con dos dedos los extremos del radio color negro] (…) Ah, cómo explicarlo.

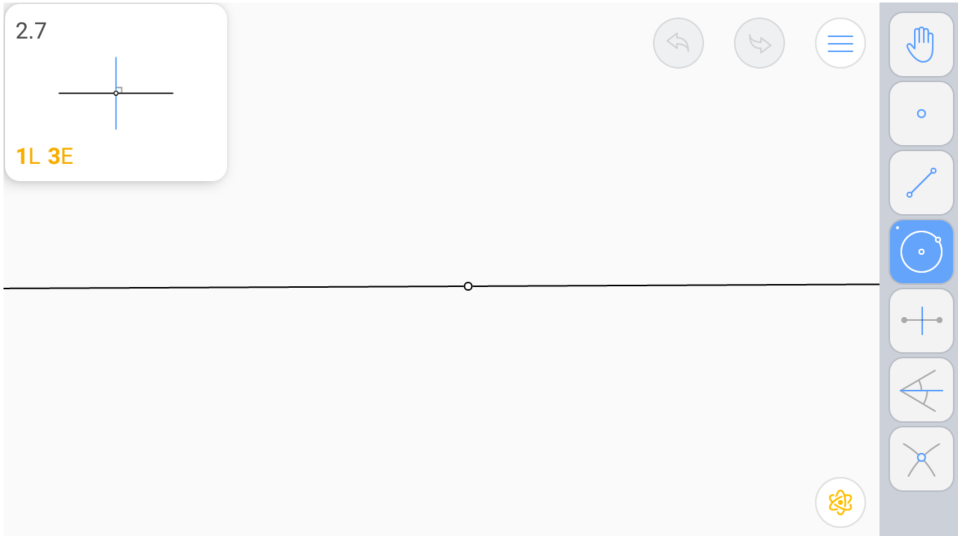
		 (49)
126.	E1:	Tú explícame y yo voy trabajando (borra la circunferencia construida, ver 50).  (50)
127.	E2:	No, no. Sí; o sea, no porque así el radio esté acá [señala con el dedo el radio color negro], la recta (…) (…) La línea recta podría quedar acá [señala un punto de la recta dada que no es el punto de intersección con la recta perpendicular] y pues no sirve [la recta no sería perpendicular a la recta dada, queda “torcida”].
128.	E1:	¿Y si usamos nuestra ayuda del día?
129.	E2:	No. Es que ellos [la otra pareja de estudiantes] no usaron ni una.
130.	E1:	Pero no nos vamos a quedar aquí toda la hora en esto [la tarea 2.6]. Nadie les va a decir.
131.	E2:	¿Ellos saben que hay ayudas?
132.	PR:	Sí. Sí la encontraron pero decidieron no usarla.
133.	E2:	¿Ves? Hay que usar el coco [señala con el dedo su cabeza].
134.	E1:	Mira que nos vamos a demorar todo el tiempo.
135.	E2:	Es que no sé cómo hacerlo.
136.	E1:	Es que miremos opciones [oprime la herramienta que permite ver una ayuda de la tarea]. ¿Qué quieres? [invita a E2 que escoja una de las pistas que brinda Euclidea]
137.	E2:	No sé.
138.	E1:	Decide. Yo lo decidí la vez pasada y no sirvió para nada lo que escogí que fue este [señala con el dedo la pista de “movimientos 2L”]. Ah no, esos son los movimientos y estos son [señala la otra pista llamada “movimientos 3E”] (…) Ay, son la misma cosa. No, estos son los movimientos que se pueden…
139.	E2:	¿Cómo así?
140.	E1:	Estos [señala a 3E] son los movimientos que se deben usar y estos [señala a 2L] son los movimientos que se hacen.

141.	PR:	Aquí [señala a 3E] es donde te dicen necesitas esto, esto y esto.
142.	E2:	¡Ah!
143.	E1:	Y aquí [señala 2L] es cómo se hacen y te dan los pasos, ¿sí?
144.	PR:	No.
145.	E2:	Ay, yo quiero este [oprime en la pista de “movimientos 3E”].
146.	E1:	¡Nooo!
147.	PR:	Mira, aquí [la pista] dice que una circunferencia, otra circunferencia y una recta.
148.	E1:	Yo te iba a decir que cerráramos [la herramienta de pistas].
149.	E2:	Ok. Necesitamos una circunferencia, otra circunferencia (construye dos circunferencias, ver 51. Luego, las borra).  (51)
150.	E1:	Ay sí, mira. Te acuerdas…
151.	E2:	No, yo no me acuerdo (construye dos circunferencia con centros sobre la recta dada y que parezcan que pasan por el punto dado, ver 52).  (52)
152.	E1:	Ahora traza (…) Mira, traza la recta… [señala con la mano la recta que debe pasar por la intersección de las circunferencias]
153.	E2:	Ese no es el punto medio [el punto dado no es la intersección de las dos circunferencias] (borra las dos circunferencias construidas, ver 53).

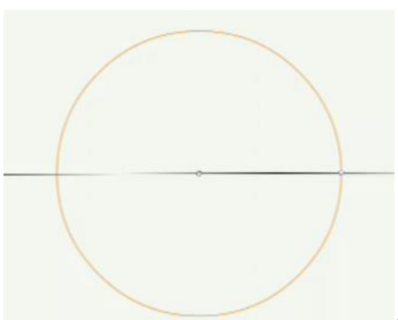
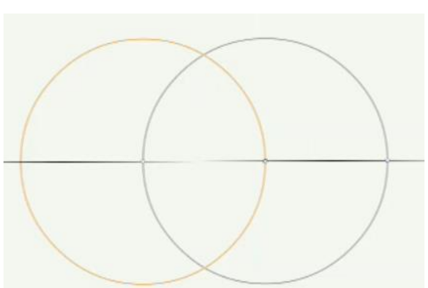
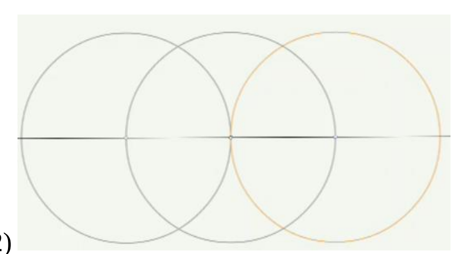
		 (53)
154.	E1:	No, no, no. No está tan descabellada tu idea (construye dos circunferencias con sus centros sobre la recta dada y radio hasta el punto dado, ver 54).  (54)
155.	E2:	¡Ohhh! (E1 construye la recta que pasa por las intersecciones de las circunferencias, ver 55).  (55)
156.	PR:	¿Y por qué?
157.	E2:	No sé. Ja, ja, ja. Nos dio la idea [la pista de Eudclidea].
158.	E1:	Porque es que siempre que se pone (…) (…) donde se intersectan las líneas, ¿sí?, las circunferencias siempre va a formar un ángulo recto.
159.	E2:	No, sí obvio.
160.	E1:	Ya no más.
161.	E2:	Que rabia.

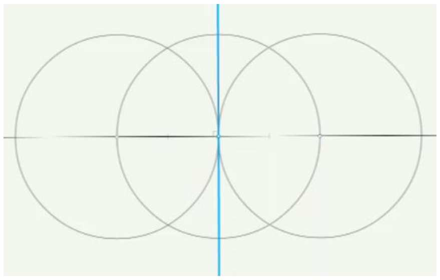
Tarea 12 – Beta 2.7

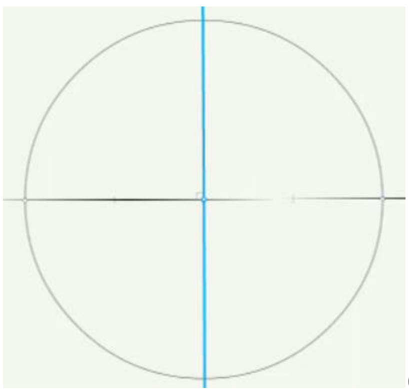
Trace una perpendicular desde un punto perteneciente a una recta.



Las estudiantes pasan a revolver esta tarea inmediatamente después de terminar la tarea 2.6. Teniendo en cuenta la solución de esta última tarea, las estudiantes discuten si pueden usar circunferencias de la misma manera, pero concluyen que no pueden ser dos circunferencias cruzadas ya que el punto no es externo a la recta dada.

1.	E2:	(E1 construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio cualquiera, ver 1) ¿Y la mediatriz? ¿Quieres usar mediatriz?  (1)
2.	E1:	No, espérate. Voy a hacer algo (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección entre la circunferencia y la recta dada y radio hasta el punto dado, ver 2).  (2)  (3) Es que es algo más o menos así (construye otra circunferencia pero con centro en el otro punto de

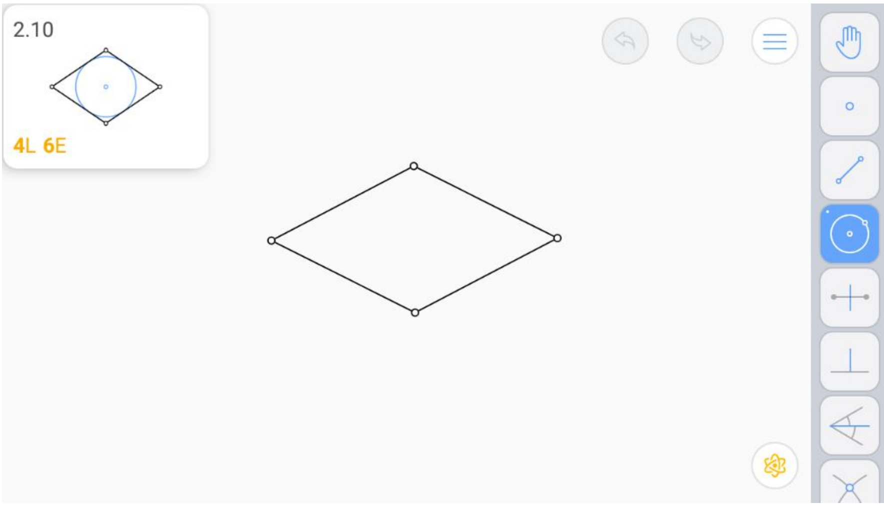
		intersección entre la primera circunferencia y la recta dada, ver 3). Y…
3.	E2:	¡Ahhh!
4.	E1:	Ajá (construye una mediatriz del segmento cuyos extremos son los centros de la segunda y tercera circunferencia, ver 4).  (4) Listo.
5.	PR:	¿Ya?
6.	E2:	Ese sí estaba fácil.
7.	E1:	Sí porque ya teníamos la idea de la pasada [tarea].
8.	PR:	Listo. ¿Qué hicieron? (…) ¿Para qué la circunferencia de la mitad? [Señala con el dedo la circunferencia de la mitad].
9.	E1:	La circunferencia de la mitad, porque a mi modo ver, es la que tomaba el radio de la circunferencia de la izquierda y el radio de la circunferencia de la derecha [señala cada circunferencia con una mano].
10.	E2:	Es decir, al hacer estos dos círculos… [Señala con el dedo las circunferencias de la izquierda y de la derecha].
11.	E1:	Que fueron tomados con esa medida de radio, era obvio que tenía que cruzar por el medio y desde ahí tomando la mediatriz (…) sabíamos que ahí ya tenía que cruzar por la mitad [señala con su mano la mediatriz] de la circunferencia.
12.	PR:	Pero esperen un momento. La primera circunferencia que hicieron fue la del centro.
13.	E1:	Sí.
14.	PR:	¿Para qué?
15.	E1:	Es que no sé. Para que…
16.	E2:	¡Ah, ya, ya! Cuando hicimos la circunferencia de la mitad, lo hicimos para identificar el radio; es decir, hicimos la circunferencia de la mitad [la señala con el dedo] e hicimos otras dos circunferencias [señala la circunferencia de la izquierda y la circunferencia de la derecha] para hallar el radio…
17.	PR:	¿De?
18.	E2:	Es decir (…) No, oye. Lo hubiéramos podido hacer sin estos dos círculos [señala con el dedo las circunferencias de la izquierda y la derecha].
19.	E1:	¿Será que sí? Espérate lo volvemos a intentar…

20.	PR:	¿No eran necesario las dos circunferencias de al lado? [Las señala con su dedo].
21.	E2:	No.
22.	E1:	No sé, eso queremos ver.
23.	PR:	Ok. Miren. (E2 borra todos los elementos construidos, ver 5). (5)
24.	E1:	Una circunferencia (construye una circunferencia con centro en el punto dado y radio cualquiera. Luego, construye una mediatriz del diámetro de la circunferencia contenido en la recta dada, ver 6).  (6) ¡Ay! Sí funciona.
25.	PR:	Sí funciona. Entonces, ¿para qué solamente esa circunferencia?
26.	E2:	Ok. Esa es (…) Al tomar el radio del punto hasta cualquier punto [simula la medida del radio con sus dedos pulgar e índice], se hace siempre el círculo [repasa con su dedo sobre la circunferencia]…
27.	E1:	Circunferencia…
28.	E2:	Circunferencia, y obligatoriamente el punto donde se toca con la recta [señala con sus dedos los dos puntos de intersección entre la circunferencia y la recta dada] va a ser; no sé…
29.	E1:	¿Cómo se llamaba esto?
30.	E2:	Bueno no, va a ser una (…) exacto, una perpendicular…
31.	E1:	Entonces se forma un ángulo de 90 grados…
32.	E2:	Como hacemos un círculo desde el medio, entonces ya partiendo de esto hallamos la mediatriz y ya estaría la solución.
33.	PR:	Entonces, ¿tienen que ver mucho estos dos puntos de intersección? [Señala con su dedo los dos puntos de intersección].
34.	E1:	Sí, para de ahí poder…
35.	E2:	No, para…

36.	E1:	Ya que son el mismo radio.
37.	E2:	La clave es…
38.	PR:	Como son el mismo radio, va a pasar por la mitad [señala con su dedo la mediatriz].
39.	E1:	Sí.
40.	E2:	Exactamente.
41.	PR:	Listo.

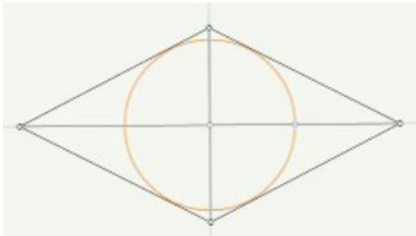
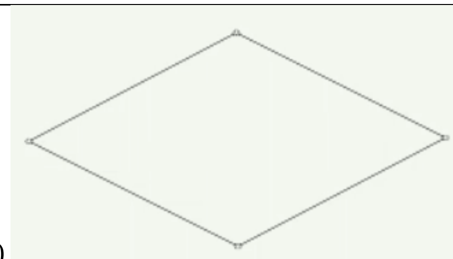
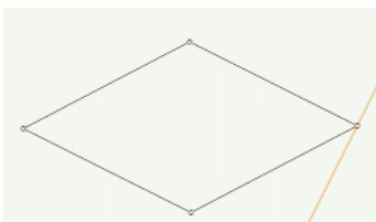
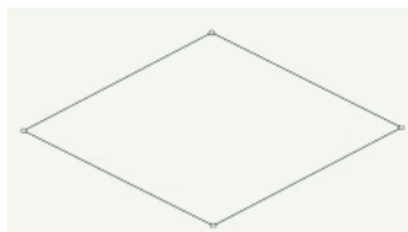
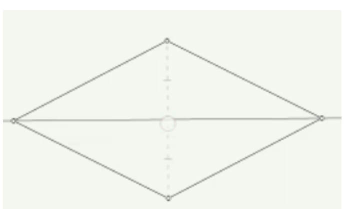
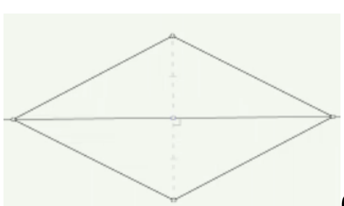
Tarea 13 – Beta 2.10

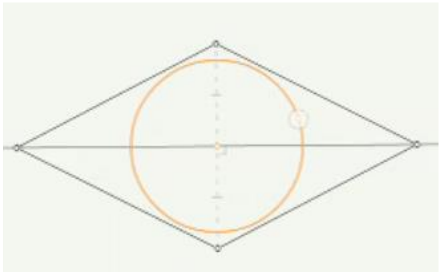
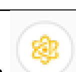
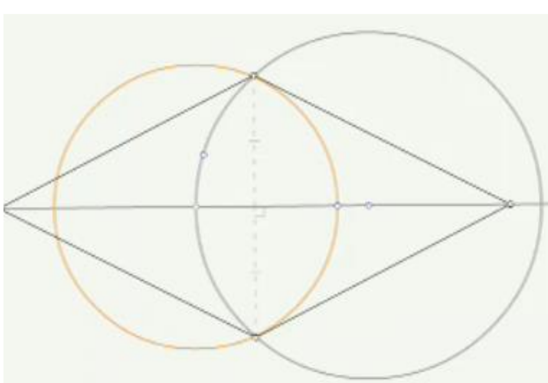
Inscriba una circunferencia dentro del rombo.

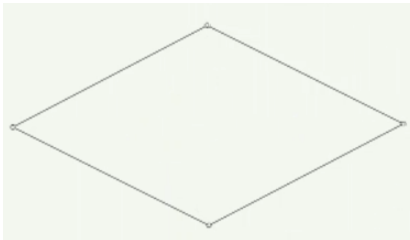
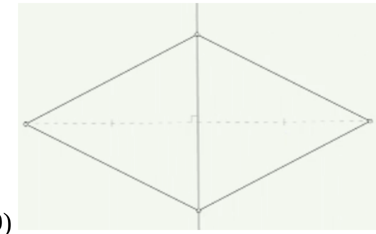
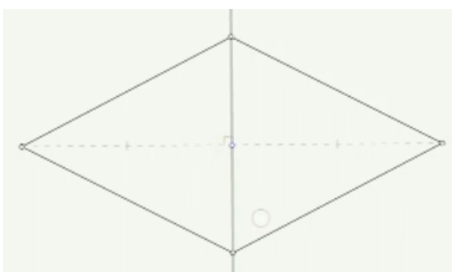


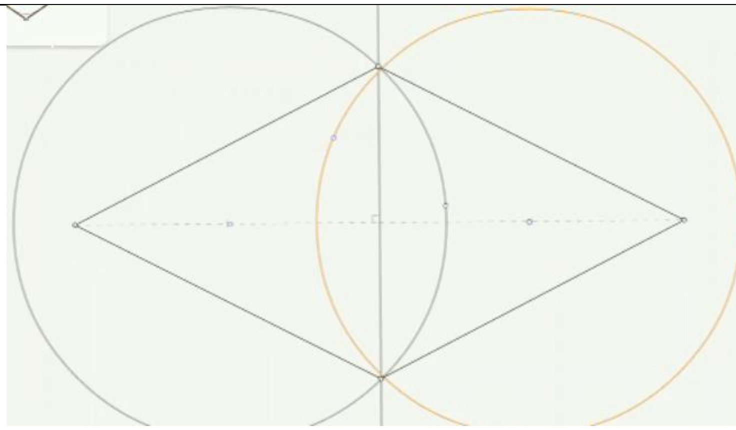
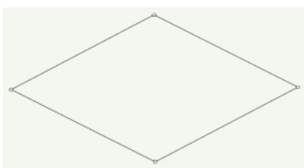
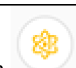
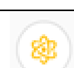
Euclidea les brinda a las estudiantes un tutorial para aprender a manejar la herramienta de "perpendicular", luego de solucionar las tareas 2.6 y 2.7. Después, ellas pasan inmediatamente a solucionar la tarea 2.10. Una de las estudiantes afirma que deben usar la nueva herramienta dada por Euclidea, ya que por algo la desbloquearon, pero la otra estudiante afirma que no es necesario y seguidamente comienza a proponer una posible construcción.

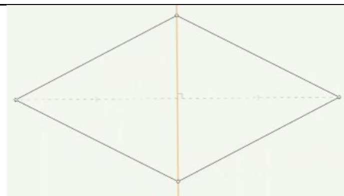
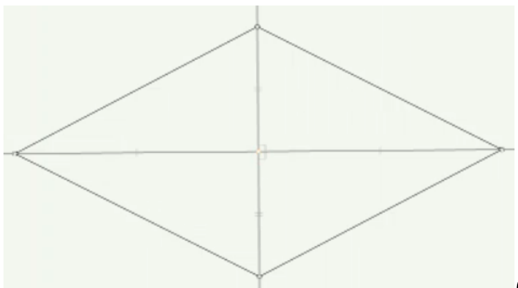
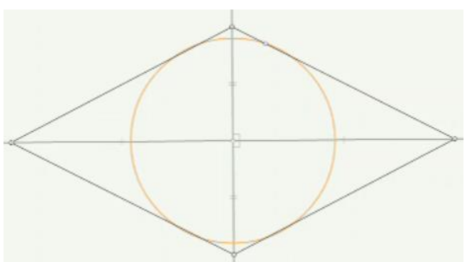
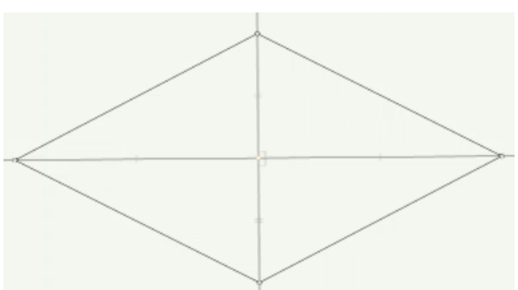
1.	E2: 33:28	(Construye las dos diagonales del rombo y una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio que parezca tocar a los lados del rombo, ver 1). No sé, corazonada.

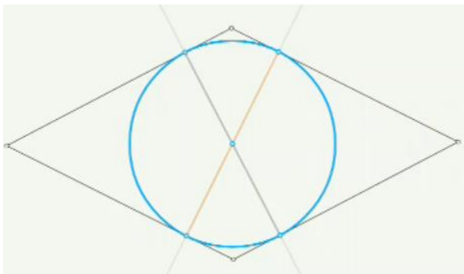
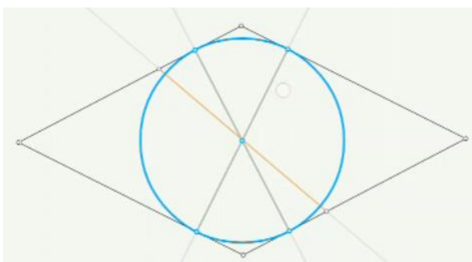
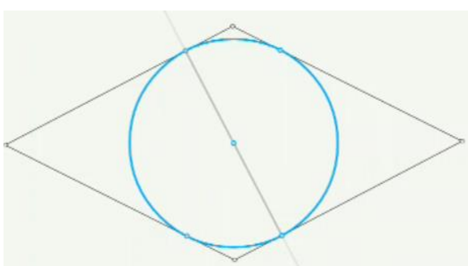
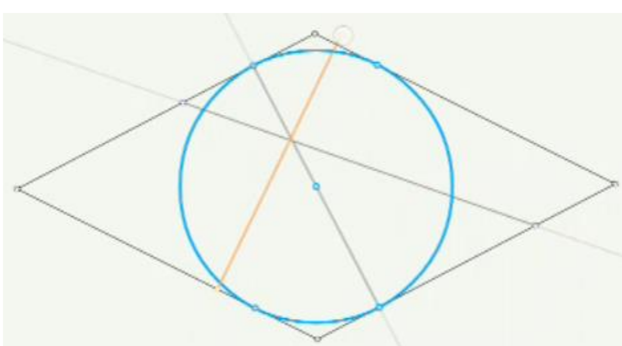
		 (1)  (2) No. Mi corazonada no sirvió (borra los objetos geométricos construidos, ver 2). Ahora sigues tú.
2.	E1:	¿Me dejas usar la herramienta que nos dieron?
3.	E2:	Pero, ¿para qué?
4.	E1:	No sé. Si nos la dieron no es para tenerla ahí.
5.	E2:	Pero yo creo que lo usaríamos en los niveles anteriores.
6.	E1:	(Construye una recta perpendicular a la recta que contiene al lado inferior de la izquierda que pase por el vértice de la derecha, ver 3) No. Es cierto, no sirve (borra la recta perpendicular, ver 4).  (3)  (4) (Construye la mediatriz con los vértices de arriba y abajo, ver 5).  (5)
7.	E2:	Bueno, ya hallamos el punto medio.
8.	E1:	Sí.
9.	E2:	No, mentiras. Espérate.
10.	E1:	No. Sí, se puede decir que sí (coloca un punto sobre la mediatriz, tal que parezca el punto medio de la diagonal, ver 6).  (6)
11.	E2:	Es como hacer (…) Es lo contrario (…) ¡Ay Dios mío! (E1 construye una circunferencia con centro en el punto construido anteriormente y radio que parezca tocar los lados del rombo una vez, ver 7.

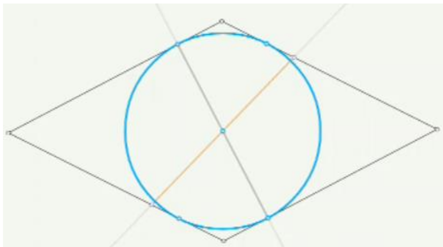
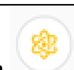
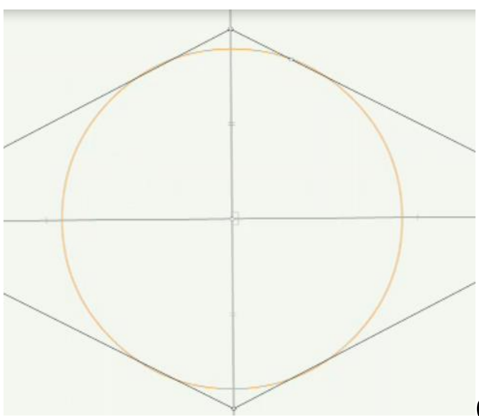
		Luego, la borra).  (7) No, ya probé eso. No nos dio (…) (…) A ver, no nos demoremos media hora aquí [en la tarea 2.10].
12.	E1:	Te adoro Euclidea. [Utiliza arrastre en la construcción.] ¡Ah! Si se mueve por toda la recta no debe cambiar.
13.	PR:	Siempre debería quedar adentro [la circunferencia en el rombo].
14.	E2:	¡Ah! El punto medio acá [señala donde debería quedar el punto medio de la diagonal] no sirve.
15.	E1:	Puede que sí sirva, pero…
16.	E2:	No. Sí tiene que servir porque… [E1 oprime la herramienta ]
17.	E1:	¿Y si hacemos un rectángulo?
18.	E2:	Espérate. Tiene cuatro puntitos.
19.	E1:	Y ya no tenemos ayuda.
20.	E2:	Tiene cuatro puntos.
21.	E1:	Es como un rectángulo. Si ves, mira [hace un trazo con el dedo sobre los cuatro puntos].
22.	E2:	¡Ah! Es cierto, Un rectángulo.
23.	E1:	Puede que sí, puede que sirva.
24.	E2:	No sé [oprime la herramienta ]. Hay que hacer un rectángulo en el rombo. (E1 construye dos circunferencias cuyos centros están sobre la mediatriz construida y radio tal que pasen por los vértices de arriba y abajo del rombo, ver 8).  (8) Pero si ya nos dieron la herramienta para hacer eso [una recta perpendicular a otra por un punto

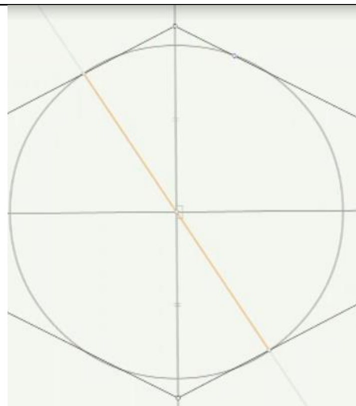
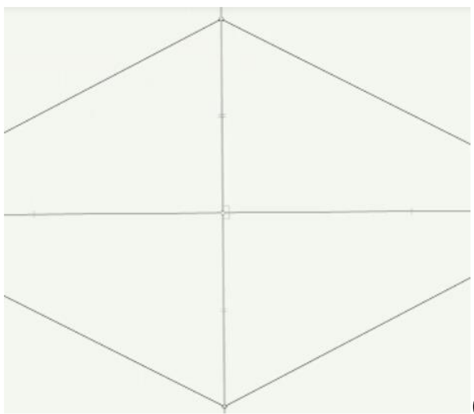
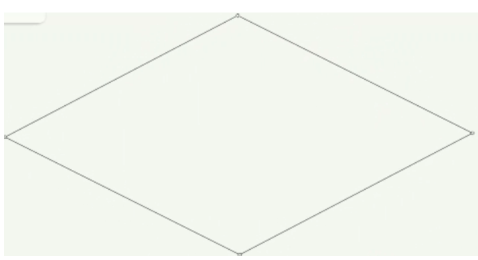
		dado]. ¡Ah! No, nada.
25.	E1:	Que herramienta ni que nada (borra las dos circunferencias y la mediatriz construidas, ver 9).  (9)  (10) (Construye una mediatriz de la diagonal cuyos extremos son los vértices de la izquierda y derecha del rombo, ver 10). Yo estoy pensando ¿no?, que las circunferencias crucen por los dos punticos [señala el vértice de arriba y el vértice de abajo del rombo]. (E2 intenta construir dos circunferencias que pasen por los vértices indicados por E1, pero no lo logra)
26.	E2:	Pero mira que sí en la guía, sí decía que el punto medio sí era necesario. Entonces podemos colocarlo de una vez.
27.	E1:	¡Ay! Sí, porque a veces hay por… (E2 coloca un punto que simula ser el punto medio de la diagonal "horizontal", ver 11).  (11)
28.	E2:	Entonces (…) Hagamos un rectángulo.
29.	E1:	Un rectángulo. Dale.
30.	E2:	Yo no sé.
31.	E1:	Ahorita lo estaba haciendo muy bien (intenta construir circunferencias que pasen por los vértices de arriba y abajo del rombo, pero las borra). ¡Ah! Ya sé, ya se (construye dos circunferencias cuyos centro son las marquillas de congruencias generadas al construir la mediatriz y radio tal que pasen por los vértices de arriba ya abajo del rombo, ver 12).

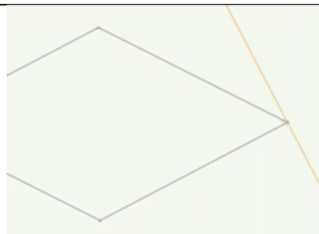
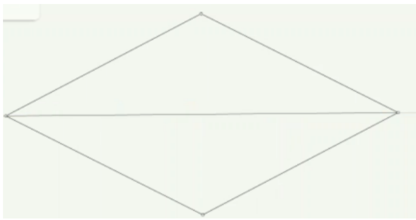
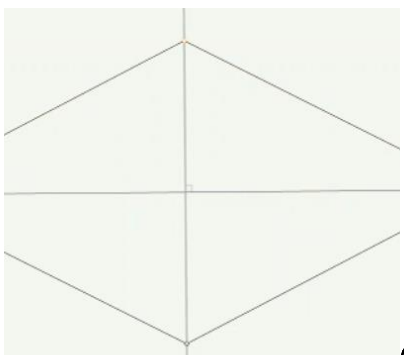
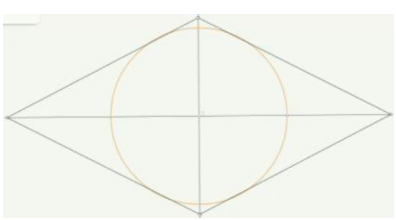
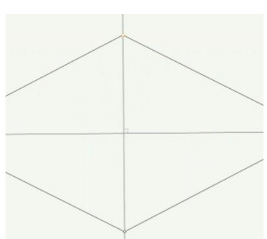
		 (12)
32.	E2:	Venga Ana.
33.	E1:	Hazlo.
34.	E2:	No. Es que no sé cómo hacerlo (borra todos los elementos geométricos construidos, ver 13).  (13)
35.	E1:	¡Ay, otra vez! Tú vuelves y me dañas todo.
36.	E2:	A ver [oprime la herramienta ].
37.	PR:	¿Qué puntos necesitan buscar?
38.	E1:	Estos cuatro.
39.	E2:	Estos cinco [pasa el dedo sobre el rombo].
40.	PR:	¿Cuáles cinco?
41.	E1:	Un, dos, tres… [señala con el dedo los puntos que va contando]
42.	E2:	¿Por qué estos dos? (…) Puede ser (…) ¡Ah! No o no sé. Puede ser…
43.	PR:	¿Y cómo…? Enfóquense en solo uno de esos cinco, ¿cuál?
44.	E2:	En este [señalan el centro de la circunferencia] o en este [señala el punto en común entre la circunferencia y el lado de la derecha superior del rombo].
45.	PR:	¿Pero cuál harían primero?
46.	E2:	El centro [señala el centro de la circunferencia].
47.	PR:	¿Y cómo harían el centro?
48.	E1:	Con el radio que sea igual.
49.	E2:	No. Con las diagonales [señala con el dedo el lugar de las diagonales del rombo].
50.	E1:	Espérate [oprime la herramienta ]. (Construye la mediatriz de la diagonal más grande del rombo, ver 14).

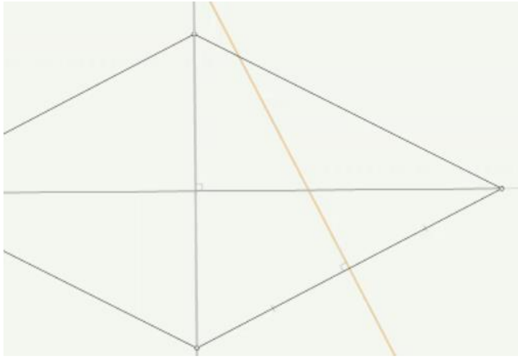
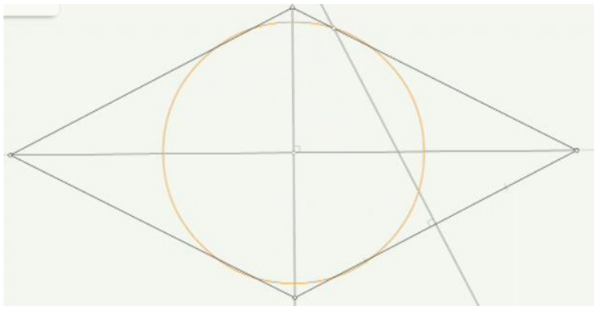
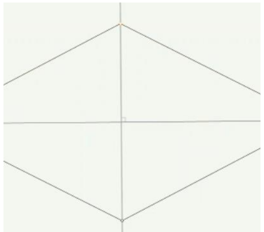
		 (14)
51.	E2:	Pero esa es la mediatriz. Bueno también sirve.
52.	E1:	Sabes que mi herramienta favorita es la mediatriz.
53.	E2:	Sí, ya lo sé.
54.	E1:	No sé para qué la volví a hacer (construye la mediatriz de la diagonal pequeña del rombo y coloca el punto de intersección entre las mediatrices, ver 15).  (15)
55.	E2:	Pero eso no es (…) Bueno, sí.
56.	E1:	Tengo que terminar beta hoy (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales y radio que parezca ser tangente a lo lados del rombo, ver 16).  (16)
57.	E2:	Espérate (borra la circunferencia, ver 17). Listo.  (17) Ahora [oprime la herramienta ], para hallar este… [señala con el dedo el punto en común entre la circunferencia y el lado derecho superior del rombo]
58.	E1:	Ya hallamos el centro.

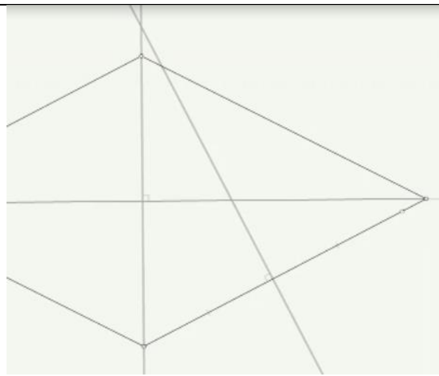
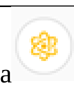
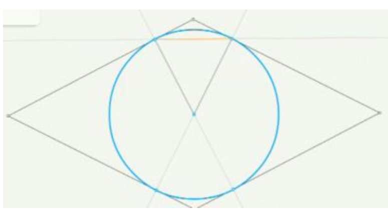
59.	PR:	Listo. ¿Y ahora qué harían para encontrar alguno de los otros puntos?
60.	E1:	No sé. Espérate, en mi cuaderno debo tener algo [revisa su cuaderno de geometría].
61.	E2:	Todo es dentro del círculo. No es hacer el círculo dentro de algo. Ok. Mirémoslo de una forma de otro ángulo.
62.	E1:	Puntos que crucen. Si ves esta [señala los puntos a encontrar] (…) No, espérate (construye rectas que pasan por los cuatro puntos a encontrar en forma de equis, ver 18).  (18) Los puntos, mira ya nos botan eso.
63.	E2:	Pero puede ser acá (construye una recta que contiene a otro diámetro de la circunferencia, ver 19).  (19)
64.	E1:	Eso es cierto. Pero si ves que siempre llegas al mismo punto con esas líneas.
65.	E2:	No (borra dos rectas trazadas anteriormente, ver 20).  (20)
66.	E1:	Sí. A ver, si trazaras una por acá y otro por acá (construye dos recta, ver 21) sería otro punto.  (21)

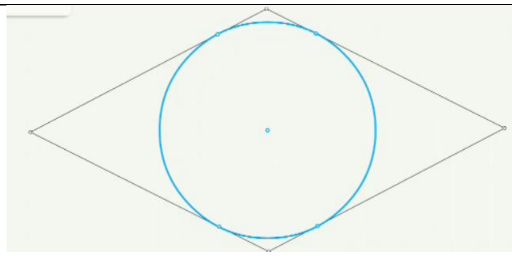
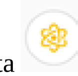
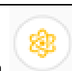
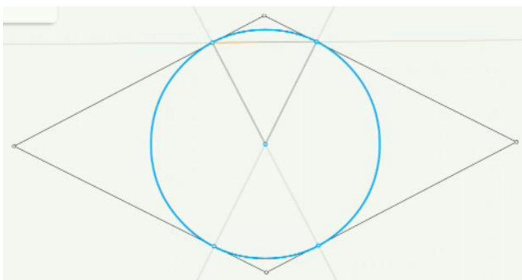
67.	E2:	No, pero pasando por el centro. No, mira, pasando por el centro, acá (borra las dos anteriores rectas y construye una recta que pasa por el centro de la circunferencia ver, 22). Por un punto diferente [a uno de los cuatro puntos azules sobre el rombo].  (22)
68.	E1:	Pero es que tampoco nos podemos quedar mucho por eso. Si es que no, no, no son las únicas que se intersecan con el rombo. Son los únicos que se intersectan [los cuatro puntos azules] son los punticos los únicos que se intersecan.
69.	E2:	No te entiendo.
70.	E1:	¡Ay, Dios mío!
71.	E2:	Bueno, a ver [oprime la herramienta ].
72.	E1:	Tenemos esto [señala la pantalla]. (E2 construye una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales y radio que parezca ser tangente al rombo, ver 23).  (23) Ahora (construye una recta que pasa por dos puntos en común entre la circunferencia y el rombo, ver 24).

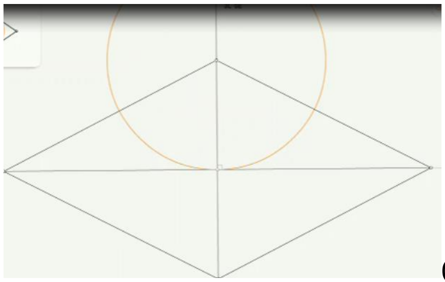
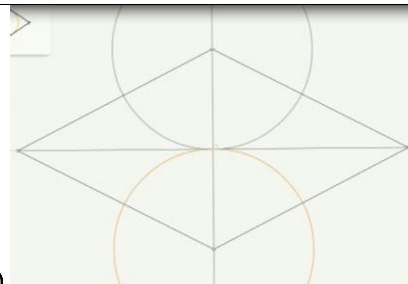
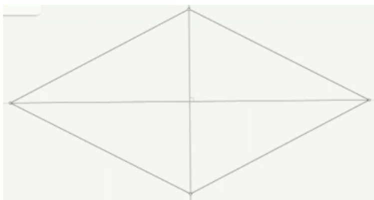
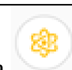
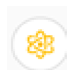
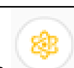
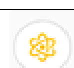
		 (24)
73.	PR:	¿Euclidea no la válida?
74.	E2:	No. A ver (borra la y la circunferencia, ver 25).  (25) No sé, podemos [selecciona la herramienta de mediatriz]. ¿Este para qué sirve? [Señala la herramienta recta perpendicular]. Espérate que yo no me terminé de…
75.	E1:	Sí, es que no me lo dejaste… No, yo estoy perdida, no sé para qué es.
76.	PR:	Ese te traza una perpendicular a una recta por un punto específico. (E2 borra todos los elementos geométricos construidos, ver 26).  (26)
77.	E1:	Vamos a ver. Ojalá sea esto lo que tengamos que usar (construye una recta perpendicular al lado inferior derecho del rombo por el punto de la derecha, ver 27).

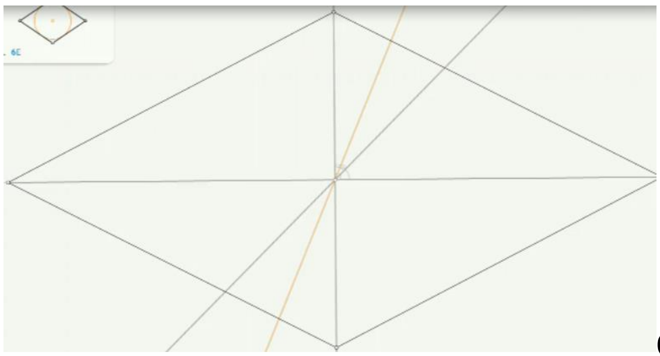
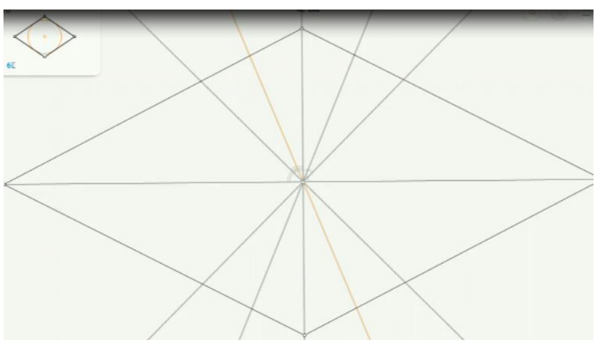
		 (27)
78.	E2:	¡Ay! Esa es la del anterior, la del círculo. Bueno. No. Sí, ya entendí (E1 traza un recta por los vértices de la izquierda y derecha del rombo, ver 28).  (28)
79.	E1:	No. Déjamela usar. Eso (…) (…) No, pero eso no sirve [trata de construir una recta perpendicular, pero no sabe cómo].
80.	PR:	Ahí funciona es con dos clics (…) (…) Entonces, cuando tienes activada esa herramienta le das a la recta con la que quieres que forme el ángulo recto [da clic sobre la diagonal] y por el punto que quieres que pase [le da clic al vértice superior del rombo] (construye una recta perpendicular a la diagonal que pasa por el vértice superior del rombo, ver 29).  (29)
81.	E1:	Tan divino. ¿Y ahora? (…) Tan bonito pero es que no me funciona (construye una circunferencia con centro en el punto en común entre las diagonales y radio que parezca tocar a los lados del rombo solo una vez, ver 30).  (30)  (31) Sigue estando salida (borra la circunferencia, ver 31).

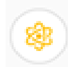
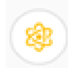
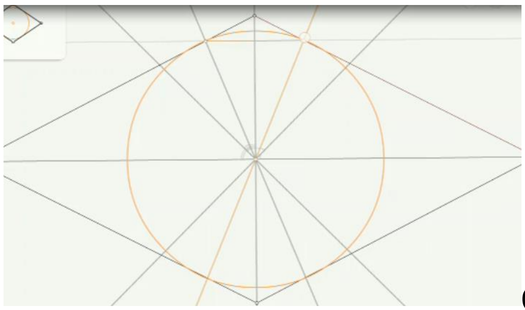
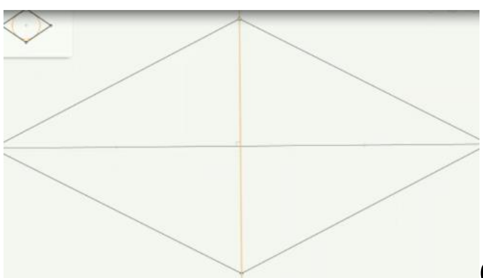
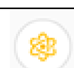
82.	PR:	¿Qué característica creen que puede tener ese punto que necesitan sobre los lados del rombo?
83.	E1:	Que es la mediatriz. No, no es.
84.	PR:	¿Ese punto será la mitad?
85.	E1:	No sé, averigüémoslo (construye la mediatriz del lado inferior derecho del rombo, ver 32).  (32) No es la mitad.
86.	E2:	[Golpea la pantalla con un dedo señala la intersección entre la mediatriz y el lado derecho superior del rombo].
87.	E1:	¿Qué pasó?
88.	E2:	No sé, tal vez sea la… O sea (Construye una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta el punto de intersección entre la mediatriz y el lado derecho superior del rombo, ver 33).  (33)  (34) Mm, no (borra la circunferencia y la mediatriz construida, ver 34). ¿Cómo así la mitad?
89.	E1:	O sea, lo que hicimos pero no es la mitad porque la mediatriz la botó a otro lado. Ella [la profesora] se refiere a esto (…) a que este puntico [señala con el dedo el punto intersección de las diagonales] sea la mediatriz de esta [señala el lado inferior derecho el rombo] y no porque (…) sería más o menos por acá [señala donde debería quedar el punto que necesitan] (Construye una mediatriz al lado inferior derecho del rombo, ver 35).

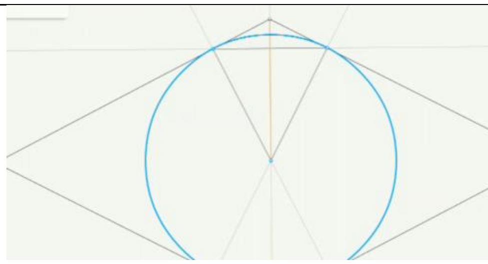
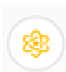
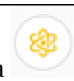
		 (35)
90.	E2:	Yo no (…) Ay Dios.
91.	PR:	Pues yo me refiero a uno de los puntos que queda sobre los lados del rombo.
92.	E2:	Sí, estos [señala con el dedo el lugar de los puntos que buscan].
93.	PR:	Ajá. ¿Tendrá alguna característica ese punto?
94.	E1:	¿Será el radio?
95.	E2:	Sí, exacto es un radio [oprime la herramienta ]. Pero no, no todos son radios. No son todos los radios. Ahm, ou, no sé (…) ¿Esto puede formar un triángulo, no sé? (Construye un triángulo cuyos vértices son el centro de la circunferencia y los puntos que buscan de los lados superiores, ver 36).  (36)
96.	E1:	Equilátero, isósceles
97.	E2:	¿Un triángulo equilátero?
98.	E1:	No. Es isósceles.
99.	E2:	No. Es equilátero.
100.	E1:	Es isósceles.
101.	E2:	Es equilátero. ¿Es isósceles o es equilátero?
102.	PR:	No sé.
103.	E2:	Es equilátero.
104.	E1:	Es isósceles. Mírale esto, mírale esto [le señala el lado del triángulo cuyos extremos son los puntos que quedan sobre los lados del rombo].
105.	E2:	Bueno. Sigamos la pista. De nada nos sirve… (Borra las rectas que contiene a los lados del triángulo, ver 37).

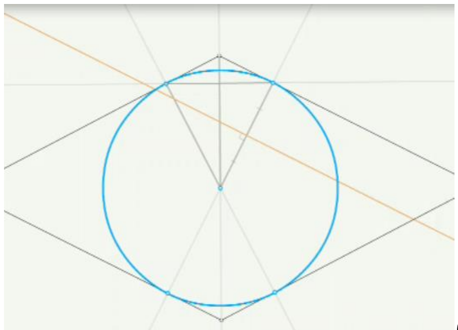
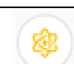
		 (37)
106.	E1:	Pero puede que si sea haciendo dos triángulos isósceles [E2 oprime la herramienta ].
107.	E2:	Bueno, y cómo son.
108.	E1:	Ya los habíamos hecho.
109.	E2:	Ay, lo borré acá [oprime la herramienta ]. Bueno, espérate (construye de nuevo el triángulo, ver 38).  (38) ¿Dónde habías hecho el triángulo equilátero? [Oprime la herramienta ].
110.	E1:	Ay, en las actividades anteriores. ¡Ay, Dios mío! ¿Esto para qué era? [Seleccionada la herramienta de intersección entre dos objetos].
111.	E2:	Espérate. ¿Cómo hacíamos un triángulo equilátero?
112.	E1:	Isósceles.
113.	E2:	Equilátero. Es equilátero.
114.	E1:	Equilátero…
115.	E2:	Sé que es equilátero.
116.	E1:	Es isósceles. Haz un triángulo equilátero y me cuentas.
117.	E2:	¿Pero cómo lo hago?
118.	E1:	Pues tienes que intentar que todo mida igual (…) con una circunferencia (construye una circunferencia con centro en el vértice superior del rombo y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 39). Y no sé (construye otra circunferencia con centro en el vértice inferior del rombo y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 40).

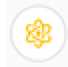
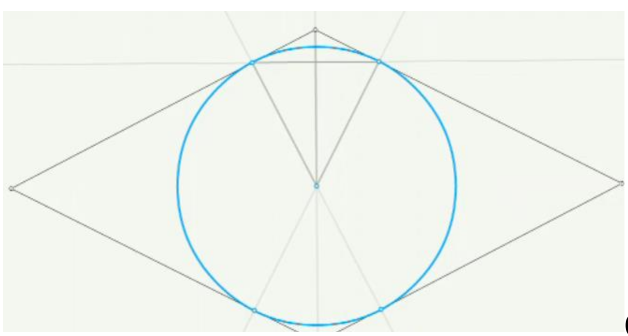
		 (39)  (40) Se ve más estético.
119.	E2:	Ay, Dios mío (borra las dos circunferencias, ver 41). Ana no (…) colabora.  (41)
120.	E1:	Estoy pensando.
121.	E2:	A ver, es un triángulo equilátero [Oprime la herramienta ]. ¡Ah! Es al revés [observa el triángulo]. [Vuelve a oprimir la herramienta ].
122.	E1:	Pues midámoslo. ¡A ver!
123.	E2:	Eso cambia las cosas.
124.	E1:	¿Es equilátero o es isósceles?
125.	E2:	Es equilátero. Estoy segura que es equilátero.
126.	E1:	Vamos a ver si es equilátero. [E2 rompe un trozo de papel].
127.	E2:	Es equilátero (…) ¿Es en serio Ana?
128.	E1:	Si no es equilátero, entonces vamos a perder tiempo.
129.	E2:	Es equilátero, se ve que es equilátero [oprime la herramienta ]. ¡Ay, Dios mío!
130.	E1:	Yo voy a hacer lo que… [Con el trozo de papel mide la longitud de los lados del triángulo].
131.	E2:	Con razón estamos atrasadas. Nos ponemos a medir un triángulo equilátero. Es un triángulo equilátero.
132.	E1:	¿Y por qué es equilátero?
133.	E2:	Pues, no sé [oprime la herramienta ].
134.	E1:	¡Ah! Sí ves.
135.	E2:	Pues miremos si es un triángulo equilátero.
136.	E1:	Ay, Dios mío.

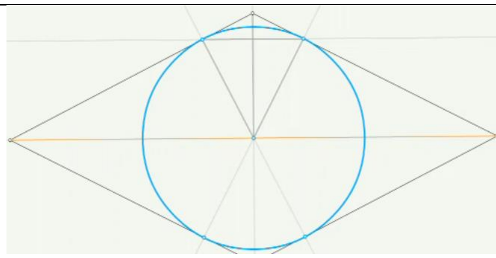
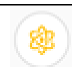
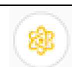
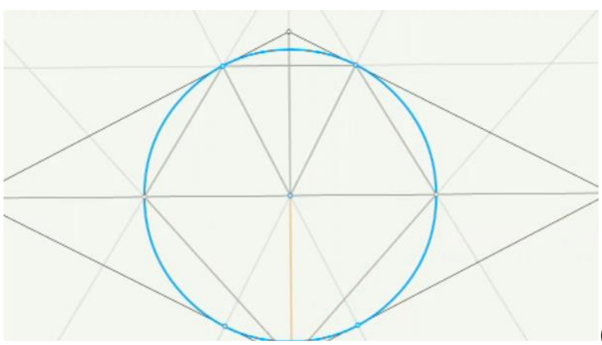
137.	E2:	¡Ahhh! (Construye la bisectriz del ángulo recto superior derecho, ver 42).  (42)
138.	E1:	No.
139.	E2:	Ok (construye la bisectriz de uno de los ángulos determinados por la bisectriz anterior, ver 43).  (43)
140.	E1:	Tenemos la mitad de un ángulo de 45 grados. No sé (…) pueda que sí.
141.	E2:	Déjeme trabajar (construye la bisectriz del ángulo recto superior izquierdo. Luego, construye la bisectriz del ángulo determinado por la bisectriz anterior, ver 44).  (44) No sé, estoy hallando muchas bisectrices (construye un recta que pasa por los puntos de intersección entre los lados del rombo y las bisectrices de los ángulos más pequeños, ver 45).  (45)
142.	E1:	Sí es isósceles.

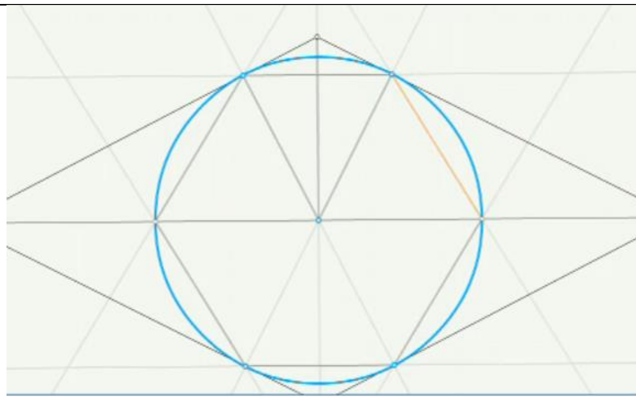
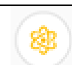
143.	E2:	Pues sí, ahí sí es isósceles, pero tenemos que hacer un equilátero.
144.	E1:	Tú y tu equilátero.
145.	E2:	Espera [oprime la herramienta ]. ¡Ay!
146.	E1:	¡Dios mío!
147.	E2:	Espera [oprime la herramienta ]. Ya. (E1 construye una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y radio hasta uno de los vértices del triángulo isósceles, ver 46). (46) ¿No?
148.	E1:	No.
149.	E2:	Es que hicimos muchas líneas.
150.	E1:	¿Hicimos?
151.	E2:	Hice muchas líneas (borra la circunferencia y las bisectrices construidas, ver 47). (47)
152.	E1:	Estabas bien.
153.	E2:	Es un equilátero [oprime la herramienta ]. Estoy segura que es un equilátero. ¿Cómo hallamos que sea un equilátero?
154.	E1:	Si lo medimos y no es equilátero.
155.	E2:	Va a ser un equilátero. A ver, chas (construye una recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y el vértice superior del rombo, ver 48).

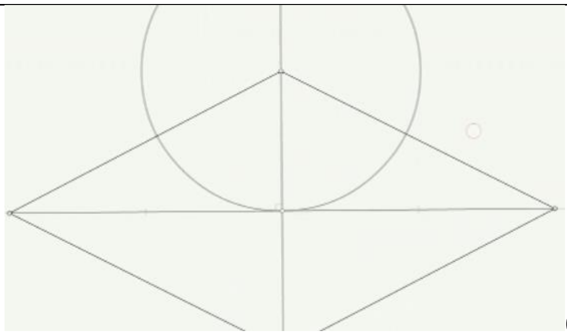
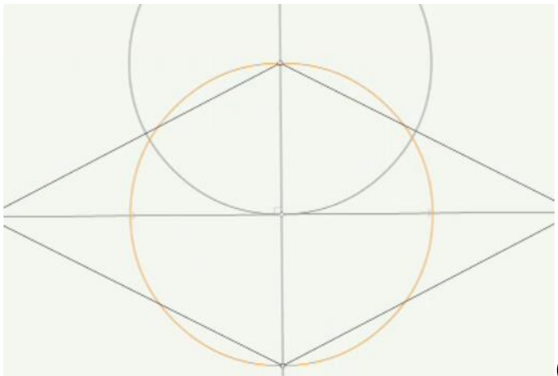
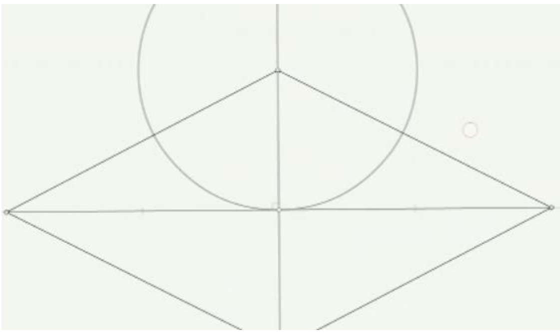
		(48) Ay, se forma un diamante. A ver, a ver, a ver.
156.	E1:	Pero ahorita nosotras lo teníamos así (…) llevándolo hacia un extremo [E2 oprime la herramienta ].
157.	E2:	¿Qué? [Oprime la herramienta ].
158.	E1:	Ya lo resolviste, déjalo así.
159.	E2:	¿Qué?
160.	E1:	Continua (…) (…) ¿Qué se forma?
		[…]
161.	E2: 47:24	Pero yo creo que esta es la clave para desarrollarla, para hacerlo.
162.	E1:	Es que no sé, yo siento que para algo nos pusieron eso [oprime la herramienta de recta perpendicular.]
163.	PR:	Por ejemplo, ¿qué harían para encontrar esta recta? [Señala con el dedo la recta que debe pasar por la intersección de las diagonales y uno de los puntos buscados]. O esta [Señala otra recta con las mismas características]. ¿Qué propiedades tiene esa recta, aparte de que pasa por el centro de la circunferencia?
164.	E2:	¿El ángulo?
165.	E1:	Pero no sabemos que ángulo tiene.
166.	PR:	¿Y podrías calcular el ángulo?
167.	E1:	Sí, sí. Con esta [selecciona la herramienta de bisectriz].
168.	E2:	Pues se supone que es 60, yo, según yo es equilátero entonces debe medir 60. Entonces esto [señala una de las partes del ángulo dividido por la recta construida] debe medir 30.
169.	E1:	Si es que es equilátero.
170.	E2:	Es equilátero. Profe díganos, ¿es equilátero o es isósceles? (…) Es equilátero.
171.	PR:	No sé, pues muévanlo [amplia y disminuye el tamaño de la pantalla].
172.	E2:	Es equilátero, es equilátero. ¿Es equilátero, cierto?
173.	E1:	Yo lo dudo, es que no se puede asegurar.
174.	E2:	El equilátero, no mentiras (…) El isósceles, no.

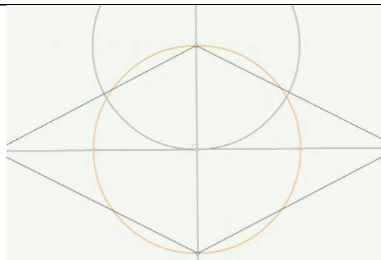
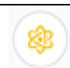
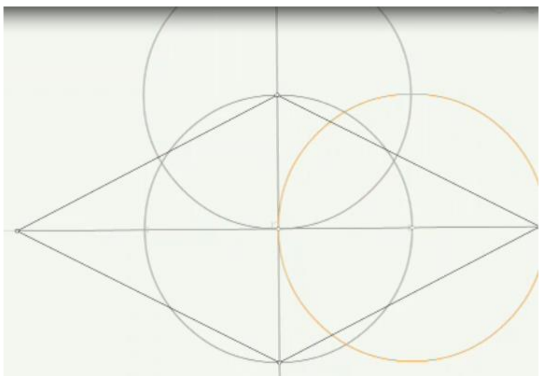
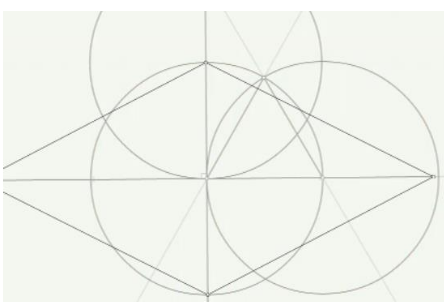
175.	E1:	¡Ah! Ok. Tracémosle la mediatriz de todos (construye una mediatriz a uno de los lados del triángulo, ver 49), y si pasa por todos los puntitos es equilátero.  (49)
176.	E2:	¿Qué?
177.	E1:	Que no es equilátero.
178.	E2:	Bueno, es isósceles.
179.	E1:	No, no me lo digas con ese…
180.	E2:	No puede ser isósceles. Para que sea (…) Para que pueda (…) No, espérate. Suponiendo que es equilátero, acá mediría 30 grados, ¿no? [Señala con el dedo el ángulo delimitado por la recta y un lado del ángulo, ver 50].  (50)
181.	PR:	Sí.
182.	E2:	Pero, no sé (…) Ay, Dios mío [oprime la herramienta ]. ¿Cómo es que hicimos (…) la cuatro de esta [de beta]? En la que teníamos que hallar el otro [mueve su mano de arriba hacia abajo].
183.	E1:	Con dos circunferencias y una línea. No, no, no puede ser (…) fue la anterior a esa.
184.	E2:	Pero esa la habíamos hecho con…
185.	E1:	Con (…) Ay, no me acuerdo lo que usamos (…) Pero creo que esa es la clave, lo que usamos.
186.	E2:	No, qué usamos no es la clave pero sí podríamos iniciar por ahí.
187.	E1:	Usamos una circunferencia, de lo que yo me acuerdo, y a esa circunferencia ¿qué le sacamos?
188.	E2:	No me acuerdo.
		[…]

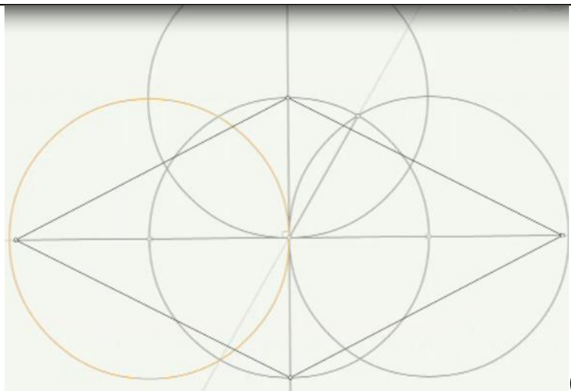
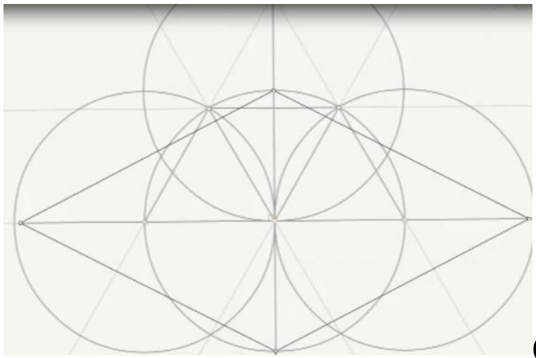
189.	E2:	A ver [oprime la herramienta ].
190.	PR:	Les pregunto de nuevo, ¿qué propiedad tiene esta recta? [Señala con el dedo una de las rectas que pasa por el centro de la circunferencia y uno de los puntos buscados]. Porque esta recta es la que les da este punto [punto buscado]. ¿Qué propiedad pueden ver que tiene esa recta? Aparte que pasa por el centro de la circunferencia.
191.	E2:	La que pasa por ahí es igual a la de acá [señala la otra recta con las mismas características].
192.	PR:	Pero igual, la misma pregunta, ¿y qué propiedad tiene la otra recta?
193.	E2:	Es, a ver, a ver.
194.	E1:	Si es un ángulo de 30 y 30 [señala los ángulos vistos en 50] ¿60? ¿Sí? ¿Sí es?
195.	PR:	No, pues siguiendo tu suposición, ¿no?
196.	E1:	¡Ay! Yo pensé que sí era.
197.	E2:	Yo también (…) (…) Lo he dicho toda la hora, es equilátero.
198.	E1:	Es equilátero.
199.	E2:	Ok. ¿Qué característica tiene esta linda recta?
200.	E1:	¡Ay! No sé.
		[…]
201.	E2: 51:34	¿Y esta recta qué onda?
202.	E1:	¿Cuál?
203.	E2:	Esta [señala la mediatriz construida en 49]. Espérate (borra la mediatriz, ver 51).  (51) Ya.
204.	E1:	No, no sé cómo…
205.	E2:	A ver (construye la diagonal más larga del rombo, ver 52).

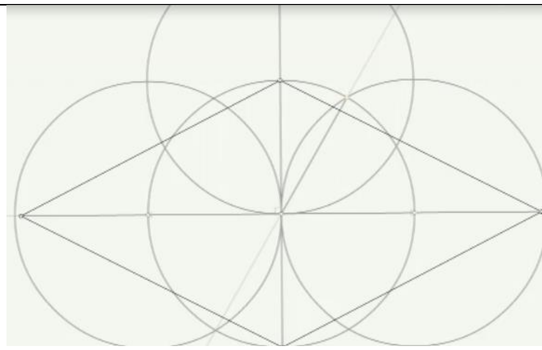
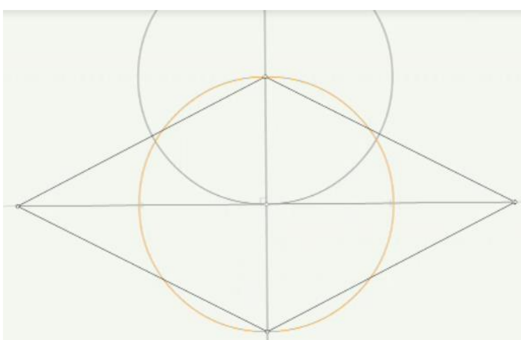
		(52) Pues acá se forma una equis [señala con sus manos las rectas que pasan por los puntos que deben encontrar].
206.	E1:	Ajá.
207.	E2:	Pero, ¿cómo encuentro la equis?
208.	E1:	Ay, no sé. No hay ninguna definición, hecho geométrico o algo [revisa su cuaderno de geometría].
209.	E2:	Una equis [oprime la herramienta ], una equis [traza con su mano una equis sobre la construcción en pantalla]. Tenemos que hacer una equis.
210.	E1:	Estoy pensando.
		[…]
211.	E2: 52:48	[Oprime la herramienta ] Acá se forma otros triángulos equiláteros [señala la pantalla].
212.	E1:	Espera, se forma 1, 2, 3, 4, 5, 6. Se forma un hexágono; es decir, si es un triángulo equilátero.
		[…]
213.	E2: 53:10	A ver, es un hexágono (…) podemos complementarlo (construye los lados del hexágono, ver 53). (53) ¿Qué? ¿Ana, dónde está el hexágono?
214.	E1:	Míralo (borra algunos de los lados construidos anteriormente, y completa el hexágono, ver 54).

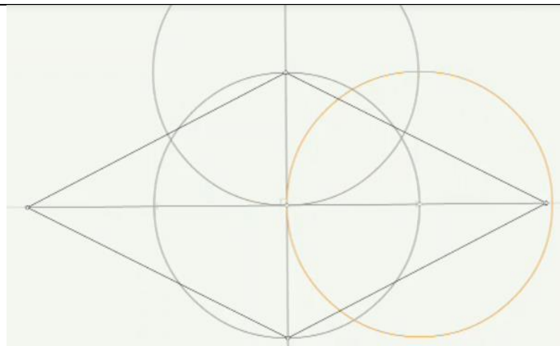
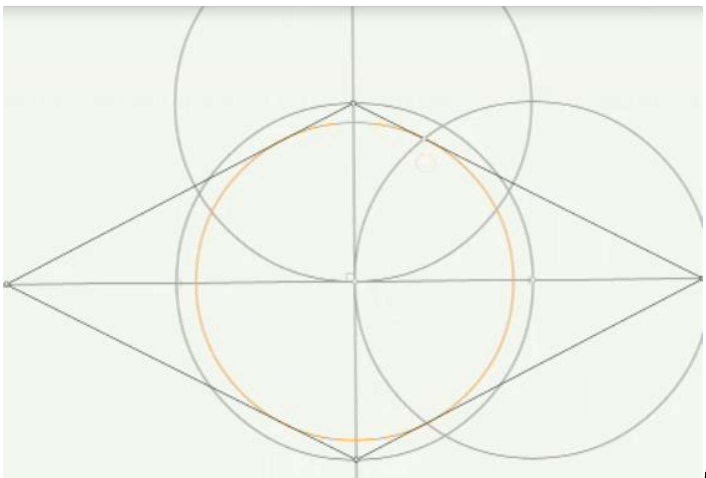
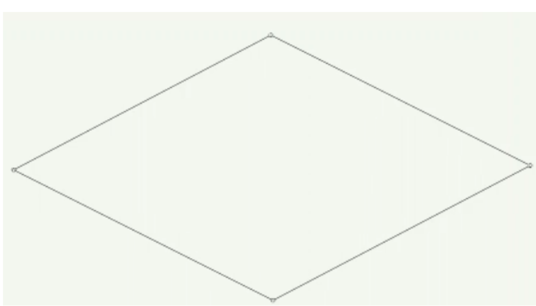
		 (54)
215.	E2:	¡Ah! Ya lo vi.
216.	E1:	Y ahí ya sale.
217.	E2:	¿Pero cómo van a salir?
218.	E1:	¡Ay! Es que no entiendo de dónde sale ese maldito punto.
219.	E2:	¿Cuál punto? ¿Estos puntos? [Señala con el dedo los puntos deben encontrar]
220.	E1:	Sí. ¿Cómo vamos a hacer? (…) (…) Un hexágono; es decir son equiláteros.
221.	PR:	Miremos (…) (…) ¿Sí es equilátero?
222.	E1:	60 (…) Sí, 6 por 3 18, 180. Y 180 por 2, sí.
223.	E2:	¿Qué?
224.	E1:	El hecho es que para mí ya es equilátero.
225.	E2:	¿El triángulo o el…?
226.	E1:	El triángulo (…) Y todos los triángulos deben ser iguales para formar este bello hexágono.
227.	PR:	Por eso y ustedes ya sabían construir triángulos equiláteros.
228.	E1:	Ay, ¿cómo los hicimos? [E2 oprime la herramienta ].
229.	E2:	Con los círculos.
230.	E1:	Eso. Dale, hazlo.
231.	E2:	Pero, ¿cómo así?
232.	E1:	Construimos un triángulo equilátero. ¡Ya lo tengo!
233.	E2:	Yo no. (E1 construye una circunferencia con centro en el vértice superior del rombo y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 55).

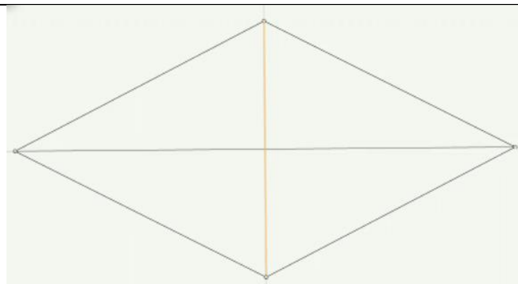
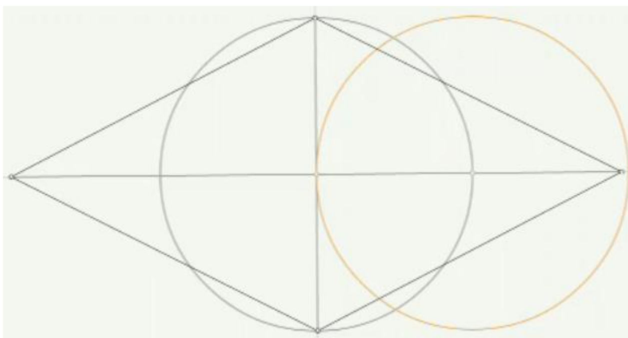
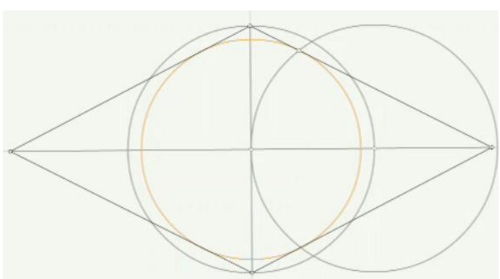
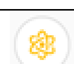
<table>
<tr><td></td><td></td><td> (55)
¡Ahhh! Ahí estás bien.</td></tr>
<tr><td>234.</td><td>E1:</td><td>¿Sí estoy bien? No, espérate (construye otra circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales y radio hasta el vértice superior del rombo, ver 56).
 (56)</td></tr>
<tr><td>235.</td><td>E2:</td><td>Acá [señala la pantalla] ya, no mentiras.</td></tr>
<tr><td>236.</td><td>E1:</td><td>No, estamos mal (borra la última circunferencia construida, ver 57).
 (57)</td></tr>
<tr><td>237.</td><td>E2:</td><td>Espérate.</td></tr>
<tr><td>238.</td><td>PR:</td><td>¿Está mal?</td></tr>
<tr><td>239.</td><td>E2:</td><td>Sí ves que no estamos mal (construye de nuevo la circunferencia borrada, ver 58).</td></tr>
</table>

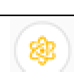
		 (58) ¿Cuántos triángulos equiláteros se forman acá? [Oprime la herramienta ].
240.	E1:	Seis.
241.	E2:	Ok. [Oprime la herramienta ]. No sé (construye una circunferencia con centro en el vértice derecho del rombo y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 59).  (59)
242.	E1:	Sí, sí, sí. Y haz lo mismo que hiciste…
243.	E2:	Un hexágono (traza unas rectas por las diferentes intersecciones de las circunferencias, ver 60).  (60)
244.	E1:	No. Lo hiciste por fuera del rombo.
245.	E2:	Ah, ok. Sí está bien (construye una circunferencia con centro en el vértice izquierdo del rombo y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 61).

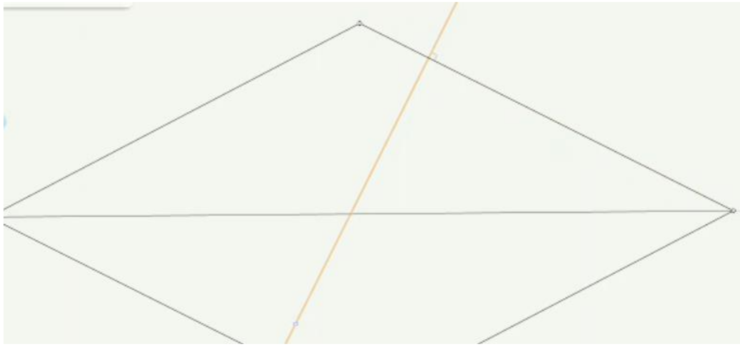
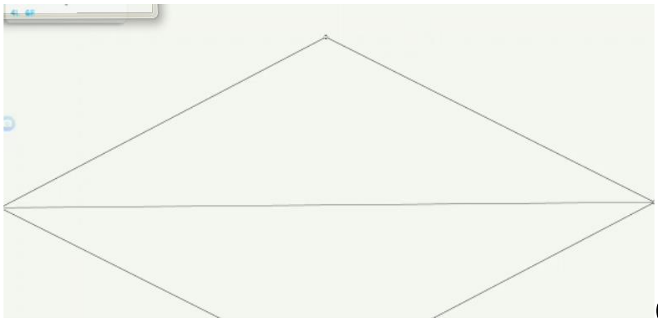
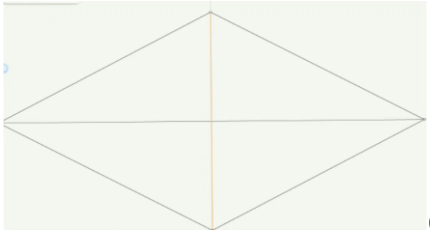
		 (61)
246.	E1:	No, está mal porque dejaste la intersección donde no era.
247.	E2:	¿Cuál intersección?
248.	E1:	No se puede salir por fuera.
249.	E2:	Claro que sí. Espérate (sigue construyendo otros lados del supuesto hexágono, ver 62).  (62)
250.	E1:	Pero sigue estando afuera del berraco rombo.
251.	E2:	Espérate.
252.	E1:	Está fuera del rombo, no sirve.
253.	E2:	¡Ahhh! Está por fuera. Ja, ja, ja, ja.
254.	E1:	Es lo que trato de decirte.
255.	E2:	¿Por qué no me avisas?
256.	E1:	No pasa nada, como no te estoy diciendo que estaba por fuera.
257.	E2:	Yo no…
258.	E1:	Estabas bien (borra las rectas construida, ver 63) pero dejaste las intersecciones por fuera. No era así, sino hasta acá [señala la intersección entre una circunferencia y uno de los lados del rombo].

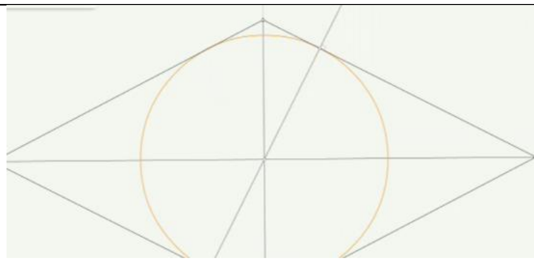
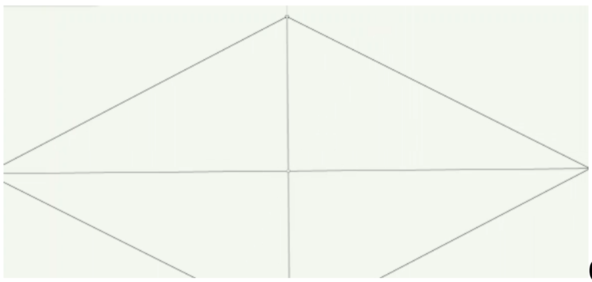
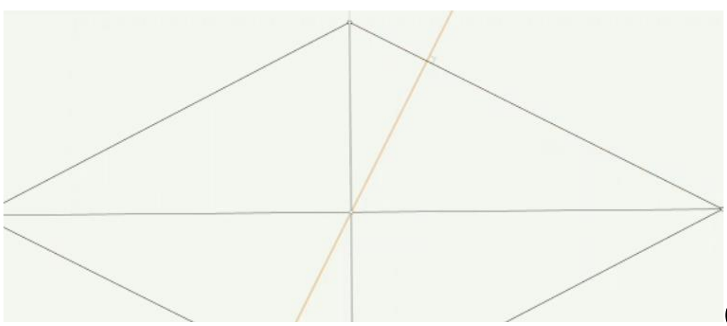
		 (63)
259.	E2:	Ok. Ya tenemos este puntico.
260.	E1:	Borra todo y vuelve a empezar (borra todo menos la primera circunferencia, ver 64).  (64)
261.	E2:	Nooo.
262.	E1:	Ahí estabas.
263.	E2:	¿Dónde estaba? O sea, a ver (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales y radio hasta el vértice superior del rombo, ver 65).  (65) Ok. Solo necesitamos este círculo. El de arriba no hace falta (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección de la diagonal larga y la segunda circunferencia y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 66). Mire ahí.

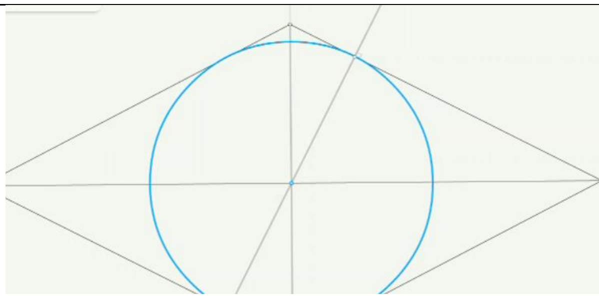
		 (66) Este es el punto (marca la intersección de la tercera circunferencia con el lado superior derecho del rombo. Luego, construye una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales y radio hasta el anterior punto, ver 67).  (67) No es el punto.
264.	E1:	No.
265.	E2:	O si es el punto, pero no creo que así sea la forma bonita, correcta.
266.	E1:	La forma en que Euclidea quiere (E2 borra todos los elementos construidos, ver 68).  (68)
267.	PR:	Él valida cualquiera, siempre y cuando este bien hecha. Es decir, que esa no funciona (E2 construye las diagonales del rombo, ver 69).

		 (69)
268.	E2:	Ok. Espérate, espérate, espérate. Estábamos haciendo este (construye una circunferencia con dentro en el punto de intersección de las diagonales y radio hasta el vértice superior del rombo. Luego, construye una circunferencia con centro en el vértice derecho del rombo y radio hasta el punto de intersección de las diagonales, ver 70).  (70)
269.	PR:	Miramos otro triángulo.
270.	E1:	Sí, por favor, sí.
271.	E2:	Sí (coloca el punto de intersección entre la segunda circunferencia y el lado superior derecho del rombo. Luego, construye una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales y radio hasta el anterior punto, ver 71).  (71) Definitivamente, este es el círculo pero no es la manera correcta de hacerlo.
		[…]
272.	E2: 57:40	Bueno, otro triángulo.
273.	PR:	[Oprime la herramienta ] Miren el triángulo que se forma acá [señala con el dedo el triángulo], con el punto que necesitan [señala el punto del lado superior derecho del rombo] y con

		el centro [señala con el dedo el centro de la circunferencia].
274.	E1:	Es un diamante.
275.	E2:	Es un triángulo (…) no tiene ningún lado igual; es decir, es un triángulo…
276.	E1:	Equilátero, isósceles y paralelo (…) Pfff.
277.	E2:	Equilátero, isósceles y perpendicular (…) Pfff. ¿Cómo se llama ese? Ay, qué horror.
278.	E1:	Tiene forma de diamante.
279.	E2:	¿Pero qué tipo de triángulo es? Un triángulo que no tiene los lados iguales. Ese se llama…
280.	E1:	Es un rombo.
281.	E2:	Triángulo (…) ¿congruente?
282.	E1:	No porque congruente es que tiene sus lados…
283.	E2:	Espérate. Bueno, como se llame (…) es un triángulo que tiene los lados diferentes.
284.	PR:	¿Pero será que esa es la característica?
285.	E1:	No.
286.	E2:	No sé.
287.	E1:	Tiene forma de una escuadra.
288.	E2:	¿De escuadra?
289.	E1:	Sí. ¿Cuántos ángulos tiene?
290.	PR:	¿Cómo es una escuadra?
291.	E1:	Tiene ángulos de 60, de 45 (…) Una escuadra no tiene ningún ángulo igual (…) Depende.
292.	E2:	No.
293.	E1:	Depende porque te acuerdas que hay escuadras de 45 grados.
294.	E2:	No porque la escuadra que tenemos es como un triángulo isósceles. La escuadra que no tiene ningún ángulo igual si debe medir los mismos ángulos (…) Bueno, ¿tenemos que enfocarnos en los ángulos? [La profesora asienta con la cabeza]. Sí. Listo.
295.	E1:	Entonces, ¿qué ángulos tienen? No sabemos…
296.	E2:	Tiene un ángulo recto, ¿no?
297.	PR:	Sí.
298.	E1:	Ay sí. Todos los triángulos tiene un ángulo recto (…) Ah, no mentiras, ya lo había confirmado.
299.	E2:	Este es un triángulo recto [señala con el dedo el ángulo que se forma entre el lado del rombo y la recta que pasar por el centro de la circunferencia y el punto que deben encontrar], por lo cual estos dos [señala con el dedo los otros dos ángulos del triángulo rectángulo] deben medir entre 45 (…) (…) O sea, yo creo que debemos enfocarnos en el ángulo recto (…) ¡Ah! No se puede.
300.	E1:	¡Dios mío!
301.	E2:	¡Dios mío! [Oprime la herramienta ]. Un triángulo recto, un triángulo…

302.	E1:	Un ángulo recto.
303.	E2:	Normal [selecciona la herramienta de recta perpendicular]. Esto sería un ángulo recto (construye una recta perpendicular al lado superior derecho del rombo, pero no sabe por cual punto debe pasar, ver 72). Hay que saber dónde va el ángulo recto.  (72)
304.	E1:	Tal vez…
305.	PR:	Recuerdan que esa recta pasa por el centro, ¿y esa pasa por el centro?
306.	E2:	¡Ah, ok! (borra la recta perpendicular construida, ver 73).  (73)
307.	E1:	Ay, saquemos la que teníamos (E2 construye la diagonal pequeña del rombo, ver 74).  (73) Ay, creo que ya estoy viendo una luz.
308.	E2:	O sea (coloca el punto de intersección entre las diagonales y construye una recta perpendicular al lado superior derecho del rombo, tal que simule pasar por el punto de intersección de las diagonales. Luego, construye una circunferencia con centro en el punto en común de las diagonales y radio hasta el punto de intersección entre el lado superior derecho del rombo y la recta perpendicular, ver 74).

		 (74)
309.	E1:	¡Nooo! [Euclidea no válida la construcción porque se escogió que la recta perpendicular pasara por un punto del lado del rombo y no por el punto en común de las diagonales]. (E2 borra la circunferencia y la recta perpendicular, ver 75).  (75) Inténtalo. No, no…
310.	PR:	Pero; es que o sea, esta herramienta [recta perpendicular] uno la utiliza (…) O sea, toca la recta que necesita que sea perpendicular y el punto por donde quieren que pase.
311.	E2:	Pero el punto no lo tenemos.
312.	E1:	El punto es el mismo que tiene la recta.
313.	E2:	Sería esta recta [da clic sobre el lado superior derecho del rombo] y este punto [da clic sobre el punto en común de las diagonales] (construye una recta perpendicular, ver 76).  (76)
314.	E1:	Ay, eres una genia. ¡Aprendiste!
315.	E2:	¡Ajaja! (Construye una circunferencia con centro en el punto en común de las diagonales y radio hasta el punto de intersección entre el lado del rombo y la recta perpendicular, ver 77).

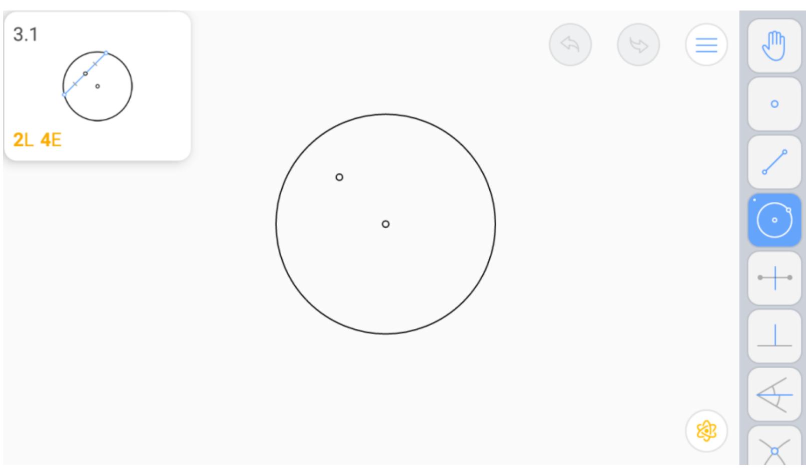
		 (77) ¡Ehhh, por fin!
316.	E1:	Dios mío, gracias.
317.	PR:	¿Y por qué?
318.	E2:	Por descarte. No mentira.
319.	PR:	Empecemos por partes. ¿Por qué las diagonales del rombo?
320.	E2:	Para hallar el centro de (…) tanto del cuadrilátero como del círculo (…) de la circunferencia.
321.	PR:	Listo. ¿Y después por qué trazaron esa recta perpendicular?
322.	E1:	Porque si tú nos dijiste que eso sirve para que pase por el punto medio [centro de la circunferencia] y llegue…
323.	E2:	¿Cuál recta?
324.	E1:	Esta [señala con el dedo la recta perpendicular].
325.	E2:	¿Es esta? [Señala con el dedo la recta perpendicular].
326.	PR:	Sí, me refiero a esta [señala con el dedo la recta perpendicular].
327.	E1:	Porque dice que debe pasar por el punto medio [centro de la circunferencia] y eso es lo que nosotros (…) ¿A nosotros nos habían dado punto? (…) No nos habían dado un punto medio entonces de una vez lo hallamos y estábamos seguras que si era el punto medio.
328.	E2:	Obvio.
329.	E1:	¡Ah! Ya terminamos beta.
330.	PR:	Pero todavía (…) O sea, no te entiendo.
331.	E2:	No, es que está inconcluso.
332.	PR:	O sea, las diagonales son para el centro de la circunferencia.
333.	E2:	Sí.
334.	PR:	¿Y esa recta perpendicular para qué?
335.	E1:	Es que al confirmar que sí pasa por el centro.
336.	E2:	No pero…
337.	E1:	Es que no entiendo por qué vienen esos cuatro puntos, ya me perdí.
338.	E2:	No, sabes (…) O sea, es como cuando nos dieron el primer ejemplo de que era una línea y punto ahí [realiza con las manos una recta y un punto externo a esta] (…) O sea, acá sería la línea [señala con el dedo el lado del rombo] y acá sería el punto [señala con el dedo el punto en común de las diagonales]. Es como la misma explicación que nos sirve (…) No sé.

		¿Esto cómo se llama? [Señala con el dedo la recta perpendicular].
339.	PR:	Recta perpendicular.
340.	E2:	Una recta perpendicular, ¿a cuál?
341.	PR:	A este lado.
342.	E2:	Ahhh. Ok.
343.	E1:	Perpendicular; es decir, que pasa por…
344.	E2:	El punto medio.
345.	E1:	No.
346.	E2:	O sea…
347.	E1:	Pasa por la línea que nosotras seleccionamos y el puntico que nosotras seleccionamos.
348.	E2:	Forma cuatro ángulos rectos, ¿sí?, o forma un ángulo recto.
349.	E1:	Sí, sí (…) después de que forme un ángulo recto ya forman los otros.
350.	E2:	Bueno sí, ya. Tendríamos con esta figura [herramienta de recta perpendicular] hallar un punto en donde se formara un ángulo recto y pasara por el punto medio [centro] de la circunferencia y el rombo o del cuadrilátero, para así hallar la perpendicular de este lado [del rombo].
351.	PR:	Listo.

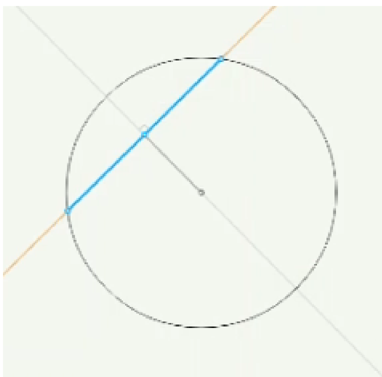
Las estudiantes culminan la sesión 2 de grabación, al terminar la tarea 2.10; dando paso para que la tercera sesión inicien con el desarrollo de la tarea 3.1.

Tarea 14 – Gama 3.1

Construya una cuerda cuyo punto medio es dado.



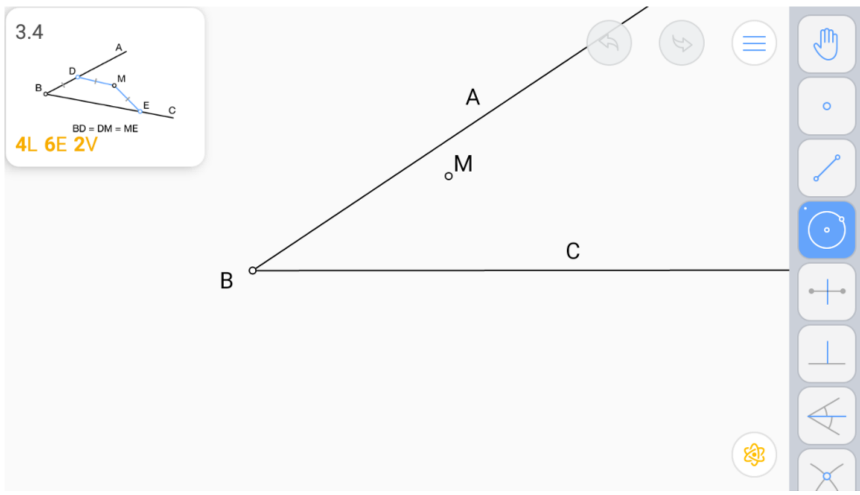
Las estudiantes inician la jornada con la tarea 3.1. Para su solución, ellas inician leyendo el enunciado de la tarea, este contiene la palabra "cuerda", la cual es desconocida para ellas. Por tanto, la profesora procede a explicarle el enunciado, indicándoles que deben construir el segmento que está en el interior de la circunferencia.

1.	E2:	Voy a probar algo.
2.	E1:	Dale. (E2 traza una recta que pasa por los dos puntos dados. Luego, traza una recta perpendicular a la recta construida y que pase por el punto medio de la cuerda, ver 1).  (1) ¡Uy! Esta niña está pila.
3.	E2:	No sé qué hice.
4.	PR:	¿Para qué trazaste primero la recta que une el centro de la circunferencia y el punto dado [señala esta recta con su dedo]?
5.	E2:	No sé. Pues, es que al ver esto acá [abre la imagen miniatura de la tarea] (…) O sea, primero lo asimilé como si tuviera que hallar la mediatriz, pero pues, ya nos habían dado esto (…) (…) O sea…
6.	E1:	Yo no entiendo.
7.	E2:	No sé.
8.	E1:	No le metí mano a esta. Si trazaste esa línea [señala con su dedo la recta que pasa por los puntos dados], bueno ya la traza derechito. ¿Y de esa tomaste la mediatriz?
9.	E2:	No. Es que esta… [Señala con su dedo la herramienta de recta perpendicular].
10.	E1:	¡Ah! Donde se intersecta con el punto.
11.	E2:	Exactamente.
12.	E1:	La línea y el punto, es la herramienta de…
13.	PR:	Esa herramienta es la de ¿perpendicular? [Señala con su dedo la herramienta de recta perpendicular]
14.	E2:	Eso. Hallar la perpendicular porque…
15.	PR:	¿La perpendicular a quién?

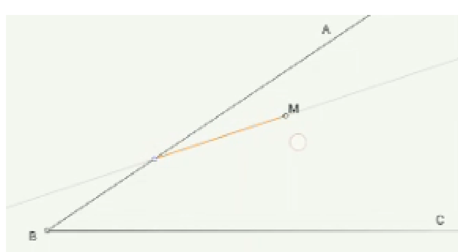
16.	E2:	De esta línea, de la línea que hice inicialmente para… [Señala con su dedo la recta que pasa por los puntos dados]
17.	PR:	¿Entonces para eso la hiciste?
18.	E2:	Sí. Para hallar la perpendicular.
19.	PR:	Ok.

Tarea 15 – Gama 3.4

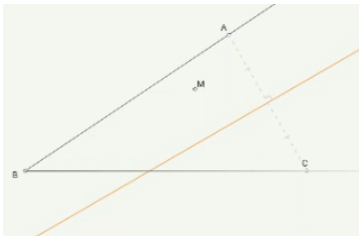
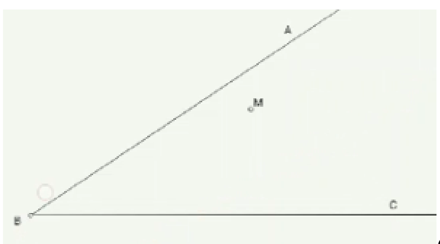
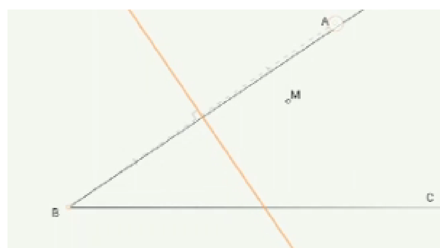
Dado un ángulo ABC y un punto M dentro del mismo, encuentre los punto D en BA y E en BC y construya los segmentos DM y ME tales que BD = BM = ME.

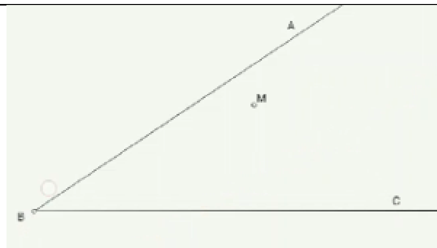
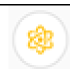
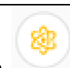
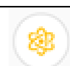
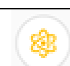
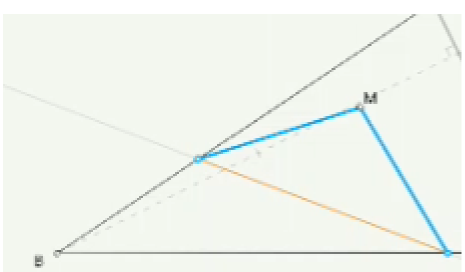


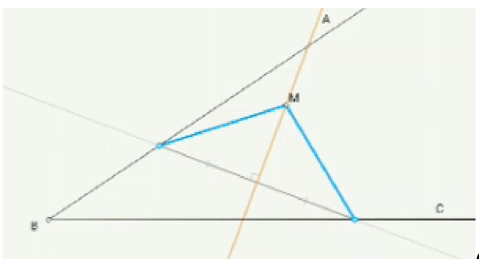
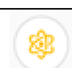
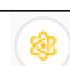
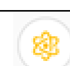
Las estudiantes pasan a resolver la tarea 3.4 inmediatamente después de resolver la tarea 3.1. Inician leyendo el su enunciado, el cual tuvieron que leer varias, pero no lo comprenden del todo; por tanto, la profesora procede a explicarles cada parte del enunciado, logrando que lo entiendan. Sin embargo, a una de ellas les sigue pareciendo compleja la construcción solicitada porque inicialmente asimilan que la distancia del punto D (sobre BA) al punto M es la mínima, pero la otra estudiante le aclara que la distancia puede ser así:

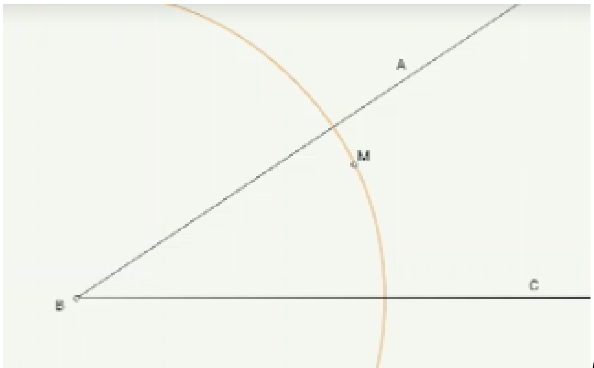


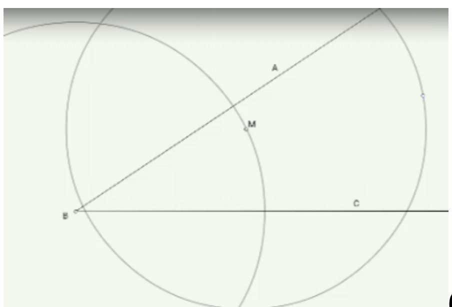
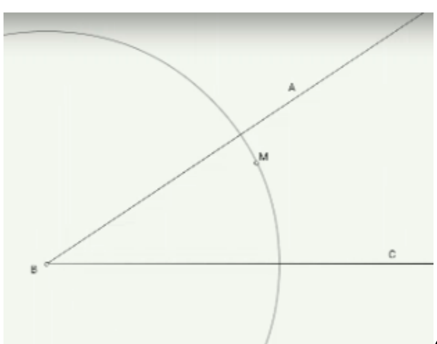
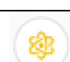
Luego, comienzan a idear estrategias.

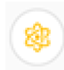
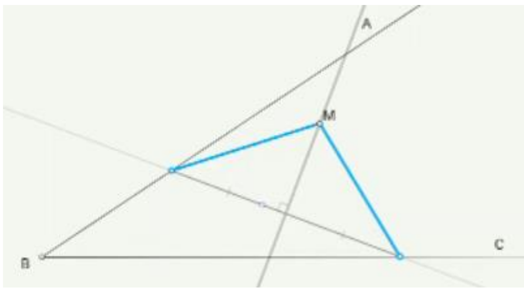
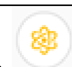
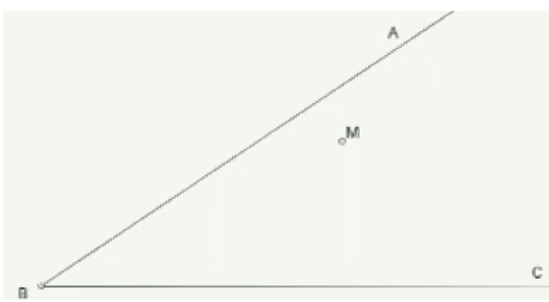
1.	E2: 6.31	Pues el problema es el punto M porque yo veo ahí un poco igual estos [señala de B a A] y estos [señala de B a C]. Podría hallar la mediatriz, pero el punto M no está…
2.	E1:	No está alineadito (…) Espérate hago algo con la mediatriz, se me vino algo a la cabeza (traza una mediatriz de A a C, ver 1).  (1)
3.	E2:	¿Eso es mediatriz? Ah, sí es mediatriz.
4.	E1:	Sí, esto es mediatriz.
5.	PR:	¿Para qué hicieron esa mediatriz?
6.	E1:	No sé nombraste mediatriz y fue como…
7.	E2:	¿Mediatriz? Ah, sí. Pero yo decía mediatriz de estas dos [señala con el dedo los puntos B y A] porque a mi punto de ver, se ven igual (borra la mediatriz construida, ver 2). Pero no, porque si la M estuviera un poquito en la mitad, de pronto (construye una mediatriz entre los puntos B y A, ver 3).  (2)  (3)
8.	E1:	Mm, no sé…
9.	E2:	¿Sí me hago entender? Mira…
10.	E1:	Dale.
11.	E2:	Si la M estuviera alineada… (Construye una mediatriz entre B y C, ver 4).  (4)
12.	E1:	No, pero es que le tocaría estar la M por acá [más cerca a BC]
13.	E2:	No, le tocaría estar la M por (…) No sé, yo estoy loca. Bueno, nada (borra las dos mediatrices construidas, ver 5).

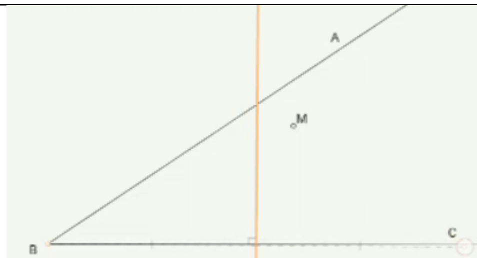
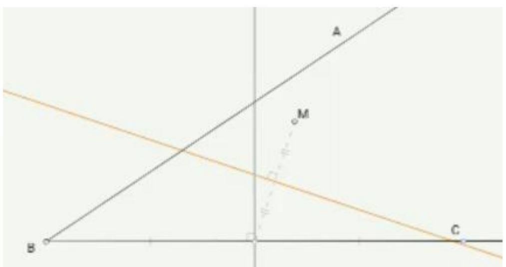
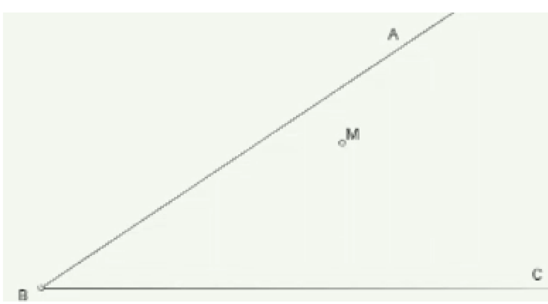
		 (5)
14.	E1:	Yo quisiera usar algo, pero yo sé que eso nos confunde más.
15.	E2:	¿Qué?
16.	E1:	Esta [señala la herramienta ], pero yo sé que nos confunde más.
17.	E2:	Yo quiero verla.
18.	E1:	A ver. Ay, Dios mío. 1, 2 y 3 [oprime la herramienta ].
19.	E2:	Mm…
20.	E1:	Pero…
21.	E2:	Sí son iguales [los tres segmentos solicitados]. Bueno.
22.	PR:	Así debe quedar [la solución].
23.	E2:	Ok.
24.	E1:	Ay, ya. Ya me confundí.
25.	E2:	No, yo no me confundí. Ahora me guié. Ya sabemos que tenemos que iniciar acá [punto B] y que tenemos que terminar acá [punto C]…
26.	E1:	O sea, uy no, es que ni siquiera. Entiendo de que esta la podemos hallar [DM]; o sea, esta [BD] replicándola acá [recta DM], pero esta [ME].
27.	E2:	Bueno… [Oprime la herramienta ].
28.	E1:	Entiendo que…
29.	E2:	Ay, mira. Acá no se forma (…) [Oprime la herramienta ]. Bueno, yo me guio siempre por los triángulos, acá no se forma un triángulo (construye una recta que pasa por D y E, ver 6) no sé, ¿extraño?  (6)

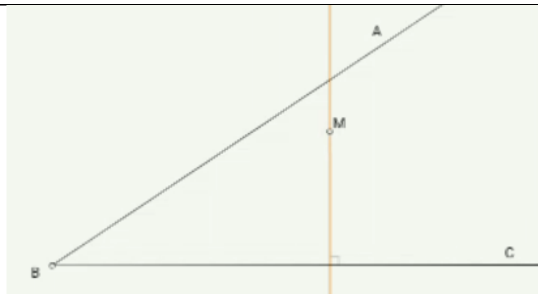
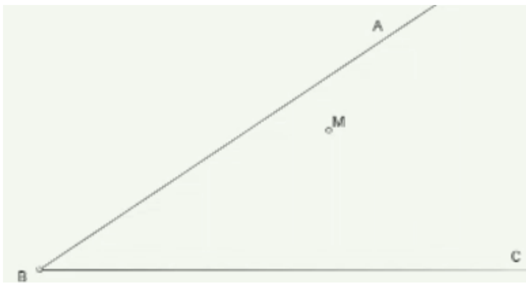
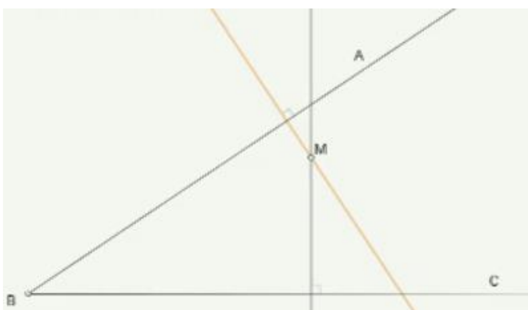
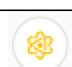
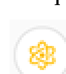
30.	E1:	No es un triángulo, ¿equilátero o isósceles?
31.	E2:	No es ni equilátero ni isósceles. Es el que no tiene nada igual. Y no tiene ningún ángulo recto y no podemos hacer nada. Ay, mira este.
32.	E1:	Sí. Ya tiene un ángulo recto.
33.	E2:	No, no.
34.	E1:	¿No?
35.	E2:	Es isósceles.
36.	E1:	Entonces sí es isósceles.
37.	E2:	No. Pero este [triángulo DME], este no [triángulo BDE].
38.	PR:	¿Por qué es isósceles?
39.	E2:	Porque se supone que estos dos [señala a DM y ME] son iguales. Entonces…
40.	PR:	¿Los dos amarillitos?
41.	E2:	Los dos amarillos son iguales. (E1 construye la mediatriz de DE, ver 7).  (7)
42.	PR:	Ok.
43.	E1:	¿Cómo rayos sacaron esto? [La solución]
44.	E2:	No sé (…) (…) Bueno, hagámoslo de la forma (…) Obvio porque si nos dicen la respuesta es obvio.
45.	E1:	Ay, Dios mío.
46.	E2:	A ver [oprime la herramienta ].
47.	E1:	No vamos a usar pista.
48.	E2:	No.
49.	E1:	De una vez, ya. Sin pista.
50.	E2:	Ya sabemos que acá [segmento DM]. O sea, de acá [segmento DM] a acá [segmento ME] (…) Ay, espérate. ¿Acá [en la letra C] no hay un punto?
51.	E1:	No.
52.	E2:	¡Qué horror! Bueno [oprime la herramienta ]. Ok [oprime la herramienta ].
53.	E1:	Ay. Debe haber alguna solución lógica [oprime la herramienta que muestra el enunciado de la

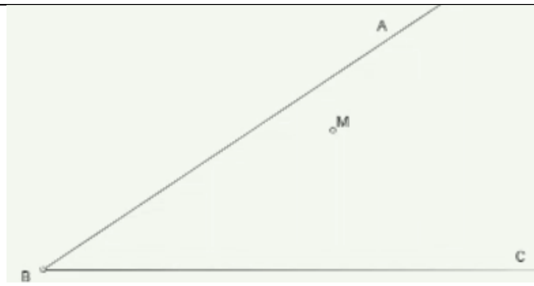
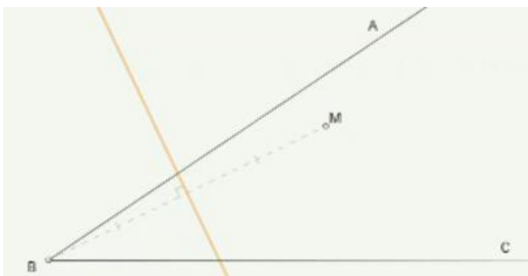
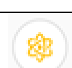
<table>
<tr><td></td><td></td><td>tarea] (…) (…) Triángulo…</td></tr>
<tr><td>54.</td><td>E2:</td><td>Círculo (…) No, pero es que no nos dan un punto (construye una circunferencia con centro en B y radio BM, ver 8).


(8)</td></tr>
<tr><td>55.</td><td>E1:</td><td>No, yo no le encuentro aquí la circunferencia (E2 construye una circunferencia con centro en M y radio MB, ver 9).

(9)</td></tr>
<tr><td>56.</td><td>E2:</td><td>Yo amo la circunferencia.</td></tr>
<tr><td>57.</td><td>E1:</td><td>Y yo la mediatriz.</td></tr>
<tr><td>58.</td><td>E2:</td><td>¡Aich! (Borra la segunda circunferencia construida, ver 10). Ya.

(10)
Vamos a ver.</td></tr>
<tr><td>59.</td><td>E1:</td><td>Mm (…) Taz [oprime la herramienta  dos veces] (…) No, el punto da por aquí [el punto E no coincide con la intersección de la circunferencia con el lado BC].
¿Y si armamos otro triángulo que se llama (…) escaleno? ¿Si hay uno que se llama escaleno?</td></tr>
</table>

60.	PR:	El que no tiene ningún lado igual.
61.	E2:	¡Ah! Se llama escaleno. ¡Por fin le hallamos el nombre! Bueno, acá [oprime la herramienta ] nos podemos guiar para hacer los triángulos.
62.	E1:	Mira, sí vez que tiene dos…
63.	E2:	Este es el escaleno [señala el triángulo BDE] y este es el isósceles [señala el triángulo DME, ver (11)] porque obligatoriamente nos dice acá que es isósceles [señala el triángulo DME].  (11)
64.	E1:	Sí. Escaleno [señala el triángulo BDE] e isósceles [señala el triángulo DME]. Armemos un triángulo isósceles.
65.	E2:	No, pero cómo armamos un triángulo isósceles.
		[…]
66.	E2: 10:30	Yo quiero mirar (…) Espérate [oprime la herramienta ]. (Borra la circunferencia construida en la imagen 10, ver 12).  (12) Yo creo que la mediatriz de acá [segmento DE] nos va a decir algo (...) ¡Ahs! Pero no tenemos dos puntos.
67.	E1:	Sí, ese es el problema y no sabemos sacarlos.
68.	E2:	No sé, como de aquí a acá (construye una mediatriz desde B hasta un punto cercano a la letra C, ver 13).

		 (13)
69.	E1:	Pero lo estamos calculando, no sé, Euclidea es muy extraño. [Mientras tanto, E2 oprime  cuatro veces para comparar la mediatriz hecha en la figura 13 y la mediatriz de la figura 11].
70.	E2:	Y algo así (construye una mediatriz del segmento con extremos en M y el punto de intersección entre la anterior mediatriz y el rayo BC, ver 14). ¿No?  (14) Acá ya tendríamos esta [oprime  varias veces para comparar la mediatriz de la figura 14 con la recta DE de la figura 11].
71.	E1:	Sí, ajá.
72.	E2:	Ah, no.
73.	E1:	Sí, ¿no?
74.	E2:	No, está más abajo [la recta DE respecto a la mediatriz de la figura 14]. Ok, no sirvió (borra las dos mediatrices construidas, ver 15). 
75.	E1:	Esta y esta para qué me sirven (construye una recta perpendicular al rayo BC que pase por M, ver 16). No sé (borra la recta perpendicular, ver 17).

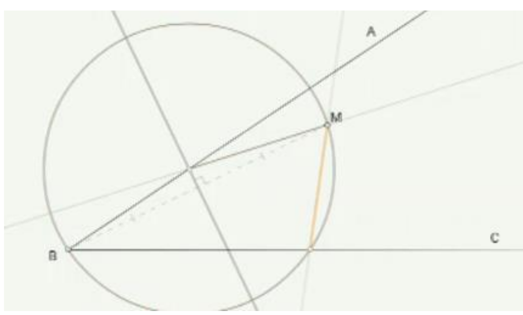
		 (16)  (17)
76.	E2:	Puede servir.
77.	E1:	Está esta y hacemos esta y esta (vuelve a construir la misma recta de la figura 16. Luego, construye una recta perpendicular al rayo BA que pase por M, ver 18).  (18)
78.		
79.	E2:	Ya formamos un triángulo escaleno (…) (…) ¡Ay!, pero ven. ¿Este no sería una parte de (…)? [Señala con el dedo el segmento determinado por el punto B y el punto de intersección entre el rayo BA y una de las rectas perpendiculares].
80.	E1:	No.
81.	E2:	Sí [oprime  varias veces para comparar las dos construcciones]. (…) (…) No.
82.	E1:	Yo esta la veo…
83.	E2:	Más hacia acá [la recta DE de la figura 11 está menos inclinada que las rectas perpendiculares de la figura 18]. Dejemos de guiarnos por eso [la construcción de ] porque a mí me confunde.
84.	E1:	Si ves. Yo te dije (…) (…) Ya nos equivocamos (borra las dos rectas perpendiculares, ver 19).

		 (19)
85.	E2:	Tenemos dos puntos [B y M], ¿qué hacemos con esos dos puntos?
86.	PR:	Buena pregunta.
87.	E1:	Ok.
88.	E2:	Ok.
89.	E1:	Tenemos dos puntos (…) ¿Y si le hallamos mediatriz?
90.	E2:	¿Mediatriz? Pero, no.
91.	E1:	¡Claro! (Construye una mediatriz del segmento BM, ver 20).  (20)
92.	PR:	¿Para qué trazaste esa mediatriz?
93.	E1:	Es que no sé si tenemos dos puntos y le sacamos mediatriz, puede que este [señala con el dedo el segmento BM] sea…
94.	E2:	Es cierto. Pero no, mentiras. No
95.	E1:	Espérate. No rompas todavía mis sueños (construye la recta que pasa por el punto M y el punto de intersección entre el rayo BA y la mediatriz, ver 21).  (21)
96.	E2:	Es cierto, quedó acá.
97.	E1:	[Oprime ] Sí, mira que sí.
98.	E2:	¡Ay, sí! Ya hallamos el primero [de los segmentos solicitados].

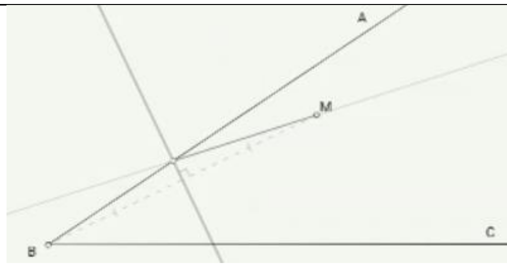
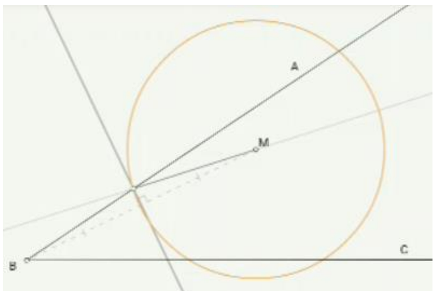
99.	E1:	Ya lo tenemos.
100.	PR:	Listo. ¿Y por qué sirve esa mediatriz?
101.	E2:	¿Pero sí sirve? Espera.
102.	E1:	Sí sirve. Si la profesora nos está preguntando por qué sirve. [E2 mueve una de los puntos con la herramienta arrastre para verificar que la construcción se mantiene].
103.	E2:	¡Ay! Sí sirve. Bueno, ya [deja de mover la construcción].
		[…]
104.	E2: 12:55	Bueno, ¿y por qué la mediatriz?
105.	PR:	¿Por qué la mediatriz?
106.	E1:	Ay, no sé. Si hay dos puntos se saca mediatriz.
107.	E2:	No, ya sé. La mediatriz pues, si hallamos la mediatriz de estos dos puntos [B y M], ya hallaríamos la mitad de (…) Dice que debe ser igual [los segmentos] del punto B al punto desconocido [D], del punto desconocido [D] al punto M y del punto M a este punto [señala donde debería estar el punto E]. Entonces ya hallaríamos lo igual del punto M al punto desconocido [señala el punto D] y (…) y pues como tenemos la mediatriz de acá [señala la mediatriz], este [señala el segmento BD] sería igual.
108.	PR:	Listo.
109.	E2:	Falta hallar el otro punto.
110.	E1:	Espérate que eso estoy intentando (construye un mediatriz del segmento DM. Luego, construye una recta que pasa por M y el punto de intersección entre la anterior mediatriz y el rayo BC, ver 22).  (22) No [Euclidea no valida la construcción].
111.	E2:	¿Qué es eso?
112.	E1:	Estaba perfecto (borra la mediatriz y recta construidas anteriormente, ver 23).  (23)

<table>
<tr><td>113.</td><td>PR:</td><td>¿Qué harían para sacar el otro punto?</td></tr>
<tr><td>114.</td><td>E2:</td><td>Bueno, ya casamos el escaleno [triángulo].</td></tr>
<tr><td>115.</td><td>E1:</td><td>¿Y si le sacamos (…)? Espérate, la mediatriz a estos dos (construye la mediatriz del segmento DM, ver 24).


(24)</td></tr>
<tr><td>116.</td><td>E2:</td><td>¿Para qué? (…) No, no. No más mediatrices, ya fue una (…) (Borra la mediatriz construida anteriormente, ver 25).


(25)</td></tr>
<tr><td>117.</td><td>E1:</td><td>No. ¿Y qué tal que sí? (…) ¡Ah!, ya sé. ¿Y si hacemos una circunferencia de acá? (Construye una circunferencia con centro en D y radio DM. Luego, traza una recta que pase por M y por el punto de intersección entre la circunferencia y el rayo BC, ver 26).


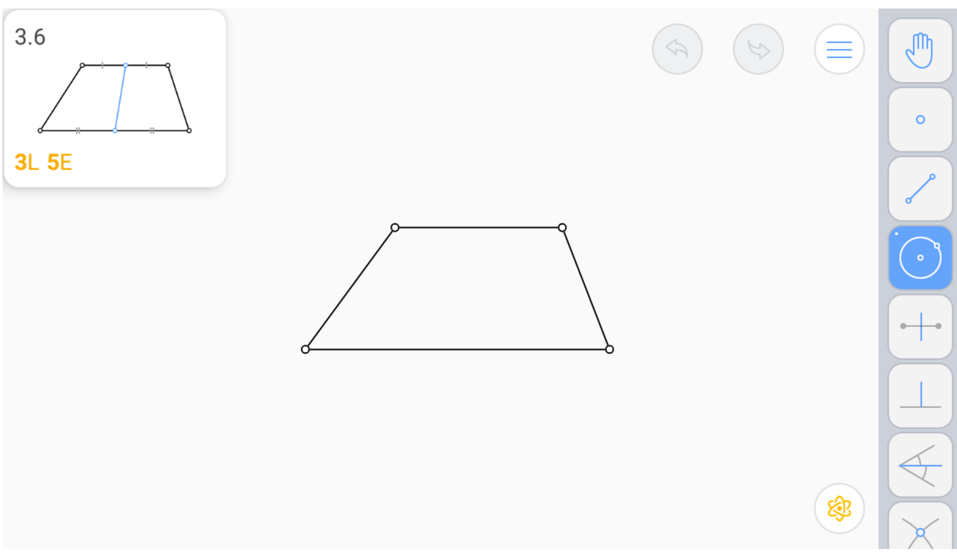
(26)</td></tr>
<tr><td>118.</td><td>E2:</td><td>No desde acá [señala el punto M].</td></tr>
<tr><td>119.</td><td>E1:</td><td>No sirve [Euclidea no validó la construcción realizada en la figura 26].</td></tr>
<tr><td>120.</td><td>E2:</td><td>No sirve. Ok (borra la circunferencia y rectas construidas anteriormente, ver 27). Ya hicimos el triángulo escaleno (…) Dijimos que había…</td></tr>
</table>

		 (27)
121.	E1:	¿Y si hacemos la circunferencia desde acá [punto M], como tú decías? (Construye una circunferencia con centro en el punto M y radio MD, ver 28)  (28)
122.	E2:	Ay mira, ahí [señala el punto de intersección entre la circunferencia y el rayo BC].
123.	E1:	Ojalá que sí sea (construye una recta que pase por M y el punto de intersección entre la circunferencia y el rayo BC, ver 29).  (29)
124.	E2:	¡Wow, que pilera! [Euclidea valida la construcción].
125.	PR:	¿Y por qué sirve la circunferencia?
126.	E1:	¿Por la intersección?
127.	E2:	Sí.
128.	E1:	Desde M hasta el punto D.
129.	E2:	Ah, ya sé por qué. Eh, bueno (…) (…) Ya dijimos porqué la mediatriz.
130.	PR:	Y ahora, por qué la circunferencia.
131.	E2:	Porque de aquí [punto M] al punto desconocido [punto D] se halla el radio por todos los lados y cruzamos el rayo [rayo BC] con la circunferencia…
132.	E1:	Se intersectan…

133.	E2:	Se intersectan y ya tenemos el tercer vértice, bueno el tercer punto.
134.	PR:	¿Y por qué?
135.	E1:	Por la intersección, porque el radio de una circunferencia va a ser igual sin importar que esté acá [señala con la mano una posición en el aire] o acá [señala con la mano otra posición en el aire], va a ser el mismo radio.
136.	E2:	Y como ya teníamos (…) Tomamos en cuenta para hacer la circunferencia el radio de acá [segmento MD], era (…) con la intersección ya teníamos el tercer radio.
137.	PR:	O sea, ¿los dos segmentos amarillos son radios y son iguales?
138.	E1 y E2:	Sí.
139.	PR:	Listo.

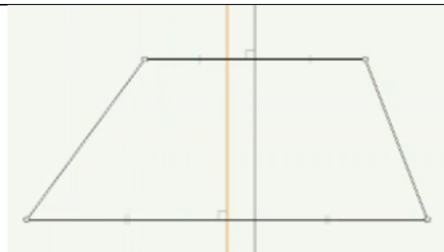
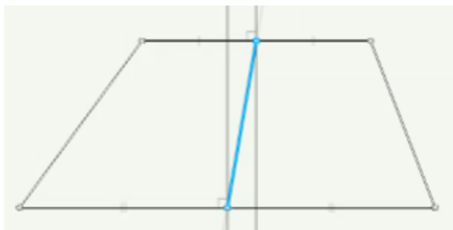
Tarea 16 – Gama 3.6

Construya una recta que pase por los puntos medios de las bases del trapecio.



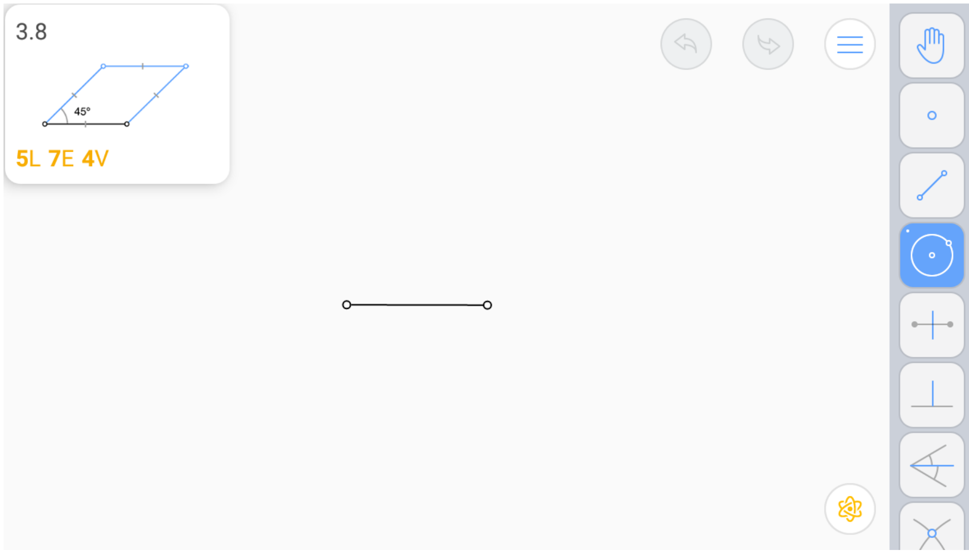
Las estudiantes luego de resolver la tarea 17 (3.4), pasan inmediatamente a desarrollar esta tarea. Primero leen el enunciado de la construcción que deben realizar e instantáneamente deciden usar la mediatriz como estrategia.

1.	E1: 15:41	Tengo una idea.
2.	E2:	Sí, mediatriz.
3.	E1:	Mediatriz de esta (construye la mediatriz de la base superior del trapecio), y mediatriz de esta (construye la mediatriz de la base inferior del trapecio, ver 1).

		 (1)
4.	PR:	¿Y ahora?
5.	E1:	Y si trazamos (construye la que pasa por los puntos medio de las bases del trapecio, ver 2).  (2)
6.	E2:	Ja, ja, ja, ja. ¿Cómo hiciste eso? Ya me perdí.
7.	PR:	Explícanos.
8.	E1:	Es que tiene que pasar (…) tiene que ser una recta que pase por los puntos medios de las bases. Las bases serán esta [señala la base superior del trapecio] y esta [señala la base inferior del trapecio]. Si tú le sacas punto medio a esta [señala la base superior del trapecio] ya te daba el primero [punto medio] y si le sacas el punto medio; o sea, la mediatriz a esta [señala la base inferior del trapecio], las unes.
9.	E2:	¡Ahhh!
10.	PR:	¿Y por qué utilizaste la mediatriz?
11.	E1:	Porque punto medio más una mediatriz.
12.	E2:	Pues, su punto medio y la mediatriz.
13.	E1:	Por eso.
14.	E2:	Bueno sí, pues yo (…) Explícale.
15.	E1:	No. Yo hago, tú explicas.
16.	E2:	Bueno, yo pensé en la mediatriz porque dice que construya una recta que pase por el medio de la base del trapecio, las bases son estas dos [señala las bases del trapecio], entonces hallando los puntos medios de las bases, pues obviamente hay que hallar la mediatriz y ya solo quedaba unir los puntos medios.
17.	PR:	Al revés.
18.	E2:	¿Cómo así?
19.	PR:	Al utilizar la mediatriz hallan el punto medio.
20.	E2:	Exacto.
21.	PR:	Ok.

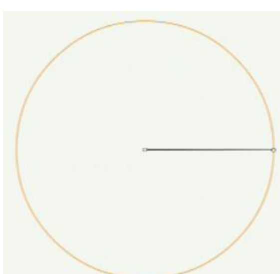
Tarea 17 – Gama 3.8

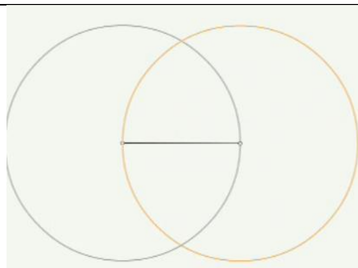
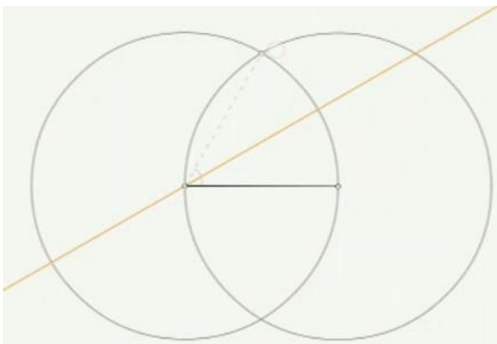
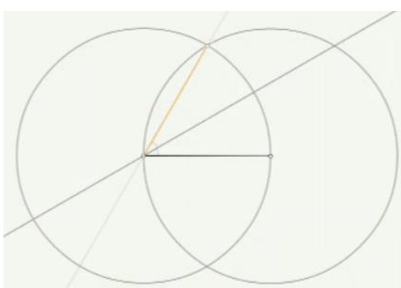
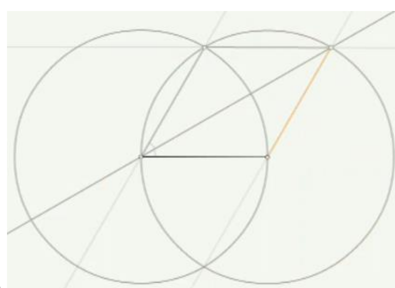
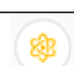
Construya un rombo con el lado dado y un ángulo de 45° en un vértice.

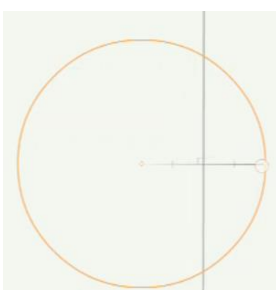


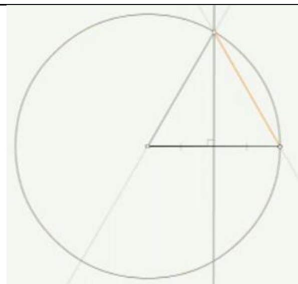
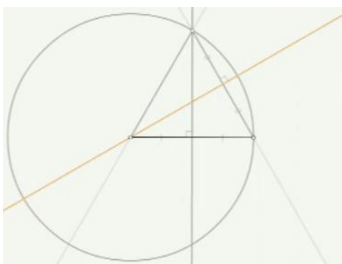
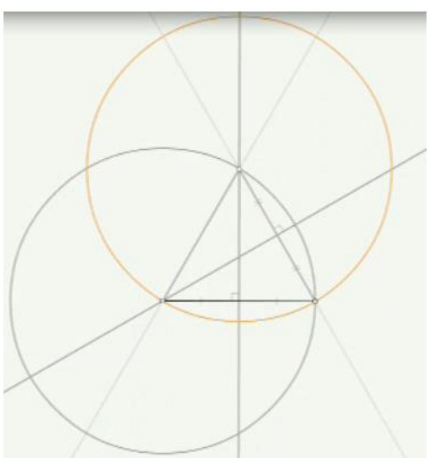
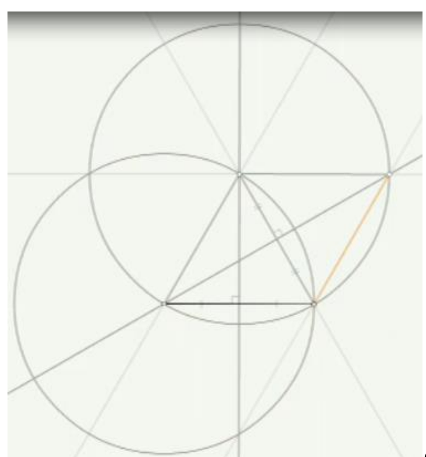
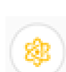
Las estudiantes al resolver la tarea 16 (3.6), pasan inmediatamente a resolver la última tarea (3.8). Primero leen en el enunciado de la tarea que deben realizar y luego, inician a buscar estrategias relacionadas con los ángulos del rombo.

1.	E2: 17:20	Un rombo (…) O sea, la suma de sus ángulo cuánto debe dar.
2.	PR:	360
3.	E2:	360. Ya tenemos uno que es 45 y este debe ser lo mismo [señala con el dedo el ángulo opuesto al ángulo de 45 grados. Observan la figura miniatura junto al enunciado de la tarea]. Entonces 45 y 45 dan 90. ¿Cuánto sería este? [Señala uno de los ángulos consecutivos al ángulo de 45].
4.	E1:	90 (…) pues lo que queda. (…) 180, pues 90.
5.	E2:	No.
6.	E1:	Claro que sí.
7.	E2:	Sí.
8.	E1:	Por eso (…) (…) ¿180 más 90? (…) (…) Claro que sí (…) (…) 180 más 90.
9.	E2:	¿180 más 90? (…) No, no, no sé (…) (,..) No, da doscientos y algo.
10.	E1:	¿180 más 90?
11.	E2:	¿180 más 90? Da 270.

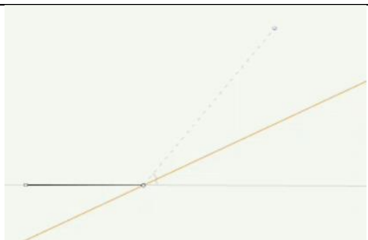
12.	E1:	Listo. Más otro 90.
13.	E2:	¡Ahhh! (…) No son 60, faltaría 60.
14.	E1:	¿Faltaría 60?
15.	E2:	Bueno estos dos miden 45 [los señala con el dedo].
16.	E1:	¿Cómo que 60?
17.	E2:	Espérate (abre la ventana donde está el enunciado de la tarea y la figura miniatura). Esto dos miden 45 [los señala con el dedo], 90. 10 para 100. 250. 100. ¿210?
18.	E1:	Bueno, llegamos a la conclusión que…
19.	E2:	270.
20.	E1:	Uich, pero es lo que había dicho ahorita, la misma cosa.
21.	E2:	Por eso.
22.	E1:	Ahora 270 divido en 2 y ya.
23.	E2:	Ajá.
24.	E1:	Ay Laura.
25.	E2:	135.
26.	PR:	¿Qué piensan?
27.	E2:	Bueno, yo pienso que estas dos son paralelas, ¿así se llaman? (…) Estas dos son paralelas y estas dos son paralelas [señala con el dedo cada pareja de lados paralelos del rombo].
28.	E1:	¿Y de ahí? (…) Espérate que yo tengo una [idea] (construye una bisectriz tal que el lado dado sea uno de los lados del ángulo, pero la borra [reconoce que falta un punto para construir la bisectriz]). Y si hiciéramos (…) ¿Te acuerdas que en las primera usamos una circunferencia? (Construye una circunferencia con centro en el vértice del ángulo de 45 y radio igual al segmento dado, ver 1).  (1) Y si hacemos punto aquí [punto que determina la circunferencia], punto acá [centro de la circunferencia] y donde se interseca, que es cualquier punto [punto sobre la circunferencia] (trata de construir una bisectriz dando clic en los puntos mencionados pero reconoce que el tercer punto podría ser cualquiera y la borra).
29.	E2:	No sirvió (…) (…) Ah, pues (…) No, al revés (E1 construye una circunferencia con centro en el extremo derecho del segmento y radio este último, ver 2).

		 Y ahora el ángulo, lo que estás haciendo, no sé, tal vez es igual.
30.	E1:	No porque (construye la bisectriz del ángulo de 60 que se forma con la intersección de las dos circunferencias, ver 3).  (3) ¿Miramos el resultado final?
31.	E2:	Eso es un ángulo de 30 grados, ay ya me acordé. Y este es el de 60. (E1 construye la recta que determina el ángulo de 60 grados, ver 4. Luego, traza dos rectas que pasan por el punto de intersección entre la bisectriz y la segunda circunferencia, ver 5).  (4)  (5)
32.	E1:	Ya sé que está mal.
33.	E2:	Uich, ya hicimos el rombo.
34.	E1:	Que Euclidea es mala es otra cosa.
35.	PR:	¿Y por qué ese rombo no cumple con las condiciones?
36.	E2:	Porque no tiene los ángulos (…) ¿O este si tiene los ángulos?
37.	E1:	¿Miramos los ángulos?
38.	E2:	Bueno [E1 oprime la herramienta  varias veces para corroborar si el rombo construido concuerda con la solución].

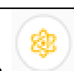
39.	E1:	Nooo, ni cerquita.
40.	E2:	Hagámoslo otra vez.
41.	E1:	Espérate.
42.	E2:	Ay, ya lo tengo. Espérate (…) (…) Vi algo, vi algo (borra todos los elementos geométricos construidos, ver 6). (6) Yo creo que este punto es el punto medio [señala el extremo de la izquierda del segmento dado]. No sé.
43.	E1:	Yo estaba mirando eso, pero creo que no. (Construye la mediatriz del segmento dado, ver 7). (7) Esto se me ocurrió hace ratico, pero no, no funciona.
44.	E2:	No. Igual hasta dónde [qué punto de la mediatriz sería otro vértice del rombo].
45.	E1:	Jum. ¿Hasta dónde? Pues, usamos circunferencia (construye una circunferencia con centro en el vértice del ángulo de 45 y radio igual al segmento dado, ver 8).  (8)
46.	E2:	No, o sí. No.
47.	E1:	Realmente, sí.
48.	E2:	Miremos (E1 construye dos rectas que pasen por los extremos del segmento y el punto de intersección entre la mediatriz y la circunferencia, ver 9).

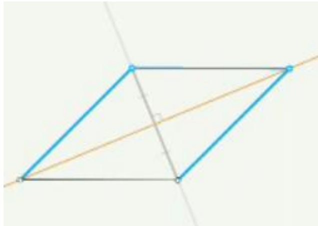
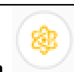
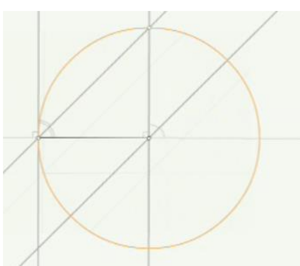
		 (9)
49.	E1:	Y de ahí trazamos otro [triángulo]…
50.	E2:	¿Dónde otro?
51.	E1:	Pero con este [señala el segmento dado]
52.	E2:	¿Cómo hiciste…? Bueno, hazlo (E1 construye una mediatriz del segmento determinado por el extremo derecho del segmento dado y el punto de intersección entre la circunferencia y la primera mediatriz, ver 10).  (10) No, pero eso no. No creo.
53.	E1:	Yo sé que no, pero mientras tú piensas, yo juego (construye una circunferencia con centro en el punto de intersección entre la primera circunferencia y la primera mediatriz con radio igual al segmento dado, ver 11. Luego traza las rectas que pasan por el punto de intersección entre la segunda circunferencia y la segunda mediatriz, ver 12).  (11)  (12) [Oprime la herramienta  varias veces para corroborar la construcción con el rombo solución]. No, ni cerquita.

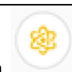
54.	E2:	Es que está [el rombo solución] más inclinado. (E1 borra todos los objetos geométricos construidos, ver 13). (13)
		[…]
55.	E1: 21:46	Una pregunta. ¿Acá no se forma un ángulo de 30? [Señala con el dedo el ángulo que forma par lineal con el ángulo que mide 135 grados].
56.	PR:	No sé.
57.	E1:	Un ejemplo, si aquí hubiera otra recta [que contiene al segmento dado].
58.	E2:	Este ángulo es de 135, según lo que dijimos.
59.	E1:	Este de acá, el de por abajo (…) No el de arriba, yo sé el de arriba, ¿pero el de abajo?
60.	E2:	Ay, no me acuerdo.
61.	PR:	El que queda dentro del rombo [ángulo], ¿cuánto debe medir?
62.	E1:	270 divido en 2, 135.
63.	E2.	¿El de adentro?
64.	PR:	Sí.
65.	E2:	Debe medir 90 grados.
66.	E1:	No, no, no. 135 este, 135 este, 45 y 45 [señala los ángulos internos del rombo].
67.	PR:	Listo. ¿Si este mide 135, cuánto debería medir el que queda al ladito? [Su ángulo par lineal].
68.	E1:	No sé. ¡Ah! Lo que le falta para…
69.	E2:	No entendí.
70.	E1:	¿180 menos 135?
71.	E2:	180 menos 135 da 45
72.	E1:	¡Ah. La tengo, la tengo!
73.	E2:	Yo no.
74.	E1:	Ya te explico. (Construye la recta que contiene al segmento dado, ver 14). (14) Ay, Dios mío, ojalá que sí funcione. (Construye una bisectriz tal que parezca forman una ángulo de 45 grados, ver 15) Ay, quedé en las mismas [reconoce que le hace falta un punto para construir la bisectriz].

		 (15)
75.	PR:	¿Qué quieres hacer?
76.	E1:	Quiero sacar el lado de acá [recta construida] y ya sacando (…) Quiero que acá mida 45
77.	E2:	¡Ah, ok! Ya les entendí, por fuera.
78.	PR:	¿Y cómo podrías construir un ángulo de 45?
79.	E2:	A ver, miremos (borra la bisectriz construida, ver 16). Ya construimos un ángulo de 60 y de 30 grados (…) (…) A ver, un ángulo de 45 grados. Ya sabemos que es la mitad de un ángulo de un ángulo recto. Hagamos un ángulo recto. (Construye una recta perpendicular a la recta construida tal que pase por el extremo derecho del segmento dado, ver 17). (16) (17) Y un ángulo recto (construye la bisectriz del ángulo recto, ver 18).  (18) Listo.
80.	E1:	Ya tenemos 45. Ok.
81.	PR:	¿El [ángulo] de abajo?
82.	E1:	Sí.
83.	PR:	Mide 45. Listo, ¿y ahora?
84.	E2:	Pues ya tenemos el primer ángulo (…) (…) Pues hagamos lo mismo acá, ¿no? [Señala con el dedo el otro extremo del segmento].
85.	E1:	No, pero (…) Ah, sí. Tocaría hacerlo por dentro [del rombo], dale como lo hiciste.
86.	E2:	¿Qué?

87.	E1:	Lo mismo pero por dentro [del rombo].
88.	E2:	Por dentro (…) ¿Qué?
89.	E1:	Dios mío, ¿cómo te explico?
90.	E2:	O sea, hago lo mismo que hice acá [proceso anterior].
91.	E1:	Si lo mismo.
92.	E2:	Pero, ¿lo mismo?
93.	E1:	No, pero que quede para dentro [el ángulo de 45 grados quede en el interior del rombo].
94.	E2:	Por eso lo mismo. Bueno.
95.	E1:	Haz la magia.
96.	E2:	¿Cómo hice esto acá? [Cómo trazó la recta perpendicular].
97.	E1:	Espérate, ¿sí está bien? [Oprime la herramienta varias veces para verificar que el lado construido con la bisectriz coincida con el rombo solución].
98.	E2:	Sí, sí está bien. ¡Ah! Ya me acorde (construye una recta perpendicular al segmento dado que pase por el extremo de la izquierda de este. Luego construye la bisectriz del ángulo recto, ver 19).  (19) Listo. ¿Pero sí? [E1 o prime la herramienta varias veces para verificar que el lado construido anteriormente con la bisectriz coincida con el rombo solución].
99.	E1:	Sí.
100.	E2:	¿Y ahora?
101.	PR:	¿Qué les hace falta?
102.	E2:	Los ángulos de acá [señala los ángulos superiores del rombo].
103.	E1:	Las dos rectas.
104.	E2:	Las uniones [los vértices del rombo] (…) (…) Solo falta una de hecho.
105.	E1:	Sí.
106.	E2:	Falta la de acá [vértice sobre bisectriz de la parte derecha de la pantalla].
107.	E1:	Espérate. Yo estoy pensando si sacando mediatriz (construye la mediatriz de un segmento contenido en la recta perpendicular de la parte derecha de la pantalla, ver 20).

		 (20)  (21) No (borra la mediatriz construida, ver 21). Ah, ya. Esta que se intersecte con esta (construye una recta perpendicular a la bisectriz de la parte izquierda de la pantalla y que pase por el extremo derecho del segmento dado, ver 22).  (22)
108.	PR:	¿Y ahora?
109.	E1:	Ahora, es que si lo ves así [oprime la herramienta ] y trazas (construye una de las diagonales del rombo, ver 23), son dos…  (23)
110.	E2:	Esos no son triángulos isósceles (…) Es un escaleno.
111.	PR:	¿Cuál es un triángulo escaleno?
112.	E2:	Ambos.
113.	PR:	¿Y por qué son escalenos?
114.	E2:	Porque no tienen ningún lado igual.
115.	E1:	No sé cómo asegurarlo. Espérate (construye la mediatriz de la diagonal construida, ver 24).

		 (24) Sí son isósceles.
116.	E2:	¿Cómo hallaremos…? [Oprime la herramienta  y vuelve a la construcción real].
117.	E1:	Uich, es que la de nosotras está bien ordenadita [la construcción].
		[…]
118.	E2: 26:02	Si hallamos la mediatriz ya hallaríamos la intersección donde cruzaría (…) (…) Ah no, faltaría esta [señala con el dedo el vértice superior de la derecha del rombo].
119.	E1:	Espérate…
120.	E2:	Espérate porque borra esta [la recta perpendicular construida en (22)] porque esta no hace falta (borra la mediatriz, ver 25).  (25)
121.	E1:	Creo que ya (construye una circunferencia con centro en el extremo de la derecha del segmento y su radio igual a este, ver 26).  (26)
122.	E2:	Bueno, pues dale.
123.	E1:	Ese puede ser un punto [la intersección entre la circunferencia y la bisectriz de la parte derecha de la pantalla]. Ese es el punto final, y ahora hay que hallar el de acá [señala donde debería quedar el cuarto vértice].
124.	E2:	Pues lo mismo. Pero no, no creo.
125.	E1:	Aich, tienes que creer un poquito más.
126.	PR:	¿Para qué hiciste esa circunferencia?

127.	E1:	Para la intersección, pensando (…) (…) Ese ya lo tenemos [el tercer vértice encontrado]
128.	E2:	¿Segura?
129.	E1:	Sí, yo te lo aseguro [oprime la herramienta  varias veces para corroborar la posición del tercer vértice].
130.	E2:	Ay sí, vea pues.
131.	PR:	¿Y por qué sirve la circunferencia?
132.	E2:	¿Por qué sirve la circunferencia ahí, señorita? (…) Ay, ya lo tengo. Ah no, mentiras, ya no la tengo.
133.	E1:	Sí la tienes.
134.	E2:	Ah sí, de pronto sí la tengo. (Construye la mediatriz de la diagonal cuyos extremos son los dos vértices opuestos que ya se tienen, ver 27).  (27)
135.	E1:	Eso. Ya lo tenemos, dale, dale. (E2 construye una recta que pasa por el tercer vértice del rombo y el punto de intersección entre la mediatriz y la bisectriz de la parte izquierda de la pantalla, ver 28).  (28) ¡Eso! Ahora, cómo lo hicimos.
136.	E2:	Cómo lo hicimos.
137.	E1:	Por qué esa pregunta.
138.	E2:	Qué hicimos primero, más bien. Qué hicimos primero. A ver (…) el ángulo de 45 grados. Bueno, esos ya los tenemos. Pues, lo más fácil que podíamos hacer primero era hallar estos dos ángulos….
139.	E1:	De 45 grados porque ya habíamos hecho una operación [algorítmica].

140.	PR:	Espérate. ¿Por qué sabes que este ángulo de aquí abajo mide 45? [Señala el ángulo par lineal con el ángulo de 135].
141.	E1:	Porque este de acá mide 135…
142.	E2:	No. Y de hecho es lógico porque si aquí adentro mide 45 grados [el ángulo] y se supone que este es perpendicular a este porque dicen que son iguales, en el dibujo dicen que son iguales, obligatoriamente este también debe tener un ángulo de 45 grados por fuera.
143.	E1:	Estoy perdida.
144.	E2:	¿Sí? O sea, estos dos ángulos ya son iguales [ángulos opuestos del rombo] por lo que yo entiendo.
145.	E1:	Entonces, este debe medir igual que acá y acá debe medir igual que acá [los ángulos opuestos del rombo].
146.	E2:	Entonces si este mide 45 grados [señala los ángulos internos del rombo] entonces este debe medir 45 grados [señala el ángulo externo al rombo]
147.	PR:	Tacho [Alto]. Ustedes se refieren primero a los dos ángulos opuestos, a los que queden de frente en el rombo, que son iguales.
148.	E2:	Sí.
149.	PR:	Y que estos dos [ángulos opuestos] también son iguales.
150.	E2:	Ajá.
151.	PR:	Ok. Dado eso, qué pasa.
152.	E1:	Que por lógica, si acá hay 135 [en el ángulo] le falta 45 para completar 180.
153.	PR:	¿Acá abajo? [Ángulo exterior al rombo].
154.	E1:	Y acá si tiene 45 [ángulo interno del rombo] le falta 135 [el ángulo par lineal al anterior] para completar 180.
155.	PR:	Y por eso decidieron hacer un ángulo de 45 grados.
156.	E2:	Sí.
157.	PR:	Listo. ¿Y aquí por qué también de 45 grados? [Ángulo interno del rombo].
158.	E1:	Porque ya nos daban acá [en el enunciado de la tarea] que el ángulo debía medir 45.
159.	PR:	Ya les daban la medida.
160.	E1:	Sí.
161.	PR:	Después, ¿por qué la circunferencia?
162.	E1:	Por la intersección (…) Es que yo vuelvo con el radio, no sé.
163.	PR:	¿Qué pasa con el radio?
164.	E1:	Es que al ya tener este [segmento dado y radio de la circunferencia] yo me fui y traje el punto hasta acá.
165.	E2:	Una pregunta, esto [las marquillas de congruencia sobre los lados del rombo] dice que todos los lados [del rombo] son iguales. Entonces sí, [E1] tiene razón. Cuando medimos el lado [dado] de acá como

		todos son iguales la intersección, al menos de esta, [con la bisectriz] tenía que ser exacta.
166.	E1:	Porque son radios.
167.	PR:	Listo. Y al final hicieron una mediatriz, ¿por qué?
168.	E1:	Esa la hiciste (…) Claro, la mediatriz al tomar el punto medio si cruzaba por acá [el extremo derecho del segmento dado] ya nos daba el otro [vértice.]
169.	E2:	Como ya teníamos los tres puntos [vértices del rombo] entonces faltaba hallarle la mediatriz de su diagonal. O sea; es decir, lo que yo hice fue hallar la (…) nos hacía falta hallar la diagonal de estos dos [vértices de los ángulos de 135], entonces halle la mediatriz de la otra diagonal para hallar esta diagonal (…) (…) O sea, al hallar esta mediatriz estoy hallando tanto la diagonal de esta [cuyos vértices son los ángulos de 45] como de esta [cuyos vértices son los ángulos de 135] porque sería la mitad de esta [las diagonales se intersecan en el punto medio].
170.	E1:	Claro, yo entiendo.
171.	PR:	¿Quién es este y quién es este?
172.	E2:	Esta es una diagonal [cuyos extremos son los ángulos de 135]. Al hallar la mediatriz de esta diagonal obligatoriamente estoy hallando la diagonal que falta.
173.	PR:	¿Y por qué sabes que mediatriz de la primera diagonal te arroja el punto [cuarto vértice] que hacía falta?
174.	E2:	Porque en un rombo siempre el cruce de sus diagonales deben formar un ángulo de 90 grados.
175.	E1:	Y al tener un ángulo de 90 …
176.	E2:	Ya va a botar el otro punto [otro vértice].
177.	PR:	Listo. Terminamos

Las estudiantes dan por culminada las sesiones de grabación.